SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG TRỊ

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12
VÀ CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI QUỐC GIA
Khóa ngày 05 tháng 11 năm 2021
MÔN THI: TOÁN (Vòng 1)
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(5,0 điểm)* Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = \dfrac{7}{2} \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} = \dfrac{y+1}{\sqrt{y^2+2y+2}}. \end{cases}$$

Câu 2. *(5,0 điểm)* Cho tam giác ABC không cân nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại P, Q và cắt đường thẳng BC tại N.

a) Chứng minh rằng $NB.DC = NC.DB$.

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh bốn điểm D, M, P, Q cùng nằm trên một đường tròn và tâm của đường tròn này là trung điểm của đoạn thẳng nối I với điểm chính giữa cung BC chứa A của đường tròn (O).

Câu 3. *(5,0 điểm)* Với mỗi n nguyên dương, kí hiệu s_n là số tập con của tập $\{1,2,...,n\}$ mà không chứa hai số tự nhiên nào cách nhau 2 đơn vị.

a) Tính các giá trị s_1, s_2, s_3 và s_4.

b) Chứng minh rằng $s_n + s_{n+2} = F_{n+5}, \forall n \geq 1$.

(F_n là số hạng thứ n của dãy số Fibonacci: $F_1 = F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \; \forall n \geq 1$.)

Câu 4. *(5,0 điểm)* Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ thỏa mãn

$$f(x)f(y+1) = f(xf(y)) + f(x), \; \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

--------- **HẾT** ---------

(Thí sinh không được sử dụng tài liệu)

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẢNG TRỊ **ĐỀ THI CHÍNH THỨC**	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 VÀ CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI QUỐC GIA Khóa ngày 05 tháng 11 năm 2021 MÔN THI: TOÁN (Vòng 2) *Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề*

Câu 1. *(5,0 điểm)* Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $x_1 = c$ và $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1, \forall n \geq 1.$

a) Với $c = \dfrac{1}{2}$, chứng minh dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và hãy tìm giới hạn đó.

b) Với $c > 1$, chứng minh dãy số (u_n) được xác định bởi

$$u_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}, \forall n \geq 1$$

có giới hạn hữu hạn.

Câu 2. *(5,0 điểm)* Với mỗi n nguyên dương, xét phương trình nghiệm nguyên $3x^2 - y^2 = 23^n$. Chứng minh rằng:

a) Nếu n là số chẵn thì phương trình trên vô nghiệm.

b) Nếu n là số lẻ thì phương trình trên có nghiệm.

Câu 3. *(5,0 điểm)* Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các điểm D, E thuộc đường thẳng BC sao cho $AD \perp OB$ và $AE \perp OC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC, AB; G là giao điểm của EM và DN; S là giao điểm của OG và BC. Chứng minh rằng:

a) Tam giác ACE đồng dạng với tam giác BCA.

b) Đường thẳng SA là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Câu 4. *(5,0 điểm)* Trong một giải đấu bóng bàn nam có n $(n \geq 3)$ vận động viên tham gia, hai vận động viên bất kỳ thi đấu với nhau đúng 1 trận (không có kết quả hòa). Kết thúc giải đấu, mỗi vận động viên sẽ viết ra tên những đối thủ thua mình và tên những vận động viên thua một trong các đối thủ đó. Một vận động viên được gọi là *vô địch tương đối* nếu anh ta viết được tên của tất cả $n-1$ vận động viên còn lại. Gọi S_n là số vận động viên vô địch tương đối nhiều nhất có thể.

a) Tính S_3, S_4.

b) Chứng minh rằng $S_n = n$, với mọi $n \geq 5$.

------------------- **HẾT** ------------------

(Thí sinh không được sử dụng tài liệu)