Vấn đề 14 TÍCH PHÂN

A. ĐỊNH NGHĨA – TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

a) Định nghĩa: $\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)}$ với $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a;b]$.

b) Tính chất:

$\int_a^a f(x)dx = 0$	$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (k là hằng số)	$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$	$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$

Nếu $f(x)\geq 0,\ \forall x\in[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Nếu $f(x)\geq g(x),\ \forall x\in[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Đặc biệt:

□ Nếu hàm $y=f(x)$ là **hàm số lẻ** trên $[-a;a]$ thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

□ Nếu hàm $y=f(x)$ là **hàm số chẵn** trên $[-a;a]$ thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

Câu 1. Nếu $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = -2$ và $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x = 1$ thì $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -3. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 2. Nếu $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 4$ thì $\int_0^1 2f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 16. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 8.

Câu 3. Cho $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 5$ khi đó $\int_0^1 [f(x)-2g(x)]\mathrm{d}x$ bằng

A. -3. **B.** 12. **C.** -8. **D.** 1.

Câu 4. Biết $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x = 6$, khi đó $\int_1^2 [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** -8. **C.** 8. **D.** -4.

Câu 5. Biết tích phân $\int_0^1 f(x)dx = 3$ và $\int_0^1 g(x)dx = -4$. Khi đó $\int_0^1 [f(x)+g(x)]dx$ bằng

A. -7. **B.** 7. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;2]$, $f(1)=1$ và $f(2)=2$. Tính $I=\int_1^2 f'(x)dx$.

A. $I=1$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=3$. **D.** $I=\frac{7}{2}$.

Câu 7. Cho $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x = -2$. Tích phân $\int_0^5 \left[4f(x)-3x^2\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. -133. **B.** -120. **C.** -130. **D.** -140.

Câu 8. Cho $\int_0^1 f(x)dx = 3$, $\int_0^1 g(x)dx = -2$. Tính giá trị của biểu thức $I = \int_0^1 \left[2f(x)-3g(x)\right]dx$

A. 12. **B.** 9. **C.** 6. **D.** $y=-6$.

Câu 9. Biết rằng $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$, tính $I = \int_0^2 (2f(x)+1)\mathrm{d}x$.

A. $I=3$. **B.** $I=1$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\frac{3}{2}$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 \left(f(x)+3x^2\right)\mathrm{d}x = 10$. Tính $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. -18. **B.** -2. **C.** 18. **D.** 2.

Câu 11. Cho $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x = -1$. Tích phân $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -3. **B.** 3. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 12. Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x)dx = -1$, khi đó $\int_{-1}^2 \left[x+2f(x)+3g(x)\right]dx$ bằng

A. $\frac{5}{2}$ **B.** $\frac{7}{2}$ **C.** $\frac{17}{2}$ **D.** $\frac{11}{2}$

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x = 7$, $\int_3^{10} f(x)\mathrm{d}x = 3$, $\int_3^6 f(x)\mathrm{d}x = 1$.

Tính giá trị của $\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x$.

A. 4. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 8.

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = \cos(\pi \ln x)$. Tính tích phân $I = \int_1^e f'(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-2$. **B.** $I=2$. **C.** $I=2\pi$. **D.** $I=-2\pi$.

Câu 15. Cho $\int_1^5 h(x)dx = 4$ và $\int_1^7 h(x)dx = 10$, khi đó $\int_5^7 h(x)dx$ bằng

A. 7. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 16. Cho hai tích phân $\int_{-2}^5 f(x)\mathrm{d}x = 8$ và $\int_{-2}^5 g(x)\mathrm{d}x = -3$. Tính $I = \int_{-2}^5 \left[f(x)-4g(x)-1\right]\mathrm{d}x$

A. $I=13$. **B.** $I=27$. **C.** $I=-11$. **D.** $I=3$.

Câu 17. Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $[-2;5]$ và $\int_{-2}^5 f(x)\mathrm{d}x = 8, \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = -3$. Tính

$P = \int_{-2}^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_3^5 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $P=5$. **B.** $P=-11$. **C.** $P=11$. **D.** $P=-5$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên đoạn $[-1;2]$, biết tích phân $\int_{-1}^{2} f'(x)dx = -9$ và $f(-1)=8$. Tính $f(2)$.

A. $f(2)=-1$. **B.** $f(2)=1$. **C.** $f(2)=3$. **D.** $f(2)=-16$.

Câu 19. Cho $\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 1$, $\int_{-2}^{4} f(t)\mathrm{d}t = -4$. Tính $I = \int_{2}^{4} f(y)\mathrm{d}y$.

A. $I=5$. **B.** $I=3$. **C.** $I=-3$. **D.** $I=-5$.

Câu 20. Cho $\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_{-1}^{2} g(x)\mathrm{d}x = -1$. Tính $I = \int_{-1}^{2}\left[x+2f(x)-3g(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{11}{2}$ **B.** $I=\frac{17}{2}$ **C.** $I=\frac{5}{2}$ **D.** $I=\frac{7}{2}$

Câu 21. Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên $[1;3]$ và thỏa mãn $\int_{1}^{3}\left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x = 10$ $\int_{1}^{3}\left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x = 6$. Tính $I = \int_{1}^{3}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=7$. **B.** $I=6$. **C.** $I=8$. **D.** $I=9$.

B. TÍCH PHÂN CƠ BẢN(THÔNG QUA BẢNG CÔNG THỨC NGUYÊN HÀM)

Bảng nguyên hàm của một số hàm thường gặp (với C là hằng số tùy ý)

① $\int 0\mathrm{d}x = C.$	$\longrightarrow \int k\mathrm{d}x = kx + C.$
② $\int x^n\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$	$\longrightarrow \int (ax+b)^n\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C.$
③ $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C.$	$\longrightarrow \int \frac{1}{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C.$
④ $\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C.$	$\longrightarrow \int \frac{1}{(ax+b)^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{ax+b} + C.$
⑤ $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C.$	$\longrightarrow \int \sin(ax+b)\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C.$
⑥ $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C.$	$\longrightarrow \int \cos(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C.$
⑦ $\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C.$	$\longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C.$
⑧ $\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C.$	$\longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C.$
⑨ $\int e^x\mathrm{d}x = e^x + C.$	$\longrightarrow \int e^{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C.$
⑩ $\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C.$	$\longrightarrow \int a^{\alpha x+\beta}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\frac{a^{\alpha x+\beta}}{\ln a} + C.$

♦ ***Nhận xét***. *Khi thay x bằng $(ax+b)$ thì khi lấy nguyên hàm nhân kết quả thêm $\frac{1}{a}$.*

Một số nguyên tắc tính cơ bản

- *Tích của đa thức hoặc lũy thừa $\xrightarrow{PP}$ khai triển.*
- *Tích các hàm mũ $\xrightarrow{PP}$ khai triển theo công thức mũ.*
- *Bậc chẵn của sin và cosin $\Rightarrow$ Hạ bậc:* $\sin^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2a$, $\cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2a.$

- *Chứa tích các căn thức của* $x \xrightarrow{PP}$ *chuyển về lũy thừa.*

MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 22. $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3}$ bằng

A. $2\ln\frac{7}{5}$. **B.** $\frac{1}{2}\ln 35$. **C.** $\ln\frac{7}{5}$. **D.** $\frac{1}{2}\ln\frac{7}{5}$.

Câu 23. Tích phân $\int_0^2 \frac{dx}{x+3}$ bằng

A. $\frac{16}{225}$ **B.** $\log\frac{5}{3}$ **C.** $\ln\frac{5}{3}$ **D.** $\frac{2}{15}$

Câu 24. Tính tích phân $I=\int_1^5 \frac{dx}{1-2x}$

A. $I=-\ln 9$. **B.** $I=\ln 9$. **C.** $I=-\ln 3$. **D.** $I=\ln 3$.

Câu 25. Tính tích phân $I=\int_1^2 \frac{x-1}{x}dx$.

A. $I=1+\ln 2$. **B.** $I=\frac{7}{4}$. **C.** $I=2\ln 2$. **D.** $I=1-\ln 2$.

Câu 26. Biết rằng tích phân $\int_0^1 (2x+e^x)dx = a+b.e$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Khi đó, tính $a+b$ bằng

A. -15. **B.** -1. **C.** 20. **D.** 1.

Câu 27. Giá trị của tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x dx$ bằng

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 28. Cho $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx = a\ln 2 + b\ln 3$ với a,b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=-2$ **B.** $a+2b=0$ **C.** $a+b=2$ **D.** $a-2b=0$

Câu 29. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = 5$. Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x)+2\sin x]dx$.

A. $I=7$ **B.** $I=5+\frac{\pi}{2}$ **C.** $I=3$ **D.** $I=5+\pi$.

Câu 30. $\int_1^2 e^{3x-1}dx$ bằng:

A. $\frac{1}{3}(e^5-e^2)$. **B.** $\frac{1}{3}e^5-e^2$. **C.** e^5-e^2. **D.** $\frac{1}{3}(e^5+e^2)$.

Câu 31. Cho $\int_0^m (3x^2-2x+1)dx = 6$. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1;2)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(-3;1)$.

Câu 32. Giả sử $\int_1^2 \frac{dx}{x+3} = \ln\frac{a}{b}$, với a,b là các số tự nhiên có ước chung lớn nhất bằng 1. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a-b>2$. **B.** $a^2-b^2=41$. **C.** $a+2b=14$. **D.** $3a-b<12$.

Câu 33. Cho số thực a và hàm số $f(x)=\begin{cases}2x & \text{khi } x\le 0\\ a(x-x^2) & \text{khi } x>0\end{cases}$. Tính $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$.

A. $\frac{a}{6}-1$. **B.** $\frac{2a}{3}+1$. **C.** $\frac{a}{6}+1$. **D.** $\frac{2a}{3}-1$.

Câu 34. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\ln 2}\left(e^{4x}+1\right)dx.$.

A. $I=\frac{15}{4}+\ln 2$. **B.** $I=4+\ln 2$. **C.** $I=\frac{17}{4}+\ln 2$. **D.** $I=\frac{15}{2}+\ln 2$.

MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\sin^2 x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi^2+15\pi}{16}$. **B.** $\frac{\pi^2+16\pi-16}{16}$. **C.** $\frac{\pi^2+16\pi-4}{16}$. **D.** $\frac{\pi^2-4}{16}$.

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$.Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\cos^2 x+3,\ \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{\pi^2+2}{8}$. **B.** $\frac{\pi^2+8\pi+8}{8}$. **C.** $\frac{\pi^2+8\pi+2}{8}$. **D.** $\frac{\pi^2+6\pi+8}{8}$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\sin^2 x+3,\ \forall x\in R$, khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi^2-2}{8}$. **B.** $\frac{\pi^2+8\pi-8}{8}$. **C.** $\frac{\pi^2+8\pi-2}{8}$. **D.** $\frac{3\pi^2+2\pi-3}{8}$.

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\cos^2 x+1,\forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi^2+4}{16}$. **B.** $\frac{\pi^2+14\pi}{16}$. **C.** $\frac{\pi^2+16\pi+4}{16}$. **D.** $\frac{\pi^2+16\pi+16}{16}$.

C. TÍCH PHÂN HÀM SỐ HỮU TỶ

1. Công thức thường áp dụng

- $\int \frac{1}{ax+b}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\ln\left|ax+b\right|+C.$ • $\int \frac{1}{(ax+b)^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{ax+b}+C.$
- $\ln a+\ln b=\ln(ab).$ • $\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}\cdot$
- $\ln a^n=n\ln a.$ • $\ln 1=0.$

2. Phương pháp tính nguyên hàm, tích phân của hàm số hữu tỷ $I=\int\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x.$

- *Nếu bậc của tử số $P(x)\ge$ bậc của mẫu số $Q(x)$ $\xrightarrow{PP}$ Chia đa thức.*
- *Nếu bậc của tử số $P(x)<$ bậc của mẫu số $Q(x)$ $\xrightarrow{PP}$ phân tích mẫu $Q(x)$ thành tích số, rồi sử dụng phương pháp che để đưa về công thức nguyên hàm số 01.*
- *Nếu mẫu không phân tích được thành tích số $\xrightarrow{PP}$ thêm bớt để đổi biến hoặc lượng giác hóa bằng cách đặt $X=a\tan t$, nếu mẫu đưa được về dạng X^2+a^2.*

Câu 39. Biết $I=\int\limits_3^4\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$, với a,b,c là các số nguyên. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=6$. **B.** $S=2$. **C.** $S=-2$. **D.** $S=0$.

Câu 40. Cho $\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{(x+2)^2}=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+c$ bằng

A. -2. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 41. Biết $\int_1^4 \frac{x^3+x^2+7x+3}{x^2-x+3}\mathrm{d}x=\frac{a}{b}+c\ln 5$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $P=a-b^2-c^3$.

A. -5. **B.** -3. **C.** 6. **D.** -4.

Câu 42. Cho $\int_1^3 \frac{1}{x^2+2x}\mathrm{d}x=a\ln 3+b\ln 5$, với a,b là các số hữu tỉ. Tính $a-4b$

A. $a-4b=1$. **B.** $a-4b=-1$. **C.** $a-4b=3$. **D.** $a-4b=-3$.

Câu 43. Biết $I=\int_1^2 \frac{x^2+2x}{x+1}dx=\frac{5}{a}+\ln b-\ln c$ $(a,b,c\in\mathbb{N})$. Tính giá trị biểu thức $S=a-b+c$

A. $S=7$. **B.** $S=3$. **C.** $S=-3$. **D.** $S=1$.

Câu 44. Cho $\int_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 45. Cho $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=\frac{16}{3}$. Tính $I=\int_0^4\left[\frac{5}{(x+1)^2}-3f(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. $I=-12$. **B.** $I=0$. **C.** $I=-20$. **D.** $I=1$.

Câu 46. Cho $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+b^2-c^3$ bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 47. Biết $\int_0^2 \frac{x^2+5x+2}{x^2+4x+3}\mathrm{d}x=a+b\ln 3+c\ln 5$, $(a,b,c\in\mathbb{Q})$. Giá trị của abc bằng

A. -8. **B.** -10. **C.** -12. **D.** 16.

D. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

1. Đổi biến số với một số hàm thường gặp

- $\int f(ax+b)^n x\mathrm{d}x \xrightarrow{PP} t=ax+b$. • $\int_a^b \sqrt[n]{f(x)}f'(x)\mathrm{d}x \xrightarrow{PP} t=\sqrt[n]{f(x)}$.
- $\int_a^b f(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x \xrightarrow{PP} t=\ln x$. • $\int_a^b f(e^x)e^x\mathrm{d}x \xrightarrow{PP} t=e^x$.
- $\int_a^b f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x \xrightarrow{PP} t=\sin x$. • $\int_a^b f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x \xrightarrow{PP} t=\cos x$.
- $\int_a^b f(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \xrightarrow{PP} t=\tan x$. • $\int_a^b f(\sin x\pm\cos x).(\sin x\pm\cos x)dx\Rightarrow t=\sin x\pm\cos x$.
- $\int_\alpha^\beta f(\sqrt{a^2-x^2})x^{2n}\mathrm{d}x \xrightarrow{PP} x=a\sin t$. • $\int_\alpha^\beta f\left((\sqrt{x^2+a^2})^m\right)x^{2n}\mathrm{d}x \xrightarrow{PP} x=a\tan t$.
- $\int_\alpha^\beta f\left(\sqrt{\frac{a\pm x}{a\mp x}}\right)\mathrm{d}x \xrightarrow{PP} x=a\cos 2t$. • $\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(ax+b)(cx+d)}}\Rightarrow t=\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}$.

- $\int\limits_{\alpha}^{\beta} R\left[\sqrt[s_1]{ax+b},.,\sqrt[s_k]{ax+b}\right]\mathrm{d}x \Rightarrow t^n = ax+b.$ • $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\mathrm{d}x}{(a+bx^n)\sqrt[n]{a+bx^n}} \xrightarrow{PP} x = \frac{1}{t}\cdot$

2. *Đổi biến số với hàm ẩn*

- ***Nhận dạng tương đối***: *Đề cho $f(x)$, yêu cầu tính $f(\neq x)$ hoặc đề cho $f(\neq x)$, yêu cầu tính $f(x)$.*
- ***Phương pháp***: *Đặt $t = (\neq x)$.*
- ***Lưu ý***: *Đổi biến nhớ đổi cận và ở trên đã sử dụng tính chất: "**Tích phân không phụ thuộc vào biến số, mà chỉ phụ thuộc vào hai cận**", nghĩa là $\int\limits_a^b f(u)\mathrm{d}u = \int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t = \cdots = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \cdots$*

MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT THÔNG HIỂU

Câu 48. Xét $\int\limits_0^2 xe^{x^2}\mathrm{d}x$, nếu đặt $u = x^2$ thì $\int\limits_0^2 xe^{x^2}\mathrm{d}x$ bằng

A. $2\int\limits_0^2 e^u\mathrm{d}u$. **B.** $2\int\limits_0^4 e^u\mathrm{d}u$. **C.** $\frac{1}{2}\int\limits_0^2 e^u\mathrm{d}u$. **D.** $\frac{1}{2}\int\limits_0^4 e^u\mathrm{d}u$.

Câu 49. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\pi}\cos^3 x.\sin x\mathrm{d}x$.

A. $I = -\frac{1}{4}\pi^4$ **B.** $I = -\pi^4$ **C.** $I = 0$ **D.** $I = -\frac{1}{4}$

Câu 50. Cho $\int\limits_5^{21}\frac{dx}{x\sqrt{x+4}} = a\ln 3 + b\ln 5 + c\ln 7$, với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+b=-2c$. **B.** $a+b=c$. **C.** $a-b=-c$. **D.** $a-b=-2c$.

Câu 51. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(x)dx$. **B.** $\int\limits_{-1}^1 f(x)dx = 0$.

C. $\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 f(1-x)dx$. **D.** $\int\limits_{-1}^1 f(x)dx = 2\int\limits_0^1 f(x)dx$.

Câu 52. Giả sử $\int\limits_1^{16} f(x)\mathrm{d}x = 2020$, khi đó giá trị của $\int\limits_1^2 x^3.f(x^4)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2020^4. **B.** $\sqrt[4]{2020}$. **C.** 8080. **D.** 505.

Câu 53. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 f(2x)dx = 2$. Tích phân $\int\limits_0^2 f(x)dx$ bằng:

A. 8. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 54. Cho $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$. Khi đó $\int\limits_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 8.

Câu 55. Cho $\int\limits_0^2\left[2f(x)-3g(x)\right]\mathrm{d}x = 6$, $\int\limits_0^2 g(x)\mathrm{d}x = 2$. Tính $I = \int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}x$

A. $I=-6$. **B.** $I=12$. **C.** $I=6$. **D.** $I=3$.

Câu 56. Cho $I = \int\limits_0^4 x\sqrt{1+2x}\,\mathrm{d}x$ và $u = \sqrt{2x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $I = \frac{1}{2}\left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_1^3$. **B.** $I = \int\limits_1^3 u^2(u^2-1)\mathrm{d}u$.

C. $I=\dfrac{1}{2}\int\limits_{1}^{3}x^2\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x$. **D.** $I=\dfrac{1}{2}\int\limits_{1}^{3}u^2\left(u^2-1\right)\mathrm{d}u$.

Câu 57. Cho $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin x\cos^2 x dx$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $0<I<\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{3}<I<\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}<I<\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}<I<1$

MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 58. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có $f\left(3\right)=3$ và $f'\left(x\right)=\dfrac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}$, $\forall x>0$. Khi đó $\int\limits_{3}^{8}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** $\dfrac{197}{6}$. **C.** $\dfrac{29}{2}$. **D.** $\dfrac{181}{6}$.

Câu 59. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có $f\left(0\right)=0$ và $f'\left(x\right)=\cos x\cos^2 2x, \forall\in R$. Khi đó $\int\limits_{0}^{\pi}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1042}{225}$. **B.** $\dfrac{208}{225}$. **C.** $\dfrac{242}{225}$. **D.** $\dfrac{149}{225}$.

Câu 60. Biết $\int\limits_{1}^{2}\dfrac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}dx=\sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ với a,b,c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$

A. $P=24$ **B.** $P=12$ **C.** $P=18$ **D.** $P=46$

Câu 61. Cho $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{\mathrm{d}x}{e^x+1}=a+b\ln\dfrac{1+e}{2}$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S=a^3+b^3$.

A. $S=2$. **B.** $S=-2$. **C.** $S=0$. **D.** $S=1$.

Câu 62. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}e^x+m, & \text{khi } x\geq 0\\ 2x\sqrt{3+x^2}, & \text{khi } x<0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_{-1}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x=ae+b\sqrt{3}+c$, $\left(a,b,c\in\mathbb{Q}\right)$. Tổng $\mathrm{T}=a+b+3c$ bằng

A. $\mathrm{T}=15$. **B.** $\mathrm{T}=-10$. **C.** $\mathrm{T}=-19$. **D.** $\mathrm{T}=-17$.

Câu 63. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $\int\limits_{-2}^{2}f\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)\mathrm{d}x=1$, $\int\limits_{1}^{5}\dfrac{f\left(x\right)}{x^2}\mathrm{d}x=3$. Tính $\int\limits_{1}^{5}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. -15. **B.** -2. **C.** -13. **D.** 0.

Câu 64. Biết rằng tích phân $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{\mathrm{d}x}{3x+5\sqrt{3x+1}+7}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. $-\dfrac{10}{3}$. **B.** $-\dfrac{5}{3}$. **C.** $\dfrac{10}{3}$. **D.** $\dfrac{5}{3}$.

Câu 65. Cho $\int\limits_{0}^{3}\dfrac{x}{4+2\sqrt{x+1}}dx=\dfrac{a}{3}+b\ln 2+c\ln 3$, với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 2. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 1.

Câu 66. Biết $\int\limits_{1}^{e}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=a\sqrt{\mathrm{e}}+b$ với a, $b\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a.b$

A. $P=4$. **B.** $P=-8$. **C.** $P=8$. **D.** $P=-4$.

Câu 67. Giả sử $I=\int\limits_{1}^{64}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=a\ln\dfrac{2}{3}+b$ với a,b là các số nguyên. Khi đó giá trị $a-b$ là

A. -17. **B.** 5. **C.** -5. **D.** 17.

Câu 68. Biết rằng $\int_0^{\pi^2}\left(\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = a+b\pi$ với $a,b\in R$ .Tính $a+b$.

A. π . **B.** -4. **C.** -2. **D.** 2.

Câu 69. Biết tích phân $\int_0^{\ln 6}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\sqrt{\mathrm{e}^x+3}}\mathrm{d}x = a+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=0$. **B.** $T=2$. **C.** $T=1$. **D.** $T=-1$.

Câu 70. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2 x+3\sin x+2}dx = a\ln 2+b\ln 3$ với a,b,c là các số nguyên. Tính $P=2a+b$.

A. 3. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 1.

Câu 71. Cho biết $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 x\tan x\mathrm{d}x = \ln a-\frac{b}{8}$ với a,b là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $M=3a-2b$ bằng

A. 12. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 72. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên tập hợp $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\ln 3} f\left(e^x+3\right)\mathrm{d}x=1$, $\int_4^6\frac{(2x-1)f(x)}{x-3}\mathrm{d}x=-3$. Giá trị của $\int_4^6 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 10. **B.** -5. **C.** -4. **D.** 12.

Câu 73. Biết rằng $\int_1^e\frac{\sqrt{4\ln x+1}}{x}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{6}$ với $a,b\in\mathbb{N}^*$. Giá trị của $a-3b+1$ bằng

A. 125. **B.** 120. **C.** 124. **D.** 123.

Câu 74. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $x+\left[f(x)\right]^3+2f(x)=1$, với $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_{-2}^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** $\frac{7}{2}$.

Câu 75. Biết $\int_1^e\frac{\sqrt{3+\ln x}}{x}.\mathrm{d}x=\frac{a-b\sqrt{c}}{3}$, trong đó a,b,c là các số nguyên dương và $c<10$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 19. **B.** 13. **C.** 28. **D.** 25.

Câu 76. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f(x)=6x^2f\left(x^3\right)-\frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. -1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 6.

E. PHƯƠNG PHÁP TỪNG PHẦN

1. ***Định lí:*** *Nếu $u=u(x)$ và $v=v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì*

$$I=\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x=\left[u(x)v(x)\right]\Big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x \text{ hay } I=\int_a^b u\mathrm{d}v=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\mathrm{d}u.$$

2. ***Phương pháp thực hành:***
   - *Nhận dạng: Tích hai hàm khác loại nhận nhau, chẳng hạn: đa thức nhân lôga, mũ nhân lượng giác…*

- *Đặt* $\begin{cases} u = \cdots\cdots\cdots \xrightarrow{\text{Vi phân}} \mathrm{d}u = \cdots\cdots \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \cdots\cdot \mathrm{d}x \xrightarrow{\text{NH}} v = \cdots\cdots\cdots \end{cases}$. *Suy ra:* $I = \int_a^b u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u.$
- *Thứ tự ưu tiên chọn u: log – đa – lượng – mũ và* $\mathrm{d}v =$ *phần còn lại.*
- ***Lưu ý***: *Tùy vào bài toán mà ta cần chọn* u *và* $\mathrm{d}v$ *sao cho* $\int_a^b v\mathrm{d}u$ *đơn giản nhất. Cần nhớ rằng bậc của đa thức và bậc của lnx tương ứng với số phần lấy tích phân từng phần.*

3. *Tính chất của nguyên hàm và tích phân*

- *Nếu* $F(x)$ *là một nguyên hàm của hàm số* $f(x)$ *thì* $F'(x) = f(x)$.
- $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C.$
- $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a).$
- *Tích phân không phụ thuộc vào biến mà chỉ phụ thuộc vào 2 cận, như* $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \ldots.$

Câu 77. Tính tích phân $I = \int_1^e x\ln x dx$

A. $I = \frac{1}{2}$ **B.** $I = \frac{e^2-2}{2}$ **C.** $I = \frac{e^2+1}{4}$ **D.** $I = \frac{e^2-1}{4}$

Câu 78. Cho $\int_1^e (1 + x\ln x)\,\mathrm{d}x = a\mathrm{e}^2 + b\mathrm{e} + c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a + b = c$ **B.** $a + b = -c$ **C.** $a - b = c$ **D.** $a - b = -c$

Câu 79. Cho $\int_0^2 2x\ln(1+x)\mathrm{d}x = a\ln b$ với $a;b \in \mathbb{N}^*$ và b là số nguyên tố. Tính $3a + 4b$.

A. 42. **B.** 21. **C.** 12. **D.** 32.

Câu 80. Cho $f(x)$ là một nguyên hàm của $g(x)$ trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} xg(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = a + b\pi$, trong đó a,b là các số hữu tỉ. Tính $P = a + 4b$.

A. $P = -\frac{3}{2}$. **B.** $P = -\frac{7}{4}$. **C.** $P = \frac{5}{2}$. **D.** $P = \frac{1}{2}$.

Câu 81. $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x+1)e^{2x}$ thỏa $F(0) = 0$. Tính $F(1)$

A. $F(1) = 2e^2$. **B.** $F(1) = \frac{e^2}{2}$. **C.** $F(1) = e^2$. **D.** $F(1) = \frac{3e^2}{2}$.

Câu 82. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = -12$ **B.** $I = 8$ **C.** $I = 1$ **D.** $I = -8$

Câu 83. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{a}{b}\ln 2 + \frac{\pi}{c}$, với a,b,c là các số nguyên. Khi đó, $\frac{bc}{a}$ bằng

A. -6. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** 6. **D.** $-\frac{8}{3}$.

Câu 84. Biết tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x=a\pi+b\ln 2$ với a,b là các số hữu tỷ. Tính $T=16a-8b$?

A. $T=4$. **B.** $T=5$. **C.** $T=2$. **D.** $T=-2$.

Câu 85. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[0;5]$ thỏa mãn $\int\limits_0^5 xf'(x)e^{f(x)}\mathrm{d}x=8$; $f(5)=\ln 5$. Tính $I=\int\limits_0^5 e^{f(x)}\mathrm{d}x$.

A. -33. **B.** 33. **C.** 17. **D.** -17.

Câu 86. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $f(0)=2$, $\int\limits_0^2(2x-4)f'(x)\mathrm{d}x=4$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=2$. **B.** $I=-2$. **C.** $I=6$. **D.** $I=-6$.

Câu 87. Cho $\int\limits_1^2\frac{\ln(1+2x)}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{a}{2}\ln 5+b\ln 3+c\ln 2$, với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a+2(b+c)$ là:

A. 0. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 88. Tích phân $\int\limits_1^2\frac{x\ln x dx}{(x^2+1)^2}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$ (với a,b,c là các số hữu tỉ). Tính tổng $a+b-c$.

A. $\frac{-2}{5}$. **B.** $\frac{9}{10}$. **C.** $-\frac{9}{10}$. **D.** $\frac{2}{5}$.

Câu 89. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)$ và $f''(x)$ liên tục trên $[1;3]$. Biết $f(1)=1, f(3)=81,\ f'(1)=4,\ f'(3)=108$. giá trị của $\int\limits_1^3(4-2x)f''(x)dx$ bằng

A. -64. **B.** -48. **C.** 64. **D.** 48.

Câu 90. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(4)=8$ và $\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x=6$. Giá trị của $\int\limits_0^2 xf'(2x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 13. **B.** $\frac{13}{2}$. **C.** 10. **D.** $\frac{13}{4}$.

Câu 91. Biết $\int(x+3)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{m}\mathrm{e}^{-2x}(2x+n)+C,\ (m,n\in\mathbb{Z})$. Giá trị của m^2+n^2 bằng

A. 10. **B.** 65. **C.** 5. **D.** 41.

F. TÍCH PHÂN HÀM ẨN

Câu 92. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left[\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right]$ thỏa mãn $\int\limits_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[f^2(x)-2f(x)(3-x)\right]dx=\frac{-109}{12}$. Tính $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{x^2-1}dx$

A. $\ln\frac{7}{9}$. **B.** $\ln\frac{2}{9}$. **C.** $\ln\frac{5}{9}$. **D.** $\ln\frac{8}{9}$.

Câu 93. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số lẻ và liên tục trên $[-4;4]$ biết $\int\limits_{-2}^{0} f(-x)\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_{1}^{2} f(-2x)\mathrm{d}x=4$. Tính $\mathrm{I}=\int\limits_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\mathrm{I}=-10$. **B.** $\mathrm{I}=10$. **C.** $\mathrm{I}=6$. **D.** $\mathrm{I}=-6$..

Câu 94. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thảo mãn $xf(x^3)+f(1-x^2)=-x^{10}+x^6-2x, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$?

A. $\frac{-17}{20}$. **B.** $\frac{-13}{4}$. **C.** $\frac{17}{4}$. **D.** -1.

Câu 95. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[e;e^2\right]$.

Biết $x^2f'(x)\cdot\ln x-xf(x)+\ln^2 x=0, \forall x\in\left[e;e^2\right]$ và $f(e)=\frac{1}{e}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{e}^{e^2} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=2$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=3$. **D.** $I=\ln 2$.

Câu 96. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[-4;2]$, thỏa mãn $\int\limits_{0}^{3} xf'(2x-4)\,dx=8$ và $f(2)=2$.

Tính $I=\int\limits_{-2}^{1} f(2x)\,dx$.

A. $I=-10$ **B.** $I=-5$ **C.** $I=5$ **D.** $I=10$

Câu 97. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_{0}^{3} f(x)dx=8$ và $\int\limits_{0}^{5} f(x)dx=4$. Tính $\int\limits_{-1}^{1} f(|4x-1|)dx$

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{11}{4}$. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 98. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;1]$ và $f(-x)+2019f(x)=\mathrm{e}^x$, $\forall x\in[-1;1]$. Tính $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{\mathrm{e}^2-1}{\mathrm{e}}$. **B.** $\frac{\mathrm{e}^2-1}{2020\mathrm{e}}$. **C.** 0. **D.** $\frac{\mathrm{e}^2-1}{2019\mathrm{e}}$.

Câu 99. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1-x)=6x^2f(x^3)-\frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Khi đó $\int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 6.

Câu 100. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $x^2f^2(x)+(2x-1)f(x)=xf'(x)-1$, với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ đồng thời thỏa $f(1)=-2$. Tính $\int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$

A. $-\frac{\ln 2}{2}-1$. **B.** $-\ln 2-\frac{1}{2}$. **C.** $-\ln 2-\frac{3}{2}$. **D.** $-\frac{\ln 2}{2}-\frac{3}{2}$.

Câu 101. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $[0;4]$ và thỏa đẳng thức sau đây $2019f(x)+2020f(4-x)=6059-\frac{\sqrt{x}}{2}$. Tính tích phân $\int\limits_{0}^{4} f'(x)\mathrm{d}x$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 102. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=0, f'(0)\neq 0$ và thỏa mãn hệ thức $f(x).f'(x)+18x^2=(3x^2+x)f'(x)+(6x+1)f(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

Biết $\int_0^1 (x+1)e^{f(x)}\mathrm{d}x = a.e^2+b$, với $a;b\in\mathbb{Q}$. Giá trị của $a-b$ bằng.

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 103. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+(x^2-1)f\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}\right)=x^5-4x^3-5x^2+7x+6, \forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{7}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 7. **D.** $-\frac{19}{3}$.

Câu 104. Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$, $f(x)\neq 0$ với mọi $x\in[1;3]$, đồng thời $f'(x)(1+f(x))^2=\left[(f(x))^2(x-1)\right]^2$ và $f(1)=-1$.

Biết rằng $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = a\ln 3+b$, $a,b\in\mathbb{Z}$, tính tổng $S=a+b^2$.

A. $S=0$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=2$. **D.** $S=4$.

Câu 105. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$ và $(f'(x))^2+4(6x^2-1).f(x)=40x^6-44x^4+32x^2-4, \forall x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{23}{15}$. **B.** $\frac{13}{15}$. **C.** $-\frac{17}{15}$. **D.** $-\frac{7}{15}$.

Câu 106. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=3$ và $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2, \forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{-4}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{-10}{3}$

Câu 107. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[2;4]$ và $f'(x)>0, \forall x\in[2;4]$. Biết $4x^3f(x)=[f'(x)]^3-x^3, \forall x\in[2;4], f(2)=\frac{7}{4}$. Giá trị của $f(4)$ bằng

A. $\frac{40\sqrt{5}-1}{2}$. **B.** $\frac{20\sqrt{5}-1}{4}$. **C.** $\frac{20\sqrt{5}-1}{2}$. **D.** $\frac{40\sqrt{5}-1}{4}$.

Câu 108. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$ và thỏa $f(1)=0$, $(f'(x))^2+4f(x)=8x^2-32x+28$ với mọi x thuộc $[0;2]$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $-\frac{2}{3}$. **D.** $-\frac{14}{3}$.

Câu 109. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và $f(x)+f(1-x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$, $\forall x\in[0;1]$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

A. $\dfrac{3}{4}+2\ln 2$. **B.** $3+\ln 2$. **C.** $\dfrac{3}{4}+\ln 2$. **D.** $\dfrac{3}{2}+2\ln 2$.

Câu 110. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f(x)+f(2-x)=2(x-1)\mathrm{e}^{x^2-2x+1}+4$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ ta được kết quả:

A. $I=\mathrm{e}+4$. **B.** $I=8$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\mathrm{e}+2$.

Câu 111. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$ và thỏa mãn: $\dfrac{3}{5}-(x-4)^2+4xf(x)=[f'(x)]^2$ và $f(0)=\dfrac{1}{20}$. Khi đó $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{203}{30}$. **B.** $\dfrac{163}{30}$. **C.** $\dfrac{11}{30}$. **D.** $\dfrac{157}{30}$

Câu 112. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $xf(x^5)+f(1-x^4)=x^{11}+x^8+x^6-3x^4+x+3, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{35}{6}$. **B.** $-\dfrac{15}{4}$. **C.** $-\dfrac{7}{24}$. **D.** $\dfrac{5}{6}$.

Câu 113. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[\dfrac{2}{5};1\right]$ và thỏa mãn $2f(x)+5f\left(\dfrac{2}{5x}\right)=3x, \forall x\in\left[\dfrac{2}{5};1\right]$. Khi đó $I=\int\limits_{\frac{2}{15}}^{\frac{1}{3}} \ln 3x.f'(3x)dx$ bằng:

A. $\dfrac{1}{5}\ln\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{35}$. **B.** $\dfrac{1}{5}\ln\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{35}$. **C.** $-\dfrac{1}{5}\ln\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{35}$. **D.** $-\dfrac{1}{5}\ln\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{35}$.

Câu 114. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+2xf(x^2)=2x^7+3x^3-x-1$ với $x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $\int\limits_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 115. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x^2f(1-x)+2f\left(\dfrac{2x-2}{x}\right)=\dfrac{-x^4+x^3+4x-4}{x}, \forall x\neq 0, x\neq 1$. Khi đó $\int\limits_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$ có giá trị là

A. 0. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 116. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $2f(x)-3f(1-x)=x\sqrt{1-x}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{4}{15}$ **B.** $-\frac{4}{15}$ **C.** $-\frac{2}{5}$ **D.** 1

Câu 117. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+(x^2-1)f\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}\right)=x^5-4x^3-5x^2+7x+6, \forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{7}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 7. **D.** $-\frac{19}{3}$.

----------------- HẾT -----------------

-

Vấn đề 14 TÍCH PHÂN

A. ĐỊNH NGHĨA – TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

a) Định nghĩa: $\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)}$ với $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a;b]$.

b) Tính chất:

$\int_a^a f(x)dx = 0$	$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (k là hằng số)	$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$	$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$
Nếu $f(x)\ge 0,\ \forall x\in[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.	
Nếu $f(x)\ge g(x),\ \forall x\in[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$.	

Đặc biệt:

- Nếu hàm $y=f(x)$ là **hàm số lẻ** trên $[-a;a]$ thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.
- Nếu hàm $y=f(x)$ là **hàm số chẵn** trên $[-a;a]$ thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

Câu 1. Nếu $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = -2$ và $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x = 1$ thì $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -3. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\mathrm{d}x = -2+1 = -1$.

Câu 2. Nếu $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 4$ thì $\int_0^1 2f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 16. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_0^1 2f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2.4 = 8$.

Câu 3. Cho $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 5$ khi đó $\int_0^1 [f(x)-2g(x)]\mathrm{d}x$ bằng

A. -3. **B.** 12. **C.** -8. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 5 \Leftrightarrow 2\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 10 \Leftrightarrow \int_0^1 2g(x)\mathrm{d}x = 10$

Xét $\int_0^1 [f(x)-2g(x)]\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 2g(x)\mathrm{d}x = 2-10=-8$.

Câu 4. Biết $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x = 6$, khi đó $\int_1^2 [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** -8. **C.** 8. **D.** -4.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_1^2 [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x - \int_1^2 g(x)\mathrm{d}x = 2-6=-4$.

Câu 5. Biết tích phân $\int_0^1 f(x)dx = 3$ và $\int_0^1 g(x)dx = -4$. Khi đó $\int_0^1 [f(x)+g(x)]dx$ bằng

A. -7. **B.** 7. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_0^1 [f(x)+g(x)]dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx = 3+(-4)=-1$.

Biết $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = -4$, khi đó $\int_0^1 [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** -6. **C.** -2. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

$\int_0^1 [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{g}(x)\mathrm{d}x = 2+(-4)=-2$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;2]$, $f(1)=1$ và $f(2)=2$. Tính $I=\int_1^2 f'(x)dx$.

A. $I=1$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=3$. **D.** $I=\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I=\int_1^2 f'(x)dx = f(x)\Big|_1^2 = f(2)-f(1)=2-1=1$.

Câu 7. Cho $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x = -2$. Tích phân $\int_0^5 [4f(x)-3x^2]\mathrm{d}x$ bằng

A. -133. **B.** -120. **C.** -130. **D.** -140.

Lời giải

Chọn A

$\int_0^5 [4f(x)-3x^2]\mathrm{d}x = 4\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x - 3\int_0^5 x^2\mathrm{d}x = 4.(-2)-(x^3)\Big|_0^5 = -8-125=-133$.

Câu 8. Cho $\int_0^1 f(x)dx = 3$, $\int_0^1 g(x)dx = -2$. Tính giá trị của biểu thức $I=\int_0^1 [2f(x)-3g(x)]dx$

A. 12. **B.** 9. **C.** 6. **D.** $y=-6$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I=\int_0^1\left[2f(x)-3g(x)\right]dx=2\int_0^1 f(x)\,dx-3\int_0^1 g(x)\,dx=2.3-3.(-2)=12$.

Câu 9. Biết rằng $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$, tính $I=\int_0^2\left(2f(x)+1\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=3$. **B.** $I=1$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I=\int_0^2\left(2f(x)+1\right)\mathrm{d}x=2\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^2 1\mathrm{d}x=2.\frac{1}{2}+x\Big|_0^2=1+2=3$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2\left(f(x)+3x^2\right)\mathrm{d}x=10$. Tính $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. -18. **B.** -2. **C.** 18. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_0^2\left(f(x)+3x^2\right)\mathrm{d}x=10\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=10-\int_0^2 3x^2\,\mathrm{d}x=10-x^3\Big|_0^2=2$.

Câu 11. Cho $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x=-1$. Tích phân $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -3. **B.** 3. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x=2+(-1)=1$.

Câu 12. Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx=2$ và $\int_{-1}^2 g(x)dx=-1$, khi đó $\int_{-1}^2\left[x+2f(x)+3g(x)\right]dx$ bằng

A. $\frac{5}{2}$ **B.** $\frac{7}{2}$ **C.** $\frac{17}{2}$ **D.** $\frac{11}{2}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_{-1}^2\left[x+2f(x)+3\mathrm{g}(\mathrm{x})\right]dx=\int_{-1}^2 xdx+2\int_{-1}^2 f(x)dx+3\int_{-1}^2 g(x)dx=\frac{3}{2}+4-3=\frac{5}{2}$

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x=7$, $\int_3^{10} f(x)\mathrm{d}x=3$, $\int_3^6 f(x)\mathrm{d}x=1$. Tính giá trị của $\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x$.

A. 4. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x-\int_3^6 f(x)\mathrm{d}x=7-1=6\Rightarrow\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x+\int_3^{10} f(x)\mathrm{d}x=6+3=9$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)=\cos(\pi\ln x)$. Tính tích phân $I=\int_1^e f'(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-2$. **B.** $I=2$. **C.** $I=2\pi$. **D.** $I=-2\pi$.

Lời giải

Chọn A

$$I=\int_1^e f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\Big|_1^e=f(e)-f(1)=\cos(\pi\ln e)-\cos(\pi\ln 1)$$

$$=\cos\pi-\cos 0=-2.$$

Câu 15. Cho $\int_1^5 h(x)dx=4$ và $\int_1^7 h(x)dx=10$, khi đó $\int_5^7 h(x)dx$ bằng

A. 7. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

$\int_1^7 h(x)dx=\int_1^5 h(x)dx+\int_5^7 h(x)dx$ nên $\int_5^7 h(x)dx=\int_1^7 h(x)dx-\int_1^5 h(x)dx=10-4=6$

Câu 16. Cho hai tích phân $\int_{-2}^5 f(x)\mathrm{d}x=8$ và $\int_{-2}^5 g(x)\mathrm{d}x=-3$. Tính $I=\int_{-2}^5\left[f(x)-4g(x)-1\right]\mathrm{d}x$

A. $I=13$. **B.** $I=27$. **C.** $I=-11$. **D.** $I=3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $I=\int_{-2}^5\left[f(x)-4g(x)-1\right]\mathrm{d}x=\int_{-2}^5 f(x)\mathrm{d}x-4\int_{-2}^5 g(x)\mathrm{d}x-\int_{-2}^5\mathrm{d}x=8-4.(-3)-7=13$.

Câu 17. Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $[-2;5]$ và $\int_{-2}^5 f(x)\mathrm{d}x=8,\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=-3$. Tính $P=\int_{-2}^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_3^5 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $P=5$. **B.** $P=-11$. **C.** $P=11$. **D.** $P=-5$.

Lời giải

Chọn C

$$\int_{-2}^5 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x+\int_3^5 f(x)\mathrm{d}x.$$

$$\Leftrightarrow\int_{-2}^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_3^5 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^5 f(x)\mathrm{d}x-\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=11.$$

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên đoạn $[-1;2]$, biết tích phân $\int_{-1}^2 f'(x)dx=-9$ và $f(-1)=8$. Tính $f(2)$.

A. $f(2)=-1$. **B.** $f(2)=1$. **C.** $f(2)=3$. **D.** $f(2)=-16$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$\int_{-1}^2 f'(x)dx=-9\Leftrightarrow f(x)\Big|_{-1}^2=-9\Leftrightarrow f(2)-f(-1)=-9\Leftrightarrow f(2)=-9+f(-1)=-9+8=-1.$$

Vậy $f(2)=-1$.

Câu 19. Cho $\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x=1$, $\int_{-2}^{4} f(t)\mathrm{d}t=-4$. Tính $I=\int_{2}^{4} f(y)\mathrm{d}y$.

A. $I=5$. **B.** $I=3$. **C.** $I=-3$. **D.** $I=-5$.

Lời giải

Chọn D

Do tích phân không phụ thuộc vào biến số nên $\int_{-2}^{4} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-2}^{4} f(x)\mathrm{d}x=-4$.

Ta có $I=\int_{2}^{4} f(y)\mathrm{d}y=\int_{2}^{4} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{4} f(x)\mathrm{d}x-\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x=-4-1=-5$.

Câu 20. Cho $\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_{-1}^{2} g(x)\mathrm{d}x=-1$. Tính $I=\int_{-1}^{2}\left[x+2f(x)-3g(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{11}{2}$ **B.** $I=\dfrac{17}{2}$ **C.** $I=\dfrac{5}{2}$ **D.** $I=\dfrac{7}{2}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $I=\int_{-1}^{2}\left[x+2f(x)-3g(x)\right]\mathrm{d}x=\left.\dfrac{x^2}{2}\right|_{-1}^{2}+2\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x-3\int_{-1}^{2} g(x)\mathrm{d}x=\dfrac{3}{2}+2.2-3(-1)=\dfrac{17}{2}$.

Câu 21. Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên $[1;3]$ và thỏa mãn $\int_{1}^{3}\left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=10$ $\int_{1}^{3}\left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int_{1}^{3}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=7$. **B.** $I=6$. **C.** $I=8$. **D.** $I=9$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\begin{cases}\int_{1}^{3}\left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=10\\ \int_{1}^{3}\left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x+3\int_{1}^{3} g(x)\mathrm{d}x=10\\ 2\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{3} g(x)\mathrm{d}x=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x=4\\ \int_{1}^{3} g(x)\mathrm{d}x=2\end{cases}$.

Vậy $I=\int_{1}^{3}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{3} g(x)\mathrm{d}x=4+2=6$.

B. TÍCH PHÂN CƠ BẢN(THÔNG QUA BẢNG CÔNG THỨC NGUYÊN HÀM)

Bảng nguyên hàm của một số hàm thường gặp (với C là hằng số tùy ý)	
① $\int 0\mathrm{d}x=C.$	$\longrightarrow \int k\mathrm{d}x=kx+C.$
② $\int x^n\mathrm{d}x=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C.$	$\longrightarrow \int (ax+b)^n\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\dfrac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+C.$
③ $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln\lvert x\rvert+C.$	$\longrightarrow \int \dfrac{1}{ax+b}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+C.$
④ $\int \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{x}+C.$	$\longrightarrow \int \dfrac{1}{(ax+b)^2}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{ax+b}+C.$
⑤ $\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C.$	$\longrightarrow \int \sin(ax+b)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)+C.$

⑥ $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C.$	$\longrightarrow \int \cos(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C.$
⑦ $\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C.$	$\longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C.$
⑧ $\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C.$	$\longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C.$
⑨ $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C.$	$\longrightarrow \int e^{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C.$
⑩ $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C.$	$\longrightarrow \int a^{\alpha x+\beta}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\frac{a^{\alpha x+\beta}}{\ln a} + C.$

♦ ***Nhận xét***. *Khi thay x bằng $(ax+b)$ thì khi lấy nguyên hàm nhân kết quả thêm $\frac{1}{a}$.*

Một số nguyên tắc tính cơ bản

- *Tích của đa thức hoặc lũy thừa $\xrightarrow{PP}$ khai triễn.*
- *Tích các hàm mũ $\xrightarrow{PP}$ khai triển theo công thức mũ.*
- *Bậc chẵn của sin và cosin $\Rightarrow$ Hạ bậc:* $\sin^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2a$, $\cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2a.$
- *Chứa tích các căn thức của x $\xrightarrow{PP}$ chuyển về lũy thừa.*

MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 22. $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3}$ bằng

A. $2\ln\frac{7}{5}$. **B.** $\frac{1}{2}\ln 35$. **C.** $\ln\frac{7}{5}$. **D.** $\frac{1}{2}\ln\frac{7}{5}$.

Lời giải

Ta có $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2}\ln|2x+3|\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 7 - \ln 5) = \frac{1}{2}\ln\frac{7}{5}$.

Câu 23. Tích phân $\int_0^2 \frac{dx}{x+3}$ bằng

A. $\frac{16}{225}$ **B.** $\log\frac{5}{3}$ **C.** $\ln\frac{5}{3}$ **D.** $\frac{2}{15}$

Lời giải

Chọn C

$\int_0^2 \frac{dx}{x+3} = \ln|x+3|\Big|_0^2 = \ln\frac{5}{3}$

Câu 24. Tính tích phân $I = \int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{1-2x}$

A. $I = -\ln 9$. **B.** $I = \ln 9$. **C.** $I = -\ln 3$. **D.** $I = \ln 3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $I = \int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{1-2x} = -\frac{1}{2}\ln|1-2x|\Big|_1^5 = -\frac{1}{2}(\ln 9 - \ln 1) = -\ln 3$.

Câu 25. Tính tích phân $I=\int\limits_1^2 \frac{x-1}{x}\mathrm{d}x$.

A. $I=1+\ln 2$. **B.** $I=\frac{7}{4}$. **C.** $I=2\ln 2$. **D.** $I=1-\ln 2$.

Lời giải

Chọn D

+ Ta có $I=\int\limits_1^2 \frac{x-1}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left(1-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\left(x-\ln|x|\right)\Big|_1^2=2-\ln 2-1=1-\ln 2$.

Câu 26. Biết rằng tích phân $\int\limits_0^1\left(2x+e^x\right)\mathrm{d}x=a+b.e$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Khi đó, tính $a+b$ bằng

A. -15. **B.** -1. **C.** 20. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int\limits_0^1\left(2x+e^x\right)\mathrm{d}x=\left(x^2+e^x\right)\Big|_0^1=1+e-1=e$ suy ra $a=0;b=1$.

Khi đó $a+b=1$.

Câu 27. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\cos 2x dx$ bằng

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\cos 2x dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\cos 2x d\left(2x\right)=\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 28. Cho $\int\limits_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3$ với a,b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=-2$ **B.** $a+2b=0$ **C.** $a+b=2$ **D.** $a-2b=0$

Lời giải

Chọn B

$\int\limits_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x=\left[\ln|x+1|-\ln|x+2|\right]_0^1=2\ln 2-\ln 3$; do đó $a=2;b=-1$

Câu 29. Cho $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}x=5$. Tính $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f\left(x\right)+2\sin x\right]\mathrm{d}x$.

A. $I=7$ **B.** $I=5+\frac{\pi}{2}$ **C.** $I=3$ **D.** $I=5+\pi$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f\left(x\right)+2\sin x\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}x+2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{dx}-2\mathrm{cosx}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=5-2(0-1)=7.$$

Câu 30. $\int_1^2 e^{3x-1}\mathrm{d}x$ bằng:

A. $\frac{1}{3}\left(e^5-e^2\right)$. **B.** $\frac{1}{3}e^5-e^2$. **C.** e^5-e^2. **D.** $\frac{1}{3}\left(e^5+e^2\right)$.

Lời giải

Ta có: $\int_1^2 e^{3x-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}e^{3x-1}\Big|_1^2=\frac{1}{3}\left(e^5-e^2\right)$.

Câu 31. Cho $\int_0^m \left(3x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x=6$. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1;2)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(-3;1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_0^m \left(3x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x=\left(x^3-x^2+x\right)\Big|_0^m=m^3-m^2+m$.

$\int_0^m \left(3x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x=6\Leftrightarrow m^3-m^2+m-6=0\Leftrightarrow m=2\in(0;4)$.

Vậy $m=2\in(0;4)$.

Câu 32. Giả sử $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+3}=\ln\frac{a}{b}$, với a,b là các số tự nhiên có ước chung lớn nhất bằng 1. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a-b>2$. **B.** $a^2-b^2=41$. **C.** $a+2b=14$. **D.** $3a-b<12$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\ln\frac{a}{b}=\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+3}=\int_1^2 \frac{\mathrm{d}(x+3)}{x+3}=\ln(x+3)\Big|_1^2=\ln\frac{5}{4}$

Suy ra: $\begin{cases} a=5 \\ b= \end{cases}\Rightarrow 3a-b=15-4=11<12$.

Câu 33. Cho số thực a và hàm số $f(x)=\begin{cases} 2x & \text{khi } x\le 0 \\ a\left(x-x^2\right) & \text{khi } x>0. \end{cases}$ Tính $\int_{-1}^1 f(x)dx$.

A. $\frac{a}{6}-1$. **B.** $\frac{2a}{3}+1$. **C.** $\frac{a}{6}+1$. **D.** $\frac{2a}{3}-1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx=\int_{-1}^0 2x\,dx+\int_0^1 a\left(x-x^2\right)dx=x^2\Big|_{-1}^0+a\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1$

$=\frac{a}{6}-1$.

Câu 34. Tính tích phân $I=\int_0^{\ln 2}\left(e^{4x}+1\right)dx.$.

A. $I=\frac{15}{4}+\ln 2.$ **B.** $I=4+\ln 2.$ **C.** $I=\frac{17}{4}+\ln 2.$ **D.** $I=\frac{15}{2}+\ln 2.$

Lời giải

Chọn A

$$I=\int_0^{\ln 2}\left(e^{4x}+1\right)dx.=\int_0^{\ln 2}e^{4x}dx+\int_0^{\ln 2}dx=\frac{1}{4}e^{4x}\Big|_0^{\ln 2}+x\Big|_0^{\ln 2}=\left(\frac{1}{4}e^{4\ln 2}-\frac{1}{4}e^{0}\right)+\ln 2=\frac{15}{4}+\ln 2.$$

MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\sin^2 x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi^2+15\pi}{16}$. **B.** $\frac{\pi^2+16\pi-16}{16}$. **C.** $\frac{\pi^2+16\pi-4}{16}$. **D.** $\frac{\pi^2-4}{16}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=\int\left(2\sin^2 x+1\right)\mathrm{d}x=\int\left(2-\cos 2x\right)\mathrm{d}x=2x-\frac{1}{2}\sin 2x+C.$

Vì $f(0)=4\Rightarrow C=4$

Hay $f(x)=2x-\frac{1}{2}\sin 2x+4.$

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2x-\frac{1}{2}\sin 2x+4\right)\mathrm{d}x$

$$=x^2+\frac{1}{4}\cos 2x+4x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{16}+\pi-\frac{1}{4}=\frac{\pi^2+16\pi-4}{16}.$$

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$.Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\cos^2 x+3,\ \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{\pi^2+2}{8}$. **B.** $\frac{\pi^2+8\pi+8}{8}$. **C.** $\frac{\pi^2+8\pi+2}{8}$. **D.** $\frac{\pi^2+6\pi+8}{8}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=\int f'(x)dx=\int(2\cos^2 x+3)dx=\int(2.\frac{1+\cos 2x}{2}+3)dx$

$=\int(\cos 2x+4)dx=\frac{1}{2}\sin 2x+4x+C$ do $f(0)=4\Rightarrow C=4$.

Vậy $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+4x+4$ nên $\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1}{2}\sin 2x+4x+4)dx$

$$=(-\frac{1}{4}\cos 2x+2x^2+4x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2+8\pi+2}{8}.$$

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\sin^2 x+3$, $\forall x\in R$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi^2-2}{8}$. **B.** $\frac{\pi^2+8\pi-8}{8}$. **C.** $\frac{\pi^2+8\pi-2}{8}$. **D.** $\frac{3\pi^2+2\pi-3}{8}$.

Lời giải

Chọn C

$\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(2\sin^2 x+3\right)\mathrm{d}x=\int\left(1-\cos 2x+3\right)\mathrm{d}x=\int\left(4-\cos 2x\right)\mathrm{d}x=4x-\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

Ta có $f(0)=4$ nên $4.0-\frac{1}{2}\sin 0+C=4\Leftrightarrow C=4$.

Nên $f(x)=4x-\frac{1}{2}\sin 2x+4$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(4x-\frac{1}{2}\sin 2x+4\right)\mathrm{d}x=\left.\left(2x^2+\frac{1}{4}\cos 2x+4x\right)\right|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2+8\pi-2}{8}.$$

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\cos^2 x+1, \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi^2+4}{16}$. **B.** $\frac{\pi^2+14\pi}{16}$. **C.** $\frac{\pi^2+16\pi+4}{16}$. **D.** $\frac{\pi^2+16\pi+16}{16}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(2\cos^2 x+1\right)\mathrm{d}x=\int\left(2+\cos 2x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin 2x+2x+C$

Vì $f(0)=4\Rightarrow C=4\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+2x+4$.

Vậy $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}\sin 2x+2x+4\right)\mathrm{d}x=\left.\left(-\frac{1}{4}\cos 2x+x^2+4x\right)\right|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2+16\pi+4}{16}$.

C. TÍCH PHÂN HÀM SỐ HỮU TỶ

1. Công thức thường áp dụng

- $\int\frac{1}{ax+b}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$. • $\int\frac{1}{(ax+b)^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{ax+b}+C$.
- $\ln a+\ln b=\ln(ab)$. • $\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}$.
- $\ln a^n=n\ln a$. • $\ln 1=0$.

2. Phương pháp tính nguyên hàm, tích phân của hàm số hữu tỷ $I=\int\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$.

- *Nếu bậc của tử số $P(x)\geq$ bậc của mẫu số $Q(x)$ $\xrightarrow{PP}$ Chia đa thức.*
- *Nếu bậc của tử số $P(x)<$ bậc của mẫu số $Q(x)$ $\xrightarrow{PP}$ phân tích mẫu $Q(x)$ thành tích số, rồi sử dụng phương pháp che để đưa về công thức nguyên hàm số 01.*
- *Nếu mẫu không phân tích được thành tích số $\xrightarrow{PP}$ thêm bớt để đổi biến hoặc lượng giác hóa bằng cách đặt $X=a\tan t$, nếu mẫu đưa được về dạng X^2+a^2.*

Câu 39. Biết $I=\int_3^4\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$, với a,b,c là các số nguyên. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=6$. **B.** $S=2$. **C.** $S=-2$. **D.** $S=0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$.

Khi đó: $I=\int_3^4\dfrac{dx}{x^2+x}=\int_3^4\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\left(\ln x-\ln(x+1)\right)\Big|_3^4=(\ln 4-\ln 5)-(\ln 3-\ln 4)$

$=4\ln 2-\ln 3-\ln 5$.

Suy ra: $a=4,b=-1,c=-1$. Vậy $S=2$.

Câu 40. Cho $\int_0^1\dfrac{xdx}{(x+2)^2}=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+c$ bằng

A. -2. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B.

$\int_0^1\dfrac{xdx}{(x+2)^2}=\int_0^1\dfrac{(x+2)-2}{(x+2)^2}dx=\int_0^1\dfrac{dx}{x+2}-\int_0^1\dfrac{2dx}{(x+2)^2}$

$=\ln(x+2)\Big|_0^1-2.\dfrac{(x+2)^{-1}}{-1}\Bigg|_0^1=\ln 3-\ln 2+\dfrac{2}{3}-1=-\dfrac{1}{3}-\ln 2+\ln 3$.

Vậy $a=-\dfrac{1}{3};b=-1;c=1\Rightarrow 3a+b+c=-1$.

Câu 41. Biết $\int_1^4\dfrac{x^3+x^2+7x+3}{x^2-x+3}dx=\dfrac{a}{b}+c\ln 5$ với a,b,c là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $P=a-b^2-c^3$.

A. -5. **B.** -3. **C.** 6. **D.** -4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_1^4\dfrac{x^3+x^2+7x+3}{x^2-x+3}dx=\int_1^4\left(x+2+\dfrac{3(2x-1)}{x^2-x+3}\right)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+2x+3\ln\left(x^2-x+3\right)\right)\Big|_1^4=\dfrac{27}{2}+3\ln 5$.

Vậy $P=a-b^2-c^3=-4$.

Câu 42. Cho $\int_1^3\dfrac{1}{x^2+2x}dx=a\ln 3+b\ln 5$, với a,b là các số hữu tỉ. Tính $a-4b$

A. $a-4b=1$. **B.** $a-4b=-1$. **C.** $a-4b=3$. **D.** $a-4b=-3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_1^3\dfrac{1}{x^2+2x}dx=\int_1^3\dfrac{1}{(x+2)x}dx=\dfrac{1}{2}\int_1^3\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}\right)dx$

$=\left(\dfrac{1}{2}\ln x-\dfrac{1}{2}\ln(x+2)\right)\Bigg|_1^3=\ln 3-\dfrac{1}{2}\ln 5$.

Vậy $a-4b=3$

Câu 43. Biết $I=\int_1^2\dfrac{x^2+2x}{x+1}dx=\dfrac{5}{a}+\ln b-\ln c\ (a,b,c\in\mathbb{N})$. Tính giá trị biểu thức $S=a-b+c$

A. $S=7$. **B.** $S=3$. **C.** $S=-3$. **D.** $S=1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I=\int_1^2 \frac{x^2+2x}{x+1}dx=\int_1^2 \frac{\left(x^2+2x+1\right)-1}{x+1}dx=\int_1^2 \frac{(x+1)^2-1}{x+1}dx=\int_1^2\left(x+1-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\left(\frac{x^2}{2}+x-\ln(x+1)\right)\Big|_1^2=\frac{5}{2}+\ln 2-\ln 3$. Suy ra $a=2,b=2,c=3\Rightarrow S=2-2+3=3$.

Câu 44. Cho $\int_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$ với *a, b, c* là các số nguyên. Giá trị của *a* + *b* + *c* bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

$\int_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x=\int_1^3 \frac{x+3}{(x+2)(x+1)}\mathrm{d}x=\int_1^3\left(\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x=\left[2\ln(x+1)-\ln(x+2)\right]\Big|_1^3$

$=2\ln 4-\ln 5-2\ln 2+\ln 3=2\ln 2+\ln 3-\ln 5$.

Vậy $a+b+c=2+1-1=2$.

Câu 45. Cho $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=\frac{16}{3}$. Tính $I=\int_0^4\left[\frac{5}{(x+1)^2}-3f(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. $I=-12$. **B.** $I=0$. **C.** $I=-20$. **D.** $I=1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $I=\int_0^4\left[\frac{5}{(x+1)^2}-3f(x)\right]\mathrm{d}x=\int_0^4 \frac{5}{(x+1)^2}\mathrm{d}x-3\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=I_1-16$

$I_1=\int_0^4 \frac{5}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\frac{-5}{x+1}\Big|_0^4=4$.

Vậy $I=4-16=-12$.

Câu 46. Cho $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+b^2-c^3$ bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)}=\int_2^3\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\Big|_2^3=\ln\frac{4}{5}-\ln\frac{3}{4}=4\ln 2-\ln 3-\ln 5$.

Suy ra $a=4,\ b=-1,\ c=-1$. Vậy $a+b^2-c^3=6$.

Câu 47. Biết $\int_0^2 \frac{x^2+5x+2}{x^2+4x+3}\mathrm{d}x=a+b\ln 3+c\ln 5$, $\left(a,b,c\in\mathbb{Q}\right)$. Giá trị của abc bằng

A. -8. **B.** -10. **C.** -12. **D.** 16.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$\int_0^2 \frac{x^2+5x+2}{x^2+4x+3}\mathrm{d}x=\int_0^2\left(1+\frac{x-1}{x^2+4x+3}\right)\mathrm{d}x=\int_0^2\left(1+\frac{-1}{x+1}+\frac{2}{x+3}\right)\mathrm{d}x$

$=\left(x-\ln|x+1|+2\ln|x+3|\right)\Big|_0^2=2+2\ln 5-3\ln 3=a+b\ln 3+c\ln 5$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow a.b.c = -12.$$

D. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

1. Đổi biến số với một số hàm thường gặp

- $\int f(ax+b)^n x\,\mathrm{d}x \xrightarrow{PP} t = ax+b$. • $\int_a^b \sqrt[n]{f(x)} f'(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{PP} t = \sqrt[n]{f(x)}$.
- $\int_a^b f(\ln x)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow{PP} t = \ln x$. • $\int_a^b f(e^x)e^x\,\mathrm{d}x \xrightarrow{PP} t = e^x$.
- $\int_a^b f(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x \xrightarrow{PP} t = \sin x$. • $\int_a^b f(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x \xrightarrow{PP} t = \cos x$.
- $\int_a^b f(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow{PP} t = \tan x$. • $\int_a^b f(\sin x \pm \cos x).(\sin x \pm \cos x)\mathrm{d}x \Rightarrow t = \sin x \pm \cos x$.
- $\int_\alpha^\beta f(\sqrt{a^2 - x^2})x^{2n}\,\mathrm{d}x \xrightarrow{PP} x = a\sin t$. • $\int_\alpha^\beta f\left((\sqrt{x^2+a^2})^m\right)x^{2n}\,\mathrm{d}x \xrightarrow{PP} x = a\tan t$.
- $\int_\alpha^\beta f\left(\sqrt{\frac{a \pm x}{a \mp x}}\right)\mathrm{d}x \xrightarrow{PP} x = a\cos 2t$. • $\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(ax+b)(cx+d)}} \Rightarrow t = \sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d}$.
- $\int_\alpha^\beta R\left[\sqrt[s_1]{ax+b}, .., \sqrt[s_k]{ax+b}\right]\mathrm{d}x \Rightarrow t^n = ax+b$. • $\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}x}{(a+bx^n)\sqrt[n]{a+bx^n}} \xrightarrow{PP} x = \frac{1}{t}\cdot$

2. Đổi biến số với hàm ẩn

- ***Nhận dạng tương đối***: *Đề cho $f(x)$, yêu cầu tính $f(\neq x)$ hoặc đề cho $f(\neq x)$, yêu cầu tính $f(x)$.*
- ***Phương pháp***: *Đặt $t = (\neq x)$.*
- ***Lưu ý***: *Đổi biến nhớ đổi cận và ở trên đã sử dụng tính chất: "**Tích phân không phụ thuộc vào biến số, mà chỉ phụ thuộc vào hai cận**", nghĩa là* $\int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \cdots = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \cdots$

MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT THÔNG HIỂU

Câu 48. Xét $\int_0^2 xe^{x^2}\mathrm{d}x$, nếu đặt $u = x^2$ thì $\int_0^2 xe^{x^2}\mathrm{d}x$ bằng

A. $2\int_0^2 e^u\mathrm{d}u$. **B.** $2\int_0^4 e^u\mathrm{d}u$. **C.** $\frac{1}{2}\int_0^2 e^u\mathrm{d}u$. **D.** $\frac{1}{2}\int_0^4 e^u\mathrm{d}u$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $u = x^2 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x \Leftrightarrow x\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2}$.

Khi $x = 0 \Rightarrow u = 0$, khi $x = 2 \Rightarrow u = 4$.

Do đó $\int_0^2 xe^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^4 e^u\mathrm{d}u$.

Câu 49. Tính tích phân $I = \int_0^\pi \cos^3 x.\sin x\mathrm{d}x$.

A. $I=-\frac{1}{4}\pi^4$ **B.** $I=-\pi^4$ **C.** $I=0$ **D.** $I=-\frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I=\int_0^{\pi}\cos^3 x.\sin xdx$. Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx\Leftrightarrow -dt=\sin xdx$

Đổi cận: Với $x=0\Rightarrow t=1$; với $x=\pi\Rightarrow t=-1$.

Vậy $I=-\int_1^{-1}t^3dt=\int_{-1}^{1}t^3dt=\left.\frac{t^4}{4}\right|_{-1}^{1}=\frac{1^4}{4}-\frac{(-1)^4}{4}=0$.

Câu 50. Cho $\int_5^{21}\frac{dx}{x\sqrt{x+4}}=a\ln 3+b\ln 5+c\ln 7$, với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+b=-2c$. **B.** $a+b=c$. **C.** $a-b=-c$. **D.** $a-b=-2c$.

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{x+4}\Rightarrow 2tdt=dx$.

Với $x=5\Rightarrow t=3$; $x=21\Rightarrow t=5$

Ta có $\int_5^{21}\frac{dx}{x\sqrt{x+4}}=2\int_3^5\frac{dt}{t^2-4}=\frac{1}{2}\left(\ln|t-2|-\ln|t+2|\right)\Big|_3^5=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln 5-\frac{1}{2}\ln 7$.

Câu 51. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx$. **B.** $\int_{-1}^{1}f(x)dx=0$.

C. $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(1-x)dx$. **D.** $\int_{-1}^{1}f(x)dx=2\int_0^1 f(x)dx$.

Lời giải

Chọn C

C. Đặt $t=1-x\Rightarrow dt=-dx$. Đổi cận: $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=0\\x=0\Rightarrow t=1\end{cases}$.

Ta có: $\int_0^1 f(1-x)dx=-\int_1^0 f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt$.

Vậy $\int_0^1 f(1-x)dx=\int_0^1 f(x)dx$.

Câu 52. Giả sử $\int_1^{16}f(x)\mathrm{d}x=2020$, khi đó giá trị của $\int_1^2 x^3.f(x^4)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2020^4. **B.** $\sqrt[4]{2020}$. **C.** 8080. **D.** 505.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x^4\Rightarrow dt=4x^3dx$

$x=1\Rightarrow t=1$

$x=2\Rightarrow t=16$

$I=\int_1^2 x^3.f(x^4)\mathrm{d}x=\int_1^{16}f(t)\frac{dt}{4}=\frac{1}{4}\int_1^{16}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.2020=505$

Câu 53. Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 f\left(2x\right)dx = 2$. Tích phân $\int\limits_0^2 f\left(x\right)dx$ bằng:

A. 8. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$.

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = 1 \Rightarrow t = 2$

$\int\limits_0^1 f\left(2x\right)dx = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int\limits_0^2 f\left(t\right)dt = 2 \Leftrightarrow \int\limits_0^2 f\left(t\right)dt = 4$.

Do đó $\int\limits_0^2 f\left(x\right)dx = 4$.

Câu 54. Cho $\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 2$. Khi đó $\int\limits_1^4 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t$. Khi $x = 1$ thì $t = 1$; $x = 4$ thì $t = 2$.

Suy ra $\int\limits_1^4 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 f\left(t\right).2\mathrm{d}t = 2\int\limits_1^2 f\left(t\right)\mathrm{d}t = 2.2 = 4$.

Vậy $\int\limits_1^4 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 4$.

Câu 55. Cho $\int\limits_0^2 \left[2f\left(x\right) - 3g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x = 6$, $\int\limits_0^2 g\left(x\right)\mathrm{d}x = 2$. Tính $I = \int\limits_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}x$

A. $I = -6$. **B.** $I = 12$. **C.** $I = 6$. **D.** $I = 3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$\int\limits_0^2 \left[2f\left(x\right) - 3g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x = 6 \Leftrightarrow 2\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x - 3\int\limits_0^2 g\left(x\right)\mathrm{d}x = 6$

$\Leftrightarrow 2\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x - 3.2 = 6 \Leftrightarrow \int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 6$

Đặt $x = 2t \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t$

Đổi cận

x	0	2
t	0	1

Khi đó $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 6 \Leftrightarrow 2\int\limits_0^1 f\left(2t\right)\mathrm{d}t = 6 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}x = 3$

Vậy $I = 3$.

Câu 56. Cho $I = \int\limits_0^4 x\sqrt{1+2x}\,\mathrm{d}x$ và $u = \sqrt{2x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $I=\frac{1}{2}\left(\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\right)\Big|_1^3$. **B.** $I=\int\limits_1^3 u^2\left(u^2-1\right)\mathrm{d}u$.

C. $I=\frac{1}{2}\int\limits_1^3 x^2\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x$. **D.** $I=\frac{1}{2}\int\limits_1^3 u^2\left(u^2-1\right)\mathrm{d}u$.

Lời giải

Chọn B

Tính $I=\int\limits_0^4 x\sqrt{1+2x}\,\mathrm{d}x$.

+ Đặt $u=\sqrt{2x+1}\Rightarrow u^2=2x+1\Rightarrow x=\frac{u^2-1}{2}$.

$\Rightarrow 2u\mathrm{d}u=2\mathrm{d}x\Rightarrow u\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$

Đổi cận

$x=0\Rightarrow u=1$

$x=4\Rightarrow u=3$

$$I=\int\limits_0^4 x\sqrt{1+2x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^3\frac{u^2-1}{2}.u.u\mathrm{d}u=\int\limits_1^3\frac{u^2-1}{2}.u.u\mathrm{d}u=I=\frac{1}{2}\int\limits_1^3 u^2\left(u^2-1\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\left(\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\right)\Big|_1^3.$$

$\Rightarrow$ A, C, D đúng; B sai.

Câu 57. Cho $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\cos^2 x dx$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $0<I<\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}<I<\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}<I<\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}<I<1$

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{1}{2}$

Vậy $I=-\int\limits_1^{\frac{1}{2}}t^2dt=\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 t^2dt=\frac{t^3}{3}\Big|_{\frac{1}{2}}^1=\frac{7}{24}$

MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

Câu 58. Cho hàm số $f(x)$ có $f(3)=3$ và $f'(x)=\frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}$, $\forall x>0$. Khi đó $\int\limits_3^8 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** $\frac{197}{6}$. **C.** $\frac{29}{2}$. **D.** $\frac{181}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Xét $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$. Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow x+1=t^2\Rightarrow x=t^2-1\Rightarrow \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

Khi đó, $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\int\frac{t^2-1}{t^2-t}\cdot 2t\mathrm{d}t=\int\frac{(t-1).(t+1)}{t.(t-1)}\cdot 2t\mathrm{d}t=\int(2t+2)\mathrm{d}t$

$=t^2+2t+C=(x+1)+2\sqrt{x+1}+C$.

Mà $f(3)=3 \Leftrightarrow (3+1)+2\sqrt{3+1}+C=3 \Leftrightarrow C=-5$.

$\Rightarrow f(x)=(x+1)+2\sqrt{x+1}-5=x+2\sqrt{x+1}-4$.

$\Rightarrow \int_3^8 f(x)\mathrm{d}x=\int_3^8\left(x+2\sqrt{x+1}-4\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}\sqrt{(x+1)^3}-4x\right)\Big|_3^8=36-\frac{19}{6}=\frac{197}{6}$.

Câu 59. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$ và $f'(x)=\cos x\cos^2 2x, \forall \in R$. Khi đó $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1042}{225}$. **B.** $\frac{208}{225}$. **C.** $\frac{242}{225}$. **D.** $\frac{149}{225}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\cos x\cos^2 2x\mathrm{d}x=\int\cos x\left(1-2\sin^2 x\right)^2\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sin x \Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow f(x)=\int\left(1-2t^2\right)^2\mathrm{d}t=\int\left(1-4t^2+4t^4\right)\mathrm{d}t=t-\frac{4}{3}t^3+\frac{4}{5}t^5+C=\sin x-\frac{4}{3}\sin^3 x+\frac{4}{5}\sin^5 x+C$.

Mà $f(0)=0 \Rightarrow C=0$.

Do đó $f(x)=\sin x-\frac{4}{3}\sin^3 x+\frac{4}{5}\sin^5 x=\sin x\left(1-\frac{4}{3}\sin^2 x+\frac{4}{5}\sin^4 x\right)$.

$=\sin x\left[1-\frac{4}{3}\left(1-\cos^2 x\right)+\frac{4}{5}\left(1-\cos^2 x\right)^2\right]$.

Ta có $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin x\left[1-\frac{4}{3}\left(1-\cos^2 x\right)+\frac{4}{5}\left(1-\cos^2 x\right)^2\right]\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\cos x \Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$

Đổi cận $x=0 \Rightarrow t=1$; $x=\pi \Rightarrow t=-1$.

Khi đó, $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left[1-\frac{4}{3}\left(1-t^2\right)+\frac{4}{5}\left(1-t^2\right)^2\right]\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}\left(\frac{7}{15}-\frac{4}{15}t^2+\frac{4}{5}t^4\right)\mathrm{d}t$

$=\left(\frac{7}{15}t-\frac{4}{45}t^3+\frac{4}{5}t^4\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{242}{225}$.

Câu 60. Biết $\int_1^2\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}dx=\sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ với a,b,c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$

A. $P=24$ **B.** $P=12$ **C.** $P=18$ **D.** $P=46$

Lời giải

Chọn D

Cách 1

$$\int_1^2\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}dx=\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\int_1^2\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)^2}dx$$

Đăt $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{x} \Rightarrow dt=\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx \Leftrightarrow 2dt=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}}dx$

Khi đó $I=\int_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\frac{2}{t^2}dt=\left(\frac{-2}{t}\right)\Big|_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=-2\sqrt{3}+4\sqrt{2}-2=\sqrt{32}-\sqrt{12}-2$

$\Rightarrow P=a+b+c=32+12+2=46.$

Cách 2

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}dx=\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\int_1^2 \frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}dx$$

$$=\int_1^2 \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}}dx=\int_1^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx=\left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}\right)\Big|_1^2=2\sqrt{2}-2-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}=\sqrt{32}-\sqrt{12}-2$$

Câu 61. Cho $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}=a+b\ln\frac{1+e}{2}$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S=a^3+b^3$.

A. $S=2$. **B.** $S=-2$. **C.** $S=0$. **D.** $S=1$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1. Đặt $t=e^x \Rightarrow dt=e^x dx$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1; x=1\Rightarrow t=e$

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}=\int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x\left(e^x+1\right)}=\int_1^e \frac{dt}{t(t+1)}=\int_1^e\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\left(\ln|t|-\ln|t+1|\right)\Big|_1^e=\left(1-\ln(1+e)\right)-(-\ln 2)$$

$$=1+\ln\frac{2}{1+e}=1-\ln\frac{1+e}{2}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}\Rightarrow S=a^3+b^3=0.$$

Cách 2. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}=\int_0^1 \frac{\left(e^x+1\right)-e^x}{e^x+1}dx=\int_0^1 dx-\int_0^1 \frac{d\left(e^x+1\right)}{e^x+1}=x\Big|_0^1-\ln\left|e^x+1\right|\Big|_0^1=1-\ln\frac{1+e}{2}$.

Suy ra $a=1$ và $b=-1$. Vậy $S=a^3+b^3=0$.

Câu 62. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}e^x+m, & \text{khi } x\ge 0\\ 2x\sqrt{3+x^2}, & \text{khi } x<0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^1 f(x)dx=ae+b\sqrt{3}+c$, $(a,b,c\in\mathbb{Q})$. Tổng $T=a+b+3c$ bằng

A. $T=15$. **B.** $T=-10$. **C.** $T=-19$. **D.** $T=-17$.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x+m\right)=1+m$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(2x\sqrt{3+x^2}\right)=0$; $f(0)=1+m$

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ Hàm số liên tục tại $x=0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0) \Leftrightarrow 1+m=0\Leftrightarrow m=-1$

Ta có $\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^0 2x\sqrt{3+x^2}dx+\int_0^1\left(e^x-1\right)dx=\int_{-1}^0\left(3+x^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(3+x^2\right)+\int_0^1\left(e^x-1\right)dx$

$$=\frac{2}{3}\left[\left(3+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^0+\left[e^x-x\right]_0^1=e+2\sqrt{3}-\frac{22}{3}$$

Nên $a=1; b=2; c=-\frac{22}{3}\Rightarrow T=-19$.

Câu 63. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $\int_{-2}^2 f\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)dx=1$, $\int_1^5 \frac{f(x)}{x^2}dx=3$. Tính $\int_1^5 f(x)dx$.

A. -15. **B.** -2. **C.** -13. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Đặt: $t=\sqrt{x^2+5}-x\Rightarrow x=\frac{5-t^2}{2t}\Rightarrow dx=-\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2t^2}\right)dt$.

Ta có: $1=\int\limits_1^5 f(t)\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2t^2}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_1^5 f(t)\mathrm{d}t+\frac{5}{2}\int\limits_1^5\frac{f(t)}{t^2}\mathrm{d}t$

$\Rightarrow\frac{1}{2}\int\limits_1^5 f(t)\mathrm{d}t=1-\frac{5}{2}\int\limits_1^5\frac{f(t)}{t^2}\mathrm{d}t=1-\frac{5}{2}.3=-\frac{13}{2}$

$\Rightarrow\int\limits_1^5 f(t)\mathrm{d}t=-13$

Câu 64. Biết rằng tích phân $\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{3x+5\sqrt{3x+1}+7}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. $-\frac{10}{3}$. **B.** $-\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{10}{3}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt{3x+1}\Rightarrow t^2=3x+1\Rightarrow x=\frac{t^2-1}{3}\Rightarrow\frac{2}{3}t\mathrm{d}t=dx$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1;x=1\Rightarrow t=2$.

$\Rightarrow\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{3x+5\sqrt{3x+1}+7}=\frac{2}{3}\int\limits_1^2\frac{t}{t^2+5t+6}\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\int\limits_1^2\left(\frac{-2}{t+2}+\frac{3}{t+3}\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\left(-2\ln|t+2|+3\ln|t+3|\right)\Big|_1^2$

$=-\frac{20}{3}\ln 2+\frac{4}{3}\ln 3+2\ln 5=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$.

$\Rightarrow a=-\frac{20}{3};b=\frac{4}{3};c=2\Rightarrow a+b+c=-\frac{10}{3}$.

Câu 65. Cho $\int\limits_0^3\frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}dx=\frac{a}{3}+b\ln 2+c\ln 3$, với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 2. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Đặt $I=\int\limits_0^3\frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}dx$.

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Leftrightarrow t^2=x+1\Rightarrow 2tdt=dx$

Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\x=3\Rightarrow t=2\end{cases}$

Khi đó $I=\int\limits_1^2\frac{t^2-1}{4+2t}2tdt=\int\limits_1^2\frac{t^3-t}{2+t}dt=\int\limits_1^2\left(t^2-2t+3-\frac{6}{t+2}\right)dt$

$=\left(\frac{1}{3}t^3-t^2+3t-6\ln|t+2|\right)\Big|_1^2$

$=\left(\frac{8}{3}-4+6-6\ln 4\right)-\left(\frac{1}{3}-1+3-6\ln 3\right)$

$=\frac{7}{3}-12\ln 2+6\ln 3$.

Suy ra $\begin{cases} a=7 \\ b=-12 \\ c=6 \end{cases}$

Vậy $a+b+c=1$.

Câu 66. Biết $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = a\sqrt{\mathrm{e}}+b$ với $a,\ b\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a.b$

A. $P=4$. **B.** $P=-8$. **C.** $P=8$. **D.** $P=-4$.

Lời giải

Chọn B

Xét tích phân $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$. Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow t^2=x\Rightarrow \mathrm{d}x=2t.\mathrm{d}t$

Với $x=1\Rightarrow t=1$. với $x=e\Rightarrow t=\sqrt{e}$

Khi đó $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int\limits_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln t^2}{t}2t.\mathrm{d}t=4\int\limits_1^{\sqrt{e}} \ln t\mathrm{d}t=4M$, với $M=\int\limits_1^{\sqrt{e}} \ln t\mathrm{d}t$

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v=x \end{cases}$.

Khi đó $M=\int\limits_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} \ln t\mathrm{d}t = x\ln x\Big|_1^{\sqrt{\mathrm{e}}}-\int\limits_1^{\sqrt{\mathrm{e}}}\mathrm{d}x=\sqrt{\mathrm{e}}\ln\sqrt{\mathrm{e}}-\left(\sqrt{\mathrm{e}}-1\right)=1-\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}$

Vậy $I=4M=4\left(1-\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}\right)=4-2\sqrt{\mathrm{e}}$. Suy ra $a=-2;\ b=4$. Vậy $P=ab=-8$.

Câu 67. Giả sử $I=\int\limits_1^{64}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=a\ln\frac{2}{3}+b$ với a,b là các số nguyên. Khi đó giá trị $a-b$ là

A. -17. **B.** 5. **C.** -5. **D.** 17.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sqrt[6]{x}\Rightarrow t^6=x\Rightarrow \mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$.

Với x=1 $\Rightarrow$ t=1

x=64 $\Rightarrow$ t=2

Do đó $I=\int\limits_1^2\frac{6t^5\mathrm{d}t}{t^3+t^2}=\int\limits_1^2\frac{6t^5\mathrm{d}t}{t^3+t^2}=\int\limits_1^2\frac{6t^3\mathrm{d}t}{t+1}=\int\limits_1^2\left(6t^2-6t+6-\frac{6}{t+1}\right)\mathrm{d}t$

$=\left(2t^3-3t^2+6t-6\ln(t+1)\right)\Big|_1^2=6\ln\frac{2}{3}+11.$

Suy ra $a=6;b=11$. Vậy $a-b=-5$.

Câu 68. Biết rằng $\int\limits_0^{\pi^2}\left(\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=a+b\pi$ với $a,b\in R$. Tính $a+b$.

A. π. **B.** -4. **C.** -2. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow t^2=x\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$

Đổi cận: $\begin{cases} x=\pi^2\Rightarrow t=\pi \\ x=0\Rightarrow t=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\pi^2}\left(\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}\right)dx=\int_0^{\pi}2t\left(\sin t+\cos t\right)dt$$

Đặt $\begin{cases}u=2t\\ dv=\left(\sin t+\cos t\right)dt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2dt\\ v=\sin t-\cos t\end{cases}$

$$\Rightarrow I=2t\left(\sin t-\cos t\right)\Big|_0^{\pi}-2\int_0^{\pi}\left(\sin t-\cos t\right)dt=2\pi+2\left(\cos t+\sin t\right)\Big|_0^{\pi}=-4+2\pi.$$

Câu 69. Biết tích phân $\int_0^{\ln 6}\frac{e^x}{1+\sqrt{e^x+3}}dx=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=0$. **B.** $T=2$. **C.** $T=1$. **D.** $T=-1$.

Lời giải

Chọn A

Đặt: $t=1+\sqrt{e^x+3}\Rightarrow dt=\frac{e^x}{2\sqrt{e^x+3}}dx\Rightarrow e^x dx=2\left(t-1\right)dt$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=3$

$x=\ln 6\Rightarrow t=4$

$$\int_0^{\ln 6}\frac{e^x}{1+\sqrt{e^x+3}}dx=\int_3^4\frac{2\left(t-1\right)}{t}dt=2\left(t-\ln t\right)\Big|_3^4=2\left(4-\ln 4-3+\ln 3\right)=2-4\ln 2+2\ln 3.$$

Do đó: $a=2$; $b=-4$; $c=2$.

Vậy $T=a+b+c=0$.

Câu 70. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2 x+3\sin x+2}dx=a\ln 2+b\ln 3$ với a,b,c là các số nguyên. Tính $P=2a+b$.

A. 3. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2 x+3\sin x+2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\left(\sin x+1\right)\left(\sin x+2\right)}d\left(\sin x\right)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin x+1}-\frac{1}{\sin x+2}\right)d\left(\sin x\right)=\left(\ln\left|\sin x+1\right|-\ln\left|\sin x+2\right|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$=\ln 2-\ln 1-\left(\ln 3-\ln 2\right)=2\ln 2-\ln 3$.

Suy ra $a=2,b=-1\Rightarrow 2a+b=3$.

Câu 71. Cho biết $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 x\tan x dx=\ln a-\frac{b}{8}$ với a,b là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $M=3a-2b$ bằng

A. 12. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Xét $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 x\tan x dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 x.\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\left(1-\cos^2 x\right)\sin x}{\cos x}dx$.

Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin x dx$

Với $x=0\Rightarrow t=1$; $x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{1}{2}$.

Do đó $I=\int\limits_{1}^{\frac{1}{2}}\frac{\left(1-t^2\right)\left(-\mathrm{d}t\right)}{t}=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\left(1-t^2\right)\mathrm{d}t}{t}=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{t}-t\right)\mathrm{d}t=\left(\ln|t|-\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}=\ln 2-\frac{3}{8}$.

Suy ra $a=2, b=3$.

Vậy $M=3a-2b=3.2-2.3=0$.

Câu 72. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên tập hợp $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_{0}^{\ln 3} f\left(e^x+3\right)\mathrm{d}x=1$, $\int\limits_{4}^{6}\frac{(2x-1)f(x)}{x-3}\mathrm{d}x=-3$.

Giá trị của $\int\limits_{4}^{6} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 10. **B.** -5. **C.** -4. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

Đặt $I_1=\int\limits_{0}^{\ln 3} f\left(e^x+3\right)\mathrm{d}x=1$.

Đặt $e^x+3=t\Rightarrow e^x=t-3\Rightarrow e^x\mathrm{d}x=dt\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{dt}{t-3}$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=4$, $x=\ln 3\Rightarrow t=6$.

Khi đó: $I_1=\int\limits_{4}^{6}\frac{f(t)\mathrm{d}t}{t-3}=\int\limits_{4}^{6}\frac{f(x)\mathrm{d}x}{x-3}=1$.

Ta có $\int\limits_{4}^{6}\frac{(2x-1)f(x)}{x-3}\mathrm{d}x=\int\limits_{4}^{6}\frac{(2x-6)f(x)+5f(x)}{x-3}\mathrm{d}x=2\int\limits_{4}^{6}f(x)\mathrm{d}x+5\int\limits_{4}^{6}\frac{f(x)}{x-3}\mathrm{d}x=-3$.

$\Rightarrow 2\int\limits_{4}^{6}f(x)\mathrm{d}x+5=-3\Rightarrow \int\limits_{4}^{6}f(x)\mathrm{d}x=-4$.

Câu 73. Biết rằng $\int\limits_{1}^{e}\frac{\sqrt{4\ln x+1}}{x}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{6}$ với $a,b\in\mathbb{N}^*$. Giá trị của $a-3b+1$ bằng

A. 125. **B.** 120. **C.** 124. **D.** 123.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\sqrt{4\ln x+1}=t\Rightarrow 4\ln x+1=t^2\Rightarrow \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}t\mathrm{d}t$.

Với $x=1\Rightarrow t=1; x=e\Rightarrow t=\sqrt{5}$.

$\Rightarrow \int\limits_{1}^{e}\frac{\sqrt{4\ln x+1}}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{\sqrt{5}}t^2\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{125}-1}{6}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{6}\Rightarrow a=125; b=1$.

$\Rightarrow a-3b+1=123$.

Câu 74. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $x+\left[f(x)\right]^3+2f(x)=1$, với $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $\int\limits_{-2}^{1}f(x)dx$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $x+\left[f(x)\right]^3+2f(x)=1$.

$\Leftrightarrow \left[f(x)\right]^3+2.f(x)=1-x$.

Đặt $t = f(x)$

Suy ra $t^3 + 2t = 1 - x$.

$\Rightarrow -\left[3t^2 + 2\right]\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. (1)

Với $x = -2 \Rightarrow t^3 + 2t = 3 \Leftrightarrow t = 1$.

Với $x = 1 \Rightarrow t^3 + 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Từ (1) ta có $\int\limits_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_{1}^{0}\left[3t^2 + 2\right]t.\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{1}\left[3t^2 + 2\right]t\mathrm{d}t$.

$= \left(\frac{3}{4}t^4 + t^2\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{4}$. Vậy $\int\limits_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{7}{4}$.

Câu 75. Biết $\int\limits_{1}^{e}\frac{\sqrt{3+\ln x}}{x}.\mathrm{d}x = \frac{a - b\sqrt{c}}{3}$, trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $c < 10$. Giá trị của $a + b + c$ bằng

A. 19. **B.** 13. **C.** 28. **D.** 25.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \sqrt{3+\ln x} \Rightarrow t^2 = 3 + \ln x \Rightarrow 2t.\mathrm{d}t = \frac{1}{x}.\mathrm{d}x$.

$\int\limits_{1}^{e}\frac{\sqrt{3+\ln x}}{x}.\mathrm{d}x = \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} t.2t.\mathrm{d}t = \frac{2t^3}{3}\Big|_{\sqrt{3}}^{2} = \frac{16}{3} - 2\sqrt{3} = \frac{16 - 6\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra: $a = 16$, $b = 6$, $c = 3$.

Vậy $a + b + c = 25$.

Câu 76. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. -1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

$\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 6x^2 f(x^3)\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 \frac{6}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 6x^2 f(x^3)\mathrm{d}x - 4$.

Đặt $t = x^3 \Rightarrow \mathrm{d}t = 3x^2\mathrm{d}x$.

Ta có: $\int\limits_0^1 6x^2 f(x^3)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 2f(t)\mathrm{d}t = 2\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Vậy nên $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x - 4 \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 4$.

E. PHƯƠNG PHÁP TỪNG PHẦN

1. Định lí: *Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì*

$$I = \int\limits_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x \text{ hay } I = \int\limits_a^b u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\mathrm{d}u.$$

2. Phương pháp thực hành:

- *Nhận dạng: Tích hai hàm khác loại nhận nhau, chẳng hạn: đa thức nhân lôga, mũ nhân lượng giác…*
- *Đặt* $\begin{cases} u = \cdots\cdots\cdots \xrightarrow{\text{Vi phân}} \mathrm{d}u = \cdots\cdots\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \cdots\cdot\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{NH}} v = \cdots\cdots\cdots \end{cases}$. *Suy ra:* $I = \int\limits_a^b u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\mathrm{d}u.$
- *Thứ tự ưu tiên chọn u: log – đa – lượng – mũ và $\mathrm{d}v =$ phần còn lại.*

- ***Lưu ý***: *Tùy vào bài toán mà ta cần chọn* u *và* $\mathrm{d}v$ *sao cho* $\int_a^b v\mathrm{d}u$ *đơn giản nhất. Cần nhớ rằng bậc của đa thức và bậc của lnx tương ứng với số phần lấy tích phân từng phần.*

3. Tính chất của nguyên hàm và tích phân

- *Nếu* $F(x)$ *là một nguyên hàm của hàm số* $f(x)$ *thì* $F'(x) = f(x)$.
- $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C.$
- $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a).$
- *Tích phân không phụ thuộc vào biến mà chỉ phụ thuộc vào 2 cận, như* $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \ldots.$

Câu 77. Tính tích phân $I = \int_1^e x\ln x dx$

A. $I = \frac{1}{2}$ **B.** $I = \frac{e^2-2}{2}$ **C.** $I = \frac{e^2+1}{4}$ **D.** $I = \frac{e^2-1}{4}$

Lời giải

Chọn C

$I = \int_1^e x\ln x dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow I = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_0^e - \int_0^e \frac{1}{x}.\frac{x^2}{2}dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_0^e xdx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_0^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$

Câu 78. Cho $\int_1^e (1 + x\ln x)\,dx = ae^2 + be + c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=c$ **B.** $a+b=-c$ **C.** $a-b=c$ **D.** $a-b=-c$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_1^e (1+x\ln x)\,dx = \int_1^e 1.dx + \int_1^e x\ln x\,dx = e - 1 + \int_1^e x\ln x\,dx$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x.dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

Khi đó $\int_1^e x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}x^2\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$.

Suy ra $\int_1^e (1+x\ln x)\,dx = e - 1 + \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + e - \frac{3}{4}$ nên $a = \frac{1}{4}$, $b = 1$, $c = -\frac{3}{4}$.

Vậy $a - b = c$.

Câu 79. Cho $\int_0^2 2x\ln(1+x)dx = a\ln b$ với $a;b \in \mathbb{N}^*$ và b là số nguyên tố. Tính $3a+4b$.

A. 42. **B.** 21. **C.** 12. **D.** 32.

Lời giải

Chọn B

Xét tích phân: $I=\int_0^2 2x\ln(1+x)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u=\ln(1+x)\Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{1}{1+x}\mathrm{d}x \\ 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}v\Rightarrow v=x^2 \end{cases}$

$I=\int_0^2 2x\ln(1+x)\mathrm{d}x=x^2\ln(1+x)\Big|_0^2-\int_0^2\dfrac{x^2dx}{1+x}=4\ln 3-\int_0^2\dfrac{x^2-1+1}{1+x}dx$

$=4\ln 3-\int_0^2(x-1)dx-\int_0^2\dfrac{1}{1+x}dx=4\ln 3-(\dfrac{x^2}{2}-x)\Big|_0^2-\ln|1+x|\Big|_0^2$

$=4\ln 3-\ln 3=3\ln 3$. Vậy $a=3;\ b=3$ và $3a+4b=21$.

Câu 80. Cho $f(x)$ là một nguyên hàm của $g(x)$ trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2},\int_0^{\frac{\pi}{2}}xg(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=a+b\pi$, trong đó a,b là các số hữu tỉ. Tính $P=a+4b$.

A. $P=-\dfrac{3}{2}$. **B.** $P=-\dfrac{7}{4}$. **C.** $P=\dfrac{5}{2}$. **D.** $P=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=g(x)\mathrm{d}x \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=f(x) \end{cases}$

Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}}xg(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}.\dfrac{1}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}xg(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow a=-\dfrac{1}{2};b=\dfrac{1}{4}\Rightarrow P=-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}$

Câu 81. $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(2x+1)e^{2x}$ thỏa $F(0)=0$. Tính $F(1)$

A. $F(1)=2e^2$. **B.** $F(1)=\dfrac{e^2}{2}$. **C.** $F(1)=e^2$. **D.** $F(1)=\dfrac{3e^2}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(2x+1)e^{2x}$ suy ra

$\int_0^1(2x+1)e^{2x}dx=F(x)\big|_0^1=F(1)-F(0)$.

Tính $I=\int_0^1(2x+1)e^{2x}dx$. Đặt $\begin{cases} u=2x+1 \\ dv=e^{2x}dx \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=2dx \\ v=\dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$.

Suy ra $I=(2x+1)\dfrac{1}{2}e^{2x}\big|_0^1-\int_0^1 e^{2x}dx=\dfrac{3}{2}e^2-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}e^{2x}\big|_0^1=\dfrac{3}{2}e^2-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}(e^2-1)=e^2$.

Suy ra $F(1)-F(0)=e^2$, mặt khác $F(0)=0$ suy ra $F(1)=e^2$.

Câu 82. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x=10$ và $2f(1)-f(0)=2$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-12$ **B.** $I=8$ **C.** $I=1$ **D.** $I=-8$

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u=x+1 \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=f(x) \end{cases}$. Khi đó $I=(x+1)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

Suy ra $10=2f(1)-f(0)-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-10+2=-8$

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-8$.

Câu 83. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x+\cos x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{a}{b}\ln 2+\frac{\pi}{c}$, với a,b,c là các số nguyên. Khi đó, $\frac{bc}{a}$ bằng

A. -6. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** 6. **D.** $-\frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $u=\ln(\sin x+\cos x)$; $\mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \Rightarrow \mathrm{d}u=\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}$ và chọn $v=\tan x+1=\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}$.

Khi đó $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x+\cos x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=(\tan x+1).\ln(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$.

$I=\ln 2-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x}=\ln 2-\frac{\pi}{4}-\ln(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln 2-\frac{\pi}{4}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}$.

Vậy $a=3;\ b=2;\ c=-4 \Rightarrow \frac{bc}{a}=-\frac{8}{3}$.

Câu 84. Biết tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x=a\pi+b\ln 2$ với a,b là các số hữu tỷ. Tính $T=16a-8b$?

A. $T=4$. **B.** $T=5$. **C.** $T=2$. **D.** $T=-2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u=\frac{x}{2} \\ \mathrm{d}v=\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\frac{1}{2}\mathrm{d}x \\ v=\tan x \end{cases}$

$I=\frac{x}{2}\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2$ suy ra $a=\frac{1}{8}, b=\frac{-1}{4}\Rightarrow T=2+2=4$

Vậy chọn **A**

Câu 85. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[0;5]$ thỏa mãn $\int_0^5 xf'(x)e^{f(x)}dx=8$; $f(5)=\ln 5$. Tính $I=\int_0^5 e^{f(x)}dx$.

A. -33. **B.** 33. **C.** 17. **D.** -17.

Lời giải

Chọn C

Đặt: $u=x$; $dv=f'(x)e^{f(x)}dx$ suy ra $du=dx$, chọn $v=e^{f(x)}$.

Do đó $\int_0^5 xf'(x)e^{f(x)}dx=xe^{f(x)}\Big|_0^5-\int_0^5 e^{f(x)}dx=5e^{f(5)}-I\Rightarrow 8=25-I\Leftrightarrow I=17$.

Câu 86. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $f(0)=2$, $\int_0^2(2x-4)f'(x)dx=4$. Tính tích phân $I=\int_0^2 f(x)dx$.

A. $I=2$. **B.** $I=-2$. **C.** $I=6$. **D.** $I=-6$.

Lời giải

Chọn A

Xét $K=\int_0^2(2x-4)f'(x)dx$. Đặt $\begin{cases}2x-4=u\\ f'(x)dx=dv\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2dx\\ v=f(x)\end{cases}$.

$\Rightarrow K=(2x-4)f(x)\Big|_0^2-2\int_0^2 f(x)dx=\left[(2.2-4)f(2)-(2.0-4)f(0)\right]-2I.$

$=4f(0)-2I=4.2-2I=8-2I.$

Mà $K=4\Rightarrow I=2$.

Câu 87. Cho $\int_1^2\frac{\ln(1+2x)}{x^2}dx=\frac{a}{2}\ln 5+b\ln 3+c\ln 2$, với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a+2(b+c)$ là:

A. 0. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng phương pháp tích phân từng phần:

Đặt: $\begin{cases}u=\ln(1+2x)\\ dv=\frac{1}{x^2}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{2}{2x+1}dx\\ \text{chọn } v=-\frac{1}{x}-2=\frac{-(2x+1)}{x}\end{cases}$.

$\Rightarrow\int_1^2\frac{\ln(1+2x)}{x^2}dx=\frac{-(2x+1)}{x}\cdot\ln(1+2x)\Big|_1^2+\int_1^2\frac{2}{x}dx$

$=\left(-\frac{5}{2}\ln 5+3\ln 3\right)+2\ln|x|\Big|_1^2$

$=\frac{-5}{2}\ln 5+3\ln 3+2\ln 2$.

$\Rightarrow a=-5$, $b=3$, $c=2$.

Vậy $a+2(b+c)=5$.

Câu 88. Tích phân $\int_1^2 \frac{x\ln xdx}{(x^2+1)^2}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$ (với a,b,c là các số hữu tỉ). Tính tổng $a+b-c$.

A. $\frac{-2}{5}$. **B.** $\frac{9}{10}$. **C.** $-\frac{9}{10}$. **D.** $\frac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=\frac{x}{(x^2+1)^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{dx}{x} \\ v=-\frac{1}{2(x^2+1)} \end{cases}$

Ta có $\int_1^2 \frac{x\ln xdx}{(x^2+1)^2}=\left(-\frac{\ln x}{2(x^2+1)}\right)\Big|_1^2+\underbrace{\int_1^2 \frac{dx}{2x(x^2+1)}}_{I}=-\frac{\ln 2}{10}+I$.

Tính $I=\int_1^2 \frac{dx}{2x(x^2+1)}$ đặt $t=x^2+1\Rightarrow dt=2xdx$, với $x=1\Rightarrow t=2;\ x=2\Rightarrow t=5$.

Suy ra $I=\int_1^2 \frac{dx}{2x(x^2+1)}=\int_1^2 \frac{xdx}{2x^2(x^2+1)}=\frac{1}{4}\int_2^5 \frac{dt}{t(t-1)}=\frac{1}{4}\int_2^5 \frac{dt}{t-1}-\frac{1}{4}\int_2^5 \frac{dt}{t}=\frac{1}{4}\ln|t-1|\Big|_2^5-\frac{1}{4}\ln|t|\Big|_2^5$

$=\frac{1}{4}\ln|t-1|\Big|_2^5-\frac{1}{4}\ln|t|\Big|_2^5=\frac{1}{4}\ln 4-\frac{1}{4}\ln 5+\frac{1}{4}\ln 2=\frac{3}{4}\ln 2-\frac{1}{4}\ln 5$.

Vậy $\int_1^2 \frac{x\ln xdx}{(x^2+1)^2}=-\frac{\ln 2}{10}+\frac{3}{4}\ln 2-\frac{1}{4}\ln 5=\frac{13}{20}\ln 2-\frac{1}{4}\ln 5$. Từ đó ta có $a=\frac{13}{20};\ b=0;\ c=-\frac{1}{4}$.

Suy ra $a+b-c=\frac{13}{20}+0+\frac{1}{4}=\frac{9}{10}$.

Câu 89. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)$ và $f''(x)$ liên tục trên $[1;3]$. Biết $f(1)=1, f(3)=81,\ f'(1)=4,\ f'(3)=108$. giá trị của $\int_1^3 (4-2x)f''(x)dx$ bằng

A. -64. **B.** -48. **C.** 64. **D.** 48.

Lời giải

Chọn A

+) $\begin{cases} u=4-2x \\ dv=f''(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=-2dx \\ v=f'(x) \end{cases}$

Do đó $\int_1^3 (4-2x)f''(x)dx=(4-2x)f'(x)\Big|_1^3+\int_1^3 2f'(x)dx=-2.f'(3)-2.f'(1)+2f(x)\Big|_1^3$

$=-2.108-2.4+2.81-2.1=-64$.

Câu 90. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(4)=8$ và $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=6$. Giá trị của $\int_0^2 xf'(2x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 13. **B.** $\frac{13}{2}$. **C.** 10. **D.** $\frac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(2x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}f(2x) \end{cases}$

Suy ra $\int_0^2 xf'(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}xf(2x)\Big|_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 f(2x)\mathrm{d}x = f(4) - \frac{1}{4}\int_0^4 f(t)\mathrm{d}t = 8 - \frac{6}{4} = \frac{13}{2}$

Câu 91. Biết $\int (x+3)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{m}\mathrm{e}^{-2x}(2x+n) + C, (m, n \in \mathbb{Z})$. Giá trị của $m^2 + n^2$ bằng

A. 10. **B.** 65. **C.** 5. **D.** 41.

Lời giải

Chọn B

Đặt: $u = x+3 \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x \Rightarrow v = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$.

Ta có: $\int (x+3)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}(x+3) + \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$.

$\int (x+3)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}(x+3) - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x} + C$.

$\int (x+3)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}(2x+7) + C$.

Vậy, ta có $m = 4, n = 7 \Rightarrow m^2 + n^2 = 65$.

F. TÍCH PHÂN HÀM ẨN

Câu 92. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left[\frac{-1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ thỏa mãn $\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[f^2(x) - 2f(x)(3-x)\right]dx = \frac{-109}{12}$. Tính $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x^2-1}dx$

A. $\ln\frac{7}{9}$. **B.** $\ln\frac{2}{9}$. **C.** $\ln\frac{5}{9}$. **D.** $\ln\frac{8}{9}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} (3-x)^2 dx = \frac{109}{12}$.

Do đó $\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[f^2(x) - 2f(x)(3-x)\right]dx + \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} (3-x)^2\, dx = \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(f(x) - (3-x)\right)^2 dx = 0$

Suy ra $f(x) = 3 - x$.

$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x^2-1}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3-x}{x^2-1}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1}\right)dx = \left(\ln|x-1| - 2\ln|x+1|\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \ln\frac{1}{2} - 2\ln\frac{3}{2} = \ln\frac{2}{9}$

Câu 93. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số lẻ và liên tục trên $[-4;4]$ biết $\int_{-2}^0 f(-x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_1^2 f(-2x)\mathrm{d}x = 4$.

Tính $\mathrm{I} = \int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-10$. **B.** $I=10$. **C.** $I=6$. **D.** $I=-6$..

Lời giải

Chọn D

Do $f(x)$ là hàm lẻ nên $f(-x)=-f(x)$ với $\forall x\in[-4;4]$.

● Xét $A=\int_{-2}^{0} f(-x)dx$. Đặt $t=-x\Rightarrow dt=-dx$. Đổi cận: $\begin{cases}x=-2\Rightarrow t=2\\ x=0\Rightarrow t=0\end{cases}$.

Khi đó $A=-\int_{2}^{0} f(t)dt=\int_{0}^{2} f(t)dt=\int_{0}^{2} f(x)dx$.

● Xét $B=\int_{1}^{2} f(-2x)dx=-\int_{1}^{2} f(2x)dx$. Đặt $u=2x\Rightarrow du=2dx$.

Đổi cận: $\begin{cases}x=1\Rightarrow u=2\\ x=2\Rightarrow u=4\end{cases}$.

Khi đó $B=-\frac{1}{2}\int_{2}^{4} f(u)du=-\frac{1}{2}\int_{2}^{4} f(x)dx\Rightarrow \int_{2}^{4} f(x)dx=-2B=-2.4=-8$.

Vậy $I=\int_{0}^{4} f(x)dx=\int_{0}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{4} f(x)dx=2-8=-6$.

Câu 94. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thảo mãn $xf(x^3)+f(1-x^2)=-x^{10}+x^6-2x,\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int_{-1}^{0} f(x)dx$?

A. $\frac{-17}{20}$. **B.** $\frac{-13}{4}$. **C.** $\frac{17}{4}$. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $xf(x^3)+f(1-x^2)=-x^{10}+x^6-2x\Rightarrow x^2f(x^3)+xf(1-x^2)=-x^{11}+x^7-2x^2$.

Lấy tích phân hai vế cận từ 0 đến 1 ta được:

$$\int_0^1 x^2f(x^3)dx+\int_0^1 xf(1-x^2)dx=\int_0^1(-x^{11}+x^7-2x^2)dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_0^1 f(x^3)d(x^3)-\frac{1}{2}\int_0^1 f(1-x^2)d(1-x^2)=-\frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_0^1 f(t)dt-\frac{1}{2}\int_1^0 f(t)dt=-\frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_0^1 f(t)dt+\frac{1}{2}\int_0^1 f(t)dt=-\frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{6}\int_0^1 f(t)dt=-\frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(t)dt=-\frac{3}{4}$$

Suy ra $\int_0^1 f(x)dx=-\frac{3}{4}$.

Lấy tích phân hai vế cận từ -1 đến 0 ta được:

$$\int_{-1}^{0} x^2 f\left(x^3\right)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0} xf\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\left(-x^{11}+x^7-2x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} f\left(x^3\right)\mathrm{d}\left(x^3\right)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} f\left(1-x^2\right)\mathrm{d}\left(1-x^2\right)=-\frac{17}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} f\left(t\right)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_{0}^{1} f\left(t\right)\mathrm{d}t=-\frac{17}{24}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} f\left(t\right)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_{0}^{1} f\left(t\right)\mathrm{d}t=-\frac{17}{24}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} f\left(t\right)\mathrm{d}t=-\frac{17}{24}+\frac{1}{2}\int_{0}^{1} f\left(t\right)\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{-17}{24}+\frac{1}{2}\int_{0}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{-17}{24}-\frac{1}{2}.\frac{3}{4}=-\frac{13}{12}.$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{0} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{-13}{4}$$

Câu 95. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[e;e^2\right]$.

Biết $x^2 f'(x)\cdot\ln x-xf(x)+\ln^2 x=0,\forall x\in\left[e;e^2\right]$ và $f(e)=\frac{1}{e}$. Tính tích phân $I=\int_{e}^{e^2} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=2$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=3$. **D.** $I=\ln 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $x^2 f'(x)\cdot\ln x-xf(x)+\ln^2 x=0,\forall x\in\left[e;e^2\right]$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)\cdot\ln x-\frac{1}{x}.f(x)}{\ln^2 x}=-\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{\ln x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được: $\frac{f(x)}{\ln x}=\frac{1}{x}+C$ theo đề bài ta có $f(e)=\frac{1}{e}\Rightarrow C=0$

suy ra $f(x)=\frac{\ln x}{x}\Rightarrow I=\int_{e}^{e^2} f(x)\mathrm{d}x=I=\int_{e}^{e^2}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$.

Câu 96. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\left[-4;2\right]$, thỏa mãn $\int_{0}^{3} xf'\left(2x-4\right)dx=8$ và $f\left(2\right)=2$.

Tính $I=\int_{-2}^{1} f\left(2x\right)dx$.

A. $I=-10$ **B.** $I=-5$ **C.** $I=5$ **D.** $I=10$

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=f'\left(2x-4\right)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=\frac{1}{2}f\left(2x-4\right)\end{cases}$

Suy ra:

$8=\int_0^3 xf'(2x-4)\,dx=\frac{1}{2}xf(2x-4)\Big|_0^3-\frac{1}{2}\int_0^3 f(2x-4)\,dx=\frac{3}{2}f(2)-\frac{1}{2}\int_0^3 f(2x-4)\,dx$

$\Rightarrow \int_0^3 f(2x-4)\,dx=-10.$

Đặt $2t=2x-4\Rightarrow dt=dx$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=-2$, $x=3\Rightarrow t=1$.

Suy ra: $-10=\int_0^3 f(2x-4)\,dx=\int_{-2}^1 f(2t)\,dt=\int_{-2}^1 f(2x)\,dx$.

Câu 97. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^3 f(x)dx=8$ và $\int_0^5 f(x)dx=4$. Tính $\int_{-1}^1 f(|4x-1|)dx$

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{11}{4}$. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_{-1}^1 f(|4x-1|)dx=\int_{-1}^{\frac{1}{4}} f(-4x+1)dx+\int_{\frac{1}{4}}^1 f(4x-1)dx$.

Tính: $A=\int_{-1}^{\frac{1}{4}} f(-4x+1)dx$. Đặt $t=-4x+1\Rightarrow -\frac{1}{4}dt=dx$

$\Rightarrow A=-\frac{1}{4}\int_5^0 f(t)dt=\frac{1}{4}\int_0^5 f(t)dt=1$

Tính: $B=\int_{\frac{1}{4}}^1 f(4x-1)dx$. Đặt $t=4x-1\Rightarrow \frac{1}{4}dt=dx$

$\Rightarrow B=\frac{1}{4}\int_0^3 f(t)dt=2$.

Vậy $\int_{-1}^1 f(|4x-1|)dx=A+B=3$.

Câu 98. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;1]$ và $f(-x)+2019f(x)=e^x$, $\forall x\in[-1;1]$. Tính $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{e^2-1}{e}$. **B.** $\frac{e^2-1}{2020e}$. **C.** 0. **D.** $\frac{e^2-1}{2019e}$.

Lời giải

Chọn B

•Cách 1: Tìm hàm $f(x)$

Theo giả thiết: $f(-x)+2019f(x)=e^x$ (1).

Đặt $x=-t$ thì (1) trở thành: $f(t)+2019f(-t)=e^{-t}$ hay $f(x)+2019f(-x)=e^{-x}$ (2).

Từ (1) và (2) ta được hệ phương trình: $\begin{cases} f(-x)+2019f(x)=e^x \\ 2019f(-x)+f(x)=e^{-x} \end{cases}$.

Giải hệ, ta được: $f(x)=\frac{2019e^x-e^{-x}}{2019^2-1}$.

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{2019\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2019^2 - 1}\mathrm{d}x = \left.\left(\frac{2019\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2019^2 - 1}\right)\right|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{\left(2019\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}\right) - \left(2019\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}\right)}{2019^2 - 1} = \frac{2018\left(\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)}{2018.2020} = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{2020\mathrm{e}}.$$

Vậy $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{2020\mathrm{e}}$.

•Cách 2: Tính tích phân trực tiếp

Đặt $I = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

Theo giả thiết: $f(-x) + 2019 f(x) = \mathrm{e}^x$. Lấy tích phân hai vế từ -1 đến 1, ta được:

$$\int_{-1}^{1} f(-x)\mathrm{d}x + 2019\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^x\mathrm{d}x \quad (*).$$

Ta có: $\int_{-1}^{1} f(-x)\mathrm{d}x = -\int_{1}^{-1} f(-x)\mathrm{d}(-x) = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = I$, $\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \left.\left(\mathrm{e}^x\right)\right|_{-1}^{1} = \mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Thay vào phương trình $(*)$, ta được: $I + 2019I = \mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow 2020I = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow I = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{2020\mathrm{e}}$.

Vậy $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{2020\mathrm{e}}$.

Câu 99. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1-x) = 6x^2 f\left(x^3\right) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Khi đó $\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(1-x) = 6x^2 f\left(x^3\right) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow f(1-x) - 6x^2 f\left(x^3\right) = -\frac{6}{\sqrt{3x+1}}$

$$\Leftrightarrow \int_{0}^{1} f(1-x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{1} 6x^2 f\left(x^3\right)\mathrm{d}x = -\int_{0}^{1} \frac{6}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x \quad (*).$$

Ta có $\int_{0}^{1} f(1-x)\mathrm{d}x = -\int_{0}^{1} f(1-x)\mathrm{d}(1-x) \overset{u=1-x}{=} -\int_{1}^{0} f(u)\mathrm{d}u = \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

Và $\int_{0}^{1} 6x^2 f\left(x^3\right)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} f\left(x^3\right)\mathrm{d}\left(x^3\right) \overset{u=x^3}{=} 2\int_{0}^{1} f(u)\mathrm{d}u = 2\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

Ta có $(*) \Leftrightarrow \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x - 2\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = -6\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 6\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x = 4$.

Vậy $\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 4$.

Câu 100. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $x^2f^2(x)+(2x-1)f(x)=xf'(x)-1$, với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ đồng thời thỏa $f(1)=-2$. Tính $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$

A. $-\frac{\ln 2}{2}-1$. **B.** $-\ln 2-\frac{1}{2}$. **C.** $-\ln 2-\frac{3}{2}$. **D.** $-\frac{\ln 2}{2}-\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x^2f^2(x)+2xf(x)+1=xf'(x)+f(x)\Leftrightarrow (xf(x)+1)^2=(xf(x)+1)'$

Do đó $\frac{(xf(x)+1)'}{(xf(x)+1)^2}=1\Rightarrow \int\frac{(xf(x)+1)'}{(xf(x)+1)^2}dx=\int 1dx\Rightarrow -\frac{1}{xf(x)+1}=x+c \Rightarrow xf(x)+1=-\frac{1}{x+c}$

Mặt khác $f(1)=-2$ nên $-2+1=-\frac{1}{1+c}\Rightarrow c=0\Rightarrow xf(x)+1=-\frac{1}{x}\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$

Vậy $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx=\left(-\ln x+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2=-\ln 2-\frac{1}{2}$.

Câu 101. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $[0;4]$ và thỏa đẳng thức sau đây $2019f(x)+2020f(4-x)=6059-\frac{\sqrt{x}}{2}$. Tính tích phân $\int_0^4 f'(x)\mathrm{d}x$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Chọn B

Ta có $\int_0^4 f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\Big|_0^4=f(4)-f(0)$.

Với $x=0$ và $x=4$ ta có hệ phương trình $\begin{cases}2019f(0)+2020f(4)=6059\\2020f(0)+2019f(4)=6058\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(0)=1\\f(4)=2\end{cases}$.

Do đó $\int_0^4 f'(x)\mathrm{d}x=f(4)-f(0)=2-1=1$.

Câu 102. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=0, f'(0)\neq 0$ và thỏa mãn hệ thức $f(x).f'(x)+18x^2=(3x^2+x)f'(x)+(6x+1)f(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

Biết $\int_0^1 (x+1)e^{f(x)}\mathrm{d}x=a.e^2+b$, với $a;b\in\mathbb{Q}$. Giá trị của $a-b$ bằng.

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x).f'(x)+18x^2=(3x^2+x)f'(x)+(6x+1)f(x)$

$\Rightarrow \int\left[f(x).f'(x)+18x^2\right]\mathrm{d}x=\int\left[(3x^2+x)f'(x)+(6x+1)f(x)\right]\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \int\left[\frac{1}{2}f^2(x)+6x^3\right]'\mathrm{d}x=\int\left[(3x^2+x)f(x)\right]'\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \frac{1}{2}f^2(x)+6x^3=(3x^2+x)f(x)+C$, với C là hằng số.

Mặt khác: theo giả thiết $f(0)=0$ nên $C=0$.

Khi đó $\frac{1}{2}f^2(x)+6x^3=(3x^2+x)f(x)(1),\forall x\in\mathbb{R}$.

$(1)\Leftrightarrow f^2(x)+12x^3=(6x^2+2x)f(x)\Leftrightarrow[f(x)-2x][f(x)-6x^2]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=2x\\f(x)=6x^2\end{array}\right.$.

Trường hợp 1: Với $f(x)=6x^2,\forall x\in\mathbb{R}$, ta có $f'(0)=0$ (loại).

Trường hợp 2: Với $f(x)=2x,\forall x\in\mathbb{R}$, ta có :

$$\int_0^1(x+1)e^{f(x)}\mathrm{d}x=\int_0^1(x+1)e^{2x}\mathrm{d}x=\left[\frac{(x+1)e^{2x}}{2}\right]\Bigg|_0^1-\int_0^1\frac{e^{2x}}{2}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}e^2-\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{3}{4}\\b=-\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow a-b=1.$$

Câu 103. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+(x^2-1)f\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}\right)=x^5-4x^3-5x^2+7x+6,\forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{7}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 7. **D.** $-\frac{19}{3}$.

Lời giải

Mặt khác : (*) $\Rightarrow\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2(x^2-1)f\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}\right)\mathrm{d}x=\int_1^2(x^5-4x^3-5x^2+7x+6)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\frac{4}{3}\int_1^2 f\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\frac{4}{3}\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{7}$.

Câu 104. Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$, $f(x)\neq 0$ với mọi $x\in[1;3]$, đồng thời $f'(x)(1+f(x))^2=\left[(f(x))^2(x-1)\right]^2$ và $f(1)=-1$.

Biết rằng $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=a\ln 3+b$, $a,b\in\mathbb{Z}$, tính tổng $S=a+b^2$.

A. $S=0$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=2$. **D.** $S=4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)(1+f(x))^2=\left[(f(x))^2(x-1)\right]^2\Leftrightarrow\frac{f'(x)(1+f(x))^2}{f^4(x)}=(x-1)^2$.

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được:

$$\int \frac{f'(x)(1+f(x))^2}{f^4(x)}\mathrm{d}x = \int (x-1)^2\,dx \Leftrightarrow \int \frac{(1+2f(x)+f^2(x))f'(x)}{f^4(x)}\mathrm{d}x = \int (x-1)^2\,dx$$

$$\Leftrightarrow \int\left(\frac{1}{f^4(x)}+2\frac{1}{f^3(x)}+\frac{1}{f^2(x)}\right)\mathrm{d}(f(x)) = \frac{(x-1)^3}{3}+C$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3f^3(x)}-\frac{1}{f^2(x)}-\frac{1}{f(x)} = \frac{(x-1)^3}{3}+C$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1+3f(x)+3f^2(x)}{3f^3(x)} = \frac{(x-1)^3}{3}+C$$

Mà $f(1)=-1$ nên $-\frac{1-3+3}{-3}=C \Rightarrow C=\frac{1}{3}$.

Suy ra: $-\frac{1+3f(x)+3f^2(x)}{3f^3(x)} = \frac{(x-1)^3}{3}+\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1+3f(x)+3f^2(x)}{3f^3(x)}+\frac{1}{3} = -\frac{(x-1)^3}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+f(x))^3}{f^3(x)} = -(x-1)^3 \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^3 = (1-x)^3 \Leftrightarrow f(x)=\frac{-1}{x}.$$

Vậy: $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{-1}{x}\mathrm{d}x = -\ln|x|\Big|_1^3 = -\ln 3$. Suy ra $a=-1; b=0$ hay $a+b^2=-1$.

Câu 105. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$ và $(f'(x))^2+4(6x^2-1).f(x)=40x^6-44x^4+32x^2-4, \forall x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{23}{15}$. **B.** $\frac{13}{15}$. **C.** $-\frac{17}{15}$. **D.** $-\frac{7}{15}$.

Lời giải

Chọn B

$(f'(x))^2+4(6x^2-1).f(x)=40x^6-44x^4+32x^2-4$

$$\Rightarrow \int_0^1 (f'(x))^2\,dx+\int_0^1 4(6x^2-1).f(x)\,dx = \int_0^1 (40x^6-44x^4+32x^2-4)\,dx. \quad (1)$$

Xét $I=\int_0^1 4(6x^2-1).f(x)\,dx = \int_0^1 (24x^2-4)f(x)\,dx$.

Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ dv=(24x^2-4)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=f'(x)dx \\ v=8x^3-4x \end{cases}$.

$$\Rightarrow I=(8x^3-4x).f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 (8x^3-4x).f'(x)\,dx = 4-2\int_0^1 (4x^3-2x).f'(x)\,dx.$$

Do đó:

$$(1)\Rightarrow \int_0^1 (f'(x))^2\,dx-2\int_0^1 (4x^3-2x).f'(x)\,dx+\int_0^1 (4x^3-2x)^2\,dx = \int_0^1 (56x^6-60x^4+36x^2-8)\,dx.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left[f'(x)-(4x^3-2x)\right]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x)=4x^3-2x \Rightarrow f(x)=x^4-x^2+c.$$

Mà $f(1)=1 \Rightarrow c=1 \ \Rightarrow \ f(x)=x^4-x^2+1$.

Do đó $\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1\left(x^4-x^2+1\right)dx=\frac{13}{15}$.

Câu 106. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=3$ và $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2, \forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int\limits_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{-4}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{-10}{3}$

Lời giải

Chọn D

Cách 1.

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có: $\int\limits_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_0^2-\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Từ $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2, \forall x\in\mathbb{R}\ (1)$

Thay $x=0$ vào (1) ta được $f(0)+f(2)=2 \Rightarrow f(2)=2-f(0)=2-3=-1$.

Xét $I=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$

Đặt $x=2-t \Rightarrow dx=-dt$, đổi cận: $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=2\\ x=2\Rightarrow t=0\end{cases}$

Khi đó $I=-\int\limits_2^0 f(2-t)dt=\int\limits_0^2 f(2-t)dt \Rightarrow I=\int\limits_0^2 f(2-x)dx$

Do đó ta có $\int\limits_0^2\left(f(x)+f(2-x)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left(x^2-2x+2\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow 2\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{8}{3} \Leftrightarrow \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$.

Vậy $\int\limits_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_0^2-\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 2.(-1)-\frac{4}{3}=-\frac{10}{3}$.

Cách 2.

Từ $\begin{cases} f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2 \ \ (1)\\ f(0)=3\end{cases}$

Thay $x=0; x=1$ vào (1) ta được $f(2)=-1; f(1)=\frac{1}{2}$.

Xét hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ từ giả thiết trên ta có $\begin{cases} c=3\\ a+b+c=\frac{1}{2}\\ 4a+2b+c=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=3\\ a=\frac{1}{2}\\ b=-3\end{cases}$.

Vậy $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+3 \Rightarrow f'(x)=x-3$ suy ra $\int\limits_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 x(x-3)\mathrm{d}x=-\frac{10}{3}$.

Câu 107. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[2;4]$ và $f'(x)>0, \forall x\in[2;4]$. Biết $4x^3f(x)=\left[f'(x)\right]^3-x^3, \forall x\in[2;4], f(2)=\frac{7}{4}$. Giá trị của $f(4)$ bằng

A. $\frac{40\sqrt{5}-1}{2}$. **B.** $\frac{20\sqrt{5}-1}{4}$. **C.** $\frac{20\sqrt{5}-1}{2}$. **D.** $\frac{40\sqrt{5}-1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)>0, \forall x\in[2;4]$ nên hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $[2;4]$ $\Rightarrow f(x)\ge f(2)$ mà $f(2)=\frac{7}{4}$. Do đó: $f(x)>0, \forall x\in[2;4]$.

Từ giả thiết ta có: $4x^3f(x)=\left[f'(x)\right]^3-x^3\Leftrightarrow x^3\left[4f(x)+1\right]=\left[f'(x)\right]^3$

$\Leftrightarrow x.\sqrt[3]{4f(x)+1}=f'(x)\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{\sqrt[3]{4f(x)+1}}=x$.

Suy ra: $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{\sqrt[3]{4f(x)+1}}\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x\Leftrightarrow \frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}\left[4f(x)+1\right]}{\sqrt[3]{4f(x)+1}}=\frac{x^2}{2}+C\Leftrightarrow \frac{3}{8}\sqrt[3]{\left[4f(x)+1\right]^2}=\frac{x^2}{2}+C$.

$f(2)=\frac{7}{4}\Leftrightarrow \frac{3}{2}=2+C\Leftrightarrow C=-\frac{1}{2}$.

Vậy: $f(x)=\dfrac{\sqrt{\left[\frac{4}{3}\left(x^2-1\right)\right]^3}-1}{4}\Rightarrow f(4)=\dfrac{40\sqrt{5}-1}{4}$.

Câu 108. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$ và thỏa $f(1)=0$, $\left(f'(x)\right)^2+4f(x)=8x^2-32x+28$ với mọi x thuộc $[0;2]$. Giá trị của $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $-\frac{2}{3}$. **D.** $-\frac{14}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $I=\displaystyle\int_1^2 2f(x)\mathrm{d}x$.

Dùng tích phân từng phần, ta có: $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=2\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=2x-4\end{cases}$.

$I=(2x-4)f(x)\Big|_1^2-\displaystyle\int_1^2(2x-4)f'(x)\mathrm{d}x=-\int_1^2(2x-4)f'(x)\mathrm{d}x$.

Ta có $\left(f'(x)\right)^2+4f(x)=8x^2-32x+28\Rightarrow\displaystyle\int_1^2\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x+2\int_1^2 2f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2\left(8x^2-32x+28\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\displaystyle\int_1^2\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x-2\int_1^2(2x-4)f'(x)\mathrm{d}x+\int_1^2(2x-4)^2\mathrm{d}x=\int_1^2\left(8x^2-32x+28\right)\mathrm{d}x+\int_1^2(2x-4)^2\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\displaystyle\int_1^2\left[f'(x)-(2x-4)\right]^2\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow f'(x)=2x-4\Rightarrow f(x)=x^2-4x+C$, $C\in\mathbb{R}$.

Mà $f(1)=0\Rightarrow C=3\Rightarrow f(x)=x^2-4x+3\Rightarrow\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^2-4x+3\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$.

Câu 109. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và $f(x)+f(1-x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$, $\forall x\in[0;1]$. Tính $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

A. $\frac{3}{4}+2\ln 2$. **B.** $3+\ln 2$. **C.** $\frac{3}{4}+\ln 2$. **D.** $\frac{3}{2}+2\ln 2$.

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết, ta có: $f(x)+f(1-x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$, $\forall x\in[0;1]$ và $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ nên

$$\int_0^1\left[f(x)+f(1-x)\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^2+2x+3}{x+1}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{(x+1)^2+2}{x+1}\mathrm{d}x\ (1)$$

Đặt $1-x=t$ thì $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$, với $x=0\Rightarrow t=1$, với $x=1\Rightarrow t=0$

Do đó: $\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=-\int_1^0 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ (2).

Lại có $\int_0^1\dfrac{(x+1)^2+2}{x+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x+1+\dfrac{2}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\dfrac{x^2}{2}+x+2\ln|x+1|\right)\right|_0^1=\dfrac{3}{2}+2\ln 2$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{3}{2}+2\ln 2\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{3}{4}+\ln 2$.

Câu 110. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f(x)+f(2-x)=2(x-1)\mathrm{e}^{x^2-2x+1}+4$. Tính tích phân $I=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ ta được kết quả:

A. $I=\mathrm{e}+4$. **B.** $I=8$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\mathrm{e}+2$.

Lời giải

Chọn C

Theo giả thuyết ta có $\int_0^2\left[3f(x)+f(2-x)\right]\mathrm{d}x=\int_0^2\left[2(x-1)\mathrm{e}^{x^2-2x+1}+4\right]\mathrm{d}x$ (*).

Ta tính $\int_0^2 f(2-x)\mathrm{d}x=-\int_0^2 f(2-x)\mathrm{d}(2-x)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Vì vậy $\int_0^2\left[3f(x)+f(2-x)\right]\mathrm{d}x=4\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Hơn nữa $\int_0^2 2(x-1)e^{x^2-2x+1}\mathrm{d}x=\int_0^2\mathrm{e}^{x^2-2x+1}\mathrm{d}\left(x^2-2x+1\right)=\left.\mathrm{e}^{x^2-2x+1}\right|_0^2=0$ và $\int_0^2 4\mathrm{d}x=8$.

Suy ra $4\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=8\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2$.

Câu 111. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$ và thỏa mãn: $\dfrac{3}{5}-(x-4)^2+4xf(x)=[f'(x)]^2$ và $f(0)=\dfrac{1}{20}$. Khi đó $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{203}{30}$. **B.** $\dfrac{163}{30}$. **C.** $\dfrac{11}{30}$. **D.** $\dfrac{157}{30}$

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết $\dfrac{3}{5}-(x-4)^2+4xf(x)=[f'(x)]^2$

Ta có:

$$\int_0^2\left[\frac{3}{5}-(x-4)^2+4xf(x)\right]\mathrm{d}x=\int_0^2[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow\frac{-262}{15}+2\int_0^2 f(x)\mathrm{d}(x^2-4)=\int_0^2[f'(x)]^2\mathrm{d}x\ (1)$$

Đặt $I=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}(x^2-4)$

Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}(x^2-4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x \\ v=x^2-4 \end{cases}$

Khi đó

$I=\left(x^2-4\right)f(x)\Big|_0^2-\int_0^2\left(x^2-4\right)f'(x)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{5}-\int_0^2\left(x^2-4\right)f'(x)\mathrm{d}x$ (2)

Thay (2) vào (1) có:

$\frac{-262}{15}+2\left[\frac{1}{5}-\int\limits_0^2\left(x^2-4\right)f'(x)\mathrm{d}x\right]=\int\limits_0^2[f'(x)]^2\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^2[f'(x)]^2\mathrm{d}x+2\int\limits_0^2\left(x^2-4\right)f'(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^2\left(x^2-4\right)^2\mathrm{d}x=-\frac{262}{15}+\frac{2}{5}+\int\limits_0^2\left(x^2-4\right)^2\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^2[f'(x)]^2\mathrm{d}x+2\int\limits_0^2\left(x^2-4\right)f'(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^2\left(x^2-4\right)^2\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \int\limits_0^2\left[f'(x)+x^2-4\right]^2\mathrm{d}x=0$

Do $\left[f'(x)+x^2-4\right]^2\geq 0 \Rightarrow \int\limits_0^2\left[f'(x)+x^2-4\right]^2\mathrm{d}x\geq 0$ mà $\int\limits_0^2\left[f'(x)+x^2-4\right]^2\mathrm{d}x=0$ nên

$\left[f'(x)+x^2-4\right]^2=0 \Rightarrow f'(x)=-x^2+4 \Rightarrow f(x)=\frac{-x^3}{3}+4x+C$.

Vì $f(0)=\frac{1}{20}\Rightarrow C=\frac{1}{20}\Rightarrow f(x)=\frac{-x^3}{3}+4x+\frac{1}{20}$

Vậy $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{203}{30}$.

Câu 112. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $xf\left(x^5\right)+f\left(1-x^4\right)=x^{11}+x^8+x^6-3x^4+x+3, \forall x\in\mathbb{R}$.

Khi đó $\int\limits_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{35}{6}$. **B.** $-\frac{15}{4}$. **C.** $-\frac{7}{24}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Với $\forall x\in\mathbb{R}$ ta có : $xf\left(x^5\right)+f\left(1-x^4\right)=x^{11}+x^8+x^6-3x^4+x+3$

$\Rightarrow x^4f\left(x^5\right)+x^3f\left(1-x^4\right)=x^{14}+x^{11}+x^9-3x^7+x^4+3x^3$ (*)

$\Rightarrow \int\limits_0^1 x^4f\left(x^5\right)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 x^3f\left(1-x^4\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(x^{14}+x^{11}+x^9-3x^7+x^4+3x^3\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{5}\int\limits_0^1 f\left(x^5\right)\mathrm{d}\left(x^5\right)-\frac{1}{4}\int\limits_0^1 f\left(1-x^4\right)\mathrm{d}\left(1-x^4\right)=\frac{33}{40}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{5}\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{33}{40}\Leftrightarrow \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{11}{6}$

Mặt khác : (*) $\Rightarrow \int\limits_{-1}^0 x^4f\left(x^5\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^0 x^3f\left(1-x^4\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^0\left(x^{14}+x^{11}+x^9-3x^7+x^4+3x^3\right)\mathrm{d}x$

$(*) \Rightarrow \frac{1}{5}\int\limits_{-1}^{0} f\left(x^5\right)\mathrm{d}\left(x^5\right) - \frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{0} f\left(1-x^4\right)\mathrm{d}\left(1-x^4\right) = -\frac{7}{24}$

$\Rightarrow \frac{1}{5}\int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = -\frac{7}{24} \Rightarrow \int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = 5\left(-\frac{7}{24} + \frac{1}{4}.\frac{11}{6}\right) = \frac{5}{6}$.

Câu 113. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{2}{5};1\right]$ và thỏa mãn $2f(x) + 5f\left(\frac{2}{5x}\right) = 3x, \forall x \in \left[\frac{2}{5};1\right]$. Khi đó $I = \int\limits_{\frac{2}{15}}^{\frac{1}{3}} \ln 3x.f'(3x)dx$ bằng:

A. $\frac{1}{5}\ln\frac{2}{5} + \frac{3}{35}$. **B.** $\frac{1}{5}\ln\frac{5}{2} - \frac{3}{35}$. **C.** $-\frac{1}{5}\ln\frac{5}{2} - \frac{3}{35}$. **D.** $-\frac{1}{5}\ln\frac{2}{5} + \frac{3}{35}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Tự Luận

Ta có: $2f(x) + 5f\left(\frac{2}{5x}\right) = 3x, \forall x \in \left[\frac{2}{5};1\right]$ (1)

$\Leftrightarrow 2\frac{f(x)}{x} + 5\frac{f\left(\frac{2}{5x}\right)}{x} = 3, \forall x \in \left[\frac{2}{5};1\right]$

$\Leftrightarrow 2\int\limits_{\frac{2}{5}}^{1} \frac{f(x)}{x}dx + 5\int\limits_{\frac{2}{5}}^{1} \frac{f\left(\frac{2}{5x}\right)}{x}dx = \int\limits_{\frac{2}{5}}^{1} 3dx = \frac{9}{5}$ (2)

Xét $I_1 = 5\int\limits_{\frac{2}{5}}^{1} \frac{f\left(\frac{2}{5x}\right)}{x}dx$ đặt $u = \frac{2}{5x} \Rightarrow du = -\frac{2}{5x^2}dx \Rightarrow -\frac{2}{5}\frac{du}{u^2} = dx$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = \frac{2}{5} \Rightarrow u = 1 \\ x = 1 \Rightarrow u = \frac{2}{5} \end{cases}$

$\Rightarrow I_1 = -5\int\limits_{1}^{\frac{2}{5}} \frac{f(u)}{u}du = 5\int\limits_{\frac{2}{5}}^{1} \frac{f(u)}{u}du = 5\int\limits_{\frac{2}{5}}^{1} \frac{f(x)}{x}dx$

Từ (2) suy ra, $2\int\limits_{\frac{2}{5}}^{1} \frac{f(x)}{x}dx + 5\int\limits_{\frac{2}{5}}^{1} \frac{f(x)}{x}dx = \frac{9}{5}$

$\Leftrightarrow \int\limits_{\frac{2}{5}}^{1} \frac{f(x)}{x}dx = \frac{9}{35}$

Tính $I = \int\limits_{\frac{2}{15}}^{\frac{1}{3}} \ln 3x.f'(3x)dx$.

Đặt $t=3x\Rightarrow dt=3dx\Rightarrow \frac{1}{3}dt=dx$. Đổi cận: $\begin{cases} x=\frac{2}{15}\Rightarrow t=\frac{2}{5} \\ x=\frac{1}{3}\Rightarrow t=1 \end{cases}$

$\Rightarrow I=\frac{1}{3}\int\limits_{\frac{2}{5}}^{1}\ln t.f'(t)dt$

Đặt: $\begin{cases} u=\ln t \\ dv=f'(t) \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} du=\frac{1}{t}dt \\ v=f(t) \end{cases}$

$I=\frac{1}{3}(\ln t.f(t))\Big|_{\frac{2}{5}}^{1}-\frac{1}{3}\int\limits_{\frac{2}{5}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt=-\frac{1}{3}\ln\frac{2}{5}.f(\frac{2}{5})-\frac{3}{35}$

Tính $2f(x)+5f\left(\frac{2}{5x}\right)=3x,\forall x\in\left[\frac{2}{5};1\right]$

Cho $x=1;x=\frac{2}{5}$ vào (1) ta có hệ phương trình sau:

$\begin{cases} 2f(1)+5f\left(\frac{2}{5}\right)=3 \\ 2f\left(\frac{2}{5}\right)+5f(1)=\frac{6}{5} \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} f(1)=0 \\ f\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{3}{5} \end{cases}$

Suy ra, $I=-\frac{1}{3}.\frac{3}{5}\ln\frac{2}{5}-\frac{3}{35}=\frac{1}{5}\ln\frac{5}{2}-\frac{3}{35}$.

Câu 114. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+2xf(x^2)=2x^7+3x^3-x-1$ với $x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $\int\limits_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có: $\int\limits_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ (*)

Từ $f(x)+2xf(x^2)=2x^7+3x^3-x-1$ (1)

Thay $x=1$ vào (1) ta được $f(1)+2f(1)=3\Rightarrow f(1)=1$ (2)

Mặt khác từ (1) ta có $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 2xf(x^2)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1(2x^7+3x^3-x-1)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 f(x^2)\mathrm{d}(x^2)=-\frac{1}{2}\Rightarrow 2\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\Rightarrow\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}$ (3)

Thay (2), (3) vào (*) ta được $\int\limits_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

Câu 115. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$x^2 f(1-x)+2f\left(\frac{2x-2}{x}\right)=\frac{-x^4+x^3+4x-4}{x}, \forall x\neq 0, x\neq 1$. Khi đó $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ có giá trị là

A. 0. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết suy ra $f(1-x)+\frac{2}{x^2}f\left(\frac{2x-2}{x}\right)=\frac{-x^4+x^3+4x-4}{x^3}$

Ta có: $\int_1^2 f(1-x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f\left(\frac{2x-2}{x}\right).\frac{2}{x^2}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{-x^4+x^3+4x-4}{x^3}\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow -\int_1^2 f(1-x)\mathrm{d}(1-x)+\int_1^2 f\left(\frac{2x-2}{x}\right)\mathrm{d}\left(\frac{2x-2}{x}\right)=\int_1^2\left(-x+1+\frac{4}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow -\int_0^{-1} f(t)\mathrm{d}t+\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\left(-\frac{x^2}{2}+x-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\Bigg|_1^2$

$\Leftrightarrow \int_{-1}^0 f(t)\mathrm{d}t+\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=0 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 f(t)\mathrm{d}t=0$.

Vậy $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=0$.

Cách trắc nghiệm

Ta có: $x^2 f(1-x)+2f\left(\frac{2x-2}{x}\right)=\frac{-x^4+x^3+4x-4}{x}, \forall x\neq 0, x\neq 1$

$\Leftrightarrow x^2 f(1-x)+2f\left(\frac{2x-2}{x}\right)=\frac{-x^4+x^3}{x}+\frac{4x-4}{x}, \forall x\neq 0, x\neq 1$

$\Leftrightarrow x^2 f(1-x)+2f\left(\frac{2x-2}{x}\right)=x^2(1-x)+2\left(\frac{2x-2}{x}\right), \forall x\neq 0, x\neq 1$

Chọn $f(x)=x \Rightarrow \int_{-1}^1 f(x).\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 x.\mathrm{d}x=0$.

Câu 116. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $2f(x)-3f(1-x)=x\sqrt{1-x}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{4}{15}$ **B.** $-\frac{4}{15}$ **C.** $-\frac{2}{5}$ **D.** 1

Lời giải

Chọn B

Do $2f(x)-3f(1-x)=x\sqrt{1-x} \Rightarrow \int_0^1 2f(x)\mathrm{d}x-\underbrace{\int_0^1 3f(1-x)\mathrm{d}x}_{I_1}=\underbrace{\int_0^1 x\sqrt{1-x}\mathrm{d}x}_{I_2}\quad (1)$.

+ Xét $I_1=3\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x$:

Đặt $t=1-x \Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Khi $x=0\Rightarrow t=1; x=1\Rightarrow t=0$.

Khi đó $I_1=3\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=3I$.

+ Xét $I_2 = \int_0^1 x\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$. Đặt $t = \sqrt{1-x} \Rightarrow x = 1 - t^2 \Rightarrow \mathrm{d}x = -2t\mathrm{dt}$.

Với $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó $I_2 = \int_1^0 \left(1-t^2\right)t\left(-2t\right)\mathrm{d}t = \left.\left(\frac{2t^5}{5} - \frac{2t^3}{3}\right)\right|_1^0 = \frac{4}{15}$.

Thay vào $(1): 2I - 3I = \frac{4}{15} \Leftrightarrow I = -\frac{4}{15}$.

Câu 117. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + \left(x^2-1\right)f\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right) = x^5 - 4x^3 - 5x^2 + 7x + 6, \forall x \in \mathbb{R}$. Tích phân $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{7}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 7. **D.** $-\frac{19}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Với $\forall x \in \mathbb{R}$ ta có : $f(x) + \left(x^2-1\right)f\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right) = x^5 - 4x^3 - 5x^2 + 7x + 6$ (*)

$$\Rightarrow \int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-2}^{-1}\left(x^2-1\right)f\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1}\left(x^5 - 4x^3 - 5x^2 + 7x + 6\right)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x + \frac{4}{3}\int_{-2}^{-1} f\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right) = -\frac{35}{3}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x + \frac{4}{3}\int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x = -\frac{35}{3} \Leftrightarrow \int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x = -5$$

Mặt khác : (*) $\Rightarrow \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2\left(x^2-1\right)f\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right)\mathrm{d}x = \int_1^2\left(x^5 - 4x^3 - 5x^2 + 7x + 6\right)\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x + \frac{4}{3}\int_1^2 f\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x + \frac{4}{3}\int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}.(-5) = 7.$$

----------------- HẾT -----------------