

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$, trên các cạnh BC, BD, AC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $BC = 3BM, BD = \frac{3}{2}BN, AC = 2AP$. Mặt phẳng (MNP) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai phần có thể tích là V_1, V_2 . Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$?

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{26}{19}$

B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{19}$

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{15}{19}$

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{26}{13}$

Câu 2: Số nghiệm của phương trình $\log_3(x^2 + 4x) + \log_{\frac{1}{3}}(2x + 3) = 0$ là

A. 2

B. 3

C. 0

D. 1

Câu 3: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để bất phương trình sau nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$: $(6 + 2\sqrt{7})^x + (2 - m)(3 - \sqrt{7})^x - (m + 1)2^x \geq 0$

A. 10

B. 9

C. 12

D. 11

Câu 4: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{3}$. Gọi M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' , diện tích tam giác MNP bằng 4. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (MNP)

A. 120°

B. 45°

C. 30°

D. 90°

Câu 5: Cho hàm số $f(x), f(-x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{4 + x^2}$.

Tính $I = \int_{-2}^2 f(x) dx$.

A. $I = \frac{\pi}{20}$

B. $I = \frac{\pi}{10}$

C. $I = -\frac{\pi}{20}$

D. $I = -\frac{\pi}{10}$

Câu 6: Cho $\int_1^2 f(x) dx = 2$. Tính $I = \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ bằng

A. $I = 4$

B. $I = 1$

C. $I = \frac{1}{2}$

D. $I = 2$

Câu 7: Cho các số thực dương a, b với $a \neq 1$ và $\log_a b > 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. $\begin{cases} 0 < a, b < 1 \\ 0 < a < 1 < b \end{cases}$

B. $\begin{cases} 0 < a, b < 1 \\ 1 < a, b \end{cases}$

C. $\begin{cases} 0 < a, b < 1 \\ 0 < b < 1 < a \end{cases}$

D. $\begin{cases} 0 < b < 1 < a \\ 1 < a, b \end{cases}$

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x - 1)(x^2 - 1)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2

B. 1

C. 8

D. 3

Câu 9: Cho hai tích phân $\int_{-2}^5 f(x) dx = 8$ và $\int_5^{-2} g(x) dx = 3$. Tính $I = \int_{-2}^5 [f(x) - 4g(x) - 1] dx$?

A. $I = 13$

B. $I = 27$

C. $I = -11$

D. $I = 3$

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 4$ (C). Biết đồ thị hàm số (C) cắt trục hoành tại ít nhất một điểm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 20a^2 + 20b^2 + 5c^2$

A. 32

B. 64

C. 16

D. 8

Câu 11: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh $2a$, cạnh bên $SA = a\sqrt{5}$. Khoảng cách giữa BD và SC là

A. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$

B. $\frac{a\sqrt{30}}{5}$

C. $\frac{a\sqrt{15}}{6}$

D. $\frac{a\sqrt{30}}{6}$

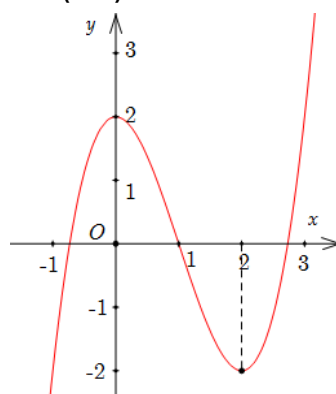
Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\cos x) = m$ có nghiệm 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right]$ là

A. $[-2; 2]$

B. $(0; 2)$

C. $(-2; 2)$

D. $[0; 2)$



Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$				
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$					
y	$-\infty$			2			1			4			$-\infty$

Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$

C. Hàm số có 3 cực tiểu.

D. Hàm số có giá trị cực tiểu là 0

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$. Thể tích tứ diện OABC bằng

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{6}$

C. 1

D. 2

Câu 15: Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - \sqrt{4 - x^2}$. Khi đó $M - m$ bằng

A. 4

B. $2(\sqrt{2} - 1)$

C. $2 - \sqrt{2}$

D. $2(\sqrt{2} + 1)$

Câu 16: Cho mặt phẳng (P) đi qua các điểm $A(-2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;-3)$. Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau?

A. $3x - 2y + 2z + 6 = 0$

B. $2x + 2y - z - 1 = 0$

C. $x + y + z + 1 = 0$

D. $x - 2y - z - 3 = 0$

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho bốn điểm $A(1;0;2)$, $B(-2;1;3)$, $C(3;2;4)$, $D(6;9;-5)$. Tọa độ trọng tâm của tứ diện $ABCD$ là?

A. $(2;3;1)$

B. $(2;3;-1)$

C. $(-2;3;1)$

D. $(2;-3;1)$

Câu 18: Tập xác định của hàm số $(x^2 - 3x + 2)^x$ là

- A. $R \setminus \{1; 2\}$ B. $(1; 2)$ C. $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$ D. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 9 = 0$.

Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu là

- A. $I(1; -2; 3)$ và $R = 5$ B. $I(-1; 2; -3)$ và $R = 5$
C. $I(1; -2; 3)$ và $R = \sqrt{5}$ D. $I(-1; 2; -3)$ và $R = \sqrt{5}$

Câu 20: Tích phân $\int_0^2 \frac{x}{x^2 + 3} dx$ bằng

- A. $\frac{1}{2} \log \frac{7}{3}$ B. $\ln \frac{7}{3}$ C. $\frac{1}{2} \ln \frac{3}{7}$ D. $\frac{1}{2} \ln \frac{7}{3}$

Câu 21: Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

- A. $\int 2e^x dx = 2(e^x + C)$ B. $\int x^3 dx = \frac{x^4 + C}{4}$
C. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ D. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

Câu 22: Đầu mỗi tháng anh A gửi vào ngân hàng 3 triệu đồng với lãi suất kép là 0,6% mỗi tháng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng (khi ngân hàng đã tính lãi) thì anh A có được số tiền cả lãi và gốc nhiều hơn 100 triệu biết lãi suất không đổi trong quá trình gửi.

- A. 30 tháng B. 40 tháng C. 35 tháng D. 31 tháng

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên R và có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$			0			-1		$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) - 1 = m$ có đúng hai nghiệm

- A. $-2 < m < -1$ B. $m > 0, m = -1$ C. $m = -2, m > -1$ D. $m = -2, m \geq -1$

Câu 24: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^{2x}$?

- A. $\int 5^{2x} dx = 2 \cdot 5^{2x} \ln 5 + C$ B. $\int 5^{2x} dx = 2 \cdot \frac{5^{2x}}{\ln 5} + C$
C. $\int 5^{2x} dx = \frac{25^x}{2 \ln 5} + C$ D. $\int 5^{2x} dx = \frac{25^{x+1}}{x+1} + C$

Câu 25: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là:

- A. $(-3; 2; -1)$. B. $(2; -1; -3)$. C. $(-1; 2; -3)$. D. $(2; -3; -1)$.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ có $f(2) = f(-2) = 0$ và bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y = (f(3-x))^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $(2; 5)$ B. $(1; +\infty)$ C. $(-2; -1)$ D. $(1; 2)$

Câu 27: Tính khoảng cách giữa các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 1$ (C) tại các điểm cực trị của (C).

- A. 4 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 28: Khối trụ tròn xoay có đường kính đáy là $2a$, chiều cao là $h = 2a$ có thể tích là:

- A. $V = 2\pi a^2$ B. $V = 2\pi a^3$ C. $V = 2\pi a^2 h$ D. $V = \pi a^3$

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$-$	$ $	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-1	$-\infty$	2	-2

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 3 B. 4 C. 1 D. 2

Câu 30: Gọi l , h , r lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính mặt đáy của hình nón. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón là

- A. $S_{xq} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ B. $S_{xq} = \pi r h$ C. $S_{xq} = 2\pi r l$ D. $S_{xq} = \pi r l$

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên $[0; 2]$ và $f(2) = 16$; $\int_0^2 f'(x) dx = 4$.

Tính $I = \int_0^1 x f'(2x) dx$

- A. $I = 7$ B. $I = 20$ C. $I = 12$ D. $I = 13$

Câu 32: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Thể tích của khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{1}{3}abc$ B. $3abc$ C. abc D. $\frac{1}{2}abc$

Câu 33: Hai đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 2x - 1$ và $y = 3x^2 - 2x - 1$ có tất cả bao nhiêu điểm chung

- A. 1 B. 2 C. 0 D. 3

Câu 34: Đặt $a = \log_2 5$, $b = \log_3 5$. Hãy biểu diễn $\log_6 5$ theo a và b

- A. $\log_6 5 = \frac{1}{a+b}$ B. $\log_6 5 = \frac{ab}{a+b}$ C. $\log_6 5 = a^2 + b^2$ D. $\log_6 5 = a + b$

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $\int_a^a k f(x) dx = 0$ B. $\int_a^b x f(x) dx = x \int_a^b f(x) dx$
 C. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ D. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

Câu 36: Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên gồm 7 chữ số khác nhau có dạng $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7}$. Tính xác suất để số được chọn luôn có mặt chữ số 2 và thỏa mãn $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 > a_5 > a_6 > a_7$

- A. $\frac{1}{243}$ B. $\frac{1}{486}$ C. $\frac{1}{1215}$ D. $\frac{1}{972}$

Câu 37: Cho $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên đoạn $[-1; 1]$ và $\int_0^1 f(x) dx = 4$.

Kết quả $I = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+e^x} dx$ bằng

A. $I = 8$

B. $I = 4$

C. $I = 2$

D. $I = \frac{1}{4}$

Câu 38: Trong khai triển nhị thức $(a+2)^{n+6}$ ($n \in \mathbb{N}$) có tất cả 17 số hạng. Khi đó giá trị n bằng

A. 12

B. 11

C. 10

D. 17

Câu 39: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V . Tính thể tích khối đa diện $ABCB'C'$.

A. $\frac{V}{4}$

B. $\frac{V}{2}$

C. $\frac{3V}{4}$

D. $\frac{2V}{3}$

Câu 40: Một khối gỗ hình lập phương có thể tích V_1 . Một người thợ mộc muốn gọt giữa khối gỗ đó thành một khối trụ có thể tích V_2 . Tính tỷ số lớn nhất $k = \frac{V_2}{V_1}$?

A. $k = \frac{\pi}{4}$

B. $k = \frac{2}{\rho}$

C. $k = \frac{\rho}{2}$

D. $k = \frac{4}{\rho}$

Câu 41: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	0	-1	0	$-\infty$		

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(-\infty; -1)$

B. $(-1; 1)$

C. $(1; +\infty)$

D. $(0; 1)$

Câu 42: Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2+1} - \sqrt{n+2}}{2n-3}$ bằng:

A. $+\infty$

B. 1

C. 2

D. $\frac{3}{2}$

Câu 43: Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{2}{5}}(x-4)+1 > 0$.

A. $\left[\frac{13}{2}; +\infty\right)$

B. $\left(-\infty; \frac{13}{2}\right)$

C. $(4; +\infty)$

D. $\left(4; \frac{13}{2}\right)$

Câu 44: Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau được tạo thành từ các chữ số của tập $X = \{1; 3; 5; 8; 9\}$?

A. P_5

B. P_4

C. C_5^4

D. A_5^4

Câu 45: Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = 6^n - 1$. Tìm số hạng thứ năm của cấp số nhân đã cho

A. 6480

B. 6840

C. 7775

D. 120005

Câu 46: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;1); B(3;-2;0); C(1;2;-2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A sao cho tổng khoảng cách từ B và C đến (P) lớn nhất biết rằng (P) không cắt đoạn BC . Khi đó véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

A. $\vec{n}(2;-2;-1)$

B. $\vec{n}(1;0;2)$

C. $\vec{n}(-1;2;-1)$

D. $\vec{n}(1;0;-2)$

Câu 47: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;-2;-1)$, $B(-2;-4;3)$, $C(1;3;-1)$.

Tìm điểm $M \in (Oxy)$ sao cho $\left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $\left(\frac{1}{5}; \frac{3}{5}; 0 \right)$

B. $\left(-\frac{1}{5}; \frac{3}{5}; 0 \right)$

C. $\left(\frac{1}{5}; -\frac{3}{5}; 0 \right)$

D. $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; 0 \right)$

Câu 48: Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 - 4mx$ đồng biến trên đoạn $[1; 4]$

A. $m \in \mathbb{R}$

B. $m \leq \frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2} < m < 2$

D. $m \leq 2$

Câu 49: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (2; m-1; 3)$, $\vec{b} = (1; 3; -2n)$. Tìm m, n để các vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng

A. $m=7; n=-\frac{3}{4}$

B. $m=1; n=0$

C. $m=7; n=-\frac{4}{3}$

D. $m=4; n=-3$

Câu 50: Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên tập số thực $\mathbb{R}$?

A. $y = \left(\frac{2}{e} \right)^x$

B. $y = \left(\frac{\pi}{3} \right)^x$

C. $y = \log_{\frac{\pi}{4}} (2x^2 + 1)$

D. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

----- HẾT -----

ĐÁP ÁN

1. A	2. D	3. C	4. C	5. A	6. A	7. B	8. B	9. A	10. B
11. B	12. B	13. A	14. C	15. D	16. B	17. A	18. D	19. C	20. D
21. C	22. D	23. C	24. C	25. C	26. A	27. A	28. B	29. D	30. D
31. A	32. C	33. D	34. B	35. B	36. B	37. C	38. C	39. D	40. C
41. C	42. B	43. D	44. D	45. A	46. D	47. A	48. B	49. A	50. A

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Chọn đáp án A

Phương pháp

Chia khối đa diện $V_{ABMNQ} = V_{ABMN} + V_{AMNP} + V_{ANPQ}$.

Cách giải

Trong (BCD) gọi $E = MN \cap CD$.

Trong (ACD) gọi $Q = AD \cap PE$.

Khi đó thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (MNP)

là tứ giác $MNPQ$.

Áp dụng định lí Menelaus trong tam giác BCD ta có:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{EC}{ED} \cdot \frac{ND}{NB} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{EC}{ED} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{EC}{ED} = 4.$$

Áp dụng định lí Menelaus trong tam giác ACD ta có:

$$\frac{PA}{PC} \cdot \frac{EC}{ED} \cdot \frac{QD}{QA} = 1 \Rightarrow 1 \cdot 4 \cdot \frac{QD}{QA} = 1 \Rightarrow \frac{QD}{QA} = \frac{1}{4}$$

Ta có: $V_{ABMNQ} = V_{ABMN} + V_{AMNP} + V_{ANPQ}$

$$+) \frac{S_{BMN}}{S_{BCD}} = \frac{BM}{BC} \cdot \frac{BN}{BD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \Rightarrow \frac{V_{ABMN}}{V_{ABCD}} = \frac{2}{9}$$

$$+) \frac{V_{AMNP}}{V_{AMNC}} = \frac{AP}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{AMNP} = \frac{1}{2} V_{AMNC}$$

$$\frac{S_{NMC}}{S_{DBC}} = \frac{d(N; BC) \cdot MC}{d(D; BC) \cdot BC} = \frac{NB}{DB} \cdot \frac{MC}{BC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

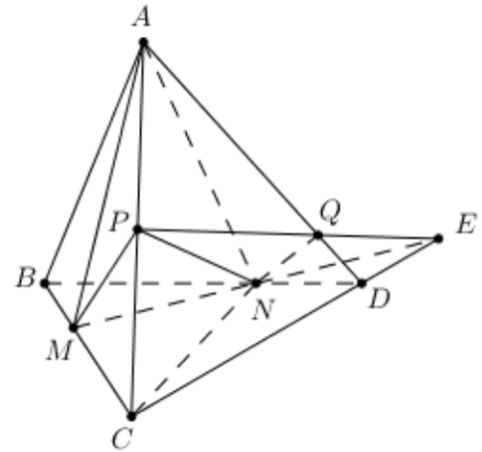
$$\Rightarrow \frac{V_{AMNC}}{V_{ABCD}} = \frac{4}{9} \Rightarrow V_{AMNP} = \frac{2}{9} V_{ABCD}$$

$$+) \frac{V_{APQN}}{V_{ACDN}} = \frac{AP}{AC} \cdot \frac{AQ}{AD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5} \Rightarrow V_{APQN} = \frac{2}{5} V_{ACDN}$$

$$\frac{S_{CND}}{S_{CBD}} = \frac{DN}{DB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_{ACDN}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{APQN} = \frac{2}{15} V_{ABCD}$$

$$\Rightarrow V_{ABMNQ} = V_{ABMN} + V_{AMNP} + V_{ANPQ} = \frac{2}{9} V_{ABCD} + \frac{2}{9} V_{ABCD} + \frac{2}{15} V_{ABCD} = \frac{26}{45} V_{ABCD}.$$

Gọi $V_1 = V_{ABMNQ}$, V_2 là thể tích phần còn lại $\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{26}{19}$.



Câu 2. Chọn đáp án D

Phương pháp

Sử dụng các công thức $\log_a b^m = \frac{m}{n} \log_a b$ ($0 < a \neq 1, b > 0$), $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$ ($0 < a \neq 1, x, y > 0$)

để đưa phương trình về dạng phương trình logarit cơ bản.

Cách giải

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} x^2 + 4x > 0 \\ 2x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -4 \\ x > -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$$

$$\log_3(x^2 + 4x) + \log_{\frac{1}{3}}(2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \log_3(x^2 + 4x) - \log_3(2x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{x^2 + 4x}{2x + 3} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 4x}{2x + 3} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(tm) \\ x = -3(ktm) \end{cases} \Rightarrow S = \{1\}$$

Vậy phương trình đã cho có duy nhất 1 nghiệm.

Chú ý: Lưu ý ĐKXĐ của phương trình.

Câu 3. Chọn đáp án C

Phương pháp

+) Chia cả 2 vế của bất phương trình cho $2^x > 0$.

+) Đặt $t = (3 + \sqrt{7})^x$ ($t > 0$).

+) Đưa bất phương trình về dạng $m \leq f(t) \quad \forall t > 0 \Leftrightarrow m \leq \min_{(0; +\infty)} f(t)$.

+) Lập BBT hàm số $y = f(t)$ và kết luận.

Cách giải

Chia cả 2 vế của bất phương trình cho $2^x > 0$ ta được: $(3 + \sqrt{7})^x + (2 - m) \left(\frac{3 - \sqrt{7}}{2} \right)^x - (m + 1) \geq 0$

Nhận xét: $(3 + \sqrt{7})^x \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{7}}{2} \right)^x = 1$, do đó khi ta đặt $t = (3 + \sqrt{7})^x$ ($t > 0$) $\Rightarrow \left(\frac{3 - \sqrt{7}}{2} \right)^x = \frac{1}{t}$.

Phương trình trở thành: $t + (2 - m) \frac{1}{t} - (m + 1) \geq 0 \Leftrightarrow t^2 - (m + 1)t + 2 - m \geq 0$

$$\Leftrightarrow t^2 - t + 2 \geq m(t + 1) \Leftrightarrow m \leq \frac{t^2 - t + 2}{t + 1} = f(t) \quad \forall t > 0 \Leftrightarrow m \leq \min_{(0; +\infty)} f(t).$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - t + 2}{t + 1}$ ($t > 0$) ta có: $f'(t) = \frac{(2t - 1)(t + 1) - t^2 + t - 2}{(t + 1)^2} = \frac{t^2 + 2t - 3}{(t + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases}$

BBT:

x	0	1	$+\infty$	
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$	2		1	$+\infty$

Từ BBT $\Rightarrow m \leq 1$.

Kết hợp điều kiện đề bài $\Rightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ m \in [-10; 1] \end{cases} \Rightarrow$ có 12 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4. Chọn đáp án C

Phương pháp

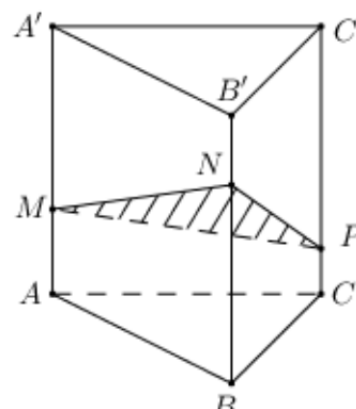
Sử dụng kết quả: $S_{A'B'C'} = S_{ABC} \cdot \cos \alpha$ trong đó ABC là hình chiếu của $A'B'C'$ lên mặt phẳng (P) nào đó và α là góc giữa 2 mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$.

Cách giải

Gọi α là góc giữa 2 mặt phẳng (ABC) và (MNP) .

Dễ thấy $\triangle ABC$ là hình chiếu của $\triangle MNP$ lên mặt phẳng (ABC) , do đó ta có

$$S_{ABC} = S_{MNP} \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{S_{ABC}}{S_{MNP}} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ.$$



Câu 5. Chọn đáp án A

Phương pháp

$$+) \text{ Chứng minh } I = \int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^2 f(-x) dx$$

$$+) \text{ Lấy tích phân từ } -2 \text{ đến } 2 \text{ hai vế của } 2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{4+x^2}. \text{ Tính } I.$$

Cách giải

$$\text{Đặt } t = -x \Rightarrow dx = -dt.$$

$$\text{Đổi cận: } \begin{cases} x = -2 \Rightarrow t = 2 \\ x = 2 \Rightarrow t = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = - \int_2^{-2} f(-t) dt = \int_{-2}^2 f(-x) dx.$$

$$\text{Theo bài ra ta có: } 2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{4+x^2} \Leftrightarrow 2 \int_{-2}^2 f(x) dx + 3 \int_{-2}^2 f(-x) dx = \int_{-2}^2 \frac{dx}{4+x^2}$$

$$\Leftrightarrow 3I + 2I = \int_{-2}^2 \frac{dx}{4+x^2} \Leftrightarrow I = \frac{1}{5} \int_{-2}^2 \frac{dx}{4+x^2}.$$

$$\text{Đặt } x = 2 \tan u \text{ ta có: } dx = 2 \frac{1}{\cos^2 u} du = 2(1 + \tan^2 u) du$$

$$\text{Đổi cận: } \begin{cases} x = -2 \Rightarrow u = \frac{-\pi}{4} \\ x = 2 \Rightarrow u = \frac{\pi}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó ta có } I = \frac{1}{5} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2(1+u^2)}{4+4\tan^2 u} du = \frac{1}{10} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} du = \frac{1}{10} u \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{10} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{20}.$$

Câu 6. Chọn đáp án A

Phương pháp

Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến, đặt $t = \sqrt{x}$.

Cách giải

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{2}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt$$

$$\text{Đổi cận: } \begin{cases} x = 1 \Leftrightarrow t = 1 \\ x = 4 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = 2 \int_1^2 f(t) dt = 2 \int_1^2 f(x) dx = 2 \cdot 2 = 4.$$

Câu 7. Chọn đáp án B

Phương pháp

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) > 0 \\ 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases}$$

Cách giải

$$\text{TH1: } 0 < a < 1 \Rightarrow \log_a b > 0 = \log_a 1 \Leftrightarrow 0 < b < 1.$$

$$\text{TH2: } a > 1 \Rightarrow \log_a b > 0 = \log_a 1 \Leftrightarrow b > 1.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} 0 < a, b < 1 \\ 1 < a, b \end{cases}.$$

Câu 8. Chọn đáp án B

Phương pháp

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là số nghiệm bội lẻ của phương trình $f'(x) = 0$.

Cách giải

$$f'(x) = x^2(x-1)(x^2-1)^3 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)(x-1)^3(x+1)^3 = x^2(x-1)^4(x+1)^3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Tuy nhiên $x = 0$ là nghiệm bội 2, $x = 1$ là nghiệm bội 4 của phương trình $f'(x) = 0$, do đó chúng không là cực trị của hàm số. Vậy hàm số có duy nhất 1 điểm cực trị $x = -1$.

Chú ý: HS nên phân tích đa thức $f'(x)$ thành nhân tử triệt để trước khi xác định nghiệm, tránh sai lầm khi kết luận $x=1$ cũng là cực trị của hàm số.

Câu 9. Chọn đáp án A

Phương pháp

Sử dụng các công thức:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Cách giải

$$I = \int_{-2}^5 [f(x) - 4g(x) - 1] dx = \int_{-2}^5 f(x) dx - 4 \int_{-2}^5 g(x) dx - \int_{-2}^5 1 dx = 8.4.(-3) - x \Big|_{-2}^5 = 13.$$

Câu 10. Chọn đáp án B

Câu 11. Chọn đáp án B

Phương pháp

+) Dựng đoạn vuông góc chung của BD và SC .

+) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông tính độ dài vuông góc chung.

Cách giải

Vì chóp $S.ABCD$ đều $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Trong (SOC) kẻ $OH \perp SC (H \in SC)$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SOC) \Rightarrow OH \perp BD$$

$\Rightarrow OH$ là đoạn vuông góc chung của BD và $SC \Rightarrow d(BD; SC) = OH$.

$$ABCD \text{ là hình vuông cạnh } 2a \Rightarrow OC = \frac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{5a^2 - 2a^2} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông } SOC: OH = \frac{SO \cdot OC}{SC} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{30}}{5}.$$

$$\text{Vậy } d(BD; SC) = \frac{a\sqrt{30}}{5}.$$

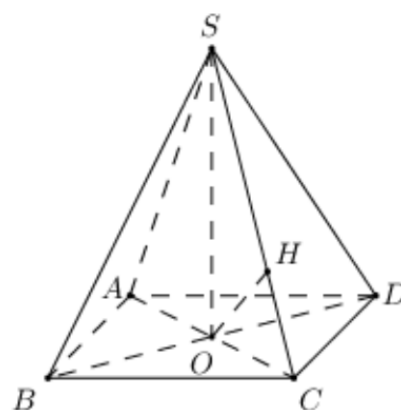
Câu 12. Chọn đáp án B

Phương pháp

+) Đặt $t = \cos x$, xác định khoảng giá trị của t , khi đó phương trình trở thành $f(t) = m$.

+) Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(t)$ và $y = m$ song song với trục hoành.

Cách giải



Đặt $t = \cos x$ ta có $x \in \left(0; \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [-1; 1)$, khi đó phương trình trở thành $f(t) = m$.

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(t)$ và $y = m$ song song với trục hoành.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy phương trình $f(t) = m$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc $[-1; 1)$ khi và chỉ khi $m \in (0; 2)$.

Câu 13. Chọn đáp án A

Phương pháp

Dựa vào BBT xác định các điểm cực trị của hàm số.

Cách giải

Dựa vào BBT ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

Câu 14. Chọn đáp án C

Phương pháp

Tứ diện $OABC$ vuông tại $O \Rightarrow V_{OABC} = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC$.

Cách giải

Tứ diện $OABC$ vuông tại $O \Rightarrow V_{OABC} = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$.

Câu 15. Chọn đáp án D

Phương pháp

+) Tính y' , xác định các nghiệm x_i của phương trình $y' = 0$.

+) Tính $y(a); y(b); y(x_i)$.

+) KL: $\max_{[a;b]} y = \max \{y(a); y(b); y(x_i)\}; \min_{[a;b]} y = \min \{y(a); y(b); y(x_i)\}$.

Cách giải

TXĐ: $D = [-2; 2]$

Ta có: $y' = 1 - \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = -1 \Leftrightarrow -x = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 = 4-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$.

$y(2) = 2; y(-2) = -2; y(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \max y = 2 = M, \min y = -2\sqrt{2} = m \Rightarrow M - m = 2 + 2\sqrt{2} = 2(\sqrt{2} + 1)$.

Câu 16. Chọn đáp án B

Phương pháp

+) Lập phương trình mặt phẳng (P) dạng mặt chắn và suy ra VTPT $\vec{n}_p$ của (P) .

+) $P \perp (Q) \Leftrightarrow \vec{n}_p \cdot \vec{n}_Q = 0$.

Cách giải

Phương trình mặt phẳng $(P): \frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-3} = 1 \Leftrightarrow 3x - 2y + 2z + 6 = 0 \Rightarrow \vec{n}_p = (3; -2; 2)$ là 1 VTPT của (P) .

Xét đáp án A: $3x - 2y + 2z + 6 = 0$ có $\vec{a} = (3; -2; 2)$ là 1 VTPT và $\vec{a} \cdot \vec{n}_p = 9 + 4 + 4 = 17 \neq 0$.

Xét đáp án B: $2x + 2y - z - 1 = 0$ có $\vec{b} = (2; 2; -1)$ là 1 VTPT và $\vec{b} \cdot \vec{n}_p = 6 - 4 - 2 = 0 \Rightarrow \vec{b} \perp \vec{n}_p$.

Vậy (P) vuông góc với mặt phẳng $2x + 2y - z - 1 = 0$.

Câu 17. Chọn đáp án A

Phương pháp

$$I \text{ là trọng tâm của tứ diện } ABCD \Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4} \\ y_I = \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4} \\ z_I = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} \end{cases}$$

Cách giải

$$I \text{ là trọng tâm của tứ diện } ABCD \Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4} = \frac{1 - 2 + 3 + 6}{4} = 2 \\ y_I = \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4} = \frac{0 + 1 + 2 + 9}{4} = 3 \Rightarrow I(2; 3; 1) \\ z_I = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} = \frac{2 + 3 + 4 - 5}{4} = 1 \end{cases}$$

Câu 18. Chọn đáp án D

Phương pháp

Hàm số lũy thừa $y = x^n$ có TXĐ phụ thuộc vào n như sau:

$n \in \mathbb{R}^+$	$n \in \mathbb{R}^-$	$n \notin \mathbb{R}$
$D = \mathbb{R}$	$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$D = (0; +\infty)$

Cách giải

Do $\pi \notin \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số xác định $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$

Câu 19. Chọn đáp án C

Phương pháp

Mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Cách giải

Mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 9 = 0$ có tâm $I(1; -2; 3)$ và $R = \sqrt{1 + 4 + 9 - 9} = \sqrt{5}$.

Câu 20. Chọn đáp án D

Phương pháp

Tính tích phân bằng phương pháp đặt ẩn phụ $t = x^2 + 3$.

Cách giải

Đặt $t = x^2 + 3 \Rightarrow dt = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} dt$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 3 \\ x = 2 \Rightarrow t = 7 \end{cases}$.

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_3^7 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| \Big|_3^7 = \frac{1}{2} \ln 7 - \frac{1}{2} \ln 3 = \frac{1}{2} \ln \frac{7}{3}.$$

Câu 21. Chọn đáp án C

Phương pháp

Dựa vào bảng nguyên hàm cơ bản.

Cách giải

Mệnh đề sai là đáp án C, mệnh đề đúng phải là $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

Câu 22. Chọn đáp án D

Phương pháp

Sử dụng công thức lãi kép (tiền gửi vào đầu tháng): $T = \frac{M}{r} [(1+r)^n - 1](1+r)$ trong đó:

M : Số tiền gửi vào đều đặn hàng tháng.

r : lãi suất (%/ tháng)

n : số tháng gửi

T : số tiền nhận được sau n tháng.

Cách giải

Ta có: $T = \frac{M}{r} [(1+r)^n - 1](1+r)$

Giả sử sau n tháng sau anh A nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu, khi đó ta có:

$$\frac{3}{0,6\%} [(1+0,6\%)^n - 1](1+0,6\%) > 100 \Leftrightarrow n > 30,3.$$

Vậy sau ít nhất 31 tháng thì anh A có được số tiền cả lãi và gốc nhiều hơn 100 triệu.

Câu 23. Chọn đáp án C

Phương pháp

Số nghiệm của phương trình $f(x) = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = m$ song song với trục hoành.

Cách giải

Ta có: $f(x) - 1 = m \Leftrightarrow f(x) = m + 1$. Số nghiệm của phương trình $f(x) = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = m + 1$ song song với trục hoành.

Từ BBT ta thấy để phương trình $f(x) - 1 = m$ có đúng 2 nghiệm thì $\begin{cases} m+1 > 0 \\ m+1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m = -2 \end{cases}.$

Câu 24. Chọn đáp án C

Phương pháp

Sử dụng bảng nguyên hàm mở rộng $\int \alpha^{ax+\beta} dx = \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha^{ax+\beta}}{\ln \alpha} + C$.

Cách giải

$$\int 5^{2x} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{5^{2x}}{\ln 5} + C = \frac{25^x}{2 \ln 5} + C.$$

Câu 25. Chọn đáp án C

Phương pháp

Với $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Rightarrow \vec{a}(x; y; z)$.

Cách giải

$$\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k} \Rightarrow \vec{a} = (-1; 2; -3).$$

Câu 26. Chọn đáp án A

Phương pháp

+) Dùng công thức đạo hàm hàm hợp tính $g'(x)$ với $y = g(x) = (f(3-x))^2$

+) Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên $(a; b) \Leftrightarrow g'(x) \leq 0 \forall x \in (a; b)$ và bằng 0 tại hữu hạn điểm.

Cách giải

Dựa vào bảng xét dấu $f'(x)$ ta suy ra BBT của hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$				
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$			0		0		0		

$$\Rightarrow f(x) \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Đặt } y = g(x) = (f(3-x))^2 \Rightarrow g'(x) = -2f(3-x) \cdot f'(3-x) \leq 0.$$

$$\text{Với } x = 4 \Rightarrow g'(4) = -2f(-1)f'(-1) < 0 \Rightarrow \text{Loại đáp án C và D.}$$

$$\text{Với } x = 4 \Rightarrow g'(6) = -2f(-3)f'(-3) > 0 \Rightarrow \text{Loại đáp án B.}$$

Câu 27. Chọn đáp án A

Phương pháp

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = x_0$ là $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

Cách giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -1 \\ x = -1 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 1$ và $y = -1(d_1)$ và phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = -1$ và $y = 3(d_2)$.

$$\text{Vậy } d((d_1); (d_2)) = 4.$$

Câu 28. Chọn đáp án B

Phương pháp

Thể tích khối trụ có chiều cao h và bán kính đáy R là $V = \pi R^2 h$.

Cách giải

Khối trụ tròn xoay có đường kính là $2a$, chiều cao là $h = 2a$ có thể tích là $V = \pi(a)^2 \cdot 2a = 2\pi a^3$.

Câu 29. Chọn đáp án D

Phương pháp

Cho hàm số $y = f(x)$.

Nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} y = y_0 \Rightarrow y = y_0$ là TCN của đồ thị hàm số.

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} y = \infty \Rightarrow x = x_0$ là TCD của đồ thị hàm số.

Cách giải

Dựa vào BBT ta có:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = -\infty \Rightarrow x = 0$ là TCD của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -2 \Rightarrow y = -2$ là TCN của đồ thị hàm số.

Vậy hàm số đã cho có tổng 2 TCN và TCD.

Câu 30. Chọn đáp án D

Phương pháp

Công thức tính diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi rl$ trong đó r, l lần lượt là bán kính đáy và độ dài đường sinh của hình nón.

Cách giải

Công thức tính diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi rl$ trong đó r, l lần lượt là bán kính đáy và độ dài đường sinh của hình nón.

Chú ý: Hình nón có đường sinh và đường cao khác nhau.

Câu 31. Chọn đáp án A

Phương pháp

Đặt $t = 2x$, sau đó sử dụng phương pháp tích phân từng phần.

Cách giải

Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = 2 \end{cases} \Rightarrow I = \int_0^2 \frac{t}{2} \cdot f'(t) \frac{dt}{2} = \frac{1}{4} \int_0^2 tf'(t) dt$

Đặt $\begin{cases} u = t \\ dv = f'(t) dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = f(t) \end{cases}$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \left[tf(t) \Big|_0^2 - \int_0^2 f(t) dt \right] = \frac{1}{4} [2f(2) - 4] = \frac{1}{4} (2 \cdot 16 - 4) = 7$.

Câu 32. Chọn đáp án C

Phương pháp

Thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = b, AC = c$ và $V = abc$.

Cách giải

Thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = b, AC = c$ là $V = abc$.

Câu 33. Chọn đáp án D

Phương pháp

Giải phương trình hoành độ giao điểm.

Cách giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$-x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 3x^2 - 2x - 1 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Vậy 2 đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm chung.

Câu 34. Chọn đáp án B

Phương pháp

Sử dụng các công thức $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$ (giả sử các biểu thức là có nghĩa).

Cách giải

$$\log_6 5 = \frac{1}{\log_5 6} = \frac{1}{\log_5 2 + \log_5 3} = \frac{1}{\frac{1}{\log_2 5} + \frac{1}{\log_3 5}} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{ab}{a+b}.$$

Câu 35. Chọn đáp án B

Phương pháp

Sử dụng các tính chất của tích phân:

$$\begin{aligned} \int_a^a kf(x)dx &= 0 \\ \int_a^b [f(x) + g(x)]dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ \int_a^b f(x)dx &= -\int_b^a f(x)dx \end{aligned}$$

Cách giải

Dựa vào các đáp án ta dễ dàng nhận thấy các đáp án A, C, D đúng, đáp án B sai.

Câu 36. Chọn đáp án B

Phương pháp

+) Kẹp khoảng giá trị của a_4 . Xét từng trường hợp của a_4 .

+) Trong từng trường hợp của a_4 , sử dụng quy tắc nhân tìm số thỏa mãn $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 > a_5 > a_6 > a_7$, số thỏa mãn $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 > a_5 > a_6 > a_7$ không có mặt chữ số 2 rồi trừ đi tìm số thỏa mãn $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 > a_5 > a_6 > a_7$ luôn có mặt chữ số 2.

+) Áp dụng quy tắc cộng tính số phần tử của biến cố “Số tự nhiên có 7 chữ số khác nhau thỏa mãn $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 > a_5 > a_6 > a_7$ luôn có mặt chữ số 2”.

+) Tính số phần tử của không gian mẫu.

+) Tính xác suất của biến cố.

Cách giải

Do $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 > a_5 > a_6 > a_7$ và các chữ số là khác nhau nên $6 \leq a_4 \leq 9$.

Do $a_1 \neq 0 \Rightarrow 0 < a_1 < a_2 < a_3$.

TH1: $a_4 = 6 \Rightarrow a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

Chọn 3 số trong 6 số trên cho cặp $a_1 a_2 a_3$ có C_5^3 cách chọn (không chọn số 0).

3 số còn lại có 1 cách chọn.

$\Rightarrow$ Có $C_5^3 = 10$ số. **10** số này thỏa mãn luôn có mặt chữ số 2.

TH2: $a_4 = 7 \Rightarrow a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Chọn 3 số trong 7 (không chọn số 0) số trên cho cặp $a_1 a_2 a_3$ có C_6^3 cách chọn.

3 số còn lại có C_4^3 cách chọn.

$\Rightarrow$ Có $C_6^3 C_4^3 = 80$ số. 80 số này có thể có hoặc không có mặt chữ số 2.

+) Chọn 3 số trong 7 số trên (không chọn số 0; 2) cho cặp $a_1 a_2 a_3$ có C_5^3 cách chọn.

3 số còn lại có $C_3^3 = 1$ cách chọn.

$\Rightarrow$ Có $C_5^3 = 10$ số. 10 số này không có mặt chữ số 2.

Vậy TH2 có **70** số thỏa mãn luôn có mặt chữ số 2.

TH3: $a_4 = 8 \Rightarrow a_1, a_2, a_3, a_5, a_6, a_7 \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Chọn 3 số trong 8 số trên (không chọn số 0) cho cặp $a_1 a_2 a_3$ có C_7^3 cách chọn.

3 số còn lại có C_5^3 cách chọn.

$\Rightarrow$ Có $C_7^3 C_5^3 = 350$ số. 350 số này có thể có hoặc không có mặt chữ số 2.

+) Chọn 3 số trong 8 số trên (không chọn số 0; 2) cho cặp $a_1 a_2 a_3$ có C_6^3 cách chọn.

3 số còn lại có $C_4^3 = 4$ cách chọn.

$\Rightarrow$ Có $C_6^3 C_4^3 = 80$ số. 80 số này không có mặt chữ số 2.

Vậy TH3 có $350 - 80 = \mathbf{270}$ số thỏa mãn luôn có mặt chữ số 2.

TH4: $a_4 = 9 \Rightarrow a_1, a_2, a_3, a_5, a_6, a_7 \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Chọn 3 số trong 9 số trên (không chọn số 0) cho cặp $a_1 a_2 a_3$ có C_8^3 cách chọn.

3 số còn lại có C_6^3 cách chọn.

$\Rightarrow$ Có $C_8^3 C_6^3 = 1120$ số.

+) Chọn 3 số trong 9 số trên (không chọn số 0; 2) cho cặp $a_1 a_2 a_3$ có C_7^3 cách chọn.

3 số còn lại có C_5^3 cách chọn.

$\Rightarrow$ Có $C_7^3 C_5^3 = 350$ số. 350 số này không có mặt chữ số 2.

Vậy TH4 có $1120 - 350 = \mathbf{770}$ số thỏa mãn luôn có mặt chữ số 2.

Gọi A là biến cố: “Số tự nhiên có 7 chữ số khác nhau thỏa mãn $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 > a_5 > a_6 > a_7$ luôn có mặt chữ số 2”.

$\Rightarrow n(A) = 10 + 70 + 270 + 770 = 1120$ cách.

$n(\Omega) = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 544320$.

Vậy $P(A) = \frac{1120}{544320} = \frac{1}{486}$.

Câu 37. Chọn đáp án C

Phương pháp

Sử dụng phương pháp đổi biến, đặt $t = -x$.

Cách giải

Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$.

Đổi cận $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=-1 \\ x=-1 \Rightarrow t=1 \end{cases}$, khi đó:

$$I = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+e^x} dx = - \int_1^{-1} \frac{f(-t) dt}{1+e^{-t}} = \int_{-1}^1 \frac{f(-x) dx}{1+\frac{1}{e^x}} = \int_{-1}^1 \frac{e^x f(-x) dx}{1+e^x}$$

Do $f(x)$ là hàm số chẵn nên $f(x) = f(-x) \forall x \in [-1; 1] \Rightarrow I = \int_{-1}^1 \frac{e^x f(x)}{1+e^x} dx$

$$\Rightarrow I + I = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+e^x} dx + \int_{-1}^1 \frac{e^x f(x)}{1+e^x} dx = \int_{-1}^1 \frac{(e^x + 1)f(x) dx}{1+e^x} = \int_{-1}^1 f(x) dx = 4 \Rightarrow I = 2.$$

Câu 38. Chọn đáp án C

Phương pháp

Khai triển $(a+b)^n$ có $n+1$ số hạng.

Cách giải

$$(a+2)^{n+6} = \sum_{k=0}^{n+6} C_{n+6}^k a^k \cdot 2^{n+6-k}, \text{ do đó khai triển trên có } n+7 \text{ số hạng.}$$

Theo bài ra ta có: $n+7=17 \Leftrightarrow n=10$.

Câu 39. Chọn đáp án D

Phương pháp

Sử dụng các công thức tính thể tích lăng trụ $V = S_{\text{day}} \cdot h$, công thức tính thể

$$\text{tích chóp } V = \frac{1}{3} S_{\text{day}} \cdot h.$$

Cách giải

$$\text{Ta có } V_{A.A'B'C'} = \frac{1}{3} V \Rightarrow V_{ABCB'C'} = \frac{2}{3} V.$$

Câu 40. Chọn đáp án C

Phương pháp

Tỉ số $\frac{V_2}{V_1}$ lớn nhất khi và chỉ khi V_2 lớn nhất. Khi đó hình trụ có chiều cao bằng cạnh của hình lập phương

và có đường tròn đáy nội tiếp một mặt của hình lập phương.

Cách giải

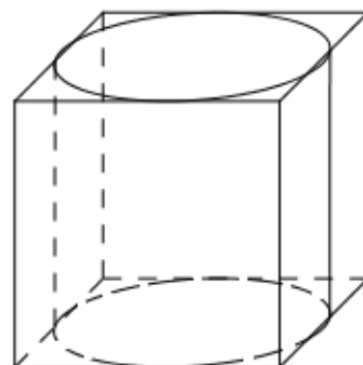
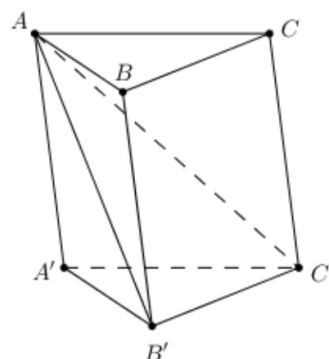
Gọi a là cạnh của hình lập phương, khi đó thể tích của hình lập phương là

$$V_1 = a^3. \text{ Khi đó tỉ số } \frac{V_2}{V_1} \text{ lớn nhất khi và chỉ khi } V_2 \text{ lớn nhất.}$$

Khi đó hình trụ có chiều cao bằng cạnh của hình lập phương và có đường tròn đáy nội tiếp một mặt của hình lập phương.

$$\Rightarrow h = a, r = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Khi đó } V_2 = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot a = \frac{\pi a^3}{2}$$



$$\text{Vậy } k = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\pi}{2}.$$

Câu 41. Chọn đáp án C

Phương pháp

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$ khi và chỉ khi $f'(x) \leq 0 \forall x \in (a; b)$ và bằng 0 tại hữu hạn điểm.

Cách giải

Dựa vào BBT ta dễ dàng nhận thấy hàm số đã cho nghịch biến trên $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 42. Chọn đáp án B

Phương pháp

Chia cả tử và mẫu cho n .

Cách giải

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 1} - \sqrt{n + 2}}{2n - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}}{2 - \frac{3}{n}} = \frac{2}{2} = 1.$$

Câu 43. Chọn đáp án D

Phương pháp

Giải bất phương trình logarit cơ bản $\log_a f(x) > b \Leftrightarrow 0 < f(x) < a^b \ (0 < a \neq 1)$.

Cách giải

$$\log_{\frac{2}{5}}(x - 4) + 1 > 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{2}{5}}(x - 4) > -1 \Leftrightarrow 0 < x - 4 < \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} \Leftrightarrow 4 < x < \frac{13}{2}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left(4; \frac{13}{2}\right)$.

Câu 44. Chọn đáp án D

Phương pháp

Sử dụng công thức chỉnh hợp.

Cách giải

Số các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau được tạo thành từ $X = \{1; 3; 5; 8; 9\}$ là A_5^4 số.

Câu 45. Chọn đáp án A

Phương pháp

$$u_5 = S_5 - S_4.$$

Cách giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} S_5 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 \\ S_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \end{cases} \Rightarrow u_5 = S_5 - S_4 = 6^5 - 1 - (6^4 - 1) = 6480.$$

Câu 46. Chọn đáp án D

Câu 47. Chọn đáp án A

Phương pháp

+) Gọi $I(a; b; c)$ thỏa mãn $\vec{IA} + \vec{IB} + 3\vec{IC} = \vec{0}$. Xác định tọa độ điểm I .

+) Chèn điểm I vào biểu thức đã cho.

+) Khi đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên (Oxy) .

Cách giải

Gọi $I(a; b; c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{IA} = (-a; -2-b; -1-c) \\ \overrightarrow{IB} = (-2-a; -4-b; 3-c) \Rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = (-5a+1; -5b+3; -5c+1) \\ \overrightarrow{IC} = (1-a; 3-b; -1-c) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = \frac{3}{5} \\ c = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{1}{5}; \frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right).$$

$$\text{Khi đó ta có } |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{MI} + 3\overrightarrow{IC}| = |5\overrightarrow{MI}| = 5MI$$

Khi đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên $(Oxy) \Rightarrow M\left(\frac{1}{5}; \frac{3}{5}; 0\right)$.

Câu 48. Chọn đáp án B

Phương pháp

+) Để hàm số đồng biến trên $[1; 4]$ thì $y' \geq 0 \forall x \in [1; 4]$ và bằng 0 tại hữu hạn điểm.

+) Cô lập m , đưa bất phương trình về dạng $m \leq f(x) \forall x \in [1; 4] \Leftrightarrow m \leq \min_{[1; 4]} f(x)$.

+) Lập BBT của hàm số $y = f(x)$ và kết luận.

Cách giải

$$\text{Ta có: } y' = x^2 - 2(m-1)x - 4m$$

Để hàm số đồng biến trên $[1; 4]$ thì $y' \geq 0 \forall x \in [1; 4]$ và bằng 0 tại hữu hạn điểm.

$$\Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x - 4m \geq 0 \forall x \in [1; 4] \Leftrightarrow x^2 + 2x \geq 2m(x+2) \Leftrightarrow 2m \leq \frac{x^2 + 2x}{x+2} \forall x \in [1; 4]$$

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x+2} \Rightarrow 2m \leq f(x) \forall x \in [1; 4] \Leftrightarrow 2m \leq \min_{[1; 4]} f(x).$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x+2}$ trên $[1; 4]$ ta có:

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x+2) - x^2 - 2x}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 4}{(x+2)^2} = 1 > 0 \forall x \in [1; 4] \Rightarrow \text{Hàm số đồng biến trên } [1; 4]$$

$$\Rightarrow \lim_{[1; 4]} f(x) = f(1) = 1.$$

$$\text{Vậy } 2m \leq 1 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}.$$

Câu 49. Chọn đáp án A

Phương pháp

$\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \exists k \neq 0$ sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

Cách giải

$\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \exists k \neq 0$ sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \cdot 1 \\ m - 1 = 3k \\ 3 = -2nk \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ m - 1 = 6 \\ 3 = -4n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ m = 7 \\ n = \frac{-3}{4} \end{cases}$$

Câu 50. Chọn đáp án A**Phương pháp**

Hàm số $y = a^x$ có TXĐ $D = \mathbb{R}$.

+) Nếu $a > 1 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+) Nếu $0 < a < 1 \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Cách giải

Xét đáp án A ta có:

Hàm số $y = \left(\frac{2}{e}\right)^x$ có TXĐ $D = \mathbb{R}$.

Lại có $\frac{2}{e} < 1 \Rightarrow$ Hàm số $y = \left(\frac{2}{e}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.