

O Bài 01

NGUYÊN HÀM

1. Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng K . Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

Nhận xét. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $F(x) + C$, ($C \in \mathbb{R}$) cũng là nguyên hàm của $f(x)$.

Ký hiệu: $\int f(x) dx = F(x) + C$.

2. Tính chất

- $\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$.
- $\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$ ($a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$).
- $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$.

3. Bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

Bảng nguyên hàm	
$\int k dx = kx + C$, k là hằng số	
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ ($\alpha \neq -1$)	$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$

CÂU HỎI & BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 12

NGUYỄN PHÚ KHÁNH - HUỲNH ĐỨC KHÁNH

Đăng ký mua trọn bộ trắc nghiệm 12 **FILE WORD**

Liên hệ tác giả HUỲNH ĐỨC KHÁNH - 0975 120 189

<https://www.facebook.com/duckhanh0205>

Khi mua có sẵn file word để riêng;

file word đáp án riêng thuận tiện cho việc dạy

Câu 1. Hàm số $f(x)$ có nguyên hàm trên K nếu:

- A. $f(x)$ xác định trên K . B. $f(x)$ có giá trị lớn nhất trên K .
C. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên K . D. $f(x)$ liên tục trên K .

Lời giải. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên K thì nó có nguyên hàm trên K .

Chọn D.

Câu 2. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm bất kỳ của $f(x)$ trên $(a;b)$ thì
$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ với } C \text{ là hằng số.}$$

B. Mọi hàm số liên tục trên khoảng $(a;b)$ đều có nguyên hàm trên khoảng $(a;b)$.
C. $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a;b) \Leftrightarrow f'(x) = F(x), \forall x \in (a;b)$.
D. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

Lời giải. **Chọn C.** Sửa lại cho đúng là:

" $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a;b) \Leftrightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in (a;b)$ ".

Câu 3. Xét hai khẳng định sau:

- 1) Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ đều có đạo hàm trên đoạn đó.
2) Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ đều có nguyên hàm trên đoạn đó.

Trong hai khẳng định trên:

- A. Chỉ có 1) đúng. B. Chỉ có 2) đúng. C. Cả hai đều đúng. D. Cả hai đều sai.

Lời giải. Hàm số có đạo hàm tại x_0 thì liên tục tại x_0 . Ngược lại hàm số liên tục tại x_0 thì chưa chắc đã có đạo hàm tại x_0 . Chẳng hạn xét hàm số $f(x) = |x|$ tại điểm $x = 0$. **Chọn B.**

Câu 4. Trong các khẳng định sau nói về nguyên hàm của một hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng D , khẳng định nào là sai?

- 1) $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên D nếu và chỉ nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in D$.
2) Nếu $f(x)$ liên tục trên D thì $f(x)$ có nguyên hàm trên D .
3) Hai nguyên hàm trên D của cùng một hàm số thì sai khác nhau một hằng số.
A. Khẳng định 1) sai. B. Khẳng định 2) sai.
C. Khẳng định 3) sai. D. Không có khẳng định nào sai.

Lời giải. **Chọn D.**

Câu 5. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(a;b)$. Giả sử $G(x)$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng $(a;b)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $F(x) = G(x)$ trên khoảng $(a;b)$.
- B. $G(x) = F(x) - C$ trên khoảng $(a;b)$, với C là hằng số.
- C. $F(x) = G(x) + C$ với mọi x thuộc giao của hai miền xác định $F(x)$ và $G(x)$, C là hằng số.
- D. Cả ba câu trên đều sai.

Lời giải. Vì hai nguyên hàm trên D của cùng một hàm số thì sai khác nhau một hằng số. Do đó B đúng. **Chọn B.**

Câu 6. Xét hai khẳng định sau:

- 1) $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx = F(x) + G(x) + C$, trong đó $F(x)$ và $G(x)$ tương ứng là nguyên hàm của $f(x)$, $g(x)$.
- 2) Mỗi nguyên hàm $a.f(x)$ ($a \neq 0$) là tích của a với một nguyên hàm của $f(x)$.

Trong hai khẳng định trên:

- A. Chỉ có 1) đúng.
- B. Chỉ có 2) đúng.
- C. Cả hai đều đúng.
- D. Cả hai đều sai.

Lời giải. **Chọn C.**

Câu 7. Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. Nếu $\int f(x) dx = F(x) + C$ thì $\int f(u) du = F(u) + C$.
- B. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ (k là hằng số và $k \neq 0$).
- C. Nếu $F(x)$ và $G(x)$ đều là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x) = G(x)$.
- D. $\int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx$.

Lời giải. Các nguyên hàm sai khác nhau hằng số nên C là đáp án sai. **Chọn C.**

Câu 8. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $\int 0 dx = C$ (C là hằng số).
- B. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ (C là hằng số).
- C. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ (C là hằng số).
- D. $\int dx = x + C$ (C là hằng số).

Lời giải. **Chọn C.** Vì kết quả này không đúng với trường hợp $\alpha = -1$.

Câu 9. Hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ có nguyên hàm trên khoảng nào với các khoảng đã cho sau đây?

- A. $(0; \pi)$.
- B. $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- C. $(\pi; 2\pi)$.
- D. $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Lời giải. Hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ xác định và liên tục trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nên có nguyên hàm trên khoảng này. **Chọn B.**

Câu 10. Kí hiệu $F(y)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(y)$, biết $F(y) = x^2 + xy + C$. Hỏi hàm số $f(y)$ là hàm số nào trong các hàm số sau?

- A. $f(y) = x$.
- B. $f(y) = 3x + y$.
- C. $f(y) = y$.
- D. $f(y) = 2x + y$.

Lời giải. Để tìm $f(y)$ ta đi lấy đạo hàm của $F(y)$ theo biến y (tức là bây giờ x đóng vai trò là tham số).

Ta có $F'(y) = x$. **Chọn A.**

Câu 11. Kí hiệu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $F(\sin^2 x)$ xác định thì $F(\sin^2 x)$ là một nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau?

- A. $f(\sin^2 x)$. B. $f(\cos^2 x)$. C. $2 \sin x f(\sin^2 x)$. D. $\sin 2x f(\sin^2 x)$.

Lời giải. Theo định nghĩa, ta có $\int f(x) dx = F(x) + C \iff F'(x) = f(x)$.

Áp dụng: $[F(\sin^2 x)]' = (\sin^2 x)' F'(\sin^2 x) = \sin 2x \cdot f(\sin^2 x)$. **Chọn D.**

Câu 12. Xác định $\int f(x) dx$ biết $f(x) = 2x + 1$.

- A. $\int (2x + 1) dx = 2$. B. $\int (2x + 1) dx = C$.
C. $\int (2x + 1) dx = x^2 + x$. D. $\int (2x + 1) dx = x^2 + x + C$.

Lời giải. **Chọn D.**

Câu 13. Hàm số nào sau đây không phải là nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x - 3)^4$?

- A. $F(x) = \frac{(x - 3)^5}{5} + x$. B. $F(x) = \frac{(x - 3)^5}{5}$.
C. $F(x) = \frac{(x - 3)^5}{5} + 2017$. D. $F(x) = \frac{(x - 3)^5}{5} - 1$.

Lời giải. Xét đáp án A, ta có $F'(x) = (x - 3)^4 + 1 \neq f(x)$. **Chọn A.**

Cách trắc nghiệm. Ta thấy hàm số $F(x)$ ở các đáp án B, C, D sai khác nhau hằng số nên dùng phương pháp loại suy, ta chọn được được đáp án A.

Câu 14. Kí hiệu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x^2 + 1)^2$ và $F(1) = \frac{28}{15}$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $F(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x$. B. $F(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + C$.
C. $F(x) = 4x(x^2 + 1)$. D. $F(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + 1$.

Lời giải. Ta có $\int (x^2 + 1)^2 dx = \int (x^4 + 2x^2 + 1) dx = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + C$.

Theo giả thiết $F(1) = \frac{28}{15} \implies \frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 + C = \frac{28}{15} \implies C = 0$. **Chọn A.**

Câu 15. Tìm hàm số $F(x)$ biết $F'(x) = 3x^2 + 2x + 1$ và đồ thị hàm số $y = F(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng e .

- A. $F(x) = x^2 + x + e$. B. $F(x) = \cos 2x + e - 1$.
C. $F(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. D. $F(x) = x^3 + x^2 + x + e$.

Lời giải. Ta có $F(x) = \int (3x^2 + 2x + 1) dx = x^3 + x^2 + x + C$.

Đồ thị $y = F(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng e nên ta có $F(0) = e \iff C = e$.

Vậy $F(x) = x^3 + x^2 + x + e$. **Chọn D.**

Câu 16. Kí hiệu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x - 1$. Đồ thị hàm số $y = F(x)$ và đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt nhau tại một điểm thuộc trục tung. Tọa độ các điểm chung của hai đồ thị hàm số trên là:

- A. $(0; -1)$. B. $\left(\frac{5}{2}; 9\right)$. C. $(0; -1)$ và $\left(\frac{5}{2}; 9\right)$. D. $(0; -1)$ và $\left(\frac{5}{2}; 8\right)$.

Lời giải. Ta có $F(x) = \int (4x-1)dx = 2x^2 - x + C$.

Giả sử $M(0;m) \in Oy$ là giao điểm của đồ thị hai hàm số $F(x)$ và $f(x)$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} M \in f(x) \\ M \in F(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \cdot 0 - 1 = m \\ 2 \cdot 0^2 - 0 + C = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ C = -1 \end{cases} \Rightarrow F(x) = 2x^2 - x - 1$.

Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $F(x)$ và $f(x)$ là nghiệm của phương trình:

$$2x^2 - x - 1 = 4x - 1 \Leftrightarrow x(2x - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -1 \\ x = \frac{5}{2} \Rightarrow y = 9 \end{cases}$$

Vậy tọa độ các điểm cần tìm là $(0; -1)$ và $(\frac{5}{2}; 9)$. **Chọn C.**

Câu 17. Biết rằng $F(x) = ax^3 + (a+b)x^2 + (2a-b+c)x + 1$ là một nguyên hàm của $f(x) = 3x^2 + 6x + 2$. Tính tổng $S = a + b + c$.

- A. $S = 5$. B. $S = 4$. C. $S = 3$. D. $S = 2$.

Lời giải. Ta có $\int (3x^2 + 6x + 2)dx = x^3 + 3x^2 + 2x + C$.

Suy ra $F(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

Đồng nhất ta được $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 3 \\ 2a - b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases} \longrightarrow a + b + c = 5$. **Chọn A.**

Câu 18. (ĐỀ THỬ NGHIỆM 2016 - 2017) Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$. Tính $F(3)$.

- A. $F(3) = \ln 2 - 1$. B. $F(3) = \ln 2 + 1$. C. $F(3) = \frac{1}{2}$. D. $F(3) = \frac{7}{4}$.

Lời giải. Ta có $\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + C$.

Theo giả thiết $F(2) = 1 \longrightarrow \ln|2-1| + C = 1 \Leftrightarrow C = 1$.

Suy ra $F(x) = \ln|x-1| + 1 \longrightarrow F(3) = \ln 2 + 1$. **Chọn B.**

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \frac{1}{2x-1}$ và $f(1) = 1$. Tính $f(5)$.

- A. $f(5) = \ln 2$. B. $f(5) = \ln 3$. C. $f(5) = \ln 2 + 1$. D. $f(5) = \ln 3 + 1$.

Lời giải. Ta có $f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2} \ln|2x-1| + C$.

Theo giả thiết $f(1) = 1 \longrightarrow \frac{1}{2} \ln|2 \cdot 1 - 1| + C = 1 \Leftrightarrow C = 1$.

Suy ra $f(x) = \frac{1}{2} \ln|2x-1| + 1 \longrightarrow f(5) = \frac{1}{2} \ln|2 \cdot 5 - 1| + 1 = \frac{1}{2} \ln 9 + 1 = \ln 3 + 1$. **Chọn D.**

Câu 20. Tìm hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời $f'(x) = \frac{2x+3}{x+1}$ và $f(0) = 1$.

- A. $f(x) = x^2 + \ln|x+1|$. B. $f(x) = 2x + \ln|2x+1| - 1$.
C. $f(x) = 2x + \ln|x+1| + 1$. D. $f(x) = x + \ln|x+1| + 1$.

Lời giải. Ta có $\int \frac{2x+3}{x+1} dx = \int \left(2 + \frac{1}{x+1} \right) dx = 2x + \ln|x+1| + C$.

Theo giả thiết $f(0) = 1 \longrightarrow 2 \cdot 0 + \ln|0+1| + C = 1 \Leftrightarrow C = 1$.

Suy ra $f(x) = 2x + \ln|x+1| + 1$. **Chọn C.**

Câu 21. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x+2}$ và thỏa mãn $F(-1) = \frac{1}{2}$. Tính $F(2)$.

A. $F(2) = 2 + \ln 2$.

B. $F(2) = 2(1 - \ln 2)$.

C. $F(2) = 2(1 + \ln 2)$.

D. $F(2) = 4$.

Lời giải. Ta có $\frac{(x+1)^2}{x+2} = \frac{x^2+2x+1}{x+2} = \frac{x(x+2)+1}{x+2} = x + \frac{1}{x+2}$
 $\longrightarrow \int \frac{(x+1)^2}{x+2} dx = \int \left(x + \frac{1}{x+2} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| + C$.

Theo giả thiết $F(-1) = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{(1)^2}{2} + \ln|-1+2| + C = \frac{1}{2} \Leftrightarrow C = 0$.

Suy ra $F(x) = \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| \longrightarrow F(2) = 2 + \ln 4 = 2(1 + \ln 2)$. **Chọn C.**

Câu 22. Hàm số nào sau đây là nguyên một hàm của hàm số $f(x) = \frac{(x-1)^3}{2x^2}$?

A. $F(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} + \frac{3}{2} \ln|x| + \frac{1}{2x}$.

B. $F(x) = \frac{3(x-1)^4}{4x^3}$.

C. $F(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^3}$.

D. $F(x) = \frac{3(x-1)^2}{4x}$.

Lời giải. Ta có $\int \frac{(x-1)^3}{2x^2} dx = \int \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{2x^2} dx$
 $= \int \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2x} - \frac{1}{2x^2} \right) dx = \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} + \frac{3}{2} \ln|x| + \frac{1}{2x} + C$.

Chọn $C = 0 \longrightarrow F(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} + \frac{3}{2} \ln|x| + \frac{1}{2x}$. **Chọn A.**

Câu 23. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x^3 - \frac{1}{x^2} + 3x$ và thỏa mãn $5F(1) + F(2) = 43$. Tính $F(2)$.

A. $F(2) = \frac{151}{4}$.

B. $F(2) = 23$.

C. $F(2) = \frac{45}{2}$.

D. $F(2) = \frac{86}{7}$.

Lời giải. Ta có $F(x) = \int \left(4x^3 - \frac{1}{x^2} + 3x \right) dx = x^4 + \frac{1}{x} + \frac{3}{2}x^2 + C$.

Theo giả thiết $5F(1) + F(2) = 43 \longrightarrow 5\left(\frac{7}{2} + C\right) + \frac{45}{2} + C = 43 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$.

Suy ra $F(x) = x^4 + \frac{1}{x} + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2} \longrightarrow F(2) = 2^4 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot 2^2 + \frac{1}{2} = 23$. **Chọn B.**

Câu 24. Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$.

A. $F(x) = -\ln|x| - \ln|x-1|$.

B. $F(x) = \ln|x| - \ln|x-1|$.

C. $F(x) = -\ln|x| + \ln|x-1|$.

D. $F(x) = \ln|x| + \ln|x-1|$.

Lời giải. Ta có $\frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$

$\longrightarrow \int \left(\frac{1}{x^2 - x} \right) dx = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \right) dx = -\ln|x| + \ln|x-1| + C$. **Chọn C.**

Câu 25. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ và thỏa mãn $F\left(\frac{3}{2}\right) = 0$. Tính $F(3)$.

- A. $F(3) = \ln 2$. B. $F(3) = 2\ln 2$. C. $F(3) = -2\ln 2$. D. $F(3) = -\ln 2$.

Lời giải. Ta có $\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$
 $\longrightarrow \int \left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right) dx = \int \left(-\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \right) dx = -\ln|x-1| + \ln|x-2| + C$.

Theo giả thiết $F\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \longrightarrow -\ln\left|\frac{3}{2} - 1\right| + \ln\left|\frac{3}{2} - 2\right| + C = 0 \Leftrightarrow C = 0$.

Suy ra $F(x) = -\ln|x-1| + \ln|x-2| \longrightarrow F(3) = -\ln 2$. **Chọn D.**

Câu 26. Xác định $\int f(x) dx$ biết $f(x) = \frac{x+3}{x^2 + 3x + 2}$.

- A. $\int f(x) dx = 2\ln|x+2| - \ln|x+1| + C$. B. $\int f(x) dx = 2\ln|x+1| - \ln|x+2| + C$.
 C. $\int f(x) dx = 2\ln|x+1| + \ln|x+2| + C$. D. $\int f(x) dx = \ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C$.

Lời giải. Ta có $\frac{x+3}{x^2 + 3x + 2} = \frac{x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2}$
 $\longrightarrow \int \frac{x+3}{x^2 + 3x + 2} dx = \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = 2\ln|x+1| - \ln|x+2| + C$. **Chọn B.**

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \frac{2}{(2x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}$ và thỏa $f(2) = -\frac{1}{3}$.

Biết phương trình $f(x) = -1$ có nghiệm duy nhất $x = x_0$. Tính $T = 2017^{x_0}$.

- A. $T = 2017$. B. $T = 1$. C. $T = \sqrt{2017}$. D. $T = 2017^3$.

Lời giải. Ta có $\int f'(x) dx = \int \left[\frac{2}{(2x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} \right] dx = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2x-1} + C$.

Theo giả thiết $f(2) = -\frac{1}{3} \longrightarrow \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + C = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow C = -1$.

Suy ra $f(x) = \frac{x}{(x-1)(2x-1)} - 1$.

Suy ra $f(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{x}{(x-1)(2x-1)} - 1 = -1 \Leftrightarrow x = 0 = x_0 \longrightarrow T = 2017^0 = 1$. **Chọn B.**

Câu 28. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x).g(x)$, biết $\int f(x) dx = x + C$,

$\int g(x) dx = \frac{x^2}{4} + C$ và $F(2) = 5$.

- A. $F(x) = \frac{x^2}{4} + 4$. B. $F(x) = \frac{x^2}{4} + 5$. C. $F(x) = \frac{x^3}{4} + 5$. D. $F(x) = \frac{x^3}{4} + 3$.

Lời giải. Ta có $\int f(x) dx = x + C \longrightarrow f(x) = 1$ và $\int g(x) dx = \frac{x^2}{4} + C \longrightarrow g(x) = \frac{1}{2}x$.

Khi đó $\int f(x).g(x) dx = \int \frac{1}{2}x dx = \frac{1}{4}x^2 + C$.

Theo giả thiết $F(2) = 5 \longrightarrow \frac{1}{4}.2^2 + C = 5 \Leftrightarrow C = 4$.

Suy ra $F(x) = \frac{x^2}{4} + 4$. **Chọn A.**

Câu 29. Cho $I = \int 2^{\sqrt{x}} \frac{\ln 2}{\sqrt{x}} dx$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. $I = 2^{\sqrt{x}} + C$. B. $I = 2^{\sqrt{x}+1} + C$. C. $I = 2(2^{\sqrt{x}} + 1) + C$. D. $I = 2(2^{\sqrt{x}} - 1) + C$.

Lời giải. Ta có $(2^{\sqrt{x}} + C)' = (2^{\sqrt{x}})' = (\sqrt{x})' \cdot 2^{\sqrt{x}} \ln 2 = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 2^{\sqrt{x}} \ln 2 \neq 2^{\sqrt{x}} \frac{\ln 2}{\sqrt{x}}$. **Chọn A.**

Cách trắc nghiệm. Ta thấy các đáp án B, C, D sai khác nhau nên hằng số nên dễ dàng nhận ra đáp án A là không thỏa mãn.

Câu 30. Tìm giá trị của các tham số a, b, c để hàm số $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-3}$ với $x > \frac{3}{2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}}$.

- A. $a = 4, b = 2, c = 1$. B. $a = 4, b = -2, c = -1$.
C. $a = 4, b = -2, c = 1$. D. $a = 4, b = 2, c = -1$.

Lời giải. Theo bài ra ta có $F'(x) = f(x)$. (*)

$$\text{Ta có } F'(x) = (2ax + b)\sqrt{2x-3} + \frac{(ax^2 + bx + c)}{\sqrt{2x-3}} = \frac{5ax^2 + (3b-6a)x - 3b + c}{\sqrt{2x-3}}.$$

$$\text{Để (*) xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a = 20 \\ 3b - 6a = -30 \\ c - 3b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 31. Nếu $\int f(x) dx = \frac{1}{x} + \ln x + C$ thì $f(x)$ là hàm số nào trong các hàm số sau?

- A. $f(x) = \sqrt{x} + \ln x + C$. B. $f(x) = -\sqrt{x} + \frac{1}{x} + C$.
C. $f(x) = -\frac{1}{x^2} + \ln x + C$. D. $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$.

Lời giải. Theo định nghĩa $\int f(x) dx = F(x) \longrightarrow F'(x) = f(x)$.

$$\text{Do đó hàm số cần tìm } f(x) = \left(\frac{1}{x} + \ln x + C \right)' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 32. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x}$ và thỏa mãn $F(0) = 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + 1$. B. $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$.
C. $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{2}{3}$. D. $F(x) = -\frac{1}{3}e^{3x} + \frac{4}{3}$.

Lời giải. Ta có $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$.

$$\text{Theo giả thiết } F(0) = 1 \longrightarrow \frac{1}{3} + C = 1 \Leftrightarrow C = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Suy ra } F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{2}{3}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 33. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x+1}$ và thỏa $F(0) = \frac{e}{3}$.

Tính $\ln^3 [3F(1)]$.

- A. $\ln^3 [3F(1)] = 64$. B. $\ln^3 [3F(1)] = -8$.
C. $\ln^3 [3F(1)] = 81$. D. $\ln^3 [3F(1)] = 27$.

Lời giải. Ta có $\int e^{3x+1} dx = \frac{1}{3}e^{3x+1} + C$.

Theo giả thiết $F(0) = \frac{e}{3} \longrightarrow \frac{e}{3} + C = \frac{e}{3} \Leftrightarrow C = 0$.

Suy ra $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x+1} \longrightarrow \ln^3[3F(1)] = \ln^3\left[3 \cdot \frac{1}{3}e^4\right] = 64$. **Chọn A.**

Câu 34. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \cdot e^{x+1}$.

A. $\int e^x \cdot e^{x+1} dx = e^x \cdot e^{x+1} + C$.

B. $\int e^x \cdot e^{x+1} dx = \frac{1}{2}e^{2x+1} + C$.

C. $\int e^x \cdot e^{x+1} dx = 2e^{2x+1} + C$.

D. $\int e^x \cdot e^{x+1} dx = e^{x+1} + e^x + C$.

Lời giải. Ta có $\int e^x \cdot e^{x+1} dx = \int e^{2x+1} dx = \frac{1}{2}e^{2x+1} + C$. **Chọn B.**

Câu 35. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm $f(x) = 2^{2x}$.

A. $F(x) = \frac{1}{4^x \cdot \ln 4} + C$.

B. $F(x) = \frac{4^x}{\ln 4} + C$.

C. $F(x) = 4^x \cdot \ln 4 + C$.

D. $F(x) = 4^x + C$.

Lời giải. Ta có $\int 2^{2x} dx = \int 4^x dx = \frac{4^x}{\ln 4} + C$. **Chọn B.**

Câu 36. Hàm số $F(x) = e^{x^3} + 2018$ là một nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau đây?

A. $f(x) = e^{x^3}$. B. $f(x) = 3x^2 \cdot e^{x^3}$. C. $f(x) = \frac{e^{x^3}}{3x^2}$. D. $f(x) = x^3 \cdot e^{x^3-1}$.

Lời giải. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) \longleftrightarrow F'(x) = f(x)$.

Suy ra hàm số cần tìm $f(x) = (e^{x^3} + 2018)' = (e^{x^3})' = (x^3)' \cdot e^{x^3} = 3x^2 \cdot e^{x^3}$. **Chọn B.**

Câu 37. Hàm số $F(x) = \frac{x^3}{3} + e^x$ là một nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau đây?

A. $f(x) = \frac{x^4}{3} + e^x$. B. $f(x) = 3x^2 + e^x$. C. $f(x) = \frac{x^4}{12} + e^x$. D. $f(x) = x^2 + e^x$.

Lời giải. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) \longleftrightarrow F'(x) = f(x)$.

Suy ra hàm số cần tìm $f(x) = \left(\frac{x^3}{3} + e^x\right)' = x^2 + e^x$. **Chọn D.**

Câu 38. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2 + e^{3x})^2$ thỏa $F(0) = \frac{3}{2}$.

Tính $F\left(\frac{1}{3}\right)$.

A. $F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{e^2 + 8e + 8}{6}$.

B. $F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{e^2 + 6e + 6}{8}$.

C. $F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{e^2 - 6e + 6}{8}$.

D. $F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{e^2 - 8e + 8}{6}$.

Lời giải. Ta có $\int (2 + e^{3x})^2 dx = \int (4 + 4e^{3x} + e^{6x}) dx = \frac{1}{6}e^{6x} + \frac{4}{3}e^{3x} + 4x + C$.

Theo giả thiết $F(0) = \frac{3}{2} \longrightarrow \frac{1}{6} + \frac{4}{3} + C = \frac{3}{2} \Leftrightarrow C = 0$.

Suy ra $F(x) = \frac{1}{6}e^{6x} + \frac{4}{3}e^{3x} + 4x \longrightarrow F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}e^2 + \frac{4}{3}e + \frac{4}{3} = \frac{e^2 + 8e + 8}{6}$. **Chọn A.**

Câu 39. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = e^{-x}(2e^x + 1)$, biết $F(0) = 1$.

A. $F(x) = 2x + e^{-x}$.

B. $F(x) = 2x - e^{-x} + 2$.

C. $F(x) = 2 + e^{-x}$.

D. $F(x) = 2x - e^{-x} + 1$.

Lời giải. Ta có $\int e^{-x}(2e^x + 1)dx = \int (2 + e^{-x})dx = 2x - e^{-x} + C$.

Theo giả thiết $F(0) = 1 \longrightarrow -1 + C = 1 \Leftrightarrow C = 2$.

Suy ra $F(x) = 2x - e^{-x} + 2$. **Chọn B.**

Câu 40. Giả sử $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2e^x$.

Tính tích $P = abc$.

A. $P = 1$.

B. $P = -4$.

C. $P = -5$.

D. $P = -3$.

Lời giải.

Ta có $F'(x) = (ax^2 + bx + c)' \cdot e^x + (ax^2 + bx + c) \cdot (e^x)' = [ax^2 + (2a + b)x + b + c]e^x$.

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ nên ta có $F'(x) = f(x), \forall x$.

Do đó $[ax^2 + (2a + b)x + b + c]e^x = x^2 \cdot e^x \Leftrightarrow ax^2 + (2a + b)x + b + c = x^2$.

Đồng nhất hệ số hai vế, ta được
$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases} \longrightarrow P = abc = -4$$
. **Chọn B.**

Câu 41. Giả sử hàm số $f(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x) = x(1 - x)e^{-x}$. Tính tổng $S = a + b + c$.

A. $S = -2$.

B. $S = 4$.

C. $S = 1$.

D. $S = 3$.

Lời giải. Ta có $f'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = [-ax^2 + (2a - b)x + (b - c)]e^{-x}$.

Vì $f(x)$ là một nguyên hàm của $g(x)$ nên ta có $f'(x) = g(x), \forall x$.

Do đó $[-ax^2 + (2a - b)x + (b - c)]e^{-x} = x(1 - x)e^{-x} \Leftrightarrow -ax^2 + (2a - b)x + (b - c) = -x^2 + x$.

Đồng nhất hệ số hai vế, ta được
$$\begin{cases} -a = -1 \\ 2a - b = 1 \\ b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1 \rightarrow S = a + b + c = 3$$
. **Chọn D.**

Câu 42. (ĐỀ THỬ NGHIỆM 2016 – 2017)

Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$.

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

B. $\int f(x)dx = -\frac{1}{2}\sin 2x + C$.

C. $\int f(x)dx = 2\sin 2x + C$.

D. $\int f(x)dx = -2\sin 2x + C$.

Lời giải. Ta có $\int f(x)dx = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$. **Chọn A.**

Câu 43. Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin(1 - 2x)$ và thỏa mãn $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $F(x) = \cos(1 - 2x) + 1$.

B. $F(x) = \cos(1 - 2x)$.

C. $F(x) = -\frac{1}{2}\cos(1 - 2x) + \frac{3}{2}$.

D. $F(x) = \frac{1}{2}\cos(1 - 2x) + \frac{1}{2}$.

Lời giải. Ta có $\int \sin(1 - 2x)dx = -\frac{1}{2}\cos(1 - 2x) + C$.

Theo giả thiết $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \longrightarrow \left(\frac{1}{2} \cos 0\right) + C = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$.

Suy ra $F(x) = \frac{1}{2} \cos(1 - 2x) + \frac{1}{2}$. **Chọn D.**

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ thỏa các điều kiện $f'(x) = 2 + \cos 2x$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. $f(0) = \pi$.
B. $f(x) = 2x + \frac{\sin 2x}{2} + \pi$.
C. $f(x) = 2x - \frac{\sin 2x}{2} + \pi$.
D. $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Lời giải. Ta có $\int f'(x) dx = \int (2 + \cos 2x) dx = 2x + \frac{1}{2} \sin 2x + C$.

Theo giả thiết $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi \longrightarrow \pi + C = 2\pi \Leftrightarrow C = \pi$.

Suy ra $f(x) = 2x + \frac{1}{2} \sin 2x + \pi$. **Chọn B.**

Câu 45. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin^2 x$ là kết quả nào sau đây, biết nguyên hàm này bằng $\frac{\pi}{8}$ khi $x = \frac{\pi}{4}$?

- A. $F(x) = \frac{\sin^3 x}{3}$.
B. $F(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$.
C. $F(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{4}$.
D. $F(x) = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải. Ta có $\int f(x) dx = \int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx$
 $= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C$.

Theo giả thiết $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8} \longrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{2} + C = \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow C = \frac{1}{4}$.

Suy ra $F(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{4}$. **Chọn C.**

Câu 46. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^2 x$.

- A. $\int \tan^2 x dx = \tan x - x + C$.
B. $\int \tan^2 x dx = \tan x - x$.
C. $\int \tan^2 x dx = \frac{\tan^3 x}{x}$.
D. $\int \tan^2 x dx = \frac{\tan^3 x}{x} + C$.

Lời giải. Dùng kỹ thuật thêm bớt, ta được $\int \tan^2 x dx = \int [(1 + \tan^2 x) - 1] dx$
 $= \int (1 + \tan^2 x) dx - \int dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = \tan x - x + C$.

"Nếu đề bài yêu cầu tìm họ nguyên hàm thì ta chọn A, còn yêu cầu tìm một nguyên hàm thì ta chọn B".

Ở đây yêu cầu tìm nguyên hàm, tức là phải tìm họ nguyên hàm. **Chọn A.**

Câu 47. Cho nguyên hàm $\int f(x) dx = \sin 2x \cos x + C$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $f(x) = \frac{1}{2}(3 \cos 3x + \cos x)$.
B. $f(x) = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x)$.
C. $f(x) = \frac{1}{2}(3 \cos 3x - \cos x)$.
D. $f(x) = \frac{1}{2}(\cos 3x - \cos x)$.

Lời giải. Ta có $\int f(x) dx = \sin 2x \cos x = \frac{1}{2}(\sin 3x + \sin x)$.

Suy ra $f(x) = \frac{1}{2}(\sin 3x + \sin x)' = \frac{1}{2}(3\cos 3x + \cos x)$. **Chọn A.**

Câu 48. Tìm giá trị thực của các tham số a, b để hàm số $F(x) = (a \cos x + b \sin x)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \cos x$.

- A. $a = 1, b = 0$. B. $a = 0, b = 1$. C. $a = b = 1$. D. $a = b = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $F'(x) = (-a \sin x + b \cos x)e^x + (a \cos x + b \sin x)e^x = [(b+a)\cos x + (b-a)\sin x]e^x$.

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ nên ta có $F'(x) = f(x), \forall x$.

Do đó $[(b+a)\cos x + (b-a)\sin x]e^x = e^x \cos x \Leftrightarrow (b+a)\cos x + (b-a)\sin x = \cos x$.

Đồng nhất hệ số hai vế, ta được $\begin{cases} b+a=1 \\ b-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$. **Chọn D.**

Câu 49. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{4m}{\pi} + \sin^2 x$ và thỏa mãn

$F(0) = 1, F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}$. Tìm m .

- A. $m = -\frac{4}{3}$. B. $m = \frac{3}{4}$. C. $m = -\frac{3}{4}$. D. $m = \frac{4}{3}$.

Lời giải. Ta có $\int f(x) dx = \int \left(\frac{4m}{\pi} + \sin^2 x \right) dx = \int \frac{4m}{\pi} dx + \int \sin^2 x dx$

$$= \int \frac{4m}{\pi} dx + \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) dx = \frac{4m}{\pi} x + \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C.$$

Theo giả thiết $\begin{cases} F(0) = 1 \\ F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} C = 1 \\ m + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) + C = \frac{\pi}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 1 \\ m = -\frac{3}{4} \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 50. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ và đồ thị hàm số

$y = F(x)$ đi qua điểm $M\left(\frac{\pi}{6}; 0\right)$. Tính $F\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

- A. $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$. B. $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. C. $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$. D. $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

Lời giải. Ta có $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$.

Đồ thị $y = F(x)$ đi qua điểm $M\left(\frac{\pi}{6}; 0\right)$ nên $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \longrightarrow -\cot \frac{\pi}{6} + C = 0 \Leftrightarrow C = \sqrt{3}$.

Suy ra $F(x) = -\cot x + \sqrt{3} \longrightarrow F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. **Chọn B.**

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM

1. Phương pháp đổi biến số

Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f[u(x)] \cdot u'(x)dx = F[u(x)] + C$.

Giả sử ta cần tìm họ nguyên hàm $I = \int f(x)dx$, trong đó ta có thể phân tích $f(x) = g[u(x)]u'(x)$ thì ta thực hiện phép đổi biến số $t = u(x)$, suy ra $dt = u'(x)dx$.

Khi đó ta được nguyên hàm: $\int g(t)dt = G(t) + C = G[u(x)] + C$.

Chú ý: Sau khi tìm được họ nguyên hàm theo t thì ta phải thay $t = u(x)$.

2. Phương pháp lấy nguyên hàm từng phần

Cho hai hàm số u và v liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó: $\int u dv = uv - \int v du$. (*)

Để tính nguyên hàm $\int f(x)dx$ bằng từng phần ta làm như sau:

Bước 1. Chọn u, v sao cho $f(x)dx = u dv$ (chú ý $dv = v'(x)dx$).

Sau đó tính $v = \int dv$ và $du = u' \cdot dx$.

Bước 2. Thay vào công thức (*) và tính $\int v du$.

Chú ý. Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int v du$ để tính hơn $\int u dv$. Ta thường gặp các dạng sau

• **Dạng 1.** $I = \int P(x) \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right] dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right] dx \end{cases}$.

• **Dạng 2.** $I = \int P(x)e^{ax+b} dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b} dx \end{cases}$.

• **Dạng 3.** $I = \int P(x) \ln(mx+n) dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \ln(mx+n) \\ dv = P(x) dx \end{cases}$.

• **Dạng 4.** $I = \int \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right] e^x dx$.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right] \\ dv = e^x dx \end{cases}$ hoặc có thể đặt ngược lại $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right] dx \end{cases}$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM



Vấn đề 1. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ



Câu 1. Biết $\int f(u)du = F(u) + C$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $\int f(2x-1)dx = 2F(2x-1) + C$. B. $\int f(2x-1)dx = 2F(x) - 1 + C$.
C. $\int f(2x-1)dx = F(2x-1) + C$. D. $\int f(2x-1)dx = \frac{1}{2}F(2x-1) + C$.

Lời giải. Đặt $u = 2x - 1 \longrightarrow du = 2dx$

Khi đó $\int f(2x-1)dx = \int f(u)\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int f(u)du = \frac{1}{2}F(u) + C = \frac{1}{2}F(2x-1) + C$.

Chọn D.

Câu 2. Tìm hàm số $F(x)$ thỏa mãn $F'(x) = (2x+1)^{2017}$ và $F\left(-\frac{1}{2}\right) = 2018$.

- A. $F(x) = \frac{(2x+1)^{2018}}{2018} + 2018$. B. $F(x) = \frac{(2x+1)^{2018}}{4036} + 2018$.
C. $F(x) = 2017(2x+1)^{2016} + 2018$. D. $F(x) = 4034(2x+1)^{2016} + 2018$.

Lời giải. Ta có $\int (2x+1)^{2017} dx$. Đặt $u = 2x + 1 \longrightarrow du = 2dx$

Khi đó $\int (2x+1)^{2017} dx = \frac{1}{2}\int u^{2017} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{2018}}{2018} + C = \frac{(2x+1)^{2018}}{4036} + C$.

Theo giả thiết $F\left(-\frac{1}{2}\right) = 2018 \longrightarrow C = 2018$.

Vậy $F(x) = \frac{(2x+1)^{2018}}{4036} + 2018$. **Chọn B.**

Câu 3. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(x^2+1)^9$.

- A. $\int f(x)dx = -\frac{1}{20}(x^2+1)^{10} + C$. B. $\int f(x)dx = \frac{1}{20}(x^2+1)^{10} + C$.
C. $\int f(x)dx = 2(x^2+1)^{10} + C$. D. $\int f(x)dx = (x^2+1)^{10} + C$.

Lời giải. Ta có $\int f(x)dx = \int x(x^2+1)^9 dx$. Đặt $t = x^2 + 1 \longrightarrow dt = 2xdx$.

Khi đó $\int x(x^2+1)^9 dx = \frac{1}{2}\int t^9 dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{10}}{10} + C = \frac{1}{20}(x^2+1)^{10} + C$.

Vậy $\int f(x)dx = \frac{1}{20}(x^2+1)^{10} + C$. **Chọn B.**

Câu 4. (ĐỀ MINH HỌA NĂM 2016 - 2017)

Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

- A. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$. B. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$.
C. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x-1} + C$. D. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C$.

Lời giải. Ta có $\int f(x)dx = \int \sqrt{2x-1}dx$. Đặt $t = \sqrt{2x-1} \rightarrow t^2 = 2x-1 \longrightarrow tdt = dx$.

Khi đó $\int \sqrt{2x-1}dx = \int t.tdt = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$. **Chọn B.**

Câu 5. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x} \cdot \sqrt{\ln^2 x + 1}$ và $F(1) = \frac{1}{3}$.

Tính $[F(e)]^2$.

- A. $[F(e)]^2 = \frac{8}{3}$. B. $[F(e)]^2 = \frac{8}{9}$. C. $[F(e)]^2 = \frac{1}{3}$. D. $[F(e)]^2 = \frac{1}{9}$.

Lời giải. Ta có $\int \frac{\ln x}{x} \cdot \sqrt{\ln^2 x + 1} dx$.

Đặt $t = \sqrt{\ln^2 x + 1} \Rightarrow t^2 = (\ln^2 x + 1) \longrightarrow t dt = \frac{\ln x}{x} dx$.

Khi đó $\int \frac{\ln x}{x} \cdot \sqrt{\ln^2 x + 1} dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(\sqrt{\ln^2 x + 1})^3}{3} + C$.

Theo giả thiết $F(1) = \frac{1}{3} \longrightarrow \frac{1}{3} + C = \frac{1}{3} \Leftrightarrow C = 0$.

Suy ra $F(x) = \frac{(\sqrt{\ln^2 x + 1})^3}{3} \longrightarrow [F(e)]^2 = \frac{8}{9}$. **Chọn B.**

Câu 6. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$ và $F(e^2) = 4$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C$. B. $F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + 2$.
C. $F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} - 2$. D. $F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + x + C$.

Lời giải. Ta có $\int f(x) dx = \int \frac{\ln^2 x}{x} dx$. Đặt $t = \ln x \longrightarrow dt = \frac{dx}{x}$.

Khi đó $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C$.

Theo giả thiết $F(e^2) = 4 \longrightarrow \frac{\ln^3(e^2)}{3} + C = 4 \Leftrightarrow C = 2$.

Suy ra $F(x) = \frac{\ln^3 x}{3} + 2$. **Chọn B.**

Chú ý: Đáp án A được gọi là họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Câu 7. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ và thỏa $F(0) = -\ln 2$.

Tìm tập nghiệm S của phương trình $F(x) + \ln(e^x + 1) = 3$.

- A. $S = \{\pm 3\}$. B. $S = \{3\}$. C. $S = \emptyset$. D. $S = \{-3\}$.

Lời giải. Ta có $\int \frac{1}{e^x + 1} dx = \int \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} dx = \int dx - \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = x - \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$.

Đặt $t = e^x + 1 \longrightarrow dt = e^x dx$. Khi đó

$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|e^x + 1| + C = \ln(e^x + 1) + C$.

Do đó $\int \frac{1}{e^x + 1} dx = x - \ln(e^x + 1) + C$.

Theo giả thiết $F(0) = -\ln 2 \longrightarrow 0 - \ln 2 + C = -\ln 2 \Leftrightarrow C = 0$.

Suy ra $F(x) = x - \ln(e^x + 1)$.

Xét phương trình $F(x) + \ln(e^x + 1) = 3 \Leftrightarrow x - \ln(e^x + 1) + \ln(e^x + 1) = 3 \Leftrightarrow x = 3$. **Chọn B.**

Câu 8. Hàm $F(x)$ nào dưới đây không phải là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{x^2}$?

A. $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + 2.$

B. $F(x) = \frac{1}{2}(e^{x^2} + 5).$

C. $F(x) = -\frac{1}{2}e^{x^2} + C.$

D. $F(x) = -\frac{1}{2}(2 - e^{x^2}).$

Lời giải. Ta có $\int f(x)dx = \int xe^{x^2}dx$. Đặt $t = x^2 \longrightarrow dt = 2xdx \rightarrow xdx = \frac{1}{2}dt$.

Khi đó $\int f(x)dx = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ nên đáp án A đúng với $C = 2$, đáp án B đúng với $C = \frac{5}{2}$, đáp án D đúng với $C = -1$. Vậy chỉ có đáp án C là sai. **Chọn C.**

Cách trắc nghiệm. Ta thấy các đáp án A, B, D sai khác nhau hằng số nên chắc chắn rằng nó là một nguyên hàm của $f(x)$.

Câu 9. Cho $I = \int \frac{e^{\ln x}}{x} dx$ và $t = \ln x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $I = \int te^t dt.$

B. $I = \int e^t dt.$

C. $I = \int \frac{e^t}{t} dt.$

D. $I = \int t dt.$

Lời giải. Đặt $t = \ln x \longrightarrow dt = \frac{1}{x} dx$. Khi đó $I = \int e^t dt$. **Chọn B.**

Câu 10. Ký hiệu $F(x)$ là họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^4 x \cos x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $F(x) = \frac{\cos^5 x}{5} + C.$

B. $F(x) = \frac{\cos^4 x}{4} + C.$

C. $F(x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$

D. $F(x) = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$

Lời giải. Ta có $\int f(x)dx = \int \sin^4 x \cos x dx$. Đặt $t = \sin x \longrightarrow dt = \cos x dx$.

Khi đó $\int f(x)dx = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^5 x}{5} + C$. **Chọn D.**

Câu 11. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x}$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Tính $F(0)$.

A. $F(0) = -\frac{1}{3} \ln 2 + 2.$

B. $F(0) = -\frac{2}{3} \ln 2 + 2.$

C. $F(0) = -\frac{2}{3} \ln 2 - 2.$

D. $F(0) = -\frac{1}{3} \ln 2 - 2.$

Lời giải. Ta có $\int \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x} dx$.

Đặt $t = 1 + 3 \cos x \longrightarrow dt = -3 \sin x dx \rightarrow \sin x dx = -\frac{1}{3} dt$.

Khi đó $\int \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{3} \ln |t| + C = -\frac{1}{3} \ln |1 + 3 \cos x| + C$.

Theo giả thiết $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \longrightarrow C = 2$.

Suy ra $F(x) = -\frac{1}{3} \ln |1 + 3 \cos x| + 2 \longrightarrow F(0) = 2 - \frac{1}{3} \ln 2^2 = 2 - \frac{2}{3} \ln 2$. **Chọn B.**

Câu 12. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cot x$ trên $\left(0; \frac{2\pi}{3}\right)$ thỏa $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\ln\sqrt{2}$.

B. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln 2$.

C. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\ln 2$.

D. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\ln 2$.

Lời giải. Ta có $\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx$. Đặt $t = \sin x \longrightarrow dt = \cos x \, dx$.

Khi đó $\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sin x| + C$.

Theo giả thiết $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \longrightarrow \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + C = 0 \Leftrightarrow C = \ln(\sqrt{2})$.

Suy ra $F(x) = \ln(|\sin x|) + \ln(\sqrt{2}) \longrightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ln 2$. **Chọn B.**

Câu 13. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan 2x$ thỏa mãn $F(0) = 0$.

Tính $T = \sqrt{2}e^{F\left(\frac{\pi}{6}\right)} - e^{F\left(\frac{\pi}{2}\right)}$.

A. $T = 1$.

B. $T = \sqrt{2}$.

C. $T = -\sqrt{2}$.

D. $T = 0$.

Lời giải. Ta có $\int \tan 2x \, dx = \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \, dx$.

Đặt $t = \cos 2x \longrightarrow dt = -2 \sin 2x \, dx \rightarrow \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} dt$.

Khi đó $\int \tan 2x \, dx = \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \, dx = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2} \cdot \ln|t| + C = -\frac{1}{2} \ln|\cos 2x| + C$.

Theo giả thiết $F(0) = 0 \longrightarrow C = 0$.

Suy ra $F(x) = -\frac{1}{2} \ln|\cos 2x| \longrightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ và $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(\sqrt{2})$.

Vậy $T = \sqrt{2} \cdot e^{\ln\sqrt{2}} - e^0 = 2 - 1 = 1$. **Chọn A.**

Câu 14. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{\sin x} \cos x$ và $F(\pi) = 5$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $F(x) = e^{\sin x} + 4$.

B. $F(x) = e^{\sin x} + C$.

C. $F(x) = e^{\cos x} + 4$.

D. $F(x) = e^{\cos x} + C$.

Lời giải. Ta có $\int f(x) \, dx = \int e^{\sin x} \cos x \, dx$. Đặt $t = \sin x \longrightarrow dt = \cos x \, dx$.

Khi đó $\int f(x) \, dx = \int e^{\sin x} \cos x \, dx = \int e^t \, dt = e^t + C = e^{\sin x} + C$.

Theo giả thiết $F(\pi) = 5 \longrightarrow e^{\sin \pi} + C = 5 \Leftrightarrow 1 + C = 5 \Leftrightarrow C = 4$.

Suy ra $F(x) = e^{\sin x} + 4$. **Chọn A.**

Câu 15. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$ và $F(0) = 2017$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $F(x) = e^{\tan x}$.

B. $F(x) = e^{-\tan x}$.

C. $F(x) = e^{\tan x} + 2016$.

D. $F(x) = e^{\tan x} + 2018$.

Lời giải. Ta có $\int f(x) \, dx = \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} \, dx$. Đặt $t = \tan x \longrightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$.

Khi đó $\int f(x)dx = \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{\tan x} + C$.

Theo giả thiết $F(0) = 2017 \longrightarrow e^{\tan 0} + C = 2017 \Leftrightarrow C = 2016$.

Suy ra $F(x) = e^{\tan x} + 2016$. **Chọn C.**



Vấn đề 2. PHƯƠNG PHÁP LẤY NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN



Câu 16. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \ln x$ và thỏa mãn $F(1) = 3$. Tính $F(e^2)$.

- A. $F(e^2) = 4$. B. $F(e^2) = 3e^2 + 4$. C. $F(e^2) = -e^2 + 4$. D. $F(e^2) = e^2 + 4$.

Lời giải. Ta có $\int \ln x dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}$.

Khi đó $\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$.

Theo giả thiết $F(1) = 3 \longrightarrow -1 + C = 3 \Leftrightarrow C = 4$.

Suy ra $F(x) = x \ln x - x + 4 \longrightarrow F(e^2) = e^2 + 4$. **Chọn D.**

Câu 17. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$.

- A. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{5x^5} + C$. B. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{5x^5} + C$.
C. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$. D. $\int f'(x) \ln x dx = -\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$.

Lời giải. Ta có $F'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2}{x^6} = \frac{1}{x^4} = \frac{f(x)}{x} \longrightarrow f(x) = \frac{1}{x^3}$.

Xét $\int f'(x) \ln x dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = f(x) \end{cases}$.

Khi đó $\int f'(x) \ln x dx = \ln x \cdot f(x) - \int \frac{f(x)}{x} dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$. **Chọn C.**

Câu 18. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln(\ln x)}{x}$.

- A. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \ln x \cdot \ln(\ln x) + C$. B. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \ln x \cdot \ln(\ln x) + \ln x + C$.
C. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \ln x \cdot \ln(\ln x) - \ln x + C$. D. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \ln(\ln x) + \ln x + C$.

Lời giải. Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$. Suy ra $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \int \ln t dt$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln t \\ dv = dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dt}{t} \\ v = t \end{cases}$.

Khi đó $\int \ln t dt = t \ln t - \int dt = t \ln t - t + C = \ln x \cdot \ln(\ln x) - \ln x + C$. **Chọn C.**

Câu 19. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^x$.

A. $\int xe^x dx = e^x + xe^x + C$.

B. $\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x + C$.

C. $\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$.

D. $\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x + e^x + C$.

Lời giải. Ta có $\int xe^x dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$.

Khi đó $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$. **Chọn C.**

Câu 20. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x-1)e^x$ và thỏa mãn $F(0) = 1$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = (x-1)e^x$.

B. $F(x) = (x-2)e^x$.

C. $F(x) = (x+1)e^x + 1$.

D. $F(x) = (x-2)e^x + 3$.

Lời giải. Ta có $\int (x-1)e^x dx$. Đặt $\begin{cases} u = x-1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$.

Khi đó $\int (x-1)e^x dx = (x-1)e^x - \int e^x dx = (x-1)e^x - e^x + C = (x-2)e^x + C$.

Theo giả thiết $F(0) = 1 \longrightarrow (0-2)e^0 + C = 1 \Leftrightarrow C = 3$.

Vậy $F(x) = (x-2)e^x + 3$. **Chọn D.**

Câu 21. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x.e^{-x}$ thỏa mãn điều kiện $F(0) = -1$. Tính tổng S các nghiệm của phương trình $F(x) + x + 1 = 0$.

A. $S = -3$.

B. $S = 0$.

C. $S = 2$.

D. $S = -1$.

Lời giải. Ta có $\int x.e^{-x} dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$.

Khi đó $\int xe^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$.

Theo giả thiết $F(0) = -1 \longrightarrow -1 + C = -1 \Leftrightarrow C = 0$.

Suy ra $F(x) = -xe^{-x} - e^{-x} = -e^x(x+1)$.

Xét phương trình $F(x) + x + 1 = 0 \Leftrightarrow -e^x(x+1) + x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(-e^x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases} \longrightarrow S = -1 + 0 = -1$. **Chọn D.**

Câu 22. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \sin x$ và thỏa mãn $F(\pi) = 2\pi$. Tính giá trị của biểu thức $T = 2F(0) - 8F(2\pi)$.

A. $T = 6\pi$.

B. $T = 4\pi$.

C. $T = 8\pi$.

D. $T = 10\pi$.

Lời giải. Ta có $\int x \sin x dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$.

Khi đó $\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$.

Theo giả thiết $F(\pi) = 2\pi \longrightarrow \pi + C = 2\pi \Leftrightarrow C = \pi$.

Suy ra $F(x) = -x \cos x + \sin x + \pi \longrightarrow \begin{cases} F(0) = \pi \\ F(2\pi) = -\pi \end{cases} \longrightarrow T = 2\pi - 8 \cdot (-\pi) = 10\pi$.

Chọn D.

Câu 23. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \cos^2 \frac{x}{2}$ và thỏa $F(0) = \frac{1}{2}$.
 Tính $F(\pi)$.

A. $F(\pi) = \frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2}$. B. $F(\pi) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{2}$. C. $F(\pi) = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}$. D. $F(\pi) = \frac{\pi^2}{4} + 1$.

Lời giải. Ta có $\int x \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int x \left(\frac{1 + \cos x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int x dx + \frac{1}{2} \int x \cos x dx$.

• $\frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 = \frac{x^2}{4} + C_1$. (1)

• $\frac{1}{2} \int x \cos x dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$.

Suy ra $\frac{1}{2} \int x \cos x dx = \frac{1}{2} \left(x \sin x - \int \sin x dx \right) = \frac{1}{2} (x \sin x + \cos x + C_2)$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\int x \cos^2 \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4} + C_1 + \frac{1}{2} (x \sin x + \cos x + C_2)$.

Theo giả thiết $F(0) = \frac{1}{2} \longrightarrow C_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} C_2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow C_1 + \frac{1}{2} C_2 = 0$.

Suy ra $F(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} (x \sin x + \cos x) \longrightarrow F(\pi) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{2}$. **Chọn B.**

Câu 24. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 \cos x$.

A. $\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2x \cos x + 2 \sin x + 2C$.

B. $\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$.

C. $\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x - 2C$.

D. $\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + x \cos x - \sin x - C$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \sin x \end{cases}$.

Khi đó $\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx$. (1)

Tính $\int x \sin x dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$.

Ta được $\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \sin x + C)$

$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x - 2C$. **Chọn C.**

Câu 25. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \sin x$.

A. $\int e^x \sin x dx = e^x \sin x + C$.

B. $\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} (e^x \sin x + e^x \cos x) + C$.

C. $\int e^x \sin x dx = e^x \cos x + C$.

D. $\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} (e^x \sin x - e^x \cos x) + C$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = \sin x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos x dx \\ v = e^x \end{cases}$.

Khi đó $\int \sin x e^x dx = e^x \sin x - \int \cos x e^x dx = e^x \sin x - K$. (1)

Tính $K = \int \cos x e^x dx$. Đặt $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin x dx \\ v = e^x \end{cases}$.

Suy ra $K = e^x \cos x + \int \sin x e^x dx$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\int \sin x e^x dx = e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int \sin x e^x dx \right)$

$$\Leftrightarrow 2 \int \sin x e^x dx = e^x \sin x - e^x \cos x \Leftrightarrow \int \sin x e^x dx = \frac{1}{2} (e^x \sin x - e^x \cos x).$$

Vì các nguyên hàm sai khác nhau hằng số C nên ta **Chọn D**.

TÍCH PHÂN

1. Định nghĩa

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên K và a, b là hai số bất kì thuộc K . Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì hiệu số

$$F(b) - F(a)$$

được gọi là tích phân của $f(x)$ từ a đến b và kí hiệu là

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

2. Tính chất

▪ Tích phân tại một giá trị xác định của biến số thì bằng 0, tức là $\int_a^a f(x) dx = 0$.

▪ Đổi cận thì đổi dấu, tức là $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.

▪ Hằng số trong tích phân có thể đưa ra ngoài dấu tích phân, tức là

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k \text{ là hằng số}).$$

▪ Tích phân một tổng bằng tổng các tích phân, tức là

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

▪ Tách đôi tích phân, tức là $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Chú ý: Tích phân $\int_a^b f(x) dx$ chỉ phụ thuộc vào hàm f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào biến số x , tức là $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Vấn đề 1. TÍNH CHẤT TÍCH PHÂN

Câu 1. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và các số thực $a < b < c$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$. B. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx$.
- C. $\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx + \int_a^c f(x) dx$. D. $\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$.

Lời giải. Chọn C.

Câu 2. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và các số thực a, b, c . Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy.$
- B. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
- C. $\int_a^a f(x)dx = 0.$
- D. $\int_a^b [f(x).g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx. \int_a^b g(x)dx.$

Lời giải. Chọn D.

Câu 3. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\int_{-1}^1 dx = 1.$
- B. $\int_a^b f_1(x).f_2(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx. \int_a^b f_2(x)dx .$
- C. Nếu $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0.$
- D. $\int_a^b kdx = k(a-b), \forall k \in \mathbb{R} .$

Lời giải. Ta có $\int_{-1}^1 dx = x \Big|_{-1}^1 = 2.$ Do đó A sai.

Theo tính chất tích phân thì B sai (vì không có tính chất này).

Xét đáp án C. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Suy ra $F'(x) = f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b].$

- $F'(x) = 0, \forall x \in [a; b],$ suy ra $F(x)$ là hàm hằng nên $\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = 0.$
- $F'(x) > 0, \forall x \in [a; b],$ suy ra $F(x)$ đồng biến trên đoạn $[a; b]$ nên $F(b) > F(a).$

Do đó $\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) > 0.$ Do đó C đúng. **Chọn C.**

Ta có $\int_a^b kdx = k. \int_a^b dx = k.x \Big|_a^b = k(b-a) \longrightarrow$ D sai.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_2^5 f(x)dx = 10.$ Tính $I = \int_5^2 [2 - 4f(x)]dx.$

- A. $I = 32.$ B. $I = 34.$ C. $I = 36.$ D. $I = 40.$

Lời giải. Ta có $I = \int_5^2 [2 - 4f(x)]dx = 2 \int_5^2 dx - 4 \int_5^2 f(x)dx$

$$= 2x \Big|_5^2 + 4 \int_2^5 f(x)dx = 2.(2-5) + 4.10 = 34. \text{ Chọn B.}$$

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_1^3 f(x)dx = 2016$ và $\int_4^3 f(x)dx = 2017.$

Tính tích phân $I = \int_1^4 f(x)dx.$

A. $I = 4023$.

B. $I = 1$.

C. $I = -1$.

D. $I = 0$.

Lời giải. Ta có $I = \int_1^4 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx$
 $= \int_1^3 f(x) dx - \int_4^3 f(x) dx = 2016 - 2017 = -1$. **Chọn C.**

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_1^2 f(x) dx = 1$ và $\int_1^4 f(t) dt = -3$.

Tính tích phân $I = \int_2^4 f(u) du$.

A. $I = -2$.

B. $I = -4$.

C. $I = 4$.

D. $I = 2$.

Lời giải. Ta có $\int_1^2 f(u) du = \int_1^2 f(x) dx = 1$ và $\int_1^4 f(u) du = \int_1^4 f(t) dt = -3$.

Suy ra $I = \int_2^4 f(u) du = \int_2^1 f(u) du + \int_1^4 f(u) du = -\int_1^2 f(u) du + \int_1^4 f(u) du = -1 - 3 = -4$.

Chọn B.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^6 f(x) dx = 4$ và $\int_2^6 f(x) dt = -3$.

Tính tích phân $I = \int_0^2 [f(v) - 3] dv$.

A. $I = 1$.

B. $I = 2$.

C. $I = 4$.

D. $I = 3$.

Lời giải. Ta có $I = \int_0^2 [f(v) - 3] dv = \int_0^2 f(v) dv - 3v \Big|_0^2 = \int_0^2 f(v) dv - 6$.

Mà $\int_0^2 f(v) dv = \int_0^2 f(v) dv + \int_2^6 f(v) dv - \int_2^6 f(v) dv = \int_0^6 f(v) dv - \int_2^6 f(v) dv$
 $= \int_0^6 f(x) dx - \int_2^6 f(x) dx = 4 - (-3) = 7$.

Vậy $I = 7 - 6 = 1$. **Chọn A.**

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x) dx = 7$ và $\int_2^6 f(x) dx = 3$.

Tính tích phân $I = \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx$.

A. $I = 10$.

B. $I = 4$.

C. $I = 7$.

D. $I = -4$.

Lời giải. Ta có

$$I = \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^6 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx - \int_2^6 f(x) dx$$

$$= \int_0^{10} f(x) dx - \int_2^6 f(x) dx = 7 - 3 = 4. \text{ **Chọn B.}**$$

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_a^d f(x) dx = 10$, $\int_b^d f(x) dx = 8$ và $\int_a^c f(x) dx = 7$.

Tính tích phân $I = \int_b^c f(x) dx$.

A. $I = -5$.

B. $I = 7$.

C. $I = 5$.

D. $I = -7$.

Lời giải. Ta có $I = \int_b^c f(x)dx = \int_b^d f(x)dx + \int_d^a f(x)dx + \int_a^c f(x)dx$
 $= \int_b^d f(x)dx - \int_a^d f(x)dx + \int_a^c f(x)dx = 8 - 10 + 7 = 5$. **Chọn C.**

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_1^3 f(x)dx = -2$, $\int_1^4 f(x)dx = 3$ và $\int_1^4 g(x)dx = 7$.

Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $\int_1^4 [f(x) + g(x)]dx = 10$.

B. $\int_3^4 f(x)dx = 1$.

C. $\int_4^3 f(x)dx = -5$.

D. $\int_1^4 [4f(x) - 2g(x)]dx = -2$.

Lời giải. Ta có $\int_1^4 [f(x) + g(x)]dx = \int_1^4 f(x)dx + \int_1^4 g(x)dx = 3 + 7 = 10$. Do đó A đúng.

Ta có $\int_3^4 f(x)dx = \int_3^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx$

$= -\int_1^3 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx = -(-2) + 3 = 5$. Do đó B sai, C đúng. **Chọn B.**

Ta có $\int_1^4 [4f(x) - 2g(x)]dx = 4\int_1^4 f(x)dx - 2\int_1^4 g(x)dx = 4 \cdot 3 - 2 \cdot 7 = -2$. Do đó D đúng.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ thỏa $\int_1^2 [3f(x) + 2g(x)]dx = 1$ và $\int_1^2 [2f(x) - g(x)]dx = -3$.

Tính tích phân $I = \int_1^2 f(x)dx$.

A. $I = 1$.

B. $I = 2$.

C. $I = -\frac{5}{7}$.

D. $I = \frac{1}{2}$.

Lời giải. Ta có

• $\int_1^2 [3f(x) + 2g(x)]dx = 1 \iff 3\int_1^2 f(x)dx + 2\int_1^2 g(x)dx = 1$.

• $\int_1^2 [2f(x) - g(x)]dx = -3 \iff 2\int_1^2 f(x)dx - \int_1^2 g(x)dx = -3$.

Đặt $\int_1^2 f(x)dx = u$ và $\int_1^2 g(x)dx = v$, ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3u + 2v = 1 \\ 2u - v = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} u = -\frac{5}{7} \\ v = \frac{11}{7} \end{cases}$.

Vậy $I = \int_1^2 f(x)dx = u = -\frac{5}{7}$. **Chọn C.**

Câu 12. (ĐỀ THỬ NGHIỆM 2016 - 2017) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 2]$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $f(2) = 2$. Tính $I = \int_1^2 f'(x)dx$.

A. $I = 1$.

B. $I = -1$.

C. $I = 3$.

D. $I = \frac{7}{2}$.

Lời giải. Ta có $I = \int_1^2 f'(x)dx = f(x) \Big|_1^2 = f(2) - f(1) = 1$. **Chọn A.**

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0) = 1$. Kí hiệu

$I = \int_0^x f'(t)dt$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $I = f(x) + 1$. B. $I = f(x)$. C. $I = f(x + 1)$. D. $I = f(x) - 1$.

Lời giải. Ta có $I = \int_0^x f'(t)dt = f(t) \Big|_0^x = f(x) - f(0) = f(x) - 1$. **Chọn D.**

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = \ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|$. Tính tích phân $\int_0^1 f'(x)dx$.

- A. $\int_0^1 f'(x)dx = \ln\sqrt{2}$. B. $\int_0^1 f'(x)dx = \ln(1 + \sqrt{2})$.
C. $\int_0^1 f'(x)dx = 1 + \ln\sqrt{2}$. D. $\int_0^1 f'(x)dx = 2\ln 2$.

Lời giải. Ta có $\int_0^1 f'(x)dx = f(x) \Big|_0^1$
 $= \ln|x + \sqrt{x^2 + 1}| \Big|_0^1 = \ln|1 + \sqrt{1^2 + 1}| - \ln|0 + \sqrt{0^2 + 1}| = \ln(1 + \sqrt{2})$. **Chọn B.**

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 4]$ và thỏa mãn

$f(1) = 12$, $\int_1^4 f'(x)dx = 17$. Tính giá trị của $f(4)$.

- A. $f(4) = 29$. B. $f(4) = 5$. C. $f(4) = 9$. D. $f(4) = 19$.

Lời giải. Ta có $\int_1^4 f'(x)dx = f(x) \Big|_1^4 = f(4) - f(1)$.

Theo giả thiết $\int_1^4 f'(x)dx = 17 \Leftrightarrow f(4) - f(1) = 17 \longrightarrow f(4) = 17 + f(1) = 17 + 12 = 29$.

Chọn A.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; \ln 3]$ và thỏa mãn

$f(1) = e^2$, $\int_1^{\ln 3} f'(x)dx = 9 - e^2$. Tính giá trị của $f(\ln 3)$.

- A. $f(\ln 3) = 9 - 2e^2$. B. $f(\ln 3) = 9$.
C. $f(\ln 3) = -9$. D. $f(\ln 3) = 2e^2 - 9$.

Lời giải. Ta có $\int_1^{\ln 3} f'(x)dx = f(x) \Big|_1^{\ln 3} = f(\ln 3) - f(1)$.

Theo giả thiết $\int_1^{\ln 3} f'(x)dx = 9 - e^2 \Leftrightarrow f(\ln 3) - f(1) = 9 - e^2$

$\longrightarrow f(\ln 3) = 9 - e^2 + f(1) = 9 - e^2 + e^2 = 9$. **Chọn B.**

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 3]$ và thỏa mãn $f(1) = 1$,

$f(3) = m$. Tìm tham số thực m để $\int_1^3 f'(x)dx = 5$.

- A. $m = 6$. B. $m = 5$. C. $m = 4$. D. $m = -4$.

Lời giải. Ta có $\int_1^3 f'(x)dx = f(x) \Big|_1^3 = f(3) - f(1)$.

Theo giả thiết $\int_1^3 f'(x) dx = 5 \Leftrightarrow f(3) - f(1) = 5 \Leftrightarrow m - 1 = 5 \Leftrightarrow m = 6$. **Chọn A.**

Câu 18. Cho hàm số $g(x) = \int_0^x t \cos(x-t) dt$. Tính $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

- A. $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$. B. $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. C. $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. D. $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = t \\ dv = \cos(x-t) dt \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = -\sin(x-t) \end{cases}$.

Khi đó $g(x) = -t \sin(x-t) \Big|_0^x + \int_0^x \sin(x-t) dt = -t \sin(x-t) \Big|_0^x + \cos(x-t) \Big|_0^x = 1 - \cos x$.

Suy ra $g'(x) = \sin x \longrightarrow g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. **Chọn B.**

Câu 19. Tính đạo hàm của hàm số $F(x) = \int_0^{x^2} \cos \sqrt{t} dt$ với $x > 0$.

- A. $F'(x) = x^2 \cos x$. B. $F'(x) = 2x \cos x$.
C. $F'(x) = \cos x$. D. $F'(x) = \cos x - 1$.

Lời giải. Đặt $y = \sqrt{t} \Rightarrow y^2 = t \longrightarrow 2y dy = dt$. Đổi cận: $\begin{cases} t = 0 \rightarrow y = 0 \\ t = x^2 \rightarrow y = x \end{cases}$.

Khi đó $F(x) = \int_0^x \cos y \cdot 2y dy$. Đặt $\begin{cases} u = 2y \\ dv = \cos y dy \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} du = 2 dy \\ v = \sin y \end{cases}$.

Suy ra $F(x) = 2y \sin y \Big|_0^x - 2 \int_0^x \sin y dy = 2y \sin y \Big|_0^x + 2 \cos y \Big|_0^x = 2x \sin x + 2 \cos x - 2$
 $\longrightarrow F'(x) = 2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x = 2x \cos x$. **Chọn B.**

Câu 20. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $F(x) = \int_1^x (t^2 + t) dt$ trên đoạn $[-1; 1]$.

- A. $m = \frac{1}{6}$. B. $m = 2$. C. $m = -\frac{5}{6}$. D. $m = \frac{5}{6}$.

Lời giải. Ta có $F(x) = \int_1^x (t^2 + t) dt = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_1^x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{6}$.

Xét hàm số $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{6}$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Đạo hàm $F'(x) = x^2 + x \longrightarrow F'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 1] \\ x = -1 \in [-1; 1] \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} F(-1) = -\frac{2}{3} \\ F(0) = -\frac{5}{6} \\ F(1) = 0 \end{cases} \longrightarrow \min_{[-1; 1]} F(x) = F(0) = -\frac{5}{6}$. **Chọn C.**

Câu 21. Tính đạo hàm của hàm số $F(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^2} dt$.

- A. $F'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. B. $F'(x) = \sqrt{1+x^2}$.

$$\text{C. } F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\text{D. } F'(x) = (x^2 + 1)\sqrt{1+x^2}.$$

Lời giải. Gọi $H(t)$ là một nguyên hàm của $\sqrt{1+t^2}$, suy ra $H'(t) = \sqrt{1+t^2}$.

$$\text{Khi đó } F(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^2} dt = H(t) \Big|_1^x = H(x) - H(1)$$

$$\longrightarrow F'(x) = [H(x) - H(1)]' = H'(x) = \sqrt{1+x^2}. \quad \text{Chọn B.}$$

Câu 22. Tính đạo hàm của hàm số $F(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \sin t^2 dt$ với $x > 0$.

$$\text{A. } F'(x) = \sin x. \quad \text{B. } F'(x) = \frac{\sin x}{2\sqrt{x}}. \quad \text{C. } F'(x) = \frac{2\sin x}{\sqrt{x}}. \quad \text{D. } F'(x) = \sin \sqrt{x}.$$

Lời giải. Gọi $H(t)$ là một nguyên hàm của $\sin t^2$, suy ra $H'(t) = \sin t^2$.

$$\text{Khi đó } F(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \sin t^2 dt = H(t) \Big|_1^{\sqrt{x}} = H(\sqrt{x}) - H(1)$$

$$\longrightarrow F'(x) = [H(\sqrt{x}) - H(1)]' = [H(\sqrt{x})]' = \frac{H'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = \frac{\sin x}{2\sqrt{x}}. \quad \text{Chọn B.}$$

$$\text{Chú ý: } [H(\sqrt{x})]' \neq H'(\sqrt{x}).$$

Câu 23. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)$, biết $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^x te^{f(t)} dt = e^{f(x)}$.

$$\text{A. } f'(x) = x. \quad \text{B. } f'(x) = x^2 + 1. \quad \text{C. } f'(x) = \frac{1}{x}. \quad \text{D. } f'(x) = 1.$$

Lời giải. Gọi $F(t)$ là một nguyên hàm của $te^{f(t)}$, suy ra $F'(t) = te^{f(t)}$.

$$\text{Khi đó } \int_0^x te^{f(t)} dt = F(t) \Big|_0^x = F(x) - F(0) \longleftrightarrow e^{f(x)} = F(x) - F(0).$$

$$\text{Đạo hàm hai vế, ta được } f'(x) \cdot e^{f(x)} = F'(x) \longleftrightarrow f'(x) \cdot e^{f(x)} = xe^{f(x)} \longrightarrow f'(x) = x.$$

Chọn A.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^{f(x)} t^2 dt = x \cos(\pi x)$. Tính $f(4)$.

$$\text{A. } f(4) = 2\sqrt{3}. \quad \text{B. } f(4) = -1. \quad \text{C. } f(4) = \frac{1}{2}. \quad \text{D. } f(4) = \sqrt[3]{12}.$$

$$\text{Lời giải. Ta có } \int_0^{f(x)} t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^{f(x)} = \frac{1}{3} [f(x)]^3 = x \cos(\pi x).$$

$$\text{Cho } x = 4, \text{ ta được } \frac{1}{3} [f(4)]^3 = 4 \cos 4\pi \longrightarrow f(4) = \sqrt[3]{12}. \quad \text{Chọn D.}$$

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có $1 \leq f'(x) \leq 4$ với mọi $x \in [2; 5]$. Hỏi khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

$$\begin{array}{ll} \text{A. } 3 \leq f(5) - f(2) \leq 12. & \text{B. } -12 \leq f(5) - f(2) \leq 3. \\ \text{C. } 1 \leq f(5) - f(2) \leq 4. & \text{D. } -4 \leq f(5) - f(2) \leq -1. \end{array}$$

Lời giải. Đầu tiên ta phải nhận dạng được $f(5) - f(2) = \int_2^5 f'(x) dx$.

$$\text{Do } 1 \leq f'(x) \leq 4, \forall x \in [2; 5] \longrightarrow \underbrace{\int_2^5 1 dx}_3 \leq \underbrace{\int_2^5 f'(x) dx}_2 \leq \underbrace{\int_2^5 4 dx}_{12}.$$

Vậy $3 \leq f(5) - f(2) \leq 12$. **Chọn A.**



Vấn đề 2. TÍCH PHÂN CƠ BẢN



Câu 26. Tìm số thực $a > 1$ để tích phân $\int_1^a \frac{x+1}{x} dx$ có giá trị bằng e .

A. $a = \frac{1}{e}$.

B. $a = e$.

C. $a = \frac{e}{2}$.

D. $a = e^2$.

Lời giải. Ta có $\int_1^a \frac{x+1}{x} dx = \int_1^a \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = \left(x + \ln|x|\right) \Big|_1^a = a + \ln a - 1 = e$.

Thử các đáp án đã cho, có $a = e$ thỏa mãn. Thật vậy $e + \ln e - 1 = e$. **Chọn B.**

Cách CASIO. Thiết lập hiệu $\int_1^a \frac{x+1}{x} dx - e$.

Thử từng đáp án, ví dụ với đáp án A ta nhập vào máy $\int_1^{\frac{1}{e}} \frac{x+1}{x} dx - e$ và nhấn dấu =.

Màn hình xuất hiện số khác 0 nên không thỏa mãn. Tương tự thử với đáp án B.

Câu 27. Tính tích phân $I = \int_1^5 \frac{dx}{2x-1}$.

A. $I = \ln 3$.

B. $I = \ln 2$.

C. $I = \ln 9$.

D. $I = \ln 6$.

Lời giải. Ta có $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2} \ln|2x-1| \Big|_1^5 = \frac{1}{2} (\ln 9 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 9 = \ln 3$. **Chọn A.**

Câu 28. Nếu kết quả của $\int_1^2 \frac{dx}{x+3}$ được viết ở dạng $\ln \frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và ước chung lớn nhất của a, b bằng 1. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $3a - b < 12$.

B. $a + 2b = 13$.

C. $a - b > 2$.

D. $a^2 + b^2 = 41$.

Lời giải. Ta có $\int_1^2 \frac{dx}{x+3} = \ln|x+3| \Big|_1^2 = \ln 5 - \ln 4 = \ln \frac{5}{4}$.

Suy ra $\begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \end{cases} \longrightarrow a - b = 1 < 2$. Do đó C sai. **Chọn C.**

Câu 29. Tính tích phân $I = \int_0^{2016} 7^x dx$.

A. $I = \frac{7^{2016} - 1}{\ln 7}$.

B. $I = 7^{2016} - \ln 7$.

C. $I = \frac{7^{2017}}{2017} - 7$.

D. $I = 2016 \cdot 7^{2015}$.

Lời giải. Ta có $I = \int_0^{2016} 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} \Big|_0^{2016} = \frac{7^{2016}}{\ln 7} - \frac{1}{\ln 7}$. **Chọn A.**

Câu 30. Kết quả của tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ được viết ở dạng $I = a + b\sqrt{3}$, với a và b là các số hữu tỉ. Tính $P = a - 4b$.

A. $P = a - 4b = \frac{9}{2}$.

B. $P = a - 4b = 3$.

C. $P = a - 4b = -\frac{1}{2}$.

D. $P = a - 4b = \frac{1}{2}$.

Lời giải. Ta có $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \sqrt{3}$

$$\longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases} \longrightarrow P = a - 4b = 3. \text{ Chọn B.}$$

Câu 31. Cho hàm số $f(x) = A \sin(\pi x) + B$ (A, B thuộc $\mathbb{R}$) thỏa mãn $\int_0^2 f(x) dx = 4$ và $f'(1) = 2$. Tính giá trị biểu thức $P = \pi A + B$.

- A. $P = 4$. B. $P = 0$. C. $P = -2$. D. $P = -4$.

Lời giải. Ta có $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 [A \sin(\pi x) + B] dx = \left[-\frac{A}{\pi} \cos(\pi x) + Bx \right]_0^2 = 2B$.

Suy ra $2B = 4 \Leftrightarrow B = 2$.

Lại có $f'(x) = A\pi \cos(\pi x) \longrightarrow f'(1) = 2 \Leftrightarrow A\pi \cos \pi = 2 \Leftrightarrow A = -\frac{2}{\pi}$.

Vậy $A = -\frac{2}{\pi}; B = 2 \longrightarrow P = \pi A + B = 0$. **Chọn B.**

Câu 32. Biết rằng tích phân $\int_0^m \cos 2x dx = 0$ với m là tham số. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $m = k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). B. $m = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
C. $m = k\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$). D. $m = (2k+1)\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Lời giải. Ta có $0 = \int_0^m \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^m = \frac{1}{2} \sin 2m$

$\longrightarrow \sin 2m = 0 \Leftrightarrow 2m = k\pi \Leftrightarrow m = \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$). **Chọn C.**

Câu 33. Biết rằng tích phân $\int_0^x \left(\sin^2 t - \frac{1}{2} \right) dt = 0$ với x là tham số. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $x = k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). B. $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
C. $x = k\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$). D. $x = (2k+1)\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Lời giải. Ta có $\int_0^x \left(\sin^2 t - \frac{1}{2} \right) dt = \int_0^x \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} - \frac{1}{2} \right) dt = -\frac{1}{2} \int_0^x \cos 2t dt$

$$= -\frac{1}{4} \sin 2t \Big|_0^x = -\frac{1}{4} \sin 2x.$$

Theo giả thiết $\int_0^x \left(\sin^2 t - \frac{1}{2} \right) dt = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$). **Chọn C.**

Câu 34. Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$, biết rằng $f(x) = \begin{cases} 2^{2017x} & \text{khi } x \geq 0 \\ 2^{-2017x} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$.

- A. $I = \frac{2^{2018} - 2}{2017} \log_2 e$. B. $I = \frac{2^{2018} - 1}{2017} \log_2 e$.
C. $I = \frac{2^{2018} - 1}{2017} \ln 2$. D. $I = \frac{2^{2017} - 1}{2017 \ln 2}$.

Lời giải. Ta có $I = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx$
 $= \int_{-1}^0 2^{-2017x} dx + \int_0^1 2^{2017x} dx = -\frac{2^{-2017x}}{2017 \ln 2} \Big|_{-1}^0 + \frac{2^{2017x}}{2017 \ln 2} \Big|_0^1 = \frac{2^{2018} - 2}{2017} \log_2 e$. **Chọn A.**

Câu 35. Tính tích phân $I = \int_0^2 \min(1, x^2) dx$.

- A. $I = \frac{3}{4}$. B. $I = 4$. C. $I = \frac{4}{3}$. D. $I = -\frac{3}{4}$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} x \in [0;1] \longrightarrow \min(1, x^2) = x^2 \\ x \in [1;2] \longrightarrow \min(1, x^2) = 1 \end{cases}$.

Do đó $I = \int_0^1 \min(1, x^2) dx + \int_1^2 \min(1, x^2) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 1 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + x \Big|_1^2 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$.

Chọn C.

Vấn đề 3. ỨNG DỤNG THỰC TIỄN

Giả sử $v(t)$ là vận tốc của vật M tại thời điểm t và $s(t)$ là quãng đường vật đi được sau khoảng thời gian t tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Ta có mối liên hệ giữa $s(t)$ và $v(t)$ như sau:

- Đạo hàm của quãng đường là vận tốc: $s'(t) = v(t)$.
- Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường $s(t) = \int v(t) dt$.

—→ từ đây ta cũng có quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $t \in [a; b]$ là

$$\boxed{\int_a^b v(t) dt = s(b) - s(a)}.$$

Nếu gọi $a(t)$ là gia tốc của vật M thì ta có mối liên hệ giữa $v(t)$ và $a(t)$ như sau:

- Đạo hàm của vận tốc là gia tốc: $v'(t) = a(t)$.
- Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc: $v(t) = \int a(t) dt$.

Câu 36. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn đi chuyển bao nhiêu mét?

- A. 0,2m. B. 2m. C. 10m. D. 20m.

Lời giải. Lúc dừng hẳn thì $v(t) = 0 \longrightarrow -5t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Vậy từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô đi được quãng đường là

$$s = \int_0^2 (-5t + 10) dt = \left[-\frac{5}{2}t^2 + 10t \right]_0^2 = 10\text{m.} \quad \textbf{Chọn C.}$$

Câu 37. Một ô tô đang đi với vận tốc lớn hơn 72km/h, phía trước là đoạn đường chỉ cho phép chạy với tốc độ tối đa là 72km/h, vì thế người lái xe đạp phanh để ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 30 - 2t$ (m/s), trong đó t là khoảng thời

gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc bắt đầu đạp phanh đến lúc đạt tốc độ 72km/h, ô tô đã di chuyển quãng đường là bao nhiêu mét?

- A. 100m. B. 125m. C. 150m. D. 175m.

Lời giải. Ta có $72\text{km/h} = 20\text{m/s}$.

Từ lúc bắt đầu đạp phanh đến lúc đạt tốc độ 72km/h, ta có phương trình

$$30 - 2t = 20 \Leftrightarrow t = 5.$$

Vậy từ lúc đạp phanh đến khi ô tô đạt tốc độ 72km/h, ô tô đi được quãng đường là

$$s = \int_0^5 (30 - 2t) dt = 125\text{m. Chọn B.}$$

Câu 38. Một vật đang chuyển động với vận tốc 6m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = \frac{3}{t+1} \text{m/s}^2$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc. Hỏi vận tốc của vật sau 10 giây gần nhất với kết quả nào sau đây?

- A. 14m/s. B. 13m/s. C. 11m/s. D. 12m/s.

Lời giải. Ta có $v(t) = \int \frac{3}{t+1} dt = 3\ln|t+1| + C$.

Tại thời điểm lúc bắt đầu tăng tốc $t = 0$ thì $v = 6\text{m/s}$ nên ta có $3\ln 1 + C = 6 \Leftrightarrow C = 6$.

Suy ra $v(t) = 3\ln|t+1| + 6(\text{m/s})$.

Tại thời điểm $t = 10\text{s} \rightarrow v(10) = 3\ln 11 + 6 \approx 13\text{m/s}$. **Chọn B.**

Câu 39. Một vật đang chuyển động với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2 (\text{m/s}^2)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc. Hỏi quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc bằng bao nhiêu mét?

- A. $\frac{4000}{3} \text{m}$. B. $\frac{4300}{3} \text{m}$. C. $\frac{1900}{3} \text{m}$. D. $\frac{2200}{3} \text{m}$.

Lời giải. Ta có $v(t) = \int (3t + t^2) dt = \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + C$.

Tại thời điểm lúc bắt đầu tăng tốc $t = 0$ thì $v = 10\text{m/s}$ nên suy ra $C = 10$.

Suy ra $v(t) = \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + 10(\text{m/s})$.

Vậy quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng

tốc bằng $s = \int_0^{10} \left(\frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + 10 \right) dt = \left(\frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{12} + 10t \right) \Big|_0^{10} = \frac{4300}{3} \text{m}$. **Chọn B.**

Câu 40. Một ô tô đang chuyển động với vận tốc 30m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a(t) = -\frac{20}{(1+2t)^2} \text{m/s}^2$, trong đó t là

khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi quãng đường ô tô đi được trong khoảng thời gian 2 giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh là bao nhiêu mét?

- A. 46m. B. 47m. C. 48m. D. 49m.

Lời giải. Ta có $v(t) = \int \frac{-20}{(1+2t)^2} dt = \frac{10}{1+2t} + C$.

Tại thời điểm lúc bắt đầu đạp phanh $t = 0$ thì $v = 30\text{m/s}$ nên suy ra $C = 20$.

Suy ra $v(t) = \frac{10}{1+2t} + 20(\text{m/s})$.

Vậy quãng đường ô tô đi được trong khoảng thời gian 2 giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh bằng $s = \int_0^2 v(t) dt = \int_0^2 \left(\frac{10}{1+2t} + 20 \right) dt = \left(5 \ln(1+2t) + 20t \right) \Big|_0^2 \approx 48\text{m}$. **Chọn C.**

Câu 41. Một ô tô đang chạy thẳng đều với vận tốc v_0 (m/s) thì người đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + v_0$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn ô tô di chuyển được 40m thì vận tốc ban đầu v_0 bằng bao nhiêu?

- A. $v_0 = 40\text{m/s}$. B. $v_0 = 80\text{m/s}$. C. $v_0 = 20\text{m/s}$. D. $v_0 = 25\text{m/s}$.

Lời giải. Lúc dừng hẳn thì $v(t) = 0 \longrightarrow -5t + v_0 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{v_0}{5}$.

Theo giả thiết, ta có $40\text{m} = \int_0^{\frac{v_0}{5}} (-5t + v_0) dt = \left(-\frac{5}{2}t^2 + v_0t \right) \Big|_0^{\frac{v_0}{5}} = -\frac{v_0^2}{10} + \frac{v_0^2}{5} = \frac{v_0^2}{10}$
 $\longrightarrow 40\text{m} = \frac{v_0^2}{10} \longrightarrow v_0 = 20\text{m/s}$. **Chọn C.**

Câu 42. Tại một nơi không có gió, một chiếc khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162 m so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t) = 10t - t^2$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động. Hỏi lúc vừa tiếp đất, vận tốc v của khí cầu bằng bao nhiêu?

- A. $v = 5\text{m/s}$. B. $v = 7\text{m/s}$. C. $v = 9\text{m/s}$. D. $v = 3\text{m/s}$.

Lời giải. Do $v(t) = 10t - t^2 \longrightarrow 0 < t < 10$.

Giả sử chiếc khí cầu chạm đất kể từ lúc bắt đầu chuyển động là t_1 giây ($0 < t_1 < 10$).

Theo đề bài ta có phương trình $162 = \int_0^{t_1} (10t - t^2) dt = \left(5t^2 - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^{t_1} = 5t_1^2 - \frac{t_1^3}{3}$
 $\Leftrightarrow -\frac{t_1^3}{3} + 5t_1^2 - 162 = 0 \xrightarrow{0 < t_1 < 10} t_1 = 9 \longrightarrow v(9) = 9\text{m/s}$. **Chọn C.**

Câu 43. Một đoàn tàu chuyển động thẳng khởi hành từ một nhà ga. Quãng đường s (mét) đi được của đoàn tàu là một hàm số của thời gian t (giây) có phương trình là $s = 6t^2 - t^3$. Thời điểm mà tại đó vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất là:

- A. $t = 6\text{s}$. B. $t = 4\text{s}$. C. $t = 2\text{s}$. D. $t = 1\text{s}$.

Lời giải. Vận tốc $v(t) = s'(t) = 12t - 3t^2$.

Bây giờ ta đi tìm giá trị lớn nhất của hàm số $v(t) = 12t - 3t^2$.

Ta có $\begin{cases} s = 6t^2 - t^3 \geq 0 \\ v = 12t - 3t^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 4 \Rightarrow t \in [0; 4] \\ t \geq 0 \end{cases}$

Đạo hàm và lập bảng biến thiên ta tìm được $\max_{[0; 4]} v(t)$ đạt tại $t = 2\text{s}$. **Chọn C.**

Câu 44. (ĐỀ THI CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. 24m/s. B. 108m/s. C. 18m/s. D. 64m/s.

Lời giải. Vận tốc $v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 12t$.

Ycbt là đi tìm GTLN của hàm số $v(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 12t$ với $0 \leq t \leq 8$.

Đạo hàm và lập bảng biến thiên ta tìm được $\max_{[0;8]} v(t) = v(4) = 24 \text{ m/s}$. **Chọn A.**

Câu 45. Một tàu lửa đang chạy với vận tốc 200 m/s thì người lái tàu đạp phanh. Từ thời điểm đó, tàu chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 200 + at$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh và a (m/s²) là gia tốc. Biết rằng khi đi được 1500m thì tàu dừng, hỏi gia tốc của tàu bằng bao nhiêu?

A. $a = \frac{40}{3}$ (m/s²). B. $a = -\frac{200}{13}$ m/s². C. $a = -\frac{40}{3}$ m/s². D. $a = -\frac{100}{13}$ m/s².

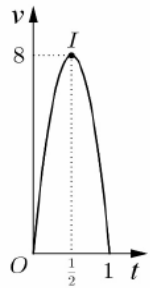
Lời giải. Khi tàu dừng hẳn thì $v = 0 \Leftrightarrow 200 + at = 0 \longrightarrow t = -\frac{200}{a}$ (m/s).

Theo đề bài ta có phương trình

$$1500 = \int_0^{-\frac{200}{a}} (200 + at) dt = \left(200t + \frac{at^2}{2} \right) \bigg|_0^{-\frac{200}{a}} = -\frac{40000}{a} + \frac{40000}{2a}.$$

Suy ra $a = -\frac{40}{3}$ (m/s²). **Chọn C.**

Câu 46. Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là một phần parabol với đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi chạy.



A. $s = 4$ km.

B. $s = 2,3$ km.

C. $s = 4,5$ km.

D. $s = 5,3$ km.

Lời giải. Hàm vận tốc $v(t) = at^2 + bt + c$ có dạng là đường parabol đi qua các điểm

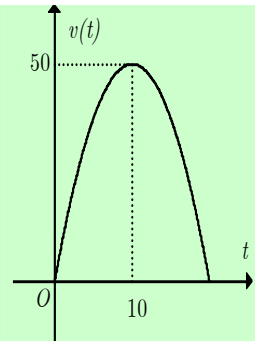
$$O(0; 0), A(1; 0) \text{ và } I\left(\frac{1}{2}; 8\right) \text{ nên suy ra } \begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -32 \\ b = 32 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow v(t) = -32t^2 + 32t \text{ (m/s)}.$$

Vậy quãng đường người đó đi được trong khoảng thời gian 45 phút là:

$$s = \int_0^{\frac{3}{4}} (-32t^2 + 32t) dt = 4,5 \text{ km. Chọn C.}$$

Câu 47. Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu tăng tốc với vận tốc tăng liên tục được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol có hình bên. Biết rằng sau 10s thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 50 m/s và bắt đầu giảm tốc. Hỏi từ lúc bắt đầu tăng tốc đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì xe đã đi được quãng đường bao nhiêu mét?



A. $\frac{1000}{3}$ m.

B. $\frac{1100}{3}$ m.

C. $\frac{1400}{3}$ m.

D. 300m.

Lời giải. Hàm vận tốc $v(t) = at^2 + bt + c$ có dạng là đường parabol có đỉnh $I(10;50)$,

$$\text{đồng thời đi qua gốc tọa độ } O(0;0) \text{ nên suy ra } \begin{cases} c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 10 \\ a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = -\frac{1}{2} \\ b = 10 \end{cases}$$

$$\longrightarrow v(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 10t \text{ (m/s)}.$$

Theo đồ thị thì xe bắt đầu tăng tốc lúc $t = 0$ và đạt vận tốc cao nhất lúc $t = 10$ s nên quãng đường đi được của xe từ lúc bắt đầu tăng tốc đến lúc đạt vận tốc cao nhất là:

$$s = \int_0^{10} v(t) dt = \int_0^{10} \left(-\frac{1}{2}t^2 + 10t \right) dt = \left(-\frac{1}{6}t^3 + 5t^2 \right) \Big|_0^{10} = \frac{1000}{3} \text{ m. Chọn A.}$$

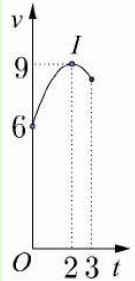
Câu 48. Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.

A. $s = 26,75\text{km}$.

B. $s = 25,25\text{km}$.

C. $s = 24,25\text{km}$.

D. $s = 24,75\text{km}$.



Lời giải. Hàm vận tốc $v(t) = at^2 + bt + c$ có dạng là đường parabol đi qua có đỉnh

$$I(2;9) \text{ và đi qua điểm } A(0;6) \text{ nên suy ra } \begin{cases} c = 6 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 6 \\ a = -\frac{3}{4} \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\longrightarrow v(t) = -\frac{3}{4}t^2 + 3t + 6 \text{ (m/s)}.$$

Vậy quãng đường người đó đi được trong khoảng thời gian 3 giờ là:

$$s = \int_0^3 \left(-\frac{3}{4}t^2 + 3t + 6 \right) dt = 24,75\text{km. Chọn D.}$$

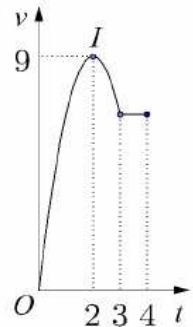
Câu 49. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động trong 4 giờ đó.

A. $s = 26,5\text{km}$.

B. $s = 28,5\text{km}$.

C. $s = 27\text{km}$.

D. $s = 24\text{km}$.



Lời giải. Hàm vận tốc $v(t) = at^2 + bt + c$ có dạng là đường parabol đi qua có đỉnh

$$I(2;9) \text{ và đi qua điểm } O(0;0) \text{ nên suy ra } \begin{cases} c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = -\frac{9}{4} \\ b = 9 \end{cases}$$

$$\longrightarrow v(t) = -\frac{9}{4}t^2 + 9t \text{ (m/s)}. \text{ Suy ra } v(3) = \frac{27}{4} \text{ (m/s)}.$$

Vậy quãng đường người đó đi được trong khoảng thời gian 4 giờ là:

$$s = \int_0^3 \left(-\frac{9}{4}t^2 + 9t \right) dt + \int_3^4 \frac{27}{4} dt = 27 \text{ km. Chọn C.}$$

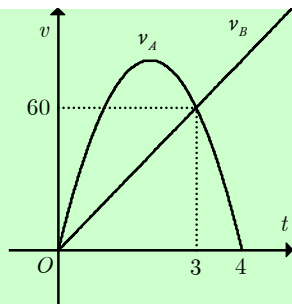
Câu 50. Cho đồ thị biểu diễn vận tốc của hai xe A và B khởi hành cùng một lúc, bên cạnh nhau và trên cùng một con đường. Biết đồ thị biểu diễn vận tốc của xe A là một đường parabol, đồ thị biểu diễn vận tốc của xe B là một đường thẳng ở hình bên. Hỏi sau khi đi được 3 giây khoảng cách giữa hai xe là bao nhiêu mét.

A. 90m.

B. 60m.

C. 0m.

D. 270m.



Lời giải. Hàm vận tốc $v_A(t) = at^2 + bt + c$ có dạng là đường parabol đi qua các điểm $O(0;0)$, $A(3;60)$ và $B(4;0)$ nên suy ra $v_A(t) = -20t^2 + 80t$ (m/s).

Hàm vận tốc $v_B(t) = at + b$ có dạng là đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ và điểm $A(3;60)$ nên suy ra $v_B(t) = 20t$ (m/s).

Quãng đường đi được sau 3 giây của xe A là $s_A = \int_0^3 (-20t^2 + 80t) dt = 180 \text{ m}$.

Quãng đường đi được sau 3 giây của xe B là $s_B = \int_0^3 20t dt = 90 \text{ m}$.

Vậy khoảng cách giữa hai xe sau 3 giây sẽ bằng: $|s_A - s_B| = 90 \text{ m}$. **Chọn A.**

Câu 51. Tốc độ thay đổi số dân của một thị trấn kể từ năm 1970 được mô tả bằng công thức $f'(t) = \frac{120}{(t+5)^2}$, với t là thời gian tính bằng năm (thời điểm $t=0$ ứng với năm 1970). Biết rằng số dân của thị trấn vào năm 1970 là 2000 người. Hỏi số dân của thị trấn đó vào năm 2018 gần nhất với số nào sau đây?

A. 22 nghìn người.

B. 23 nghìn người.

C. 24 nghìn người.

D. 25 nghìn người.

Lời giải. Tốc độ thay đổi số dân của thị trấn vào năm thứ t là $f'(t) = \frac{120}{(t+5)^2}$. Suy ra nguyên hàm của $f'(t)$ là hàm số $f(t)$ mô tả số dân của thị trấn vào năm thứ t .

Ta có $f(t) = \int f'(t) dt = \int \frac{120}{(t+5)^2} dt = \frac{-120}{t+5} + C$.

Số dân của thị trấn vào năm 1970 (ứng với $t=0$) là

$$f(0) = 2 \Leftrightarrow \frac{-120}{0+5} + C = 2 \Leftrightarrow C = 26 \longrightarrow f(t) = \frac{-120}{t+5} + 26.$$

Vậy số dân của thị trấn vào năm 2018 (ứng với $t=48$) là

$$f(48) = \frac{-120}{48+5} + 26 = 23,73 \text{ nghìn người. Chọn C.}$$

Câu 52. Biết tốc độ phát triển của vi khuẩn HP (Helicobacter pylori) gây đau dạ dày tại ngày thứ t là $F'(t) = \frac{1000}{2t+1}$ và ban đầu bệnh nhân có 2000 con vi khuẩn. Sau 15 ngày bệnh nhân phát hiện ra bị bệnh. Hỏi khi đó có bao nhiêu con vi khuẩn trong dạ dày?

A. 5434 con.

B. 1500 con.

C. 283 con.

D. 3717 con.

Lời giải. Tốc độ phát triển của vi khuẩn tại ngày thứ t là $F'(t) = \frac{1000}{2t+1}$. Suy ra số lượng vi khuẩn vào ngày thứ t được tính theo công thức

$$F(t) = \int F'(t) dt = \int \frac{1000}{2t+1} dt = 500 \ln|2t+1| + C.$$

Lúc ban đầu bệnh nhân có 2000 con vi khuẩn nên

$$F(0) = 2000 \Leftrightarrow 500 \ln|2.0+1| + C = 2000 \Leftrightarrow C = 2000 \longrightarrow F(t) = 500 \ln|2t+1| + 2000.$$

Số vi khuẩn sau 15 ngày là: $F(15) = 500 \ln|2.15+1| + 2000 = 3716,99$. **Chọn D.**

Câu 53. Một đám vi trùng ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t) = \frac{4000}{1+0,5t}$ và lúc đầu đám vi trùng có 250.000 con. Sau 10 ngày số lượng vi trùng là (lấy xấp xỉ hàng đơn vị):

A. 264.334 con. B. 257.167 con. C. 258.959 con. D. 253.584 con.

Lời giải. Ta có $N(t) = \int N'(t) dt = \int \frac{4000}{1+0,5t} dt = 8000 \cdot \ln(1+0,5t) + C.$

Tại thời điểm ban đầu ($t=0$) thì

$$N(0) = 8000 \cdot \ln 1 + C = 250000 \Leftrightarrow C = 250000 \longrightarrow N(t) = 8000 \cdot \ln(1+0,5t) + 250000.$$

Sau 10 ngày ($t=10$) thì $N(10) = 8000 \cdot \ln(1+0,5 \cdot 10) + 250000 = 264.334$ con. **Chọn A.**

Câu 54. Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S'(t) = 100r \cdot e^t$ (con/giờ) với r là tỷ lệ tăng trưởng đặc trưng của vi khuẩn. Ban đầu có 100 con vi khuẩn. Hỏi sau bao lâu số lượng vi khuẩn ban đầu sẽ tăng gấp đôi. Biết rằng số lượng vi khuẩn sau 5 giờ là 300 con.

A. 4 giờ 35 phút. B. 3 giờ 9 phút. C. 4 giờ 30 phút. D. 4 giờ 2 phút.

Lời giải. Sự tăng trưởng của vi khuẩn tại giờ thứ t là $S'(t) = 100r \cdot e^t$. Suy ra số lượng vi khuẩn vào giờ thứ t được tính theo công thức

$$S(t) = \int S'(t) dt = \int 100r \cdot e^t dt.$$

Số lượng vi khuẩn sau 5 giờ là 300 con nên ta có:

$$300 = \int_0^5 100r \cdot e^t dt \longleftrightarrow 100r \cdot e^5 - 100r = 300 \longrightarrow r = 0,020351.$$

Suy ra thời gian để số vi khuẩn tăng lên 200 con là: $200 = \int_0^t 100 \cdot 0,020351 \cdot e^t dt$

$$\longrightarrow 100 \cdot 0,020351 (e^t - 1) = 200 \longleftrightarrow t \simeq 4,597 \text{ giờ (4 giờ 35 phút). Chọn A.}$$

Câu 55. Người ta thay nước mới cho một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu là 280cm. Giả sử $h(t)$ là chiều cao (tính bằng cm) của mực nước bơm được tại thời điểm t giây, biết rằng tốc độ tăng của chiều cao mực nước tại giây thứ t là $h'(t) = \frac{1}{500} \sqrt[3]{t+3}$ và lúc đầu hồ bơi không có nước. Hỏi sau bao lâu thì nước bơm được $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi?

A. 3 giờ 34 giây. B. 2 giờ 34 giây. C. 3 giờ 38 giây. D. 2 giờ 38 giây.

Lời giải. Ta có $h(t) = \int h'(t) dt = \int \frac{1}{500} \sqrt[3]{t+3} dt = \frac{3}{2000} (t+3)^{\frac{4}{3}} + C.$

Lúc ban đầu (tại $t=0$) hồ bơi không chứa nước, nghĩa là

$$h(0) = 0 \longleftrightarrow \frac{3}{2000} (0+3)^{\frac{4}{3}} + C = 0 \longleftrightarrow C = -\frac{3^{\frac{7}{3}}}{2000}.$$

Suy ra mực nước bơm được tại thời điểm t giây là $h(t) = \frac{3}{2000} (t+3)^{\frac{4}{3}} - \frac{3^{\frac{7}{3}}}{2000}.$

Theo giả thiết, lượng nước bơm được bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi nên ta có:

$$h(t)=\frac{3}{4}.280\longleftrightarrow \frac{3}{2000}(t+3)^{\frac{4}{3}}-\frac{3^{\frac{7}{3}}}{2000}=210\longleftrightarrow (t+3)^{\frac{4}{3}}=140004,33\longleftrightarrow t=7234s.$$

Vậy sau khoảng thời gian 2 giờ 34 giây thì bơm được $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi. **Chọn B.**

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

1. Phương pháp đổi biến số

a) Phương pháp đổi biến số loại 1

Giả sử cần tính tích phân $I = \int_a^b f(x)dx$ ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Đặt $x = u(t)$ (với $u(t)$ là hàm có đạo hàm liên tục trên $[\alpha; \beta]$, $f[u(t)]$ xác định trên $[\alpha; \beta]$ và $u(\alpha) = a$, $u(\beta) = b$) và xác định α, β .

Bước 2. Thay vào, ta có $I = \int_\alpha^\beta f[u(t)].u'(t)dt = \int_\alpha^\beta g(t)dt = G(t)|_\alpha^\beta = G(\beta) - G(\alpha)$.

Một số dạng thường dùng phương pháp đổi biến số loại 1

Dấu hiệu	Cách chọn
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\begin{cases} x = a \sin t & t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ x = a \cos t & t \in [0; \pi] \end{cases}$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$\begin{cases} x = \frac{ a }{\sin t} & t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} \\ x = \frac{ a }{\cos t} & t \in [0; \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \end{cases}$
$x^2 + a^2$	$x = a \tan t \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

b) Phương pháp đổi biến số loại 2

Tương tự như nguyên hàm, ta có thể tính tích phân bằng phương pháp đổi biến số (ta gọi là loại 2) như sau:

Để tính tích phân $I = \int_a^b f(x)dx$ nếu $f(x) = g[u(x)].u'(x)$, ta có thể thực hiện phép đổi biến như sau:

Bước 1. Đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$.

Đổi cận
$$\begin{cases} x = a \Rightarrow t = u(a) \\ x = b \Rightarrow t = u(b) \end{cases}$$

Bước 2. Thay vào ta có $I = \int_{u(a)}^{u(b)} g(t)dt = G(t)\Big|_{u(a)}^{u(b)}$.

2. Phương pháp tích phân từng phần

Cho hai hàm số u và v liên tục trên $[a; b]$ và có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$.

Khi đó:
$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Một số tích phân các hàm số dễ phát hiện u và dv

Dạng 1	$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \ln[g(x)] dx$	Đặt $\begin{cases} u = \ln[g(x)] \\ dv = f(x) dx \end{cases}$
Dạng 2	$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \\ e^{ax} \end{bmatrix} dx$	Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \\ e^{ax} \end{bmatrix} dx \end{cases}$
Dạng 3	$\int_{\alpha}^{\beta} e^{ax} \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \end{bmatrix} dx$	Đặt $\begin{cases} u = \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \end{bmatrix} \\ dv = e^{ax} dx \end{cases}$

Ưu tiên đặt u theo quy tắc "**nhất log, nhì đa, tam lượng, tứ mũ**". Tức là trong hàm số dưới dấu tích phân hợp bởi 2 trong 4 hàm số trên thì ta đặt u theo thứ tự ưu tiên như trên, còn lại thì đặt là dv .

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM



Vấn đề 1.1. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ LOẠI 1



Câu 1. Cho tích phân $I = \int_0^{\sqrt{8}} \sqrt{16 - x^2} dx$ và $x = 4 \sin t$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $I = -16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt.$

B. $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt .$

C. $I = 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt.$

D. $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2t) dt .$

Lời giải. Với $x = 4 \sin t$, suy ra $\begin{cases} dx = 4 \cos t dt \\ \sqrt{16 - x^2} = \sqrt{16 - 16 \sin^2 t} = \sqrt{16 \cos^2 t} = 4 |\cos t| \end{cases}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = \sqrt{8} \rightarrow t = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Khi đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 16 |\cos t| \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 16 \cos^2 t dt = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt$. **Chọn B.**

Câu 2. Cho tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$ và $x = 2 \sin t$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt .$

B. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} t dt .$

C. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{t} .$

D. $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} dt .$

Lời giải. Với $x = 2 \sin t$, suy ra $\begin{cases} dx = 2 \cos t dt \\ \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} = 2 \sqrt{\cos^2 t} = 2 |\cos t| \end{cases}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{6} \end{cases}$. Vậy $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2 \cos t}{2 |\cos t|} dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2 \cos t}{2 \cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt$. **Chọn A.**

Câu 3. Biến đổi tích phân $I = \int_{-1}^2 \sqrt{5+4x-x^2} dx$ thành tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt$ với cách đặt $x = 2 - 3 \sin t$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f(t) = 9 \sin^2 t$.

B. $f(t) = -9 \cos^2 t$.

C. $f(t) = \frac{9}{2}(1 + \cos 2t)$.

D. $f(t) = \frac{9}{2}(1 - \cos 2t)$.

Lời giải. Tích phân viết lại $I = \int_{-1}^2 \sqrt{5+4x-x^2} dx = \int_{-1}^2 \sqrt{3^2 - (2-x)^2} dx$.

Với $x = 2 - 3 \sin t \longrightarrow \begin{cases} 2-x = 3 \sin t \\ dx = -3 \cos t dt \end{cases}$. Đổi cận: $\begin{cases} x = -1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = 2 \rightarrow t = 0 \end{cases}$.

Khi đó $I = -3 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{9 - 9 \sin^2 t} \cdot \cos t dt = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9 \cos^2 t} \cdot \cos t dt = 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cdot \cos t dt$.

$= 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{9}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt$. **Chọn C.**

Câu 4. Cho tích phân $I = \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{1}{x^2 + 3} dx$ và $x = \sqrt{3} \tan t$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $I = \sqrt{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dt$.

B. $I = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{t}$.

C. $I = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} t dt$.

D. $I = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dt$.

Lời giải. Với $x = \sqrt{3} \tan t$, suy ra $dx = \sqrt{3}(1 + \tan^2 t) dt$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = \sqrt{3} \rightarrow t = \frac{\pi}{4} \\ x = 3 \rightarrow t = \frac{\pi}{3} \end{cases}$. Khi đó $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}(1 + \tan^2 t) dt}{3 \tan^2 t + 3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dt$. **Chọn D.**

Câu 5. Cho tích phân $I = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^3} dx$ và $x = \frac{1}{\sin t}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt$.

B. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$.

C. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt$.

D. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt$.

Lời giải. Với $x = \frac{1}{\sin t}$, suy ra $\begin{cases} dx = -\frac{\cos t}{\sin^2 t} dt \\ \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1} = \sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} = \frac{|\cos t|}{|\sin t|} \end{cases}$

Đổi cận: $\begin{cases} x = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = \sqrt{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{4} \end{cases}$. Khi đó $I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{|\cos t|}{|\sin t|}}{\frac{1}{\sin^3 t}} \cdot \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{|\cos t|}{|\sin t|}}{\frac{1}{\sin^3 t}} \cdot \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt. \text{ Chọn B.}$$

Vấn đề 1.2. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ LOẠI 2

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(1-x) dx.$ B. $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$
 C. $\int_0^\pi f(\sin x) dx = - \int_0^\pi f(\cos x) dx.$ D. $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx.$

Lời giải. Chọn A. Đặt $x = 1 - t \Rightarrow dx = -dt$. Đổi cận $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \end{cases}$.

$$\text{Suy ra } \int_0^1 f(x) dx = - \int_1^0 f(1-t) dt = \int_0^1 f(1-t) dt = \int_0^1 f(1-x) dx.$$

B, C, D sai. Ta có thể chọn hàm $f(x) = x$ để kiểm tra.

Câu 7. Hàm số $f(x)$ có nguyên hàm trên $(a; b)$ đồng thời thỏa mãn $f(a) = f(b)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\int_a^b f'(x) e^{f(x)} dx = 0.$ B. $\int_a^b f'(x) e^{f(x)} dx = 1.$
 C. $\int_a^b f'(x) e^{f(x)} dx = -1.$ D. $\int_a^b f'(x) e^{f(x)} dx = 2.$

Lời giải. Đặt $t = f(x)$, suy ra $dt = f'(x) dx$. Đổi cận $\begin{cases} x = a \rightarrow t = f(a) \\ x = b \rightarrow t = f(b) \end{cases}$.

$$\text{Khi đó } \int_a^b f'(x) e^{f(x)} dx = \int_{f(a)}^{f(b)} e^t dt = e^{f(b)} - e^{f(a)} = 0 \text{ (do } f(a) = f(b)). \text{ Chọn A.}$$

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$. Xét các mệnh đề sau:

- 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f(\sin x) dx = 2 \int_0^1 x \cdot f(x) dx.$
 2) $\int_0^1 \frac{f(e^x)}{e^x} dx = \int_1^e \frac{f(x)}{x^2} dx.$
 3) $\int_0^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x f(x) dx.$

Có bao nhiêu mệnh đề đúng?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Lời giải. Xét 1) Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(\sin x) \cdot \cos x dx.$

Đặt $t = \sin x$, suy ra $dt = \cos x dx$. Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 1 \end{cases}$.

Khi đó $2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(\sin x) \cdot \cos x dx = 2 \int_0^1 t \cdot f(t) dt = 2 \int_0^1 x \cdot f(x) dx$. Do đó 1) đúng.

Xét 2) Đặt $t = e^x$ và kết luận được 2) đúng.

Xét 3) Đặt $t = x^2$ và kết luận được 3) đúng.

Vậy cả 3 mệnh đề đều đúng. **Chọn C.**

Câu 9. Cho tích phân $I = \int_{-a}^a f(x) dx$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $I = \int_0^a [f(x) - f(-x)] dx.$

B. $I = \int_0^a [f(x-a) - f(a-x)] dx.$

C. $I = \int_0^a [f(x) - f(a-x)] dx.$

D. $I = \int_0^a [f(x-a) + f(x)] dx.$

Lời giải. Ta có $I = \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$

Xét $J = \int_{-a}^0 f(x) dx$. Đặt $x = t - a \longrightarrow dx = dt$. Đổi cận $\begin{cases} x = -a \rightarrow t = 0 \\ x = 0 \rightarrow t = a \end{cases}$.

Khi đó $J = \int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(t-a) dt = \int_0^a f(x-a) dx.$

Vậy $I = J + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(x-a) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a [f(x-a) + f(x)] dx$. **Chọn D.**

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và thỏa $f(a+b-x) = f(x) \forall x \in [a; b]$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int_a^b xf(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_a^b f(x) dx.$

B. $\int_a^b xf(x) dx = \frac{b+a}{2} \int_a^b f(x) dx.$

C. $\int_a^b xf(x) dx = (b-a) \int_a^b f(x) dx.$

D. $\int_a^b xf(x) dx = (b+a) \int_a^b f(x) dx.$

Lời giải. Đặt $x = a + b - t$, suy ra $dx = -dt$. Đổi cận $\begin{cases} x = a \rightarrow t = b \\ x = b \rightarrow t = a \end{cases}$.

Khi đó $\int_a^b xf(x) dx = - \int_b^a (a+b-t) f(a+b-t) dt = \int_a^b (a+b-t) f(a+b-t) dt$

$$= \int_a^b (a+b-x) f(a+b-x) dx \stackrel{f(a+b-x)=f(x)}{=} (a+b) \int_a^b f(x) dx - \int_a^b xf(x) dx.$$

Suy ra $2 \int_a^b xf(x) dx = (a+b) \int_a^b f(x) dx \longrightarrow \int_a^b xf(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$. **Chọn B.**

Câu 11. Cho $f(x)$ là hàm số lẻ và liên tục trên $[-a; a]$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$

B. $\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$

C. $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^0 f(x) dx.$

D. $\int_{-a}^a f(x) dx = -2 \int_0^a f(x) dx.$

Lời giải. Ta có $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$

Xét tích phân $\int_{-a}^0 f(x) dx$. Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$. Đổi cận $\begin{cases} x = -a \Rightarrow t = a \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$.

Do $f(x)$ là hàm số lẻ và liên tục trên $[-a; a]$ nên $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(-t) = -f(t)$.

Khi đó $\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_a^0 f(-t)dt = -\int_a^0 [-f(t)]dt = \int_a^0 f(t)dt = -\int_0^a f(t)dt = -\int_0^a f(x)dx$.

Vậy $\int_{-a}^a f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 0$. **Chọn B.**

Câu 12. Cho $f(x)$ là hàm số lẻ và $\int_{-2}^0 f(x)dx = 2$. Tính tích phân $I = \int_0^2 f(x)dx$.

- A. $I = 2$. B. $I = -2$. C. $I = 1$. D. $I = -1$.

Lời giải. Áp dụng kết quả câu trên, ta có "Nếu $f(x)$ là hàm số lẻ và liên tục trên đoạn $[-a; a]$ thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ ".

Thay $a = 2$ ta được $0 = \int_{-2}^2 f(x)dx = \int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx$
 $\longrightarrow \int_0^2 f(x)dx = -\int_{-2}^0 f(x)dx = -2$. **Chọn B.**

Câu 13. Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 x^{2017} \sqrt{x^2 + 2017} dx$.

- A. $I = 0$. B. $I = 2$. C. $I = -2$. D. $I = \frac{1}{3}$.

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = x^{2017} \sqrt{x^2 + 2017}$ là hàm số lẻ, liên tục trên đoạn $[-1; 1]$.

Vậy $I = \int_{-1}^1 x^{2017} \sqrt{x^2 + 2017} dx = 0$. **Chọn A.**

Câu 14. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $[-a; a]$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$. B. $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_{-a}^0 f(x)dx$.
 C. $\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$. D. $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

Lời giải. Ta có $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = A + B$.

Xét $A = \int_{-a}^0 f(x)dx$. Đặt $x = -t$, suy ra $dx = -dt$. Đổi cận $\begin{cases} x = -a \rightarrow t = a \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \end{cases}$.

Khi đó $A = -\int_a^0 f(-t)dt = \int_0^a f(-t)dt = \int_0^a f(-x)dx \stackrel{f(x) \text{ chẵn}}{=} \int_0^a f(x)dx = B$.

Vậy A, B, C đúng; D sai. **Chọn D.**

Câu 15. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn và thỏa mãn $\int_{-1}^0 f(x)dx = 3$. Tính $I = \int_{-1}^1 f(x)dx$.

- A. $I = 3$. B. $I = 2$. C. $I = 6$. D. $I = -3$.

Lời giải. Áp dụng kết quả câu trên, ta có $\int_{-1}^1 f(x)dx = 2 \int_{-1}^0 f(x)dx = 2.3 = 6$. **Chọn C.**

Câu 16. Biết rằng $I = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx = \ln a$ với a là số thực dương. Tìm a .

- A. $a = 2$. B. $a = \frac{1}{2}$. C. $a = \sqrt{2}$. D. $a = 4$.

Lời giải. Đặt $t = x^2 + 1$, suy ra $dt = 2xdx \longrightarrow xdx = \frac{dt}{2}$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 1 \\ x = 1 \rightarrow t = 2 \end{cases}$.

Khi đó $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2} \longrightarrow a = \sqrt{2}$. **Chọn C.**

Câu 17. Cho tích phân $I = \int_0^1 \frac{4x^3}{(x^4 + 2)^2} dx$ và $t = x^4 + 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $I = 4 \int_2^3 \frac{dt}{t^2}$. B. $I = 4 \int_0^1 \frac{dt}{t^2}$. C. $I = \int_2^3 \frac{dt}{t^2}$. D. $I = \int_0^1 \frac{dt}{t^2}$.

Lời giải. Với $t = x^4 + 2$, suy ra $dt = 4x^3 dx$. Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 2 \\ x = 1 \rightarrow t = 3 \end{cases}$.

Khi đó $I = \int_2^3 \frac{dt}{t^2}$. **Chọn C.**

Câu 18. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{(x+2)^{2017}}{x^{2019}} dx$.

- A. $I = \frac{3^{2018} - 2^{2018}}{2018}$. B. $I = \frac{3^{2018} - 2^{2018}}{4036}$.
C. $I = \frac{3^{2017}}{4034} - \frac{2^{2018}}{2017}$. D. $I = \frac{3^{2021} - 2^{2021}}{4040}$.

Lời giải. Ta có $I = \int_1^2 \left(\frac{x+2}{x} \right)^{2017} \cdot \frac{1}{x^2} dx$.

Đặt $t = \frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x}$, suy ra $dt = -\frac{2}{x^2} dx \longrightarrow \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{2} dt$. Đổi cận $\begin{cases} x = 1 \rightarrow t = 3 \\ x = 2 \rightarrow t = 2 \end{cases}$.

Khi đó $I = -\frac{1}{2} \int_3^2 t^{2017} dt = \frac{1}{2} \int_2^3 t^{2017} dt = \frac{t^{2018}}{4036} \Big|_2^3 = \frac{3^{2018} - 2^{2018}}{4036}$. **Chọn B.**

Câu 19. Tính tích phân $I = \int_{-2}^2 \frac{x^{2016}}{e^x + 1} dx$.

- A. $I = 0$. B. $I = \frac{2^{2018}}{2017}$. C. $I = \frac{2^{2017}}{2017}$. D. $I = \frac{2^{2018}}{2018}$.

Lời giải. Ta có $I = \int_{-2}^2 \frac{x^{2016}}{e^x + 1} dx = \int_{-2}^0 \frac{x^{2016}}{e^x + 1} dx + \int_0^2 \frac{x^{2016}}{e^x + 1} dx = A + B$.

Tính $A = \int_{-2}^0 \frac{x^{2016}}{e^x + 1} dx$. Đặt $x = -t$, suy ra $dx = -dt$. Đổi cận $\begin{cases} x = -2 \rightarrow t = 2 \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \end{cases}$.

Khi đó $A = -\int_2^0 \frac{(-t)^{2016}}{e^{-t} + 1} dt = \int_0^2 \frac{t^{2016} \cdot e^t}{e^t + 1} dt = \int_0^2 \frac{x^{2016} \cdot e^x}{e^x + 1} dx$.

Vậy $I = A + B = \int_0^2 \frac{x^{2016} \cdot e^x}{e^x + 1} dx + \int_0^2 \frac{x^{2016}}{e^x + 1} dx = \int_0^2 \frac{x^{2016} \cdot (e^x + 1)}{e^x + 1} dx = \int_0^2 x^{2016} dx$
 $= \frac{x^{2017}}{2017} \Big|_0^2 = \frac{2^{2017}}{2017}$. **Chọn C.**

Câu 20. Tính tích phân $I = \int_0^1 (1 - x^2)^n x dx$ với n nguyên dương.

- A. $I = \frac{1}{2n+2}$. B. $I = \frac{1}{2n+1}$. C. $I = \frac{1}{2n}$. D. $I = \frac{1}{2n-1}$.

Lời giải. Đặt $t = 1 - x^2$, suy ra $dt = -2xdx \longrightarrow xdx = -\frac{1}{2} dt$. Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 1 \\ x = 1 \rightarrow t = 0 \end{cases}$.

Khi đó $I = -\frac{1}{2} \int_1^0 t^n dt = \frac{1}{2} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{2(n+1)}$. **Chọn A.**

Câu 21. Kết quả tích phân $I = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx$ được viết ở dạng $I = \frac{a\sqrt{a}-1}{b}$ với a, b là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $T = a + 2b$.

- A. $T = 1$. B. $T = 7$. C. $T = 5$. D. $T = 8$.

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow t^2 = 1+x^2$, suy ra $tdt = xdx$. Đổi cận $\begin{cases} x=0 \rightarrow t=1 \\ x=1 \rightarrow t=\sqrt{2} \end{cases}$.

Khi đó $I = \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3} \longrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \longrightarrow T = a + 2b = 8$. **Chọn D.**

Câu 22. Cho tích phân $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1} dx$ và $u = x^2 - 1$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $I = \int_0^3 \sqrt{u} du$. B. $I = \int_1^2 \sqrt{u} du$. C. $I = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3$. D. $I = 2\sqrt{3}$.

Lời giải. Với $u = x^2 - 1$, suy ra $du = 2xdx$. Đổi cận $\begin{cases} x=1 \rightarrow u=0 \\ x=2 \rightarrow u=3 \end{cases}$.

Suy ra $I = \int_0^3 \sqrt{u} du = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1} dx$. Do đó B sai. **Chọn B.**

Câu 23. Tính tích phân $I = \int_0^a \frac{x^3+x}{\sqrt{x^2+1}} dx$.

- A. $I = (a^2+1)\sqrt{a^2+1} - 1$. B. $I = (a^2+1)\sqrt{a^2+1} + 1$.
C. $I = \frac{1}{3}[(a^2+1)\sqrt{a^2+1} + 1]$. D. $I = \frac{1}{3}[(a^2+1)\sqrt{a^2+1} - 1]$.

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1$, suy ra $tdt = xdx$. Đổi cận $\begin{cases} x=0 \rightarrow t=1 \\ x=a \rightarrow t=\sqrt{a^2+1} \end{cases}$.

Khi đó $I = \int_1^{\sqrt{a^2+1}} \frac{x^3+x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_1^{\sqrt{a^2+1}} \frac{(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} xdx = \int_1^{\sqrt{a^2+1}} t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_1^{\sqrt{a^2+1}} = \frac{1}{3}[(a^2+1)\sqrt{a^2+1} - 1]$.

Chọn D.

Câu 24. Tính tích phân $I = \int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1} dx$.

- A. $I = \frac{16}{9}$. B. $I = -\frac{16}{9}$. C. $I = \frac{52}{9}$. D. $I = -\frac{52}{9}$.

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{x^3+1} \Rightarrow t^2 = x^3+1$, suy ra $2tdt = 3x^2 dx \longrightarrow \frac{2}{3} tdt = x^2 dx$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \rightarrow t=1 \\ x=2 \rightarrow t=3 \end{cases}$. Vậy $I = \frac{2}{3} \int_1^3 t^2 dt = \frac{2t^3}{9} \Big|_1^3 = \frac{52}{9}$. **Chọn C.**

Câu 25. Biến đổi tích phân $\int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{1+x}} dx$ thành tích phân $\int_1^2 f(t) dt$ với $t = \sqrt{1+x}$.

Khi đó $f(t)$ là hàm số nào trong các hàm số sau?

- A. $f(t) = 2t^2 - 2t$. B. $f(t) = t^2 + t$. C. $f(t) = t^2 - t$. D. $f(t) = 2t^2 + 2t$.

Lời giải. Với $t = \sqrt{1+x} \Rightarrow t^2 = 1+x$, suy ra $2tdt = dx$. Đổi cận $\begin{cases} x=0 \rightarrow t=1 \\ x=3 \rightarrow t=2 \end{cases}$.

Khi đó $\int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{1+x}} dx = \int_1^2 \frac{t^2-1}{1+t} \cdot 2tdt = \int_1^2 (2t^2-2t)dt$. Vậy $f(t) = 2t^2 - 2t$. **Chọn A.**

Câu 26. Kết quả tích phân $I = \int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}} dx$ được viết ở dạng $I = a + b \ln 3 + c \ln 5$

với a, b, c là các số hữu tỷ. Tính tổng $S = a + b + c$.

A. $S = \frac{4}{3}$. B. $S = \frac{5}{3}$. C. $S = \frac{7}{3}$. D. $S = \frac{8}{3}$.

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{3x+1} \Rightarrow t^2 = 3x+1$, suy ra $2tdt = 3dx \longrightarrow dx = \frac{2}{3}tdt$.

Đổi cận $\begin{cases} x=1 \rightarrow t=2 \\ x=5 \rightarrow t=4 \end{cases}$.

Khi đó $I = \frac{2}{3} \int_2^4 \frac{t}{1+t} dt = \frac{2}{3} \int_2^4 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = \frac{2}{3} \left(t - \ln|1+t|\right) \Big|_2^4 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \ln 3 - \frac{2}{3} \ln 5$
 $\longrightarrow a = \frac{4}{3}, b = \frac{2}{3}, c = -\frac{2}{3} \longrightarrow S = \frac{4}{3}$. **Chọn A.**

Câu 27. Kết quả tích phân $I = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x}{x^2-1+\sqrt{x^2+1}} dx$ được viết ở dạng $I = a \ln 5 + b \ln 2$

với a, b là các số hữu tỷ. Tính tổng $S = a + b$.

A. $S = -\frac{2}{3}$. B. $S = -\frac{1}{3}$. C. $S = \frac{1}{3}$. D. $S = \frac{2}{3}$.

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1$, suy ra $\begin{cases} 2tdt = 2xdx \\ x^2 = t^2-1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} tdt = xdx \\ x^2 = t^2-1 \end{cases}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=\sqrt{3} \rightarrow t=2 \\ x=2\sqrt{2} \rightarrow t=3 \end{cases}$.

Khi đó $I = \int_2^3 \frac{t}{t^2-2+t} dt = \int_2^3 \frac{t}{(t-1)(t+2)} dt = \frac{1}{3} \int_2^3 \left[\frac{1}{t-1} + \frac{2}{t+2} \right] dt$
 $= \frac{1}{3} (\ln|t-1| + 2\ln|t+2|) \Big|_2^3 = \frac{2}{3} \ln 5 - \ln 2 \longrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -1 \end{cases} \longrightarrow S = -\frac{1}{3}$. **Chọn B.**

Câu 28. Cho tích phân $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$ và $t = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $I = -\int_{\sqrt{2}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{t^2 dt}{t^2-1}$. B. $I = \int_2^3 \frac{t^2 dt}{t^2+1}$. C. $I = \int_{\sqrt{2}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{t^2 dt}{t^2-1}$. D. $I = \int_2^3 \frac{t dt}{t^2+1}$.

Lời giải. Ta có $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx = \int_1^{\sqrt{3}} (x^2+1) \cdot \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$.

Với $t = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \Rightarrow \begin{cases} dt = -\frac{1}{x^2 \sqrt{x^2+1}} dx \\ t^2 = \frac{x^2+1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{t^2-1} \Rightarrow x^2+1 = \frac{t^2}{t^2-1} \end{cases}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2} \\ x=\sqrt{3} \Rightarrow t=\frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$. Suy ra $I = -\int_{\sqrt{2}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{t^2}{t^2-1} dt$. **Chọn A.**

Câu 29. Biết rằng $I = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}} = a \ln 2 + b \ln(\sqrt{2}-1) + c$ với a, b, c là các số hữu tỷ.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a = -\frac{1}{3}$. B. $b = \frac{2}{3}$. C. $c = -\frac{2}{3}$. D. $a + b + c = 0$.

Lời giải. Viết lại $I = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}} = \int_1^2 \frac{x^2 dx}{x^3 \sqrt{1+x^3}}$.

Đặt $t = \sqrt{1+x^3} \Rightarrow \begin{cases} t^2 = 1+x^3 \\ 2tdt = 3x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 = t^2 - 1 \\ x^2 dx = \frac{2}{3} t dt \end{cases}$. Đổi cận: $\begin{cases} x=1 \rightarrow t=\sqrt{2} \\ x=2 \rightarrow t=3 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } I &= \frac{2}{3} \int_{\sqrt{2}}^3 \frac{t dt}{(t^2-1)t} = \frac{1}{3} \int_{\sqrt{2}}^3 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right|_{\sqrt{2}}^3 = \frac{1}{3} \left(\ln \frac{1}{2} - \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) \\ &= -\frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \ln(3-2\sqrt{2}) = -\frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \ln(\sqrt{2}-1)^2 = -\frac{1}{3} \ln 2 - \frac{2}{3} \ln(\sqrt{2}-1). \end{aligned}$$

Suy ra $a = -\frac{1}{3}$; $b = -\frac{2}{3}$; $c = 0$. **Chọn A.**

Câu 30. Biết rằng $I = \int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}} = a \ln 3 + b \ln 5$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính tổng $S = a + b$.

- A. $S = 2$. B. $S = 3$. C. $S = -1$. D. $S = 1$.

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{3x+1} \Rightarrow t^2 = 3x+1$, suy ra $\begin{cases} x = \frac{t^2-1}{3} \\ dx = \frac{2}{3} t dt \end{cases}$. Đổi cận $\begin{cases} x=1 \rightarrow t=2 \\ x=5 \rightarrow t=4 \end{cases}$.

$$\text{Khi đó } I = \frac{2}{3} \int_2^4 \frac{1}{\frac{t^2-1}{3}} dt = 2 \int_2^4 \frac{dt}{t^2-1} = \int_2^4 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt$$

$$= (\ln|t-1| - \ln|t+1|) \Big|_2^4 = 2 \ln 3 - \ln 5 \longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases} \longrightarrow S = 1. \text{ **Chọn D.**}$$

Câu 31. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$.

- A. $I = 2$. B. $I = \frac{\ln^2 2}{2}$. C. $I = \ln 2$. D. $I = -\frac{\ln^2 2}{2}$.

Lời giải. Đặt $t = \ln x$, suy ra $dt = \frac{dx}{x}$. Đổi cận: $\begin{cases} x=1 \rightarrow t=0 \\ x=2 \rightarrow t=\ln 2 \end{cases}$.

$$\text{Khi đó } I = \int_0^{\ln 2} t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\ln 2} = \frac{\ln^2 2}{2}. \text{ **Chọn B.**}$$

Câu 32. Cho tích phân $I = \int_1^e \frac{1-\ln x}{x^2} dx$ và $u = \ln x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $I = \int_1^0 (1-u)e^u du$. B. $I = \int_0^1 (1-u)e^{-u} du$.
C. $I = \int_1^0 (1-u)e^{-2u} du$. D. $I = \int_1^0 (1-u)e^{2u} du$.

Lời giải. Với $u = \ln x$, suy ra $\begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ x = e^u \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} dx = x du = e^u du \\ x = e^u \end{cases}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=1 \rightarrow u=0 \\ x=e \rightarrow u=1 \end{cases}$. Khi đó $I = \int_0^1 \frac{1-u}{e^u} du = \int_0^1 (1-u)e^{-u} du$. **Chọn B.**

Câu 33. Cho $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}}{x} dx$ và $t = \sqrt{1+3\ln x}$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $I = \frac{2}{3} \int_1^2 t dt$. B. $I = \frac{2}{3} \int_1^2 t^2 dt$. C. $I = \frac{2}{9} t^3 \Big|_1^2$. D. $I = \frac{14}{9}$.

Lời giải. Với $t = \sqrt{1+3\ln x} \Rightarrow t^2 = 1+3\ln x$, suy ra $2t dt = \frac{3}{x} dx \longrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2}{3} t dt$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=1 \rightarrow t=1 \\ x=e \rightarrow t=2 \end{cases}$. Khi đó $I = \frac{2}{3} \int_1^2 t^2 dt = \frac{2}{9} t^3 \Big|_1^2 = \frac{14}{9}$. Do đó A sai. **Chọn A.**

Câu 34. Biến đổi tích phân $\int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx$ thành $\int_2^3 f(t) dt$ với $t = \ln x + 2$. Khi đó $f(t)$ là hàm nào trong các hàm số sau?

A. $f(t) = \frac{2}{t^2} - \frac{1}{t}$. B. $f(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t}$. C. $f(t) = \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t}$. D. $f(t) = -\frac{2}{t^2} + \frac{1}{t}$.

Lời giải. Với $t = \ln x + 2$, suy ra $\begin{cases} dt = \frac{dx}{x} \\ \ln x = t - 2 \end{cases}$. Đổi cận: $\begin{cases} x=1 \rightarrow t=2 \\ x=e \rightarrow t=3 \end{cases}$.

Khi đó $\int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx = \int_2^3 \frac{t-2}{t^2} dt = \int_2^3 \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} \right) dt$. **Chọn D.**

Câu 35. Kết quả của tích phân $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln^2 x + 1)} dx$ được viết ở dạng $I = a \ln 2 + b$ với a, b là những số hữu tỷ. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $2a + b = 1$. B. $a^2 + b^2 = 4$. C. $a - b = 1$. D. $ab = 2$.

Lời giải. Đặt $t = \ln^2 x + 1$, suy ra $dt = \frac{2 \ln x}{x} dx \longrightarrow \frac{\ln x}{x} dx = \frac{dt}{2}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=1 \rightarrow t=1 \\ x=e \rightarrow t=2 \end{cases}$.

Khi đó $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \ln 2 \longrightarrow a = \frac{1}{2}, b = 0$. **Chọn A.**

Câu 36. Tính tích phân $I = \int_0^1 x e^{x^2} dx$.

A. $I = \frac{e}{2}$. B. $I = \frac{e+1}{2}$. C. $I = \frac{e-1}{2}$. D. $I = e$.

Lời giải. Đặt $t = x^2$, suy ra $dt = 2x dx \longrightarrow x dx = \frac{1}{2} dt$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \rightarrow t=0 \\ x=1 \rightarrow t=1 \end{cases}$. Khi đó $I = \frac{1}{2} \int_0^1 e^t dt = \frac{1}{2} \cdot e^t \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}$. **Chọn C.**

Câu 37. Cho tích phân $I = \int_0^{\ln 2} e^x \sqrt{e^x - 1} dx$ và $t = \sqrt{e^x - 1}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $I = 2 \int_0^1 t^2 dt$. B. $I = \int_0^1 t^2 dt$. C. $I = \frac{2t^3}{3} \Big|_0^1$. D. $I = \frac{2}{3}$.

Lời giải. Với $t = \sqrt{e^x - 1} \Rightarrow t^2 = e^x - 1$, suy ra $2t dt = e^x dx$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = \ln 2 \rightarrow t = 1 \end{cases}$. Khi đó $I = 2 \int_0^1 t^2 dt = \frac{2t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$. Do đó B sai. **Chọn B.**

Câu 38. Tìm a , biết $I = \int_{-1}^2 \frac{e^x dx}{2 + e^x} = \ln \frac{ae + e^3}{ae + b}$ với a, b là các số nguyên dương.

A. $a = \frac{1}{3}$.

B. $a = -\frac{1}{3}$.

C. $a = 2$.

D. $a = -2$.

Lời giải. Đặt $t = e^x$, suy ra $dt = e^x dx$. Đổi cận: $\begin{cases} x = -1 \rightarrow t = \frac{1}{e} \\ x = 2 \rightarrow t = e^2 \end{cases}$.

Suy ra $I = \int_{\frac{1}{e}}^{e^2} \frac{dt}{2+t} = \ln |2+t| \Big|_{\frac{1}{e}}^{e^2} = \ln(2+e^2) - \ln\left(2+\frac{1}{e}\right) = \ln \frac{2+e^2}{2+\frac{1}{e}} = \ln \frac{2e+e^3}{2e+1}$.

$\longrightarrow a = 2; b = 1$. **Chọn C.**

Câu 39. Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \sin x \cos^3 x dx$ và $t = \sin^2 x$. Chọn khẳng định đúng?

A. $I = \frac{1}{2} \int_0^1 e^t (1-t) dt$.

B. $I = 2 \left[\int_0^1 e^t dt + \int_0^1 te^t dt \right]$.

C. $I = 2 \int_0^1 e^t (1-t) dt$.

D. $I = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 e^t dt + \int_0^1 te^t dt \right]$.

Lời giải. Viết lại $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \sin x \cos^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \cdot \cos^2 x \cdot \sin x \cos x dx$.

Với $t = \sin^2 x$, suy ra $dt = 2 \sin x \cos x dx \longrightarrow \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} dt$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 1 \end{cases}$. Khi đó $I = \frac{1}{2} \int_0^1 e^t (1-t) dt$. **Chọn A.**

Câu 40. Biến đổi tích phân $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$ thành $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt$ với $t = \sin^2 x$. Khi đó $f(t)$ là hàm nào trong các hàm số sau?

A. $f(t) = e^t \sin 2t$.

B. $f(t) = e^t$.

C. $f(t) = e^t \sin t$.

D. $f(t) = \frac{1}{2} e^t$.

Lời giải. Với $t = \sin^2 x$, suy ra $dt = 2 \sin x \cos x dx = \sin 2x dx$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \rightarrow t = \frac{1}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 1 \end{cases}$. Khi đó $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 e^t dt$. **Chọn B.**

Câu 41. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} \cos^3 x \sin x dx$.

A. $I = -\frac{1}{4} \pi^4$.

B. $I = -\pi^4$.

C. $I = 0$.

D. $I = -\frac{1}{4}$.

Lời giải. Đặt $t = \cos x$, suy ra $dt = -\sin x dx$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 1 \\ x = \pi \rightarrow t = -1 \end{cases}$.

Khi đó $I = -\int_1^{-1} t^3 dt = \int_{-1}^1 t^3 dt = \frac{t^4}{4} \Big|_{-1}^1 = 0$. **Chọn C.**

Câu 42. Thực hiện phép đổi biến $u = \sin x$ thì tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x dx$ sẽ trở thành tích phân nào trong các tích phân sau đây?

- B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^4 du$. A. $\int_0^1 u^4 \sqrt{1-u^2} du$. C. $\int_0^1 u^4 du$. D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^3 \sqrt{1-u^2} du$.

Lời giải. Với $u = \sin x$, suy ra $du = \cos x dx$. Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \rightarrow u = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow u = 1 \end{cases}$.

Khi đó $I = \int_0^1 u^4 du$. **Chọn C.**

Câu 43. Biết rằng $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n x \cos x dx = \frac{1}{64}$. Tìm n .

- A. $n = 3$. B. $n = 4$. C. $n = 6$. D. $n = 5$.

Lời giải. Đặt $t = \sin x$, suy ra $dt = \cos x dx$. Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{6} \rightarrow t = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Khi đó $I = \int_0^{\frac{1}{2}} t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{64} \Leftrightarrow n = 3$. **Chọn A.**

Cách trắc nghiệm. Thay lần lượt từng đáp án và bấm máy tính.

Câu 44. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x)^n \sin x dx$.

- A. $I = \frac{1}{n+1}$. B. $I = \frac{1}{n-1}$. C. $I = \frac{1}{2n}$. D. $I = \frac{1}{n}$.

Lời giải. Đặt $t = 1 - \cos x$, suy ra $dt = \sin x dx$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 1 \end{cases}$.

Khi đó $I = \int_0^1 t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$. **Chọn A.**

Câu 45. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x (1 + \sin^2 x)^3 dx$.

- A. $I = \frac{\pi^4}{64}$. B. $I = \frac{15}{4}$. C. $I = \frac{31}{4}$. D. $I = \frac{7}{4}$.

Lời giải. Đặt $t = 1 + \sin^2 x$, suy ra $dt = 2 \sin x \cos x dx = \sin 2x dx$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 1 \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 2 \end{cases}$. Khi đó $I = \int_1^2 t^3 dt = \frac{t^4}{4} \Big|_1^2 = \frac{15}{4}$. **Chọn B.**

Câu 46. Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos x}} dx$ và $t = \sqrt{1 + \cos x}$. Chọn khẳng định đúng?

- A. $I = \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{4t^3 - 4t}{t} dt$. B. $I = \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{4t - 4t^3}{t} dt$.

$$\text{C. } I = 4 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) dt.$$

$$\text{D. } I = -4 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) dt.$$

Lời giải. Tích phân viết lại $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos x}} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \cdot \sin x}{\sqrt{1 + \cos x}} dx.$

Với $t = \sqrt{1 + \cos x} \Rightarrow t^2 = 1 + \cos x$, suy ra $\begin{cases} \cos x = t^2 - 1 \\ 2t dt = -\sin x dx \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \cos x = t^2 - 1 \\ \sin x dx = -2t dt \end{cases}.$

Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = \sqrt{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 1 \end{cases}$. Khi đó $I = -2 \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{t^2 - 1}{t} (-2t dt) = -4 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) dt$. **Chọn D.**

Câu 47. Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{6 \tan x}{\cos^2 x \sqrt{3 \tan x + 1}} dx$ và $u = \sqrt{3 \tan x + 1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

$$\text{A. } I = \frac{4}{3} \int_1^2 (2u^2 + 1) du.$$

$$\text{B. } I = \frac{4}{3} \int_1^2 (u^2 + 1) du.$$

$$\text{C. } I = \frac{4}{3} \int_1^2 (u^2 - 1) du.$$

$$\text{D. } I = \frac{4}{3} \int_1^2 (2u^2 - 1) du.$$

Lời giải. Với $u = \sqrt{3 \tan x + 1} \Rightarrow u^2 = 3 \tan x + 1$, suy ra $\begin{cases} 6 \tan x = 2u^2 - 2 \\ \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{2}{3} u du \end{cases}.$

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \rightarrow u = 1 \\ x = \frac{\pi}{4} \rightarrow u = 2 \end{cases}$. Vậy $I = \frac{2}{3} \int_1^2 \frac{2u^2 - 2}{u} u du = \frac{4}{3} \int_1^2 (u^2 - 1) du$. **Chọn C.**

Câu 48. Cho số nguyên dương a thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{\cos 2x}{1 + 2 \sin 2x} dx = \ln \sqrt[4]{3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

$$\text{A. } a \in \left(\frac{1}{2}; 3 \right).$$

$$\text{B. } a \in \left(3; \frac{7}{2} \right).$$

$$\text{C. } a \in \left(\frac{7}{2}; \frac{9}{2} \right).$$

$$\text{D. } a \in \left(\frac{9}{2}; \frac{11}{2} \right).$$

Lời giải. Đặt $t = \sin 2x$, suy ra $dt = 2 \cos 2x dx \longrightarrow \cos 2x dx = \frac{1}{2} dt$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{a} \rightarrow t = \sin \frac{2\pi}{a} = m \end{cases}$. Khi đó $I = \frac{1}{2} \int_0^m \frac{dt}{2t + 1} = \frac{1}{4} \ln |2t + 1| \Big|_0^m = \frac{1}{4} \ln |2m + 1|$.

Theo giả thiết ta có $\frac{1}{4} \ln |2m + 1| = \ln \sqrt[4]{3} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \ln |2m + 1| = \frac{1}{4} \ln 3 \Leftrightarrow |2m + 1| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}.$

• Với $m = -2 \longrightarrow \sin \frac{2\pi}{a} = -2$ (loại).

• Với $m = 1 \longrightarrow \sin \frac{2\pi}{a} = 1 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{a} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow a = \frac{4}{1 + 4k} \xrightarrow[k \in \mathbb{Z}]{a \in \mathbb{Z}^+} \begin{cases} k = 0 \\ a = 4 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 49. Cho số nguyên dương n thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{(1 - \tan x)^5}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{6}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

$$\text{A. } n \in [1; 2].$$

$$\text{B. } n \in [3; 4].$$

$$\text{C. } n \in [5; 6].$$

$$\text{D. } n \in [7; 8].$$

Lời giải. Đặt $t = \tan x$, suy ra $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$. Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{n} \rightarrow t = \tan \frac{\pi}{n} = m \end{cases}$.

Khi đó $I = \int_0^m (1-t)^5 dt = -\frac{(1-t)^6}{6} \Big|_0^m = \frac{1-(1-m)^6}{6}$.

Theo giả thiết ta có $\frac{1-(1-m)^6}{6} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow m = 1$.

Với $m = 1 \longrightarrow \tan \frac{\pi}{n} = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow n = \frac{4}{1+4k} \xrightarrow[k \in \mathbb{Z}]{n \in \mathbb{Z}^+} \begin{cases} k = 0 \\ n = 4 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 50. Có bao nhiêu số thực a thuộc khoảng $(0; 20\pi)$ sao cho $\int_0^a \sin^5 x \sin 2x dx = \frac{2}{7}$.

A. 20.

B. 19.

C. 9.

D. 10.

Lời giải. Ta có $I = \int_0^a \sin^5 x \sin 2x dx = \int_0^a 2 \sin^6 x \cdot \cos x dx$.

Đặt $t = \sin x$, suy ra $dt = \cos x dx$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = a \rightarrow t = \sin a = m \end{cases}$.

Khi đó $I = \int_0^m 2t^6 dt = \frac{2}{7} t^7 \Big|_0^m = \frac{2m^7}{7}$.

Theo giả thiết ta có $\frac{2m^7}{7} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow m = 1$.

Với $m = 1 \longrightarrow \sin a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Vì $a \in (0; 20\pi)$ nên $0 < \frac{\pi}{2} + k2\pi < 20\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < 10 \xrightarrow[k \in \mathbb{Z}]{}$ $k \in \{0; 1; 2; 3; \dots; 9\}$

$\longrightarrow$ có 10 giá trị của $k \longrightarrow$ có 10 giá trị của a . **Chọn D.**

Câu 51. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[2; 4]$ và thỏa mãn $f(2) = 2$, $f(4) = 2018$. Tính $I = \int_1^2 f'(2x) dx$.

A. $I = -1008$.

B. $I = 2018$.

C. $I = 1008$.

D. $I = -2018$.

Lời giải. Đặt $t = 2x$, suy ra $dt = 2dx \longrightarrow dx = \frac{1}{2}dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 1 \rightarrow t = 2 \\ x = 2 \rightarrow t = 4 \end{cases}$.

Khi đó $I = \int_1^2 f'(2x) dx = \frac{1}{2} \int_2^4 f'(t) dt = \frac{1}{2} \cdot f(t) \Big|_2^4 = \frac{1}{2} \cdot [f(4) - f(2)] = \frac{1}{2} (2018 - 2) = 1008$.

Chọn C.

Câu 52. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho $\int_0^6 f(x) dx = 12$. Tính $I = \int_0^2 f(3x) dx$.

A. $I = 2$.

B. $I = 4$.

C. $I = 6$.

D. $I = 36$.

Lời giải. Đặt $t = 3x$, suy ra $dt = 3dx \longrightarrow dx = \frac{1}{3}dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = 2 \rightarrow t = 6 \end{cases}$.

Khi đó $I = \frac{1}{3} \int_0^6 f(t) dt = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$. **Chọn B.**

Tổng quát: Nếu $\int_a^b f(x) dx = k$ thì $\int_{\frac{a}{m}}^{\frac{b}{m}} f(mx) dx = \frac{k}{m}$.

Câu 53. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^{2017} f(x) dx = 1$. Tính $I = \int_0^1 f(2017x) dx$.

- A. $I = 2017$. B. $I = 0$. C. $I = 1$. D. $I = \frac{1}{2017}$.

Lời giải. Đặt $t = 2017x$, suy ra $dt = 2017dx \longrightarrow dx = \frac{dt}{2017}$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = 1 \rightarrow t = 2017 \end{cases}$

Khi đó $I = \frac{1}{2017} \cdot \int_0^{2017} f(t) dt = \frac{1}{2017} \int_0^{2017} f(x) dx = \frac{1}{2017} \cdot 1 = \frac{1}{2017}$. **Chọn D.**

Câu 54. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x) dx = 1$, $\int_1^9 f(x) dx = 2$. Tính giá

trị của biểu thức $I = \int_0^3 \left[f\left(\frac{x}{3}\right) + f(3x) \right] dx$.

- A. $I = 4$. B. $I = -4$. C. $I = 9$. D. $I = -9$.

Lời giải. Từ giả thiết ta có $\int_0^1 f(x) dx + \int_1^9 f(x) dx = \int_0^9 f(x) dx = 1 + 2 = 3$.

Ta có $I = \int_0^3 \left[f\left(\frac{x}{3}\right) + f(3x) \right] dx = \int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right) dx + \int_0^3 f(3x) dx$.

• Xét $\int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right) dx$. Đặt $t = \frac{x}{3}$, suy ra $dt = \frac{1}{3} dx \longrightarrow dx = 3dt$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = 3 \rightarrow t = 1 \end{cases}$. Khi đó $\int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right) dx = 3 \int_0^1 f(t) dt = 3 \int_0^1 f(x) dx = 3 \cdot 1 = 3$.

• Xét $\int_0^3 f(3x) dx$. Đặt $u = 3x$, suy ra $du = 3dx \longrightarrow dx = \frac{1}{3} du$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \rightarrow u = 0 \\ x = 3 \rightarrow u = 9 \end{cases}$. Khi đó $\int_0^3 f(3x) dx = \frac{1}{3} \int_0^9 f(u) du = \frac{1}{3} \int_0^9 f(x) dx = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$.

Vậy $I = 3 + 1 = 4$. **Chọn A.**

Câu 55. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 4$. Tính tích

phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(2x) - \sin x] dx$.

- A. $I = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $I = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $I = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $I = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải. Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(2x) - \sin x] dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$.

• Tính $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2x) dx$. Đặt $t = 2x$, suy ra $dt = 2dx \longrightarrow dx = \frac{dt}{2}$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{4} \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$. Khi đó $J = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$.

• Tính $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = -(\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $I = J - K = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. **Chọn C.**

Câu 56. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{-2}^4 f(x) dx = 2$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\int_{-1}^2 f(2x) dx = 1$.

B. $\int_{-3}^3 f(x+1) dx = 2$.

C. $\int_{-1}^2 f(2x) dx = 2$.

D. $\int_0^6 f(x-2) dx = 2$.

Lời giải. Xét tích phân $\int_{-1}^2 f(2x) dx$. Đặt $t = 2x$, suy ra $dt = 2dx \longrightarrow dx = \frac{1}{2} dt$.

Đổi cận $\begin{cases} x = -1 \rightarrow t = -2 \\ x = 2 \rightarrow t = 4 \end{cases}$. Khi đó $\int_{-1}^2 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^4 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-2}^4 f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

Suy ra A đúng, C sai. **Chọn C.**

B đúng vì $\int_{-3}^3 f(x+1) dx \xrightarrow{t=x+1} \int_{-2}^4 f(t) dt = 2$.

D đúng vì $\int_0^6 f(x-2) dx \xrightarrow{t=x-2} \int_{-2}^4 f(t) dt = 2$.

Câu 57. Cho $\int_1^{2017} f(x) dx = 2$. Tính tích phân $I = \int_1^{2017} f(2018-x) dx$.

A. $I = 1$.

B. $I = 2$.

C. $I = 3$.

D. $I = 5$.

Lời giải. Đặt $t = 2018 - x$, suy ra $dx = -dt$. Đổi cận $\begin{cases} x = 1 \rightarrow t = 2017 \\ x = 2017 \rightarrow t = 1 \end{cases}$.

Khi đó $I = - \int_{2017}^1 f(t) dt = \int_1^{2017} f(t) dt = \int_1^{2017} f(x) dx = 2$. **Chọn B.**

Câu 58. Cho $\int_1^3 f(3x-1) dx = 20$. Tính tích phân $I = \int_2^5 f(x) dx$.

A. $I = 20$.

B. $I = 40$.

C. $I = 10$.

D. $I = 60$.

Lời giải. Đặt $x = 3t - 1$, suy ra $dx = 3dt$. Đổi cận $\begin{cases} x = 2 \rightarrow t = 1 \\ x = 5 \rightarrow t = 2 \end{cases}$.

Khi đó $I = \int_2^5 f(x) dx = 3 \int_1^2 f(3t-1) dt = 3 \int_1^2 f(3x-1) dx = 3 \cdot 20 = 60$. **Chọn D.**

Câu 59. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{1}{3}} f(x) dx = 1$,

$\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} f(2x) dx = 13$. Tính tích phân $I = \int_0^1 x^2 f(x^3) dx$.

A. $I = 6$.

B. $I = 7$.

C. $I = 8$.

D. $I = 9$.

Lời giải. Xét $\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} f(2x) dx = 13$. Đặt $t = 2x$, suy ra $dt = 2dx \longrightarrow dx = \frac{1}{2} dt$.

Đổi cận $\begin{cases} x = \frac{1}{6} \rightarrow t = \frac{1}{3} \\ x = \frac{1}{2} \rightarrow t = 1 \end{cases}$. Khi đó $\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} f(2x)dx = 13 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{3}}^1 f(t)dt = 13 \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{3}}^1 f(t)dt = 26$.

Xét tích phân cần tính $I = \int_0^1 x^2 f(x^3)dx$.

Đặt $u = x^3$, suy ra $dt = 3x^2 dx \rightarrow x^2 dx = \frac{1}{3} dt$. Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \rightarrow u = 0 \\ x = 1 \rightarrow u = 1 \end{cases}$.

Khi đó $I = \frac{1}{3} \int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{3} \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3} \left[\int_0^{\frac{1}{3}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{3}}^1 f(x)dx \right] = \frac{1}{3}(1+26) = 9$. **Chọn D.**

Câu 60. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;9]$ và thỏa mãn $\int_0^9 f(x)dx = 729$, $\int_0^3 f(x+6)dx = 513$. Tính tích phân $I = \int_0^2 f(3x)dx$.

A. $I = 414$. B. $I = 72$. C. $I = 342$. D. $I = 216$.

Lời giải. Xét $\int_0^3 f(x+6)dx = 513$. Đặt $t = x+6$, suy ra $dx = dt$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 6 \\ x = 3 \rightarrow t = 9 \end{cases}$. Khi đó $\int_0^3 f(x+6)dx = 513 \Leftrightarrow \int_6^9 f(t)dt = 513$.

Xét tích phân cần tính $I = \int_0^2 f(3x)dx$.

Đặt $u = 3x$, suy ra $du = 3dx \rightarrow dx = \frac{1}{3} du$. Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \rightarrow u = 0 \\ x = 2 \rightarrow u = 6 \end{cases}$.

Khi đó $I = \frac{1}{3} \cdot \int_0^6 f(u)du = \frac{1}{3} \cdot \int_0^6 f(x)dx = \frac{1}{3} \left[\int_0^9 f(x)dx + \int_9^6 f(x)dx \right]$
 $= \frac{1}{3} \left[\int_0^9 f(x)dx - \int_6^9 f(x)dx \right] = \frac{1}{3}(729 - 513) = 72$. **Chọn B.**

Câu 61. Cho $\int_1^2 f(x)dx = a$. Tính tích phân $I = \int_0^1 xf(x^2+1)dx$.

A. $I = 2a$. B. $I = 4a$. C. $I = \frac{a}{2}$. D. $I = \frac{a}{4}$.

Lời giải. Đặt $t = x^2 + 1$, suy ra $dt = 2xdx \rightarrow xdx = \frac{1}{2} dt$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 1 \\ x = 1 \rightarrow t = 2 \end{cases}$. Khi đó $I = \frac{1}{2} \cdot \int_1^2 f(t)dt = \frac{1}{2} \cdot \int_1^2 f(x)dx = \frac{1}{2} \cdot a = \frac{a}{2}$. **Chọn C.**

Câu 62. Cho $\int_1^2 f(x)dx = 2016$. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \cdot f(\sqrt{3x+1})dx$.

A. $I = 2016$. B. $I = 1008$. C. $I = 1344$. D. $I = 3024$.

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{3x+1} \Rightarrow t^2 = 3x+1$, suy ra $2tdt = 3dx \rightarrow dx = \frac{2}{3} tdt$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 1 \\ x = 1 \rightarrow t = 2 \end{cases}$. Khi đó $I = \frac{2}{3} \cdot \int_1^2 f(t)dt = \frac{2}{3} \cdot \int_1^2 f(x)dx = \frac{2}{3} \cdot 2016 = 1344$. **Chọn C.**

Câu 63. Cho $\int_0^{2017} f(x)dx = 2$. Tính tích phân $I = \int_0^{\sqrt{e^{2017}-1}} \frac{x}{x^2+1} \cdot f[\ln(x^2+1)]dx$.

- A. $I = 1$. B. $I = 2$. C. $I = 4$. D. $I = 5$.

Lời giải. Đặt $t = \ln(x^2+1)$, suy ra $dt = \frac{2xdx}{x^2+1} \longrightarrow \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{dt}{2}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \rightarrow t=0 \\ x=\sqrt{e^{2017}-1} \rightarrow t=2017 \end{cases}$.

Khi đó $I = \frac{1}{2} \int_0^{2017} f(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^{2017} f(x)dx = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$. **Chọn A.**

Câu 64. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = e$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\int_0^1 (x)dx = 1$. B. $\int_0^1 (x)dx = e$. C. $\int_0^e (x)dx = 1$. D. $\int_0^e (x)dx = e$.

Lời giải. Đặt $t = \ln x$, suy ra $dt = \frac{dx}{x}$. Đổi cận: $\begin{cases} x=1 \rightarrow t=0 \\ x=e \rightarrow t=1 \end{cases}$.

Khi đó $e = \int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f(x)dx$. **Chọn B.**

Câu 65. Cho $\int_0^1 f(x)dx = 2017$. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x) \cos 2x dx$.

- A. $I = \frac{2}{2017}$. B. $I = \frac{2017}{2}$. C. $I = 2017$. D. $I = -\frac{2017}{2}$.

Lời giải. Đặt $t = \sin 2x$, suy ra $dt = 2 \cos 2x dx \longrightarrow \cos 2x dx = \frac{1}{2} dt$.

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \rightarrow t=0 \\ x=\frac{\pi}{4} \rightarrow t=1 \end{cases}$. Khi đó $I = \int_0^1 f(t) \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} \cdot 2017 = \frac{2017}{2}$. **Chọn B.**

Câu 66. Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x) dx = 2017$. Tính tích phân $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(\cos x) dx$.

- A. $J = \frac{2017}{2}$. B. $J = -2017$. C. $J = 2017$. D. $J = -\frac{2017}{2}$.

Lời giải. Đặt $t = \cos x$, suy ra $dt = -\sin x dx \longrightarrow \sin x dx = -dt$.

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \rightarrow t=1 \\ x=\frac{\pi}{2} \rightarrow t=0 \end{cases}$. Khi đó $J = -\int_1^0 f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt$.

Tiếp tục ta đặt $t = \sin u$, suy ra $dt = \cos u du$. Đổi cận $\begin{cases} t=0 \rightarrow u=0 \\ t=1 \rightarrow u=\frac{\pi}{2} \end{cases}$.

Khi đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin u) \cos u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x) dx = 2017$. **Chọn C.**

Câu 67. Cho $\int_0^1 f(x)dx = 2017$. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{f(\tan 2x)}{1+\cos 4x} dx$.

- A. $I = 2017$. B. $I = \frac{2017}{2}$. C. $I = \frac{2017}{4}$. D. $I = \frac{2017}{8}$.

Lời giải. Viết lại $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{f(\tan 2x)}{1 + \cos 4x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{f(\tan 2x)}{2 \cos^2 2x} dx$.

Đặt $t = \tan 2x$, suy ra $dt = \frac{2}{\cos^2 2x} dx \longrightarrow dx = \frac{dt}{2 \cos^2 2x} = \frac{1}{4} dt$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{8} \rightarrow t = 1 \end{cases}$. Khi đó $I = \frac{1}{4} \cdot \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{4} \cdot \int_0^1 f(x) dx = \frac{2017}{4}$. **Chọn C.**

Câu 68. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = 3$, $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(2x) dx = 10$. Tính

tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x) dx$.

A. $I = 23$.

B. $I = 10$.

C. $I = 8$.

D. $I = 7$.

Lời giải. ● Xét tích phân $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(2x) dx = 10$.

Đặt $t = 2x$, suy ra $dt = 2dx \longrightarrow dx = \frac{1}{2} dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x = \frac{1}{4} \rightarrow t = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \rightarrow t = 1 \end{cases}$.

Khi đó $10 = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt \longrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt = 20$ hay $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = 20$.

● Xét tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x) dx$.

Đặt $u = \sin x$, suy ra $du = \cos x dx$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \rightarrow u = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow u = 1 \end{cases}$.

Khi đó $I = \int_0^1 f(u) du = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = 3 + 20 = 23$. **Chọn A.**

Câu 69. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4$, $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$.

Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = 6$.

B. $I = 2$.

C. $I = 3$.

D. $I = 1$.

Lời giải. Xét $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4$.

Đặt $t = \tan x$, suy ra $dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx = (\tan^2 x + 1) dx \longrightarrow dx = \frac{dt}{1 + t^2}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{4} \rightarrow t = 1 \end{cases}$. Khi đó $4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = \int_0^1 \frac{f(t)}{t^2 + 1} dt = \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2 + 1} dx$.

Từ đó suy ra $I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1} dx = 4 + 2 = 6$. **Chọn A.**

Câu 70. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = 1$,

$\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = 1$. Tính tích phân $I = \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx$.

A. $I = 1$.

B. $I = 2$.

C. $I = 3$.

D. $I = 4$.

Lời giải. • Xét $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = 1$. Đặt $t = \cos^2 x$.

Suy ra $dt = -2 \sin x \cos x dx = -2 \cos^2 x \tan x dx = -2t \cdot \tan x dx \longrightarrow \tan x dx = -\frac{dt}{2t}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \longrightarrow t = 1 \\ x = \frac{\pi}{4} \longrightarrow t = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Khi đó $1 = A = -\frac{1}{2} \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{t} dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{x} dx \longrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{x} dx = 2$.

• Xét $B = \int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = 1$. Đặt $u = \ln^2 x$.

Suy ra $du = \frac{2 \ln x}{x} dx = \frac{2 \ln^2 x}{x \ln x} dx = \frac{2u}{x \ln x} dx \longrightarrow \frac{dx}{x \ln x} = \frac{du}{2u}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = e \longrightarrow u = 1 \\ x = e^2 \longrightarrow u = 4 \end{cases}$.

Khi đó $1 = B = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{f(u)}{u} du = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{f(x)}{x} dx \longrightarrow \int_1^4 \frac{f(x)}{x} dx = 2$.

• Xét tích phân cần tính $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx$.

Đặt $v = 2x$, suy ra $\begin{cases} dx = \frac{1}{2} dv \\ x = \frac{v}{2} \end{cases}$. Đổi cận: $\begin{cases} x = \frac{1}{4} \longrightarrow v = \frac{1}{2} \\ x = 2 \longrightarrow v = 4 \end{cases}$.

Khi đó $I = \int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{f(v)}{v} dv = \int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{f(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{x} dx + \int_1^4 \frac{f(x)}{x} dx = 2 + 2 = 4$. **Chọn D.**

Câu 71. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 2$.

Tính tích phân $I = \int_0^3 f(x) dx$.

A. $I = 2$.

B. $I = 6$.

C. $I = 4$.

D. $I = 10$.

Lời giải. • Xét $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4$. Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x$, suy ra $2t dt = dx$.

Đổi cận $\begin{cases} x=1 \rightarrow t=1 \\ x=9 \rightarrow t=3 \end{cases}$. Suy ra $4 = \int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^3 f(t) 2dt \longrightarrow \int_1^3 f(t) dt = 2$.

● Xét $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 2$. Đặt $u = \sin x$, suy ra $du = \cos x dx$.

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \rightarrow u=0 \\ x=\frac{\pi}{2} \rightarrow u=1 \end{cases}$. Suy ra $2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = \int_0^1 f(t) dt$.

Vậy $I = \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 4$. **Chọn C.**

Câu 72. Ký hiệu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{e^x}{x}$ trên khoảng

$(0; +\infty)$. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{e^{3x}}{x} dx$.

A. $I = 3[F(2) - F(1)]$.

B. $I = F(6) - F(3)$.

C. $I = \frac{F(6) - F(3)}{3}$.

D. $I = 3[F(6) - F(3)]$.

Lời giải. Đặt $t = 3x$, suy ra $\begin{cases} dt = 3dx \\ x = \frac{t}{3} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} dx = \frac{1}{3} dt \\ x = \frac{t}{3} \end{cases}$. Đổi cận $\begin{cases} x=1 \leftrightarrow t=3 \\ x=2 \rightarrow t=6 \end{cases}$.

Khi đó $I = \int_{\frac{1}{3}}^2 \frac{e^t}{\frac{t}{3}} \cdot \frac{dt}{3} = \int_{\frac{1}{3}}^2 \frac{e^t}{t} dt = \int_{\frac{1}{3}}^2 \frac{e^x}{x} dx = F(x) \Big|_{\frac{1}{3}}^2 = F(6) - F(3)$. **Chọn B.**

Câu 73. Ký hiệu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\cos x}{2x}$ trên khoảng

$(0; +\infty)$. Tính tích phân $I = \int_1^4 \frac{\cos 2x}{x} dx$.

A. $I = 2.F(8) - F(2)$.

B. $I = 2.F(8) + F(2)$.

C. $I = 2.F(8) - 2.F(2)$.

D. $I = 2.F(8) + 2.F(2)$.

Lời giải. Đặt $t = 2x$, suy ra $\begin{cases} dt = 2dx \\ x = \frac{t}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} dx = \frac{1}{2} dt \\ x = \frac{t}{2} \end{cases}$. Đổi cận $\begin{cases} x=1 \rightarrow t=2 \\ x=4 \rightarrow t=8 \end{cases}$.

Khi đó $I = \int_2^4 \frac{\cos t}{\frac{t}{2}} \cdot \frac{dt}{2} = \int_2^4 \frac{\cos t}{t} dt = \int_2^4 \frac{\cos x}{x} dx = 2 \cdot \int_2^4 \frac{\cos x}{2x} dx = 2.F(x) \Big|_2^4 = 2F(8) - 2F(2)$.

Chọn C.

Câu 74. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2016) = a, f(2017) = b$

$(a, b \in \mathbb{R})$. Tính tích phân $I = 2015 \int_{2017}^{2016} f'(x) \cdot f^{2014}(x) dx$.

A. $I = b^{2017} - a^{2017}$.

B. $I = a^{2016} - b^{2016}$.

C. $I = a^{2015} - b^{2015}$.

D. $I = b^{2015} - a^{2015}$.

Lời giải. Đặt $t = f(x)$, suy ra $dt = f'(x) dx$. Đổi cận $\begin{cases} x=2016 \rightarrow t=f(2016)=a \\ x=2017 \rightarrow t=f(2017)=b \end{cases}$.

Khi đó $I = 2015 \cdot \int_b^a t^{2014} dt = t^{2015} \Big|_b^a = a^{2015} - b^{2015}$. **Chọn C.**

Câu 75. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 f(x) dx = 3$. Tính $I = \int_{-1}^1 f(|2x|) dx$.

A. $I = 0$. B. $I = \frac{3}{2}$. C. $I = 3$. D. $I = 6$.

Lời giải. Ta có $I = \int_{-1}^1 f(|2x|) dx = \int_{-1}^0 f(|2x|) dx + \int_0^1 f(|2x|) dx$.

Xét $\int_{-1}^0 f(|2x|) dx$. Đặt $x = -t$, suy ra $dx = -dt$. Đổi cận $\begin{cases} x = -1 \rightarrow t = 1 \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \end{cases}$.

Khi đó $\int_{-1}^0 f(|2x|) dx = -\int_1^0 f(|-2t|) dt = \int_0^1 f(|-2t|) dt = \int_0^1 f(|2t|) dt$.

Do đó $I = 2 \int_0^1 f(|2x|) dx = 2 \int_0^1 f(2x) dx$ (vì $2x \geq 0, \forall x \in [0; 1]$).

Bây giờ ta cần tính $I = 2 \int_0^1 f(2x) dx$. Đặt $u = 2x \rightarrow du = 2dx$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \rightarrow u = 0 \\ x = 1 \rightarrow u = 2 \end{cases}$. Khi đó $I = \int_0^2 f(u) du = \int_0^2 f(x) dx = 3$. **Chọn C.**



Vấn đề 2. PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN



Câu 76. Tính tích phân $I = \int_1^2 \ln x dx$.

A. $I = 2 \ln 2 + 1$. B. $I = \ln(4 - e)$. C. $I = \ln 4 - \log 10$. D. $I = \ln 4e$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}$.

Khi đó $I = x \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 dx = x \ln x \Big|_1^2 - x \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - 1 = \ln 4 - \log 10$. **Chọn C.**

Cách 2. CASIO Có 2 cách bấm, cụ thể như sau:

● Bấm trực tiếp tích phân $\int_1^2 \ln x dx$ và so sánh với các kết quả ở các đáp án.

● Thiết lập hiệu, ví dụ với đáp án A ta bấm $\int_1^2 \ln x dx - 2 \ln 2 - 1$. Nếu màn hình hiện số 0 thì đáp án đó đúng.

Câu 77. Kết quả của tích phân $I = \int_1^2 \ln(x+1) dx$ được viết ở dạng $I = a \ln 3 + b \ln 2 + c$

với a, b, c là các số nguyên. Tính $P = a + b + c$.

A. $P = 0$. B. $P = 1$. C. $P = 2$. D. $P = 3$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x+1} \\ v = x+1 \end{cases}$.

$$\text{Khi đó } I = (x+1) \cdot \ln(x+1) \Big|_1^2 - \int_1^2 dx = (x+1) \ln(x+1) \Big|_1^2 - x \Big|_1^2$$

$$= 3 \ln 3 - 2 \ln 2 - 1 \longrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases} \longrightarrow P = 0. \text{ Chọn A.}$$

Cách 2. CASIO Tính tích phân $I = \int_1^2 \ln(x+1) dx$ rồi lưu vào biến A.

$$\text{Khi đó } a \ln 3 + b \ln 2 + c = A \longleftrightarrow \ln(3^a \cdot 2^b \cdot e^c) = \ln e^A \longleftrightarrow 3^a \cdot 2^b \cdot e^c = e^A \leftrightarrow 3^a \cdot 2^b = \frac{e^A}{e^c}.$$

Để tính được $3^a \cdot 2^b$ ta sử dụng chức năng MODE 7 với hàm $f(X) = \frac{e^A}{e^c}$.

Với thiết lập Start -9, End 10, Step 1 (do a, b, c là các số nguyên).

$$\text{Để thấy với } X = c = -1 \text{ thì } 3^a \cdot 2^b = 6.75 = \frac{27}{4} = 3^3 \cdot 2^{-2} \longrightarrow a = 3; b = -2.$$

Câu 78. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Tính tích phân $I = \int_1^e x \ln x dx$.

$$\text{A. } I = \frac{1}{2}. \quad \text{B. } I = \frac{e^2 - 2}{2}. \quad \text{C. } I = \frac{e^2 + 1}{4}. \quad \text{D. } I = \frac{e^2 - 1}{4}.$$

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$

$$\text{Khi đó } I = \frac{x^2 \ln x}{2} \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 79. Kết quả của tích phân $I = \int_0^1 x \ln(2+x^2) dx$ được viết ở dạng $I = a \ln 3 + b \ln 2 + c$

với a, b, c là các số hữu tỉ. Tính tổng $S = a + b + c$.

$$\text{A. } S = 0. \quad \text{B. } S = 1. \quad \text{C. } S = \frac{3}{2}. \quad \text{D. } S = 2.$$

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = \ln(2+x^2) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x}{2+x^2} dx \\ v = \frac{x^2}{2} + 1 = \frac{2+x^2}{2} \end{cases}.$

$$\text{Khi đó } I = \frac{2+x^2}{2} \ln(2+x^2) \Big|_0^1 - \int_0^1 x dx = \frac{3}{2} \ln 3 - \ln 2 - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{3}{2} \ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

$$\text{Suy ra } a = \frac{3}{2}, b = -1, c = -\frac{1}{2} \longrightarrow S = a + b + c = 0. \text{ Chọn A.}$$

Nhận xét. Chắc có bạn đọc không hiểu tại sao chỗ $dv = x dx \longrightarrow v = \frac{x^2}{2} + 1$. Vì ta

thường làm $dv = x dx \longrightarrow v = \frac{x^2}{2}$. Sao lại cộng thêm 1 ở đây? Ta biết rằng các nguyên

hàm sai khác nhau hằng số nên ta cộng thêm hằng số là bao nhiêu cũng được. Vậy vấn đề là sao không cộng số khác mà là số 1. Ở đây số 1 được thêm vào để tạo ra lượng mà rút gọn được, cụ thể đó là lượng $2+x^2$.

Câu 80. Cho hai số nguyên dương a, b thỏa mãn $\int_4^5 (x+1) \ln(x-3) dx = 5 \ln a^a - \frac{19}{b}$.

Tính $S = a + b$.

A. $S = 4$.**B. $S = 6$.****C. $S = 8$.****D. $S = 0$.**

Lời giải. Tính $I = \int_4^5 (x+1)\ln(x-3)dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln(x-3) \\ dv = (x+1)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x-3}dx \\ v = \frac{x^2}{2} + x = \frac{x^2+2x}{2} \end{cases}$.

Khi đó $I = \left[\left(\frac{x^2}{2} + x \right) \cdot \ln(x-3) \right]_4^5 - \int_4^5 \frac{x^2+2x}{2(x-3)} dx = \frac{35\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \int_4^5 \frac{x^2+2x}{x-3} dx$.

Tính $J = \int_4^5 \frac{x^2+2x}{x-3} dx = \int_4^5 \left(x+5 + \frac{15}{x-3} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 5x + 15\ln|x-3| \right) \Big|_4^5 = \frac{19}{2} + 15\ln 2$.

Vậy $I = \frac{35\ln 2}{2} - \frac{1}{2}J = \frac{35\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{19}{2} + 15\ln 2 \right) = 10\ln 2 - \frac{19}{4} = 5\ln 2^2 - \frac{19}{4}$.

Suy ra $a = 2; b = 4 \longrightarrow S = a + b = 6$. **Chọn B.**

Câu 81. Kết quả của tích phân $I = \int_0^1 x \ln(2x+1)^{2017} dx$ được viết ở dạng $I = \frac{a}{b} \ln 3$ với phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính tổng $a+b$.

A. $a+b = 6057$.**B. $a+b = 6059$.****C. $a+b = 6058$.****D. $a+b = 6056$.**

Lời giải. Ta có $I = \int_0^1 x \ln(2x+1)^{2017} dx = 2017 \int_0^1 x \ln(2x+1) dx$.

Tính $J = \int_0^1 x \ln(2x+1) dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln(2x+1) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2}{2x+1} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$.

Khi đó $J = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(2x+1) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \ln 3 - \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2x+1} \right) dx$
 $= \frac{1}{2} \ln 3 - \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} \cdot \ln|2x+1| \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{8} \ln 3 = \frac{3}{8} \ln 3$.

Suy ra $I = 2017 \cdot J = \frac{6051}{8} \ln 3 \longrightarrow \begin{cases} a = 6051 \\ b = 8 \end{cases} \rightarrow a+b = 6059$. **Chọn B.**

Câu 82. Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $\int_1^2 x^2 \ln x \cdot dx = \frac{a}{b} \ln 2 - \frac{c}{9}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + bc - ca)$.

A. $T = 252$.**B. $T = 144$.****C. $T = -16$.****D. $T = -252$.**

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$.

Khi đó $\int_1^2 x^2 \ln x \cdot dx = \left(\frac{x^3}{3} \cdot \ln x \right) \Big|_1^2 - \frac{1}{3} \int_1^2 x^2 dx = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{1}{9} \cdot x^3 \Big|_1^2 = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}$.

$\longrightarrow a = 8; b = 3; c = 7 \longrightarrow T = 144$. **Chọn B.**

Câu 83. Giả sử $I = \int_1^e x^3 \ln x dx = \frac{3e^a + 1}{b}$ với a, b là các số nguyên dương. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $ab = 64$.**B. $ab = 46$.****C. $a - b = 12$.****D. $a - b = 4$.**

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^3 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^4}{4} \end{cases}.$

Khi đó $I = \frac{x^4 \ln x}{4} \Big|_1^e - \frac{1}{4} \int_1^e x^3 dx = \frac{e^4}{4} - \frac{x^4}{16} \Big|_1^e = \frac{e^4}{4} - \left(\frac{e^4 - 1}{16} \right) = \frac{3e^4 + 1}{16}.$

Suy ra $a = 4$; $b = 16$. **Chọn A.**

Câu 84. Biết $I = \int_1^a \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$. Giá trị của a bằng:

A. $a = 2$.

B. $a = \ln 2$.

C. $a = 4$.

D. $a = 8$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}.$

Khi đó $I = \left(-\frac{\ln x}{x} \right) \Big|_1^a + \int_1^a \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln a}{a} - \frac{1}{a} \Big|_1^a = -\frac{\ln a}{a} - \frac{1}{a} + 1.$

Theo giả thiết $I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 \Leftrightarrow -\frac{\ln a}{a} - \frac{1}{a} + 1 = -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \longrightarrow a = 2$. **Chọn A.**

Cách 2. CASIO Thiết lập hiệu $\int_1^a \frac{\ln x}{x^2} dx - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2$ và bài toán cần tìm a để hiệu

bằng 0. Thử với $a = 2$, ta nhập hiệu $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2$ vào máy tính CASIO và

nhấn dấu $\boxed{=}$. Thật may mắn màn hình xuất hiện số 0, ta chọn A. Nếu màn hình không xuất hiện số 0 thì ta thử tới đáp án B.

Câu 85. Xét $I_k = \int_1^e \ln \frac{k}{x} dx$ với k là số nguyên dương. Nếu $I_k < e - 2$ thì tổng các giá trị của k bằng:

A. 3.

B. 5.

C. 7.

D. 9.

Lời giải. Ta có $I_k = \int_1^e \ln \frac{k}{x} dx = \int_1^e (\ln k - \ln x) dx = \ln k \int_1^e dx - \int_1^e \ln x dx.$

• $A = \ln k \int_1^e dx = \ln k \cdot x \Big|_1^e = (e - 1) \ln k.$

• $B = \int_1^e \ln x dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = x \end{cases} \longrightarrow B = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = x \ln x \Big|_1^e - x \Big|_1^e = 1.$

Do đó $I_k = A - B = (e - 1) \ln k - 1.$

Theo giả thiết, ta có $I_k < e - 2 \Leftrightarrow (e - 1) \ln k - 1 < e - 2$

$\Leftrightarrow (e - 1) \ln k < e - 1 \Leftrightarrow \ln k < 1 \Leftrightarrow k < e \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}^+} k = \{1; 2\}$. **Chọn A.**

Câu 86. Tính tích phân $I = \int_0^1 x 2^x dx$.

A. $I = \frac{2 \ln 2 - 1}{\ln^2 2}$.

B. $I = \frac{2 \ln 2 - 1}{\ln 2}$.

C. $I = \frac{2 \ln 2 + 1}{\ln^2 2}$.

D. $I = \frac{2 \ln 2 + 1}{\ln 2}$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = 2^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{2^x}{\ln 2} \end{cases}.$

Khi đó $I = \frac{x^{2^x}}{\ln 2} \Big|_0^1 - \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 2^x dx = \frac{x^{2^x}}{\ln 2} \Big|_0^1 - \frac{2^x}{\ln^2 2} \Big|_0^1 = \frac{2 \ln 2 - 1}{\ln^2 2}$. **Chọn A.**

Câu 87. Kết quả tích phân $I = \int_0^1 (2x+3)e^x dx$ được viết dưới dạng $I = ae + b$ với a, b là các số hữu tỷ. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $a - b = 2$. B. $a^3 + b^3 = 28$. C. $ab = 3$. D. $a + 2b = 1$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = 2x + 3 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = e^x \end{cases}$.

Khi đó $I = (2x+3)e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 2e^x dx = (2x+3)e^x \Big|_0^1 - 2e^x \Big|_0^1 = 3e - 1$.

Suy ra $a = 3, b = -1$. **Chọn D.**

Câu 88. Cho a, b, c là các số nguyên dương và $c \neq 1$ thỏa $\int_0^{\ln 2} xe^{-2x} dx = \frac{1}{a} \left(\frac{b}{4} - \frac{\ln 2}{c} \right)$.

Tính giá trị biểu thức $T = abc - (ab + bc + ca)$.

- A. $T = 24$. B. $T = 6$. C. $T = -2$. D. $T = 9$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{cases}$.

Khi đó $\int_0^{\ln 2} xe^{-2x} dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} \Big|_0^{\ln 2} + \frac{1}{2} \int_0^{\ln 2} e^{-2x} dx = -\frac{\ln 2}{8} - \frac{1}{4}e^{-2x} \Big|_0^{\ln 2} = \frac{3}{16} - \frac{\ln 2}{8}$
 $= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln 2}{2} \right) \longrightarrow a = 4; b = 3; c = 2 \longrightarrow T = -2$. **Chọn C.**

Câu 89. Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $\int_0^1 3e^{\sqrt{1+3x}} dx = \frac{a}{5}e^2 + \frac{b}{3}e + c$. Tính giá

trị của biểu thức $T = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$.

- A. $T = 6$. B. $T = 9$. C. $T = 10$. D. $T = 5$.

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{1+3x} \Rightarrow t^2 = 1+3x \Rightarrow 2tdt = 3dx$. Đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=2 \end{cases}$.

Khi đó $I = 2 \int_1^2 te^t dt$. Đặt $\begin{cases} u = 2t \\ dv = e^t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dt \\ v = e^t \end{cases}$.

Suy ra $I = 2te^t \Big|_1^2 - 2 \int_1^2 e^t dt = 2te^t \Big|_1^2 - 2e^t \Big|_1^2 = 2e^2 \longrightarrow \begin{cases} a=10 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \longrightarrow T = 10$. **Chọn C.**

Câu 90. Cho tham số $a > 0$ thỏa mãn $\int_0^{\sqrt{a}} (x-1)e^{2x} dx = \frac{3-e^2}{4}$. Tính $P = a^2 + 2017$.

- A. $P = 2021$. B. $P = 2026$. C. $P = 2033$. D. $P = 2018$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = x - 1 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$.

Khi đó $I = \frac{1}{2}(x-1)e^{2x} \Big|_0^{\sqrt{a}} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{a}} e^{2x} dx = \frac{1}{2}(x-1)e^{2x} \Big|_0^{\sqrt{a}} - \frac{1}{4}e^{2x} \Big|_0^{\sqrt{a}}$
 $= \left(\frac{\sqrt{a}-1}{2}e^{2\sqrt{a}} + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{e^{2\sqrt{a}}-1}{4} \right) = \frac{3}{4} + \left(\frac{2\sqrt{a}-3}{4} \right)e^{2\sqrt{a}}$. Suy ra $a = 1$. **Chọn D.**

Cách 2. CASIO Thiết lập hiệu $\int_0^{\sqrt{a}} (x-1)e^{2x} dx - \frac{3-e^2}{4}$ và bài toán cần tìm a để hiệu bằng 0. Với đáp án A, suy ra $a=2$, ta nhập hiệu $\int_0^{\sqrt{2}} (x-1)e^{2x} dx - \frac{3-e^2}{4}$ vào máy tính CASIO và nhấn dấu $\boxed{=}$. Màn hình không xuất hiện số 0 nên ta tiếp tục thử đến đáp án B, C và D.

Câu 91. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx$.

A. $I = 1$.

B. $I = \frac{\pi}{2}$.

C. $I = \frac{1}{4}$.

D. $I = \frac{3}{4}$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{\cos 2x}{2} \end{cases}$.

Khi đó $I = -\frac{x \cos 2x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = -\frac{x \cos 2x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{\sin 2x}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}$. **Chọn C.**

Câu 92. Kết quả tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$ được viết ở dạng $I = \frac{\pi}{m} - 1$. Tính $9m^2 - 6$.

A. $9m^2 - 6 = 3$.

B. $9m^2 - 6 = 30$.

C. $9m^2 - 6 = -3$.

D. $9m^2 - 6 = -30$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$.

Khi đó $I = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$.

Suy ra $m = 2 \longrightarrow 9m^2 - 6 = 30$. **Chọn B.**

Câu 93. Cho tham số m thỏa mãn $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x + 2m) dx = 1 + \pi^2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $-1 < m < 0$.

B. $0 \leq m \leq 2$.

C. $3 < m < 5$.

D. $m \geq 5$.

Lời giải. Tính $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$.

Suy ra $A = (-x \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

Do đó $I = A + 2m \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = 1 + mx^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 + \frac{m\pi^2}{4}$.

Theo giả thiết $1 + \frac{m\pi^2}{4} = 1 + \pi^2 \Leftrightarrow \frac{m\pi^2}{4} = \pi^2 \Leftrightarrow m = 4 \in (3; 5)$. **Chọn C.**

Câu 94. Kết quả của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 1 - \sin x) dx$ được viết ở dạng $\pi \left(\frac{\pi}{a} - \frac{1}{b} \right) - 1$.

Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $a + 2b = 8$.

B. $a + b = 5$.

C. $2a - 3b = 2$.

D. $a - b = 2$.

Lời giải. Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 1 - \sin x) dx = (x^2 - x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} \right) - 1 = \pi \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) - 1$.

Suy ra $\begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 95. Cho $I = \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx$, $J = \int_0^{\pi} e^x \sin^2 x dx$ và $K = \int_0^{\pi} e^x \cos 2x dx$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(I). $I + J = e^{\pi}$. (II). $I - J = K$. (III). $K = \frac{e^{\pi} - 1}{5}$.

A. Chỉ (I). B. Chỉ (II). C. Chỉ (III). D. Cả (II) và (III).

Lời giải. ● Xét (I). Ta có $I + J = \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx + \int_0^{\pi} e^x \sin^2 x dx$.

$$= \int_0^{\pi} e^x (\sin^2 x + \cos^2 x) dx = \int_0^{\pi} e^x dx = e^x \Big|_0^{\pi} = e^{\pi} - 1. \text{ Vậy (I) sai.}$$

● Xét (II). Ta có $I - J = \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx - \int_0^{\pi} e^x \sin^2 x dx$

$$= \int_0^{\pi} e^x (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int_0^{\pi} e^x \cos 2x dx = K. \text{ Vậy (II) đúng.}$$

● Xét (III). Đặt $\begin{cases} u = \cos 2x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2 \sin 2x dx \\ v = e^x \end{cases}$.

$$\text{Suy ra } K = (e^x \cos 2x) \Big|_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} e^x \sin 2x dx = e^{\pi} - 1 + 2M.$$

$$\text{Tính } M = \int_0^{\pi} e^x \sin 2x dx. \text{ Ta đặt } \begin{cases} u_1 = \sin 2x \\ dv_1 = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = 2 \cos 2x dx \\ v_1 = e^x \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } M = (e^x \sin 2x) \Big|_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} e^x \cos 2x dx = -2K.$$

Khi đó $K = e^{\pi} - 1 + 2(-2K) \Leftrightarrow 5K = e^{\pi} - 1 \Leftrightarrow K = \frac{e^{\pi} - 1}{5}$. Vậy (III) đúng. **Chọn D.**

Câu 96. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 2]$ và thỏa mãn

$$f(1) = 0, f(2) = 2, \int_1^2 f(x) dx = 1. \text{ Tính } I = \int_1^2 x \cdot f'(x) dx.$$

A. $I = 2$. B. $I = 1$. C. $I = 3$. D. $I = 8$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$.

$$\text{Khi đó } I = [x \cdot f(x)] \Big|_1^2 - \int_1^2 f(x) dx = 2f(2) - f(1) - \int_1^2 f(x) dx = 2 \cdot 2 - 0 - 1 = 3. \text{ Chọn C.}$$

Câu 97. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 2]$ và thỏa mãn

$$f(2) = 16, \int_0^2 f(x) dx = 4. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 x \cdot f'(2x) dx.$$

A. $I = 13$. B. $I = 12$. C. $I = 20$. D. $I = 7$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(2x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} f(2x) \end{cases}$.

Khi đó $I = \frac{1}{2}xf(2x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)dx = \frac{1}{2}f(2) - \frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)dx = 8 - \frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)dx.$

Tính $\int_0^1 f(2x)dx$. Đặt $t = 2x \longrightarrow dt = 2dx$. Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \rightarrow t=0 \\ x=1 \rightarrow t=2 \end{cases}.$

Suy ra $\int_0^1 f(2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt = \frac{1}{2}.4 = 2.$

Vậy $I = 8 - \frac{1}{2}.2 = 8 - 1 = 7$. **Chọn D.**

Câu 98. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(1) = 4f(2)$, $\int_1^2 xf(x)dx = 1$. Tính tích phân $I = \int_1^2 x^2 f'(x)dx$.

A. $I = 2$. B. $I = -2$. C. $I = 1$. D. $I = -1$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = f(x) \end{cases}.$

Khi đó $I = x^2 f(x)\Big|_1^2 - 2\int_1^2 xf(x)dx = 4f(2) - f(1) - 2\int_1^2 xf(x)dx.$

$= -2\int_1^2 xf(x)dx = -2.1 = -2$. **Chọn B.**

Câu 99. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$. Biết $f(1).g(1) = 1$, $f(2).g(2) = 2$ và $\int_1^2 g(x).f'(x)dx = 3$. Tính $I = \int_1^2 f(x).g'(x)dx$.

A. $I = -4$. B. $I = 4$. C. $I = -2$. D. $I = 2$.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = g'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = g(x) \end{cases}.$

Khi đó $I = f(x).g(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 g(x).f'(x)dx = f(2).g(2) - f(1).g(1) - \int_1^2 g(x).f'(x)dx$

$= 2 - 1 - 3 = -2$. **Chọn C.**

Câu 100. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $\int_0^1 f(x)dx = 2$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f'(\sqrt{x})dx$.

A. $I = -1$. B. $I = 1$. C. $I = 2$. D. $I = -2$.

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{x} \longrightarrow t^2 = x \longrightarrow 2tdt = dx$. Đổi cận $\begin{cases} x=0 \rightarrow t=0 \\ x=1 \rightarrow t=1 \end{cases}.$

Khi đó $I = 2\int_0^1 tf'(t)dt = 2A$.

Tính $A = \int_0^1 tf'(t)dt$. Đặt $\begin{cases} u = t \\ dv = f'(t)dt \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = f(t) \end{cases}.$

Suy ra $A = tf(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(t)dt = f(1) - \int_0^1 f(t)dt = 1 - 2 = -1 \longrightarrow I = 2A = -2$. **Chọn D.**

Vấn đề 3. TÍCH PHÂN ẢN HÀM SỐ

Câu 101. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn trên đoạn $[-1;1]$ và thỏa mãn $\int_{-1}^1 f(x)dx = 4$.

Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{2^x + 1} dx$.

A. $I = 2$.

B. $I = 4$.

C. $I = 8$.

D. $I = 16$.

Lời giải. Đặc trưng của dạng $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{\beta^x + 1} dx$ là đổi biến $t = -x \longrightarrow dx = -dt$.

Đổi cận $\begin{cases} x = -1 \rightarrow t = 1 \\ x = 1 \rightarrow t = -1 \end{cases}$. Khi đó $I = -\int_1^{-1} \frac{f(-t)}{2^{-t} + 1} dt$

$$= \int_{-1}^1 \frac{f(-t)}{2^{-t} + 1} dt = \int_{-1}^1 \frac{2^t \cdot f(-t)}{1 + 2^t} dt = \int_{-1}^1 \frac{2^t \cdot f(t)}{2^t + 1} dt = \int_{-1}^1 \frac{2^x \cdot f(x)}{2^x + 1} dx.$$

Suy ra $2I = I + I = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{2^x + 1} dx + \int_{-1}^1 \frac{2^x \cdot f(x)}{2^x + 1} dx = \int_{-1}^1 f(x) dx = 4 \longrightarrow I = 2$. **Chọn A.**

Cách trắc nghiệm: Chọn $h(x) = x^2$ thỏa mãn giả thiết là hàm chẵn.

Ta có $\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} \longrightarrow$ chọn $f(x) = \frac{4}{2} h(x) = 6x^2$.

Khi đó $I = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{2^x + 1} dx = \int_{-1}^1 \frac{6x^2}{2^x + 1} dx$. Dùng CASIO tính được kết quả bằng 2.

Phương pháp trắc nghiệm:

Bước 1. Chọn một hàm số bất kỳ thỏa mãn bài toán. Nếu bài toán không nói gì thì thường chọn $h(x) = 1$, nếu là hàm số lẻ thì chọn $h(x) = x$, hàm số chẵn thì chọn $h(x) = x^2$.

Bước 2. Tính $\int_a^b h(x) dx = M \longrightarrow \int_a^b \frac{N}{M} h(x) dx = \frac{N}{M} \int_a^b h(x) dx = \frac{N}{M} \cdot M = N$.

Do đó ta sẽ chọn $f(x) = \frac{N}{M} h(x)$.

Bước 3. Tính $I = \int_a^b f(u) dx = \int_a^b \frac{A}{B} h(u) dx$ bằng máy tính là xong.

Ví dụ. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_1^{2017} f(x) dx = 2$. Tính tích phân $\int_1^{2017} f(2018 - x) dx$.

Hướng dẫn. Ta chọn $h(x) = 1 \longrightarrow \int_1^{2017} 1 dx = 2016 \longrightarrow f(x) = \frac{2}{2016} = \frac{1}{1008}$.

Khi đó $\int_1^{2017} f(2018 - x) dx = \int_1^{2017} \frac{1}{1008} dx = 2$.

Câu 102. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2 \cos 2x}$ với

mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx$.

A. $I = -6$.

B. $I = 0$.

C. $I = -2$.

D. $I = 6$.

Lời giải. Đặt $t = -x \longrightarrow dx = -dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x = -\frac{3\pi}{2} \rightarrow t = \frac{3\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \rightarrow t = -\frac{3\pi}{2} \end{cases}$.

$$\text{Khi đó } I = - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} f(-t) dt = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-t) dt = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x) dx.$$

$$\text{Suy ra } 2I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} [f(t) + f(-t)] dt = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2 + 2\cos 2t} dt = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 2|\cos t| dt \stackrel{\text{CASIO}}{=} 12 \longrightarrow I = 6.$$

Chọn D.

Cách trắc nghiệm. Chọn $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\cos 2x} \stackrel{\text{CASIO}}{\longrightarrow} I = 6$.

Chú ý: Khi gặp bài toán "Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $mf(x) + nf(-x) = g(x)$ với $g(x)$ là hàm số chẵn và $m + n \neq 0$. Tính tích phân

$$I = \int_{-a}^a f(x) dx$$

" thì ta chọn

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{m+n} g(x)}.$$

Ví dụ. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{4+x^2}$.

Tính tích phân $I = \int_{-2}^2 f(x) dx$. **Hướng dẫn:** Chọn $f(x) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4+x^2}$

Câu 103. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và thỏa $\int_0^{x^2} f(t) dt = x \cos(\pi x)$.

Tính $f(4)$.

A. $f(4) = \frac{1}{2}$. **B.** $f(4) = 1$. **C.** $f(4) = 2$. **D.** $f(4) = \frac{1}{4}$.

Lời giải. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, suy ra $\begin{cases} F'(x) = f(x) \\ [F(x^2)]' = 2xf'(x^2) \end{cases}$.

$$\text{Khi đó } \int_0^{x^2} f(t) dt = F(t) \Big|_0^{x^2} = F(x^2) - F(0) \longleftrightarrow x \cos \pi x = F(x^2) - F(0).$$

Lấy đạo hàm hai vế, ta được: $\cos \pi x - \pi x \sin \pi x = 2xf'(x^2) - 0$.

Cho $x = 2$, ta được $1 = 4f(4) \longleftrightarrow f(4) = \frac{1}{4}$. **Chọn D.**

Câu 104. Cho $a > 0$ và $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[a; +\infty)$. Tìm giá trị của a biết rằng $\int_a^t \frac{f(x)}{x^2} dx + 6 = 2\sqrt{t}$ với mọi $t > a$.

A. $a = 5$. **B.** $a = 9$. **C.** $a = 19$. **D.** $a = 3$.

Lời giải. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x^2}$ trên đoạn $[a; t]$.

Khi đó ta có
$$\begin{cases} F'(x) = \frac{f(x)}{x^2} \\ F(t) - F(a) = F(x) \Big|_a^t = \int_a^t \frac{f(x)}{x^2} dx = 2\sqrt{t} - 6 \longrightarrow F(t) = 2\sqrt{t} + F(a) - 6 \end{cases}.$$

Suy ra $F'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{f(t)}{t^2} \longrightarrow f(t) = t\sqrt{t}$ hay $f(x) = x\sqrt{x}$

$$\longrightarrow \int_a^t \frac{f(x)}{x^2} dx = \int_a^t \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_a^t = 2\sqrt{t} - 2\sqrt{a}.$$

Theo giả thiết $2\sqrt{t} - 2\sqrt{a} = 2\sqrt{t} - 6 \longrightarrow a = 9$. **Chọn B.**

Cách 2. Từ đẳng thức $\int_a^t \frac{f(x)}{x^2} dx + 6 = 2\sqrt{t}$, lấy đạo hàm hai vế theo t , ta được

$$\frac{f(t)}{t^2} = \frac{1}{\sqrt{t}}. \text{ Suy ra } f(t) = t\sqrt{t} \text{ hay } f(x) = x\sqrt{x}.$$

Câu 105. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn

$$f(x) > 0, \forall x \in [1;2]. \text{ Biết rằng } \int_1^2 f'(x) dx = 10 \text{ và } \int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln 2. \text{ Tính } f(2).$$

- A. $f(2) = -10$. B. $f(2) = 20$. C. $f(2) = 10$. D. $f(2) = -20$.

Lời giải. Ta có $\int_1^2 f'(x) dx = 10 \Leftrightarrow f(x) \Big|_1^2 = 10 \Leftrightarrow f(2) - f(1) = 10. \quad (1)$

Lại có $\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln 2 \Leftrightarrow \ln |f(x)| \Big|_1^2 = \ln 2 \Leftrightarrow \ln [f(x)] \Big|_1^2 = \ln 2$ (do $f(x) > 0, \forall x \in [1;2]$)

$$\Leftrightarrow \ln f(2) - \ln f(1) = \ln 2 \Leftrightarrow \ln \frac{f(2)}{f(1)} = \ln 2 \Leftrightarrow \frac{f(2)}{f(1)} = 2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $f(2) = 20$. **Chọn B.**

Câu 106. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-1;1]$, thỏa mãn

$$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f'(x) + 2f(x) = 0. \text{ Tính } f(-1), \text{ biết rằng } f(1) = 1.$$

- A. $f(-1) = e^{-2}$. B. $f(-1) = e^3$. C. $f(-1) = e^4$. D. $f(-1) = 3$.

Lời giải. Ta có $f'(x) + 2f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -2f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -2$ (do $f(x) > 0$).

Lấy tích phân cận từ -1 đến 1 hai vế, ta được $\int_{-1}^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_{-1}^1 (-2) dx$

$$\Leftrightarrow \ln |f(x)| \Big|_{-1}^1 = -2x \Big|_{-1}^1 \Leftrightarrow \ln [f(x)] \Big|_{-1}^1 = -2x \Big|_{-1}^1 \text{ (do } f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \ln [f(1)] - \ln [f(-1)] = -4 \Leftrightarrow \ln 1 - \ln [f(-1)] = -4$$

$$\Leftrightarrow \ln [f(-1)] = 4 \longrightarrow f(-1) = e^4. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 107. Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, nhận giá trị dương trên khoảng $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1}$ với mọi $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $1 < f(5) < 2$. B. $4 < f(5) < 5$. C. $2 < f(5) < 3$. D. $3 < f(5) < 4$.

Lời giải. Ta có $f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$.

Lấy tích phân cận từ 1 đến 5 hai vế, ta được $\int_1^5 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$

$$\Leftrightarrow \ln|f(x)| \Big|_1^5 = \frac{2}{3} \sqrt{3x+1} \Big|_1^5 \Leftrightarrow \ln[f(x)] \Big|_1^5 = \frac{2}{3} \sqrt{3x+1} \Big|_1^5 \quad (\text{do } f(x) > 0, \forall x > 0)$$

$$\Leftrightarrow \ln[f(5)] - \ln[f(1)] = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \ln[f(5)] - \ln 1 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \ln[f(5)] = \frac{4}{3} \Leftrightarrow f(5) = e^{\frac{4}{3}} \simeq 3,793.$$

Chọn D.

Câu 108. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = 1$ và $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x$, tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

- A. $m > e$. B. $0 < m \leq 1$. C. $0 < m < e$. D. $1 < m < e$.

Lời giải. Lấy nguyên hàm hai vế $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x$, ta được $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int (2 - 2x) dx$

$$\Leftrightarrow \ln|f(x)| = 2x - x^2 + C \Leftrightarrow \ln[f(x)] = 2x - x^2 + C \quad (\text{do } f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow f(x) = e^{2x-x^2+C}.$$

Theo giả thiết $f(0) = 1 \longrightarrow e^C = 1 \Leftrightarrow C = 0$. Suy ra $f(x) = e^{2x-x^2}$.

$$\text{Xét phương trình } f(x) = m \Leftrightarrow e^{2x-x^2} = m \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x = \ln m \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x - \ln m = 0 \\ m > 0 \end{cases}.$$

$$\text{Phương trình } f(x) = m \text{ có hai nghiệm thực phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - \ln m > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < e.$$

Chọn C.

Câu 109. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $a > 0$. Giả sử rằng với mọi $x \in [0; a]$, ta có $f(x) > 0$ và $f(x)f(a-x) = 1$. Tính $I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)}$.

- A. $I = \frac{a}{2}$. B. $I = 2a$. C. $I = \frac{a}{3}$. D. $I = a \ln(a+1)$.

Lời giải. Từ giả thiết, suy ra $f(a-x) = \frac{1}{f(x)}$.

$$\text{Đặt } t = a - x \longrightarrow dt = -dx. \text{ Đổi cận: } \begin{cases} x = 0 \longrightarrow t = a \\ x = a \longrightarrow t = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = -\int_a^0 \frac{dt}{1+f(a-t)} = \int_0^a \frac{dt}{1+\frac{1}{f(t)}} = \int_0^a \frac{f(t)}{f(t)+1} dt = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+1} dx.$$

$$\text{Suy ra } 2I = I + I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} + \int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+1} dx = \int_0^a dx = a \longrightarrow I = \frac{a}{2}. \text{ Chọn A.}$$

Cách trắc nghiệm. Chọn $f(x) = 1 > 0 \longrightarrow f(a-x) = 1$ thỏa $f(x)f(a-x) = 1$.

$$\text{Khi đó } I = \int_0^a \frac{dx}{1+1} = \frac{1}{2} x \Big|_0^a = \frac{a}{2}.$$

Câu 110. Cho số thực $a \neq 0$, đặt $b = \int_{-a}^a \frac{1}{(2a+x)e^x} dx$. Tính $\int_0^{2a} \frac{e^x}{3a-x} dx$ theo a và b .

- A. $\int_0^{2a} \frac{e^x}{3a-x} dx = \frac{b}{e^a}$. B. $\int_0^{2a} \frac{e^x}{3a-x} dx = \frac{b}{\sqrt{e^a}}$.

$$\text{C. } \int_0^{2a} \frac{e^x}{3a-x} dx = b.e^a.$$

$$\text{D. } \int_0^{2a} \frac{e^x}{3a-x} dx = \frac{a}{\sqrt{e^b}}.$$

Lời giải. Ta đổi biến để đưa tích phân cần tính về tích phân đã cho bằng cách đặt

$$3a-x=2a+t \longrightarrow \begin{cases} dx=-dt \\ x=a-t \end{cases}. \text{ Đổi cận: } \begin{cases} x=0 \rightarrow t=a \\ x=2a \rightarrow t=-a \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } \int_a^{-a} \frac{e^{a-t}}{2a+t} (-dt) = e^a \cdot \int_a^{-a} \frac{1}{(2a+t)e^t} (-dt) = e^a \cdot \int_{-a}^a \frac{1}{(2a+t)e^t} dt = e^a.b. \text{ Chọn C.}$$

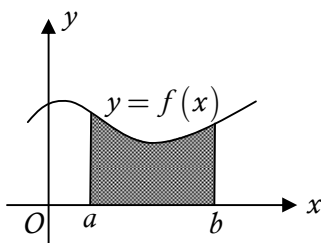
ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

1. Tính diện tích hình phẳng

Định lí

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[a; b]$. Khi đó diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là

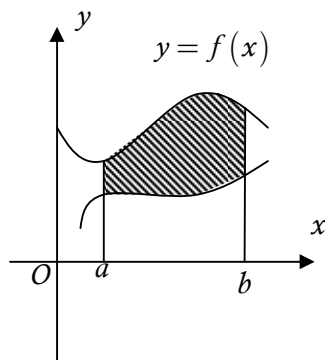
$$S = \int_a^b f(x) dx.$$



Bài toán 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó diện tích S của hình phẳng (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$; trục hoành Ox ($y = 0$) và hai đường thẳng $x = a$; $x = b$ là $S = \int_a^b |f(x)| dx$.

Bài toán 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = f(x)$; $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$; $x = b$ là

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$



Chú ý:

1) Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

- Giải phương trình $f(x) = g(x)$ tìm nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b)$ ($x_1 < x_2 < \dots < x_n$).

- Tính $S = \int_a^{x_1} |f(x) - g(x)| dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)| dx + \dots + \int_{x_n}^b |f(x) - g(x)| dx$
 $= \left| \int_a^{x_1} (f(x) - g(x)) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b (f(x) - g(x)) dx \right|.$

Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

2) Trong nhiều trường hợp, bài toán yêu cầu tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = f(x)$; $y = g(x)$.

Khi đó, ta có công thức tính như sau $S = \int_{x_1}^{x_n} |f(x) - g(x)| dx$.

Trong đó x_1 và x_n tương ứng là nghiệm nhỏ nhất, lớn nhất của $f(x) = g(x)$.

2. Tính thể tích khối tròn xoay

a) Tính thể tích của vật thể

Định lí

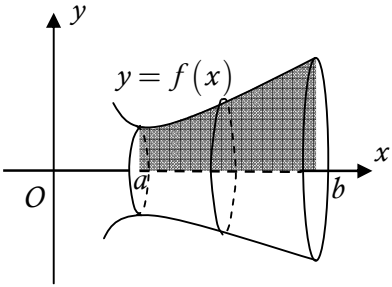
Cắt một vật thể C bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x = a, x = b$ ($a < b$). Một mặt phẳng bất kì vuông góc với Ox tại điểm x ($a \leq x \leq b$) cắt C theo một thiết diện có diện tích $S(x)$. Giả sử $S(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó thể tích của vật thể C giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) được tính

theo công thức
$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

b) Tính thể tích vật tròn xoay

Bài toán 1. Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay miền D được giới hạn bởi các đường $y = f(x); y = 0; x = a; x = b$ quanh trục Ox được tính theo công thức

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$



Chú ý: Nếu hình phẳng D được giới hạn bởi các đường $y = f(x); y = g(x)$ và hai đường $x = a; x = b$ (với $f(x).g(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$) thì thể tích khối tròn xoay sinh bởi khi quay D quanh trục Ox được tính bởi công thức

$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx.$$

Bài toán 2. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng D giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục tung và hai đường $y = a, y = b$ quanh trục Oy được tính theo công thức

$$V = \pi \int_a^b g^2(y) dy.$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM



Vấn đề 1. TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

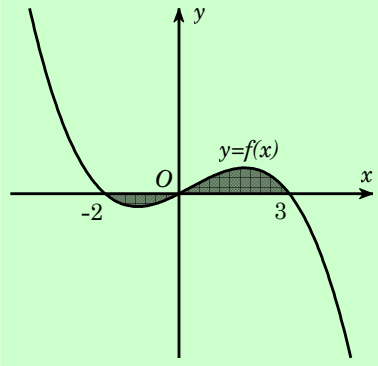


Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đường cong $y = f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$) được xác định bởi công thức nào sau đây?

- A. $S = \int_a^b f(x) dx.$ B. $S = \int_a^b f(x) dx.$ C. $S = \int_b^a |f(x)| dx.$ D. $S = \int_a^b |f(x)| dx.$

Lời giải. Chọn D.

Câu 2. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Diện tích S của hình phẳng phần tô đậm trong hình được tính theo công thức nào sau đây?



A. $S = \int_{-2}^3 f(x) dx$.

B. $S = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx$.

C. $S = \int_0^{-2} f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx$.

D. $S = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_3^0 f(x) dx$.

Lời giải. Theo hình vẽ, ta có $S = \int_{-2}^3 |f(x)| dx = -\int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx$
 $= \int_0^{-2} f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx$. **Chọn C.**

Câu 3. Cho hai hàm số $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Diện tích hình phẳng S giới hạn các bởi đường cong $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$) được xác định bởi công thức nào sau đây?

A. $S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$.

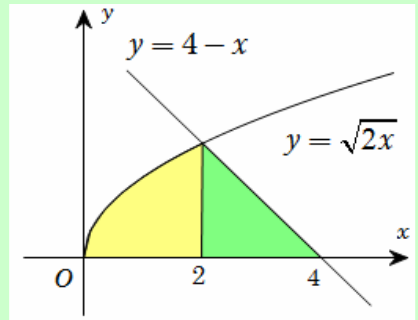
B. $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$.

C. $S = \left| \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx \right|$.

D. $S = \int_a^b |f_1(x) + f_2(x)| dx$.

Lời giải. Chọn A.

Câu 4. Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = \sqrt{2x}$, $y = 4 - x$ và trục hoành Ox (như hình vẽ) được tính bởi công thức nào dưới đây?



A. $S = \int_0^4 \sqrt{2x} dx + \int_0^4 (4 - x) dx$.

B. $S = \int_0^2 \sqrt{2x} dx + \int_2^4 (4 - x) dx$.

C. $S = \int_0^4 (\sqrt{2x} - 4 + x) dx$.

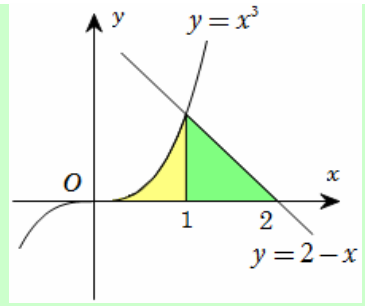
D. $S = \int_0^2 (4 - x - \sqrt{2x}) dx$.

Lời giải. Xét các phương trình hoành độ giao điểm:

- $\sqrt{2x} = 4 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x^2 - 10x + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2;$
- $4 - x = 0 \Leftrightarrow x = 4;$
- $\sqrt{2x} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Dựa vào hình vẽ, ta có $S = \int_0^2 \sqrt{2x} dx + \int_2^4 (4 - x) dx$. **Chọn B.**

Câu 5. Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^3$, $y = 2 - x$ và trục hoành Ox (như hình vẽ) được tính bởi công thức nào dưới đây?



A. $S = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (x-2) dx.$

B. $S = \left| \int_0^2 (x^3 + x - 2) dx \right|.$

C. $S = \frac{1}{2} + \int_0^1 x^3 dx.$

D. $S = \int_0^1 |x^3 - (2-x)| dx.$

Lời giải. Xét các phương trình hoành độ giao điểm:

- $x^3 = 2 - x \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1;$
- $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
- $2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2.$

Dựa vào hình vẽ, ta có $S = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (2-x) dx = \frac{1}{2} + \int_0^1 x^3 dx$. **Chọn C.**

Câu 6. Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^3 - x$, $y = 2x$ và các đường $x = -1$, $x = 1$ được xác định bởi công thức nào sau đây?

A. $S = \left| \int_{-1}^1 (3x - x^3) dx \right|.$

B. $S = \int_{-1}^1 (3x - x^3) dx.$

C. $S = \int_{-1}^0 (x^3 - 3x) dx + \int_0^1 (3x - x^3) dx.$

D. $S = \int_{-1}^0 (3x - x^3) dx + \int_0^1 (x^3 - 3x) dx.$

Lời giải. Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 - x = 2x \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 1] \\ x = \pm\sqrt{3} \notin [-1; 1] \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng cần tính: $S = \int_{-1}^0 |x^3 - x - 2x| dx + \int_0^1 |x^3 - x - 2x| dx$

$\stackrel{\text{xét dấu}}{=} \int_{-1}^0 (x^3 - 3x) dx + \int_0^1 (3x - x^3) dx$. **Chọn C.**

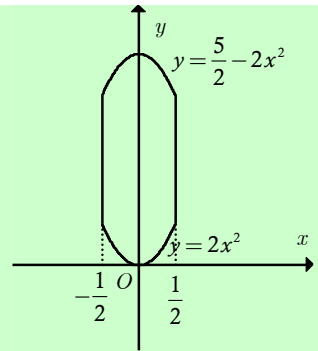
Câu 7. Sơ đồ ở bên phải phác thảo của một khung cửa sổ. Diện tích S của cửa sổ được tính bởi công thức nào sau đây?

A. $S = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{5}{2} - 4x^2 \right) dx.$

B. $S = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| \frac{5}{2} - 2x^2 \right| dx.$

C. $S = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 2x^2 dx.$

D. $S = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1 - 4x^2) dx.$



Lời giải. Dựa vào đồ thị ta thấy trên đoạn $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ thì đồ thị hàm số $y_1 = \frac{5}{2} - 2x^2$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y_2 = 2x^2$.

Do đó $S = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (y_1 - y_2) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{5}{2} - 2x^2 - 2x^2 \right) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{5}{2} - 4x^2 \right) dx$. **Chọn A.**

Câu 8. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ với $a < b$. Kí hiệu S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2f(x)$, $y = 2g(x)$, $x = a$ và $x = b$; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x) - 2$, $y = g(x) - 2$, $x = a$ và $x = b$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.** $S_1 = S_2$. **B.** $S_1 = 2S_2$. **C.** $S_1 = 2S_2 - 2$. **D.** $S_1 = 2S_2 + 2$.

Lời giải. Ta có
$$\begin{cases} S_1 = \int_a^b |2f(x) - 2g(x)| dx = 2 \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \\ S_2 = \int_a^b |[f(x) - 2] - [g(x) - 2]| dx = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \end{cases} \longrightarrow S_1 = 2S_2.$$

Chọn B.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ xác định và đồng biến trên đoạn $[0; 1]$ và $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y_1 = f(x)$, $y_2 = [f(x)]^2$ và các đường $x = 0$, $x = 1$ được xác định bởi công thức nào sau đây?

A. $S = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)[1 - f(x)] dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)[f(x) - 1] dx$.

B. $S = \int_0^1 [f(x) - (f(x))^2] dx$.

C. $S = \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|[1 - f(x)] dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)[f(x) - 1] dx$.

D. $S = \int_0^1 [(f(x))^2 - f(x)] dx$.

Lời giải. Gọi S là diện tích hình phẳng cần tính. Ta có $S = \int_0^1 |f(x) - [f(x)]^2| dx$

$$= \int_0^1 |f(x)| \cdot |1 - f(x)| dx = \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)| \cdot |1 - f(x)| dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)| |1 - f(x)| dx.$$

Do hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0; 1] \longrightarrow \begin{cases} f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \\ f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \end{cases}$

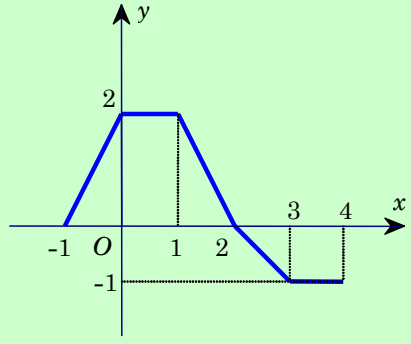
$$\longrightarrow \begin{cases} |f(x) - 1| = f(x) - 1, \forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \\ |f(x) - 1| = 1 - f(x), \forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \end{cases}.$$

Vậy $S = \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|[1 - f(x)] dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)[f(x) - 1] dx$. **Chọn C.**

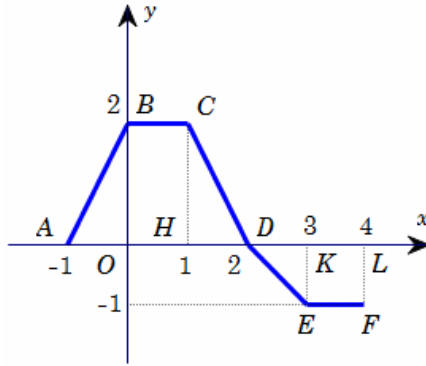
Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-1;4]$ như hình vẽ bên. Tính tích

phân $I = \int_{-1}^4 f(x) dx$.

- A. $I = \frac{5}{2}$.
 B. $I = \frac{11}{2}$.
 C. $I = 5$.
 D. $I = 3$.



Lời giải. Gọi $A(-1;0)$, $B(0;2)$, $C(1;2)$, $D(2;0)$, $E(3;-1)$, $F(4;-1)$ và $H(1;0)$, $K(3;0)$, $L(4;0)$.



$$\begin{aligned} \text{Khi đó } I &= \int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 |f(x)| dx + \int_0^1 |f(x)| dx + \int_1^2 |f(x)| dx - \int_2^3 |f(x)| dx - \int_3^4 |f(x)| dx \end{aligned}$$

(do $f(x) \geq 0, \forall x \in [-1;2]$ và $f(x) \leq 0, \forall x \in [2;4]$)

$$= S_{ABO} + S_{OBCH} + S_{HCD} - S_{DKE} - S_{EFLK} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = \frac{5}{2}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 11. Kí hiệu S_1, S_2 lần lượt là diện tích hình vuông cạnh bằng 1 và diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 1, y = 0, x = -1, x = 2$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là đúng?

- A. $S_1 = S_2$. B. $S_1 > S_2$. C. $S_1 = \frac{1}{2} S_2$. D. $\frac{S_2}{S_1} = 6$.

Lời giải. Ta có $S_1 = 1$ và $S_2 = \int_{-1}^2 |x^2 + 1| dx = \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^2 = 6$

$\longrightarrow \frac{S_2}{S_1} = 6$. **Chọn D.**

Câu 12. Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = x^2 + 2$ và $y = 3x$.

- A. $S = 2$. B. $S = 3$. C. $S = \frac{1}{2}$. D. $S = \frac{1}{6}$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 + 2 = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Diện tích hình phẳng cần tính: $S = \int_1^2 |x^2 + 2 - 3x| dx \stackrel{\text{CASIO}}{=} \frac{1}{6}$.

Chọn D.

Câu 13. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$.

A. $S = \frac{37}{12}$.

B. $S = \frac{9}{4}$.

C. $S = \frac{81}{12}$.

D. $S = 13$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - x = x - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$.

Diện tích hình phẳng cần tính: $S = \int_{-2}^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx \stackrel{\text{CASIO}}{\simeq} 3,08\bar{3} = \frac{37}{12}$. **Chọn A.**

Cách kiểm tra máy tính. Dùng CASIO tính tích phân $\int_{-2}^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx$ rồi lưu vào

biến A. Bây giờ ta thử với đáp án A có đúng không nhé? Ta xét hiệu $A - \frac{37}{12}$ và nhấn

dấu $\boxed{=}$. Nếu màn hình xuất hiện số 0 thì đáp án đó đúng.

Câu 14. Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x$ và hai đường thẳng $x = -15$, $x = 15$.

A. $S = 2250$.

B. $S = 2259$.

C. $S = 1593$.

D. $S = 2925$.

Lời giải. Diện tích hình phẳng cần tính: $S = \int_{-15}^{15} |x^2 - 3x| dx$.

Bảng xét dấu của biểu thức $f(x) = x^2 - 3x$ trên đoạn $[-15; 15]$.

x	-15		0		3		15
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } S &= \int_{-15}^0 (x^2 - 3x) dx - \int_0^3 (x^2 - 3x) dx + \int_3^{15} (x^2 - 3x) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_{-15}^0 - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_0^3 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_3^{15} = 2259. \quad \text{Chọn B.} \end{aligned}$$

Cách 2. Dùng máy tính cầm tay.

● Đối với VINACAL. Ta tính $\int_{-15}^{15} |x^2 - 3x| dx = 2259$. Đúng với kết quả tính tay.

● Đối với CASIO. Ta tính $\int_{-15}^{15} |x^2 - 3x| dx = 2250$. Không đúng với kết quả tính tay.

Lý do nào hai loại máy tính này cho ta hai kết quả khác nhau? Giải thích: Máy CASIO "thường không đúng" cho tích phân trị tuyệt đối với hai cận chứa 3 đoạn đổi dấu trở lên.

Câu 15. Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x\sqrt{1+x^2}$, trục hoành và đường thẳng $x = 1$.

A. $S = \frac{1}{3}$.

B. $S = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$.

C. $S = \frac{2\sqrt{2}+1}{3}$.

D. $S = 2(\sqrt{2}-1)$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $x\sqrt{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Diện tích hình phẳng: $S = \int_0^1 |x\sqrt{1+x^2}| dx = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx \stackrel{\text{CASIO}}{=} \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$. **Chọn B.**

Câu 16. Kí hiệu S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích hình vuông đơn vị (có cạnh bằng đơn vị), hình tròn đơn vị (có bán kính bằng đơn vị), hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = 2\sqrt{1-x^2}, y = 2(1-x)$. Tính tỉ số $\frac{S_1+S_3}{S_2}$.

A. $\frac{S_1+S_3}{S_2} = \frac{1}{3}$. B. $\frac{S_1+S_3}{S_2} = \frac{1}{4}$. C. $\frac{S_1+S_3}{S_2} = \frac{1}{2}$. D. $\frac{S_1+S_3}{S_2} = \frac{1}{5}$.

Lời giải. Ta tính được $S_1 = 1^2 = 1$ và $S_2 = 1^2 \cdot \pi = \pi$.

Tính S_3 . Phương trình hoành độ giao điểm: $2\sqrt{1-x^2} = 2(1-x) \xrightarrow{\text{CASIO}} \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$.

Khi đó $S_3 = \int_0^1 |2\sqrt{1-x^2} - 2(1-x)| dx$. Dùng CASIO tính tích phân và lưu vào biến A.

Tiếp theo bấm $\frac{1+A}{\pi}$ và nhấn dấu $\boxed{=}$. Màn hình hiện kết quả $\frac{1}{2}$. **Chọn C.**

Câu 17. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$ và $x - 2y = 0$ bằng với diện tích hình nào sau đây?

- A. Diện tích hình vuông có cạnh bằng 2.
- B. Diện tích hình chữ nhật có chiều dài, chiều rộng lần lượt 5 và 3.
- C. Diện tích hình tròn có bán kính bằng 3.
- D. Diện tích toàn phần khối tứ diện đều có cạnh bằng $\frac{2\sqrt[4]{3}}{3}$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{x} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$.

Diện tích hình phẳng cần tính: $S = \int_0^4 \left| \sqrt{x} - \frac{x}{2} \right| dx \xrightarrow{\text{CASIO}} 1, \bar{3} = \frac{4}{3}$.

- A. Diện tích hình vuông có cạnh bằng 2 $\longrightarrow S_A = 4$.
- B. Diện tích hình chữ nhật có chiều dài, chiều rộng lần lượt 5 và 3 $\longrightarrow S_B = 15$.
- C. Diện tích hình tròn có bán kính bằng 3 $\longrightarrow S_C = 9\pi$.
- D. Diện tích toàn phần khối tứ diện đều có cạnh bằng $\frac{2\sqrt[4]{3}}{3} \longrightarrow S_D = (\text{cạnh})^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{4}{3}$.

Chọn D.

Câu 18. Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{2}{(x+1)^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=4$.

A. $S = -\frac{8}{5}$. B. $S = \frac{8}{5}$. C. $S = \frac{2}{25}$. D. $S = \frac{4}{25}$.

Lời giải. Diện tích hình phẳng cần tính: $S = \int_0^4 \left| \frac{2}{(x+1)^2} \right| dx \xrightarrow{\text{CASIO}} \frac{8}{5}$. **Chọn B.**

Câu 19. Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x \ln x$, trục hoành và đường thẳng $x = e$.

A. $S = \frac{e^2+1}{4}$. B. $S = \frac{e^2+1}{6}$. C. $S = \frac{e^2+1}{8}$. D. $S = \frac{e^2+1}{2}$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $x \ln x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x=0 \\ \ln x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$.

Diện tích hình phẳng cần tính: $S = \int_1^e |x \ln x| dx \stackrel{\text{CASIO}}{\simeq} 2,09726$.

Đối chiếu kết quả với bốn đáp án đã cho. **Chọn A.**

Câu 20. Biết rằng diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \ln x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = \frac{1}{e}$, $x = e$ được dưới dạng $S = a \left(1 - \frac{1}{e}\right)$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $a^2 - 3a + 2 = 0$.

B. $a^2 - a - 2 = 0$.

C. $a^2 + 3a - 4 = 0$.

D. $2a^2 - 3a - 2 = 0$.

Lời giải. Diện tích hình phẳng cần tính: $S = \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx \stackrel{\text{xet dau}}{=} \int_{\frac{1}{e}}^1 -\ln x dx + \int_1^e \ln x dx$

$\stackrel{\text{tung phan}}{=} -\left(x \ln x - x\right) \Big|_{\frac{1}{e}}^1 + \left(x \ln x - x\right) \Big|_1^e = 2 \left(1 - \frac{1}{e}\right) \longrightarrow a = 2$. **Chọn C.**

Câu 21. Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x + x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 1$.

A. $S = e + \frac{1}{2}$.

B. $S = e - \frac{1}{2}$.

C. $S = e + 1$.

D. $S = e - 1$.

Lời giải. Diện tích hình phẳng cần tính: $S = \int_0^1 |e^x + x| dx \stackrel{\text{CASIO}}{\simeq} 2,21828$.

Đối chiếu kết quả với bốn đáp án đã cho. **Chọn B.**

Câu 22. Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đường $y = e^x + x$, $x - y + 1 = 0$ và $x = \ln 5$.

A. $S = 5 + \ln 4$.

B. $S = 5 - \ln 4$.

C. $S = 4 + \ln 5$.

D. $S = 4 - \ln 5$.

Lời giải. Ta có $x - y + 1 = 0 \longrightarrow y = x + 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $e^x + x = x + 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Diện tích hình phẳng cần tính: $S = \int_0^{\ln 5} |(e^x + x) - (x + 1)| dx = \int_0^{\ln 5} |e^x - 1| dx \stackrel{\text{CASIO}}{\simeq} 2,39056$.

Đối chiếu kết quả với bốn đáp án đã cho. **Chọn D.**

Câu 23. Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đường $y = (e + 1)x$ và $y = (1 + e^x)x$.

A. $S = \frac{e + 2}{2}$.

B. $S = \frac{e}{2}$.

C. $S = \frac{e - 2}{2}$.

D. $S = \frac{e - 2}{4}$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm:

$$(1 + e^x)x = (e + 1)x \Leftrightarrow x(e^x - e) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Diện tích cần tính: $S = \int_0^1 |(1 + e^x)x - (e + 1)x| dx = \int_0^1 |x(e^x - e)| dx \stackrel{\text{CASIO}}{\simeq} 0,35914$.

Đối chiếu kết quả với bốn đáp án đã cho. **Chọn C.**

Câu 24. Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{e^x + 1}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = \ln 3$, $x = \ln 8$.

A. $S = 2 + \ln \frac{2}{3}$.

B. $S = 2 + \ln \frac{3}{2}$.

C. $S = 3 + \ln \frac{3}{2}$.

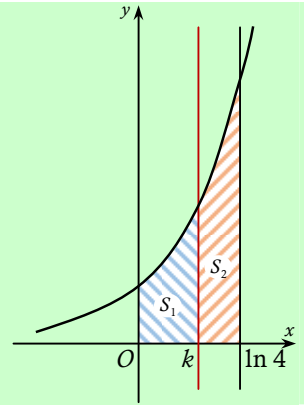
D. $S = 2 - \ln \frac{3}{2}$.

Lời giải. Diện tích hình phẳng cần tính: $S = \int_{\ln 3}^{\ln 8} |\sqrt{e^x + 1}| dx = \int_{\ln 3}^{\ln 8} \sqrt{e^x + 1} dx \stackrel{\text{CASIO}}{=} 2,40546$.

Đối chiếu kết quả với bốn đáp án đã cho. **Chọn B.**

Câu 25. (ĐỀ THỬ NGHIỆM 2016 – 2017) Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < \ln 4$) chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.

- A. $k = \frac{2}{3} \ln 4$. B. $k = \ln 2$.
C. $k = \ln \frac{8}{3}$. D. $k = \ln 3$.

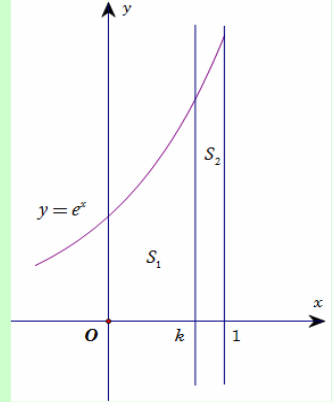


Lời giải. Ta có $S_1 = \int_0^k e^x dx = e^x \Big|_0^k = e^k - 1$ và $S_2 = \int_k^{\ln 4} e^x dx = e^x \Big|_k^{\ln 4} = 4 - e^k$.

Theo giả thiết $S_1 = 2S_2 \Leftrightarrow e^k - 1 = 2(4 - e^k) \Leftrightarrow k = \ln 3$. **Chọn D.**

Câu 26. Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < 1$) chia (H) thành hai phần có diện tích tương ứng S_1 , S_2 như hình vẽ bên, biết $S_1 > S_2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $e^k > \frac{e+3}{2}$. B. $e^k > \frac{e+2}{2}$.
C. $e^k > \frac{e+1}{2}$. D. $e^k > \frac{e-1}{2}$.

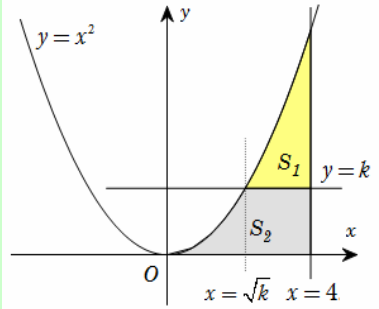


Lời giải. Ta có $S_1 = \int_0^k e^x dx = e^x \Big|_0^k = e^k - 1$ và $S_2 = \int_k^1 e^x dx = e^x \Big|_k^1 = e - e^k$.

Theo giả thiết $S_1 > S_2 \Leftrightarrow e^k - 1 > e - e^k \Leftrightarrow e^k > \frac{e+1}{2}$. **Chọn C.**

Câu 27. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$. Đường thẳng $y = k$ ($0 < k < 16$) chia hình (H) thành hai phần có diện tích S_1 , S_2 (hình vẽ). Tìm k để $S_1 = S_2$.

- A. $k = 3$. B. $k = 4$.
C. $k = 5$. D. $k = 8$.



Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = k \longrightarrow x = \sqrt{k}$. Ta có:

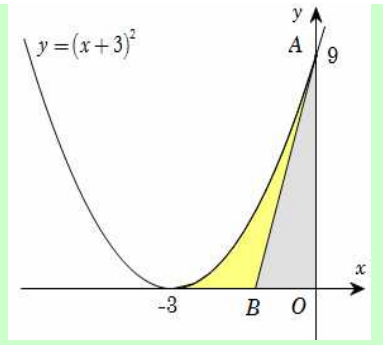
- $S_1 + S_2 = \int_0^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 = \frac{64}{3}$.
- $S_1 = \int_{\sqrt{k}}^4 (x^2 - k) dx = \left(\frac{x^3}{3} - kx \right) \Big|_{\sqrt{k}}^4 = -4k + \frac{2k\sqrt{k}}{3} + \frac{64}{3}$.

Theo giả thiết $S_1 = S_2 \longrightarrow S_1 = \frac{1}{2}(S_1 + S_2) \Leftrightarrow -4k + \frac{2k\sqrt{k}}{3} + \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$

$\Leftrightarrow 2k\sqrt{k} - 12k + 32 = 0 \xrightarrow{t=\sqrt{k} \ (0 < t < 4)} 2t^3 - 12t^2 + 32 = 0 \rightarrow t = 2 \longrightarrow k = 4$. **Chọn B.**

Câu 28. Xét hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x+3)^2$, trục hoành và đường thẳng $x = 0$. Gọi $A(0;9)$, $B(b;0)$ ($-3 < b < 0$). Tính giá trị của tham số b để đoạn thẳng AB chia (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau.

- A. $b = -2$. B. $b = -\frac{1}{2}$.
C. $b = -1$. D. $b = -\frac{3}{2}$.



Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $(x+3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -3$.

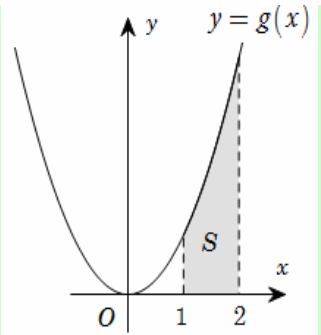
Do đó $S_{(H)} = \int_{-3}^0 (x+3)^2 dx \stackrel{\text{CASIO}}{=} 9$.

Diện tích tam giác OAB bằng: $S_{OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{9}{2}|b|$.

Ycbt $\longleftrightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2}S_{(H)} \Leftrightarrow \frac{9}{2}|b| = \frac{9}{2} \xrightarrow{(-3 < b < 0)} b = -1$. **Chọn C.**

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = g(x) = x \cdot f(x^2)$ có đồ thị trên đoạn $[1;2]$ như hình vẽ bên. Biết phần diện tích miền được tô màu là $S = \frac{5}{2}$, tính giá trị của tích phân $I = \int_1^4 f(x) dx$.

- A. $I = \frac{5}{2}$. B. $I = \frac{5}{4}$.
C. $I = 10$. D. $I = 5$.



Lời giải. Diện tích phần tô màu là $S = \int_1^2 g(x) dx$.

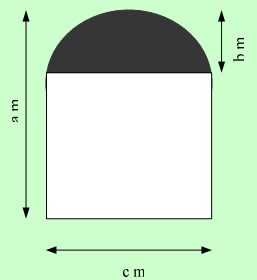
Theo giả thiết $S = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \int_1^2 x \cdot f(x^2) dx = \frac{5}{2}$.

Đặt $t = x^2 \longrightarrow dt = 2x dx$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 1 \rightarrow t = 1 \\ x = 2 \rightarrow t = 4 \end{cases}$.

Khi đó $\frac{5}{2} = \int_1^2 x \cdot f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_1^4 f(t) dt \longrightarrow \int_1^4 f(t) dt = 5$ hay $\int_1^4 f(x) dx = 5$. **Chọn D.**

Câu 30. Một khung cửa có hình dạng như hình vẽ, phần phía trên là một parabol. Biết $a = 2,5\text{m}$, $b = 0,5\text{m}$, $c = 2\text{m}$. Biết số tiền một mét vuông cửa là 1 triệu đồng. Số tiền cần để mua cửa là:

- A. $\frac{14}{3}$ triệu đồng. B. $\frac{13}{7}$ triệu đồng.
C. $\frac{3}{17}$ triệu đồng. D. $\frac{17}{3}$ triệu đồng.



Lời giải. Diện tích khung cửa bằng: diện tích hình vuông + diện tích parabol.

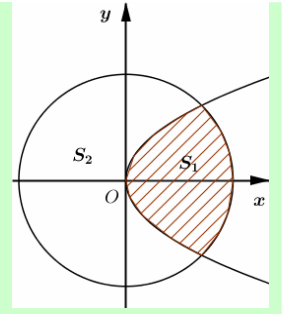
Diện tích hình vuông $S_1 = 2.2 = 4 \text{ m}^2$.

Diện tích parabol $S_2 = \frac{2}{3} \cdot 2.0,5 = \frac{2}{3} \text{ m}^2$ (Công thức giải nhanh $S = \frac{2}{3}Bh$ với B là chiều dài của đáy, h là chiều cao).

Suy ra diện tích khung của $S = S_1 + S_2 = \frac{14}{3} \text{ m}^2$.

Khi đó số tiền cần phải trả: $T = \frac{14}{3} \times 1 \text{ triệu} = \frac{14}{3} \text{ triệu đồng}$. **Chọn A.**

Câu 31. Biết rằng đường parabol $(P): y^2 = 2x$ chia đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 8$ thành hai phần lần lượt có diện tích là S_1, S_2 (hình vẽ bên). Khi đó $S_2 - S_1 = a\pi - \frac{b}{c}$ với a, b, c nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b + c$.



- A. $S = 13$. B. $S = 14$.
C. $S = 15$. D. $S = 16$.

Lời giải. Đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$, bán kính $R = 2\sqrt{2} \longrightarrow$ diện tích $S = 8\pi$.

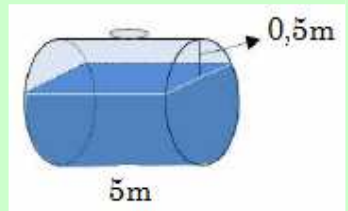
Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (C) là:

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 2x = 8 \end{cases} \leftrightarrow x = 2.$$

$$\text{Suy ra } S_1 = 2 \int_0^2 \sqrt{2x} dx + 2 \int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2} dx = \frac{4}{3} + 2\pi \longrightarrow S_2 = S - S_1 = 6\pi - \frac{4}{3}.$$

$$\longrightarrow S_2 - S_1 = 4\pi - \frac{8}{3} \longrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 8 \\ c = 3 \end{cases} \text{ . Chọn C.}$$

Câu 32. Một bồn hình trụ chứa dầu được đặt nằm ngang, có chiều dài 5m, bán kính đáy 1m, với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta rút dầu trong bồn tương ứng với 0,5m của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn.



- A. $11,781 \text{ m}^3$. B. $12,637 \text{ m}^3$.
C. $114,923 \text{ m}^3$. D. $8,307 \text{ m}^3$.

Lời giải. Thể tích của bồn (hình trụ) đựng dầu là: $V_1 = \pi r^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot 5 = 5\pi \text{ m}^3$.

Bây giờ ta tính phần dầu bị rút ra bằng 2 cách:

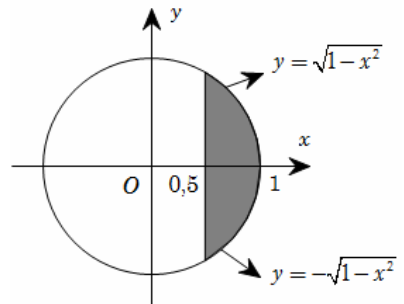
Cách 1. (Dùng tích phân)

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, gốc tọa độ gần với tâm của mặt đáy.

Đường tròn đáy có bán kính bằng 1 nên có phương trình $x^2 + y^2 = 1$.

$$\text{Suy ra } y = \pm \sqrt{1-x^2}.$$

Diện tích phần hình tròn đáy bị mất:



$$S = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx \approx 0,61 \text{ m}^2.$$

$$\text{Thể tích phần dầu bị rút ra ngoài: } V_2 = S \times h = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx \times 5 \approx 3,07 \text{ m}^3.$$

Vậy thể tích của khối dầu còn lại trong bồn: $V = V_1 - V_2 \approx 12,637 \text{ m}^3$. **Chọn B.**

Cách 2. (Áp dụng diện tích cung tròn khi biết góc ở tâm trừ đi diện tích tam giác tạo bởi tâm và 2 đầu mút dây cung)

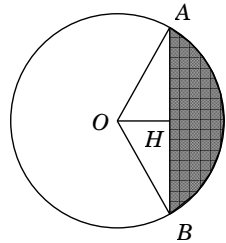
$$S_{\text{viên phần}} = \frac{1}{2}R^2\alpha - \frac{1}{2}.R.R.\sin\alpha = \frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)$$

với α tính theo đơn vị radian.

$$\text{Tính góc ở tâm: } \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{OH}{OA} = \frac{OH}{R} = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}.$$

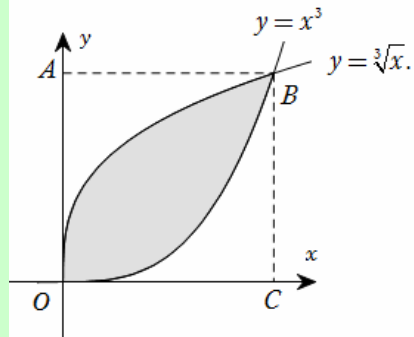
Diện tích phần hình tròn đầy bị mất (phần bôi đen)

$$S_{\text{viên phần}} = \frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha) = \frac{1}{2}.1^2.\left(\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) \approx 0,61\text{m}^2.$$



Câu 33. Cho một viên gạch men có dạng hình vuông $OABC$ như hình vẽ. Sau khi tọa độ hóa, ta có $O(0;0)$, $A(0;1)$, $B(1;1)$, $C(1;0)$ và hai đường cong trong hình lần lượt là đồ thị hàm số $y = x^3$ và $y = \sqrt[3]{x}$. Tính tỷ số diện tích của phần tô đậm so với diện tích phần còn lại của hình vuông.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{5}{4}$.
C. $\frac{4}{3}$. D. 1.

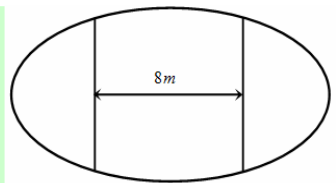


Lời giải. Diện tích hình vuông có cạnh bằng 1 là $S_1 = 1^2 = 1\text{ m}^2$.

$$\text{Diện tích phần tô đậm: } S_2 = \int_0^1 |\sqrt[3]{x} - x^3| dx \stackrel{\text{CASIO}}{=} \frac{1}{2}\text{ m}^2.$$

$$\text{Do đó diện tích phần còn lại: } \Delta S = S_1 - S_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\text{ m}^2 \longrightarrow \frac{S_2}{\Delta S} = 1. \text{ Chọn D.}$$

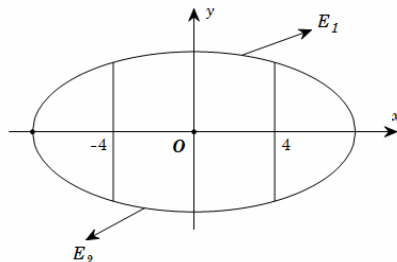
Câu 34. (ĐỀ THỬ NGHIỆM 2016 – 2017) Ông An có một mảnh vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng 16 m và độ dài trục bé bằng 10 m. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng 8 m và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ).



Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/m². Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)

- A. 7.862.000 đồng. B. 7.653.000 đồng.
C. 7.128.000 đồng. D. 7.826.000 đồng.

Lời giải. Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



$$\text{Giả sử elip có phương trình } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$\text{Từ giả thiết, ta có } 2a = 16 \longrightarrow a = 8 \text{ và } 2b = 10 \longrightarrow b = 5.$$

Vậy phương trình của elip là $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1 \longrightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{8}\sqrt{64-x^2} & (E_1) \\ y = -\frac{5}{8}\sqrt{64-x^2} & (E_2) \end{cases}$.

Khi đó diện tích dải vườn được giới hạn bởi các đường (E_1) , (E_2) , $x = -4$ và $x = 4$.

Do đó $S = 2 \int_{-4}^4 \frac{5}{8} \sqrt{64-x^2} dx = \frac{5}{2} \int_0^4 \sqrt{64-x^2} dx = 80 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \text{m}^2$.

Vậy số tiền mà ông An cần là $T = 80 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cdot 100000 = 7652891,82 \simeq 7.653.000$.

Chọn B.



Vấn đề 2. TÍNH THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY



Câu 36. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$), xung quanh trục Ox .

A. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

B. $V = \int_a^b f^2(x) dx$.

C. $V = \pi \int_a^b f(x) dx$.

D. $V = \pi \int_a^b |f(x)| dx$.

Lời giải. Chọn A.

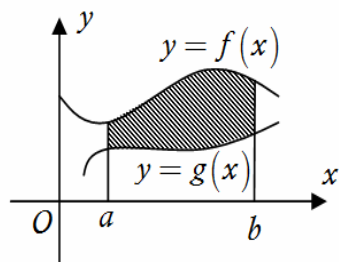
Câu 37. Cho hình phẳng trong hình bên (phần tô đậm) quay quanh trục hoành. Thể tích khối tròn xoay tạo thành được tính theo công thức nào trong các công thức sau đây?

A. $V = \pi \int_a^b [g^2(x) - f^2(x)] dx$.

B. $V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx$.

C. $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$.

D. $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$.



Lời giải. Chọn B.

Câu 38. Viết công thức tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm $x = a$, $x = b$ ($a < b$), có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($a \leq x \leq b$) là $S(x)$.

A. $V = \pi \int_a^b S(x) dx$. B. $V = \pi \int_a^b |S(x)| dx$. C. $V = \int_a^b S(x) dx$. D. $V = \pi^2 \int_a^b S(x) dx$.

Lời giải. Chọn C.

Câu 39. (ĐỀ THAM KHẢO 2016 – 2017) Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 3$) thì được thiết diện là một hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2 - 2}$.

A. $V = \frac{124\pi}{3}$. B. $V = 32 + 2\sqrt{15}$. C. $V = \frac{124}{3}$. D. $V = (32 + 2\sqrt{15})\pi$.

Lời giải. Diện tích thiết diện (hình chữ nhật) là $S(x) = 3x\sqrt{3x^2 - 2}$.

Suy ra thể tích cần tính $V = \int_1^3 S(x) dx = \int_1^3 3x\sqrt{3x^2 - 2} dx \stackrel{\text{CASIO}}{=} \frac{124}{3}$. **Chọn C.**

Câu 40. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=2$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 2$) thì được thiết diện là một phần tư hình tròn bán kính $\sqrt{2}x^2$.

- A. $V = 32\pi$. B. $V = 64\pi$. C. $V = \frac{16}{5}\pi$. D. $V = 8\pi$.

Lời giải. Diện tích thiết diện ($\frac{1}{4}$ hình tròn) là $S(x) = \frac{1}{4}\pi(\sqrt{2}x^2)^2 = \frac{1}{2}\pi x^4$.

Suy ra thể tích cần tính $V = \int_0^2 \frac{1}{2}\pi x^4 dx = \left(\frac{1}{2}\pi \cdot \frac{x^5}{5}\right)\bigg|_0^2 = \frac{16\pi}{5}$. **Chọn C.**

Câu 41. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=\pi$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq \pi$) thì được thiết diện là một tam giác đều cạnh là $2\sqrt{\sin x}$.

- A. $V = 2\sqrt{3}\pi$. B. $V = 8$. C. $V = 2\sqrt{3}$. D. $V = 8\pi$.

Lời giải. Diện tích tam giác đều là $S(x) = \frac{4 \sin x \cdot \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \sin x$.

Suy ra thể tích cần tính $V = \int_0^\pi \sqrt{3} \sin x dx = -\sqrt{3} \cos x \bigg|_0^\pi = 2\sqrt{3}$. **Chọn C.**

Câu 42. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = 2x - x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành.

- A. $V = \frac{16\pi}{15}$. B. $V = \frac{11\pi}{15}$. C. $V = \frac{12\pi}{15}$. D. $V = \frac{4\pi}{15}$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Thể tích cần tính $V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx \stackrel{\text{CASIO}}{=} \frac{16\pi}{15}$. **Chọn A.**

Câu 43. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 - 2107) Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{x^2 + 1}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành.

- A. $V = \frac{4\pi}{3}$. B. $V = 2\pi$. C. $V = \frac{4}{3}$. D. $V = 2$.

Lời giải. Thể tích cần tính $V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x^2 + 1})^2 dx = \pi \int_0^1 (x^2 + 1) dx \stackrel{\text{CASIO}}{=} \frac{4\pi}{3}$. **Chọn A.**

Câu 44. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \ln x$, trục hoành và đường thẳng $x=e$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành.

- A. $V = \pi(e+1)$. B. $V = \pi(e-1)$. C. $V = \pi e$. D. $V = \pi(e-2)$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Thể tích cần tính $V = \pi \int_1^e \ln^2 x dx \stackrel{\text{CASIO}}{\simeq} 2,25654$.

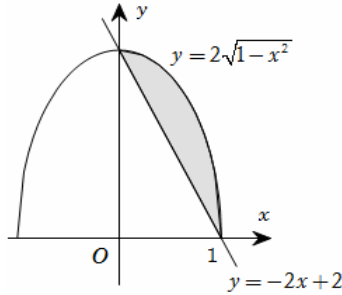
Đối chiếu kết quả với bốn đáp án đã cho. **Chọn D.**

Câu 45. Kí hiệu V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối cầu bán kính đơn vị và thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = -2x + 2$ và đường cong $y = 2\sqrt{1-x^2}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $V_1 < V_2$. B. $V_1 = V_2$. C. $V_1 > V_2$. D. $V_1 = 2V_2$.

Lời giải. Ta có $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 \xrightarrow{R=1} V_1 = \frac{4}{3}\pi$ (đvtt).

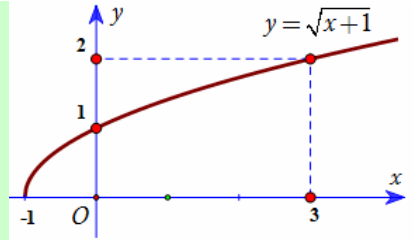
Phương trình hoành độ giao điểm: $2\sqrt{1-x^2} = 2(1-x) \xrightarrow{\text{CASIO}} \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$.



Thể tích $V_2 = \pi \int_0^1 \left| (2\sqrt{1-x^2})^2 - [2(1-x)]^2 \right| dx = \pi \int_0^1 |-8x^2 + 8x| dx \xrightarrow{\text{CASIO}} \frac{4\pi}{3}$.

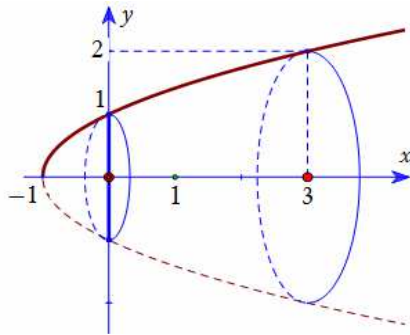
Vậy $V_1 = V_2$. **Chọn B.**

Câu 46. Một Bút thợ gốm làm một cái lọ có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x+1}$ (đồ thị như hình vẽ) và trục Ox quay quanh trục Ox . Biết đáy lọ và miệng lọ có đường kính lần lượt là 2dm và 4dm. Tính thể tích V của lọ.



- A. $V = 8\pi \text{dm}^3$. B. $V = \frac{15\pi}{2} \text{dm}^3$. C. $V = 7\pi \text{dm}^3$. D. $V = 17\pi \text{dm}^3$.

Lời giải. Từ giả thiết, suy ra bán kính hai đáy lần lượt là 1dm và 2dm.



Suy ra $\sqrt{x+1} = 1 \rightarrow x = 0$ và $\sqrt{x+1} = 2 \rightarrow x = 3$.

Thể tích của lọ $V = \pi \int_0^3 (\sqrt{x+1})^2 dx = \pi \int_0^3 (x+1) dx \xrightarrow{\text{CASIO}} \frac{15\pi}{2} \text{dm}^3$. **Chọn B.**

Câu 47. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành.

- A. $V = \frac{\pi e^2}{2}$. B. $V = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2}$. C. $V = \frac{e^2 - 1}{2}$. D. $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$.

Lời giải. Thể tích cần tính $V = \pi \int_0^1 (e^x)^2 dx = \pi \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} \pi e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$. **Chọn D.**

Câu 48. (ĐỀ MINH HỌA 2016 – 2017) Ký hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2(x-1)e^x$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox .

- A. $V = 4 - 2e$. B. $V = (4 - 2e)\pi$. C. $V = e^2 - 5$. D. $V = (e^2 - 5)\pi$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $2(x-1)e^x = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Thể tích cần tính $V = \pi \int_0^1 [2(x-1)e^x]^2 dx = 4\pi \int_0^1 (x-1)^2 e^{2x} dx \stackrel{\text{CASIO}}{=} 7,50544$.

Đối chiếu kết quả với bốn đáp án đã cho. **Chọn D.**

Câu 49. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành.

- A. $V = \pi - 1$. B. $V = (\pi - 1)\pi$. C. $V = (\pi + 1)\pi$. D. $V = \pi + 1$.

Lời giải. Thể tích cần tính $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{2 + \cos x})^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + \cos x) dx \stackrel{\text{CASIO}}{=} 13,01119$.

Đối chiếu kết quả với bốn đáp án đã cho. **Chọn C.**

Câu 50. (ĐỀ CHÍNH THỨC 2016 – 2017) Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- A. $V = 2(\pi + 1)$. B. $V = 2\pi(\pi + 1)$. C. $V = 2\pi^2$. D. $V = 2\pi$.

Lời giải. Thể tích cần tính $V = \pi \int_0^{\pi} (\sqrt{2 + \sin x})^2 dx = \pi \int_0^{\pi} (2 + \sin x) dx \stackrel{\text{CASIO}}{=} 26,02239$.

Đối chiếu kết quả với bốn đáp án đã cho. **Chọn B.**

Câu 51. Ký hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{\sin x - \cos x + m}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{2}$ với m là tham số thực lớn hơn 2. Tìm m sao cho thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục hoành bằng $\frac{3\pi^2}{2}$.

- A. $m = 6$. B. $m = 4$. C. $m = 3$. D. $m = 9$.

Lời giải. Thể tích cần tính $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{\sin x - \cos x + m})^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x + m) dx$

$$= \pi \left(-\cos x - \sin x + mx \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi \left(-1 + \frac{m\pi}{2} \right) - \pi(-1) = \frac{m\pi^2}{2}.$$

Theo giả thiết $V = \frac{3\pi^2}{2} \Leftrightarrow \frac{m\pi^2}{2} = \frac{3\pi^2}{2} \Leftrightarrow m = 3$ (thỏa mãn $m > 2$). **Chọn C.**

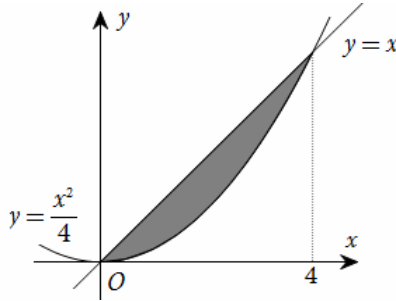
Cách CASIO. Thể tích cần tính $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x + m) dx$. Đến đây thử từng giá

trị m ở các đáp án vào, đáp án nào cho kết quả $\frac{3\pi^2}{2}$ thì nhận.

Câu 52. Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{4}$ và $y = x$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành.

- A. $V = \frac{124\pi}{15}$. B. $V = \frac{126\pi}{15}$. C. $V = \frac{128\pi}{15}$. D. $V = \frac{131\pi}{15}$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x^2}{4} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$.



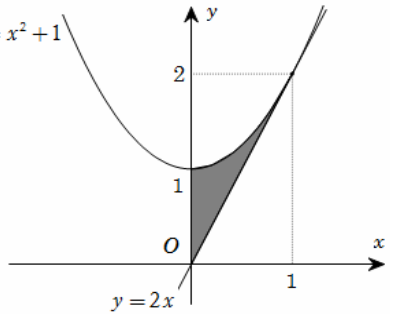
Thể tích cần tính $V = \pi \int_0^4 \left| \left(\frac{x^2}{4} \right)^2 - x^2 \right| dx \stackrel{\text{CASIO}}{=} \frac{128\pi}{15}$. **Chọn C.**

Câu 53. Hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 1$, trục tung và tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 + 1$ tại điểm $(1;2)$. Khi quay hình (H) quanh trục Ox tạo thành khối tròn xoay có thể tích V bằng:

- A. $V = \frac{4}{5}\pi$. B. $V = \frac{28}{15}\pi$. C. $V = \frac{8}{15}\pi$. D. $V = \pi$.

Lời giải. Tiếp tuyến của đồ thị $y = x^2 + 1$ tại điểm $(1;2)$ có phương trình $y = 2x$.

Thể tích cần tính $V = \pi \int_0^1 \left| (x^2 + 1)^2 - (2x)^2 \right| dx$
 $= \pi \int_0^1 |x^4 - 2x^2 + 1| dx \stackrel{\text{xét dấu}}{=} \pi \int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 1) dx = \frac{8\pi}{15}$

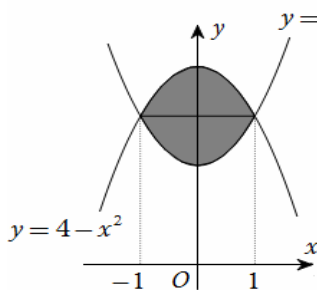


Chọn C.

Câu 54. Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = 4 - x^2$ và $y = 2 + x^2$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành.

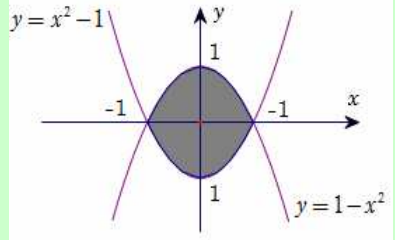
- A. $V = 10\pi$. B. $V = 12\pi$. C. $V = 14\pi$. D. $V = 16\pi$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $4 - x^2 = 2 + x^2 \Leftrightarrow x = \pm 1$.



Thể tích cần tính $V = \pi \int_{-1}^1 \left| (4 - x^2)^2 - (2 + x^2)^2 \right| dx = \pi \int_{-1}^1 |12 - 12x^2| dx \stackrel{\text{CASIO}}{=} 16\pi$. **Chọn D.**

Câu 55. Thể tích V của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=1-x^2$ và $y=x^2-1$ quay quanh trục Ox được xác định bởi công thức nào sau đây?



A. $V = \pi \int_{-1}^1 \left| (1-x^2)^2 - (x^2-1)^2 \right| dx.$

B. $V = \pi \int_{-1}^1 \left| (1-x^2) - (x^2-1) \right| dx.$

C. $V = \pi \int_{-1}^1 (1-x^2)^2 dx.$

D. $V = \pi \int_{-1}^1 \left[(x^2-1)^2 - (1-x^2)^2 \right] dx.$

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $1-x^2 = x^2-1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Vì đồ thị hàm số $y=1-x^2$ đối xứng với đồ thị hàm số $y=x^2-1$ qua trục hoành nên thể tích khối tròn xoay cần tính bằng thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=1-x^2$, $y=0$, $x=-1$, $x=1$ quay quanh trục Ox .

Vậy công thức tính thể tích là $V = \pi \int_{-1}^1 (1-x^2)^2 dx$. **Chọn C.**

Câu 56. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2$ và $y=\sqrt{x}$. Khối tròn xoay tạo ra khi (H) quay quanh Ox có thể tích V được xác định bằng công thức nào sau đây ?

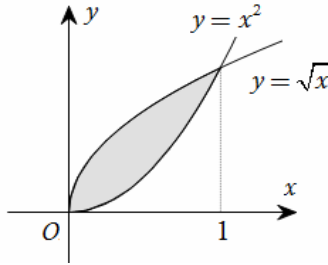
A. $V = \pi \int_0^1 (x^4 - x) dx.$

B. $V = \pi \int_0^1 (x^2 - \sqrt{x}) dx.$

C. $V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx.$

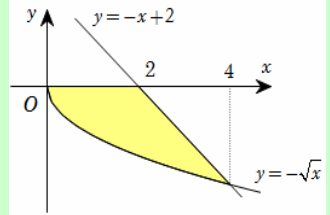
D. $V = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx.$

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$.



Thể tích cần tính $V = \pi \int_0^1 |x^4 - x| dx \stackrel{\text{vì } x \geq 0}{=} \pi \int_0^1 (x - x^4) dx$. **Chọn D.**

Câu 57. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-\sqrt{x}$, đường thẳng $y=-x+2$ và trục hoành. Khối tròn xoay tạo ra khi (H) quay quanh Ox có thể tích V được xác định bằng công thức nào sau đây ?



A. $V = \pi \left[\int_0^2 x dx + \int_2^4 (2-x)^2 dx \right].$

B. $V = \pi \left[\int_0^2 x dx - \int_2^4 (2-x)^2 dx \right].$

C. $V = \pi \left[\int_0^2 x dx + \int_2^4 (x-2)^2 dx \right].$

D. $V = \pi \left[\int_0^4 x dx - \int_2^4 (2-x)^2 dx \right].$

Lời giải. ● Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -\sqrt{x}$, trục hoành, đường thẳng $x = 0, x = 4$ xung quanh trục Ox

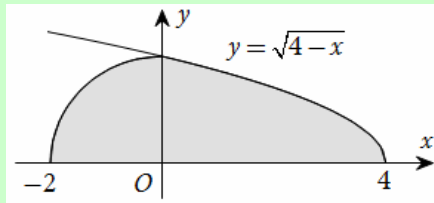
$$\longrightarrow V_1 = \pi \cdot \int_0^4 (-\sqrt{x})^2 dx = \pi \cdot \int_0^4 x dx.$$

● Gọi V_2 là thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x + 2$, trục hoành, đường thẳng $x = 2, x = 4$ xung quanh trục Ox

$$\longrightarrow V_2 = \pi \cdot \int_2^4 (2-x)^2 dx.$$

Suy ra thể tích cần tính $V = V_1 - V_2 = \pi \cdot \int_0^4 x dx - \pi \cdot \int_2^4 (2-x)^2 dx$. **Chọn D.**

Câu 58*. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi $\frac{1}{4}$ đường tròn có bán kính $R = 2$, đường cong $y = \sqrt{4-x}$ và trục hoành (miền tô đậm như hình vẽ). Tính thể tích V của khối tạo thành khi cho hình (H) quay quanh trục Ox .



A. $V = \frac{77\pi}{6}$.

B. $V = \frac{53\pi}{6}$.

C. $V = \frac{67\pi}{6}$.

D. $V = \frac{40\pi}{3}$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{4-x} = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

● Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $\frac{1}{4}$ đường tròn có bán kính $R = 2$ (như hình vẽ), trục hoành và đường thẳng $x = 0$ xung quanh trục Ox

$\longrightarrow$ thể tích tạo thành là nửa khối cầu bán kính $R = 2$.

$$\longrightarrow V_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi \cdot 2^3 = \frac{16\pi}{3}.$$

● Gọi V_2 là thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{4-x}, y = 0, x = 0, x = 4$ xung quanh trục Ox

$$\longrightarrow V_2 = \pi \int_0^4 (4-x) dx = 8\pi.$$

Vậy thể tích cần tính $V = V_1 + V_2 = \frac{40\pi}{3}$. **Chọn D.**

Câu 59*. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = -\sqrt{x+2}, y = x+2, x = 1$. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng (H) quanh trục hoành.

A. $V = \frac{29\pi}{6}$.

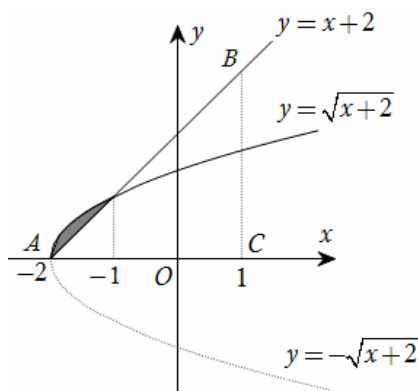
B. $V = \frac{9\pi}{2}$.

C. $V = 9\pi$

D. $V = \frac{55\pi}{6}$.

Lời giải. Đây thuộc bài toán khó, ta phải vẽ hình phát họa mới kiểm soát được.

Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y = -\sqrt{x+2}$ qua trục hoành ta được đồ thị hàm số $y = \sqrt{x+2}$. Khi đó thể tích V cần tính được tạo thành khi cho hình phẳng (H') giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x+2}, y = x+2$, trục Ox và đường thẳng $x = 1$ quay quanh trục hoành.



Xét các phương trình hoành độ giao điểm:

$$\sqrt{x+2} = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \end{cases} \quad \text{và} \quad x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

• Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng là tam giác ABC được giới hạn bởi các đường $y = x+2$, trục hoành và đường thẳng $x=1$ quanh trục hoành

$$\longrightarrow V_1 = \pi \int_{-2}^1 (x+2)^2 dx = 9\pi.$$

• Gọi V_2 là thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (phần tô màu) được giới hạn bởi các đường $y = x+2$, $y = \sqrt{x+2}$ quanh trục hoành

$$\longrightarrow V_2 = \pi \int_{-2}^1 \left| (\sqrt{x+2})^2 - (x+2)^2 \right| dx = \frac{\pi}{6}.$$

Vậy thể tích cần tính $V = V_1 + V_2 = 9\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{55\pi}{6}$. **Chọn D.**

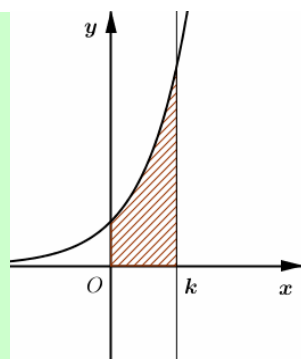
Nhận xét. Bài này học sinh làm sai khá nhiều, lí do là không vẽ hình mà làm theo

công thức $V = \pi \int_{-2}^1 \left[(x+2)^2 - (-\sqrt{x+2})^2 \right] dx = \frac{9\pi}{2}.$

Câu 60. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = k$ ($k > 0$). Gọi V_k là thể tích khối tròn xoay khi quay hình (H) quanh trục Ox . Biết rằng $V_k = 4$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng:

A. $1 < k < \frac{3}{2}$. B. $\frac{3}{2} < k < 2$.

C. $\frac{1}{2} < k < 1$. D. $0 < k < \frac{1}{2}$.

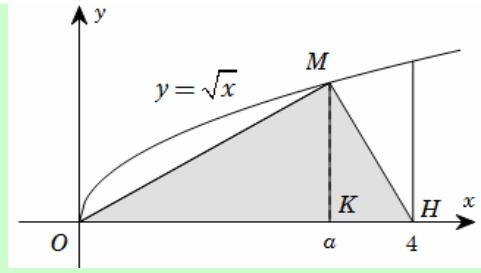


Lời giải. Thể tích $V_k = \pi \int_0^k (e^x)^2 dx = \pi \int_0^k e^{2x} dx = \frac{\pi}{2} e^{2x} \Big|_0^k = \frac{\pi}{2} (e^{2k} - 1).$

Theo giả thiết $V_k = 4 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} (e^{2k} - 1) = 4 \Leftrightarrow e^{2k} = \frac{8 + \pi}{\pi}$

$$\longrightarrow k = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{8 + \pi}{\pi} \right) \in \left(\frac{1}{2}; 1 \right). \quad \text{Chọn C.}$$

Câu 61. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ và $x = 4$ quanh trục Ox . Đường thẳng $x = a$ ($0 < a < 4$) cắt đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại M (hình vẽ bên). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox . Biết rằng $V = 2V_1$. Khi đó:



- A. $a = 2$. B. $a = 2\sqrt{2}$. C. $a = \frac{5}{2}$. D. $a = 3$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$$\text{Thể tích } V = \pi \int_0^4 x dx = 8\pi.$$

Ta có $M(a; \sqrt{a})$. Khi quay tam giác OMH quanh trục Ox tạo thành hai hình nón có chung đáy:

- Hình nón (N_1) có đỉnh là O , chiều cao $OK = a$, bán kính đáy $R = MK = \sqrt{a}$ nên có thể tích bằng $\frac{1}{3} \pi R^2 \cdot OK = \frac{1}{3} \pi (\sqrt{a})^2 \cdot a = \frac{\pi a^2}{3}$.
- Hình nón (N_2) có đỉnh là H , chiều cao $HK = 4 - a$, bán kính đáy $R = MK = \sqrt{a}$ nên có thể tích bằng $\frac{1}{3} \pi R^2 HK = \frac{1}{3} \pi (\sqrt{a})^2 \cdot (4 - a) = \frac{4\pi a - \pi a^2}{3}$.

$$\text{Suy ra } V_1 = \frac{\pi a^2}{3} + \frac{4\pi a - \pi a^2}{3} = \frac{4\pi a}{3}.$$

Theo giả thiết $V = 2V_1 \Leftrightarrow 8\pi = 2 \cdot \frac{4}{3} \pi a \longrightarrow a = 3$. **Chọn D.**

Câu 62. Tính thể tích V của khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường tròn $(C): x^2 + (y - 3)^2 = 1$ quanh trục hoành.

- A. $V = 6\pi$. B. $V = 6\pi^3$. C. $V = 3\pi^2$. D. $V = 6\pi^2$.

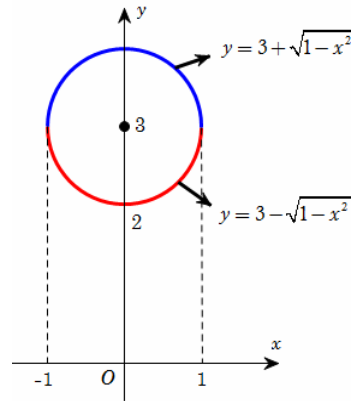
Lời giải. Ta có $x^2 + (y - 3)^2 = 1$

$$\longrightarrow \begin{cases} y = 3 + \sqrt{1 - x^2} \\ y = 3 - \sqrt{1 - x^2} \end{cases}, x \in [-1; 1].$$

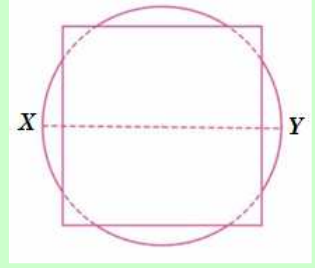
Thể tích cần tính

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^1 \left[\left(3 + \sqrt{1 - x^2} \right)^2 - \left(3 - \sqrt{1 - x^2} \right)^2 \right] dx \\ &= 12\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx \stackrel{\text{CASIO}}{=} 59,21762. \end{aligned}$$

Đối chiếu kết quả với bốn đáp án đã cho. **Chọn D.**



Câu 63. Cho hình vuông có độ dài cạnh bằng 8cm và một hình tròn có bán kính 5cm được xếp chồng lên nhau sao cho tâm của hình tròn trùng với tâm của hình vuông như hình vẽ bên. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay mô hình trên quanh trục XY .



A. $V = \frac{260\pi}{3} \text{ cm}^3$. B. $V = \frac{290\pi}{3} \text{ cm}^3$.

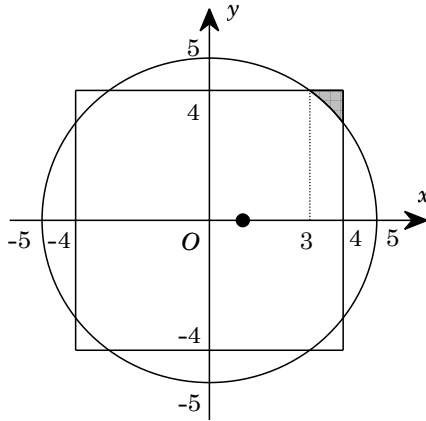
C. $V = \frac{520\pi}{3} \text{ cm}^3$. D. $V = \frac{580\pi}{3} \text{ cm}^3$.

Lời giải. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

• Thể tích khối cầu $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi 5^3 = \frac{500\pi}{3}$.

• Gọi V_2 là thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) (phần tô màu) được giới hạn bởi đường thẳng $y = 4$, đường tròn $y^2 = 25 - x^2$ và $x = 4$ quanh trục hoành

$\longrightarrow V_2 = \pi \int_3^4 (4^2 - (25 - x^2)) dx = \frac{10\pi}{3}$.

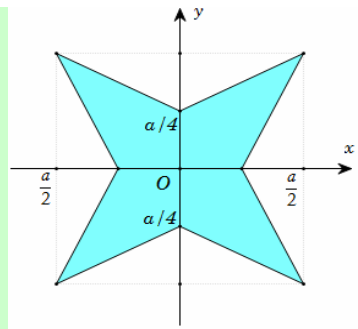


Vậy thể tích cần tính $V = V_1 + 2V_2 = \frac{520\pi}{3} \text{ cm}^3$.

Câu 64. Bên trong hình vuông cạnh a , dựng hình sao bốn cánh đều như hình vẽ bên (các kích thước cần thiết cho như ở trong hình). Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình sao đó quanh trục Ox .

A. $V = \frac{5\pi}{48} a^3$. B. $V = \frac{5\pi}{16} a^3$.

C. $V = \frac{\pi}{6} a^3$. D. $V = \frac{\pi}{8} a^3$.

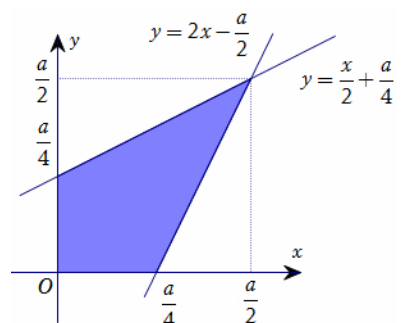


Lời giải. Do hình sao có tính đối xứng nên ta quay theo trục thẳng đứng hay nằm ngang đều cho thể tích như nhau.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Gọi V là thể tích khối tròn xoay cần tính.

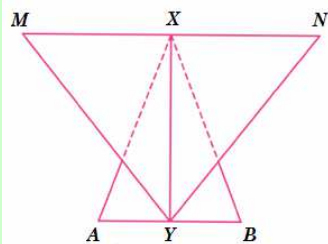
Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng được tô màu trong hình bên quanh trục hoành. Khi đó $V = 2V_1$.



Ta có $V_1 = \pi \int_0^{\frac{a}{2}} \left(\frac{x}{2} + \frac{a}{4} \right)^2 dx - \pi \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}} \left(2x - \frac{a}{2} \right)^2 dx = \frac{5\pi a^3}{96}$.

Suy ra thể tích cần tính $V = 2V_1 = \frac{5\pi a^3}{48}$. **Chọn A.**

Câu 65. Cho hai tam giác cân có chung đường cao $XY = 40\text{cm}$ và cạnh đáy lần lượt là 40cm và 60cm , được xếp chồng lên nhau sao cho đỉnh của tam giác này là trung điểm cạnh đáy của tam giác kia như hình vẽ bên. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay mô hình trên quanh trục XY .



A. $V = \frac{40480\pi}{3} \text{cm}^3$.

B. $V = \frac{52000\pi}{3} \text{cm}^3$.

C. $V = \frac{46240\pi}{3} \text{cm}^3$.

D. $V = 1920\pi \text{cm}^3$.

Lời giải. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ:

$Y \equiv O(0;0)$, $X(40;0)$, $A(0;20)$, $M(40;30)$.

Phương trình đường YM : $3x - 4y = 0 \rightarrow y = \frac{3x}{4}$.

Phương trình AX : $x + 2y - 40 = 0 \rightarrow y = \frac{40 - x}{2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường

YM và AX là: $\frac{3x}{4} = \frac{40 - x}{2} \leftrightarrow x = 16$.

Thể tích vật thể cần tính

$$V = \pi \int_0^{16} \left(\frac{40 - x}{2} \right)^2 dx + \pi \int_{16}^{40} \left(\frac{3x}{4} \right)^2 dx = \frac{46240\pi}{3} \text{cm}^3.$$

Chọn C.

