

## Vấn đề 1. Điểm và đường thẳng

**Câu 1.** Xét các số phức  $z, w$  thỏa mãn  $|z+2-2i|=|z-4i|$  và  $w=iz+1$ . Giá trị nhỏ nhất của  $|w|$  bằng

- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .      B.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ .      C. 2.      D.  $2\sqrt{2}$ .

**Câu 2.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z|=|\bar{z}-1+2i|$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P=|(1+2i)z+11+2i|$  bằng

- A.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .      B.  $\sqrt{\frac{5}{2}}$ .      C.  $\frac{2}{5}$ .      D.  $\frac{5}{2}$ .

**Câu 3.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z+1-i|=|z-3i|$ . Môđun lớn nhất của số phức  $w=\frac{1}{z}$  là

- A.  $\frac{2\sqrt{5}}{7}$ .      B.  $\frac{4\sqrt{5}}{7}$ .      C.  $\frac{9\sqrt{5}}{10}$ .      D.  $\frac{7\sqrt{5}}{10}$ .

**Câu 4.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z^2-2z+5|=|(z-1+2i)(z+3i-1)|$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P=|z-2+2i|$  bằng

- A. 1.      B.  $\frac{3}{2}$ .      C.  $\frac{5}{2}$ .      D.  $\sqrt{5}$ .

**Câu 5.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z+2i|=|z-1-2i|$ . Gọi  $w$  là số phức thỏa mãn điều kiện  $w=(1+i)z+2$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P=|w|$  bằng

- A.  $\frac{1}{3}$ .      B.  $\frac{1}{5}$ .      C.  $\frac{5}{\sqrt{34}}$ .      D.  $\frac{5}{\sqrt{41}}$ .

**Câu 6.** Xét các số phức  $z, w$  thỏa mãn  $|z-1-3i|\leq|z+2i|$  và  $|w+1+3i|\leq|w-2i|$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P=|z-w|$  là

- A.  $\frac{\sqrt{13}+1}{2}$ .      B.  $\frac{\sqrt{26}}{4}$ .      C.  $\frac{3}{13}$ .      D.  $\frac{3\sqrt{26}}{13}$ .

## Vấn đề 2. Điểm và đường tròn

**Câu 1.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|-iz+1|=1$ . Gọi  $m, M$  lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức  $P=|z|$ . Tính  $S=2020-M+m$ .

- A.  $S=2014$ .      B.  $S=2016$ .      C.  $S=2018$ .      D.  $S=2022$ .

**Câu 2.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-2-3i|=1$ . Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P=|\bar{z}+1+i|$  lần lượt là

- A.  $\sqrt{13}+2$  và  $\sqrt{13}-2$ .      B.  $\sqrt{13}+1$  và  $\sqrt{13}-1$ .  
C. 6 và 4.      D.  $\sqrt{13}+4$  và  $\sqrt{13}-4$ .

**Câu 3.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|(1+i)z+1-7i|=\sqrt{2}$ . Gọi  $m, M$  lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của  $P=|z|$ . Tính  $S=M-m$ .

- A.  $S=2$ .      B.  $S=4$ .      C.  $S=10$ .      D.  $S=24$ .

**Câu 4.** Xét các số phức  $z, w$  thỏa mãn  $\left|\frac{(1+i)z}{1-i}+2\right|=1$  và  $w=iz$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $P=|z-w|$  bằng

- A. 3      B.  $2\sqrt{3}$       C.  $3\sqrt{2}$       D.  $3\sqrt{3}$

**Câu 5.** Xét các số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1-1+i|=1$  và  $z_2=2iz_1$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P=|2z_1-z_2|$  bằng

A.  $2 - \sqrt{2}$ .

B.  $2 - 2\sqrt{2}$ .

C.  $4 - 2\sqrt{2}$ .

D.  $8 - \sqrt{2}$ .

**Câu 6.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $z$  không phải là số thực và  $w = \frac{z}{2+z^2}$  là số thực. Tìm giá trị lớn nhất  $P_{\max}$  của biểu thức  $P = |z+1-i|$ .

A.  $P_{\max} = \sqrt{2}$ .

B.  $P_{\max} = 2$ .

C.  $P_{\max} = 2\sqrt{2}$ .

D.  $P_{\max} = 8$ .

**Câu 7.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z| \geq 2$ . Biểu thức  $P = \left| \frac{z+i}{z} \right|$  đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất lần lượt tại  $z_1$  và  $z_2$ . Tìm phần ảo  $a$  của số phức  $w = z_1 + z_2$ .

A.  $a = -4$ .

B.  $a = 0$ .

C.  $a = 1$ .

D.  $a = 4$ .

**Câu 8.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z| = 1$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của  $P = \left| \frac{2z+i}{z-2} \right|$ . Tỉ số  $\frac{M}{m}$  bằng

A.  $\frac{5+3\sqrt{2}}{4}$ .

B.  $\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$ .

C.  $\frac{10+6\sqrt{34}}{9}$ .

D.  $\frac{25+4\sqrt{34}}{9}$ .

**Câu 9.** Xét hai số phức  $z_1, z_2$  thay đổi thỏa mãn  $|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2 + 4 - 2i| = 2$ . Gọi  $A, B$  lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức  $|z_1|^2 + |z_2|^2$ . Giá trị của  $A+B$  là

A. 20.

B. 24.

C. 28.

D. 32.

**Câu 10.** Xét các số phức  $z, \omega$  thỏa mãn  $|z| = \sqrt{5}$  và  $\omega = (4-3i)z + 1 - 2i$ . Giá trị nhỏ nhất của  $|\omega|$  bằng

A.  $3\sqrt{5}$ .

B.  $4\sqrt{5}$ .

C.  $5\sqrt{5}$ .

D.  $6\sqrt{5}$ .

**Câu 11.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn đồng thời  $|z-1+2i| = \sqrt{5}$  và  $\omega = z+1+i$  có môđun lớn nhất. Số phức  $z$  có môđun bằng

A.  $\sqrt{6}$ .

B.  $2\sqrt{5}$ .

C.  $3\sqrt{2}$ .

D.  $5\sqrt{2}$ .

**Câu 12.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-2-4i| = 2\sqrt{2}$ . Trong các số phức  $w$  thỏa mãn  $w = z(1+i)$ , gọi  $w_1$  và  $w_2$  lần lượt là số phức có môđun nhỏ nhất và môđun lớn nhất. Khi đó  $w_1 + w_2$  bằng

A.  $-2+6i$ .

B.  $2+4i$ .

C.  $-4+12i$ .

D.  $4+8i$ .

**Câu 13.** Xét các số phức  $z$  thỏa  $|z-1+2i| = 2\sqrt{5}$  và số phức  $\omega$  thỏa  $(5+10i)\bar{\omega} = (3-4i)z - 25i$ . Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |\omega|$  bằng

A.  $2\sqrt{10}$ .

B. 4.

C.  $4\sqrt{5}$ .

D. 6.

**Câu 14.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z+\bar{z}| + |z-\bar{z}| = |z^2|$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = |z-5-2i|$  bằng

A.  $\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$ .

B.  $\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$ .

C.  $\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$ .

D.  $\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$ .

### Vấn đề 3. Đường thẳng và đường tròn

**Câu 1.** Xét các số phức  $z_1$  thỏa mãn  $|z_1-2|^2 - |z_1+i|^2 = 1$  và các số phức  $z_2$  thỏa mãn  $|z_2-4-i| = \sqrt{5}$ . Giá trị nhỏ nhất của  $P = |z_1 - z_2|$  bằng

A.  $\sqrt{5}$ .

B.  $2\sqrt{5}$ .

C.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

D.  $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ .

**Câu 2.** Gọi  $(C_1)$  là tập hợp các số phức  $w$  thỏa mãn  $|w+2-3i| \leq |w-3+2i|$ . Gọi  $(C_2)$  là tập hợp các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-2+4i| \leq 1$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |w-z|$  bằng

A.  $2\sqrt{3}-1$ .

B.  $2\sqrt{3}+1$ .

C.  $3\sqrt{2}-1$ .

D.  $3\sqrt{2}+1$ .

**Câu 3.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-2i| \leq |z-4i|$  và  $|z-3-3i|=1$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $P=|z-2|+1$  bằng

- A.  $\sqrt{5}+2$ . B.  $\sqrt{10}$  C.  $\sqrt{10}+1$ . D.  $\sqrt{13}+1$ .

**Câu 4.** Xét các số phức  $z, w$  thỏa mãn  $|iz-2i-2| \leq |z-1|$  và  $\max\{|w+2-2i|, |w|\} \leq \sqrt{2}$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P=|z-w|$  bằng

- A.  $\frac{1}{2\sqrt{5}}$ . B.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ . C.  $\frac{9}{2\sqrt{5}}$ . D.  $\frac{13}{2\sqrt{5}}$ .

**Câu 5.** Xét các số phức  $z, w$  thỏa mãn  $\begin{cases} \max\{|z|; |z-1-i|\} \leq 1 \\ |w+1+2i| \leq |w-2-i| \end{cases}$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P=|z-w|$  bằng

- A. 0. B.  $\frac{1}{6}$ . C.  $\sqrt{2}-1$ . D.  $2\sqrt{2}-1$ .

**Câu 6.** Kí hiệu  $S$  là tập hợp các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-1|=\sqrt{34}$  và  $|z+1+mi|=|z+m+2i|$  (trong đó  $m \in \mathbb{R}$ ). Gọi  $z_1, z_2$  là hai số phức thuộc tập hợp  $S$  sao cho  $|z_1-z_2|$  là lớn nhất. Khi đó, hãy tính giá trị của biểu thức  $|z_1+z_2|$ .

- A.  $|z_1+z_2|=\sqrt{2}$ . B.  $|z_1+z_2|=2$ . C.  $|z_1+z_2|=10$ . D.  $|z_1+z_2|=\sqrt{130}$ .

**Câu 7.** Biết số phức  $z=x+yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn đồng thời  $|z-(3+4i)|=\sqrt{5}$  và biểu thức  $P=|z+2|^2-|z-i|^2$  đạt giá trị lớn nhất. Tính  $|z|$ .

- A.  $|z|=\sqrt{33}$ . B.  $|z|=50$ . C.  $|z|=\sqrt{10}$ . D.  $|z|=5\sqrt{2}$ .

**Câu 8.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-1-3i|=\sqrt{13}$ . Gọi  $m, M$  lần lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức  $P=|z+2|^2-|z-3i|^2$ . Tổng  $m+M$  bằng

- A. 10. B. 25. C. 34. D. 40.

**Câu 9.** Xét các số phức  $z=x+yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $|(1+i)z+2-i|=4$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $T=|x+y+3|$  bằng

- A. 4. B.  $4\sqrt{2}$ . C.  $4+2\sqrt{2}$ . D. 8.

**Câu 10.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z+2|=|1+2i|$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P=|z-1-2i|+|z-3-4i|+|z-5-6i|$  được viết dưới dạng  $a\sqrt{b}$ , với  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản.

Giá trị của  $a+b$  bằng

- A. 10. B. 11. C. 12. D. 17.

**Câu 11.** Xét các số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1-3-4i|=1, |z_2+1|=|z_2-i|$  và  $\frac{z_1-z_2}{2-i}$  là số thực.

Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của  $|z_1-z_2|$ . Tính  $P=M+m$ .

- A.  $P=14\sqrt{5}$ . B.  $P=16\sqrt{5}$ . C.  $P=18\sqrt{5}$ . D.  $P=20\sqrt{5}$ .

**Câu 12.** Cho  $z_1$  là số phức,  $z_2$  là số thực thỏa mãn  $|z_1-2i|=1$  và  $\frac{z_2-z_1}{1+i}$  là số thực. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P=|z_1-z_2|$  là

- A. 2. B.  $2\sqrt{2}$ . C.  $3\sqrt{2}$ . D.  $4\sqrt{2}$ .

**Câu 13.** Cho  $z=x+yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) là số phức thỏa mãn  $|\bar{z}+2-3i| \leq |z+i-2| \leq 5$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của  $P=x^2+y^2+8x+6y$ . Giá trị  $M+m$  bằng

- A.  $\frac{156}{5}-2\sqrt{10}$ . B.  $\frac{156}{5}+2\sqrt{10}$ . C.  $60-20\sqrt{10}$ . D.  $60+20\sqrt{10}$ .

## Vấn đề 4. Đường tròn và đường tròn

**Câu 1.** Xét các số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1 - 4| = 1$  và  $|iz_2 - 2| = 1$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |z_1 + 2z_2|$  bằng

- A.  $2\sqrt{5} - 2$ .      B.  $4 - \sqrt{2}$ .      C.  $4\sqrt{2} - 3$ .      D.  $4\sqrt{2} + 3$ .

**Câu 2.** Xét các số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1 - 3i + 5| = 2$  và  $|iz_2 - 1 + 2i| = 4$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = |2iz_1 + 3z_2|$  bằng

- A.  $\sqrt{313} + 16$ .      B.  $\sqrt{313}$ .      C.  $\sqrt{313} + 8$ .      D.  $\sqrt{313} + 2\sqrt{5}$ .

**Câu 3.** Xét các số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1| = 12$  và  $|z_2 - 3 - 4i| = 5$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |z_1 - z_2|$  bằng

- A. 0.      B. 2.      C. 7.      D. 17.

**Câu 4.** Có bao nhiêu giá trị của tham số  $m$  để tồn tại duy nhất số phức  $z$  thỏa mãn  $z\bar{z} = 1$  và  $|z - \sqrt{3} + i| = m$  ?

- A. 0.      B. 1.      C. 2.      D. 3.

**Câu 5.** Gọi  $S$  là tập hợp các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - i| \geq 3$  và  $|z - 1| \leq 5$ . Gọi  $z_1, z_2 \in S$  lần lượt là các số phức có môđun nhỏ nhất và lớn nhất. Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A.  $z_1 + 2z_2 = 12 - 2i$ .      B.  $z_1 + 2z_2 = -2 + 12i$ .      C.  $z_1 + 2z_2 = 6 - 4i$ .      D.  $z_1 + 2z_2 = 12 + 4i$ .

**Câu 6.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $1 \leq |z - 2 + i| \leq 4$ . Gọi  $M$  là giá trị lớn nhất của  $|z - 2 + 3i|$ ,  $m$  là giá trị nhỏ nhất của  $|z + 2 - 2i|$ . Tính  $M + m$ .

- A.  $M + m = 3$ .      B.  $M + m = 5$ .      C.  $M + m = 6$ .      D.  $M + m = 7$ .

**Câu 7.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $\begin{cases} |z + 2i| \leq 2\sqrt{5} \\ |z - 4i| \leq 2\sqrt{2} \end{cases}$ . Giá trị lớn nhất của  $T = |\bar{z} + 1 - 4i|$  bằng

- A.  $3\sqrt{2}$ .      B.  $3\sqrt{5}$ .      C.  $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ .      D. 6.

**Câu 8.** Xét các số phức  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $\begin{cases} |z - 1 - i| \geq 1 \\ |z - 3 - 3i| \leq \sqrt{5} \end{cases}$ . Gọi  $m, M$  lần lượt là

giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = x + 2y$ . Tỷ số  $\frac{M}{m}$  bằng

- A.  $\frac{5}{4}$ .      B.  $\frac{7}{2}$ .      C.  $\frac{9}{4}$ .      D.  $\frac{14}{5}$ .

**Câu 9.** Xét các số phức  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $\begin{cases} |z - 1 - i| \geq 3 \\ |z - 3 - 4i| \leq \sqrt{10} \end{cases}$ . Giá trị nhỏ nhất của

biểu thức  $P = x + 3y$  bằng

- A. 5.      B. 7.      C. 13.      D.  $4 + 3\sqrt{10}$ .

## Vấn đề 5. Parabol

**Câu 1.** Xét các số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa  $4(z - \bar{z}) - 15i = i(z + \bar{z} - 1)^2$ . Tính  $P = -a + 4b$  khi  $\left|z - \frac{1}{2} + 3i\right|$  đạt giá trị nhỏ nhất.

- A.  $P = 4$ .      B.  $P = 5$ .      C.  $P = 6$ .      D.  $P = 7$ .

**Câu 2.** Xét hai số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $2|\bar{z}_1 + i| = |\bar{z}_1 - z_1 - 2i|$  và  $|z_2 - i - 10| = 1$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $|z_1 - z_2|$  bằng

- A.  $\sqrt{10} + 1$ .      B.  $3\sqrt{5} - 1$ .      C.  $\sqrt{\sqrt{101}} - 1$ .      D.  $\sqrt{\sqrt{101}} + 1$ .

## Vấn đề 6. Đoạn thẳng – tia

**Câu 1.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}$ . Gọi  $m, M$  lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của  $|z-1+i|$ . Tính  $P=m+M$ .

A.  $P=\sqrt{13}+\sqrt{73}$ .    B.  $P=\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$ .    C.  $P=5\sqrt{2}+2\sqrt{73}$ .    D.  $P=\frac{5\sqrt{2}+\sqrt{73}}{2}$ .

**Câu 2.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-1-i|+|z-8-3i|=\sqrt{53}$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $P=|z+1+2i|$  bằng

A.  $\sqrt{53}$ .    B. 53.    C.  $\frac{\sqrt{185}}{2}$ .    D.  $\sqrt{106}$ .

**Câu 3.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z+2-3i|+|z-6-i|=2\sqrt{17}$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P=||z+1-2i|-|z-2+i||$ .

A.  $M=3\sqrt{2}, m=0$ .    B.  $M=3\sqrt{2}, m=\sqrt{2}$ .  
C.  $M=3\sqrt{2}, m=5\sqrt{2}-2\sqrt{5}$ .    D.  $M=\sqrt{2}, m=5\sqrt{2}-2\sqrt{5}$ .

**Câu 4.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z+3-2i|+|z-3+i|=3\sqrt{5}$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P=|z+2|+|z-1-3i|$ .

A.  $M=\sqrt{17}+\sqrt{5}, m=3\sqrt{2}$ .    B.  $M=\sqrt{26}+2\sqrt{5}, m=3\sqrt{2}$ .  
C.  $M=\sqrt{26}+2\sqrt{5}, m=\sqrt{2}$ .    D.  $M=\sqrt{17}+\sqrt{5}, m=\sqrt{2}$ .

**Câu 5.** Xét các số phức  $z_1, z_2$  thỏa  $|z_1+1-2i|+|z_1-3-3i|=2\left|z_2-1-\frac{5}{2}i\right|=\sqrt{17}$ . Giá trị lớn nhất của  $P=|z_1-z_2|+|z_1+2-i|$  bằng

A.  $2\sqrt{17}$ .    B.  $3\sqrt{29}$ .    C.  $\sqrt{17}+\sqrt{29}$ .    D.  $\sqrt{17}+2\sqrt{29}$ .

**Câu 6.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|iz-2i-2|-|z+1-3i|=\sqrt{34}$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P=|(1+i)z+2i|$  bằng

A.  $\frac{9}{\sqrt{17}}$ .    B.  $3\sqrt{2}$ .    C.  $4\sqrt{2}$ .    D.  $\sqrt{26}$ .

**Câu 7.** Xét các số phức  $z$  đồng thời thỏa mãn  $|z-4+3i|+|\bar{z}+4+3i|=10$  và  $|z-3-4i|$  nhỏ nhất. Môđun của số phức  $z$  bằng

A. 5.    B.  $5\sqrt{2}$ .    C.  $6\sqrt{2}$ .    D. 10.

**Câu 8.** Xét các số phức  $z=a+bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $|z-1-2i|=|\bar{z}+3i|$ . Tính  $P=a+b$  khi  $T=||z-3-4i|-|z-1+i||$  đạt giá trị lớn nhất.

A.  $P=2$ .    B.  $P=6$ .    C.  $P=\frac{26}{3}$ .    D.  $P=\frac{28}{3}$ .

**Câu 9.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z+2|=|z+2i|$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P=|z-1-2i|+|z-3-4i|+|z-5-6i|$  được viết dưới dạng  $\frac{a+b\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$  với  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Tính  $a+b$ .

A.  $a+b=2$ .    B.  $a+b=3$ .    C.  $a+b=4$ .    D.  $a+b=7$ .

**Câu 10.** Xét các số phức  $z_1, z_2$  đồng thời thỏa mãn  $|z-1-2i|=|z-3+2i|$  và  $|z_1-z_2|=\sqrt{5}$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $|z_1-1-3i|+|z_2-1-3i|$  bằng

A.  $\frac{14\sqrt{5}}{5}$ .    B.  $\frac{3\sqrt{85}}{5}$ .    C.  $\frac{\sqrt{1105}}{5}$ .    D.  $\frac{\sqrt{1165}}{5}$ .

## Vấn đề 7. Phương pháp lấy đối xứng

**Câu 1.** Xét các số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $|z - 5 - 3i| = |z - 1 + 5i|$ . Tính  $a + b$  khi biểu thức  $P = |z - 2 - 2i| + |z + 3 - 7i|$  đạt giá trị nhỏ nhất.

- A.  $a + b = -1$ . B.  $a + b = 0$ . C.  $a + b = 1$ . D.  $a + b = 2$ .

**Câu 2.** Xét các số phức  $z, z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1 - 4 - 5i| = |z_2 - 1| = 1$  và  $|\bar{z} + 4i| = |z - 8 + 4i|$ . Tính  $M = |z_1 - z_2|$  khi  $P = |z - z_1| + |z - z_2|$  đạt giá trị nhỏ nhất.

- A.  $M = 2\sqrt{5}$ . B.  $M = 6$ . C.  $M = \sqrt{41}$ . D.  $M = 8$ .

**Câu 3.** Xét các số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1 + 3 + 2i| = 1$  và  $|z_2 + 2 - i| = 1$ . Số phức  $z$  có phần thực bằng  $a$ , phần ảo bằng  $b$  thỏa mãn  $2a - b = 0$ . Tính  $P = |a| + |b|$  khi  $|z - z_1| + |z - 2z_2|$  đạt giá trị nhỏ nhất.

- A.  $P = 1$ . B.  $P = 3$ . C.  $P = 4$ . D.  $P = 7$ .

**Câu 4.** Xét các số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1 - 5 + 3i| = |z_1 - 1 - 3i|$  và  $|z_2 - 4 - 3i| = |z_2 - 2 + 3i|$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |z_1 - z_2| + |\bar{z}_1 - 6 + i| + |\bar{z}_2 - 6 - i|$  bằng

- A.  $2\sqrt{10}$ . B.  $\frac{7}{2}$ . C.  $\frac{4\sqrt{130}}{13}$ . D.  $\frac{18}{\sqrt{13}}$ .

## Vấn đề 8. Tâm tử cự

**Câu 1.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z + 5 - i| = |2 + 3i|$ . Đặt  $P = |z + 3 - 9i|^2 + |z - 1 - 5i|^2$ . Biết  $P$  đạt giá trị nhỏ nhất tại  $z_1$  và  $P$  đạt giá trị lớn nhất tại  $z_2$ . Giá trị của biểu thức  $|z_1 - z_2|$  bằng

- A.  $2\sqrt{13}$ . B.  $2\sqrt{15}$ . C.  $4\sqrt{3}$ . D. 52.

**Câu 2.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z + 1 - 2i| = 3\sqrt{2}$ . Gọi  $m, M$  lần lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức  $P = |z - 3 + 2i|^2 - 2|z - 2 - i|^2$ . Tổng  $m + M$  bằng

- A. -30. B. -12. C. 14. D. 68.

**Câu 3.** Xét các số phức  $z = a + i$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $|z - 4 - 3i| = 5$ . Tính  $a + b$  khi biểu thức  $Q = |z + 2 - 2i|^2 + 2|z - 4 + i|^2 + 3|z + 2i|^2$  đạt giá trị lớn nhất.

- A.  $a + b = 11$ . B.  $a + b = 12$ . C.  $a + b = 13$ . D.  $a + b = 14$ .

**Câu 4.** Xét các số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z - 3 - 4i| = 2$  và  $|z_1 - z_2| = 1$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |z_1|^2 - |z_2|^2$  bằng

- A.  $-4 - 3\sqrt{5}$ . B.  $-6 - 2\sqrt{5}$ . C. -5. D. -10.

## Vấn đề 9. Phương pháp cân bằng hệ số

**Câu 1.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z| = 1$ . Giá trị lớn nhất của  $T = |z + 1| + 2|z - 1|$  bằng

- A.  $2\sqrt{5}$ . B.  $2\sqrt{10}$ . C.  $3\sqrt{2}$ . D.  $3\sqrt{5}$ .

**Câu 2.** Xét các số phức  $z$  thỏa  $|z - 1| = \sqrt{2}$ . Giá trị lớn nhất của  $T = |z + i| + |z - 2 - i|$  bằng

- A. 4. B.  $4\sqrt{2}$ . C. 8. D.  $8\sqrt{2}$ .

**Câu 3.** Xét các số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) có môđun bằng 2 và phần ảo dương. Tính giá trị biểu thức  $S = [5(a + b) + 2]^{2018}$  khi biểu thức  $P = |2 + z| + 3|2 - z|$  đạt giá trị lớn nhất.

- A.  $S = 0$ . B.  $S = 1$ . C.  $S = 2^{2018}$ . D.  $S = 2^{1009}$ .

**Câu 4.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $\left| \frac{z-1}{z+3i} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của  $P = |z+i| + 2|\bar{z}-4+7i|$ . Giá trị  $M+m$  bằng

- A.  $10+2\sqrt{5}$ .      B.  $10+4\sqrt{5}$ .      C.  $20+2\sqrt{5}$ .      D.  $20+4\sqrt{5}$ .

**Câu 5.** Xét số phức  $z$  thỏa mãn  $|z+1-2i| = 2\sqrt{2}$ . Với  $a, b$  là số thực dương cho trước, giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = a|z-1| + b|\bar{z}+3+4i|$  bằng

- A.  $\sqrt{a^2+b^2}$ .      B.  $\sqrt{2a^2+2b^2}$ .      C.  $4\sqrt{2a^2+2b^2}$ .      D.  $a^2+b^2$ .

**Câu 6.** Xét các số phức  $z = a+bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $|z-4-3i| = \sqrt{5}$ . Tính  $a+b$  khi biểu thức  $P = |z+1-3i| + |z-1+i|$  đạt giá trị lớn nhất.

- A.  $a+b=4$ .      B.  $a+b=6$ .      C.  $a+b=8$ .      D.  $a+b=10$ .

**Câu 7.** Xét các số phức  $z = a+bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $|z-4-3i| = 2\sqrt{2}$ . Tính  $2a+b$  khi biểu thức  $P = |z-1+2i| + |z-9-6i|$  đạt giá trị lớn nhất.

- A.  $2a+b=7$ .      B.  $2a+b=9$ .      C.  $2a+b=12$ .      D.  $2a+b=13$ .

**Câu 8.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-2-2i| = 1$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = |z-3-2i| + |2\bar{z}-2+4i|$  bằng

- A.  $\sqrt{5}$ .      B.  $2\sqrt{5}$ .      C.  $3\sqrt{15}$ .      D.  $\sqrt{10}$ .

**Câu 9.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-2-i| = 2\sqrt{2}$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |z+3-2i| + |z-3+4i|$ . Tính  $M+m$ .

- A.  $M+m = 2\sqrt{26} + 6\sqrt{2}$ .      B.  $M+m = 2\sqrt{26} + 8\sqrt{2}$ .  
C.  $M+m = 11\sqrt{2}$ .      D.  $M+m = 16\sqrt{2}$ .

**Câu 10.** Xét các số phức  $z = a+bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $|z-3-2i| = 2$ . Tính  $a+b$  khi biểu thức  $T = |z+1-2i| + 2|z-2-5i|$  đạt giá trị nhỏ nhất.

- A.  $a+b=3$ .      B.  $a+b=2+\sqrt{3}$ .      C.  $a+b=4-\sqrt{3}$ .      D.  $a+b=4+\sqrt{3}$ .

**Câu 11.** Xét các số phức  $z = a+bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $|z| = 2$ . Tính  $a+b$  khi biểu thức  $P = |z-4| + 2|z+1+4i|$  đạt giá trị nhỏ nhất.

- A.  $a+b=-2$ .      B.  $a+b=2$ .      C.  $a+b=2\sqrt{5}$ .      D.  $a+b=4\sqrt{5}$ .

**Câu 12.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $|z+i| = 1$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |\bar{z}-\sqrt{2}-i| + \sqrt{2}|z-\sqrt{2}+3i|$  bằng

- A.  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ .      B.  $\sqrt{2}$ .      C.  $\sqrt{3}$ .      D. 3.

**Câu 13.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $|z-1-i| = 5$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = 2|z-8i| - |z-7-9i|$  bằng

- A.  $\frac{5}{2}$ .      B.  $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ .      C.  $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ .      D.  $5\sqrt{5}$ .

**Câu 14.** Xét các số phức  $z$  thỏa  $|z|=1$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $T = |z+2| + 2|z-2|$  bằng

- A. 2.      B.  $2\sqrt{5}$ .      C. 5.      D.  $5\sqrt{2}$ .

**Câu 15.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|2z+1-3i| = \sqrt{2}$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = |z-1| + 3|z+1-2i|$  bằng

- A.  $2\sqrt{2}$ .      B. 4.      C.  $4\sqrt{2}$ .      D.  $4\sqrt{3}$ .

**Câu 16.** Cho số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $|z - 3 - 3i| = 6$ . Tính  $a + b$  khi biểu thức  $P = 2|z + 6 - 3i| + 3|z + 1 + 5i|$  đạt giá trị nhỏ nhất.

- A.  $a + b = 2 - 2\sqrt{5}$ .    B.  $a + b = 2\sqrt{5} - 2$ .    C.  $a + b = 2\sqrt{5} - 4$ .    D.  $a + b = 4 - 2\sqrt{5}$ .

### Vấn đề 10. Elip

**Câu 1.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z + 4| + |z - 4| = 10$ . Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của  $|z|$  lần lượt là

- A. 10 và 4.    B. 5 và 4.    C. 4 và 3.    D. 5 và 3.

**Câu 2.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $\left|iz + \frac{2}{1-i}\right| + \left|iz + \frac{2}{i-1}\right| = 4$ . Gọi  $M$  và  $n$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của  $|z|$ . Tính  $M.n$ .

- A.  $M.n = 1$ .    B.  $M.n = 2$ .    C.  $M.n = 2\sqrt{2}$ .    D.  $M.n = 2\sqrt{3}$ .

**Câu 3.** Xét số phức  $z$  thỏa mãn  $|(z + 2)i + 1| + |(\bar{z} - 2)i - 1| = 10$ . Gọi  $M$  và  $m$  là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của  $|z|$ . Tính tổng  $S = M + m$ .

- A.  $S = \sqrt{17}$ .    B.  $S = 2\sqrt{21}$ .    C.  $S = 8$ .    D.  $S = 9$ .

**Câu 4.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z + 1 - i| + |z - 3 + i| = 6$ . Tìm giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  của biểu thức  $P = |z + 1 + 4i|$ .

- A.  $P_{\min} = 2\sqrt{5} - 2$ .    B.  $P_{\min} = 2\sqrt{5} + 2$ .    C.  $P_{\min} = \sqrt{5} - 2$ .    D.  $P_{\min} = 5 - \sqrt{2}$ .

**Câu 5.** Xét các số phức  $z$  thỏa  $|z - 1 - i| + |z + 1 + 3i| = 6\sqrt{5}$ . Giá trị lớn nhất của  $P = |z - 2 - 3i|$  bằng

- A.  $2\sqrt{5}$ .    B.  $4\sqrt{5}$ .    C.  $5\sqrt{5}$ .    D.  $6\sqrt{5}$ .

----- HẾT -----

# Cực trị Hình học trong **SỐ PHỨC**

|                                     |    |
|-------------------------------------|----|
| 1) Điểm và đường thẳng.....         | 00 |
| 2) Điểm và đường tròn .....         | 00 |
| 3) Đường thẳng và đường tròn .....  | 00 |
| 4) Đường tròn và đường tròn .....   | 00 |
| 5) Parabol.....                     | 00 |
| 6) Đoạn thẳng – tia .....           | 00 |
| 7) Phương pháp lấy đối xứng .....   | 00 |
| 8) Tâm tỉ cự .....                  | 00 |
| 9) Phương pháp cân bằng hệ số ..... | 00 |
| 10) Elip .....                      | 00 |

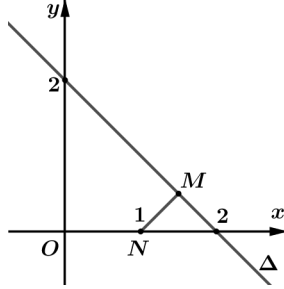
## Vấn đề 1. Điểm và đường thẳng

**Câu 1.** Xét các số phức  $z, w$  thỏa mãn  $|z+2-2i|=|z-4i|$  và  $w=iz+1$ . Giá trị nhỏ nhất của  $|w|$  bằng

- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .      B.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ .      C. 2.      D.  $2\sqrt{2}$ .

**Lời giải.** Đặt  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) và  $M(x; y)$  là điểm biểu diễn số phức  $z$ .

Từ  $|z+2-2i|=|z-4i| \longrightarrow (x+2)^2 + (y-2)^2 = x^2 + (y-4)^2 \Leftrightarrow x+y=2 \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  là đường thẳng  $\Delta: x+y=2$ .



Ta có  $P = |w| = |iz+1| = |i(z-i)| = |z-i| = MN$  với  $N(0;1)$ .

Dựa vào hình vẽ ta thấy  $P_{\min} = MN_{\min} = d(N, \Delta) = \frac{|0+1-2|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . **Chọn A.**

**Cách 2.** Đặt  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ). Từ  $|z+2-2i|=|z-4i| \longrightarrow y=2-x$ .

Khi đó  $w = iz+1 = i(x+yi)+1 = ix-y+1 = ix-(2-x)+1 = (x-1)+xi$ .

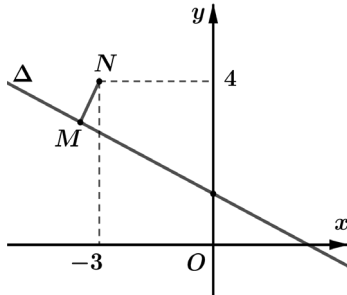
Suy ra  $|w| = \sqrt{(x-1)^2 + x^2} = \sqrt{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Câu 2.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z|=|\bar{z}-1+2i|$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |(1+2i)z+11+2i|$  bằng

- A.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .      B.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .      C.  $\frac{2}{5}$ .      D.  $\frac{5}{2}$ .

**Lời giải.** Đặt  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) và  $M(x; y)$  là điểm biểu diễn số phức  $z$ .

Từ  $|z|=|\bar{z}-1+2i| \longrightarrow x^2 + y^2 = (x-1)^2 + (-y+2)^2 \Leftrightarrow 2x+4y=5 \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  là đường thẳng  $\Delta: 2x+4y=5$ .



Ta có  $P = |(1+2i)z+11+2i| = |1+2i| \left| z + \frac{11+2i}{1+2i} \right| = \sqrt{5} |z+3-4i| = \sqrt{5} MN$  với  $N(-3;4)$ .

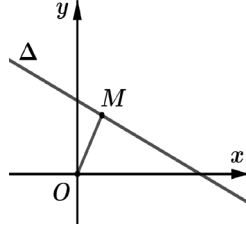
Dựa vào hình vẽ ta thấy  $P_{\min} \Leftrightarrow MN_{\min} \rightarrow P_{\min} = \sqrt{5} \cdot d(N, \Delta) = \sqrt{5} \frac{|2 \cdot (-3) + 4 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{20}} = \frac{5}{2}$ . **Chọn D.**

**Câu 3.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z+1-i|=|z-3i|$ . Môđun lớn nhất của số phức  $w = \frac{1}{z}$  là

- A.  $\frac{2\sqrt{5}}{7}$ .      B.  $\frac{4\sqrt{5}}{7}$ .      C.  $\frac{9\sqrt{5}}{10}$ .      D.  $\frac{7\sqrt{5}}{10}$ .

**Lời giải.** Đặt  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) và  $M(x; y)$  là điểm biểu diễn số phức  $z$ .

Từ  $|z+1-i|=|z-3i| \longrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = x^2 + (y-3)^2 \Leftrightarrow 2x+4y=7 \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  là đường thẳng  $\Delta: 2x+4y=7$ .



Ta có  $|w| = \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{OM}$  với  $O(0;0)$ .

Dựa vào hình vẽ ta thấy  $|w|_{\max} \Leftrightarrow OM_{\min} \rightarrow |w|_{\max} = \frac{1}{d(O, \Delta)} = \frac{\sqrt{20}}{|2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 7|} = \frac{2\sqrt{5}}{7}$ . **Chọn A.**

**Câu 4.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z^2 - 2z + 5| = |(z-1+2i)(z+3i-1)|$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |z-2+2i|$  bằng

- A. 1.      B.  $\frac{3}{2}$ .      C.  $\frac{5}{2}$ .      D.  $\sqrt{5}$ .

**Lời giải.** Ta có  $|z^2 - 2z + 5| = |(z-1+2i)(z+3i-1)|$

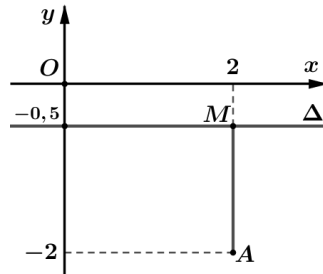
$$\Leftrightarrow |(z-1+2i)(z-1-2i)| = |(z-1+2i)(z+3i-1)| \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1-2i \\ |z-1-2i| = |z+3i-1| \end{cases}$$

● **TH 1.** Với  $z = 1-2i$ . Khi đó  $P = |z-2+2i| = |1-2i-2+2i| = 1$ .

● **TH 2.** Với  $|z-1-2i| = |z+3i-1|$ .

Đặt  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) và  $M(x; y)$  là điểm biểu diễn số phức  $z$ .

Từ  $|z-1-2i| = |z+3i-1| \longrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-1)^2 + (y+3)^2 \Leftrightarrow 2y+1=0 \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  là đường thẳng  $\Delta: 2y+1=0$ .



Ta có  $P = |z-2+2i| = MA$  với  $A(2; -2)$ .

Dựa vào hình vẽ ta thấy  $P_{\min} \Leftrightarrow MA_{\min} \rightarrow P_{\min} = d(A, \Delta) = \frac{|2 \cdot (-2) + 1|}{2} = \frac{3}{2}$ .

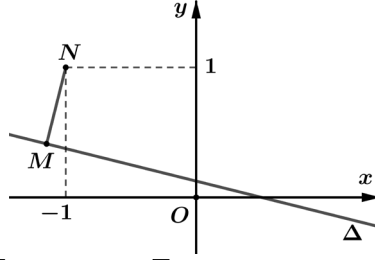
So sánh hai trường hợp ta thấy  $P_{\min} = 1$ . **Chọn A.**

**Câu 5.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z+2i|=|z-1-2i|$ . Gọi  $w$  là số phức thỏa mãn điều kiện  $w = (1+i)z + 2$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |w|$  bằng

- A.  $\frac{1}{3}$ .      B.  $\frac{1}{5}$ .      C.  $\frac{5}{\sqrt{34}}$ .      D.  $\frac{5}{\sqrt{41}}$ .

**Lời giải.** Đặt  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) và  $M(x; y)$  là điểm biểu diễn số phức  $z$ .

Từ  $|z+2i|=|z-1-2i| \longrightarrow x^2+(y+2)^2=(x-1)^2+(y-2)^2 \Leftrightarrow 2x+8y=1 \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  là đường thẳng  $\Delta: 2x+8y=1$ .



Ta có  $P=|w|=|(1+i)z+2|=\sqrt{2}|z+1-i|=\sqrt{2}MN$  với  $N(-1;1)$ .

Dựa vào hình vẽ ta thấy  $P_{\min}=MN_{\min} \rightarrow P_{\min}=\sqrt{2}d(N,\Delta)=\sqrt{2}\frac{|2\cdot(-1)+8\cdot1-1|}{\sqrt{68}}=\frac{5}{\sqrt{34}}$ . **Chọn C.**

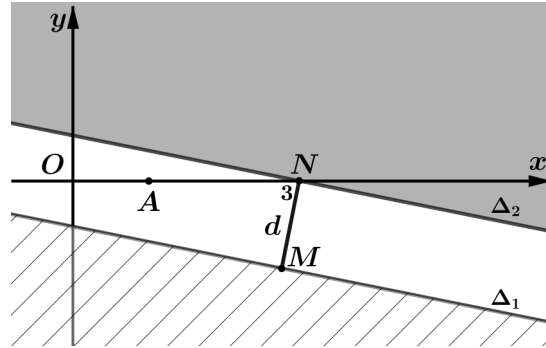
**Câu 6.** Xét các số phức  $z, w$  thỏa mãn  $|z-1-3i|\leq|z+2i|$  và  $|w+1+3i|\leq|w-2i|$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P=|z-w|$  là

- A.  $\frac{\sqrt{13}+1}{2}$ . B.  $\frac{\sqrt{26}}{4}$ . C.  $\frac{3}{13}$ . D.  $\frac{3\sqrt{26}}{13}$ .

**Lời giải.** Gọi  $z=a+bi$  và  $w=c+di$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ).

●  $|z-1-3i|\leq|z+2i| \longrightarrow (a-1)^2+(b-3)^2\leq a^2+(b+2)^2 \Leftrightarrow a+5b\geq 3 \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  là phần tô đậm như trên đồ thị có tính biên  $\Delta: x+5y=3$ .

●  $|w+1+3i|\leq|w-2i| \longrightarrow (c+1)^2+(d+3)^2\leq c^2+(d-2)^2 \Leftrightarrow c+5d\leq -3 \longrightarrow$  tập hợp điểm  $N$  biểu diễn số phức  $w$  là phần gạch chéo như trên đồ thị có tính biên  $\Delta': x+5y=-3$ .



Dựa vào hình vẽ ta thấy  $P=|z-w|=MN\geq d(\Delta;\Delta')=\frac{3\sqrt{26}}{13}$ .

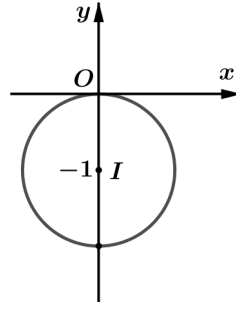
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi  $M \in \Delta$ ,  $N \in M$  và  $MN \perp \Delta'$ . **Chọn D.**

## Vấn đề 2. Điểm và đường tròn

**Câu 1.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|-iz+1|=1$ . Gọi  $m, M$  lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức  $P=|z|$ . Tính  $S=2020-M+m$ .

- A.  $S=2014$ . B.  $S=2016$ . C.  $S=2018$ . D.  $S=2022$ .

**Lời giải.** Ta có  $|-iz+1|=1 \Leftrightarrow |-i|\cdot|z+i|=1 \Leftrightarrow |z+i|=1 \longrightarrow$  tập hợp các điểm biểu diễn số phức  $z$  thuộc đường tròn có tâm  $I(0;-1)$ , bán kính  $R=1$ .



Khi đó  $\begin{cases} P_{\min} = |OI - R| = |1 - 1| = 0 \\ P_{\max} = OI + R = 1 + 1 = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ M = 2 \end{cases} \longrightarrow S = 2018. \text{ Chọn C.}$

**Câu 2.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - 2 - 3i| = 1$ . Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |\bar{z} + 1 + i|$  lần lượt là

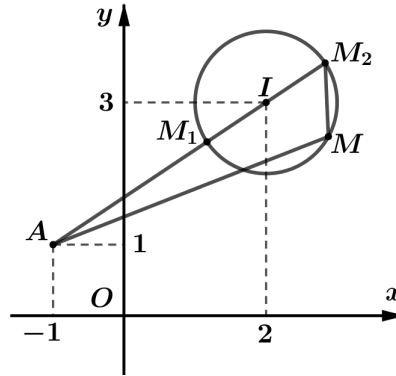
A.  $\sqrt{13} + 2$  và  $\sqrt{13} - 2$ .

B.  $\sqrt{13} + 1$  và  $\sqrt{13} - 1$ .

C. 6 và 4.

D.  $\sqrt{13} + 4$  và  $\sqrt{13} - 4$ .

**Lời giải.** Ta có  $|z - 2 - 3i| = 1 \longrightarrow$  tập hợp các điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  thuộc đường tròn có tâm  $I(2; 3)$ , bán kính  $R = 1$ .



Ta có  $P = |\bar{z} + 1 + i| = |z + 1 - i| = MA$  với  $A(-1; 1)$ .

Vậy  $\begin{cases} P_{\min} = AM_1 = |AI - R| = \sqrt{13} - 1 \\ P_{\max} = AM_2 = |AI + R| = \sqrt{13} + 1 \end{cases}. \text{ Chọn B.}$

**Cách 2.** Ta có  $P = |\bar{z} + 1 + i| = |z + 1 - i|$ .

Theo giả thiết:  $1 = |z - 2 - 3i| = |(z + 1 - i) - 3 - 2i| \geq \|z + 1 - i\| - \|-3 - 2i\| = |P - \sqrt{13}|$

Suy ra  $|P - \sqrt{13}| \leq 1 \longrightarrow -1 \leq P - \sqrt{13} \leq 1 \longleftrightarrow \sqrt{13} - 1 \leq P \leq \sqrt{13} + 1$ .

**Câu 3.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|(1+i)z + 1 - 7i| = \sqrt{2}$ . Gọi  $m, M$  lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của  $P = |z|$ . Tính  $S = M - m$ .

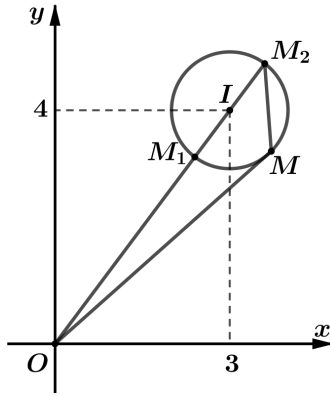
A.  $S = 2$ .

B.  $S = 4$ .

C.  $S = 10$ .

D.  $S = 24$ .

**Lời giải.** Ta có  $|(1+i)z + 1 - 7i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left| z + \frac{1-7i}{1+i} \right| = \frac{\sqrt{2}}{|1+i|} \Leftrightarrow |z - (3+4i)| = 1 \longrightarrow$  tập hợp các điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  thuộc đường tròn có tâm  $I(3; 4)$ , bán kính  $R = 1$ .



Khi đó  $\begin{cases} P_{\min} = OM_1 = |OI - R| = |5 - 1| = 4 \\ P_{\max} = OM_2 = OI + R = 5 + 1 = 6 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ M = 6 \end{cases} \longrightarrow S = 2. \text{ Chọn A.}$

**Câu 4.** Xét các số phức  $z, w$  thỏa mãn  $\left| \frac{(1+i)z}{1-i} + 2 \right| = 1$  và  $w = iz$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = |z - w|$  bằng

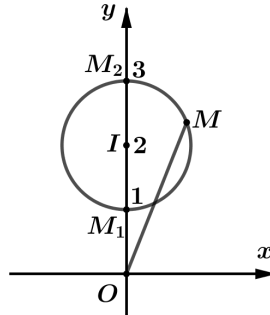
A. 3

B.  $2\sqrt{3}$

C.  $3\sqrt{2}$

D.  $3\sqrt{3}$

**Lời giải.** Từ  $\left| \frac{(1+i)z}{1-i} + 2 \right| = 1 \Leftrightarrow \left| z + \frac{2(1-i)}{1+i} \right| = \left| \frac{1-i}{1+i} \right| \Leftrightarrow |z - 2i| = 1 \longrightarrow$  tập hợp các điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  thuộc đường tròn có tâm  $I(0;2)$ , bán kính  $R = 1$ .



Theo giả thiết  $P = |z - w| \stackrel{w=iz}{=} |z - iz| = |z||1 - i| = \sqrt{2}|z| = \sqrt{2}OM$  với  $O(0;0)$ .

Dựa vào hình vẽ ta thấy  $P_{\max} = \sqrt{2}OM_2 = \sqrt{2}|OI + R| = \sqrt{2}|2 + 1| = 3\sqrt{2}. \text{ Chọn C.}$

**Câu 5.** Xét các số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1 - 1 + i| = 1$  và  $z_2 = 2iz_1$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |2z_1 - z_2|$  bằng

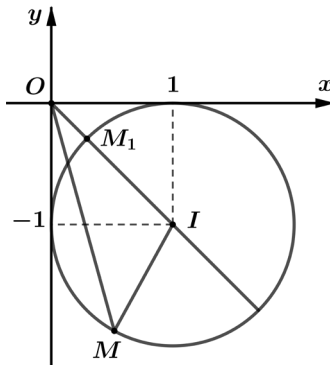
A.  $2 - \sqrt{2}$ .

B.  $2 - 2\sqrt{2}$ .

C.  $4 - 2\sqrt{2}$ .

D.  $8 - \sqrt{2}$ .

**Lời giải.** Từ  $|z_1 - 1 + i| = 1 \longrightarrow$  tập hợp các điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z_1$  thuộc đường tròn có tâm  $I(1; -1)$ , bán kính  $R = 1$ .



Theo giả thiết ta có  $P = |2z_1 - z_2| \stackrel{z_2=2iz_1}{=} |2z_1 - 2iz_1| = 2|1 - i||z_1| = 2\sqrt{2}OM$  với  $O(0;0)$ .

Dựa vào hình vẽ ta thấy  $P_{\min} = 2\sqrt{2}OM_1 = 2\sqrt{2}|OI - R| = 2\sqrt{2}|\sqrt{2} - 1| = 4 - 2\sqrt{2}$ . **Chọn C.**

**Câu 6.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $z$  không phải là số thực và  $w = \frac{z}{2+z^2}$  là số thực. Tìm giá trị lớn nhất  $P_{\max}$  của biểu thức  $P = |z+1-i|$ .

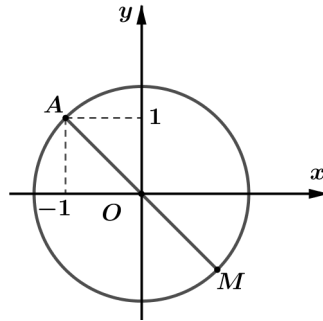
- A.  $P_{\max} = \sqrt{2}$ . B.  $P_{\max} = 2$ . C.  $P_{\max} = 2\sqrt{2}$ . D.  $P_{\max} = 8$ .

**Lời giải.** Vì  $z$  không phải là số thực nên  $z - \bar{z} \neq 0$ .

Ta có  $w = \frac{z}{2+z^2} \rightarrow \bar{w} = \frac{\bar{z}}{2+\bar{z}^2}$ . Vì  $w$  là số thực nên  $w = \bar{w} \Leftrightarrow \frac{z}{2+z^2} = \frac{\bar{z}}{2+\bar{z}^2}$

$$\Leftrightarrow z(2+\bar{z}^2) = \bar{z}(2+z^2) \Leftrightarrow 2(z-\bar{z}) = z\bar{z}(z-\bar{z}) \Leftrightarrow \begin{cases} z-\bar{z} = 0 \text{ (loại)} \\ z\bar{z} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow |z|^2 = 2 \rightarrow |z| = \sqrt{2}.$$

Suy ra tập hợp các điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  là đường tròn có tâm  $O(0;0)$ , bán kính  $R = \sqrt{2}$ .



Ta có  $P = |z+1-i| = MA$  với  $A(-1;1)$ . Vậy  $P_{\max} = AO + R = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ . **Chọn C.**

**Câu 7.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z| \geq 2$ . Biểu thức  $P = \left| \frac{z+i}{z} \right|$  đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất lần lượt tại  $z_1$  và  $z_2$ . Tìm phần ảo  $a$  của số phức  $w = z_1 + z_2$ .

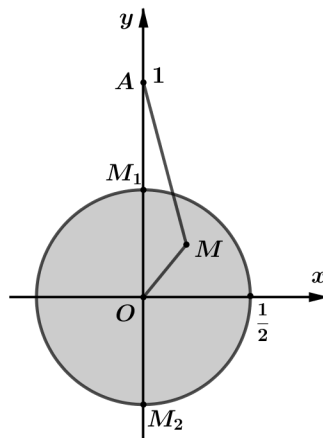
- A.  $a = -4$ . B.  $a = 0$ . C.  $a = 1$ . D.  $a = 4$ .

**Lời giải.** Biến đổi  $P = \left| \frac{z+i}{z} \right| = \left| 1 + \frac{i}{z} \right| = \left| i - \frac{1}{z} \right| = \left| \frac{1}{z} - i \right|$ .

$$\text{Đặt } z' = \frac{1}{z}, \text{ khi đó } \begin{cases} |z'| \leq \frac{1}{2} & (1) \\ P = |z' - i| & (2) \end{cases}$$

• (1)  $\rightarrow$  tập hợp các số phức  $z'$  là hình tròn tâm  $O(0;0)$ , bán kính  $R = \frac{1}{2}$  (trừ tâm  $O$ ).

• Xét (2). Đặt  $A(0;1) \rightarrow P = MA$  với  $M$  là điểm biểu diễn của số phức  $z'$ .



Dựa vào hình vẽ, ta thấy 
$$\begin{cases} P_{\min} = AM_1 = \frac{1}{2} \text{ khi } z' = \frac{1}{2}i \longrightarrow z = \frac{1}{z} = -2i \\ P_{\max} = AM_2 = \frac{3}{2} \text{ khi } z' = -\frac{1}{2}i \longrightarrow z = \frac{1}{z} = 2i \end{cases}$$
  
 $\longrightarrow \begin{cases} z_1 = -2i \\ z_2 = 2i \end{cases} \longrightarrow w = 0 + 0i$ . **Chọn B.**

**Câu 8.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z| = 1$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của  $P = \left| \frac{2z+i}{z-2} \right|$ . Tỷ số  $\frac{M}{m}$  bằng

- A.  $\frac{5+3\sqrt{2}}{4}$ . B.  $\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$ . C.  $\frac{10+6\sqrt{34}}{9}$ . D.  $\frac{25+4\sqrt{34}}{9}$ .

**Lời giải.** Đặt  $w = \frac{2z+i}{z-2} \Leftrightarrow w(z-2) = 2z+i \Leftrightarrow z(w-2) = 2w+i \longrightarrow z = \frac{2w+i}{w-2}$ .

Theo giả thiết  $|z| = 1 \longrightarrow \left| \frac{2w+i}{w-2} \right| = 1 \Leftrightarrow |2w+i| = |w-2|$ .

Gọi  $w = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ). Khi đó từ  $|2w+i| = |w-2|$

$$\longrightarrow (2x)^2 + (2y+1)^2 = (x-2)^2 + y^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{17}{9}$$

$\longrightarrow$  tập hợp các điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  thuộc đường tròn có tâm  $I\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ , bán kính  $R = \frac{\sqrt{17}}{3}$ .

Do đó  $P = \left| \frac{2z+i}{z-2} \right| = |w| \longrightarrow \begin{cases} P_{\max} = OI + R = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{17}}{3} \\ P_{\min} = |OI - R| = -\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{17}}{3} \end{cases} \longrightarrow \frac{M}{m} = \frac{25+4\sqrt{34}}{9}$ . **Chọn D.**

**Câu 9.** Xét hai số phức  $z_1, z_2$  thay đổi thỏa mãn  $|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2 + 4 - 2i| = 2$ . Gọi  $A, B$  lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức  $|z_1|^2 + |z_2|^2$ . Giá trị của  $A + B$  là

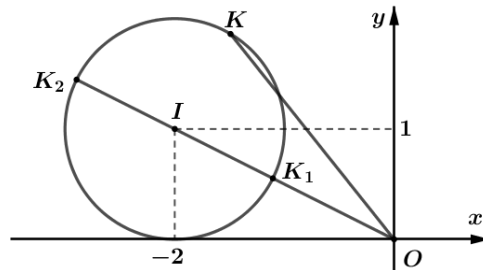
- A. 20. B. 24. C. 28. D. 32.

**Lời giải.** Gọi  $M, N$  lần lượt là điểm biểu diễn của hai số phức  $z_1, z_2$ .

Gọi  $K$  là trung điểm của  $MN \longrightarrow K$  là điểm biểu diễn của số phức  $\frac{z_1 + z_2}{2}$ .

•  $|z_1 - z_2| = 2 \longrightarrow MN = 2$ .

•  $|z_1 + z_2 + 4 - 2i| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{z_1 + z_2}{2} + 2 - i \right| = 1 \longrightarrow$  tập hợp các điểm  $K$  thuộc đường tròn có tâm  $I(-2; 1)$ , bán kính  $R = 1$ .



Ta có  $T = |z_1|^2 + |z_2|^2 = OM^2 + ON^2 = 2OK^2 + \frac{MN^2}{2} \stackrel{MN=2}{=} 2OK^2 + 2$ .

Suy ra  $T_{\max} \Leftrightarrow OK_{\max}$ , mà  $OK_{\max} = OI + R = 1 + \sqrt{5} \longrightarrow T_{\max} = 2(1 + \sqrt{5})^2 + 2 = 14 + 4\sqrt{5}$ ;

$$T_{\min} \Leftrightarrow OK_{\min}, \text{ mà } OK_{\min} = |OI - R| = |1 - \sqrt{5}| \longrightarrow T_{\min} = 2(1 - \sqrt{5})^2 + 2 = 14 - 4\sqrt{5}.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} A = 14 - 4\sqrt{5} \\ B = 14 + 4\sqrt{5} \end{cases} \longrightarrow A + B = 28. \text{ Chọn C.}$$

$$\text{Cách 2. Ta có } 2T = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 4 + |z_1 + z_2|^2.$$

$$\text{Từ } |z_1 + z_2 + 4 - 2i| = 2 \longrightarrow \begin{cases} 2 \leq |z_1 + z_2| + |4 - 2i| \\ 2 \geq |z_1 + z_2| - |4 - 2i| \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} |z_1 + z_2| \geq 2\sqrt{5} - 2 \\ |z_1 + z_2| \leq 2\sqrt{5} - 2 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } 14 - 4\sqrt{5} \leq T \leq 14 + 4\sqrt{5}.$$

**Câu 10.** Xét các số phức  $z, \omega$  thỏa mãn  $|z| = \sqrt{5}$  và  $\omega = (4 - 3i)z + 1 - 2i$ . Giá trị nhỏ nhất của  $|\omega|$  bằng

A.  $3\sqrt{5}$ .

B.  $4\sqrt{5}$ .

C.  $5\sqrt{5}$ .

D.  $6\sqrt{5}$ .

**Lời giải.** Ta có  $\omega = (4 - 3i)z + 1 - 2i \Leftrightarrow \omega - 1 + 2i = (4 - 3i)z$ .

Suy ra  $|\omega - 1 + 2i| = |(4 - 3i)z| = |4 - 3i| \cdot |z| = 5\sqrt{5} \longrightarrow$  tập hợp các điểm  $M$  biểu diễn số phức  $\omega$  thuộc đường tròn có tâm  $I(1; -2)$ , bán kính  $R = 5\sqrt{5}$ .

$$\text{Vậy } |\omega|_{\min} = |OI - R| = |\sqrt{5} - 5\sqrt{5}| = 4\sqrt{5}. \text{ Chọn B.}$$

**Câu 11.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn đồng thời  $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5}$  và  $\omega = z + 1 + i$  có môđun lớn nhất. Số phức  $z$  có môđun bằng

A.  $\sqrt{6}$ .

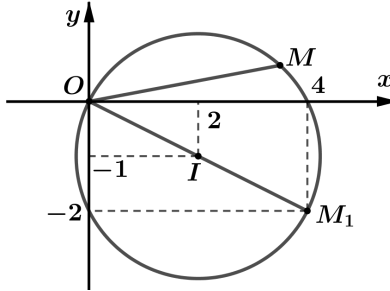
B.  $2\sqrt{5}$ .

C.  $3\sqrt{2}$ .

D.  $5\sqrt{2}$ .

**Lời giải.** Ta có  $\omega = z + 1 + i \Leftrightarrow \omega = (z - 1 + 2i) + 2 - i \Leftrightarrow \omega - 2 + i = (z - 1 + 2i)$ .

Suy ra  $|\omega - 2 + i| = |z - 1 + 2i| = \sqrt{5} \longrightarrow$  tập hợp các điểm  $M$  biểu diễn số phức  $\omega$  thuộc đường tròn có tâm  $I(2; -1)$ , bán kính  $R = \sqrt{5}$ .



Dựa vào hình vẽ ta thấy số phức  $\omega$  có môđun lớn nhất có điểm biểu diễn là  $M_1(4; -2)$ .

$$\text{Với } M_1(4; -2) \longrightarrow \omega = 4 - 2i \xrightarrow{\omega = z + 1 + i} z = 3 - 3i \Rightarrow |z| = 3\sqrt{2}. \text{ Chọn C.}$$

**Câu 12.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - 2 - 4i| = 2\sqrt{2}$ . Trong các số phức  $w$  thỏa mãn  $w = z(1 + i)$ , gọi  $w_1$  và  $w_2$  lần lượt là số phức có môđun nhỏ nhất và môđun lớn nhất. Khi đó  $w_1 + w_2$  bằng

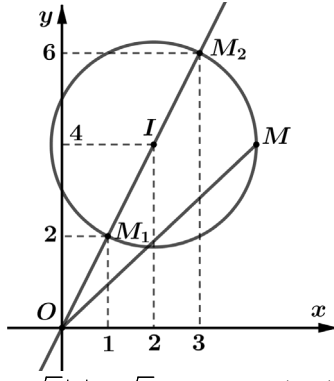
A.  $-2 + 6i$ .

B.  $2 + 4i$ .

C.  $-4 + 12i$ .

D.  $4 + 8i$ .

**Lời giải.** Từ  $|z - 2 - 4i| = 2\sqrt{2} \longrightarrow$  tập hợp các điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  thuộc đường tròn có tâm  $I(2; 4)$ , bán kính  $R = 2\sqrt{2}$ .



Ta có  $P = |w| = |z(1+i)| = |z| \cdot |1+i| = \sqrt{2}|z| = \sqrt{2}OM$  với  $O(0;0)$ .

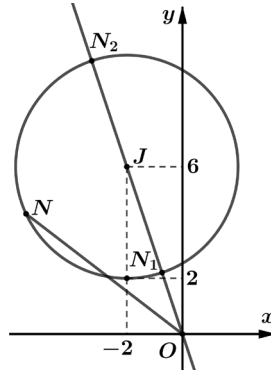
Dựa vào hình vẽ ta thấy

- $P_{\min} = \sqrt{2}OM_1$ . Dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow M \equiv M_1 \Leftrightarrow z = 1+2i \longrightarrow w_1 = (1+2i)(1+i) = -1+3i$ .
- $P_{\max} = \sqrt{2}OM_2$ . Dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow M \equiv M_2 \Leftrightarrow z = 3+6i \longrightarrow w_2 = (3+6i)(1+i) = -3+9i$ .

Vậy  $w_1 + w_2 = -4 + 12i$ . **Chọn C.**

**Cách 2.** Ta có  $w = z(1+i) \Leftrightarrow w = (1+i)(z-2-4i) - 2+6i \Leftrightarrow w+2-6i = (1+i)(z-2-4i)$ .

Suy ra  $|w+2-6i| = |(1+i)(z-2-4i)| = |1+i| \cdot |z-2-4i| = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4 \longrightarrow$  tập hợp các điểm  $N$  biểu diễn số phức  $w$  thuộc đường tròn có tâm  $J(-2;6)$ , bán kính  $r = 4$ .



Dựa vào hình vẽ ra thấy số phức  $w$  có môđun nhỏ nhất có điểm biểu diễn là  $N_1$ ; phức  $w$  có môđun lớn nhất có điểm biểu diễn là  $N_2$ .

Khi đó  $w_1 + w_2 = \overrightarrow{ON_1} + \overrightarrow{ON_2} = 2\overrightarrow{OJ} \longrightarrow w_1 + w_2 = 2(-2+6i) = -4+12i$ .

**Câu 13.** Xét các số phức  $z$  thỏa  $|z-1+2i| = 2\sqrt{5}$  và số phức  $\omega$  thỏa  $(5+10i)\bar{\omega} = (3-4i)z - 25i$ .

Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |\omega|$  bằng

- A.  $2\sqrt{10}$ .      B. 4.      C.  $4\sqrt{5}$ .      D. 6.

**Lời giải.** Ta có  $(5+10i)\bar{\omega} = (3-4i)z - 25i$

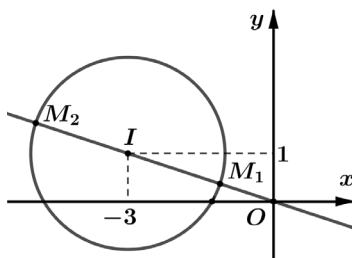
$$\Leftrightarrow (5+10i)\bar{\omega} = (3-4i)(z-1+2i) - 5-35i \text{ (mục đích để tạo ra } z-1+2i \text{)}$$

$$\Leftrightarrow (5+10i)\bar{\omega} + 5 + 35i = (3-4i)(z-1+2i) \text{ (chuyển vế)}.$$

Suy ra  $|(5+10i)\bar{\omega} + 5 + 35i| = |(3-4i)(z-1+2i)| = 5 \cdot 2\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$ .

$$\Leftrightarrow \left| \bar{\omega} + \frac{5+35i}{5+10i} \right| = \frac{10\sqrt{5}}{|5+10i|} \Leftrightarrow |\bar{\omega} + 3+i| = 2 \Leftrightarrow |\omega + 3-i| = 2 \longrightarrow \text{tập hợp các điểm } M \text{ biểu}$$

diễn số phức  $\omega$  thuộc đường tròn có tâm  $I(-3;1)$ , bán kính  $R = 2$ .



Dựa vào hình vẽ ta thấy  $\begin{cases} P_{\min} = OM_1 = OI - R = \sqrt{10} - 2 \\ P_{\max} = OM_2 = OI + R = \sqrt{10} + 2 \end{cases} \longrightarrow P_{\min} + P_{\max} = 2\sqrt{10}$ . **Chọn A.**

**Câu 14.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z^2|$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = |z - 5 - 2i|$  bằng

A.  $\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$ .

B.  $\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$ .

C.  $\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$ .

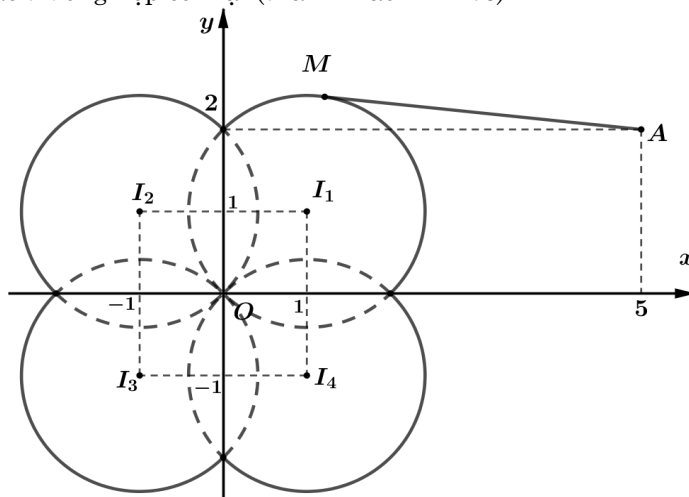
D.  $\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$ .

**Lời giải.** Đặt  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ), suy ra  $\bar{z} = x - yi \longrightarrow \begin{cases} z + \bar{z} = 2x \\ z - \bar{z} = 2yi \\ |z^2| = |z|^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$ .

Từ giả thiết  $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z^2| \longrightarrow 2|x| + 2|y| = x^2 + y^2$ . (\*)

● **TH 1.**  $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ , khi đó (\*) trở thành  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$  có hình biểu diễn là cung tròn nét liền ở góc phần tư thứ (I).

● Tương tự cho các trường hợp còn lại (tham khảo hình vẽ)



Gọi  $A(5; 2)$  và  $M(x; y)$  là điểm biểu diễn số phức  $z$ , khi đó  $P = |z - 5 - 2i| = MA$ .

Vì  $A$  nằm ở góc phần tư thứ (I) nên  $MA$  lớn nhất khi  $M$  phải nằm ở góc phần tư thứ (III).

Suy ra  $MA_{\max} = AI_3 + R_3 = 3\sqrt{5} + \sqrt{2}$ . Vậy  $\max P = 3\sqrt{5} + \sqrt{2}$ . **Chọn A.**

### Vấn đề 3. Đường thẳng và đường tròn

**Câu 1.** Xét các số phức  $z_1$  thỏa mãn  $|z_1 - 2|^2 - |z_1 + i|^2 = 1$  và các số phức  $z_2$  thỏa mãn  $|z_2 - 4 - i| = \sqrt{5}$ . Giá trị nhỏ nhất của  $P = |z_1 - z_2|$  bằng

A.  $\sqrt{5}$ .

B.  $2\sqrt{5}$ .

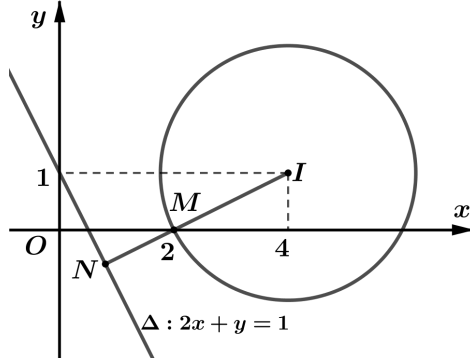
C.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

D.  $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ .

**Lời giải.** Gọi  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ). Ta có

●  $|z - 2|^2 - |z + i|^2 = 1 \longrightarrow (x-2)^2 + y^2 - x^2 - (y+1)^2 = 1 \Leftrightarrow 2x + y - 1 = 0 \longrightarrow$  tập hợp các số phức  $z_1$  là đường thẳng  $\Delta: 2x + y - 1 = 0$ .

- $|z - 4 - i| = \sqrt{5} \longrightarrow |(x-4) + (y-1)i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-1)^2 = 5 \longrightarrow$  tập hợp các số phức  $z_2$  là đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(4;1)$ , bán kính  $R = \sqrt{5}$ .



Khi đó biểu thức  $P = |z_1 - z_2|$  là khoảng cách từ một điểm thuộc  $\Delta$  đến một điểm thuộc  $(C)$ .

Từ đó suy ra  $P_{\min} = MN = |d[I, \Delta] - R| = \left| \frac{8}{\sqrt{5}} - \sqrt{5} \right| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ . **Chọn D.**

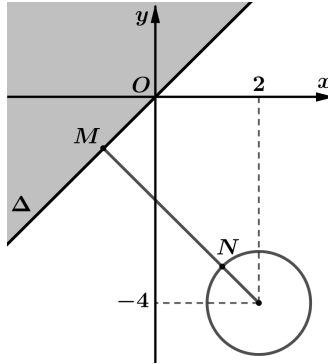
**Câu 2.** Gọi  $(C_1)$  là tập hợp các số phức  $w$  thỏa mãn  $|w + 2 - 3i| \leq |w - 3 + 2i|$ . Gọi  $(C_2)$  là tập hợp các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - 2 + 4i| \leq 1$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |w - z|$  bằng

- A.  $2\sqrt{3} - 1$ .      B.  $2\sqrt{3} + 1$ .      C.  $3\sqrt{2} - 1$ .      D.  $3\sqrt{2} + 1$ .

**Lời giải.** Đặt  $z = x + yi$ ;  $w = a + bi$  ( $x, y, a, b \in \mathbb{R}$ ). Ta có

- $|w + 2 - 3i| \leq |w - 3 + 2i| \longrightarrow (a+2)^2 + (b-3)^2 \leq (a-3)^2 + (b+2)^2 \Leftrightarrow a-b \leq 0 \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $w$  thuộc nửa mặt phẳng bờ  $\Delta: x - y = 0$  và kể cả bờ (miền tô đậm như hình vẽ). Gọi miền này là  $(C_1)$ .

- $|z - 2 + 4i| \leq 1 \longrightarrow |(x-2) + (y+4)i| \leq 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+4)^2 \leq 1 \longrightarrow$  tập hợp điểm  $N$  biểu diễn số phức  $z$  là hình tròn  $(C_2)$  có tâm  $I(2; -4)$ , bán kính  $R = 1$ .



Khi đó biểu thức  $P = |z - w| = MN$  là khoảng cách từ một điểm thuộc  $(C_1)$  đến một điểm thuộc  $(C_2)$ .

Từ đó suy ra  $P_{\min} = |d[I, \Delta] - R| = 3\sqrt{2} - 1$ . **Chọn C.**

**Câu 3.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - 2i| \leq |z - 4i|$  và  $|z - 3 - 3i| = 1$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = |z - 2| + 1$  bằng

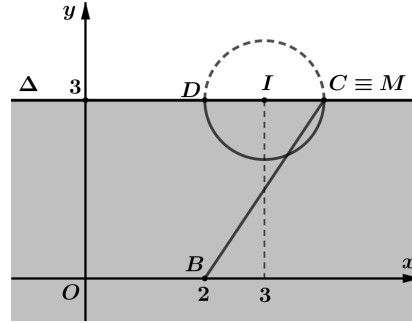
- A.  $\sqrt{5} + 2$ .      B.  $\sqrt{10}$       C.  $\sqrt{10} + 1$ .      D.  $\sqrt{13} + 1$ .

**Lời giải.** Gọi  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ). Ta có

- $|z - 2i| \leq |z - 4i| \longrightarrow x^2 + (y-2)^2 \leq x^2 + (y-4)^2 \Leftrightarrow y \leq 3 \longrightarrow$  tập hợp điểm biểu diễn số phức  $z$  thuộc nửa mặt phẳng bờ  $\Delta: y = 3$ , kể cả bờ (miền tô đậm). Gọi miền này là  $(C_1)$ .

- $|z - 3 - 3i| = 1 \longrightarrow |(x-3) + (y-3)i| = 1 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-3)^2 = 1 \longrightarrow$  tập hợp điểm biểu diễn số phức  $z$  là đường tròn  $(C_2)$  có tâm  $I(3;3)$ , bán kính  $R = 1$ .

Như vậy tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  là giao của  $(C_1)$  và  $(C_2)$ . Đó chính là phần cung tròn nét liền như trên hình vẽ (có tính 2 điểm đầu mút  $D(2;3)$ ,  $C(4;3)$  của cung).



Khi đó  $P = |z - 2| + 1 = MB + 1$  với  $B(2;0)$  và  $MB$  là khoảng cách từ điểm  $B$  đến một điểm thuộc cung tròn  $CD$ .

Từ đó suy ra  $P_{\max} = BC + 1 = \sqrt{13} + 1$ . **Chọn D.**

**Câu 4.** Xét các số phức  $z, w$  thỏa mãn  $|iz - 2i - 2| \leq |z - 1|$  và  $\max\{|w + 2 - 2i|, |w|\} \leq \sqrt{2}$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |z - w|$  bằng

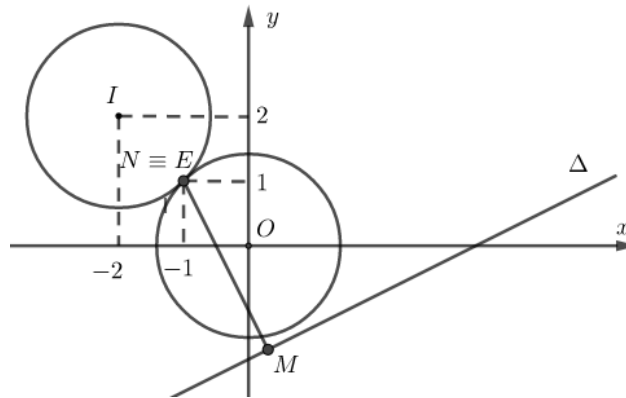
- A.  $\frac{1}{2\sqrt{5}}$ .      B.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .      C.  $\frac{9}{2\sqrt{5}}$ .      D.  $\frac{13}{2\sqrt{5}}$ .

**Lời giải.** Gọi  $M(x; y)$ ,  $N$  lần lượt là điểm biểu diễn của hai số phức  $z, w$ .

•  $|iz - 2i - 2| \leq |z - 1| \Leftrightarrow |z - 2 + 2i| \leq |z - 1|$   
 $\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 2)^2 \leq (x - 1)^2 + y^2 \Leftrightarrow -2x + 4y + 7 \leq 0 \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  thuộc nửa mặt phẳng bờ  $\Delta: -2x + 4y + 7 = 0$  không chứa  $O$  (kể cả bờ).

•  $\max\{|w + 2 - 2i|, |w|\} \leq \sqrt{2}$ , suy ra  $\begin{cases} |w + 2 - 2i| \leq \sqrt{2} \\ |w| \leq \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NI \leq \sqrt{2}, I(-2; 2) \\ NO \leq \sqrt{2}, O(0; 0) \end{cases}$

$\longrightarrow N$  thuộc phần chung của hai hình tròn  $(I; \sqrt{2})$  và  $(O; \sqrt{2})$ . Mà hai hình tròn này tiếp xúc ngoài tại điểm  $E(-1; 1)$ . Do đó  $N \equiv E(-1; 1)$ .



Ta có  $P = |z - w| = MN$  nên  $P$  nhỏ nhất khi  $MN$  ngắn nhất, khi đó  $M$  là hình chiếu của  $N$  trên  $\Delta$  và  $P_{\min} = d(N, \Delta) = \frac{|-2(-1) + 4 \cdot 1 + 7|}{\sqrt{(-2)^2 + 4^2}} = \frac{13}{2\sqrt{5}}$ . **Chọn D.**

**Câu 5.** Xét các số phức  $z, w$  thỏa mãn  $\begin{cases} \max\{|z|; |z - 1 - i|\} \leq 1 \\ |w + 1 + 2i| \leq |w - 2 - i| \end{cases}$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = |z - w|$  bằng

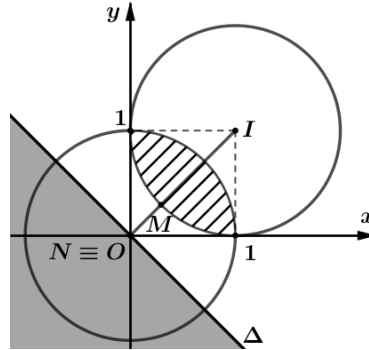
- A. 0.      B.  $\frac{1}{6}$ .      C.  $\sqrt{2} - 1$ .      D.  $2\sqrt{2} - 1$ .

**Lời giải.** Gọi  $M, N(x; y)$  lần lượt là điểm biểu diễn của hai số phức  $z, w$ .

•  $|w+1+2i| \leq |w-2-i| \longrightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 \leq (x-2)^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow x+y \leq 0 \longrightarrow$  tập hợp điểm  $N$  biểu diễn số phức  $w$  thuộc nửa mặt phẳng bờ  $\Delta: x+y=0$  và kể cả bờ (miền tô đậm như hình vẽ).

•  $\max\{|z|; |z-1-i|\} \leq 1$ , suy ra  $\begin{cases} |z-1-i| \leq 1 \\ |z| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MI \leq 1, I(1;1) \\ MO \leq 1, O(0;0) \end{cases}$

$\longrightarrow M$  thuộc phần chung của hai hình tròn  $(I; 1)$  và  $(O; 1)$  (phần gạch sọc như hình vẽ).



Ta có  $P = |z-w| = MN$  nên  $P$  nhỏ nhất khi  $MN$  ngắn nhất. Dựa vào hình vẽ ta thấy  $MN$  ngắn nhất khi  $N \equiv O$  và  $MN_{\min} = OI - 1 = \sqrt{2} - 1$ . **Chọn C.**

**Câu 6.** Kí hiệu  $S$  là tập hợp các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-1| = \sqrt{34}$  và  $|z+1+mi| = |z+m+2i|$  (trong đó  $m \in \mathbb{R}$ ). Gọi  $z_1, z_2$  là hai số phức thuộc tập hợp  $S$  sao cho  $|z_1 - z_2|$  là lớn nhất. Khi đó, hãy tính giá trị của biểu thức  $|z_1 + z_2|$ .

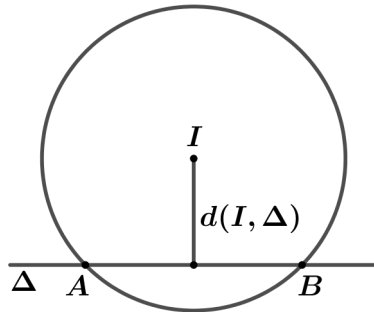
- A.  $|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$ .      B.  $|z_1 + z_2| = 2$ .      C.  $|z_1 + z_2| = 10$ .      D.  $|z_1 + z_2| = \sqrt{130}$ .

**Lời giải.** Đặt  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ). Khi đó

•  $|z-1| = \sqrt{34} \longrightarrow$  tập hợp điểm biểu diễn số phức  $z$  thuộc đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(1;0)$ , bán kính  $R = \sqrt{34}$ . (1)

•  $|z+1+mi| = |z+m+2i| \Leftrightarrow (2m-2)x + (4-2m)y + 3 = 0 \longrightarrow$  tập hợp điểm biểu diễn số phức  $z$  thuộc đường thẳng  $\Delta: (2m-2)x + (4-2m)y + 3 = 0$ . (2)

Từ (1) và (2), suy ra tập các điểm biểu diễn số phức  $z$  của tập  $S$  là giao điểm của  $\Delta$  và  $(C)$ .



Gọi  $A, B$  lần lượt là các điểm biểu diễn của hai số phức  $z_1, z_2$ . Suy ra  $|z_1 - z_2| = AB$ .

Để  $AB$  lớn nhất  $\Leftrightarrow d(I, \Delta)$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow \Delta$  đi qua điểm  $I$ .

Khi đó  $I$  là trung điểm của  $AB$  nên  $|z_1 + z_2| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = 2|\overrightarrow{OI}| = 2OI = 2$ . **Chọn B.**

**Câu 7.** Biết số phức  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn đồng thời  $|z-(3+4i)| = \sqrt{5}$  và biểu thức  $P = |z+2|^2 - |z-i|^2$  đạt giá trị lớn nhất. Tính  $|z|$ .

- A.  $|z| = \sqrt{33}$ .      B.  $|z| = 50$ .      C.  $|z| = \sqrt{10}$ .      D.  $|z| = 5\sqrt{2}$ .

**Lời giải.** Vì  $|z - (3 + 4i)| = \sqrt{5} \longrightarrow$  tập hợp các điểm biểu diễn số phức  $z$  là đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(3; 4)$  và bán kính  $R = \sqrt{5}$ .

Ta có  $P = |(x+2) + yi|^2 - |x + (y-1)i|^2 = (x+2)^2 + y^2 - [x^2 + (y-1)^2] = 4x + 2y + 3$   
 $\longrightarrow 4x + 2y + 3 - P = 0$ .

Ta tìm  $P$  sao cho đường thẳng  $\Delta: 4x + 2y + 3 - P = 0$  và đường tròn  $(C)$  có điểm chung

$$\Leftrightarrow d[I, \Delta] \leq R \Leftrightarrow \frac{|12 + 8 + 3 - P|}{\sqrt{20}} \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow |23 - P| \leq 10 \Leftrightarrow 13 \leq P \leq 33.$$

Do đó  $P_{\max} = 33$ . Dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y - 30 = 0 \\ (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}$ .

Vậy  $|z| = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$ . **Chọn D.**

**Câu 8.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - 1 - 3i| = \sqrt{13}$ . Gọi  $m, M$  lần lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức  $P = |z + 2|^2 - |z - 3i|^2$ . Tổng  $m + M$  bằng

A. 10.

B. 25.

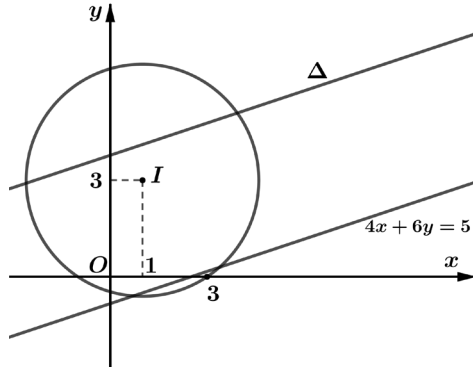
C. 34.

D. 40.

**Lời giải.** Đặt  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ).

• Từ giả thiết  $|z - 1 - 3i| = \sqrt{13} \longrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 = 13$ . Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức  $z$  là đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(1; 3)$ , bán kính  $R = \sqrt{13}$ .

• Lại có  $P = |z + 2|^2 - |z - 3i|^2 = 4x + 6y - 5 \longrightarrow 4x + 6y - 5 - P = 0$ . Suy ra tập hợp các số phức  $z$  thuộc đường thẳng  $\Delta: 4x + 6y - 5 - P = 0$ .



Để tồn tại  $z$  thì  $\Delta$  và  $(C)$  phải có điểm chung  $\Leftrightarrow d[I, \Delta] \leq R \Leftrightarrow \frac{|4 \cdot 1 + 6 \cdot 3 - 5 - P|}{\sqrt{16 + 36}} \leq \sqrt{13}$

$\Leftrightarrow |17 - P| \leq 26 \Leftrightarrow -9 \leq P \leq 43 \longrightarrow \begin{cases} m = -9 \\ M = 43 \end{cases} \Rightarrow m + M = 34$ . **Chọn C.**

Dấu "=" xảy ra khi

✓  $P_{\max} = 43 \xrightarrow{\text{thay } P=43} \Delta: 4x + 6y - 48 = 0$ . Tọa độ điểm  $z$  thỏa

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 = 13 \\ 4x + 6y - 48 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \end{cases} \longrightarrow z = 3 + 6i.$$

✓  $P_{\min} = -9 \xrightarrow{\text{thay } P=-9} \Delta: 4x + 6y + 4 = 0$ . Tọa độ điểm  $z$  thỏa

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 = 13 \\ 4x + 6y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \longrightarrow z = -1.$$

**Cách 2.** Ta có  $P = |z + 2|^2 - |z - 3i|^2 = 4x + 6y - 5$

$\longrightarrow |P - 17| = |4(x-1) + 6(y-3)| \leq \sqrt{(4^2 + 6^2)} \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(4^2 + 6^2)} \cdot \sqrt{13} = 26$

**Câu 9.** Xét các số phức  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $|(1+i)z + 2 - i| = 4$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $T = |x + y + 3|$  bằng

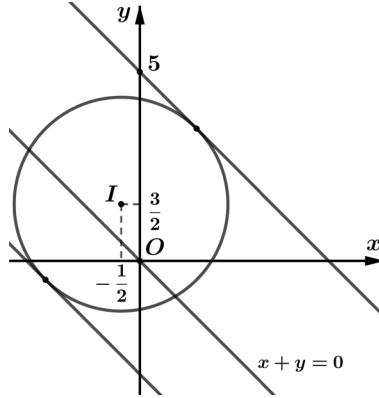
A. 4.

B.  $4\sqrt{2}$ .

C.  $4 + 2\sqrt{2}$ .

D. 8.

**Lời giải.** Ta có  $|(1+i)z + 2 - i| = 4 \Leftrightarrow \left| z + \frac{2-i}{1+i} \right| = \frac{4}{|1+i|} \Leftrightarrow \left| z + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \right| = 2\sqrt{2} \longrightarrow$  tập hợp các số phức  $z$  là đường tròn  $(C)$  có tâm  $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ , bán kính  $R = 2\sqrt{2}$ .



$$\text{Ta có } T = |x + y + 3| \longleftrightarrow \begin{cases} x + y + 3 - T = 0 \\ x + y + 3 + T = 0 \end{cases}$$

● Với  $\Delta: x + y + 3 - T = 0$ . Để tồn tại số phức  $z$  tức là  $\Delta$  và  $(C)$  phải có điểm chung

$$\Leftrightarrow d[I, \Delta] \leq R \Leftrightarrow \frac{\left| -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 3 - T \right|}{\sqrt{2}} \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 0 \leq T \leq 8.$$

● Với  $\Delta: x + y + 3 + T = 0$ . Để tồn tại số phức  $z$  tức là  $\Delta$  và  $(C)$  phải có điểm chung

$$\Leftrightarrow d[I, \Delta] \leq R \Leftrightarrow \frac{\left| -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 3 + T \right|}{\sqrt{2}} \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow -8 \leq T \leq 0.$$

So sánh hai trường hợp, ta có  $T_{\max} = 8$ . **Chọn D.**

**Câu 10.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z+2| = |1+2i|$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |z-1-2i| + |z-3-4i| + |z-5-6i|$  được viết dưới dạng  $a\sqrt{b}$ , với  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản.

Giá trị của  $a+b$  bằng

A. 10.

B. 11.

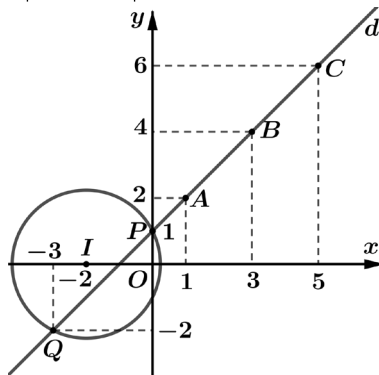
C. 12.

D. 17.

**Lời giải.** Đặt  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ).

Khi đó  $|z+2| = |1+2i| \longrightarrow (x+2)^2 + y^2 = 5 \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  thuộc đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(-2;0)$ , bán kính  $R = \sqrt{5}$ .

Ta có  $P = |z-1-2i| + |z-3-4i| + |z-5-6i| = MA + MB + MC$  với  $A(1;2)$ ,  $B(3;4)$ ,  $C(5;6)$ .



Nhận thấy các điểm  $A, B, C$  cùng thuộc đường thẳng  $d: y = x + 1$ . Đường thẳng  $d$  cắt đường tròn  $(C)$  tại hai điểm  $P(0;1)$  và  $Q(-3;-2)$ .

Vậy  $P_{\min} \Leftrightarrow M \equiv P$  và  $P_{\min} = PA + PB + PC = 9\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = 2 \end{cases} \longrightarrow a + b = 11$ . **Chọn B.**

**Câu 11.** Xét các số phức  $z_1, z_2$  thoả mãn  $|z_1 - 3 - 4i| = 1, |z_2 + 1| = |z_2 - i|$  và  $\frac{z_1 - z_2}{2 - i}$  là số thực.

Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của  $|z_1 - z_2|$ . Tính  $P = M + m$ .

- A.  $P = 14\sqrt{5}$ . B.  $P = 16\sqrt{5}$ . C.  $P = 18\sqrt{5}$ . D.  $P = 20\sqrt{5}$ .

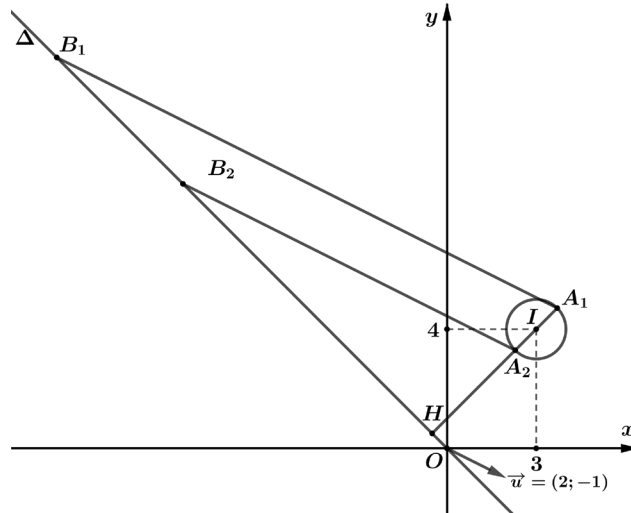
**Lời giải.** Đặt  $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ).

Gọi  $A(a; b), B(c; d)$  lần lượt là hai điểm biểu diễn số phức  $z_1, z_2$ .

Suy ra  $z_1 - z_2 = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA} \longrightarrow |z_1 - z_2| = AB$ .

Do đó từ  $\frac{z_1 - z_2}{2 - i} = k$  ( $k \in \mathbb{R}$ )  $\longrightarrow \overrightarrow{BA} = k(2; -1)$ . Suy ra đường thẳng  $AB$  có VTPT  $\overrightarrow{n_{AB}} = (1; 2)$ .

- $|z_1 - 3 - 4i| = 1 \longrightarrow$  tập hợp các điểm  $A$  là đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(3; 4)$ , bán kính  $R = 1$ .
- $|z_2 + 1| = |z_2 - i| \longrightarrow (c + 1)^2 + d^2 = c^2 + (d - 1)^2 \Leftrightarrow c + d = 0 \longrightarrow$  tập hợp các điểm  $B$  là đường thẳng  $\Delta: x + y = 0$ .



Gọi  $\varphi$  là góc giữa  $\Delta$  và  $AB$ , ta có  $\cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{n_{AB}} \cdot \overrightarrow{n_{\Delta}}|}{|\overrightarrow{n_{AB}}| \cdot |\overrightarrow{n_{\Delta}}|} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \longrightarrow \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$ .

Theo yêu cầu bài toán ta cần tìm GTLN và GTNN của  $AB$ .

Do  $d[I, \Delta] > R$  nên suy ra  $\Delta$  không cắt  $(C)$ . Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  trên  $\Delta$ , ta có

$$AB = \frac{AH}{\sin \varphi} \longrightarrow \begin{cases} \max AB = \frac{\max AH}{\sin \varphi} = \frac{d[I, \Delta] + R}{\sin \varphi} = 7\sqrt{5} + \sqrt{10} \\ \min AB = \frac{\min AH}{\sin \varphi} = \frac{d[I, \Delta] - R}{\sin \varphi} = 7\sqrt{5} - \sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow P = 14\sqrt{5}. \text{ Chọn A.}$$

**Câu 12.** Cho  $z_1$  là số phức,  $z_2$  là số thực thoả mãn  $|z_1 - 2i| = 1$  và  $\frac{z_2 - z_1}{1 + i}$  là số thực. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |z_1 - z_2|$  là

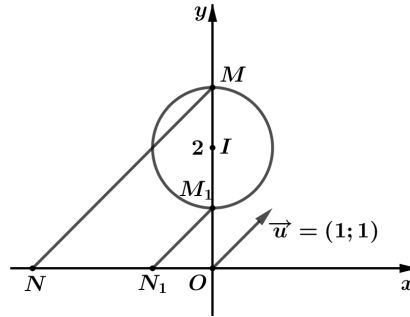
- A. 2. B.  $2\sqrt{2}$ . C.  $3\sqrt{2}$ . D.  $4\sqrt{2}$ .

**Lời giải.** Gọi  $M, N$  lần lượt là hai điểm biểu diễn số phức  $z_1, z_2$ .

Suy ra  $z_2 - z_1 = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MN} \longrightarrow |z_1 - z_2| = MN$ .

Do đó từ  $\frac{z_2 - z_1}{1 + i} = k$  ( $k \in \mathbb{R}$ )  $\longrightarrow \overrightarrow{MN} = k(1; 1)$ . Suy ra đường thẳng  $MN$  có VTPT  $\overrightarrow{n_{MN}} = (1; -1)$ .

- $|z_1 - 2i| = 1 \longrightarrow$  tập hợp các điểm  $M$  là đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(0;2)$ , bán kính  $R=1$ .
- $z_2$  là số thực  $\longrightarrow$  tập hợp các điểm  $N$  là đường thẳng  $\Delta: y=0$ .



Gọi  $\varphi$  là góc giữa  $\Delta$  và  $MN$ , ta có  $\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_{MN} \cdot \vec{n}_{\Delta}|}{|\vec{n}_{MN}| \cdot |\vec{n}_{\Delta}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Theo yêu cầu bài toán ta cần tìm GTLN và GTNN của  $MN$ .

Do  $d[I, \Delta] > R$  nên suy ra  $\Delta$  không cắt  $(C)$ .

Vì  $IO \perp \Delta$  nên  $O$  là hình chiếu của  $M$  trên  $\Delta$ , ta có  $MN = \frac{MO}{\sin \varphi}$

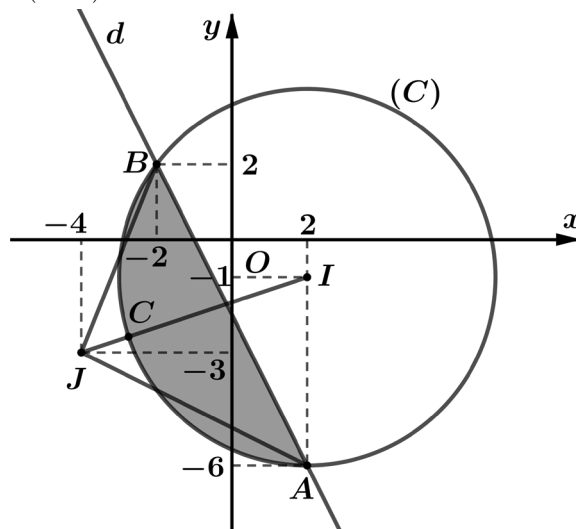
$$\longrightarrow \begin{cases} \max MN = \frac{\max MO}{\sin \varphi} = \frac{d[I, \Delta] + R}{\sin \varphi} = 3\sqrt{2} \\ \min MN = \frac{\min MO}{\sin \varphi} = \frac{d[I, \Delta] - R}{\sin \varphi} = \sqrt{2} \end{cases} \quad \text{Chọn D.}$$

**Câu 13.** Cho  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) là số phức thỏa mãn  $|\bar{z} + 2 - 3i| \leq |z + i - 2| \leq 5$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của  $P = x^2 + y^2 + 8x + 6y$ . Giá trị  $M + m$  bằng

- A.  $\frac{156}{5} - 2\sqrt{10}$ .      B.  $\frac{156}{5} + 2\sqrt{10}$ .      C.  $60 - 20\sqrt{10}$ .      D.  $60 + 20\sqrt{10}$ .

**Lời giải.** Ta có  $\begin{cases} |\bar{z} + 2 - 3i| \leq |z + i - 2| \Leftrightarrow 2x + y + 2 \leq 0 \\ |z + i - 2| \leq 5 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 25 \end{cases}$ . Suy ra tập hợp các điểm  $M(x; y)$  thỏa

yêu cầu bài toán nằm trên miền  $(H)$  tô đậm được giới hạn bởi đường thẳng  $d: 2x + y = -2$  và đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(2; -1)$ , bán kính  $R = 5$  (kể cả biên) như hình vẽ.



Ta có  $P = x^2 + y^2 + 8x + 6y = (x + 4)^2 + (y + 3)^2 - 25 = JM^2 - 25$  với  $J(-4; -3)$ .

Gọi giao điểm của  $d$  và  $(C)$  là  $A(2; -6)$ ,  $B(-2; 2)$ ;  $C$  là giao điểm của đoạn  $IJ$  với  $(C)$ .

Dựa vào hình vẽ ta thấy

•  $JM \geq \min \{JA, JB, JC\} = JC = IJ - IC = IJ - R = 2\sqrt{10} - 5.$

•  $JM \leq \max \{JA, JB, JC\} = JA = 3\sqrt{5}.$

Vậy  $\begin{cases} M = (3\sqrt{5})^2 - 25 = 20 \\ m = (2\sqrt{10} - 5)^2 - 25 = 40 - 20\sqrt{10} \end{cases} \longrightarrow M + m = 60 - 20\sqrt{10}. \text{ Chọn C.}$

## Vấn đề 4. Đường tròn và đường tròn

**Câu 1.** Xét các số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1 - 4| = 1$  và  $|iz_2 - 2| = 1$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |z_1 + 2z_2|$  bằng

A.  $2\sqrt{5} - 2.$

B.  $4 - \sqrt{2}.$

C.  $4\sqrt{2} - 3.$

D.  $4\sqrt{2} + 3.$

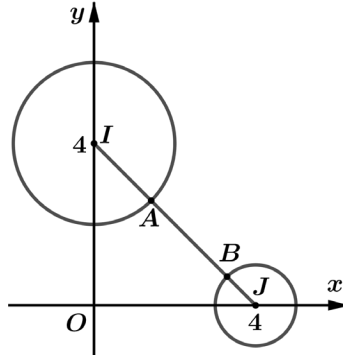
**Lời giải.** Đặt  $z_3 = -2z_2 \longrightarrow P = |z_1 + 2z_2| = |z_1 - (-2z_2)| = |z_1 - z_3|.$

Từ  $z_3 = -2z_2 \rightarrow z_2 = -\frac{1}{2}z_3$ , thay vào  $|iz_2 - 2| = 1$  ta được  $\left| -\frac{1}{2}iz_3 - 2 \right| = 1 \Leftrightarrow |z_3 - 4i| = 2.$

Gọi  $A, B$  là hai điểm biểu diễn cho hai số phức  $z_3, z_1$ .

•  $|z_3 - 4i| = 2 \longrightarrow A \in \text{đường tròn tâm } I(0;4), \text{ bán kính } R_3 = 1.$

•  $|z_1 - 4| = 1 \longrightarrow B \in \text{đường tròn tâm } J(4;0), \text{ bán kính } R_1 = 1.$



Khi đó  $P = |z_1 - z_3| = AB \longrightarrow \begin{cases} P_{\min} = IJ - R_1 - R_2 = 4\sqrt{2} - 3 \\ P_{\max} = IJ + R_1 + R_2 = 4\sqrt{2} + 3 \end{cases}. \text{ Chọn C.}$

**Cách 2.** Biến đổi  $|iz_2 - 2| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{iz_2 - 2}{i} \right| = 1 \Leftrightarrow \left| z_2 - \frac{2}{i} \right| = 1 \Leftrightarrow |z_2 + 2i| = 1 \Leftrightarrow |2z_2 + 4i| = 2.$

Ta có  $P = |z_1 + 2z_2| = |(z_1 - 4) + (2z_2 + 4i) + (4 - 4i)|$   
 $\geq |(2z_2 + 4i) + (4 - 4i)| - |z_1 - 4|$   
 $\geq |4 - 4i| - |2z_2 + 4i| - |z_1 - 4| = 4\sqrt{2} - 3.$

**Câu 2.** Xét các số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1 - 3i + 5| = 2$  và  $|iz_2 - 1 + 2i| = 4$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = |2iz_1 + 3z_2|$  bằng

A.  $\sqrt{313} + 16.$

B.  $\sqrt{313}.$

C.  $\sqrt{313} + 8.$

D.  $\sqrt{313} + 2\sqrt{5}.$

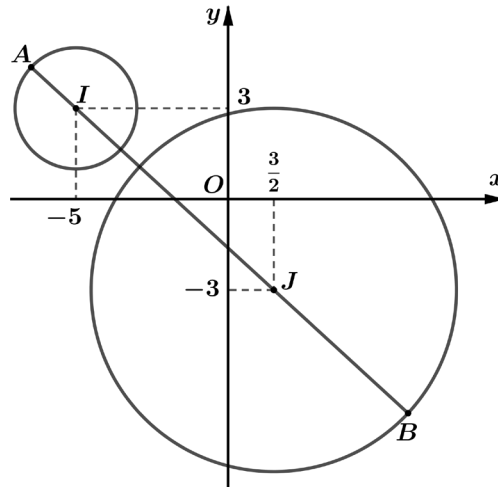
**Lời giải.** Đặt  $2iz_3 = -3z_2 \longrightarrow P = |2iz_1 + 3z_2| = |2iz_1 - 2iz_3| = 2|z_1 - z_3|.$

Từ  $2iz_3 = -3z_2 \rightarrow iz_2 = \frac{2}{3}z_3$ , thay vào  $|iz_2 - 1 + 2i| = 4$  ta được  $\left| \frac{2}{3}z_3 - 1 + 2i \right| = 4 \Leftrightarrow \left| z_3 - \frac{3}{2} + 3i \right| = 6.$

Gọi  $A, B$  là hai điểm biểu diễn cho hai số phức  $z_1, z_3$ .

•  $|z_1 - 3i + 5| = 2 \longrightarrow A \in \text{đường tròn tâm } I(-5;3), \text{ bán kính } R_1 = 2.$

•  $\left| z_3 - \frac{3}{2} + 3i \right| = 6 \longrightarrow B \in \text{đường tròn tâm } J\left(\frac{3}{2}; -3\right), \text{ bán kính } R_2 = 6.$



Khi đó  $P = 2|z_1 - z_3| = 2AB \longrightarrow \begin{cases} P_{\min} = 2|OI - R_1 - R_2| = \sqrt{313} - 16 \\ P_{\max} = 2(OI + R_1 + R_2) = \sqrt{313} + 16 \end{cases}$ . **Chọn A.**

**Câu 3.** Xét các số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1| = 12$  và  $|z_2 - 3 - 4i| = 5$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |z_1 - z_2|$  bằng

A. 0.

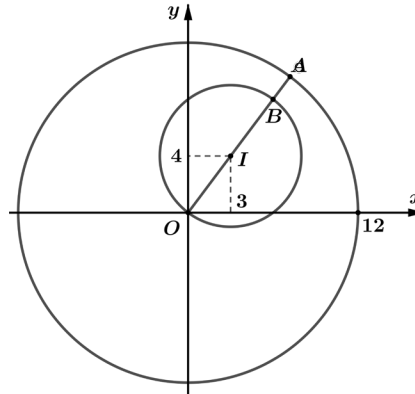
B. 2.

C. 7.

D. 17.

**Lời giải.** Gọi  $A, B$  là hai điểm biểu diễn cho hai số phức  $z_1, z_2$ .

- $|z_1| = 12 \longrightarrow A \in$  đường tròn tâm  $O(0;0)$ , bán kính  $R_1 = 12$ .
- $|z_2 - 3 - 4i| = 5 \longrightarrow B \in$  đường tròn tâm  $I(3;4)$ , bán kính  $R_2 = 5$ .



Khi đó  $P = |z_1 - z_2| = AB \longrightarrow \begin{cases} P_{\min} = |2OI - R_1| = 2 \\ P_{\max} = 2OI + R_1 = 22 \end{cases}$ . **Chọn B.**

**Câu 4.** Có bao nhiêu giá trị của tham số  $m$  để tồn tại duy nhất số phức  $z$  thỏa mãn  $z\bar{z} = 1$  và  $|z - \sqrt{3} + i| = m$  ?

A. 0.

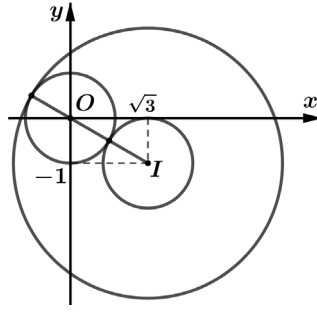
B. 1.

C. 2.

D. 3.

**Lời giải.** Gọi  $A$  là điểm biểu diễn cho số phức  $z$ .

- $z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \longrightarrow |z| = 1 \longrightarrow A \in$  đường tròn  $(C_1)$  có tâm  $O(0;0)$ , bán kính  $R_1 = 1$ .
- Ta thấy  $m = 0 \longrightarrow z = \sqrt{3} - i$  không thỏa mãn  $z\bar{z} = 1$  nên suy ra  $m > 0$ .
- $|z - \sqrt{3} + i| = m \longrightarrow A \in$  đường tròn  $(C_2)$  có tâm  $I(\sqrt{3}; -1)$ , bán kính  $R_2 = m$ .



Nhận thấy  $OI = 2 > R_1$  suy ra  $I$  nằm ngoài  $(C_1)$ .

Để có duy nhất số phức  $z$  thì  $(C_1)$  và  $(C_2)$  tiếp xúc ngoài hoặc tiếp xúc trong, điều điều này

$$\text{xảy ra khi } \begin{cases} OI = R_1 + R_2 \\ R_2 = R_1 + OI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1=2 \\ m=1+2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=3 \end{cases}.$$

Vậy có 2 giá trị của  $m$  thỏa mãn. **Chọn C.**

**Câu 5.** Gọi  $S$  là tập hợp các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-i| \geq 3$  và  $|z-1| \leq 5$ . Gọi  $z_1, z_2 \in S$  lần lượt là các số phức có môđun nhỏ nhất và lớn nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.**  $z_1 + 2z_2 = 12 - 2i$ . **B.**  $z_1 + 2z_2 = -2 + 12i$ . **C.**  $z_1 + 2z_2 = 6 - 4i$ . **D.**  $z_1 + 2z_2 = 12 + 4i$ .

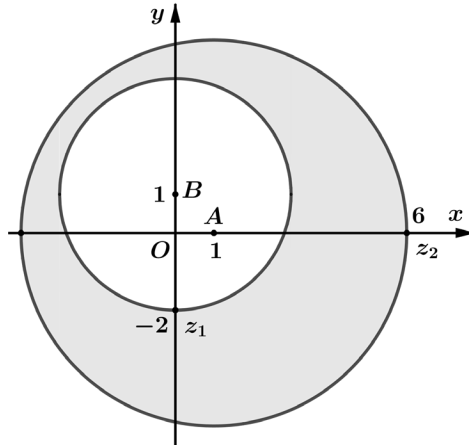
**Lời giải.** Giả sử  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ). Ta có

$$\bullet |z-1| = \sqrt{(a-1)^2 + b^2} \leq 5 \rightarrow (a-1)^2 + b^2 \leq 5^2$$

→ tập hợp các số phức  $z$  nằm trong hoặc trên đường tròn tâm  $A(1;0)$ , bán kính  $R=5$ .

$$\bullet |z-i| = \sqrt{a^2 + (b-1)^2} \geq 3 \rightarrow a^2 + (b-1)^2 \geq 3^2$$

→ tập hợp các số phức  $z$  nằm ngoài hoặc trên đường tròn tâm  $B(0;1)$ , bán kính  $R'=3$ .



Dựa vào hình vẽ ta thấy  $\begin{cases} z_{\min} = z_1 = 0 - 2i \\ z_{\max} = z_2 = 6 + 0i \end{cases} \longrightarrow z_1 + 2z_2 = 12 - 2i$ . **Chọn A.**

**Cách 2.** Áp dụng bất đẳng thức  $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ .

$$\text{Ta có } \begin{cases} 3 \leq |z-i| \leq |z| + |i| \\ |z| - |1| \leq |z-1| \leq 5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2 \leq |z| \\ |z| \leq 6 \end{cases} \xleftrightarrow{(1)} 2 \leq |z| \xleftrightarrow{(2)} |z| \leq 6.$$

Dấu "=" thứ nhất xảy ra khi  $|z_1 - i| = 3$ , kết hợp với  $|z-1| \leq 5$  ta được  $\begin{cases} |z_1 - i| = 3 \\ |z_1 - 1| \leq 5 \rightarrow z_1 = -2i \\ |z_1| = 2 \end{cases}$

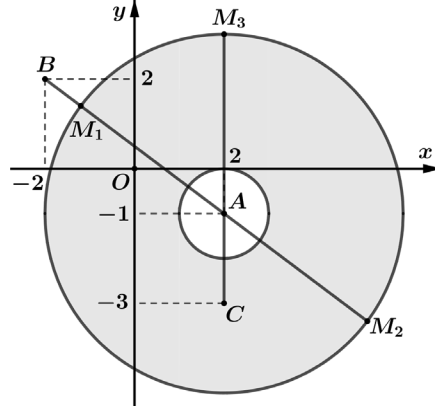
Tương tự cho dấu "=" thứ hai, ta được  $\begin{cases} |z_2 - 1| = 5 \\ |z_2| = 6 \\ |z_2 - i| \geq 3 \end{cases} \longrightarrow z_2 = 6 \longrightarrow z_1 + 2z_2 = 12 - 2i.$

**Câu 6.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $1 \leq |z - 2 + i| \leq 4$ . Gọi  $M$  là giá trị lớn nhất của  $|z - 2 + 3i|$ ,  $m$  là giá trị nhỏ nhất của  $|z + 2 - 2i|$ . Tính  $M + m$ .

- A.  $M + m = 3$ .      B.  $M + m = 5$ .      C.  $M + m = 6$ .      D.  $M + m = 7$ .

**Lời giải.** Giả sử  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ). Ta có

- $|z - 2 + i| = \sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2} \leq 4 \rightarrow (a-2)^2 + (b+1)^2 \leq 16 \rightarrow$  tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  nằm trong hoặc trên đường tròn tâm  $A(2; -1)$ , bán kính  $R = 4$ .
- $|z - 2 + i| = \sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2} \geq 1 \rightarrow (a-2)^2 + (b+1)^2 \geq 1 \rightarrow$  tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  nằm ngoài hoặc trên đường tròn tâm  $A(2; -1)$ , bán kính  $R' = 1$ .



Khi đó  $T = |z - 2 + 3i| = MC$  với  $C(2; -3) \rightarrow \begin{cases} T_{\min} = 0 \\ T_{\max} = CM_3 = AC + R = 6 \end{cases}$ ;

$P = |z + 2 - 2i| = MB$  với  $B(-2; 2) \rightarrow \begin{cases} P_{\min} = BM_1 = |AB - R| = 1 \\ P_{\max} = BM_2 = AB + R = 9 \end{cases}$ .

Vậy  $T_{\max} + P_{\min} = 7$ . **Chọn D.**

**Câu 7.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $\begin{cases} |z + 2i| \leq 2\sqrt{5} \\ |z - 4i| \leq 2\sqrt{2} \end{cases}$ . Giá trị lớn nhất của  $T = |\bar{z} + 1 - 4i|$  bằng

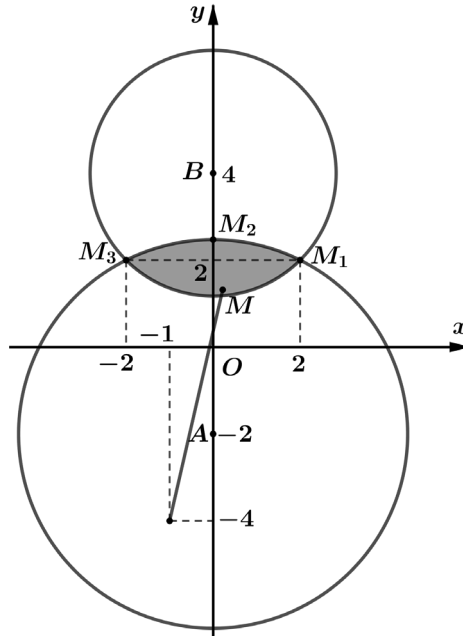
- A.  $3\sqrt{2}$ .      B.  $3\sqrt{5}$ .      C.  $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ .      D. 6.

**Lời giải.** Giả sử  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ). Ta có

- $|z + 2i| = \sqrt{a^2 + (b+2)^2} \leq 2\sqrt{5} \rightarrow a^2 + (b+2)^2 \leq 20 \rightarrow$  tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  nằm trong hoặc trên đường tròn  $(C_1)$  có tâm  $A(0; -2)$ , bán kính  $R = 2\sqrt{5}$ . (1)

- $|z - 4i| = \sqrt{a^2 + (b-4)^2} \leq 2\sqrt{2} \rightarrow a^2 + (b-4)^2 \leq 8 \rightarrow$  tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  nằm trong hoặc trên đường tròn  $(C_2)$  có tâm  $B(0; 4)$ , bán kính  $R = 2\sqrt{2}$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  nằm trên phần giao của hai hình tròn  $(C_1)$  và  $(C_2)$  (phần tô đậm trong hình vẽ).



Khi đó  $T = |\bar{z} + 1 - 4i| = |z + 1 + 4i| = MC$  với  $C(-1; -4)$ . Dựa vào hình vẽ ta thấy  $T_{\max}$  khi  $M$  sẽ rơi vào các vị trí  $M_1$  hoặc  $M_2$  hoặc  $M_3$ .

$$\text{Ta có } \begin{cases} CM_1 = 3\sqrt{5} \\ CM_2 = \sqrt{1^2 + (2 + 2\sqrt{5})^2} \longrightarrow T_{\max} = CM_1 = 3\sqrt{5}. \text{ Chọn B.} \\ CM_3 < CM_1 \end{cases}$$

**Câu 8.** Xét các số phức  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $\begin{cases} |z - 1 - i| \geq 1 \\ |z - 3 - 3i| \leq \sqrt{5} \end{cases}$ . Gọi  $m, M$  lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = x + 2y$ . Tỉ số  $\frac{M}{m}$  bằng

A.  $\frac{5}{4}$ .

B.  $\frac{7}{2}$ .

C.  $\frac{9}{4}$ .

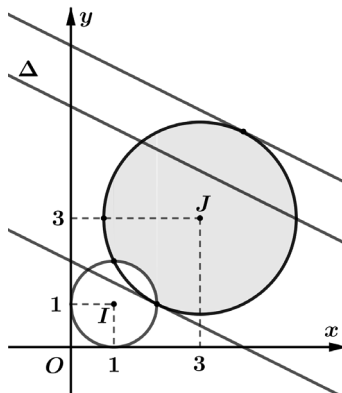
D.  $\frac{14}{5}$ .

**Lời giải.** Ta có

●  $|z - 1 - i| \geq 1 \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  nằm ngoài hoặc trên đường tròn  $(C_1)$  có tâm  $I(1;1)$ , bán kính  $R = 1$ . (1)

●  $|z - 3 - 3i| \leq \sqrt{5} \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  nằm trong hoặc trên đường tròn  $(C_2)$  có tâm  $J(3;3)$ , bán kính  $R = \sqrt{5}$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  là phần tô đậm trong hình vẽ (có tính biên)



Gọi  $\Delta$  là đường thẳng có phương trình  $x + 2y - P = 0$ . Khi đó để bài toán có nghiệm (tồn tại số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán) thì đường thẳng  $\Delta$  và miền tô đậm phải có điểm chung

$$\Leftrightarrow d(J, \Delta) \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|9-P|}{\sqrt{5}} \leq \sqrt{5} \longrightarrow 4 \leq P \leq 14 \rightarrow \begin{cases} M=14 \\ m=4 \end{cases} \longrightarrow \frac{M}{m} = \frac{7}{2}. \text{ Chọn B.}$$

Dấu "=" xảy ra khi

✓  $M=14$  đạt được khi  $\begin{cases} x+2y-14=0 \\ (x-3)^2+(y-3)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$ .

✓  $m=4$  đạt được khi  $\begin{cases} x+2y-4=0 \\ (x-3)^2+(y-3)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ .

**Câu 9.** Xét các số phức  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $\begin{cases} |z-1-i| \geq 3 \\ |z-3-4i| \leq \sqrt{10} \end{cases}$ . Giá trị nhỏ nhất của

biểu thức  $P = x + 3y$  bằng

A. 5.

B. 7.

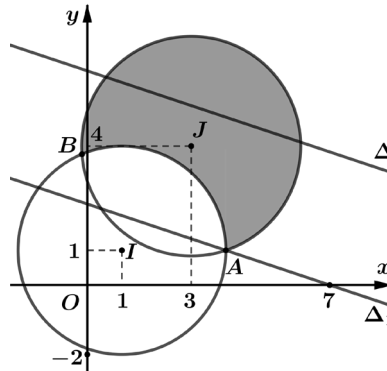
C. 13.

D.  $4 + 3\sqrt{10}$ .

**Lời giải.** Ta có

- $|z-1-i| \geq 3 \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  nằm ngoài hoặc trên đường tròn  $(C_1)$  có tâm  $I(1;1)$ , bán kính  $R=3$ . (1)
- $|z-3-4i| \leq \sqrt{10} \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  nằm trong hoặc trên đường tròn  $(C_2)$  có tâm  $J(3;4)$ , bán kính  $R=\sqrt{10}$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  là phần tô đậm trong hình vẽ (có tính biên)



Gọi  $\Delta$  là đường thẳng có phương trình  $x + 3y - P = 0$ . Khi đó để bài toán có nghiệm (tồn tại số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán) thì đường thẳng  $\Delta$  và miền tô đậm phải có điểm chung. Bằng cách tịnh tiến các đường thẳng song song với nhau (cùng có VTPT là  $\vec{n} = (1;3)$ ) ta thấy  $P$  đạt giá trị nhỏ nhất bằng 7 khi  $\Delta$  đi qua điểm  $A(4;1)$ . **Chọn B.**

## Vấn đề 5. Parabol

**Câu 1.** Xét các số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa  $4(z - \bar{z}) - 15i = i(z + \bar{z} - 1)^2$ . Tính  $P = -a + 4b$  khi  $\left| z - \frac{1}{2} + 3i \right|$  đạt giá trị nhỏ nhất.

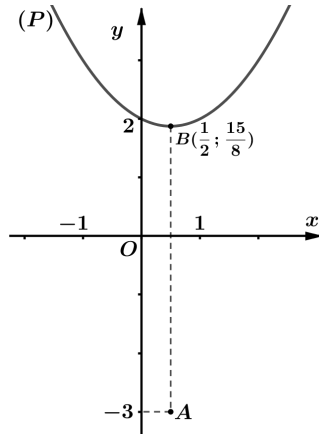
A.  $P = 4$ .

B.  $P = 5$ .

C.  $P = 6$ .

D.  $P = 7$ .

**Lời giải.** Từ  $4(z - \bar{z}) - 15i = i(z + \bar{z} - 1)^2 \longrightarrow 4.2bi - 15i = i(2a - 1)^2 \Leftrightarrow b = \frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} + 2 \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  là Parabol  $(P): y = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + 2$  (như hình vẽ).



Ta có  $T = \left| z - \frac{1}{2} + 3i \right| = MA$  với  $A\left(\frac{1}{2}; -3\right)$ .

Ta thấy  $MA \geq BA = \frac{39}{8}$  với  $B\left(\frac{1}{2}; \frac{15}{8}\right)$  là đỉnh của của  $(P)$ .

Vậy  $T_{\min} = MA_{\min} = AB$ . Dấu "=" xảy ra khi  $M \equiv B \rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{15}{8} \rightarrow -a + 4b = 7$ . **Chọn D.**

**Cách 2.** Ta có  $4(z - \bar{z}) - 15i = i(z + \bar{z} - 1)^2 \rightarrow 4.2bi - 15i = i(2a - 1)^2 \Leftrightarrow 2b = a^2 - a + 4$ . (1)

Suy ra  $2b = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} \rightarrow b \geq \frac{15}{8}$ .

Khi đó  $T = \left| z - \frac{1}{2} + 3i \right| = \sqrt{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + (b + 3)^2} = \sqrt{a^2 - a + \frac{1}{4} + b^2 + 6b + 9}$

$\xrightarrow{(1)} T = \sqrt{b^2 + 8b + \frac{21}{4}} \geq \frac{39}{8}$ . Dấu "=" xảy ra khi  $b = \frac{15}{8} \rightarrow a = \frac{1}{2}$ .

**Câu 2.** Xét hai số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $2|\bar{z}_1 + i| = |\bar{z}_1 - z_1 - 2i|$  và  $|z_2 - i - 10| = 1$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $|z_1 - z_2|$  bằng

A.  $\sqrt{10} + 1$ .

B.  $3\sqrt{5} - 1$ .

C.  $\sqrt{\sqrt{101} - 1}$ .

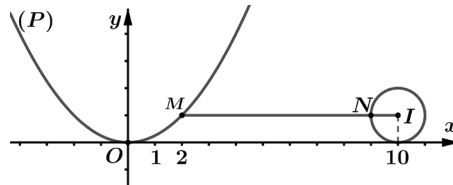
D.  $\sqrt{\sqrt{101} + 1}$ .

**Lời giải.** Đặt  $z_1 = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ).

•  $2|\bar{z}_1 + i| = |\bar{z}_1 - z_1 - 2i| \rightarrow 2\sqrt{a^2 + (-b + 1)^2} = \sqrt{(-2b - 2)^2} \Leftrightarrow b = \frac{a^2}{4} \rightarrow$  tập hợp điểm  $M$

biểu diễn số phức  $z_1$  là một Parabol  $(P): y = \frac{x^2}{4}$  có đỉnh  $O(0;0)$ .

•  $|z_2 - i - 10| = 1 \rightarrow$  tập hợp điểm  $N$  biểu diễn số phức  $z_2$  là đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(10;1)$ , bán kính  $R = 1$ .



Khi đó biểu thức  $P = |z_1 - z_2| = MN$  là khoảng cách từ một điểm thuộc  $(P)$  đến một điểm thuộc  $(C)$ .

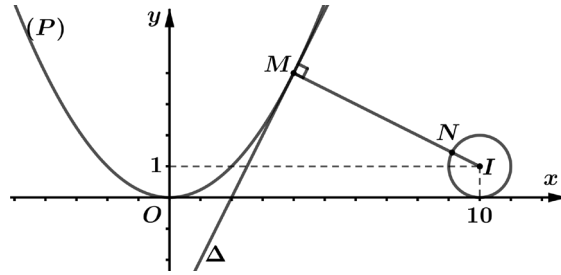
Ta có  $MN + NI \geq MI \rightarrow MN \geq MI - NI = MI - 1$ . Suy ra  $MN_{\min} \Leftrightarrow IM_{\min}$ .

Ta có  $IM^2 = (x - 10)^2 + \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2 = \left(\frac{x^2}{4} - 4\right)^2 + \frac{5}{2}(x - 4)^2 + 45 \geq 45 \rightarrow IM \geq \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ .

Do đó  $MN_{\min} = 3\sqrt{5} - 1$ . Dấu "=" xảy ra khi  $\left(\frac{x^2}{4} - 4\right)^2 + \frac{5}{2}(x - 4)^2 = 0 \rightarrow x = 4$ .

Vậy  $|z_1 - z_2|_{\min} \geq 3\sqrt{5} - 1$ . **Chọn B.**

**Cách 2.** Xét điểm  $M\left(a; \frac{a^2}{4}\right)$ . Tiếp tuyến của  $(P)$  tại  $M$  có phương trình  $\Delta: y = \frac{a}{2}(x - a) + \frac{a^2}{4}$ .



Gọi  $\vec{n} = \left(\frac{a}{2}; -1\right)$  là một VTPT của đường thẳng  $\Delta$ ;  $\overrightarrow{IM} = \left(a - 10; \frac{a^2}{4} - 1\right)$ .

Khi đó  $IM_{\min} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}$  cùng phương với  $\vec{n}$ , suy ra  $a = 4$ .

Với  $a = 4 \longrightarrow \overrightarrow{IM} = (-6; 3) \longrightarrow IM_{\min} = 3\sqrt{5} \longrightarrow MN_{\min} = 3\sqrt{5} - 1$ .

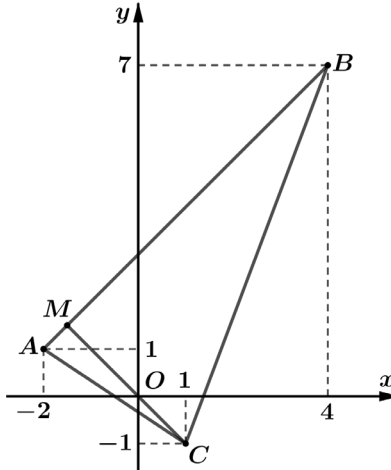
## Vấn đề 6. Đoạn thẳng – tia

**Câu 1.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$ . Gọi  $m, M$  lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của  $|z - 1 + i|$ . Tính  $P = m + M$ .

A.  $P = \sqrt{13} + \sqrt{73}$ .    B.  $P = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$ .    C.  $P = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}$ .    D.  $P = \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{73}}{2}$ .

**Lời giải.** Gọi  $M(x; y)$ ,  $A(-2; 1)$ ,  $B(4; 7)$ ,  $C(1; -1)$  lần lượt là điểm biểu diễn các số phức  $z$ ,  $-2 + i$ ,  $4 + 7i$ ,  $1 - i$  trong mặt phẳng tọa độ.

Từ  $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow MA + MB = 6\sqrt{2} = AB \longrightarrow M$  thuộc đoạn thẳng  $AB$ .



Ta có  $T = |z - 1 + i| = CM$ . Dựa vào hình vẽ, ta thấy

- $T_{\min} \Leftrightarrow CM_{\min} = d[C, AB] = \frac{5}{\sqrt{2}}$ .
- $CB = \sqrt{73}$ ;  $CA = \sqrt{13} \longrightarrow CM_{\max} = CB = \sqrt{73}$ .

Vậy  $P = \sqrt{73} + \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{73} + 5\sqrt{2}}{2}$ . **Chọn B.**

**Cách 2.** Phương trình đường thẳng  $AB: y = x + 3$ .

Gọi  $M(x; x + 3) \in AB$  với  $x \in [-2; 4]$  (do  $M$  nằm trong đoạn  $AB$ ).

Ta có  $T = |z - 1 + i| = |(x - 1) + (y + 1)i| = \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} \stackrel{y=x+3}{=} \sqrt{2x^2 + 6x + 17}$ .

Khảo sát hàm  $f(x) = 2x^2 + 6x + 17$  trên đoạn  $[-2; 4]$ .

**Câu 2.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - 1 - i| + |z - 8 - 3i| = \sqrt{53}$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = |z + 1 + 2i|$  bằng

A.  $\sqrt{53}$ .

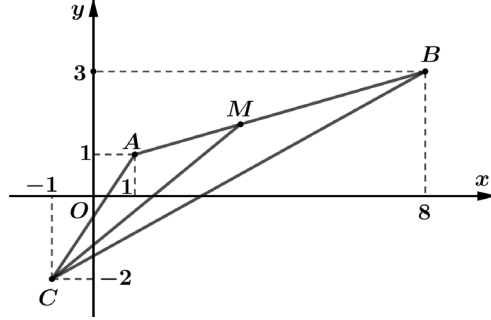
B. 53.

C.  $\frac{\sqrt{185}}{2}$ .

D.  $\sqrt{106}$ .

**Lời giải.** Gọi  $M(x; y)$ ,  $A(1; 1)$ ,  $B(8; 3)$ ,  $C(-1; -2)$  lần lượt là điểm biểu diễn các số phức  $z$ ,  $1 + i$ ,  $8 + 3i$ ,  $-1 - 2i$  trong mặt phẳng tọa độ.

Từ  $|z - 1 - i| + |z - 8 - 3i| = \sqrt{53} \Leftrightarrow MA + MB = \sqrt{53} = AB \longrightarrow M$  thuộc đoạn thẳng  $AB$ .



Ta có  $P = |z + 1 + 2i| = MC$ . Vì  $\begin{cases} CA = \sqrt{13}, CB = \sqrt{106} \\ CA \leq CM \leq CB \end{cases}$ , kết hợp với hình vẽ ta suy ra

$P_{\max} = \sqrt{106}$ . Dấu "=" xảy ra khi  $M$  trùng  $B$ . **Chọn D.**

**Câu 3.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z + 2 - 3i| + |z - 6 - i| = 2\sqrt{17}$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = ||z + 1 - 2i| - |z - 2 + i||$ .

A.  $M = 3\sqrt{2}$ ,  $m = 0$ .

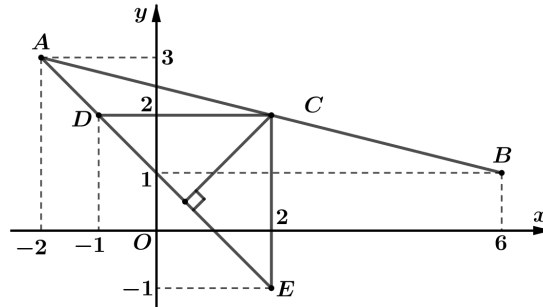
B.  $M = 3\sqrt{2}$ ,  $m = \sqrt{2}$ .

C.  $M = 3\sqrt{2}$ ,  $m = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$ .

D.  $M = \sqrt{2}$ ,  $m = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$ .

**Lời giải.** Gọi  $C, A(-2; 3)$ ,  $B(6; 1)$  lần lượt là điểm biểu diễn các số phức  $z$ ,  $-2 + 3i$ ,  $6 + i$  trong mặt phẳng tọa độ.

Từ  $|z + 2 - 3i| + |z - 6 - i| = 2\sqrt{17} \Leftrightarrow CA + CB = 2\sqrt{17} = AB \longrightarrow C$  thuộc đoạn thẳng  $AB$ .



Ta có  $P = ||z + 1 - 2i| - |z - 2 + i|| = |CD - CE|$  với  $D(-1; 2)$ ,  $E(2; -1)$ .

Nhận thấy  $D, E$  nằm về một phía của đường thẳng  $AB$ .

●  $|CD - CE| \leq DE = 3\sqrt{2}$ . Dấu "=" xảy ra khi  $C = DE \cap AB$ .

●  $|CD - CE| \geq 0$ . Dấu "=" xảy ra khi  $C \in AB$  và  $C$  thuộc đường trung trực của đoạn  $DE$ .

Vậy  $M = 3\sqrt{2}$ ,  $m = 0$ . **Chọn A.**

**Cách 2.** Phương trình đường thẳng  $AB: x + 4y - 10 = 0$ .

Gọi  $M(10 - 4y; y) \in AB$  với  $y \in [1; 3]$  (do  $M$  nằm trong đoạn  $AB$ ).

$$\text{Ta có } \begin{cases} |z + 1 - 2i| = |x + 1 + (y - 2)i| = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{(11 - 4y)^2 + (y - 2)^2} \\ |z - 2 + i| = |x - 2 + (y + 1)i| = \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2} = \sqrt{(8 - 4y)^2 + (y + 1)^2} \end{cases}$$

Khi đó  $P = |z+1-2i| + |z-2+i| = \left| \sqrt{17y^2 - 92y + 125} - \sqrt{17y^2 - 62y + 65} \right|$ .

Khảo sát hàm  $f(y) = \left| \sqrt{17y^2 - 92y + 125} - \sqrt{17y^2 - 62y + 65} \right|$  trên đoạn  $[1;3]$ .

**Câu 4.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z+3-2i| + |z-3+i| = 3\sqrt{5}$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |z+2| + |z-1-3i|$ .

A.  $M = \sqrt{17} + \sqrt{5}, m = 3\sqrt{2}$ .

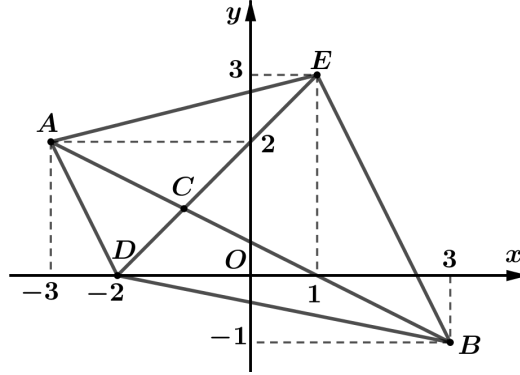
B.  $M = \sqrt{26} + 2\sqrt{5}, m = 3\sqrt{2}$ .

C.  $M = \sqrt{26} + 2\sqrt{5}, m = \sqrt{2}$ .

D.  $M = \sqrt{17} + \sqrt{5}, m = \sqrt{2}$ .

**Lời giải.** Gọi  $C, A(-3;2), B(3;-1)$  lần lượt là điểm biểu diễn các số phức  $z, -3+2i, 3-i$  trong mặt phẳng tọa độ.

Từ  $|z+3-2i| + |z-3+i| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow CA + CB = 3\sqrt{5} = AB \longrightarrow C$  thuộc đoạn thẳng  $AB$ .



Ta có  $P = |z+2| + |z-1-3i| = CD + CE$  với  $D(-2;0), E(1;3)$ .

Nhận thấy  $D, E$  nằm về hai phía so với đường thẳng  $AB$ .

- $CD + CE \geq DE = 3\sqrt{2}$ . Dấu "=" xảy ra khi  $D, C, E$  theo thứ tự đó thẳng hàng.
- $CD + CE \leq \max\{BD + BE; AD + AE\} = BD + BE = \sqrt{26} + 2\sqrt{5}$ . Dấu "=" xảy ra khi  $C \equiv B$ .

Vậy  $M = \sqrt{26} + 2\sqrt{5}, m = 3\sqrt{2}$ . **Chọn B.**

**Cách 2.** Phương trình đường thẳng  $AB: x + 2y - 1 = 0$ .

Gọi  $M(1-2y; y) \in AB$  với  $y \in [-1;2]$  (do  $M$  nằm trong đoạn  $AB$ ).

$$\text{Ta có } \begin{cases} |z+2| = |x+2+yi| = \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = \sqrt{(3-2y)^2 + y^2} \\ |z-1-3i| = |x-1+(y-3)i| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{4y^2 + (y-3)^2} \end{cases}$$

Khi đó  $P = |z+2| + |z-1-3i| = \sqrt{5y^2 - 12y + 9} + \sqrt{5y^2 - 6y + 9}$ .

Khảo sát hàm  $f(y) = \sqrt{5y^2 - 12y + 9} + \sqrt{5y^2 - 6y + 9}$  trên đoạn  $[-1;2]$ .

**Câu 5.** Xét các số phức  $z_1, z_2$  thỏa  $|z_1+1-2i| + |z_1-3-3i| = 2\left|z_2-1-\frac{5}{2}i\right| = \sqrt{17}$ . Giá trị lớn nhất của  $P = |z_1 - z_2| + |z_1 + 2 - i|$  bằng

A.  $2\sqrt{17}$ .

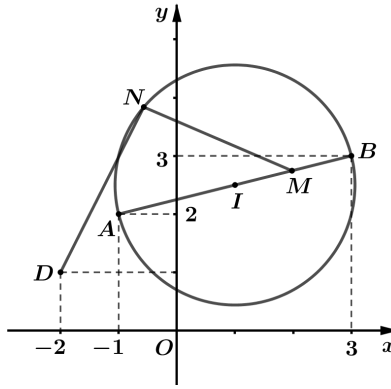
B.  $3\sqrt{29}$ .

C.  $\sqrt{17} + \sqrt{29}$ .

D.  $\sqrt{17} + 2\sqrt{29}$ .

**Lời giải.** Đặt  $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ); Gọi  $M(a;b), N(c;d), A(-1;2), B(3;3)$  lần lượt là điểm biểu diễn các số phức  $z_1, z_2, -1+2i, 3+3i$  trong mặt phẳng tọa độ.

- $|z_1+1-2i| + |z_1-3-3i| = \sqrt{17} \Leftrightarrow MA + MB = \sqrt{17} = AB \longrightarrow M$  thuộc đoạn thẳng  $AB$ .
- $2\left|z_2-1-\frac{5}{2}i\right| = \sqrt{17} \Leftrightarrow NI = \frac{\sqrt{17}}{2} = \frac{AB}{2}$  với  $I\left(1; \frac{5}{2}\right)$ . Ta thấy  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Suy ra  $N$  thuộc đường tròn  $(C)$  có tâm  $I$ , đường kính  $AB$  (như hình bên dưới).



Ta có  $P = |z_1 - z_2| + |z_1 + 2 - i| = MN + MD$  với  $D(-2; 1)$ .

Nhận thấy  $M$  nằm trên đoạn thẳng  $AB$  và  $N \in (C)$

$$\longrightarrow MN \leq AB = \sqrt{17} \text{ và } MD \leq \max\{AD, BD\} = BD = \sqrt{29}.$$

Suy ra  $P = |z_1 - z_2| + |z_1 + 2 - i| = MN + MD \leq \sqrt{17} + \sqrt{29}$ . Dấu "=" xảy ra khi  $\begin{cases} M \equiv B \\ N \equiv A \end{cases}$ .

Vậy  $P_{\max} = \sqrt{17} + \sqrt{29}$ . **Chọn C.**

**Câu 6.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|iz - 2i - 2| - |z + 1 - 3i| = \sqrt{34}$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |(1+i)z + 2i|$  bằng

A.  $\frac{9}{\sqrt{17}}$ .

B.  $3\sqrt{2}$ .

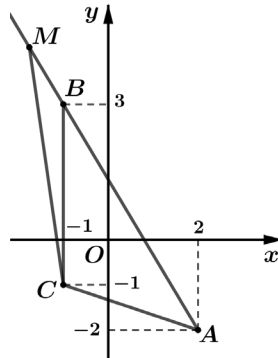
C.  $4\sqrt{2}$ .

D.  $\sqrt{26}$ .

**Lời giải.** Gọi  $M(x; y)$ ,  $A(2; -2)$ ,  $B(-1; 3)$  lần lượt là điểm biểu diễn các số phức  $z$ ,  $2 - 2i$ ,  $-1 + 3i$  trong mặt phẳng tọa độ

$$\text{Từ } |iz - 2i - 2| - |z + 1 - 3i| = \sqrt{34} \Leftrightarrow |z - 2 + 2i| - |z + 1 - 3i| = \sqrt{34} \Leftrightarrow MA - MB = \sqrt{34} = AB$$

$\longrightarrow M$  nằm trên tia đối của tia  $BA$ .



Ta có  $P = |(1+i)z + 2i| = \sqrt{2}|z + 1 + i| = \sqrt{2}MC$  với  $C(-1; -1)$ .

Ta thấy  $MC_{\min} \Leftrightarrow M \equiv B \longrightarrow MC_{\min} = CB = 4 \longrightarrow P_{\min} = 4\sqrt{2}$ . **Chọn C.**

**Cách 2.** Phương trình đường thẳng  $AB: 5x + 3y - 4 = 0$ . Suy ra  $M\left(x; \frac{4-5x}{3}\right)$  với  $x \leq -1$ .

$$\text{Khi đó } P = |(1+i)z + 2i| = \sqrt{2}|z + 1 + i| = \sqrt{2}\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{2}\sqrt{(x+1)^2 + \left(\frac{4-5x}{3} + 1\right)^2}.$$

Khảo sát hàm  $f(x) = \sqrt{(x+1)^2 + \left(\frac{4-5x}{3} + 1\right)^2}$  trên  $(-\infty; -1]$ .

**Câu 7.** Xét các số phức  $z$  đồng thời thỏa mãn  $|z - 4 + 3i| - |\bar{z} + 4 + 3i| = 10$  và  $|z - 3 - 4i|$  nhỏ nhất. Môđun của số phức  $z$  bằng

A. 5.

B.  $5\sqrt{2}$ .

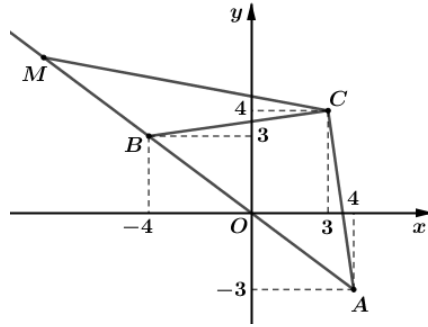
C.  $6\sqrt{2}$ .

D. 10.

**Lời giải.** Gọi  $M(x; y)$ ,  $A(4; -3)$ ,  $B(-4; 3)$  lần lượt là điểm biểu diễn các số phức  $z$ ,  $4 - 3i$ ,  $-4 + 3i$  trong mặt phẳng tọa độ.

Từ  $|z - 4 + 3i| - |\bar{z} + 4 + 3i| = 10 \Leftrightarrow |z - 4 + 3i| - |z + 4 - 3i| = 10 \Leftrightarrow MA - MB = 10 = AB$

$\longrightarrow M$  nằm trên tia đối của tia  $BA$ .



Ta có  $|z - 3 - 4i| = MC$  với  $C(3; 4)$ .

Ta thấy  $MC_{\min} = CB = 5\sqrt{2}$ . Dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow M \equiv B \longrightarrow |z| = 5$ . **Chọn A.**

**Cách 2.** Phương trình đường thẳng  $AB: \begin{cases} x = -4 + 4t \\ y = 3 - 3t \end{cases} \longrightarrow M(-4 + 4m; 3 - 3m)$  với  $m \leq 0$ .

Gọi  $C(3; 4)$ , ta có  $|z - 3 - 4i| = MC = \sqrt{25m^2 - 50m + 50} \geq \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ .

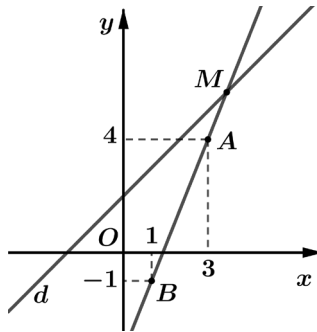
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi  $m = 0 \longrightarrow M(-4; 3)$ .

**Câu 8.** Xét các số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $|z - 1 - 2i| = |\bar{z} + 3i|$ . Tính  $P = a + b$  khi  $T = ||z - 3 - 4i| - |z - 1 + i||$  đạt giá trị lớn nhất.

- A.  $P = 2$ .      B.  $P = 6$ .      C.  $P = \frac{26}{3}$ .      D.  $P = \frac{28}{3}$ .

**Lời giải.** Ta có  $|z - 1 - 2i| = |\bar{z} + 3i| \longrightarrow (a - 1)^2 + (b - 2)^2 = a^2 + (-b + 3)^2 \Leftrightarrow a - b + 2 = 0 \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  thuộc đường thẳng  $d: x - y + 2 = 0$ .

Gọi  $A(3; 4)$ ,  $B(1; -1)$ . Ta thấy  $A, B$  nằm về cùng phía so với  $d$ .



Khi đó  $T = ||z - 3 - 4i| - |z - 1 + i|| = |MA - MB| \leq AB$ .

Dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow M = AB \cap d \longrightarrow M\left(\frac{11}{3}; \frac{17}{3}\right) \longrightarrow P = a + b = \frac{28}{3}$ . **Chọn D.**

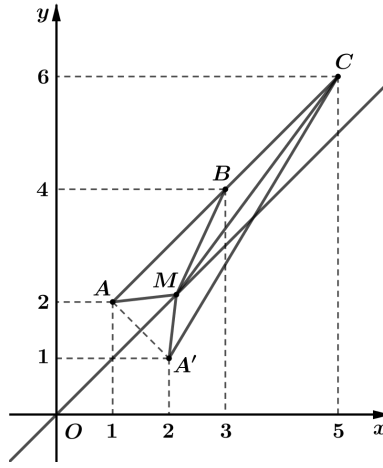
**Câu 9.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z + 2| = |z + 2i|$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = |z - 1 - 2i| + |z - 3 - 4i| + |z - 5 - 6i|$  được viết dưới dạng  $\frac{a + b\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$  với  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Tính  $a + b$ .

- A.  $a + b = 2$ .      B.  $a + b = 3$ .      C.  $a + b = 4$ .      D.  $a + b = 7$ .

**Lời giải.** Đặt  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ).

Khi đó  $|z + 2| = |z + 2i| \longrightarrow (x + 2)^2 + y^2 = x^2 + (y + 2)^2 \Leftrightarrow y = x \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  thuộc đường thẳng  $d: y = x$ .



Ta có  $P = |z - 1 - 2i| + |z - 3 - 4i| + |z - 5 - 6i| = MA + MB + MC$  với  $A(1;2)$ ,  $B(3;4)$ ,  $C(5;6)$ .

Nhận thấy  $B$  là trung điểm của  $AC$  nên suy ra  $MB = \sqrt{\frac{MA^2 + MC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}}$ .

Do đó

$$P = (MA + MC) + \sqrt{\frac{MA^2 + MC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}} \geq (MA + MC) + \sqrt{\frac{(MA + MC)^2}{4} - \frac{AC^2}{4}}.$$

Lấy điểm  $A'(2;1)$  đối xứng với  $A$  qua  $d$ , ta có

$$(MA + MC) + \sqrt{\frac{(MA + MC)^2}{4} - \frac{AC^2}{4}} \geq A'C + \sqrt{\frac{A'C^2}{4} - \frac{AC^2}{4}}.$$

Suy ra  $P \geq A'C + \sqrt{\frac{A'C^2}{4} - \frac{AC^2}{4}} = \frac{1 + 2\sqrt{17}}{\sqrt{2}} \longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b = 3$ . **Chọn B.**

**Cách 2.** Ta có  $P = |z - 1 - 2i| + |z - 3 - 4i| + |z - 5 - 6i|$

$$= \sqrt{2x^2 - 6x + 5} + \sqrt{2x^2 - 14x + 25} + \sqrt{2x^2 - 22x + 61}.$$

Suy ra  $\frac{P}{\sqrt{2}} = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} + \sqrt{\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} + \sqrt{\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} \geq \sqrt{\left(x - \frac{3}{2} - x + \frac{11}{2}\right)^2 + 1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{17}.$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{3}{2} = -x + \frac{11}{2} \\ x = \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}.$$

**Câu 10.** Xét các số phức  $z_1, z_2$  đồng thời thỏa mãn  $|z - 1 - 2i| = |z - 3 + 2i|$  và  $|z_1 - z_2| = \sqrt{5}$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $|z_1 - 1 - 3i| + |z_2 - 1 - 3i|$  bằng

- A.  $\frac{14\sqrt{5}}{5}$ .      B.  $\frac{3\sqrt{85}}{5}$ .      C.  $\frac{\sqrt{1105}}{5}$ .      D.  $\frac{\sqrt{1165}}{5}$ .

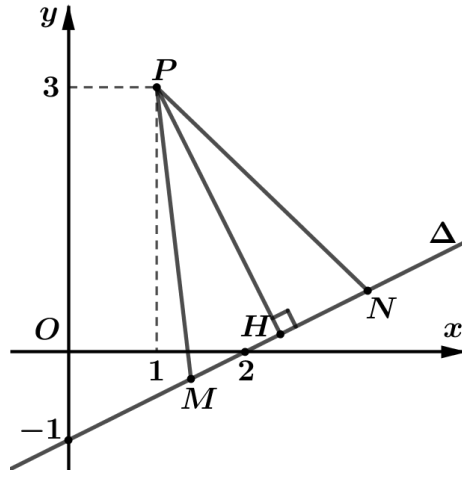
**Lời giải.** Với  $z = x + yi$ , theo giả thiết có  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = (x - 3)^2 + (y + 2)^2 \Leftrightarrow x - 2y - 2 = 0$ .

Xét  $M(z_1)$ ,  $N(z_2)$ ,  $P(1 + 3i)$  theo giả thiết có  $M, N \in \Delta: x - 2y - 2 = 0$  và  $MN = \sqrt{5}$ .

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của  $PM + PN$ .

Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $P$  lên  $\Delta \longrightarrow PH = d[P, \Delta] = \frac{7}{\sqrt{5}}$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } PM + PN &= \sqrt{PH^2 + HM^2} + \sqrt{PH^2 + HN^2} \geq \sqrt{(PH + PH)^2 + (HM + HN)^2} \\ &\geq \sqrt{4PH^2 + MN^2} = \sqrt{4 \cdot \left(\frac{49}{5}\right) + 5} = \frac{\sqrt{1105}}{5}. \end{aligned}$$



Dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{PH}{PH} = \frac{HM}{HN} \\ HM + HN = MN \end{cases} \Leftrightarrow H \text{ là trung điểm đoạn thẳng } MN. \text{ Chọn C.}$

## Vấn đề 7. Phương pháp lấy đối xứng

**Câu 1.** Xét các số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $|z - 5 - 3i| = |z - 1 + 5i|$ . Tính  $a + b$  khi biểu thức  $P = |z - 2 - 2i| + |z + 3 - 7i|$  đạt giá trị nhỏ nhất.

A.  $a + b = -1$ .

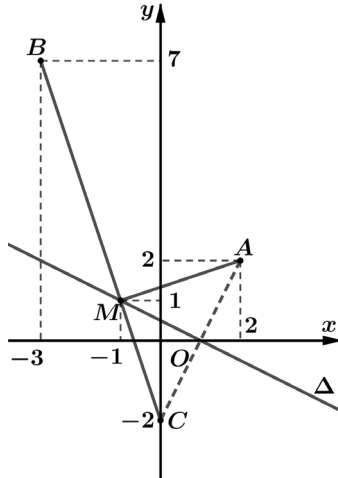
B.  $a + b = 0$ .

C.  $a + b = 1$ .

D.  $a + b = 2$ .

**Lời giải.** Đặt  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ).

Từ  $|z - 5 - 3i| = |z - 1 + 5i| \longrightarrow (x - 5)^2 + (y - 3)^2 = (x - 1)^2 + (y + 5)^2 \Leftrightarrow x + 2y = 1 \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M(x, y)$  biểu diễn số phức  $z$  là đường thẳng  $\Delta: x + 2y = 1$ .



Khi đó  $P = |z - 2 - 2i| + |z + 3 - 7i| = MA + MB$  với  $A(2; 2)$ ,  $B(-3; 7)$ .

Gọi  $C$  là điểm đối xứng của  $A$  qua đường thẳng  $\Delta$ , khi đó ta tìm được  $C(0; -2) \longrightarrow$  phương trình đường thẳng  $BC: 3x + y + 2 = 0$ .

Ta có  $P = MA + MB = MC + MB \geq BC$ . Dấu "=" xảy ra khi  $M = BC \cap \Delta \longrightarrow M(-1; 1)$

$\longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = 0. \text{ Chọn B.}$

**Câu 2.** Xét các số phức  $z, z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1 - 4 - 5i| = |z_2 - 1| = 1$  và  $|\bar{z} + 4i| = |z - 8 + 4i|$ . Tính  $M = |z_1 - z_2|$  khi  $P = |z - z_1| + |z - z_2|$  đạt giá trị nhỏ nhất.

A.  $M = 2\sqrt{5}$ .

B.  $M = 6$ .

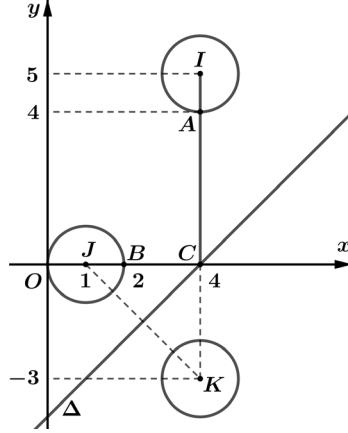
C.  $M = \sqrt{41}$ .

D.  $M = 8$ .

**Lời giải.** •  $|z_1 - 4 - 5i| = 1 \longrightarrow$  tập hợp điểm  $A$  biểu diễn số phức  $z_1$  là đường tròn  $(C_1)$  có tâm  $I(4;5)$ , bán kính  $R_1 = 1$ .

•  $|z_2 - 1| = 1 \longrightarrow$  tập hợp điểm  $B$  biểu diễn số phức  $z_2$  là đường tròn  $(C_2)$  có tâm  $J(1;0)$ , bán kính  $R_2 = 1$ .

• Đặt  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ). Ta có  $|\bar{z} + 4i| = |z - 8 + 4i| \longrightarrow a^2 + (-b + 4)^2 = (a - 8)^2 + (b + 4)^2$   
 $\Leftrightarrow a - b = 4 \longrightarrow$  tập hợp điểm  $C$  biểu diễn số phức  $z$  nằm trên đường thẳng  $\Delta: x - y = 4$ .



Khi đó  $P = |z - z_1| + |z - z_2| = CA + CB$ .

Gọi  $K$  là điểm đối xứng của  $J$  qua đường thẳng  $\Delta$ , khi đó ta tìm được  $K(4;-3) \longrightarrow$  phương trình đường thẳng  $IK: x = 4$ .

Do đó  $P_{\min}$  khi và chỉ khi  $C = IK \cap \Delta$  và  $\begin{cases} A = CI \cap (C_1) & (A \text{ o giữa } CI) \\ B = CJ \cap (C_2) & (B \text{ o giữa } CJ) \end{cases}$

$\longrightarrow A(4;4), B(2;0) \longrightarrow M = |z_1 - z_2| = AB = 2\sqrt{5}$ . **Chọn A.**

**Câu 3.** Xét các số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1 + 3 + 2i| = 1$  và  $|z_2 + 2 - i| = 1$ . Số phức  $z$  có phần thực bằng  $a$ , phần ảo bằng  $b$  thỏa mãn  $2a - b = 0$ . Tính  $P = |a| + |b|$  khi  $|z - z_1| + |z - 2z_2|$  đạt giá trị nhỏ nhất.

A.  $P = 1$ .

B.  $P = 3$ .

C.  $P = 4$ .

D.  $P = 7$ .

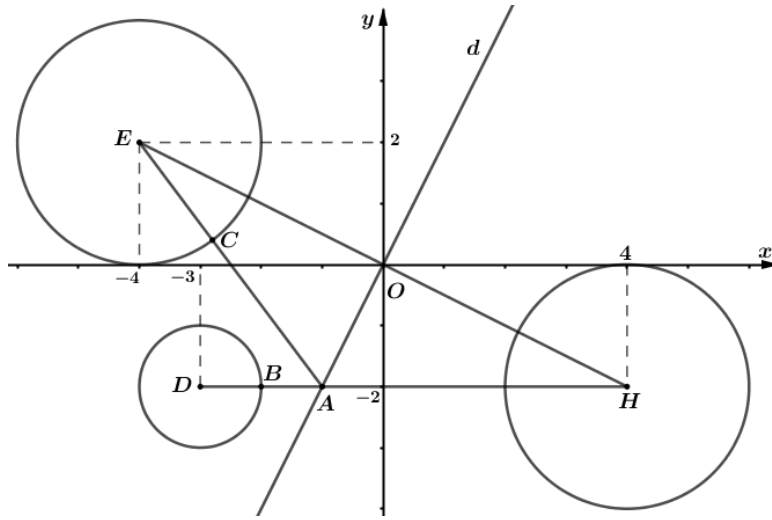
**Lời giải.** Ta có

• Số phức  $z$  có phần thực bằng  $a$ , phần ảo bằng  $b$  thỏa mãn  $2a - b = 0$  nên tập hợp điểm  $A$  biểu diễn số phức  $z$  là đường thẳng  $d: y = 2x$ .

•  $|z_1 + 3 + 2i| = 1 \rightarrow$  tập hợp điểm  $B$  biểu diễn số phức  $z_1$  là đường tròn có tâm  $D(-3;-2)$ , bán kính bằng 1.

•  $|z_2 + 2 - i| = 1 \Leftrightarrow |2z_2 + 4 - 2i| = 2$ . Đặt  $z_3 = 2z_2$  khi đó  $|z_3 + 4 - 2i| = 2$

$\rightarrow$  tập hợp điểm  $C$  biểu diễn số phức  $z_3$  là đường tròn có tâm  $E(-4;2)$ , bán kính bằng 2.



Khi đó  $T = |z - z_1| + |z - 2z_2| = |z - z_1| + |z - z_3| = AB + AC$ .

Gọi  $H$  là điểm đối xứng của  $E$  qua đường thẳng  $d$ , khi đó ta tìm được  $H(4; -2) \longrightarrow$  phương trình đường thẳng  $DH: y = -2$ .

Do đó  $T_{\min}$  khi và chỉ khi  $A = DH \cap d \longrightarrow$  tọa độ điểm  $A$  là nghiệm của hệ  $\begin{cases} y = 2x \\ y = -2 \end{cases}$

$$\longrightarrow A(-1; -2) \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases} \longrightarrow P = |a| + |b| = 3. \text{ Chọn B.}$$

**Cách 2.** Ta có  $|z - z_1| + |z - 2z_2| = |(z + 3 + 2i) - (z_1 + 3 + 2i)| + |(z + 4 - 2i) - 2(z_2 + 2 - i)|$

$$\geq |z + 3 + 2i| - |z_1 + 3 + 2i| + |z + 4 - 2i| - 2|z_2 + 2 - i|$$

$$= |z + 3 + 2i| + |z + 4 - 2i| - 3$$

$$= \sqrt{(a+3)^2 + (b+2)^2} + \sqrt{(a+4)^2 + (b-2)^2} - 3$$

$$= \sqrt{(a+3)^2 + (2a+2)^2} + \sqrt{(a+4)^2 + (2a-2)^2} - 3.$$

Xét hàm  $y = \sqrt{(a+3)^2 + (2a+2)^2} + \sqrt{(a+4)^2 + (2a-2)^2} - 3$  trên  $\mathbb{R}$ , ta được  $\min_{\mathbb{R}} f(a) = 4$ .

Dấu "=" xảy ra khi  $a = -1 \longrightarrow b = -2$ . Suy ra  $P = 3$ .

**Câu 4.** Xét các số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1 - 5 + 3i| = |z_1 - 1 - 3i|$  và  $|z_2 - 4 - 3i| = |z_2 - 2 + 3i|$ .

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |z_1 - z_2| + |\bar{z}_1 - 6 + i| + |\bar{z}_2 - 6 - i|$  bằng

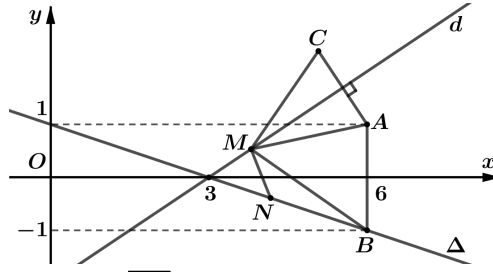
- A.  $2\sqrt{10}$ .      B.  $\frac{7}{2}$ .      C.  $\frac{4\sqrt{130}}{13}$ .      D.  $\frac{18}{\sqrt{13}}$ .

**Lời giải.** Gọi  $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ). Khi đó ta có

$$\begin{cases} |z_1 - 5 + 3i| = |z_1 - 1 - 3i| \\ |z_2 - 4 - 3i| = |z_2 - 2 + 3i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-5)^2 + (b+3)^2 = (a-1)^2 + (b-3)^2 \\ (c-4)^2 + (d-3)^2 = (c-2)^2 + (d+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 3b = 6 \\ c + 3d = 3 \end{cases}$$

$\longrightarrow$  tập hợp  $M$  biểu diễn số phức  $z_1$  nằm trên đường thẳng  $d: 2x - 3y = 6$ , tập hợp  $N$  biểu diễn số phức  $z_2$  nằm trên đường thẳng  $\Delta: x + 3y = 3$ .

Gọi  $A(6; 1), B(6; -1)$ . Khi đó  $P = |z_1 - z_2| + |\bar{z}_1 - 6 + i| + |\bar{z}_2 - 6 - i| = |z_1 - z_2| + |z_1 - 6 - i| + |z_2 - 6 + i|$   
 $= MN + MA + NB = (MN + NB) + MA \geq MB + MA \geq BC$  với  $C$  là điểm đối xứng của  $A$  qua  $d$ .



Ta tìm được  $C\left(\frac{66}{13}; \frac{31}{13}\right) \longrightarrow BC = \frac{4\sqrt{130}}{13}$ . **Chọn C.**

Dấu "=" xảy ra khi  $M = BC \cap d$  và  $N \equiv B$ .

## Vấn đề 8. Tâm tử cự

**Câu 1.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z + 5 - i| = |2 + 3i|$ . Đặt  $P = |z + 3 - 9i|^2 + |z - 1 - 5i|^2$ . Biết  $P$  đạt giá trị nhỏ nhất tại  $z_1$  và  $P$  đạt giá trị lớn nhất tại  $z_2$ . Giá trị của biểu thức  $|z_1 - z_2|$  bằng

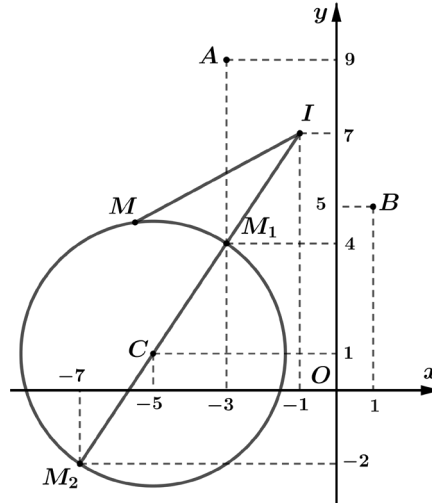
A.  $2\sqrt{13}$ .

B.  $2\sqrt{15}$ .

C.  $4\sqrt{3}$ .

D. 52.

**Lời giải.** Từ  $|z + 5 - i| = |2 + 3i| \Leftrightarrow |z + 5 - i| = \sqrt{13} \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  thuộc trên đường tròn  $(C)$  có tâm  $C(-5; 1)$ , bán kính  $R = \sqrt{13}$ .



Ta có  $P = |z + 3 - 9i|^2 + |z - 1 - 5i|^2 = MA^2 + MB^2$  với  $A(-3; 9)$ ,  $B(1; 5)$ .

Trong mặt phẳng  $Oxy$  chọn điểm  $I$  thỏa  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \longrightarrow I(-1; 7) \Rightarrow \begin{cases} IA = 2\sqrt{2} \\ IB = 2\sqrt{2} \end{cases}$ .

Có  $MA^2 + MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + IA^2 + IB^2 = 16 + 2MI^2$ .

Do đó  $\begin{cases} P_{\min} \Leftrightarrow MI_{\min} \Leftrightarrow M \equiv M_1(-3; 4) \\ P_{\max} \Leftrightarrow MI_{\max} \Leftrightarrow M \equiv M_2(-7; -2) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} z_1 = -3 + 4i \\ z_2 = -7 - 2i \end{cases} \longrightarrow |z_1 - z_2| = 2\sqrt{13}$ . **Chọn A.**

**Câu 2.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z + 1 - 2i| = 3\sqrt{2}$ . Gọi  $m, M$  lần lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức  $P = |z - 3 + 2i|^2 - 2|z - 2 - i|^2$ . Tổng  $m + M$  bằng

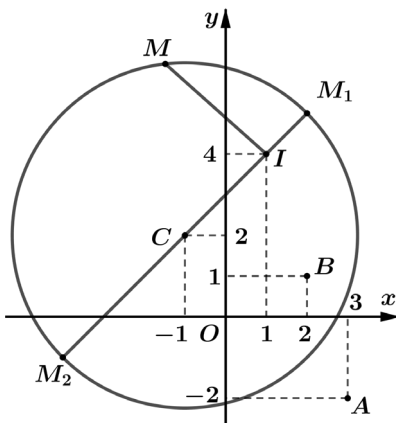
A. -30.

B. -12.

C. 14.

D. 68.

**Lời giải.** Từ  $|z + 1 - 2i| = 3\sqrt{2} \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  nằm trên đường tròn  $(C)$  có tâm  $C(-1; 2)$ , bán kính  $R = 3\sqrt{2}$ .



Ta có  $P = |z - 3 + 2i|^2 - 2|z - 2 - i|^2 = MA^2 - 2MB^2$  với  $A(3; -2)$ ,  $B(2; 1)$ .

Trong mặt phẳng  $Oxy$  chọn điểm  $I$  thỏa  $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \longrightarrow I(1; 4) \Rightarrow \begin{cases} IA = 2\sqrt{10} \\ IB = \sqrt{10} \end{cases}$ .

Có  $MA^2 - 2MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = -MI^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB}) + IA^2 - 2IB^2 = 20 - MI^2$ .

Do đó  $\begin{cases} P_{\min} \Leftrightarrow MI_{\max} \\ P_{\max} \Leftrightarrow MI_{\min} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} P_{\min} = 20 - IM_2^2 = 20 - |CI + R|^2 = -30 \\ P_{\max} = 20 - IM_1^2 = 20 - |CI - R|^2 = 18 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} m = -30 \\ M = 18 \end{cases} \longrightarrow S = -12$ .

**Chọn B.**

**Câu 3.** Xét các số phức  $z = a + i$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $|z - 4 - 3i| = 5$ . Tính  $a + b$  khi biểu thức  $Q = |z + 2 - 2i|^2 + 2|z - 4 + i|^2 + 3|z + 2i|^2$  đạt giá trị lớn nhất.

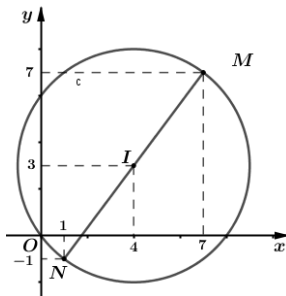
**A.**  $a + b = 11$ .

**B.**  $a + b = 12$ .

**C.**  $a + b = 13$ .

**D.**  $a + b = 14$ .

**Lời giải.** Ta có  $|z - 4 - 3i| = 5 \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  nằm trên đường tròn  $I(4; 3)$ , bán kính  $r = 5$ .



Ta có  $Q = |z + 2 - 2i|^2 + 2|z - 4 + i|^2 + 3|z + 2i|^2 = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$  với  $A(-2; 2)$ ,  $B(4; -1)$ ,  $C(0; -2)$ .

Trong mặt phẳng  $Oxy$  chọn điểm  $N$  thỏa mãn  $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0} \longrightarrow N(1; -1)$ .

Có  $Q = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 = (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA})^2 + 2(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB})^2 + 3(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC})^2$   
 $= 6MN^2 + (NA^2 + 2NB^2 + 3NC^2) + 2\overrightarrow{MN}(\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} + 3\overrightarrow{NC})$   
 $= 6MN^2 + (NA^2 + 2NB^2 + 3NC^2)$ .

Suy ra  $Q_{\max}$  khi  $MN_{\max} \longrightarrow M$  đối xứng với  $N$  qua  $I$  (vì  $N$  thuộc đường tròn tâm  $I$  bán kính  $r = 5$ )  $\longrightarrow M(7; 7)$ . Vậy  $a + b = 7 + 7 = 14$ . **Chọn D.**

**Câu 4.** Xét các số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z - 3 - 4i| = 2$  và  $|z_1 - z_2| = 1$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |z_1|^2 - |z_2|^2$  bằng

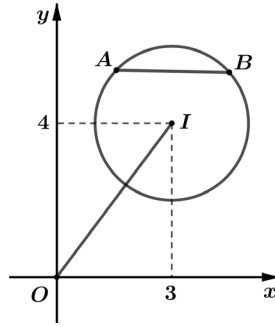
**A.**  $-4 - 3\sqrt{5}$ .

**B.**  $-6 - 2\sqrt{5}$ .

**C.**  $-5$ .

**D.**  $-10$ .

**Lời giải.** Ta có  $|z - 3 - 4i| = 2 \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  nằm trên đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(3; 4)$ , bán kính  $R = 2$ .



Gọi  $A, B \in (C)$  lần lượt là điểm biểu diễn của  $z_1, z_2$ . Suy ra  $|z_1 - z_2| = AB$ .

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } P &= |z_1|^2 - |z_2|^2 = OA^2 - OB^2 = (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= 2\overrightarrow{OI} \cdot (\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BA} = 2OI \cdot AB \cdot \cos(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{BA}) \geq -2OI = -10. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi  $\overrightarrow{OI} = k\overrightarrow{BA}$  ( $k < 0$ ). **Chọn D.**

## Vấn đề 9. Phương pháp cân bằng hệ số

**Câu 1.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z| = 1$ . Giá trị lớn nhất của  $T = |z + 1| + 2|z - 1|$  bằng

A.  $2\sqrt{5}$ .

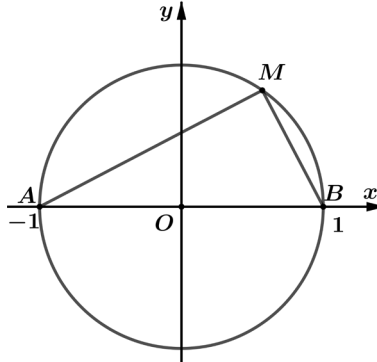
B.  $2\sqrt{10}$ .

C.  $3\sqrt{2}$ .

D.  $3\sqrt{5}$ .

**Lời giải.** Từ  $|z| = 1 \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  thuộc đường tròn  $(C)$  có tâm  $O(0;0)$ , bán kính  $R = 1$ .

Gọi  $A(-1;0)$ ,  $B(1;0)$ . Nhận thấy  $AB$  là đường kính của  $(C)$  nên  $MA^2 + MB^2 = AB^2 = 4$ .



Khi đó  $T = MA + 2MB \leq \sqrt{(1^2 + 2^2)(MA^2 + MB^2)} = \sqrt{5 \cdot 4} = 2\sqrt{5}$ . **Chọn A.**

Nhận xét. Bài này rơi vào trường hợp đặc biệt là  $AB$  là đường kính của đường tròn.

Nếu bài toán hỏi giá trị nhỏ nhất thì ta có đánh giá  $MA + 2MB \geq MA$ . Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi  $M \equiv B$ . Khi đó  $\min(MA + 2MB) = AB$ .

**Câu 2.** Xét các số phức  $z$  thỏa  $|z - 1| = \sqrt{2}$ . Giá trị lớn nhất của  $T = |z + i| + |z - 2 - i|$  bằng

A. 4.

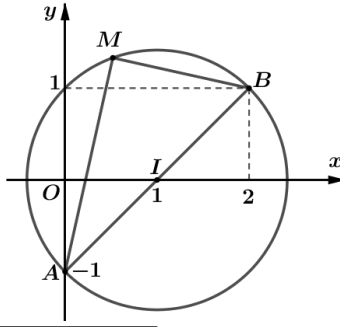
B.  $4\sqrt{2}$ .

C. 8.

D.  $8\sqrt{2}$ .

**Lời giải.** Từ  $|z - 1| = \sqrt{2} \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  thuộc đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(1;0)$ , bán kính  $R = \sqrt{2}$ .

Gọi  $A(0;-1)$ ,  $B(2;1)$ . Nhận thấy  $AB$  là đường kính của  $(C)$  nên  $MA^2 + MB^2 = AB^2 = 8$ .



Khi đó  $T = MA + MB \leq \sqrt{(1^2 + 1^2)(MA^2 + MB^2)} = \sqrt{2 \cdot 8} = 4$ . **Chọn A.**

**Câu 3.** Xét các số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) có môđun bằng 2 và phần ảo dương. Tính giá trị biểu thức  $S = [5(a+b)+2]^{2018}$  khi biểu thức  $P = |2+z| + 3|2-z|$  đạt giá trị lớn nhất.

A.  $S = 0$ .

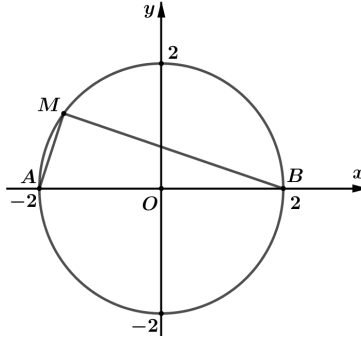
B.  $S = 1$ .

C.  $S = 2^{2018}$ .

D.  $S = 2^{1009}$ .

**Lời giải.** Gọi  $M(a; b)$  với  $b > 0$  là điểm biểu diễn số phức  $z$ .

Gọi  $A(-2; 0)$ ,  $B(2; 0)$ . Ta có  $|z| = 2 \rightarrow |a + bi| = 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4$ . Suy ra  $M$  thuộc đường tròn  $(C)$  đường kính  $AB$  nên  $MA^2 + MB^2 = AB^2 = 16$ .



Khi đó  $P = |2+z| + 3|2-z| = MA + 3MB \leq \sqrt{(1^2 + 3^2)(MA^2 + MB^2)} = 4\sqrt{10}$ .

Dấu "=" xảy ra khi  $\begin{cases} M \in (C) \\ MA = \frac{MB}{3} \end{cases} \xrightarrow{b>0} M\left(-\frac{8}{5}; \frac{6}{5}\right) \rightarrow S = \left[5\left(-\frac{8}{5} + \frac{6}{5}\right) + 2\right]^{2018} = 0$ . **Chọn A.**

**Câu 4.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $\left|\frac{z-1}{z+3i}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của  $P = |z+i| + 2|\bar{z}-4+7i|$ . Giá trị  $M+m$  bằng

A.  $10 + 2\sqrt{5}$ .

B.  $10 + 4\sqrt{5}$ .

C.  $20 + 2\sqrt{5}$ .

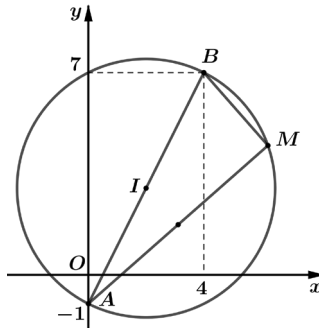
D.  $20 + 4\sqrt{5}$ .

**Lời giải.** Gọi  $z = a + bi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ )  $\rightarrow \bar{z} = a - bi$  và  $M(a; b)$  là điểm biểu diễn số phức  $z$ .

Ta có  $\left|\frac{z-1}{z+3i}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}|z-1| = |z+3i| \rightarrow 2[(a-1)^2 + b^2] = a^2 + (b+3)^2$

$\Leftrightarrow (a-2)^2 + (b-3)^2 = 20$ . Suy ra  $M$  thuộc đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(2; 3)$ , bán kính  $R = 2\sqrt{5}$ .

Vì  $|\bar{z}-4+7i| = |z-4-7i| \rightarrow P = |z+i| + 2|z-4-7i| = MA + 2MB$  với  $A(0; -1)$ ,  $B(4; 7)$ .



Nhận thấy  $AB$  là đường kính của đường tròn  $(C)$  nên  $MA^2 + MB^2 = AB^2 = 80$ .

- $MA + 2MB \geq MA$ . Dấu "=" xảy ra khi  $M \equiv B$ . Khi đó  $m = \min(MA + 2MB) = AB = 4\sqrt{5}$ .
- $MA + 2MB \leq \sqrt{(1^2 + 2^2)(MA^2 + MB^2)} = \sqrt{5 \cdot 80} = 20$ .

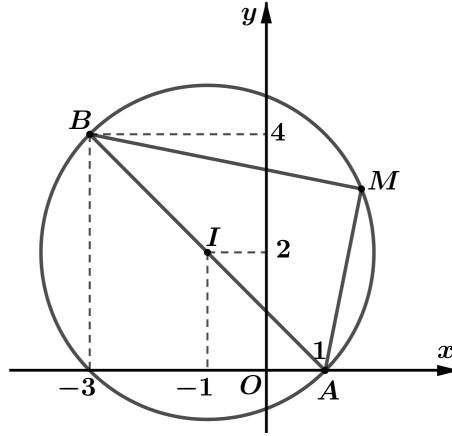
Vậy  $M + m = 20 + 4\sqrt{5}$ . **Chọn D.**

**Câu 5.** Xét số phức  $z$  thỏa mãn  $|z + 1 - 2i| = 2\sqrt{2}$ . Với  $a, b$  là số thực dương cho trước, giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = a|z - 1| + b|\bar{z} + 3 + 4i|$  bằng

- A.  $\sqrt{a^2 + b^2}$ .      B.  $\sqrt{2a^2 + 2b^2}$ .      C.  $4\sqrt{2a^2 + 2b^2}$ .      D.  $a^2 + b^2$ .

**Lời giải.** Từ  $|z + 1 - 2i| = 2\sqrt{2} \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  thuộc đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(-1; 2)$ , bán kính  $R = 2\sqrt{2}$ .

Vì  $|\bar{z} + 3 + 4i| = |z + 3 - 4i| \longrightarrow P = a|z - 1| + b|z + 3 - 4i| = a.MA + b.MB$  với  $A(1; 0)$ ,  $B(-3; 4)$ .



Nhận thấy  $AB$  là đường kính của đường tròn  $(C)$  nên  $MA^2 + MB^2 = AB^2 = 32$ .

Ta có  $P = a.MA + b.MB \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(MA^2 + MB^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)32} = 4\sqrt{2a^2 + 2b^2}$ .

Dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow \frac{MA}{a} = \frac{MB}{b} \Leftrightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \tan \widehat{MBA} = \frac{a}{b}$ . Vì  $a, b > 0$  nên phương trình

$\tan x = \frac{a}{b}$  luôn có nghiệm. Tức là, luôn có điểm  $M$  thuộc đường tròn để đẳng thức xảy ra.

Vậy giá trị lớn nhất của  $P$  là  $4\sqrt{2a^2 + 2b^2}$ . **Chọn C.**

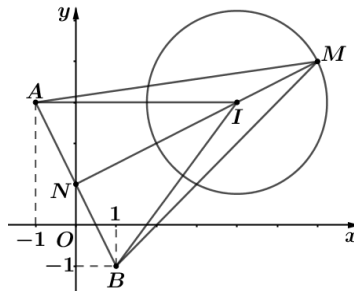
**Câu 6.** Xét các số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5}$ . Tính  $a + b$  khi biểu thức  $P = |z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$  đạt giá trị lớn nhất.

- A.  $a + b = 4$ .      B.  $a + b = 6$ .      C.  $a + b = 8$ .      D.  $a + b = 10$ .

**Lời giải.** Từ  $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5} \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  thuộc đường tròn tâm  $I(4; 3)$ , bán kính  $R = \sqrt{5}$ .

Gọi  $A(-1; 3)$ ,  $B(1; -1)$  và  $N(0; 1)$  là trung điểm của  $AB$ .

Khi đó  $P = |z + 1 - 3i| + |z - 1 + i| = MA + MB \leq \sqrt{2(MA^2 + MB^2)}$ .



Mà  $MA^2 + MB^2 = 2MN^2 + \frac{AB^2}{2}$ . Do đó để  $P_{\max} \Leftrightarrow MN_{\max} \longrightarrow M, I, N$  theo thứ tự đó thẳng

hàng, suy ra  $M(6;4) \longrightarrow a+b=10$ . **Chọn D.**

Nhận xét.

•  $P_{\min} \longrightarrow N, M, I$  theo thứ tự đó thẳng hàng, suy ra  $M(2;2)$ .

• Bài toán rơi vào trường hợp đặc biệt là đường trung trực của đoạn  $AB$  đi qua tâm của đường tròn, nếu không rơi vào trường hợp đặc biệt thì trở thành bài toán vô cùng khó.

**Câu 7.** Xét các số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $|z - 4 - 3i| = 2\sqrt{2}$ . Tính  $2a + b$  khi biểu thức  $P = |z - 1 + 2i| + |z - 9 - 6i|$  đạt giá trị lớn nhất.

A.  $2a + b = 7$ .

B.  $2a + b = 9$ .

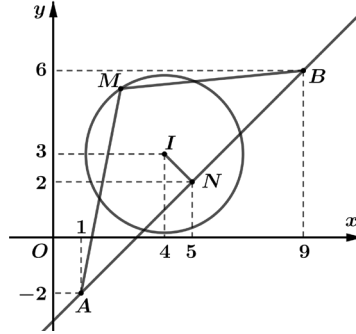
C.  $2a + b = 12$ .

D.  $2a + b = 13$ .

**Lời giải.** Từ  $|z - 4 - 3i| = 2\sqrt{2} \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  thuộc đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(4;3)$ , bán kính  $R = 2\sqrt{2}$ .

Gọi  $A(1;-2)$ ,  $B(9;6)$  và  $N(5;2)$  là trung điểm của  $AB$ .

Khi đó  $P = |z - 1 + 2i| + |z - 9 - 6i| = MA + MB \leq \sqrt{2(MA^2 + MB^2)}$ .



Mà  $MA^2 + MB^2 = 2MN^2 + \frac{AB^2}{2}$ . Do đó để  $P_{\max} \Leftrightarrow MN_{\max} \longrightarrow M, I, N$  theo thứ tự đó thẳng

hàng, suy ra  $M(2;5) \longrightarrow 2a + b = 9$ . **Chọn B.**

**Câu 8.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - 2 - 2i| = 1$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = |z - 3 - 2i| + |2\bar{z} - 2 + 4i|$  bằng

A.  $\sqrt{5}$ .

B.  $2\sqrt{5}$ .

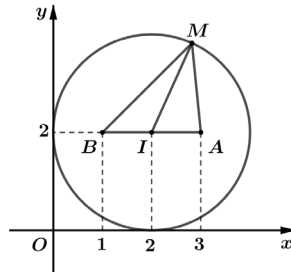
C.  $3\sqrt{15}$ .

D.  $\sqrt{10}$ .

**Lời giải.** Từ  $|z - 2 - 2i| = 1 \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  thuộc đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(2;2)$ , bán kính  $R = 1$ .

Ta có  $P = |z - 3 - 2i| + 2|z - 1 + 2i| = |z - 3 - 2i| + 2|z - 1 - 2i|$ .

Gọi  $A(3;2)$ ,  $B(1;2)$ . Nhận thấy  $I$  là trung điểm của  $AB$ .



Khi đó  $P = |z - 3 - 2i| + 2|z - 1 - 2i| = MA + 2MB \leq \sqrt{(1^2 + 2^2)(MA^2 + MB^2)}$

$$= \sqrt{5(MA^2 + MB^2)} = \sqrt{5\left(2MI^2 + \frac{AB^2}{2}\right)} = \sqrt{5 \cdot 4} = 2\sqrt{5}.$$

Dấu "=" xảy ra  $\frac{MA}{1} = \frac{MB}{2} \Leftrightarrow MB = 2MA$ . **Chọn B.**

**Câu 9.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-2-i|=2\sqrt{2}$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P=|z+3-2i|+|z-3+4i|$ . Tính  $M+m$ .

A.  $M+m=2\sqrt{26}+6\sqrt{2}$ .

B.  $M+m=2\sqrt{26}+8\sqrt{2}$ .

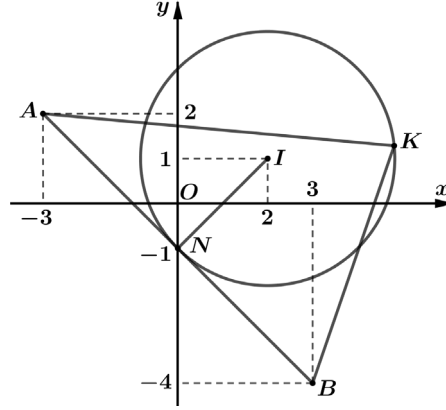
C.  $M+m=11\sqrt{2}$ .

D.  $M+m=16\sqrt{2}$ .

**Lời giải.** Từ  $|z-2-i|=2\sqrt{2} \longrightarrow$  tập hợp các điểm  $K$  biểu diễn số phức  $z$  thuộc đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(2;1)$ , bán kính  $R=2\sqrt{2}$ .

Gọi  $A(-3;2)$ ,  $B(3;-4)$  và  $N(0;-1)$  là trung điểm của  $AB$ . Nhận thấy  $N \in (C)$ .

Khi đó  $P=|z+3-2i|+|z-3+4i|=KA+KB \leq \sqrt{2(KA^2+KB^2)}$ .



Mà  $KA^2+KB^2=2KN^2+\frac{AB^2}{2}$ . Do đó để

•  $P_{\max} \Leftrightarrow KN_{\max}$ . Dấu "=" xảy ra khi  $K$  đối xứng  $N$  qua  $I$  nên  $K(4;3) \longrightarrow M=KA+KB=10\sqrt{2}$ .

•  $P_{\min} \Leftrightarrow KN_{\min} \Leftrightarrow K \equiv N \longrightarrow m=KA+KB=AN+NB=AB=6\sqrt{2}$ .

Vậy  $M+m=16\sqrt{2}$ . **Chọn D.**

**Câu 10.** Xét các số phức  $z=a+bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $|z-3-2i|=2$ . Tính  $a+b$  khi biểu thức  $T=|z+1-2i|+2|z-2-5i|$  đạt giá trị nhỏ nhất.

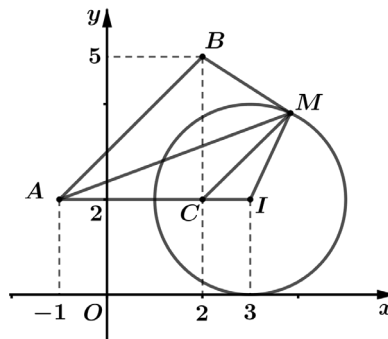
A.  $a+b=3$ .

B.  $a+b=2+\sqrt{3}$ .

C.  $a+b=4-\sqrt{3}$ .

D.  $a+b=4+\sqrt{3}$ .

**Lời giải.** Từ  $|z-3-2i|=2 \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  thuộc đường tròn tâm  $I(3;2)$ , bán kính  $R=2$ .



Khi đó  $T=|z+1-2i|+2|z-2-5i|=MA+2MB$  với  $A(-1;2)$ ,  $B(2;5)$ .

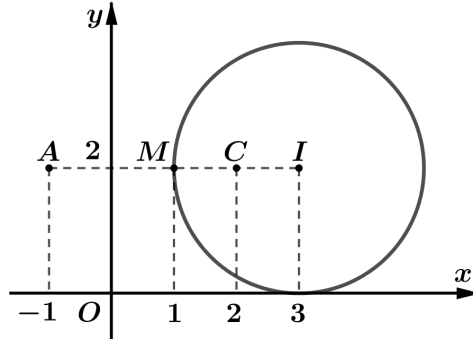
Gọi điểm  $C(2;2) \in IA$ . Ta có  $\left. \begin{array}{l} \frac{IC}{IM} = \frac{IM}{IA} \\ \widehat{MIC} = \widehat{AIM} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MIC \sim \triangle AIM \longrightarrow MA=2CM$ .

Suy ra  $T=2(MB+MC) \geq 2BC$ . Dấu "=" xảy ra khi  $M, B, C$  theo thứ tự thẳng hàng. Khi

đó ta tìm được  $M(2;2+\sqrt{3}) \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2+\sqrt{3} \end{cases} \longrightarrow a+b=4+\sqrt{3}$ . **Chọn D.**

Nhận xét.

- Kỹ thuật chọn điểm  $C$ : Chọn điểm  $C$  thỏa mãn hệ thức  $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MC}$  với vị trí của  $M$  như hình vẽ bên dưới.



- Mục đích chọn điểm  $C$  như thế để tạo ra  $T = 2MC + 2MB$  gọi là phương pháp cân bằng hệ số. Dĩ nhiên không phải bài nào cũng cân bằng được, hệ số được cho trong dữ kiện đề bài phải được tác giả xử lý ngon lành trước rồi.

**Câu 11.** Xét các số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $|z| = 2$ . Tính  $a + b$  khi biểu thức  $P = |z - 4| + 2|z + 1 + 4i|$  đạt giá trị nhỏ nhất.

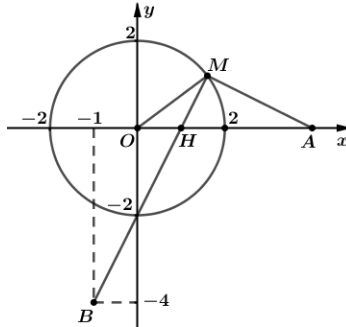
A.  $a + b = -2$ .

B.  $a + b = 2$ .

C.  $a + b = 2\sqrt{5}$ .

D.  $a + b = 4\sqrt{5}$ .

**Lời giải.** Từ  $|z| = 2 \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  thuộc đường tròn tâm  $O(0;0)$ , bán kính  $R = 2$ .



Khi đó  $P = |z - 4| + 2|z + 1 + 4i| = MA + 2MB$  với  $A(4;0)$ ,  $B(-1;-4)$ .

Gọi điểm  $H(1;0) \in OA$ . Chứng minh được  $MA = 2MH$ .

Suy ra  $P = 2(MH + MB) \geq 2BH$ . Dấu "=" xảy ra khi  $H, M, B$  theo thứ tự thẳng hàng. Khi

đó ta tìm được  $M(0;-2) \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -2 \end{cases} \longrightarrow a + b = -2$ . **Chọn A.**

**Câu 12.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $|z + i| = 1$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = |\bar{z} - \sqrt{2} - i| + \sqrt{2}|z - \sqrt{2} + 3i|$  bằng

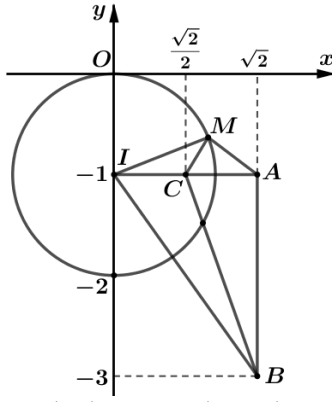
A.  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ .

B.  $\sqrt{2}$ .

C.  $\sqrt{3}$ .

D. 3.

**Lời giải.** Từ  $|z + i| = 1 \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  thuộc đường tròn tâm  $I(0;-1)$ , bán kính  $R = 1$ .



Khi đó  $P = |\bar{z} - \sqrt{2} - i| + \sqrt{2}|z - \sqrt{2} + 3i| = |z - \sqrt{2} + i| + \sqrt{2}|z - \sqrt{2} + 3i| = MA + \sqrt{2}MB$   
 với  $A(\sqrt{2}; -1)$ ,  $B(\sqrt{2}; -3)$ .

Gọi điểm  $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -1\right) \in IA$ . Chứng minh được  $MA = \sqrt{2}MC$ .

Suy ra  $P = \sqrt{2}(MC + MB) \geq \sqrt{2}BC$ . Dấu "=" xảy ra khi  $B, M, C$  theo thứ tự đó thẳng hàng.

Vậy  $P_{\min} = \sqrt{2}BC = 3$ . **Chọn D.**

**Câu 13.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $|z - 1 - i| = 5$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = 2|z - 8i| - |z - 7 - 9i|$  bằng

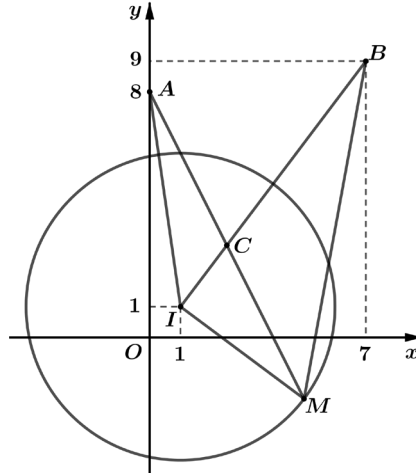
A.  $\frac{5}{2}$ .

B.  $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ .

C.  $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ .

D.  $5\sqrt{5}$ .

**Lời giải.** Từ  $|z - 1 - i| = 5 \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  thuộc đường tròn tâm  $I(1;1)$ , bán kính  $R = 5$ .



Khi đó  $P = 2|z - 8i| - |z - 7 - 9i| = 2MA - MB$  với  $A(0;8)$ ,  $B(7;9)$ .

Gọi điểm  $C\left(\frac{5}{2}; 3\right) \in IB$ . Chứng minh được  $MB = 2MC$ .

Suy ra  $P = 2(MA - MC) \leq 2AC$ . Dấu "=" xảy ra khi  $A, C, M$  theo thứ tự đó thẳng hàng.

Vậy  $P_{\max} = 2AC = 5\sqrt{5}$ . **Chọn D.**

**Câu 14.** Xét các số phức  $z$  thỏa  $|z| = 1$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $T = |z + 2| + 2|z - 2|$  bằng

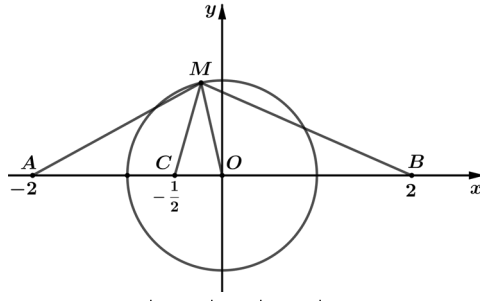
A. 2.

B.  $2\sqrt{5}$ .

C. 5.

D.  $5\sqrt{2}$ .

**Lời giải.** Từ  $|z| = 1 \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  thuộc đường tròn tâm  $O(0;0)$ , bán kính  $R = 1$ .



Gọi  $A(-2;0)$ ,  $B(2;0)$ . Khi đó ta có  $T = |z+2| + 2|z-2| = MA + 2MB$

$$\leq \sqrt{(1^2 + 2^2)(MA^2 + MB^2)} = \sqrt{5 \left( 2MO^2 + \frac{AB^2}{2} \right)} = 5\sqrt{2}.$$

$\longrightarrow T_{\max} = 5\sqrt{2}$ . Dấu bằng xảy ra khi  $\begin{cases} M \in (C) \\ MB = 2MA \end{cases}$ . **Chọn D.**

**Cách 2.** Đặt  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ). Từ  $|z| = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } T &= |z+2| + 2|z-2| = \sqrt{(a+2)^2 + b^2} + 2\sqrt{(a-2)^2 + b^2} \\ &\leq \sqrt{(1^2 + 2^2) \left( (a+2)^2 + b^2 + (a-2)^2 + b^2 \right)} = \sqrt{10(a^2 + b^2 + 4)} = 5\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ 2\sqrt{(a+2)^2 + b^2} = \sqrt{(a-2)^2 + b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ 2\sqrt{4a+5} = \sqrt{5-4a} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = \pm \frac{\sqrt{7}}{4} \end{cases}.$$

**Câu 15.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|2z+1-3i| = \sqrt{2}$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = |z-1| + 3|z+1-2i|$  bằng

A.  $2\sqrt{2}$ .

B. 4.

C.  $4\sqrt{2}$ .

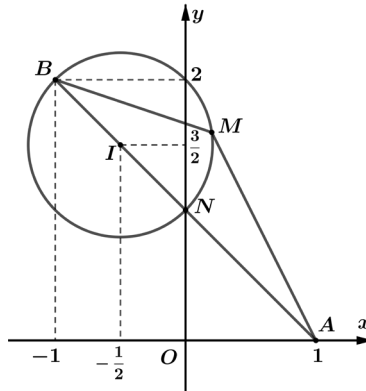
D.  $4\sqrt{3}$ .

**Lời giải.** Từ  $|2z+1-3i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left| z + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$

thuộc đường tròn  $(C)$  có tâm  $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ , bán kính  $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Gọi  $A(1;0)$ ,  $B(-1;2)$ . Nhận thấy  $B \in (C)$  và  $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .

$$\text{Khi đó } P = |z-1| + 3|z+1-2i| = MA + 3MB = 1.MA + \sqrt{3}.\sqrt{3}MB \leq \sqrt{(1+3)(MA^2 + 3MB^2)}.$$



$$\begin{aligned} \text{Ta có } MA^2 + 3MB^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= 4MI^2 + IA^2 + 3IB^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB}) = 4MI^2 + IA^2 + 3IB^2 = 8. \end{aligned}$$

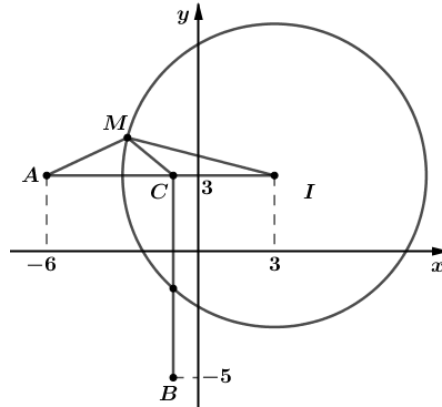
$$\text{Vậy } P \leq \sqrt{(1+3).8} = 4\sqrt{2}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \frac{MA}{1} = \frac{\sqrt{3}MB}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow MA = MB \longrightarrow M \equiv N(0;1).$$

**Chọn C.**

**Câu 16.** Cho số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $|z - 3 - 3i| = 6$ . Tính  $a + b$  khi biểu thức  $P = 2|z + 6 - 3i| + 3|z + 1 + 5i|$  đạt giá trị nhỏ nhất.

A.  $a + b = 2 - 2\sqrt{5}$ . B.  $a + b = 2\sqrt{5} - 2$ . C.  $a + b = 2\sqrt{5} - 4$ . D.  $a + b = 4 - 2\sqrt{5}$ .

**Lời giải.** Từ  $|z - 3 - 3i| = 6 \longrightarrow$  tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  thuộc đường tròn tâm  $I(3; 3)$ , bán kính  $R = 6$ .



Khi đó  $P = 2|z + 6 - 3i| + 3|z + 1 + 5i| = 2MA + 3MB$  với  $A(-6; 3)$ ,  $B(-1; -5)$ .

Xét điểm  $C(-1; 3)$ , ta thấy  $C \in IA$  và  $\frac{IC}{IM} = \frac{IM}{IA} = \frac{2}{3} \longrightarrow \triangle IMC \sim \triangle IAM \longrightarrow MA = \frac{3}{2}MC$ .

Suy ra  $P = 3(MC + MB) \geq 3BC \longrightarrow P_{\min} = 3BC$  khi  $B, M, C$  theo thứ tự đó thẳng hàng  $\longrightarrow M(-1; 3 - \sqrt{5})$ . Vậy  $a + b = 2 - 2\sqrt{5}$ . **Chọn A.**

## Vấn đề 10. Elip

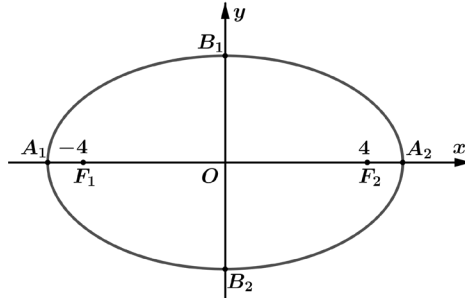
**Câu 1.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z + 4| + |z - 4| = 10$ . Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của  $|z|$  lần lượt là

A. 10 và 4. B. 5 và 4. C. 4 và 3. D. 5 và 3.

**Lời giải.** Đặt  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ). Gọi  $M(x; y)$  là điểm biểu diễn của số phức  $z$ .

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , gọi  $F_1(-4; 0)$  và  $F_2(4; 0)$  thì giả thiết bài toán đã cho có dạng  $MF_1 + MF_2 = 10$ .

Mà  $F_1F_2 = 8 < 10 \longrightarrow$  quỹ tích điểm  $M$  là đường Elip có hai tiêu điểm là  $F_1, F_2$ ; độ dài trục lớn  $2a = 10$ , tiêu cự  $2c = 8$ , độ dài trục nhỏ  $2b = 2\sqrt{a^2 - c^2} = 6$  (tham khảo hình vẽ).



Dựa vào hình vẽ, ta thấy  $\begin{cases} |z|_{\max} = OA_1 = OA_2 = 5 \\ |z|_{\min} = OB_1 = OB_2 = 3 \end{cases}$ . **Chọn D.**

**Cách 2.** Ta có  $10 = |z - 4| + |z + 4| \geq |z - 4 + z + 4| = |2z| \longrightarrow |z| \leq 5$ .

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có  $100 = (|z - 4| \cdot 1 + |z + 4| \cdot 1)^2 \leq [(|z - 4|)^2 + (|z + 4|)^2] \cdot 2$

$$\Leftrightarrow [(|z - 4|)^2 + (|z + 4|)^2] \geq 50$$

$$\Rightarrow (a+4)^2 + b^2 + (a-4)^2 + b^2 \geq 50 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 9 \longrightarrow |z| \geq 3.$$

**Câu 2.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $\left|iz + \frac{2}{1-i}\right| + \left|iz + \frac{2}{i-1}\right| = 4$ . Gọi  $M$  và  $n$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của  $|z|$ . Tính  $M.n$ .

**A.**  $M.n = 1$ .

**B.**  $M.n = 2$ .

**C.**  $M.n = 2\sqrt{2}$ .

**D.**  $M.n = 2\sqrt{3}$ .

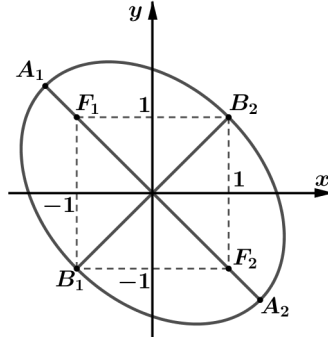
**Lời giải.** Đặt  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ). Gọi  $M(x, y)$  là điểm biểu diễn của số phức  $z$ .

$$\text{Ta có } \left|iz + \frac{2}{1-i}\right| + \left|iz + \frac{2}{i-1}\right| = 4 \Leftrightarrow |z + 1 - i| + |z - 1 + i| = 4. \quad (1)$$

Gọi  $F_1(-1;1)$  là điểm biểu diễn số phức  $-1+i$ ;  $F_2(1;-1)$  là điểm biểu diễn số phức  $1-i$ .

Phương trình (1) được viết lại:  $MF_1 + MF_2 = 4$ .

Mà  $F_1F_2 = 2\sqrt{2} < 4 \longrightarrow$  quỹ tích điểm  $M$  là đường Elip có hai tiêu điểm là  $F_1, F_2$ ; độ dài trục lớn  $2a = 4$ , tiêu cự  $2c = 2\sqrt{2}$ , độ dài trục nhỏ  $2b = 2\sqrt{a^2 - c^2} = 2\sqrt{2}$  (tham khảo hình vẽ).



Dựa vào hình vẽ, ta thấy  $\begin{cases} |z|_{\max} = OA_1 = OA_2 = 2 \\ |z|_{\min} = OB_1 = OB_2 = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = 2 \\ n = \sqrt{2} \end{cases} \longrightarrow M.n = 2\sqrt{2}$ . **Chọn C.**

**Cách 2.** Ta có  $4 = \left|iz + \frac{2}{1-i}\right| + \left|iz + \frac{2}{i-1}\right| \geq |2iz| = 2|z| \Rightarrow |z| \leq 2 \longrightarrow M = 2$ .

$$\text{Lại có } 4^2 = \left(\left|iz + \frac{2}{1-i}\right| + \left|iz + \frac{2}{i-1}\right|\right)^2 \leq (1^2 + 1^2) \left(\left|iz + \frac{2}{1-i}\right|^2 + \left|iz + \frac{2}{i-1}\right|^2\right) = 2.2 \left(|iz|^2 + \left|\frac{2}{1-i}\right|^2\right) = 4(|z|^2 + 2)$$

$$\Rightarrow |z|^2 \geq 2 \Rightarrow |z| \geq \sqrt{2} \longrightarrow n = \sqrt{2}.$$

**Câu 3.** Xét số phức  $z$  thỏa mãn  $|(z+2)i+1| + |(\bar{z}-2)i-1| = 10$ . Gọi  $M$  và  $m$  là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của  $|z|$ . Tính tổng  $S = M + m$ .

**A.**  $S = \sqrt{17}$ .

**B.**  $S = 2\sqrt{21}$ .

**C.**  $S = 8$ .

**D.**  $S = 9$ .

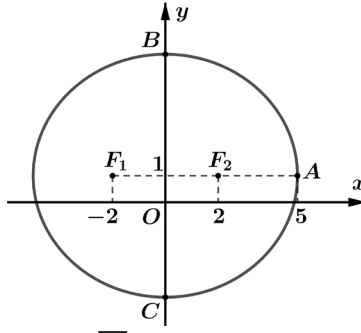
**Lời giải.** Đặt  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ). Gọi  $M(x, y)$  là điểm biểu diễn của số phức  $z$ .

$$\text{Ta có } |(z+2)i+1| + |(\bar{z}-2)i-1| = 10 \Leftrightarrow |z - (-2+i)| + |z - (2+i)| = 10. \quad (1)$$

Gọi  $F_1(-2;1)$  là điểm biểu diễn số phức  $-2+i$ ;  $F_2(2;1)$  là điểm biểu diễn số phức  $2+i$ .

Phương trình (1) được viết lại:  $MF_1 + MF_2 = 10$ .

Mà  $F_1F_2 = 4 < 10 \longrightarrow$  quỹ tích điểm  $M$  là đường Elip có hai tiêu điểm là  $F_1, F_2$ ; độ dài trục lớn  $2a = 10$ , tiêu cự  $2c = 4$ , độ dài trục nhỏ  $2b = 2\sqrt{a^2 - c^2} = 2\sqrt{21}$  (tham khảo hình vẽ).



Dựa vào hình vẽ, ta thấy  $|z|_{\min} = OC = \sqrt{21} - 1$ .

Ta có  $A(5;1)$  là điểm nằm trên trục lớn ;  $B(0;\sqrt{21}+1)$  là điểm nằm trên trục nhỏ. Vì  $OB > OA$  suy ra  $B$  là điểm nằm trên Elip cách xa gốc  $O$  nhất. Suy ra  $|z|_{\max} = OB = \sqrt{21} + 1$ .

Vậy  $M + m = 2\sqrt{21}$ . **Chọn B.**

**Cách 2.** Tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  nằm trên elip  $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{21} = 1$ .

Đặt  $\begin{cases} a = 5 \sin t \\ b - 1 = \sqrt{21} \cos t \end{cases}$  với  $t \in [0; 2\pi)$ .

Khi đó  $|z|^2 = OM^2 = a^2 + b^2 = 25 \sin^2 t + (1 + \sqrt{21} \cos t)^2 = 26 - 4 \cos^2 t + 2\sqrt{21} \cos t$

$\longrightarrow -1 + \sqrt{21} \leq |z| \leq 1 + \sqrt{21}$ . Suy ra  $\begin{cases} |z|_{\max} = 1 + \sqrt{21} & \text{khi } \cos t = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 + \sqrt{21} \end{cases} \\ |z|_{\min} = -1 + \sqrt{21} & \text{khi } \cos t = -1 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 + \sqrt{21} \end{cases} \end{cases}$ .

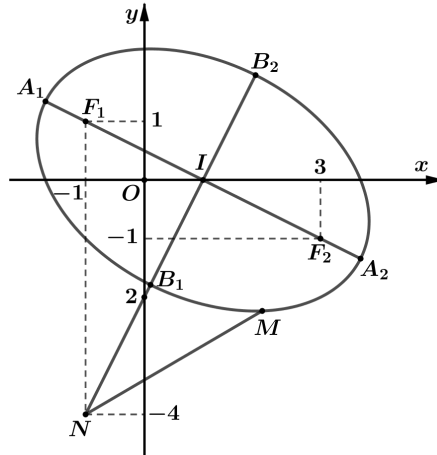
**Câu 4.** Xét các số phức  $z$  thoả mãn  $|z+1-i| + |z-3+i| = 6$ . Tìm giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  của biểu thức  $P = |z+1+4i|$ .

**A.**  $P_{\min} = 2\sqrt{5} - 2$ . **B.**  $P_{\min} = 2\sqrt{5} + 2$ . **C.**  $P_{\min} = \sqrt{5} - 2$ . **D.**  $P_{\min} = 5 - \sqrt{2}$ .

**Lời giải.** Đặt  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ). Gọi  $M(x; y)$  là điểm biểu diễn của số phức  $z$ .

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , gọi  $F_1(-1;1)$  và  $F_2(3;-1)$  thì giả thiết bài toán đã cho có dạng  $MF_1 + MF_2 = 6$ .

Mà  $F_1F_2 = 2\sqrt{5} < 6 \longrightarrow$  quỹ tích điểm  $M$  là đường Elip có hai tiêu điểm là  $F_1, F_2$ ; độ dài trục lớn  $2a = 6$ , tiêu cự  $2c = 2\sqrt{5}$ , độ dài trục nhỏ  $2b = 2\sqrt{a^2 - c^2} = 4$  (tham khảo hình vẽ).



Dựa vào hình vẽ, ta thấy  $P = |z+1+4i|$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow MN$  nhỏ nhất (với  $N(-1;-4)$  là điểm biểu diễn số phức  $-1-4i$ )  $\Leftrightarrow M \equiv B_1$ . Khi đó  $MN_{\min} = B_1N = IN - IB_1 = 2\sqrt{5} - 2$ . **Chọn A.**

Nhận xét. Bài này đặc biệt ở chỗ điểm  $N$  thuộc đường thẳng  $B_1B_2$ .

**Câu 5.** Xét các số phức  $z$  thỏa  $|z-1-i|+|z+1+3i|=6\sqrt{5}$ . Giá trị lớn nhất của  $P=|z-2-3i|$  bằng

A.  $2\sqrt{5}$ .

B.  $4\sqrt{5}$ .

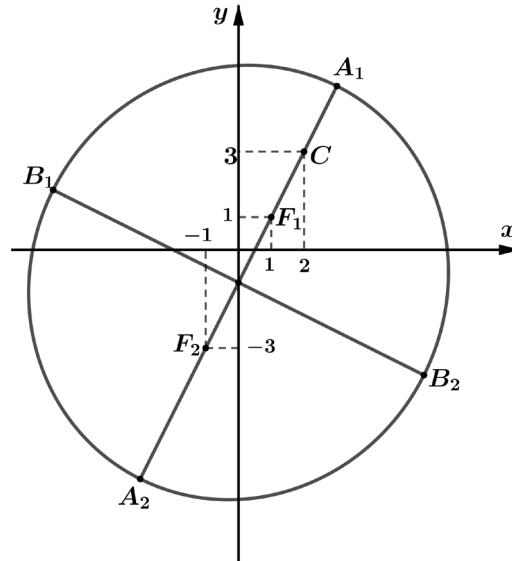
C.  $5\sqrt{5}$ .

D.  $6\sqrt{5}$ .

**Lời giải.** Đặt  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ). Gọi  $M(x; y)$  là điểm biểu diễn của số phức  $z$ .

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , gọi  $F_1(1;1)$  và  $F_2(-1;-3)$  thì giả thiết bài toán đã cho có dạng  $MF_1 + MF_2 = 6\sqrt{5}$ .

Mà  $F_1F_2 = 2\sqrt{5} < 6\sqrt{5} \longrightarrow$  quỹ tích điểm  $M$  là đường Elip có hai tiêu điểm là  $F_1, F_2$ ; độ dài trục lớn  $2a = 6\sqrt{5}$ , tiêu cự  $2c = 2\sqrt{5}$ , độ dài trục nhỏ  $2b = 2\sqrt{a^2 - c^2} = 4\sqrt{10}$  (hình vẽ).



Dựa vào hình vẽ, ta thấy  $\begin{cases} P_{\max} = CA_2 = 5\sqrt{5} \\ P_{\min} = CA_1 = \sqrt{5} \end{cases}$  với  $C(2;3)$ . **Chọn C.**

Nhận xét. Bài này đặc biệt ở chỗ điểm  $C$  thuộc đường thẳng  $A_1A_2$ .

Những bài Elip trên thuộc dạng Elip không chính tắc (Elip xiên), nó không nằm trong chương trình SGK hiện hành nên bạn đọc chỉ tham khảo thêm, tuy nhiên cũng có cách đặt ẩn phụ (tịnh tiến + quay) để đưa về Elip cơ bản như chương trình SGK hiện hành nhưng công thức công kênh và khó nhớ. Vì thế ở đây ta chỉ khai thác những bài đặc biệt là tìm GTLN-GTNN của khoảng cách từ một điểm thuộc Elip đến một điểm cố định mà điểm cố định này phải thuộc các đường thẳng chứa các trục của Elip.

----- HẾT -----