

CHƯƠNG I. VECTO

BÀI 1. ĐỊNH NGHĨA

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Khái niệm vector

2. Vec tơ cùng phương, vecto cùng hướng

Định nghĩa. Hai vector được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

Nhận xét. Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

3. Hai vector bằng nhau

Mỗi vector có một độ dài, đó là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vector đó. Độ dài của $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$, như vậy $|\overrightarrow{AB}| = AB$.

Vector có độ dài bằng 1 gọi là vector đơn vị.

Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và có cùng độ dài, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$

Chú ý. Khi cho trước vector $\vec{a}$ và điểm O , thì ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.

4. Vector – không

Ta biết rằng mỗi vector có một điểm đầu và một điểm cuối và hoàn toàn được xác định khi biết điểm đầu và điểm cuối của nó.

Bây giờ với một điểm A bất kì ta quy ước có một vector đặc biệt mà điểm đầu và điểm cuối đều là A . Vector này được kí hiệu là $\overrightarrow{AA}$ và được gọi là vector – không.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Xác Định Một Vector; Phương, Hướng Của Vector; Độ Dài Của Vector

1. Phương pháp giải.

- Xác định một vector và xác định sự cùng phương, cùng hướng của hai vector theo định nghĩa
- Dựa vào các tính chất hình học của các hình đã cho biết để tính độ dài của một vector

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tứ giác $ABCDE$. Có bao nhiêu vector khác vector-không có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của ngũ giác.

Lời giải

Hai điểm phân biệt, chẳng hạn A, B ta xác định được hai vectơ khác vectơ-không là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}$. Mà từ bốn đỉnh A, B, C, D của ngũ giác ta có 6 cặp điểm phân biệt do đó có 12 vectơ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng ba điểm A, B, C phân biệt thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Lời giải

Nếu A, B, C thẳng hàng suy ra giá của $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ đều là đường thẳng đi qua ba điểm A, B, C nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Ngược lại nếu $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương khi đó đường thẳng AB và AC song song hoặc trùng nhau. Nhưng hai đường thẳng này cùng đi qua điểm A nên hai đường thẳng AB và AC trùng nhau hay ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB .

a) Xác định các vectơ khác vectơ - không cùng phương với $\overrightarrow{MN}$ có điểm đầu và điểm cuối lấy trong điểm đã cho.

b) Xác định các vectơ khác vectơ - không cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ có điểm đầu và điểm cuối lấy trong điểm đã cho.

c) Vẽ các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{NP}$ mà có điểm đầu A, B .

Lời giải (Hình 1.4)

a) Các vectơ khác vectơ không cùng phương với $\overrightarrow{MN}$ là $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{PB}$.

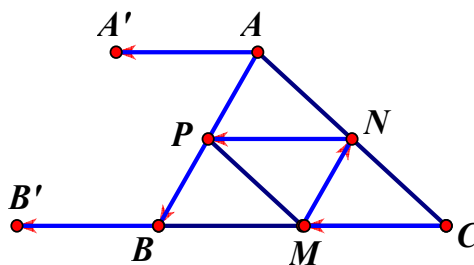
b) Các vectơ khác vectơ - không cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{NM}$.

c) Trên tia CB lấy điểm B' sao cho $BB' = NP$

Khi đó ta có $\overrightarrow{BB'}$ là vectơ có điểm đầu là B và bằng vectơ $\overrightarrow{NP}$.

Qua A dựng đường thẳng song song với đường thẳng NP . Trên đường thẳng đó lấy điểm A' sao cho $\overrightarrow{AA'}$ cùng hướng với $\overrightarrow{NP}$ và $AA' = NP$.

Khi đó ta có $\overrightarrow{AA'}$ là vectơ có điểm đầu là A và bằng vectơ $\overrightarrow{NP}$.

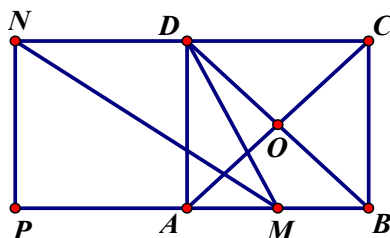


Hình 1.4

Ví dụ 4: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh a . Gọi M là trung điểm của AB , N là điểm đối xứng với C qua D . Hãy tính độ dài của vectơ sau $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{MN}$.

Lời giải (hình 1.5)

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông MAD ta có



Hình 1.5

$$DM^2 = AM^2 + AD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Suy ra } |\overrightarrow{MD}| = MD = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Qua N kẻ đường thẳng song song với AD cắt AB tại P .

Khi đó tứ giác $ADNP$ là hình vuông và $PM = PA + AM = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$.

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông NPM ta có

$$MN^2 = NP^2 + PM^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{13a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Suy ra } |\overrightarrow{MN}| = MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

Dạng 2: chứng minh hai vectơ bằng nhau.

1. Phương pháp giải.

- Để chứng minh hai vectơ bằng nhau ta chứng minh chúng có cùng độ dài và cùng hướng hoặc dựa vào nhận xét nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

2. Các ví dụ.

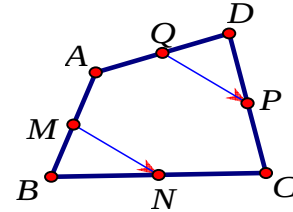
Ví dụ 1: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

Lời giải (hình 1.6)

Do M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC nên MN là đường trung bình của tam giác ABC suy ra $MN \parallel AC$ và $MN = \frac{1}{2}AC$ (1).

Tương tự QP là đường trung bình của tam giác ADC suy ra $QP \parallel AC$ và $QP = \frac{1}{2}AC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $MN \parallel QP$ và $MN = QP$ do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành



Hình 1.6

Vậy ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi I là trung điểm của BC . Dựng điểm B' sao cho $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG}$.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$

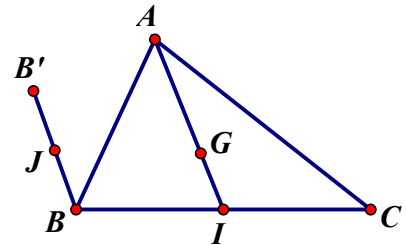
b) Gọi J là trung điểm của BB' . Chứng minh rằng $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.

Lời giải (hình 1.7)

a) Vì I là trung điểm của BC nên $BI = CI$ và $\overrightarrow{BI}$ cùng hướng với $\overrightarrow{IC}$ do đó hai vector $\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{IC}$ bằng nhau hay $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$.

b) Ta có $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG}$ suy ra $B'B = AG$ và $BB' \parallel AG$.

Do đó $\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{IG}$ cùng hướng (1).



Hình 1.7

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $IG = \frac{1}{2}AG$, J là trung điểm BB' suy ra $BJ = \frac{1}{2}BB'$

Vì vậy $BJ = IG$ (2)

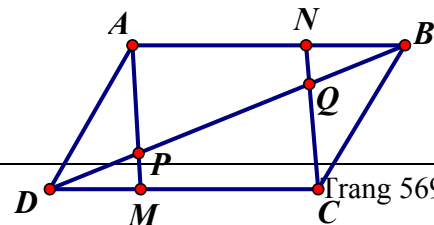
Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.

Ví dụ 3: Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các đoạn thẳng DC, AB theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $DM = BN$. Gọi P là giao điểm của AM, DB và Q là giao điểm của CN, DB . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{QB}$.

Lời giải (hình 1.8)

Ta có $DM = BN \Rightarrow AN = MC$, mặt khác AN song song với MC do đó tứ giác $ANCM$ là hình bình hành

Suy ra $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$.



Hình 1.8

Xét tam giác $\triangle DMP$ và $\triangle BNQ$ ta có $DM = NB$ (giả thiết), $\widehat{PDM} = \widehat{QBN}$ (so le trong)

Mặt khác $\widehat{DMP} = \widehat{APB}$ (đối đỉnh) và $\widehat{APQ} = \widehat{NQB}$ (hai góc đồng vị) suy ra $\widehat{DMP} = \widehat{BNQ}$.

Do đó $\triangle DMP = \triangle BNQ$ (c.g.c) suy ra $DB = QB$.

Dễ thấy $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{QB}$ cùng hướng vì vậy $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{QB}$.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Vector có điểm đầu là D , điểm cuối là E được kí hiệu là

- A. DE . B. $|\overrightarrow{DE}|$. C. $\overrightarrow{ED}$. D. $\overrightarrow{DE}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 2: Cho tam giác ABC . Có bao nhiêu vector khác vector - không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh A, B, C ?

- A. 3. B. 6. C. 4. D. 9.

Lời giải

Chọn B

Đó là các vector: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AC}$.

Câu 3: Cho tứ giác $ABCD$. Có bao nhiêu vector khác vector - không có điểm đầu và cuối là các đỉnh của tứ giác?

- A. 4. B. 6. C. 8. D. 12.

Lời giải

Chọn D

Xét các vector có điểm A là điểm đầu thì có các vector thỏa mãn bài toán là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \longrightarrow$ có 3 vector.

Tương tự cho các điểm còn lại B, C, D .

Câu 4: Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Có duy nhất một vector cùng phương với mọi vector.
B. Có ít nhất hai vector có cùng phương với mọi vector.
C. Có vô số vector cùng phương với mọi vector.
D. Không có vector nào cùng phương với mọi vector.

Lời giải

Chọn A

Vì vector - không cùng phương với mọi vector.

Câu 5: Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Khi đó:

- A. Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$.
- B. Điều kiện đủ để A, B, C thẳng hàng là với mọi M , $\overrightarrow{MA}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.
- C. Điều kiện cần để A, B, C thẳng hàng là với mọi M , $\overrightarrow{MA}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.
- D. Điều kiện cần để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 6: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC của tam giác đều ABC . Hỏi cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

- A. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{CB}$.
- B. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MB}$.
- C. $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$.
- D. $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{CA}$.

Lời giải

Chọn B

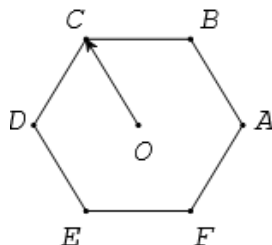
Câu 7: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Số các vectơ khác vectơ - không, cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

- A. 4.
- B. 6.
- C. 7.
- D. 9.

Lời giải

Chọn B

Đó là các vectơ: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{CF}$.



Câu 8: Với $\overrightarrow{DE}$ (khác vectơ - không) thì độ dài đoạn ED được gọi là

- A. Phương của $\overrightarrow{ED}$.
- B. Hướng của $\overrightarrow{ED}$.
- C. Giá của $\overrightarrow{ED}$.
- D. Độ dài của $\overrightarrow{ED}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 9: Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
- B. $\vec{0}$ cùng hướng với mọi vectơ.
- C. $|\overrightarrow{AB}| > 0$.
- D. $\vec{0}$ cùng phương với mọi vectơ.

Lời giải

Chọn C

Vì có thể xảy ra trường hợp $|\overline{AB}| = 0 \Leftrightarrow A \equiv B$.

Câu 10: Hai vectơ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi

- A. Giá của chúng trùng nhau và độ dài của chúng bằng nhau.
- B. Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một hình bình hành.
- C. Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một tam giác đều.
- D. Chúng cùng hướng và độ dài của chúng bằng nhau.

Lời giải

Chọn D

Câu 11: Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D và không cùng nằm trên một đường thẳng. Điều kiện nào trong các đáp án A, B, C, D sau đây là điều kiện cần và đủ để $\overline{AB} = \overline{CD}$?

- A. $ABCD$ là hình bình hành.
- B. $ABDC$ là hình bình hành.
- C. $AC = BD$.
- D. $AB = CD$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

- $\overline{AB} = \overline{CD} \Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow ABDC \text{ là hình bình hành.}$
- Mặt khác, $ABDC$ là hình bình hành $\Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$.

Do đó, điều kiện cần và đủ để $\overline{AB} = \overline{CD}$ là $ABDC$ là hình bình hành.

Câu 12: Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D thỏa mãn $\overline{AB} = \overline{CD}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\overline{AB}$ cùng hướng $\overline{CD}$.
- B. $\overline{AB}$ cùng phương $\overline{CD}$.
- C. $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$.
- D. $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

Chọn D

Phải suy ra $ABDC$ là hình bình hành (nếu A, B, C, D không thẳng hàng) hoặc bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng.

Câu 13: Gọi O là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A. $\overline{AB} = \overline{DC}$.
- B. $\overline{OB} = \overline{DO}$.
- C. $\overline{OA} = \overline{OC}$.
- D. $\overline{CB} = \overline{DA}$.

Lời giải

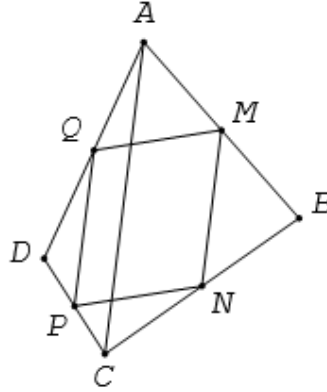
Chọn C

Câu 14: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$. B. $|\overrightarrow{QP}| = |\overrightarrow{MN}|$. C. $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$. D. $|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{AC}|$.

Lời giải

Chọn D.



Ta có $\begin{cases} MN \parallel PQ \\ MN = PQ \end{cases}$ (do cùng song song và bằng $\frac{1}{2}AC$).

Do đó $MNPQ$ là hình bình hành.

Câu 15: Cho hình vuông $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
C. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$. D. Hai vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Lời giải

Chọn C

Vì $AB = BC \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$.

Câu 16: Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình chữ nhật $ABCD$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$. B. $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OD}$ cùng hướng.
C. $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ cùng hướng. D. $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$.

Lời giải

Chọn D

Câu 17: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC của tam giác đều ABC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.

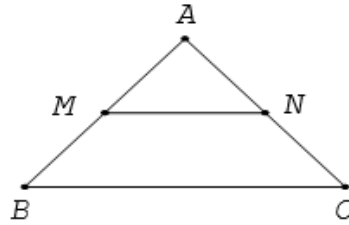
B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$.

D. $|\overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{MN}|$.

Lời giải

Chọn D



Ta có MN là đường trung bình của tam giác ABC .

$$\text{Do đó } BC = 2MN \longrightarrow |\overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{MN}|.$$

Câu 18: Cho tam giác ABC đều cạnh a . Gọi M là trung điểm BC . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$.

B. $\overrightarrow{AM} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\overrightarrow{AM} = a$.

D. $|\overrightarrow{AM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 19: Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$.

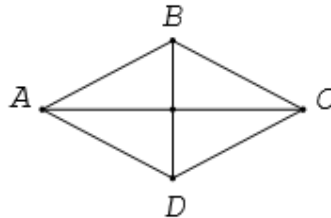
B. $|\overrightarrow{BD}| = a$.

C. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$.

Lời giải

Chọn B



Từ giả thiết suy ra tam giác ABD đều cạnh a nên $BD = a \longrightarrow |\overrightarrow{BD}| = a$.

Câu 20: Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O . Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$.

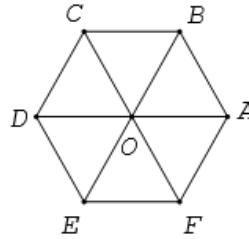
B. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AF}|$.

C. $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BC}$.

D. $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE}$.

Lời giải

Chọn D



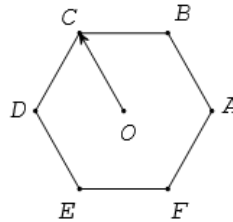
Câu 21: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Số các vectơ bằng $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 6.

Lời giải

Chọn A

Đó là các vectơ: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ED}$.

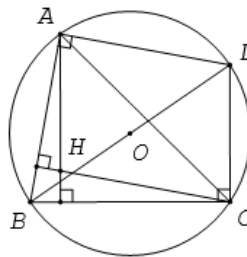


Câu 22: Cho tam giác ABC có trực tâm H . Gọi D là điểm đối xứng với B qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$. B. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.
C. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CH}$. D. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ và $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $AH \perp BC$ và $DC \perp BC$ (do góc $\widehat{DCB}$ chắn nửa đường tròn).

Suy ra $AH \parallel DC$.

Tương tự ta cũng có $CH \parallel AD$.

Suy ra tứ giác $ADCH$ là hình bình hành. Do đó $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.

Câu 23: Cho $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ và một điểm C . Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \Leftrightarrow AB = CD$. Suy ra tập hợp các điểm D thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường tròn tâm C , bán kính AB .

Câu 24: Cho $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ và một điểm C . Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. Vô số.

Lời giải

Chọn A

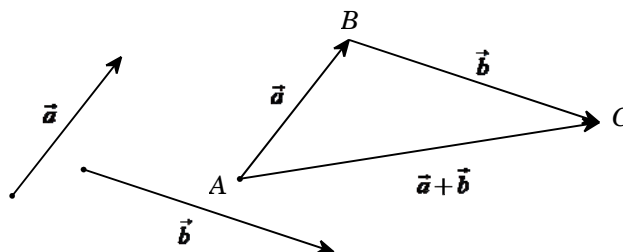
BÀI 2. TỔNG VÀ HIỆU HAI VECTOR

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Tổng của hai vector

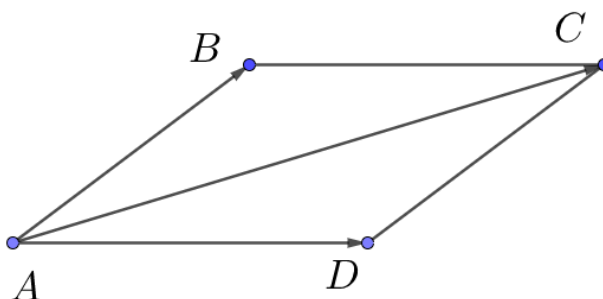
Định nghĩa. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vector $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta kí hiệu tổng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $\vec{a} + \vec{b}$. Vậy $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

Phép toán tìm tổng của hai vector còn được gọi là **phép cộng vector**.



2. Quy tắc hình bình hành

Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.



3. Tính chất của phép cộng các vector

Với ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tùy ý ta có

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (tính chất kết hợp);
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ (tính chất của vector – không).

4. Hiệu của hai vector

a) Vector đối

Cho vector $\vec{a}$. Vector có cùng độ dài và ngược hướng với $\vec{a}$ được gọi là vector đối của vector $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$.

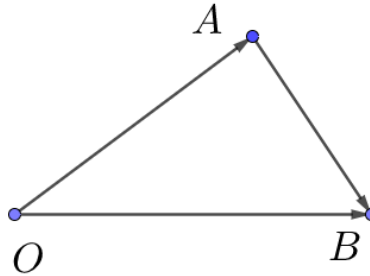
Mỗi vector đều có vector đối, chẳng hạn vector đối của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA}$, nghĩa là $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Đặc biệt, vector đối của vector $\vec{0}$ là vector $\vec{0}$.

b) Định nghĩa hiệu của hai vector

Định nghĩa. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta gọi hiệu của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vector $\vec{a} + (-\vec{b})$, kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$. Như vậy $\boxed{\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})}$.

Từ định nghĩa hiệu của hai vector, suy ra với ba điểm O, A, B tùy ý ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.



Chú ý

- 1) Phép toán tìm hiệu của hai vector còn được gọi là phép trừ vector.
- 2) Với ba điểm tùy ý A, B, C ta luôn có

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \text{ (quy tắc ba điểm);}$$

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \text{ (quy tắc trừ).}$$

Thực chất hai quy tắc trên được suy ra từ phép cộng vector.

5. Áp dụng

- a) Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
- b) Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: xác định độ dài tổng, hiệu của các vector.

1. Phương pháp giải.

Để xác định độ dài tổng hiệu của các vector

- Trước tiên sử dụng định nghĩa về tổng, hiệu hai vector và các tính chất, quy tắc để xác định định phép toán vector đó.
- Dựa vào tính chất của hình, sử dụng định lý Pitago, hệ thức lượng trong tam giác vuông để xác định độ dài vector đó.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 30^\circ$ và $BC = a\sqrt{5}$.

Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

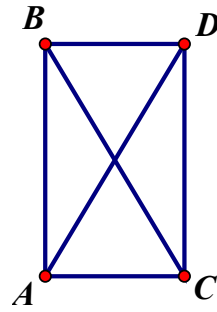
Lời giải (hình 1.10)

Theo quy tắc ba điểm ta có

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Mà $\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$

$$\Rightarrow AC = BC \cdot \sin \widehat{ABC} = a\sqrt{5} \cdot \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$



Hình 1.10

Do đó $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

- $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

Ta có $AC^2 + AB^2 = BC^2 \Rightarrow AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{5a^2 - \frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$

Vì vậy $|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AB}| = AB = \frac{a\sqrt{15}}{2}$

- Gọi D là điểm sao cho tứ giác ABDC là hình bình hành.

Khi đó theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

Vì tam giác ABC vuông ở A nên tứ giác ABDC là hình chữ nhật suy ra $AD = BC = a\sqrt{5}$

Vậy $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD = a\sqrt{5}$

Ví dụ 2: Cho hình vuông ABCD có tâm là O và cạnh a. M là một điểm bất kỳ.

a) Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$, $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}|$, $|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}|$

b) Chứng minh rằng $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$ không phụ thuộc vị trí điểm M. Tính độ dài vectơ $\vec{u}$

Lời giải (hình 1.11)

a) + Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Suy ra $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC$.

Áp dụng định lý Pitago ta có

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2a^2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}a$$

$$\text{Vậy } |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = a\sqrt{2}$$

+ Vì O là tâm của hình vuông nên $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$ suy ra

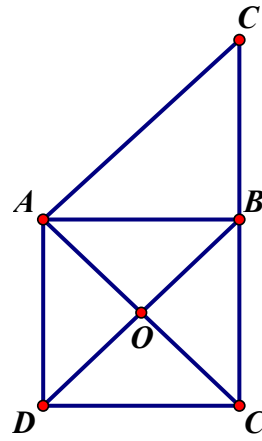
$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC}$$

$$\text{Vậy } |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{BC}| = a$$

+ Do ABCD là hình vuông nên $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ suy ra

$$\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$$

$$\text{Mà } |\overrightarrow{BD}| = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{2} \text{ suy ra } |\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}| = a\sqrt{2}$$



Hình 1.11

b) Theo quy tắc phép trừ ta có

$$\vec{u} = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD}) = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB}$$

Suy ra $\vec{u}$ không phụ thuộc vị trí điểm M.

Qua A kẻ đường thẳng song song với DB cắt BC tại C'.

Khi đó tứ giác ADBC' là hình bình hành (vì có cặp cạnh đối song song) suy ra $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC'}$

$$\text{Do đó } \vec{u} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{CC'}$$

$$\text{Vì vậy } |\vec{u}| = |\overrightarrow{CC'}| = BC + BC' = a + a = 2a$$

Dạng 2: chứng minh đẳng thức vector.

1. Phương pháp giải.

- Để chứng minh đẳng thức vector ta có các cách biến đổi: vế này thành vế kia, biến đổi tương đương, biến đổi hai vế cùng bằng một đại lượng trung gian. Trong quá trình biến đổi ta cần sử dụng linh hoạt ba quy tắc tính vector.

Lưu ý: Khi biến đổi cần phải *hướng đích*, chẳng hạn biến đổi vế phải, ta cần xem vế trái có đại lượng nào để từ đó liên tưởng đến kiến thức đã có để làm sao xuất hiện các đại lượng ở vế trái. Và ta thường biến đổi vế phức tạp về vế đơn giản hơn.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho năm điểm A, B, C, D, E. Chứng minh rằng

$$a) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$$

$$b) \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$$

Lời giải

a) Biến đổi về trái ta có

$$\begin{aligned} VT &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}) \\ &= (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{DA} \\ &= (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}) + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} = VP \text{ ĐPCM} \end{aligned}$$

b) Đẳng thức tương đương với

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} &= \vec{0} \end{aligned}$$

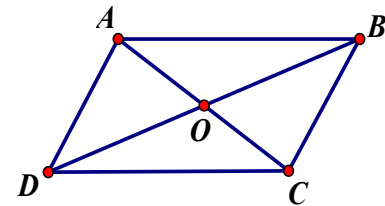
$$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} = \vec{0} \text{ (đúng) ĐPCM.}$$

Ví dụ 2: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

$$a) \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$b) \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

$$c) \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}.$$



Hình 1.12

Lời giải (Hình 1.12)

$$\begin{aligned} a) \text{ Ta có } \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} &= -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \\ &= -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ suy ra

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$b) \text{ Vì } ABCD \text{ là hình bình hành nên ta có: } \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AO} = \vec{0}$$

$$\text{Tương tự: } \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$$

$$c) \text{ Cách 1: Vì } ABCD \text{ là hình bình hành nên } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\end{aligned}$$

Cách 2: Đẳng thức tương đương với

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \text{ (đúng do } ABCD \text{ là hình bình hành)}$$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ với O là điểm bất kì.

Lời giải (Hình 1.13)

a) Vì PN, MN là đường trung bình của tam giác ABC nên

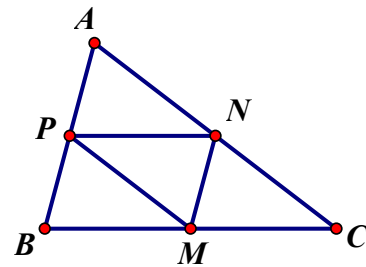
$PN \parallel BM, MN \parallel BP$ suy ra tứ giác $BMNP$ là hình bình hành

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{PN}$$

$$N \text{ là trung điểm của } AC \Rightarrow \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NA}$$

Do đó theo quy tắc ba điểm ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} &= (\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NA}) + \overrightarrow{AP} \\ &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}\end{aligned}$$



Hình 1.13

b) Vì tứ giác $APMN$ là hình bình hành nên theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}$, kết hợp với quy tắc trừ

$$\Rightarrow \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM}$$

Mà $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ do M là trung điểm của BC .

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}.$$

c) Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} &= (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}) + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NC}) \\ &= (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}) + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC} \\ &= (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}) - (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP})\end{aligned}$$

Theo câu a) ta có $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$ suy ra $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.
 B. $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NP}$.
 C. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB}$.
 D. $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$.

Lời giải

Chọn B

Xét các đáp án:

- Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{BC}$ (với D là điểm thỏa mãn $ABDC$ là hình bình hành). Vậy A sai.
- Đáp án B. Ta có $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NP}$. Vậy B đúng.
- Đáp án C. Ta có $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} = -(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) = -\overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{CB}$ (với D là điểm thỏa mãn $ABDC$ là hình bình hành). Vậy C sai.
- Đáp án D. Ta có $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{BB} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \neq \overrightarrow{AB}$. Vậy D sai.

Câu 2: Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là các vectơ khác $\vec{0}$ với $\vec{a}$ là vectơ đối của $\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương.
 B. Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng.
 C. Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng độ dài.
 D. Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ chung điểm đầu.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\vec{a} = -\vec{b}$. Do đó, $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, cùng độ dài và ngược hướng nhau.

Câu 3: Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$.
 B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.
 C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$.
 D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$.

Lời giải

Chọn C.

Xét các đáp án:

- Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}$. Vậy A sai.
- Đáp án B. Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{BC}$ (với D là điểm thỏa mãn $ABDC$ là hình bình hành). Vậy B sai.
- Đáp án C. Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$. Vậy C đúng.

Câu 4: Cho $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng.
C. $ABCD$ là hình bình hành.

- B. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng độ dài.
D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC}$. Do đó:

- $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ ngược hướng.
- $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng độ dài.
- $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ không cùng giá.
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

Câu 5: Tính tổng $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR}$.

- A. $\overrightarrow{MR}$. B. $\overrightarrow{MN}$. C. $\overrightarrow{PR}$. D. $\overrightarrow{MP}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RN} = \overrightarrow{MN}$.

Câu 6: Cho hai điểm A và B phân biệt. Điều kiện để I là trung điểm AB là:

- A. $IA = IB$. B. $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$. C. $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$. D. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$.

Lời giải

Chọn C.

Câu 7: Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để I là trung điểm của đoạn thẳng AB ?

- A. $IA = IB$. B. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. C. $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$.

Lời giải

Chọn B.

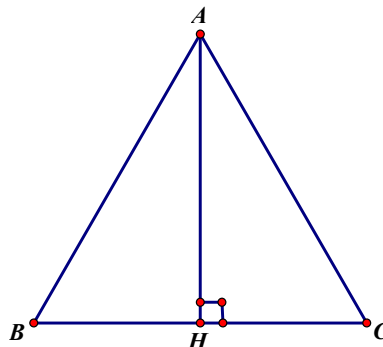
Điều kiện cần và đủ để I là trung điểm của đoạn thẳng AB là $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Câu 8: Cho tam giác ABC cân ở A , đường cao AH . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{HC} = -\overrightarrow{HB}$. C. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$. D. $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{HC}$.

Lời giải

Chọn A.



Tam giác ABC cân ở A , đường cao AH . Do đó, H là trung điểm BC .
Ta có:

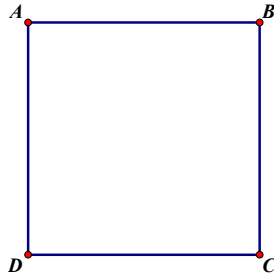
- $AB = AC \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$
- H là trung điểm $BC \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{HC} = -\overrightarrow{HB} \\ \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{HC} \end{cases}$.

Câu 9: Cho hình vuông $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. C. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. D. $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}|$.

Lời giải

Chọn D.



$$ABCD \text{ là hình vuông} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB} \Rightarrow |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}|.$$

Câu 10: Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Nếu M là trung điểm đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
 B. Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
 C. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$.
 D. Nếu ba điểm phân biệt A, B, C nằm tùy ý trên một đường thẳng thì $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}|$.

Lời giải

Chọn D.

Với ba điểm phân biệt A, B, C nằm trên một đường thẳng, đẳng thức

$$|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| \Leftrightarrow AB + BC = AC \text{ xảy ra khi } B \text{ nằm giữa } A \text{ và } C.$$

Câu 11: Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CD}$. B. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$.
 C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$. D. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}$.

Lời giải

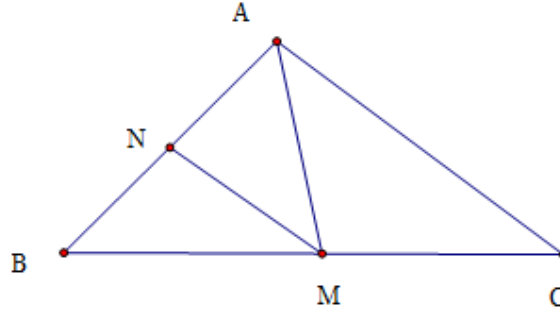
Chọn B.

C. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}$.

Lời giải

Chọn A.



Xét các đáp án:

- Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ (theo quy tắc ba điểm).
- Đáp án B, C. Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC}$ (với điểm N là trung điểm của AB).
- Đáp án D. Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$.

Câu 16: Cho tam giác ABC với M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

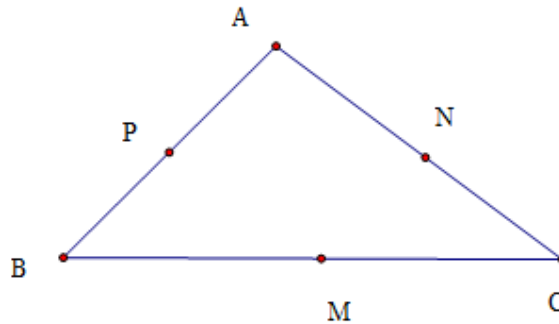
B. $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MP}$.

Lời giải

Chọn D.



Xét các đáp án:

- Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
- Đáp án B. Ta có $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$
- Đáp án C. Ta có $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MM} = \vec{0}$.

- Đáp án D. Ta có $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{PM} = -\overrightarrow{MP}$.

Câu 17: Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
 B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.
 C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow |\overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{BC}|$.
 D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn B.

Đáp án A chỉ đúng khi ba điểm A, B, C thẳng hàng và B nằm giữa A, C .

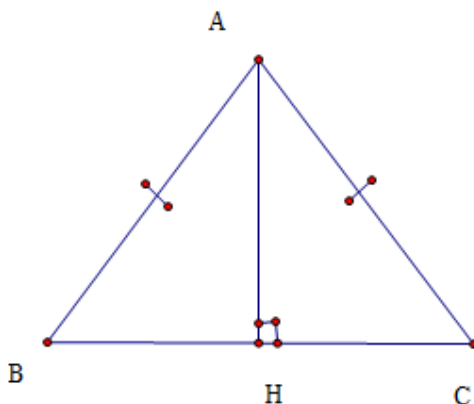
Đáp án B đúng theo quy tắc ba điểm.

Câu 18: Cho tam giác ABC có $AB = AC$ và đường cao AH . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}$.
 B. $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$.
 C. $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$.
 D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn C.



Do $\triangle ABC$ cân tại A , AH là đường cao nên H là trung điểm BC .

Xét các đáp án:

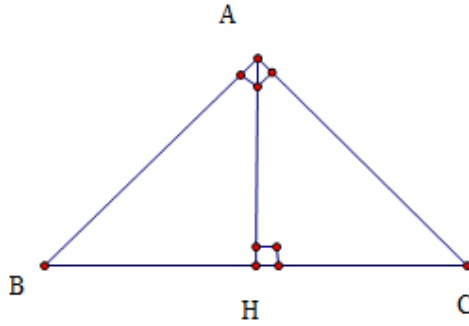
- Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AH}$.
- Đáp án B. Ta có $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} + \vec{0} = \overrightarrow{HA} \neq \vec{0}$.
- Đáp án C. Ta có $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$ (do H là trung điểm BC).
- Đáp án D. Do $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{AC}$.

Câu 19: Cho tam giác ABC vuông cân đỉnh A , đường cao AH . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}| = |\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}|$.
 B. $\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC}$.
 C. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA}$.
 D. $|\overrightarrow{AH}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AH}|$.

Lời giải

Chọn B.



Do ΔABC cân tại A , AH là đường cao nên H là trung điểm BC .
Xét các đáp án:

• Đáp án A. Ta có
$$\begin{cases} |\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}| = |\overrightarrow{AB}| = a \\ |\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}| = |\overrightarrow{AC}| = a \end{cases}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}| = |\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}|.$$

• Đáp án B. Ta có
$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BH} \\ \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CH} = -\overrightarrow{BH} \end{cases}$$
. Do đó B sai.

• Đáp án C. Ta có
$$\begin{cases} \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{AC} \end{cases} \longrightarrow \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA}.$$

• Đáp án D. Ta có $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AH}| = |\overrightarrow{HB}| = |\overrightarrow{AH}|$ (do ΔABC vuông cân tại A).

Câu 20: Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC . Hỏi vectơ $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP}$ bằng vectơ nào trong các vectơ sau?

A. $\overrightarrow{AP}$.

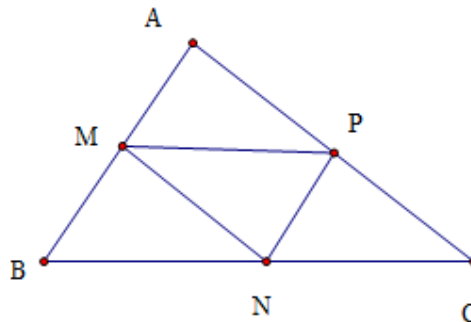
B. $\overrightarrow{BP}$.

C. $\overrightarrow{MN}$.

D. $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NB}$.

Lời giải

Chọn B.



$$\text{Ta có } \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{BM} \longrightarrow \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BP}.$$

Câu 21: Cho đường tròn O và hai tiếp tuyến song song với nhau tiếp xúc với (O) tại hai điểm A và B . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$.

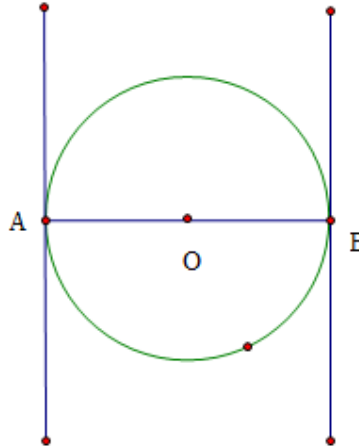
B. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OB}$.

C. $OA = -OB$.

D. $AB = -BA$.

Lời giải

Chọn A.



Do hai tiếp tuyến song song và A, B là hai tiếp điểm nên AB là đường kính.

Do đó O là trung điểm của AB .

Suy ra $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$.

Câu 22: Cho đường tròn O và hai tiếp tuyến MT, MT' (T và T' là hai tiếp điểm). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{MT'}$.

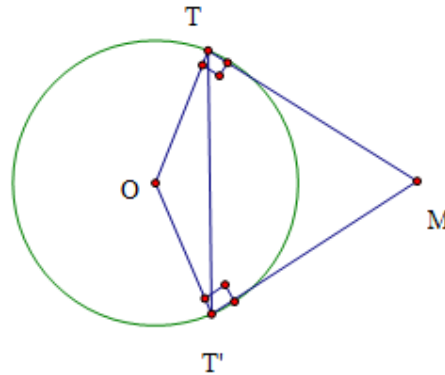
B. $MT + MT' = TT'$.

C. $MT = MT'$.

D. $\overrightarrow{OT} = -\overrightarrow{OT'}$.

Lời giải

Chọn C.



Do MT, MT' là hai tiếp tuyến (T và T' là hai tiếp điểm) nên $MT = MT'$.

Câu 23: Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Chọn A.

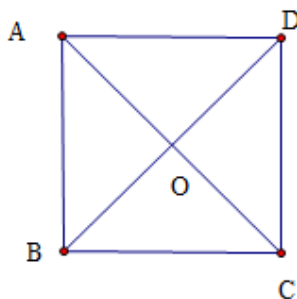
Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

Câu 24: Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Vector nào trong các vector dưới đây bằng $\overrightarrow{CA}$?

- A. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$. B. $-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$. C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$. D. $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Chọn C.



Xét các đáp án:

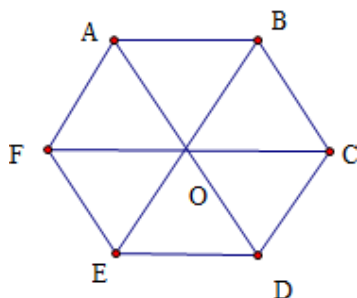
- Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$.
- Đáp án B. Ta có $-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$.
- Đáp án C. Ta có $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = -(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) = -\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}$.
- Đáp án D. Ta có $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} = -(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}) = -\overrightarrow{CA}$.

Câu 25: Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{EB}$.
C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$.

Lời giải

Chọn D.



Ta có

- $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$. Do đó A đúng.
- $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OB}$
 $= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{EB}$. Do đó B đúng.
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{EF} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}) + \overrightarrow{EF}$

$$= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}. \text{ Do đó C đúng.}$$

Dùng phương pháp loại trừ, suy ra D sai.

Câu 26: Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Hỏi vector $(\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DO})$ bằng vector nào trong các vector sau?

A. $\overrightarrow{BA}$.

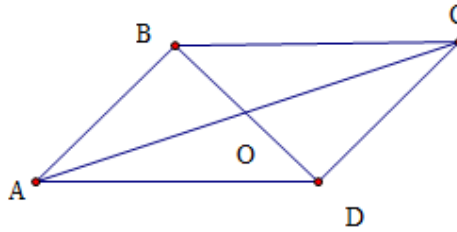
B. $\overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{DC}$.

D. $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn B.



$$\text{Ta có } \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DO} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

Câu 27: Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$

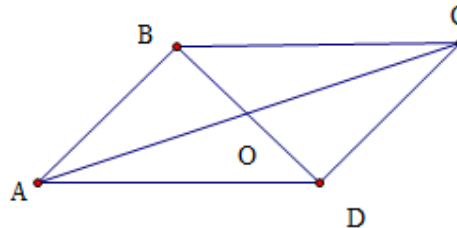
B. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$

C. $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}|.$

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}.$

Lời giải

Chọn D.



Xét các đáp án:

• Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = \vec{0}.$

• Đáp án B. Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (quy tắc hình bình hành).

• Đáp án C. Ta có
$$\begin{cases} |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BD}| = BD \\ |\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{DB}| = BD \end{cases}$$

• Đáp án D. Do $\overrightarrow{CD} \neq \overrightarrow{CB} \Rightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) \neq (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}).$

Câu 28: Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC . Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{EO}.$

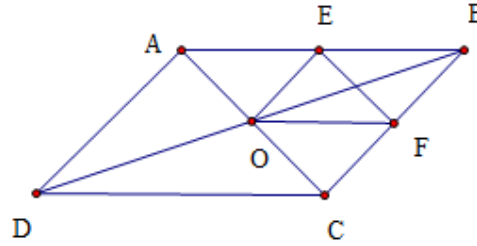
B. $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EO}.$

C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{DO} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn D.



Ta có OF, OE lần lượt là đường trung bình của tam giác $\triangle BCD$ và $\triangle ABC$.

$\Rightarrow BEOF$ là hình bình hành.

$$\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BO} \Rightarrow \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BD}.$$

Câu 29: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{BD}$.

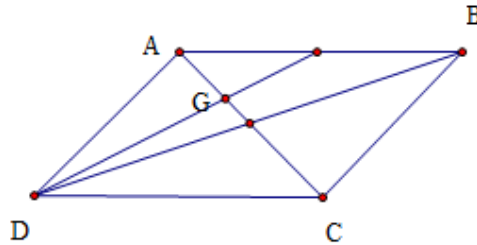
B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{CD}$.

C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{CD}$.

Lời giải

Chọn A.



Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GB}.$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = -\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GD} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{BD}.$$

Câu 30: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

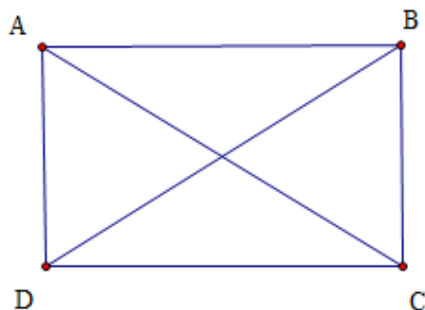
B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.

C. $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$.

D. $|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|$.

Lời giải

Chọn C.



Ta có
$$\begin{cases} |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DB}| = BD \\ |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC \end{cases}$$

Mà $BD = AC \Rightarrow |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$.

Câu 31: Cho tam giác ABC đều cạnh a . Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

A. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}$.

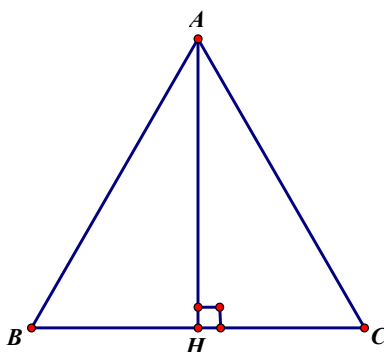
B. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2a$.

D. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow AH \perp BC$.

Suy ra $AH = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta lại có $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AH}| = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Câu 32: Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = a$. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

A. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{2}$.

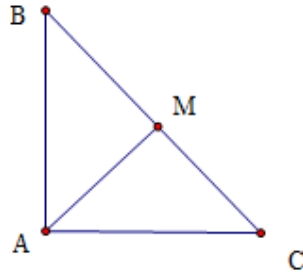
B. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2a$.

D. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi M là trung điểm $BC \longrightarrow AM = \frac{1}{2} BC$.

Ta có $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AM}| = 2AM = BC = a\sqrt{2}$.

Câu 33: Cho tam giác ABC vuông cân tại C và $AB = \sqrt{2}$. Tính độ dài của $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

A. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \sqrt{5}$.

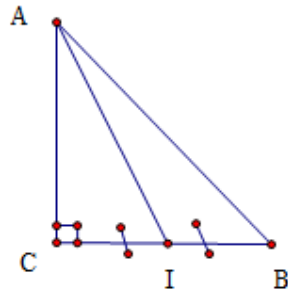
B. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{5}$.

C. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \sqrt{3}$.

D. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A.



Ta có $AB = \sqrt{2} \Rightarrow AC = CB = 1$.

Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow AI = \sqrt{AC^2 + CI^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Khi đó $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI} \Rightarrow |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}| = 2|\overrightarrow{AI}| = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$.

Câu 34: Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB = 3$, $AC = 4$. Tính $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}|$.

A. $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}| = 2$.

B. $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{13}$.

C. $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}| = 5$.

D. $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}| = \sqrt{13}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CB}| = CB = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Câu 35: Tam giác ABC có $AB = AC = a$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

A. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}$.

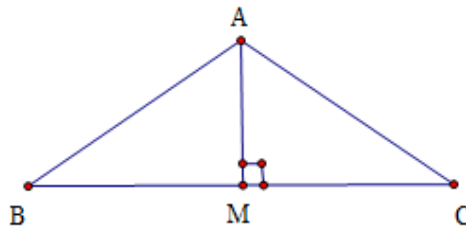
B. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a$.

C. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \frac{a}{2}$.

D. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2a$.

Lời giải

Chọn B.



Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow AM \perp BC$.

Trong tam giác vuông AMB , ta có $AM = AB \cdot \sin \widehat{ABM} = a \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{2}$.

Ta có $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AM}| = 2AM = a$.

Câu 36: Cho tam giác ABC đều cạnh a , H là trung điểm của BC . Tính $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}|$.

A. $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = \frac{a}{2}$.

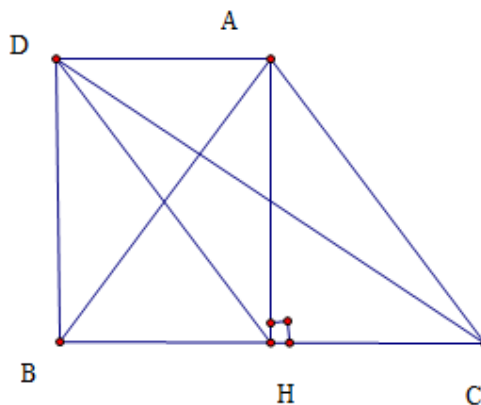
B. $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = \frac{3a}{2}$.

C. $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

D. $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Lời giải

Chọn D.



Gọi D là điểm thỏa mãn tứ giác $ACHD$ là hình bình hành

$\Rightarrow AHBD$ là hình chữ nhật.

$$|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CH}| = |\overrightarrow{CD}| = CD.$$

$$\text{Ta có } CD = \sqrt{BD^2 + BC^2} = \sqrt{AH^2 + BC^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + a^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

Câu 37: Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC với cạnh huyền $BC=12$. Tính độ dài của vector $\vec{v} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.

A. $|\vec{v}| = 2$.

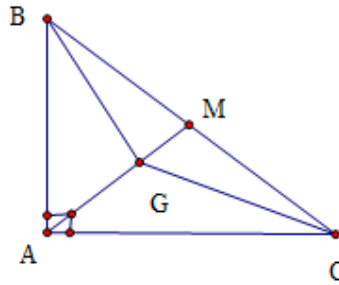
B. $|\vec{v}| = 2\sqrt{3}$.

C. $|\vec{v}| = 8$.

D. $|\vec{v}| = 4$.

Lời giải

Chọn D.



Gọi M là trung điểm của BC .

$$\text{Ta có } |\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| = |2\overrightarrow{GM}| = 2GM = 2 \cdot \frac{1}{3} AM = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} BC \right) = \frac{BC}{3} = 4.$$

Câu 38: Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 2a$ và $BD = a$. Tính $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}|$.

A. $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = 3a$.

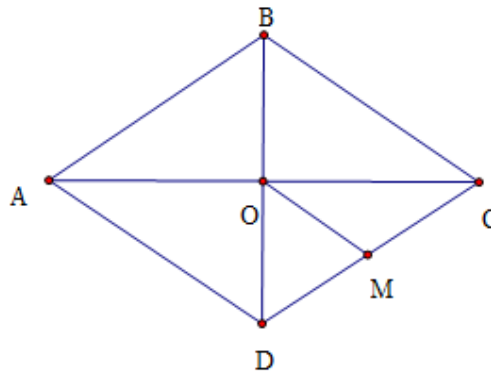
B. $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = a\sqrt{3}$.

C. $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = a\sqrt{5}$.

D. $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = 5a$.

Lời giải

Chọn C.



Gọi $O = AC \cap BD$ và M là trung điểm của CD .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| &= 2|\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}| = 2|2\overrightarrow{OM}| = 4OM \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2}CD = 2\sqrt{OD^2 + OC^2} = 2\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = a\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Câu 39: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}|$.

- A. $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}| = 0$. B. $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}| = a$.
 C. $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}| = a\sqrt{2}$. D. $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}| = 2a$.

Lời giải

Chọn C.

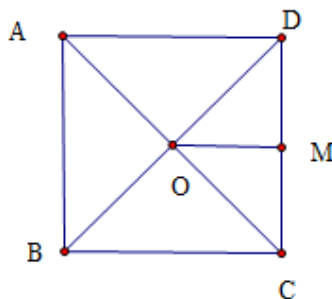
$$\text{Ta có } |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = a\sqrt{2}.$$

Câu 40: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O . Tính $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}|$.

- A. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = a$. B. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = a\sqrt{2}$.
 C. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = \frac{a}{2}$. D. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi M là trung điểm của BC .

$$\text{Ta có } |\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 2|\overrightarrow{OM}| = 2OM = AB = a.$$

Câu 41: Cho tam giác ABC có M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Xác định vị trí điểm M .

- A. M là điểm thứ tư của hình bình hành $ACBM$.
 B. M là trung điểm của đoạn thẳng AB .
 C. M trùng với C .

D. M là trọng tâm tam giác ABC .

Lời giải

Chọn D.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC .

Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow M \equiv G$.

Câu 42: Cho tam giác ABC . Tập hợp tất cả các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}|$ là

A. đường thẳng AB .

B. trung trực đoạn BC .

C. đường tròn tâm A , bán kính BC .

D. đường thẳng qua A và song song với BC .

Lời giải

Chọn C.

Ta có $|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{AM}| \Rightarrow AM = BC$

Mà A, B, C cố định $\Rightarrow$ Tập hợp điểm M là đường tròn tâm A , bán kính BC .

Câu 43: Cho hình bình hành $ABCD$. Tập hợp tất cả các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$ là

A. một đường tròn.

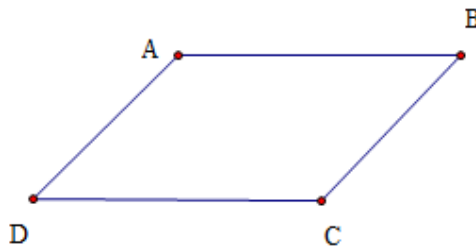
B. một đường thẳng.

C. tập rỗng.

D. một đoạn thẳng.

Lời giải

Chọn C.



$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MA} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} : \text{vô lí}$$

$\Rightarrow$ Không có điểm M thỏa mãn.

Câu 44: Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$. Tìm vị trí điểm M .

A. M là trung điểm của AC .

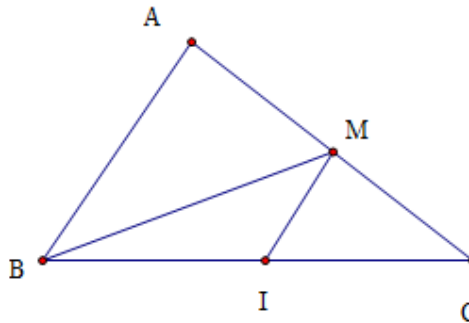
B. M là trung điểm của AB .

C. M là trung điểm của BC .
 $ABCM$.

D. M là điểm thứ tư của hình bình hành

Lời giải

Chọn A.



Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MI} \Rightarrow M$ là trung điểm AC .

Câu 45: Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $MABC$ là hình bình hành.

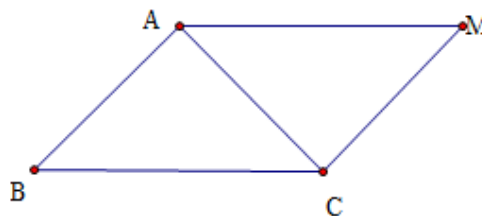
B. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM}$.

D. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn D.



Ta có $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow MABC$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CB}$.

Do đó D sai.

BÀI 3. TÍCH VECTƠ VỚI MỘT SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Cho số $k \neq 0$ và vector $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của vector $\vec{a}$ với số k là một vector, kí hiệu là $k\vec{a}$, cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

2. Tính chất

Với hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì, với mọi số h và k , ta có

- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$;
- $(h+k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$;
- $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$;
- $1.\vec{a} = \vec{a}, (-1).\vec{a} = -\vec{a}$.

3. Trung điểm của đoạn thẳng và trọng tâm của tam giác

a) Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì với mọi điểm M thì ta có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}.$$

b) Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì với mọi điểm M thì ta có

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

4. Điều kiện để hai vector cùng phương

Điều kiện cần và đủ để hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là có một số k để

$$\vec{a} = k\vec{b}.$$

Nhận xét. Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k khác 0 để

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}.$$

5. Phân tích một vector theo hai vector không cùng phương

Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó mọi vector $\vec{x}$ đều phân tích được một cách duy nhất theo hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số h, k sao cho $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: dựng và tính độ dài vector chứa tích một vector với một số.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng định nghĩa tích của một vector với một số và các quy tắc về phép toán vector để dựng vector chứa tích một vector với một số, kết hợp với các định lý pitago và hệ thức lượng trong tam giác vuông để tính độ dài của chúng.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác đều ABC cạnh a . điểm M là trung điểm BC . Dựng các vector sau và tính độ dài của chúng.

a) $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MA}$

b) $\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

c) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

c) $\frac{3}{4}\overrightarrow{MA} - 2,5\overrightarrow{MB}$

Lời giải (Hình 1.14)

a) Do $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}$ suy ra theo quy tắc ba điểm ta có

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CA}$$

Vậy $\left| \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MA} \right| = CA = a$

b) Vì $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM}$ nên theo quy tắc trừ ta có

$$\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MA}$$

Theo định lý Pitago ta có

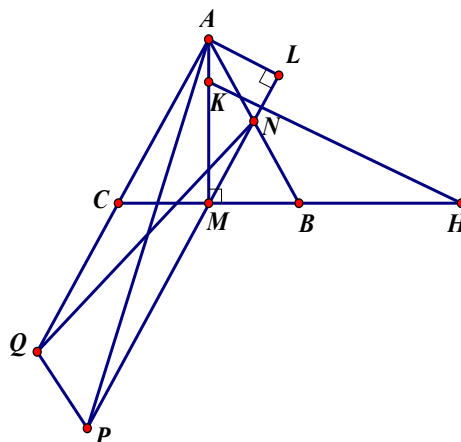
$$MA = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Vậy $\left| \overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \right| = MA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

c) Gọi N là trung điểm AB , Q là điểm đối xứng của A qua C và P là đỉnh của hình bình hành $AQPN$.

Khi đó ta có $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN}$, $2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AQ}$ suy ra theo quy tắc hình bình hành ta có

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP}$$



Hình 1.14

Gọi L là hình chiếu của A lên QN

$$\text{Vì } MN // AC \Rightarrow \widehat{ANL} = \widehat{MNB} = \widehat{CAB} = 60^\circ$$

$$\text{Xét tam giác vuông } ANL \text{ ta có } \sin \widehat{ANL} = \frac{AL}{AN} \Rightarrow AL = AN \cdot \sin \widehat{ANL} = \frac{a}{2} \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos \widehat{ANL} = \frac{NL}{AN} \Rightarrow NL = AN \cdot \cos \widehat{ANL} = \frac{a}{2} \cos 60^\circ = \frac{a}{4}$$

$$\text{Ta lại có } AQ = PN \Rightarrow PL = PN + NL = AQ + NL = 2a + \frac{a}{4} = \frac{9a}{4}$$

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác ALP ta có

$$AP^2 = AL^2 + PL^2 = \frac{3a^2}{16} + \frac{81a^2}{16} = \frac{21a^2}{4} \Rightarrow AP = \frac{a\sqrt{21}}{2}$$

$$\text{Vậy } \left| \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \right| = AP = \frac{a\sqrt{21}}{2}$$

d) Gọi K là điểm nằm trên đoạn AM sao cho $MK = \frac{3}{4}MA$, H thuộc tia MB sao cho $MH = 2,5MB$.

$$\text{Khi đó } \frac{3}{4}\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MK}, 2,5\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MH}$$

$$\text{Do đó } \frac{3}{4}\overrightarrow{MA} - 2,5\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MH} = \overrightarrow{HK}$$

$$\text{Ta có } MK = \frac{3}{4}AM = \frac{3}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a}{8}, MH = 2,5MB = 2,5 \cdot \frac{a}{2} = \frac{5a}{4}$$

Áp dụng định lý Pitago cho tam giác vuông KMH ta có

$$KH = \sqrt{MH^2 + MK^2} = \sqrt{\frac{25a^2}{16} + \frac{27a^2}{64}} = \frac{a\sqrt{127}}{8}$$

$$\text{Vậy } \left| \frac{3}{4}\overrightarrow{MA} - 2,5\overrightarrow{MB} \right| = KH = \frac{a\sqrt{127}}{8}$$

Ví dụ 2: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a .

a) Chứng minh rằng $\vec{u} = 4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M .

b) Tính độ dài vectơ $\vec{u}$

Lời giải (Hình 1.15)

a) Gọi O là tâm hình vuông.

Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\begin{aligned}\vec{u} &= 4(\vec{MO} + \vec{OA}) - 3(\vec{MO} + \vec{OB}) + (\vec{MO} + \vec{OC}) - 2(\vec{MO} + \vec{OD}) \\ &= 4\vec{OA} - 3\vec{OB} + \vec{OC} - 2\vec{OD}\end{aligned}$$

Mà $\vec{OD} = -\vec{OB}$, $\vec{OC} = -\vec{OA}$ nên $\vec{u} = 3\vec{OA} - \vec{OB}$

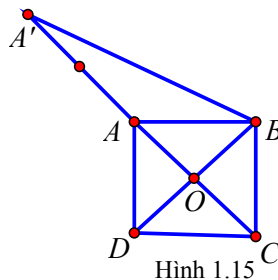
Suy ra $\vec{u}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M

b) Lấy điểm A' trên tia OA sao cho $OA' = 3OA$ khi đó

$$\vec{OA'} = 3\vec{OA} \text{ do đó } \vec{u} = \vec{OA'} - \vec{OB} = \vec{BA'}$$

$$\text{Mặt khác } BA' = \sqrt{OB^2 + OA'^2} = \sqrt{OB^2 + 9OA^2} = a\sqrt{5}$$

$$\text{Suy ra } |\vec{u}| = a\sqrt{5}$$



Hình 1.15

DẠNG 2: Chứng minh đẳng thức vector.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng các kiến thức sau để biến đổi vế này thành vế kia hoặc cả hai biểu thức ở hai vế cùng bằng biểu thức thứ ba hoặc biến đổi tương đương về đẳng thức đúng:

- Các tính chất phép toán vector
- Các quy tắc: quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành và quy tắc phép trừ
- Tính chất trung điểm:

$$\text{M là trung điểm đoạn thẳng AB} \Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0}$$

$$\text{M là trung điểm đoạn thẳng AB} \Leftrightarrow \vec{OA} + \vec{OB} = 2\vec{OM} \text{ (Với O là điểm tùy ý)}$$

- Tính chất trọng tâm:

$$\text{G là trọng tâm của tam giác ABC} \Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$$

$$\text{G là trọng tâm của tam giác ABC} \Leftrightarrow \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG} \text{ (Với O là điểm tùy ý)}$$

2. Các ví dụ.

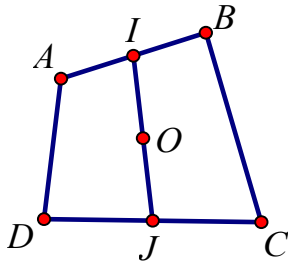
Ví dụ 1: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD, O là trung điểm của IJ. Chứng minh rằng:

a) $\vec{AC} + \vec{BD} = 2\vec{IJ}$

b) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$

c) $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MO}$ với M là điểm bất kì

Lời giải (Hình 1.16)



Hình 1.16

a) Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC}$$

$$\text{Tương tự } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD}$$

Mà I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD nên $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$, $\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI}) + (\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD}) + 2\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IJ} \text{ đpcm}$$

b) Theo hệ thức trung điểm ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OJ}$

Mặt khác O là trung điểm IJ nên $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}) = \vec{0} \text{ đpcm}$$

c) Theo câu b ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ do đó với mọi điểm M thì

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO} \text{ đpcm}$$

Ví dụ 2: Cho hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm G. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm tam giác BCA_1, ABC_1, ACB_1 . Chứng minh rằng $\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3} = \vec{0}$

Lời giải

Vì G_1 là trọng tâm tam giác BCA_1 nên $3\overrightarrow{GG_1} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA_1}$

Tương tự G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm tam giác ABC_1, ACB_1 suy ra

$$3\overrightarrow{GG_2} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC_1} \text{ và } 3\overrightarrow{GG_3} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GB_1}$$

Cộng theo vế với vế các đẳng thức trên ta có

$$\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3} = 2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GC_1})$$

Mặt khác hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm G nên

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ và } \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GC_1} = \vec{0}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3} = \vec{0}$$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Chứng minh rằng

$$\text{a) } \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$$

$$\text{b) } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$$

$$\text{c) } \overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{GO} = \vec{0}$$

Lời giải (Hình 1.17)

a) Dễ thấy $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$ nếu tam giác ABC vuông

Nếu tam giác ABC không vuông gọi D là điểm đối xứng của A qua O khi đó

$BH \parallel DC$ (vì cùng vuông góc với AC)

$BD \parallel CH$ (vì cùng vuông góc với AB)

Suy ra $BDCH$ là hình bình hành, do đó theo quy tắc hình bình hành thì $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$ (1)

Mặt khác vì O là trung điểm của AD nên $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$

b) Theo câu a) ta có

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$$

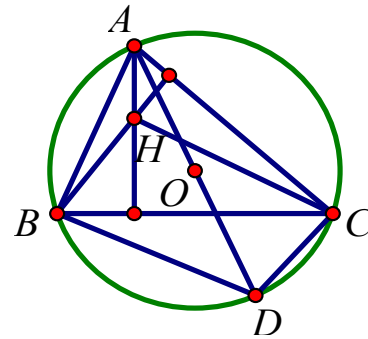
$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OC}) = 2\overrightarrow{HO}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} \text{ đpcm}$$

c) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$

Mặt khác theo câu b) ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} \Leftrightarrow (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GH}) - 3\overrightarrow{OG} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{GO} = \vec{0}$$



Hình 1.17

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC với $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ và có trọng tâm G. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu G lên cạnh BC, CA, AB .

Chứng minh rằng $a^2.\overrightarrow{GD} + b^2.\overrightarrow{GE} + c^2.\overrightarrow{GF} = \vec{0}$

Lời giải (hình 1.18)

Trên tia GD, GE, MF lần lượt lấy các điểm N, P, Q sao cho $GN = a$, $GP = b$, $GQ = c$ và dựng hình bình hành $GPRN$

Ta có $a^2.\overrightarrow{GD} + b^2.\overrightarrow{GE} + c^2.\overrightarrow{GF} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow a.GD.\overrightarrow{GN} + b.GE.\overrightarrow{GP} + c.GF.\overrightarrow{GQ} = \vec{0} \quad (*)$$

Ta có $a.GD = 2S_{\Delta GBC}$, $b.GE = 2S_{\Delta GCA}$, $c.GF = 2S_{\Delta GAB}$, mặt khác G là trọng tâm tam giác ABC nên $S_{\Delta GBC} = S_{\Delta GCA} = S_{\Delta GAB}$ suy ra $a.GD = b.GE = c.GF$

$$\text{Vậy } (*) \Leftrightarrow \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0}$$

Ta có $AC = GP = b$, $PR = BC = a$ và $\widehat{ACB} = \widehat{GPR}$ (góc có cặp cạnh vuông góc với nhau)

Suy ra $\Delta ACB = \Delta GPR (c.g.c)$

$$\Rightarrow GR = AB = c \text{ và } \widehat{PGR} = \widehat{BAC}$$

Ta có $\widehat{QGP} + \widehat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{QGP} + \widehat{GPR} = 180^\circ \Rightarrow Q, G, R$ thẳng hàng do đó G là trung điểm của QR

Theo quy tắc hình bình hành và hệ thức trung điểm ta có

$$\overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} = \overrightarrow{GR} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0}$$

$$\text{Vậy } a^2.\overrightarrow{GD} + b^2.\overrightarrow{GE} + c^2.\overrightarrow{GF} = \vec{0}.$$

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC với các cạnh $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Chứng minh rằng $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

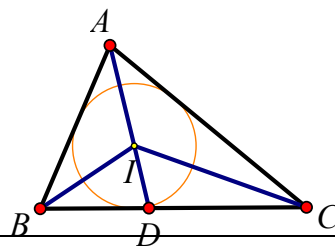
Lời giải

Cách 1: (Hình 1.19) Gọi D là chân đường phân giác góc A

Do D là đường phân giác góc trong góc A nên ta có

$$\begin{aligned} \frac{DB}{DC} &= \frac{c}{b} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \frac{c}{b} \overrightarrow{DC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IB} &= \frac{c}{b} (\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{ID}) \\ \Leftrightarrow (b+c)\overrightarrow{ID} &= b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} \quad (1) \end{aligned}$$

Do I là chân đường phân giác nên ta có :



Hình 1.19

$$\frac{ID}{IA} = \frac{BD}{BA} = \frac{CD}{CA} = \frac{BD + CD}{BA + CA} = \frac{a}{b + c}$$

$$\Rightarrow (b + c)ID = -aIA \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh

Cách 2: (hình 1.20) Qua C dựng đường thẳng song song với AI cắt BI tại B'; song song với BI cắt AI tại A'

Ta có $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'}$ (*)

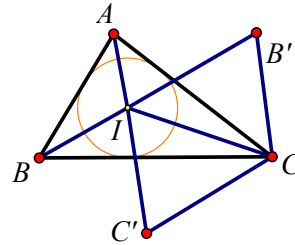
Theo định lý Talet và tính chất đường phân giác trong ta có :

$$\frac{IB}{IB'} = \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{c}{b} \Rightarrow \overrightarrow{IB'} = -\frac{b}{c}\overrightarrow{IB} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự : } \overrightarrow{IA'} = -\frac{a}{c}\overrightarrow{IA} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) thay vào (*) ta có :

$$\overrightarrow{IC} = -\frac{a}{c}\overrightarrow{IA} - \frac{b}{c}\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$



Hình 1.20

DẠNG 3: Xác định điểm M thỏa mãn một đẳng thức vectơ cho trước

1. Phương pháp giải.

- Ta biến đổi đẳng thức vectơ về dạng $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$ trong đó điểm A và $\vec{a}$ đã biết. Khi đó tồn tại duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$, để dựng điểm M ta lấy A làm gốc dựng một vectơ bằng vectơ $\vec{a}$ suy ra điểm ngọn vectơ này chính là điểm M.
- Ta biến đổi về đẳng thức vectơ đã biết của trung điểm đoạn thẳng và trọng tâm tam giác

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho hai điểm A, B phân biệt. Xác định điểm M biết $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

Lời giải (hình 1.21)

$$\text{Ta có } 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} - 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$$

M nằm trên tia AB và $AM = 3AB$



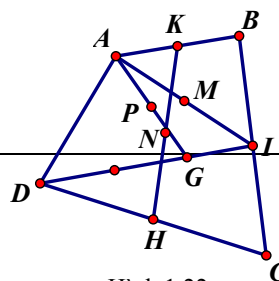
Hình 1.21

Ví dụ 2: Cho tứ giác ABCD. Xác định điểm

M, N, P sao cho

$$\text{a) } 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$$\text{b) } \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$$



Hình 1.22

$$c) 3\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \vec{0}$$

Lời giải (hình 1.22)

a) Gọi I là trung điểm BC suy ra $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$

$$\text{Do đó } 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MI} = \vec{0}$$

Suy ra M là trung điểm AI

b) Gọi K, H lần lượt là trung điểm của AB, CD ta có

$$\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{NK} + 2\overrightarrow{NH} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{NK} + \overrightarrow{NH} = \vec{0} \Leftrightarrow N \text{ là trung điểm của KH}$$

c) Gọi G là trọng tâm tam giác BCD khi đó ta có $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 3\overrightarrow{PG}$

$$\text{Suy ra } 3\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PG} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PG} = \vec{0} \Leftrightarrow P \text{ là trung điểm } AG.$$

Ví dụ 3: Cho trước hai điểm A, B và hai số thực α, β thỏa mãn $\alpha + \beta \neq 0$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn $\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Từ đó, suy ra với điểm bất kì M thì $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MI}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{IA} + \beta(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha + \beta)\overrightarrow{AI} = \beta\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}.$$

Vì A, B cố định nên vector $\frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$ không đổi, do đó tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn điều kiện.

Từ đó suy ra

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \alpha(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + \beta(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$$

$$= (\alpha + \beta)\overrightarrow{MI} + (\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB}) = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MI} \quad \text{đpcm.}$$

DẠNG 4: Phân tích một vector theo hai vector không cùng phương.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng các tính chất phép toán vector, ba quy tắc phép toán vector và tính chất trung điểm, trọng tâm trong tam giác.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC . Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

a) Hãy dựng các điểm M, N thỏa mãn: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$

b) Hãy phân tích $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN}$ qua các véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

c) Gọi I là điểm thỏa: $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{CM}$. Chứng minh I, A, N thẳng hàng

Lời giải (hình 1.23)

a) Vì $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ suy ra M thuộc cạnh AB và $AM = \frac{1}{3}AB$; $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$, suy ra N thuộc tia BC và $CN = 2BC$.

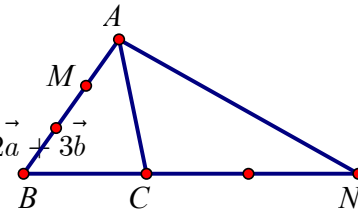
b) Ta có: $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -2\vec{a} + 3\vec{b}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3}\vec{a} - 2\vec{a} + 3\vec{b} = -\frac{7}{3}\vec{a} + 3\vec{b}$.

c) Ta có: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b} = -\frac{1}{3}(-2\vec{a} + 3\vec{b})$

$\Rightarrow \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AN} \Rightarrow A, I, N$ thẳng hàng.



Hình 1.23

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC , trên cạnh BC lấy M sao cho $BM = 3CM$, trên đoạn AM lấy N sao cho $2AN = 5MN$. G là trọng tâm tam giác ABC .

a) Phân tích các vectơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ qua các véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

b) Phân tích các vectơ $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{MN}$ qua các véc tơ $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GB}$

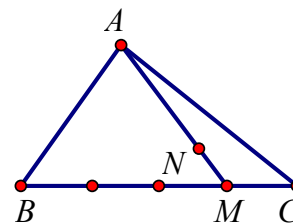
Lời giải (hình 1.24)

a) Theo giả thiết ta có: $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AN} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AM}$

suy ra $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{5}{7}\overrightarrow{AM}$



Hình 1.24

$$= -\overrightarrow{AB} + \frac{5}{7} \left(\frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \overrightarrow{AC} \right) = -\frac{23}{28} \overrightarrow{AB} + \frac{15}{28} \overrightarrow{AC}$$

b) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ suy ra $\overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} = -\frac{2}{7} \overrightarrow{AM} = -\frac{2}{7} \left(\frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \overrightarrow{AC} \right)$$

$$= -\frac{1}{14} (\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}) - \frac{3}{14} (\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA})$$

$$= -\frac{1}{14} (\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}) - \frac{3}{14} (-\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA})$$

$$= \frac{1}{2} \overrightarrow{GA} + \frac{1}{7} \overrightarrow{GB}$$

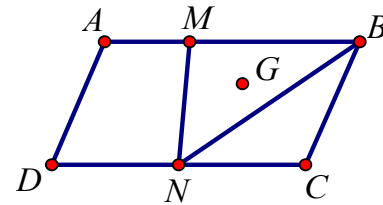
Ví dụ 3: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh AB và CD sao cho $AB = 3AM$, $CD = 2CN$ và G là trọng tâm tam giác MNB . Phân tích các vector $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AG}$ qua các véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

Lời giải (hình 1.25)

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$$

$$= -\frac{5}{6} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$



Hình 1.25

Vì G là trọng tâm tam giác MNB nên

$$3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \right) + \overrightarrow{AB} = \frac{5}{6} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AG} = \frac{5}{18} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$$

DẠNG 5: Chứng minh hai điểm trùng nhau, hai tam giác cùng trọng tâm

1. Phương pháp giải.

- Để chứng minh hai điểm A_1 và A_2 trùng nhau, ta lựa chọn một trong hai cách sau :

Cách 1: Chứng minh $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{0}$.

Cách 2: Chứng minh $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2}$ với O là điểm tùy ý.

- Để chứng minh hai tam giác ABC và $A'B'C'$ cùng trọng tâm ta làm như sau:

Cách 1: Chứng minh G là trọng tâm $\triangle ABC$ trùng với G' là trọng tâm $\triangle A'B'C'$

Cách 2: Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$ (tức ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$) ta đi chứng minh $\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \vec{0}$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ khi và chỉ khi trung điểm của hai đoạn thẳng AD và BC trùng nhau.

Lời giải

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC suy ra $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{ID}$, $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{JB}$

Do đó $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB} = \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{ID}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{JI} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = \vec{0}$ hay I trùng với J

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC , trên các cạnh AB, BC, CA ta lấy lần lượt các điểm M, N, P sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{CP}{CA}$. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.

Lời giải

Giả sử $\frac{AM}{AB} = k$ suy ra $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CP} = k\overrightarrow{CA}$

Cách 1: Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm $\triangle ABC$ và $\triangle MNP$

Suy ra $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{G'M} + \overrightarrow{G'N} + \overrightarrow{G'P} = \vec{0}$ (*)

Ta có $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'M} = k\overrightarrow{AB}$

Tương tự $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'N} = k\overrightarrow{BC}$

Và $\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'P} = k\overrightarrow{CA}$

Cộng vế với vế từng đẳng thức trên ta được

$(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}) + 3\overrightarrow{GG'} + (\overrightarrow{G'M} + \overrightarrow{G'N} + \overrightarrow{G'P}) = k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})$ Kết hợp với (*) ta được $\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$

Suy ra điều phải chứng minh

Cách 2: Gọi G là trọng tâm tam giác ABC suy ra $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Ta có: $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CP}$
 $= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{CA} = k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \vec{0}$

Vậy hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.

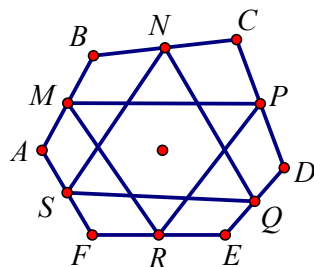
Ví dụ 3: Cho lục giác $ABCDEF$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA . Chứng minh rằng hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

Lời giải (hình 1.26)

Gọi G là trọng tâm của $\triangle MPR$ suy ra

$$\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GR} = \vec{0} \quad (*)$$

Mặt khác $2\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$, $2\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}$,



Hình 1.26

$2\overrightarrow{GR} = \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} \Rightarrow 2(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GR}) = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF}$ Kết hợp với (*) ta được

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GF}) + (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GS} + 2\overrightarrow{GN} + 2\overrightarrow{GQ} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0}$$

Suy ra G là trọng tâm của $\triangle SNQ$.

Vậy $\triangle MPR$ và $\triangle SNQ$ có cùng trọng tâm.

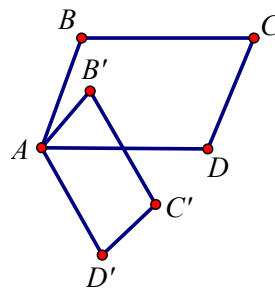
Ví dụ 4: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ chung đỉnh A. Chứng minh rằng hai tam giác $BC'D$ và $B'CD'$ cùng trọng tâm.

Lời giải (hình 1.27)

Gọi G là trọng tâm tam giác $BC'D$ suy ra $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD'} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0} \quad (1)$$

Mặt khác theo quy tắc phép trừ và hình bình hành ta có



Hình 1.27

$$\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB'}) + (\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD'})$$

$$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}) + \overrightarrow{AC}$$

$$= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD'} = \vec{0}$ hay G là trọng tâm tam giác $B'CD'$

DẠNG 6: Tìm tập hợp điểm thỏa mãn điều kiện vector cho trước.

1. Phương pháp giải.

Để tìm tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện vector ta quy về một trong các dạng sau

- Nếu $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$ với A, B phân biệt cho trước thì M thuộc đường trung trực của đoạn AB.
- Nếu $|\overrightarrow{MC}| = k \cdot |\overrightarrow{AB}|$ với A, B, C phân biệt cho trước thì M thuộc đường tròn tâm C, bán kính bằng $k \cdot |\overrightarrow{AB}|$.
- Nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BC}$ với A, B, C phân biệt và k là số thực thay đổi thì
 - + M thuộc đường thẳng qua A song song với BC với $k \in \mathbb{R}$
 - + M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và cùng hướng $\overrightarrow{BC}$ với $k > 0$
 - + M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và ngược hướng $\overrightarrow{BC}$ với $k < 0$
- Nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BC}$, $B \neq C$ với A, B, C thẳng hàng và k thay đổi thì tập hợp điểm M là đường thẳng BC

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn : $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b) Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn : $|\overrightarrow{2MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|$.

Lời giải

a) Ta có: $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} + 3(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) + 4(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 9\overrightarrow{IA} = -3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -\frac{3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}{9} \Rightarrow \text{I tồn tại và duy nhất.}$$

b) Với I là điểm được xác định ở câu a, ta có:

$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = 9\overrightarrow{MI} + (2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC}) = 9\overrightarrow{MI} \text{ và } \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} \text{ nên}$$

$$|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}| \Leftrightarrow |9\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow MI = \frac{AB}{9}$$

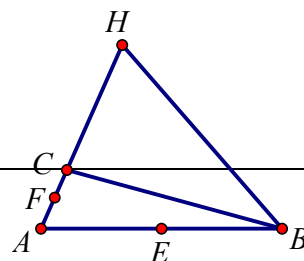
Vậy quỹ tích của M là đường tròn tâm I bán kính $\frac{AB}{9}$.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện sau :

$$a) |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}|$$

$$b) \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}) \text{ với k là số}$$

Lời giải (hình 1.28)



thực thay đổi

a) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC suy ra

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{ME} \quad \text{và} \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MF}$$

$$\text{Khi đó} \quad \left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \right| = \left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| 2\overrightarrow{ME} \right| = \left| 2\overrightarrow{MF} \right| \Leftrightarrow ME = MF$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường trung trực của EF

$$\text{b) Ta có } \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) - 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC})$$

$$= 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{HB}$$

$$\text{Với H là điểm thỏa mãn } \overrightarrow{AH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC})$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{ME} = 2k\overrightarrow{HB} \Leftrightarrow \overrightarrow{ME} = k\overrightarrow{HB}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua E và song song với HB

Ví dụ 3: Cho tứ giác ABCD. Với số k tùy ý, lấy các điểm M và N sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DC}$. Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn thẳng MN khi k thay đổi.

Lời giải (hình 1.29)

Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của AD và BC, ta có

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'B} \quad \text{và} \quad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'C}$$

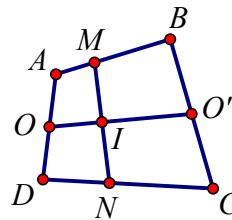
$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{OO'}$$

Tương tự vì O, I lần lượt là trung điểm của AD và MN nên

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{OI}$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{DC}) = k\overrightarrow{OO'}$$

Vậy khi k thay đổi, tập hợp điểm I là đường thẳng OO'



Hình 1.29

DẠNG 7: Xác định tính chất của hình khi biết một đẳng thức vector

1. Phương pháp giải.

Phân tích được định tính xuất phát từ các đẳng thức vector của giả thiết, lưu ý tới những hệ thức đã biết về trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác và kết quả "

$$m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow m = n = 0 \quad \text{với } \vec{a}, \vec{b} \text{ là hai vectơ không cùng phương "}$$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và DC của tứ giác $ABCD$. Các đoạn thẳng AN và BM cắt nhau tại P. Biết $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BM}$; $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AN}$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM} + 5\overrightarrow{MP} \\ &= 5\overrightarrow{AP} - 4\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AN} - 2\overrightarrow{AD} \\ &= 2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}) - 2\overrightarrow{AD} \\ &= 2\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow ABCD \text{ là hình bình hành.}\end{aligned}$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có các cạnh bằng a, b, c và trọng tâm G thỏa mãn: $a^2\overrightarrow{GA} + b^2\overrightarrow{GB} + c^2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Chứng minh rằng ABC là tam giác đều.

Lời giải

G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}$.

$$\begin{aligned}\text{Suy ra } a^2\overrightarrow{GA} + b^2\overrightarrow{GB} + c^2\overrightarrow{GC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow a^2(-\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}) + b^2\overrightarrow{GB} + c^2\overrightarrow{GC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow (b^2 - a^2)\overrightarrow{GB} + (c^2 - a^2)\overrightarrow{GC} &= \vec{0}. (*)\end{aligned}$$

Vì $\overrightarrow{GB}$ và $\overrightarrow{GC}$ là hai vectơ không cùng phương, do đó (*) tương đương với:

$$\begin{cases} b^2 - a^2 = 0 \\ c^2 - a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c \text{ hay tam giác } ABC \text{ đều.}$$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có trung tuyến AA' và B' , C' là các điểm thay đổi trên CA , AB thỏa mãn $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$. Chứng minh BB' , CC' là các trung tuyến của tam giác ABC .

Lời giải

$$\text{Giả sử } \overrightarrow{AB'} = m\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'} = n\overrightarrow{AB}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

$$\text{và } \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC} = n\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

$$\text{Mặt khác } A' \text{ là trung điểm của } BC \text{ nên } \overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + m\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\text{hay } \left(n - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB} + \left(m - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

Vì $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương suy ra $m = n = \frac{1}{2}$ do đó B', C' lần lượt là trung điểm của CA, AB

Vậy BB', CC' là các trung tuyến của tam giác ABC.

DẠNG 8: Chứng minh bất đẳng thức và tìm cực trị liên quan đến độ dài vector

1. Phương pháp.

- Sử dụng bất đẳng thức cơ bản:

Với mọi vector $\vec{a}, \vec{b}$ ta luôn có

$$+ |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|, \text{ dấu bằng xảy ra khi } \vec{a}, \vec{b} \text{ cùng hướng}$$

$$+ |\vec{a} - \vec{b}| \geq \left| |\vec{a}| - |\vec{b}| \right|, \text{ dấu bằng xảy ra khi } \vec{a}, \vec{b} \text{ ngược hướng}$$

- Đưa bài toán ban đầu về bài toán tìm cực trị của $|\overrightarrow{MI}|$ với M thay đổi

+ Nếu M là điểm thay đổi trên đường thẳng Δ khi đó $|\overrightarrow{MI}|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của I lên Δ .

+ Nếu M là điểm thay đổi trên đường tròn (O) khi đó $|\overrightarrow{MI}|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của tia OI với đường tròn; $|\overrightarrow{MI}|$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của tia IO với đường tròn

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC và đường thẳng d. Tìm điểm M thuộc đường thẳng d để biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất $T = \left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right|$

Lời giải:

Gọi I là đỉnh thứ tư của hình bình hành ACBI thì $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó : } T &= \left| (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) \right| \\ &= \left| \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} \right| = \left| \overrightarrow{MI} \right| \end{aligned}$$

Vậy T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của I lên đường thẳng d.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC và A'B'C' là các tam giác thay đổi, có trọng tâm G và G' cố định. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $T = AA' + BB' + CC'$

Giải:

Vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} = \vec{0}$ nên

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} &= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A} + \overrightarrow{BG} + \\ &\quad + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'} \\ &= 3\overrightarrow{GG'} - (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'}) = 3\overrightarrow{GG'}\end{aligned}$$

Do đó:

$$AA' + BB' + CC' = |\overrightarrow{AA'}| + |\overrightarrow{BB'}| + |\overrightarrow{CC'}| \geq |\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}| = 3|\overrightarrow{GG'}| = 3GG'$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các vector $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ cùng hướng

Vậy giá trị nhỏ nhất T là $3GG'$

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho tam giác OAB vuông cân tại O , cạnh $OA = a$. Tính $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$.

- A. a . B. $(1 + \sqrt{2})a$. C. $a\sqrt{5}$. D. $2a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi C là điểm đối xứng của O qua $A \Rightarrow OC = 2a$. Tam giác OBC vuông tại O , có $BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = a\sqrt{5}$.

Ta có $2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BC}$, suy ra $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{BC}| = a\sqrt{5}$.

Câu 2: Cho tam giác OAB vuông cân tại O , cạnh $OA = a$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $|3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB}| = 5a$. B. $|2\overrightarrow{OA}| + |3\overrightarrow{OB}| = 5a$. C. $|7\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB}| = 5a$. D. $|11\overrightarrow{OA}| - |6\overrightarrow{OB}| = 5a$.

Lời giải

Chọn C.

Dựa vào các đáp án, ta có nhận xét sau:

- **A đúng**, gọi C nằm trên tia đối của tia AO sao cho $OC = 3OA \Rightarrow 3\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$. Và D nằm trên tia đối của tia BO sao cho $OD = 4OB \Rightarrow 4\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$. Dựng hình chữ nhật $OCED$ suy ra $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE}$ (quy tắc hình bình hành).

$$\text{Ta có } |3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}| = |\overrightarrow{OE}| = OE = CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = 5a.$$

• **B đúng**, vì $|2\overrightarrow{OA}| + |3\overrightarrow{OB}| = 2|\overrightarrow{OA}| + 3|\overrightarrow{OB}| = 2a + 3a = 5a$.

• **C sai**, xử lý tương tự như ý đáp án A. **Chọn C.**

• **D đúng**, vì $|11\overrightarrow{OA}| - |6\overrightarrow{OB}| = 11|\overrightarrow{OA}| - 6|\overrightarrow{OB}| = 11a - 6a = 5a$.

Câu 3: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC , I là trung điểm của AM . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + 2\overrightarrow{IA} = \vec{0}$.

C. $2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn C.

Vì M là trung điểm BC nên $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IM}$. Mặt khác I là trung điểm AM nên $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IM} = \vec{0}$. Suy ra $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + 2\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IM} + 2\overrightarrow{IA} = 2(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IA}) = \vec{0}$.

Câu 4: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC , I là trung điểm của AM . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

B. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$.

C. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn A.

Vì M là trung điểm BC nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$. (1) Mặt khác I là trung điểm AM nên $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM}$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Câu 5: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC , G là trọng tâm của tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

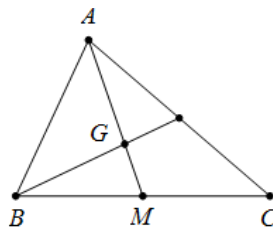
B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{2}\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn B.



Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AM}$. Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2 \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Do đó $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Câu 6: Cho tứ giác $ABCD$. Trên cạnh AB, CD lấy lần lượt các điểm M, N sao cho $3 \overrightarrow{AM} = 2 \overrightarrow{AB}$ và $3 \overrightarrow{DN} = 2 \overrightarrow{DC}$. Tính vector $\overrightarrow{MN}$ theo hai vector $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} - \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$.

D. $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } 3 \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} + 2(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}) \\ &= (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{DN} + 2\overrightarrow{CN}). \end{aligned}$$

Theo bài ra, ta có $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{DN} + 2\overrightarrow{CN} = \vec{0}$.

$$\text{Vậy } 3 \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}.$$

Câu 7: Cho hình thang $ABCD$ có đáy là AB và CD . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DC}$.

B. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BN}$.

C. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.

D. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Vì } M, N \text{ lần lượt là trung điểm của } AD, BC \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \vec{0} \\ \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0} \end{cases}.$$

Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

Câu 10: Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N chia cạnh BC theo ba phần bằng nhau $BM = MN = NC$. Tính $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Câu 11: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC . Tính $\overrightarrow{AB}$ theo $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

Câu 12: Cho tam giác ABC , gọi M là trung điểm AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NC = 2NA$. Gọi K là trung điểm của MN . Khi đó

A. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$$

Câu 13: Cho hình bình hành $ABCD$. Tính $\overrightarrow{AB}$ theo $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$.

A. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

B. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

D. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.

Lời giải

Chọn A.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$. Ta có
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} \end{cases}$$
$$\Rightarrow 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} \longrightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}.$$

Câu 14: Cho tam giác ABC và đặt $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Cặp vector nào sau đây cùng phương?

- A. $2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + 2\vec{b}$. B. $2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} - 2\vec{b}$. C. $5\vec{a} + \vec{b}$, $-10\vec{a} - 2\vec{b}$. D. $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$.

Lời giải

Chọn C.

Dễ thấy $-10\vec{a} - 2\vec{b} = -2(5\vec{a} + \vec{b}) \longrightarrow$ hai vector $5\vec{a} + \vec{b}$, $-10\vec{a} - 2\vec{b}$ cùng phương.

Câu 15: Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Ba điểm C , M , B thẳng hàng.
B. AM là phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$.
C. A , M và trọng tâm tam giác ABC thẳng hàng.
D. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi I , G lần lượt là trung điểm BC và trọng tâm tam giác ABC . Vì I là trung điểm BC nên $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$.

Theo bài ra, ta có $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ suy ra $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MI} \Rightarrow A, M, I$ thẳng hàng

Mặt khác G là trọng tâm của tam giác $ABC \longrightarrow G \in AI$. Do đó, ba điểm A, M, G thẳng hàng.

Câu 16: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm và I là trung điểm của BC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GI}$. B. $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$.
C. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$. D. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$.

Lời giải

Chọn C.

Vì I là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IB} \\ \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IC} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \underbrace{\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}}_{\vec{0}} + 2\overrightarrow{GI} = 2\overrightarrow{GI}.$$

Câu 17: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm và M là trung điểm BC . Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{GA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}$.

C. $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}$.

D. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GM}$.

Lời giải

Chọn D.

$$\begin{aligned} \text{Vì } M \text{ là trung điểm của } BC \text{ suy ra } \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}. \text{ Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB} \\ \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MC} \end{cases} \\ \Rightarrow \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \underbrace{\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}_{\vec{0}} + 2\overrightarrow{GM} = 2\overrightarrow{GM}. \end{aligned}$$

Câu 18: Cho tam giác ABC vuông tại A , M là trung điểm của BC . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$.

B. $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$.

C. $\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MC}$.

D. $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{BC}}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Vì } M \text{ là trung điểm của } BC \text{ nên } \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MC}.$$

Câu 19: Cho tam giác ABC . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC . Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$.

B. $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{NC}$.

C. $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{MN}$.

D. $\overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn C.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Suy ra MN là đường trung bình của tam giác

$$ABC \longrightarrow MN = \frac{1}{2}BC. \text{ Mà } \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MN} \text{ là hai vectơ cùng hướng nên } \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}.$$

Câu 20: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$.

B. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BG}$.

C. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CG}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

Lời giải**Chọn B.**

Gọi E là trung điểm của $AC \Rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BE}$. (1) Mà G là trọng tâm của tam giác

$$ABC \Rightarrow \overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BG}. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra } \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2 \cdot \frac{3}{2}\overrightarrow{BG} = 3\overrightarrow{BG}.$$

Câu 21: Cho tam giác đều ABC và điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{CI} = \frac{\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB}}{3}.$

B. $\overrightarrow{CI} = \frac{\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}}{3}.$

C. $\overrightarrow{CI} = -\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}.$

D. $\overrightarrow{CI} = \frac{\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}}{-3}.$

Lời giải**Chọn C.**

Từ giả thiết $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB} \Rightarrow B$ là trung điểm của $IA \Rightarrow \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}.$

$$\text{Lại có } \begin{cases} \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BI} \\ \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB}.$$

$$= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + 3(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = -2\overrightarrow{CA} + 4\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CI} = -\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}.$$

Câu 22: Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}.$

B. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}.$

C. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}.$

D. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}.$

Lời giải**Chọn C.**

$$\text{Ta có } 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}.$$

Câu 23: Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O . Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}.$

B. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}.$

C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}.$

D. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{AB}.$

Lời giải**Chọn C.**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB} \text{ (vì } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \text{)}.$$

Câu 24: Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$.

C. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{CD}$.

D. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC} + \underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}}_0 = 2\overrightarrow{BC}.$$

Câu 25: Cho hình bình hành $ABCD$ có M là giao điểm của hai đường chéo. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM}$.

D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}$. Suy ra điều trên không thể xảy ra vì $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC}$.

Câu 26: Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CA}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. M trùng A .

B. M trùng B .

C. M trùng C .

D. M là trọng tâm của tam giác ABC .

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có } 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CA} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA}.$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}. (*)$$

Đẳng thức $(*)$ suy ra M là trọng tâm của tam giác ABC .

Câu 27: Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Đặt $\overrightarrow{GA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{GB} = \vec{b}$. Hãy tìm m, n để có $\overrightarrow{BC} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

A. $m = 1, n = 2$.

B. $m = -1, n = -2$.

C. $m = 2, n = 1$.

D. $m = -2, n = -1$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{BG} - (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) = -\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB}$ (do $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$).

Câu 28: Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng và điểm M thỏa mãn đẳng thức vector $\overrightarrow{MA} = x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC}$. Tính giá trị biểu thức $P = x + y$.

- A. $P = 0$. B. $P = 2$. C. $P = -2$. D. $P = 3$.

Lời giải

Chọn B.

Do $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên tồn tại các số thực x, y sao cho

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}, \forall M \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = x(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) + y(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) \\ &\Leftrightarrow (1 - x - y)\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow (x + y - 1)\overrightarrow{MA} = x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC}.\end{aligned}$$

Theo bài ra, ta có $\overrightarrow{MA} = x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC}$ suy ra $x + y - 1 = 1 \Leftrightarrow x + y = 2$.

Câu 29: Cho hình chữ nhật $ABCD$ và số thực $k > 0$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = k$ là

- A. một đoạn thẳng. B. một đường thẳng. C. một đường tròn. D. một điểm.

Lời giải

Chọn C.

Gọi I là tâm của hình chữ nhật $ABCD$, ta có $\begin{cases} 2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} \\ 2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} \end{cases}, \forall M$.

$$\text{Do đó } |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = k \Leftrightarrow |2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MI}| = k \Leftrightarrow 4|\overrightarrow{MI}| = k \Leftrightarrow |\overrightarrow{MI}| = \frac{k}{4}. (*)$$

Vì I là điểm cố định nên tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $(*)$ là đường tròn tâm I , bán kính $R = \frac{k}{4}$.

Câu 30: Cho hình chữ nhật $ABCD$ và I là giao điểm của hai đường chéo. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ là

- A. trung trực của đoạn thẳng AB .
B. trung trực của đoạn thẳng AD .
C. đường tròn tâm I , bán kính $\frac{AC}{2}$.
D. đường tròn tâm I , bán kính $\frac{AB + BC}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD . Khi đó $\begin{cases} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{ME} \\ \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MF} \end{cases}, \forall M.$

Do đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| \Leftrightarrow 2|\overrightarrow{ME}| = 2|\overrightarrow{MF}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{ME}| = |\overrightarrow{MF}|. (*)$

Vì E, F là hai điểm cố định nên từ đẳng thức $(*)$ suy ra tập hợp các điểm M là trung trực của đoạn thẳng EF hay chính là trung trực của đoạn thẳng AD .

Câu 31: Cho hai điểm A, B phân biệt và cố định, với I là trung điểm của AB . Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ là

- A. đường tròn tâm I , đường kính $\frac{AB}{2}$. B. đường tròn đường kính AB .
C. đường trung trực của đoạn thẳng AB . D. đường trung trực đoạn thẳng IA .

Lời giải

Chọn A.

Vì I là trung điểm của AB suy ra $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Do đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow |2\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{BA}| \Leftrightarrow MI = \frac{AB}{2}. (*)$

Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $(*)$ là đường tròn tâm I , bán kính

Câu 32: Cho hai điểm A, B phân biệt và cố định, với I là trung điểm của AB . Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}|$ là

- A. đường trung trực của đoạn thẳng AB . B. đường tròn đường kính AB .
C. đường trung trực đoạn thẳng IA . D. đường tròn tâm A , bán kính AB .

Lời giải

Chọn A.

Chọn điểm E thuộc đoạn AB sao cho $EB = 2EA \Rightarrow 2\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$.

Chọn điểm F thuộc đoạn AB sao cho $FA = 2FB \Rightarrow 2\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$.

Ta có $|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow |2\overrightarrow{ME} + 2\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB}| = |2\overrightarrow{MF} + 2\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FA}|$

$\Leftrightarrow \left| 3\overrightarrow{ME} + \underbrace{2\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB}}_{\vec{0}} \right| = \left| 3\overrightarrow{MF} + \underbrace{2\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB}}_{\vec{0}} \right| \Leftrightarrow |3\overrightarrow{ME}| = |3\overrightarrow{MF}| \Leftrightarrow ME = MF. (*)$

Vì E, F là hai điểm cố định nên từ đẳng thức $(*)$ suy ra tập hợp các điểm M là trung trực của đoạn thẳng EF . Gọi I là trung điểm của AB suy ra I cũng là trung điểm của

EF .

Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn $\left|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right|$ là đường trung trực của đoạn thẳng AB .

Câu 33: Cho tam giác đều ABC cạnh a , trọng tâm G . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right|$ là

- A. đường trung trực của đoạn BC . B. đường tròn đường kính BC .
C. đường tròn tâm G , bán kính $\frac{a}{3}$. D. đường trung trực đoạn thẳng AG .

Lời giải

Chọn A.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, AC . Khi đó $\begin{cases} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} \\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MJ} \end{cases}$.

Theo bài ra, ta có $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right| \Leftrightarrow \left|2\overrightarrow{MI}\right| = \left|2\overrightarrow{MJ}\right| \Leftrightarrow MI = MJ$.

Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right|$ là đường trung trực của đoạn thẳng IJ , cũng chính là đường trung trực của đoạn thẳng BC vì IJ là đường trung bình của tam giác ABC .

Câu 34: Cho tam giác đều ABC cạnh a . Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\left|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right|$ là đường tròn cố định có bán kính R . Tính bán kính R theo a .

- A. $R = \frac{a}{3}$. B. $R = \frac{a}{9}$. C. $R = \frac{a}{2}$. D. $R = \frac{a}{6}$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Ta có

$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + 4(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}).$$

$$\text{Chọn điểm } I \text{ sao cho } 2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA} = \vec{0}.$$

$$\text{Vì } G \text{ là trọng tâm của tam giác } ABC \text{ nên } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IG}.$$

$$\text{Khi đó } 9\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA} = \vec{0} \Leftrightarrow 9\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 9\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{CA}. (*)$$

$$\text{Do đó } \left|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right| \Leftrightarrow \left|9\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| \Leftrightarrow 9MI = AB.$$

Vì I là điểm cố định thỏa mãn $(*)$ nên tập hợp các điểm M cần tìm là đường tròn tâm

$$I, \text{ bán kính } R = \frac{AB}{9} = \frac{a}{9}.$$

Câu 35: Cho tam giác ABC . Có bao nhiêu điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn D.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC nên G cố định duy nhất và $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Ta có $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3 \Leftrightarrow |\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} - 3\overrightarrow{GM}| = 3 \Leftrightarrow 3|\overrightarrow{GM}| = 3 \Leftrightarrow GM = 1$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm G bán kính bằng 1.

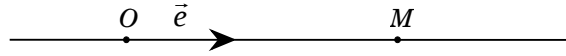
BÀI 4. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Trục và độ dài đại số trên trục

a) Trục tọa độ (hay gọi tắt là trục) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm O gọi là điểm gốc và một vector đơn vị $\vec{e}$.

Ta kí hiệu trục đó là $(O; \vec{e})$.



b) Cho M là một điểm tùy ý trên trục $(O; \vec{e})$. Khi đó có duy nhất một số k sao cho $\overrightarrow{OM} = k\vec{e}$. Ta gọi số k đó là tọa độ của điểm M đối với trục đã cho.

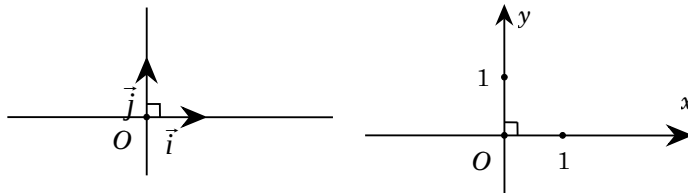
c) Cho hai điểm A và B trên trục $(O; \vec{e})$. Khi đó có duy nhất số a sao cho $\overrightarrow{AB} = a\vec{e}$. Ta gọi số a là độ dài đại số của vector $\overrightarrow{AB}$ đối với trục đã cho và kí hiệu $a = \overline{AB}$.

Nhận xét.

- Nếu $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\vec{e}$ thì $\overline{AB} = AB$, còn nếu $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng với $\vec{e}$ thì $\overline{AB} = -AB$.
- Nếu hai điểm A và B trên trục $(O; \vec{e})$ có tọa độ lần lượt là a và b thì $\overline{AB} = b - a$.

2. Hệ trục tọa độ

a) **Định nghĩa.** Hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$ gồm hai trục $(O; \vec{i})$ và $(O; \vec{j})$ vuông góc với nhau. Điểm gốc O chung của hai trục gọi là gốc tọa độ. Trục $(O; \vec{i})$ được gọi là trục hoành và kí hiệu là Ox , trục $(O; \vec{j})$ được gọi là trục tung và kí hiệu là Oy . Các vector $\vec{i}$ và $\vec{j}$ là các vector đơn vị trên Ox và Oy và $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$. Hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$ còn được kí hiệu là Oxy .



Mặt phẳng mà trên đó đã cho một hệ trục tọa độ Oxy còn được gọi là mặt phẳng tọa độ Oxy hay gọi tắt là mặt phẳng Oxy .

b) Tọa độ của vector

Trong mặt phẳng Oxy cho một vector $\vec{u}$ tùy ý. Vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ và gọi A_1, A_2 lần lượt là hình

chiều của vuông góc của A lên Ox và Oy . Ta có $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$ và cặp số duy nhất $(x; y)$ để $\overrightarrow{OA_1} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_2} = y\vec{j}$. Như vậy $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Cặp số $(x; y)$ duy nhất đó được gọi là tọa độ của vector $\vec{u}$ đối với hệ tọa độ Oxy và viết $\vec{u} = (x; y)$ hoặc $\vec{u}(x; y)$. Số thứ nhất x gọi là hoành độ, số thứ hai y gọi là tung độ của vector $\vec{u}$.

Như vậy $\boxed{\vec{u} = (x; y) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}}$

Nhận xét. Từ định nghĩa tọa độ của vector, ta thấy hai vector bằng nhau khi và chỉ khi chúng có hoành độ bằng nhau và tung độ bằng nhau.

Nếu $\vec{u} = (x; y)$ và $\vec{u}' = (x'; y')$ thì $\boxed{\vec{u} = \vec{u}' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}}$

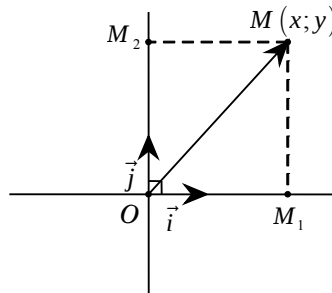
Như vậy, mỗi vector được hoàn toàn xác định khi biết tọa độ của nó.

c) Tọa độ của một điểm

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho một điểm M tùy ý. Tọa độ của vector $\overrightarrow{OM}$ đối với hệ trục Oxy được gọi là tọa độ của điểm M đối với hệ trục đó.

Như vậy, cặp số $(x; y)$ là tọa độ của điểm M khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = (x; y)$. Khi đó ta viết $M(x; y)$ hoặc $M = (x; y)$. Số x được gọi là hoành độ, còn số y được gọi là tung độ của điểm M . Hoành độ của điểm M còn được kí hiệu là x_M , tung độ của điểm M còn được kí hiệu là y_M .

$\boxed{M = (x; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}}$



Chú ý rằng, nếu $MM_1 \perp Ox$, $MM_2 \perp Oy$ thì $x = \overrightarrow{OM_1}$, $y = \overrightarrow{OM_2}$.

d) Liên hệ giữa tọa độ của điểm và tọa độ của vector trong mặt phẳng

Cho hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$. Ta có

$\boxed{\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)}$

3. Tọa độ của các vector $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $k\vec{u}$

Ta có các công thức sau:

Cho $\vec{u} = (u_1; u_2)$, $\vec{v} = (v_1; v_2)$

Khi đó:

- $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + u_2; v_1 + v_2)$;
- $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - u_2; v_1 - v_2)$;
- $k\vec{u} = (k u_1; k u_2)$, $k \in \mathbb{R}$.

Nhận xét. Hai vectơ $\vec{u} = (u_1; u_2)$, $\vec{v} = (v_1; v_2)$ với $\vec{v} \neq \vec{0}$ cùng phương khi và chỉ khi có một số k sao cho $u_1 = k v_1$ và $u_2 = k v_2$.

4. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng. Tọa độ trọng tâm của tam giác

a) Cho đoạn thẳng AB có $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$. Ta dễ dàng chứng minh được tọa độ trung điểm $I(x_I; y_I)$ của đoạn thẳng AB là

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}, y_I = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

b) Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$. Khi đó tọa độ của trọng tâm $G(x_G; y_G)$ của tam giác ABC được tính theo công thức

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 2: tìm tọa độ điểm, tọa độ vectơ trên mặt phẳng Oxy .

1. Phương pháp.

- Để tìm tọa độ của vectơ $\vec{a}$ ta làm như sau

Dựng vectơ $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên Ox, Oy . Khi đó $\vec{a}(a_1; a_2)$ với $a_1 = \overline{OH}$, $a_2 = \overline{OK}$

- Để tìm tọa độ điểm A ta đi tìm tọa độ vectơ $\overrightarrow{OA}$
- Nếu biết tọa độ hai điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ suy ra tọa độ $\overrightarrow{AB}$ được xác định theo công

thức $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

Chú ý: $\overline{OH} = OH$ nếu H nằm trên tia Ox (hoặc Oy) và $\overline{OH} = -OH$ nếu H nằm trên tia đối tia Ox (hoặc Oy)

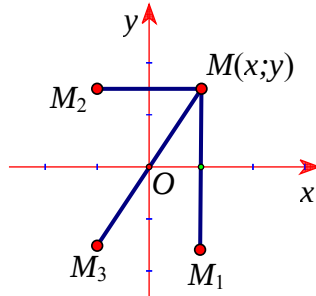
2. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Cho điểm $M(x; y)$.

Tìm tọa độ của các điểm

- a) M_1 đối xứng với M qua trục hoành
- b) M_2 đối xứng với M qua trục tung
- c) M_3 đối xứng với M qua gốc tọa độ

Lời giải (hình 1.32)

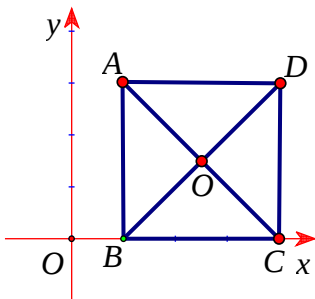


Hình 1.32

- a) M_1 đối xứng với M qua trục hoành suy ra $M_1(x; -y)$
- b) M_2 đối xứng với M qua trục tung suy ra $M_2(-x; y)$
- c) M_3 đối xứng với M qua gốc tọa độ suy ra $M_3(-x; -y)$

Ví dụ 2: Trong hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$, cho hình vuông $ABCD$ tâm I và có $A(1; 3)$. Biết điểm B thuộc trục $(O; \vec{i})$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng với $\vec{i}$. Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AC}$

Lời giải (hình 1.33)



Hình 1.33

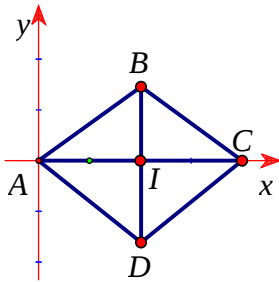
Từ giả thiết ta xác định được hình vuông trên mặt phẳng tọa độ (hình bên)

Vì điểm $A(1; 3)$ suy ra $AB = 3$, $OB = 1$

Do đó $B(1; 0)$, $C(4; 0)$, $D(4; 3)$

Vậy $\overrightarrow{AB}(0;-3)$, $\overrightarrow{BC}(3;0)$ và $\overrightarrow{AC}(3;-3)$

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Biết A trùng với gốc tọa độ O , C thuộc trục Ox và $x_B \geq 0, y_B \geq 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi $ABCD$



Hình 1.34

Lời giải (hình 1.34)

Từ giả thiết ta xác định được hình thoi trên mặt phẳng tọa độ Oxy

Gọi I là tâm hình thoi ta có $BI = AB \sin \widehat{BAI} = a \sin 30^\circ = \frac{a}{2}$

$$AI = \sqrt{AB^2 - BI^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra $A(0;0)$, $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right)$, $C(a\sqrt{3};0)$, $D\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}\right)$

Dạng 3: Xác Định Tọa Độ Điểm, Vector Liên Quan Đến Biểu Thức Dạng $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $k\vec{u}$

1. Phương pháp.

Dùng công thức tính tọa độ của vector $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $k\vec{u}$

Với $\vec{u} = (x;y)$; $\vec{u}' = (x';y')$ và số thực k , khi đó $\vec{u} \pm \vec{v} = (x \pm x'; y \pm y')$ và $k\vec{u} = (kx; ky)$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy , cho 3 vector: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$

Tìm tọa độ của vector sau

a) $\vec{u} + 2\vec{v}$ với $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ và $\vec{v} = \pi\vec{i}$

b) $\vec{k} = 2\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{l} = -\vec{a} + 2\vec{b} + 5\vec{c}$

Lời giải

a) Ta có $\vec{u} + 2\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \pi\vec{i} = (3 + \pi)\vec{i} - 4\vec{j}$ suy ra $\vec{u} + 2\vec{v} = (3 + \pi; -4)$

b) Ta có $\vec{2a} = (6; 4)$ $\vec{b} = (-1; 5)$ suy ra $\vec{k} = (6 - 1; 4 + 5) = (5; 9)$;

$-\vec{a} = (-3; -2)$, $2\vec{b} = (-2; 10)$ và $5\vec{c} = (-10; -25)$ suy ra

$$\vec{l} = (-3 - 2 - 10; -2 + 10 - 25) = (-15; -17)$$

Ví dụ 2: Cho $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (-3; 4)$; $\vec{c} = (-1; 3)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{u}$ biết

a) $2\vec{u} - 3\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$

b) $3\vec{u} + 2\vec{a} + 3\vec{b} = 3\vec{c}$

Lời giải

a) Ta có $2\vec{u} - 3\vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

Suy ra $\vec{u} = \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}; 3 - 2\right) = (3; 1)$

b) Ta có $3\vec{u} + 2\vec{a} + 3\vec{b} = 3\vec{c} \Leftrightarrow \vec{u} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

Suy ra $\vec{u} = \left(-\frac{2}{3} + 3 - 1; -\frac{4}{3} - 4 + 3\right) = \left(\frac{4}{3}; -\frac{7}{3}\right)$

Ví dụ 3: Cho ba điểm $A(-4; 0)$, $B(0; 3)$ và $C(2; 1)$

a) Xác định tọa độ vector $\vec{u} = 2\vec{AB} - \vec{AC}$

b) Tìm điểm M sao cho $\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC} = \vec{0}$

Lời giải

a) Ta có $\vec{AB}(4; 3)$, $\vec{AC}(6; 1)$ suy ra $\vec{u} = (2; 5)$

b) Gọi $M(x; y)$, ta có $\vec{MA}(-4 - x; -y)$, $\vec{MB}(-x; 3 - y)$, $\vec{MC}(2 - x; 1 - y)$

Suy ra $\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC} = (-6x + 2; -6y + 9)$

Do đó $\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} -6x + 2 = 0 \\ -6y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$

Vậy $M\left(\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right)$

Dạng 4: Xác Định Tọa Độ Các Điểm Của Một Hình

1. Phương pháp.

Dựa vào tính chất của hình và sử dụng công thức

+ M là trung điểm đoạn thẳng AB suy ra $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

+ G trọng tâm tam giác ABC suy ra $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$

$$+ \vec{u}(x; y) = \vec{u}'(x'; y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có $A(2;1), B(-1;-2), C(-3;2)$.

a) Tìm tọa độ trung điểm M sao cho C là trung điểm của đoạn MB

b) Xác định trọng tâm tam giác ABC

b) Tìm điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành

Lời giải

a) C là trung điểm của MB suy ra $x_C = \frac{x_M + x_B}{2} \Rightarrow x_M = 2x_C - x_B = -5$

$$\text{và } y_C = \frac{y_M + y_B}{2} \Rightarrow y_M = 2y_C - y_B = 6$$

Vậy $M(-5;6)$

b) G là trọng tâm tam giác suy ra

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{2 - 1 - 3}{3} = -\frac{2}{3} \text{ và } y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{1 - 2 + 2}{3} = \frac{1}{3}$$

Vậy $G\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$

c) Gọi $D(x; y) \Rightarrow \overrightarrow{DC} = (-3 - x; 2 - y)$

Ta có: $ABCD$ là hình bình hành suy ra

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - x = -3 \\ 2 - y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow D(0;5).$$

Vậy $D(0;5)$

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $A(3;-1), B(-1;2)$ và $I(1;-1)$. Xác định tọa độ các điểm C, D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành biết I là trọng tâm tam giác ABC . Tìm tọa độ tâm O của hình bình hành $ABCD$.

Lời giải

Vì I là trọng tâm tam giác ABC nên

$$x_I = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow x_C = 3x_I - x_A - x_B = 1$$

$$y_I = \frac{y_A + y_B + y_C}{2} \Rightarrow y_C = 3y_I - y_A - y_B = -4$$

suy ra $C(1; -4)$

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành suy ra

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - 3 = 1 - x_D \\ 2 + 1 = -4 - y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 5 \\ y_D = -7 \end{cases} \Rightarrow D(5; -7)$$

Điểm O của hình bình hành $ABCD$ suy ra O là trung điểm AC do đó

$$x_O = \frac{x_A + x_C}{2} = 2, y_O = \frac{y_A + y_C}{2} = -\frac{5}{2} \Rightarrow O\left(2; -\frac{5}{2}\right)$$

Dạng 5: bài toán liên quan đến sự cùng phương của hai vector. Phân tích một vector qua hai vector không cùng phương.

1. Phương pháp.

- Cho $\vec{u} = (x; y)$; $\vec{u}' = (x'; y')$. Vector $\vec{u}'$ cùng phương với vector $\vec{u}$ ($\vec{u} \neq \vec{0}$) khi và chỉ khi có số k sao cho
$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

Chú ý: Nếu $xy \neq 0$ ta có $\vec{u}'$ cùng phương $\vec{u} \Leftrightarrow \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$

- Để phân tích $\vec{c}(c_1; c_2)$ qua hai vector $\vec{a}(a_1; a_2)$, $\vec{b}(b_1; b_2)$ không cùng phương, ta giả sử
$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$
 Khi đó ta quy về giải hệ phương trình
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (-3; 0)$; $\vec{c} = (-1; 3)$

- Chứng minh hai vector $\vec{a}$; $\vec{b}$ không cùng phương
- Phân tích vector $\vec{c}$ qua $\vec{a}$; $\vec{b}$

Lời giải

- Ta có $\frac{-3}{1} \neq \frac{0}{2} \Rightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương
- Giả sử $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Ta có $x\vec{a} + y\vec{b} = (x - 3y; 2x)$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x - 3y = -1 \\ 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{5}{9} \end{cases} \Rightarrow \vec{c} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{5}{9}\vec{b}$$

Ví dụ 2: Cho $\vec{u} = (m^2 + m - 2; 4)$ và $\vec{v} = (m; 2)$. Tìm m để hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương.

Lời giải

+ Với $m = 0$: Ta có $\vec{u} = (-2; 4)$; $\vec{v} = (0; 2)$

Vì $\frac{0}{-2} \neq \frac{2}{4}$ nên hai vectơ $\vec{u}; \vec{v}$ không cùng phương

+ Với $m \neq 0$: Ta có $\vec{u}; \vec{v}$ cùng phương khi và chỉ khi

$$\frac{m^2 + m - 2}{m} = \frac{4}{2} \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Vậy với $m = -1$ và $m = 2$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(6; 3)$, $B(-3; 6)$, $C(1; -2)$.

- Chứng minh A, B, C là ba đỉnh một tam giác.
- Xác định điểm D trên trục hoành sao cho ba điểm A, B, D thẳng hàng.
- Xác định điểm E trên cạnh BC sao cho $BE = 2EC$
- Xác định giao điểm hai đường thẳng DE và AC

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB}(-9; 3)$, $\overrightarrow{AC}(-5; -5)$. Vì $\frac{-9}{-5} \neq \frac{3}{-5}$ suy ra $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương

Hay A, B, C là ba đỉnh một tam giác.

b) D trên trục hoành $\Rightarrow D(x; 0)$

Ba điểm A, B, D thẳng hàng suy ra $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$ không cùng phương

Mặt khác $\overrightarrow{AD}(x - 6; -3)$ do đó $\frac{x - 6}{-9} = \frac{-3}{3} \Rightarrow x = 15$

Vậy $D(15; 0)$

c) Vì E thuộc đoạn BC và $BE = 2EC$ suy ra $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{EC}$

Gọi $E(x; y)$ khi đó $\overrightarrow{BE}(x + 3; y - 6)$, $\overrightarrow{EC}(1 - x; -2 - y)$

$$\text{Do đó } \begin{cases} x+3=2(1-x) \\ y-6=2(-2-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } E\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

d) Gọi $I(x; y)$ là giao điểm của DE và AC.

$$\text{Do đó } \overrightarrow{DI}(x-15; y), \overrightarrow{DE}\left(-\frac{46}{3}; \frac{2}{3}\right) \text{ cùng phương suy ra } \frac{3(x-15)}{-46} = \frac{3y}{2} \Rightarrow x+23y-15=0 \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AI}(x-6; y-3), \overrightarrow{AC}(-5; -5) \text{ cùng phương suy ra } \frac{x-6}{-5} = \frac{y-3}{-5} \Rightarrow x-y-3=0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } x=\frac{7}{2} \text{ và } y=\frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy giao điểm hai đường thẳng DE và AC là } I\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\vec{a} = (-5; 0)$, $\vec{b} = (-4; 0)$ cùng hướng. B. $\vec{c} = (7; 3)$ là vector đối của $\vec{d} = (-7; 3)$.
- C. $\vec{u} = (4; 2)$, $\vec{v} = (8; 3)$ cùng phương. D. $\vec{a} = (6; 3)$, $\vec{b} = (2; 1)$ ngược hướng.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \vec{a} = \frac{5}{4}\vec{b} \longrightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ cùng hướng.}$$

Câu 2: Cho $\vec{a} = (2; -4)$, $\vec{b} = (-5; 3)$. Tìm tọa độ của $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$.

- A. $\vec{u} = (7; -7)$. B. $\vec{u} = (9; -11)$. C. $\vec{u} = (9; -5)$. D. $\vec{u} = (-1; 5)$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } \begin{cases} 2\vec{a} = (4; -8) \\ -\vec{b} = (5; -3) \end{cases} \longrightarrow \vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b} = (4+5; -8-3) = (9; -11).$$

Câu 3: Cho $\vec{a} = (3; -4)$, $\vec{b} = (-1; 2)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{a} + \vec{b}$.

- A. $(-4; 6)$. B. $(2; -2)$. C. $(4; -6)$. D. $(-3; -8)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\vec{a} + \vec{b} = (3 + (-1); -4 + 2) = (2; -2)$.

Câu 4: Cho $\vec{a} = (-1; 2)$, $\vec{b} = (5; -7)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{a} - \vec{b}$.

- A. $(6; -9)$. B. $(4; -5)$. C. $(-6; 9)$. D. $(-5; -14)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\vec{a} - \vec{b} = (-1 - 5; 2 - (-7)) = (-6; 9)$.

Câu 5: Trong hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$, tọa độ của vector $\vec{i} + \vec{j}$ là

- A. $(0; 1)$. B. $(1; -1)$. C. $(-1; 1)$. D. $(1; 1)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\begin{cases} \vec{i} = (1; 0) \\ \vec{j} = (0; 1) \end{cases} \longrightarrow \vec{i} + \vec{j} = (1; 1)$.

Câu 6: Cho $\vec{u} = (3; -2)$, $\vec{v} = (1; 6)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\vec{u} + \vec{v}$ và $\vec{a} = (-4; 4)$ ngược hướng. B. $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương.
C. $\vec{u} - \vec{v}$ và $\vec{b} = (6; -24)$ cùng hướng. D. $2\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{v}$ cùng phương.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\vec{u} + \vec{v} = (4; 4)$ và $\vec{u} - \vec{v} = (2; -8)$.

Xét tỉ số $\frac{4}{-4} \neq \frac{4}{4} \longrightarrow \vec{u} + \vec{v}$ và $\vec{a} = (-4; 4)$ không cùng phương. Loại A

Xét tỉ số $\frac{3}{1} \neq \frac{-2}{6} \longrightarrow \vec{u}$, $\vec{v}$ không cùng phương. Loại B

Xét tỉ số $\frac{2}{6} = \frac{-8}{-24} = \frac{1}{3} > 0 \longrightarrow \vec{u} - \vec{v}$ và $\vec{b} = (6; -24)$ cùng hướng.

Câu 7: Cho $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ và $\vec{v} = \vec{i} + x\vec{j}$. Xác định x sao cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

- A. $x = -1$. B. $x = -\frac{1}{2}$. C. $x = \frac{1}{4}$. D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} \longrightarrow \vec{u} = (2; -1) \\ \vec{v} = \vec{i} + x\vec{j} \longrightarrow \vec{v} = (1; x) \end{cases}.$$

$$\text{Để } \vec{u} \text{ và } \vec{v} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{-1} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Câu 8: Cho $\vec{a} = (-5; 0)$, $\vec{b} = (4; x)$. Tìm x để hai vector $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương.

A. $x = -5$.

B. $x = 4$.

C. $x = 0$.

D. $x = -1$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Hai vector } \vec{a}, \vec{b} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow -5.x = 0.4 \longrightarrow x = 0.$$

Câu 9: Cho $\vec{a} = (x; 2)$, $\vec{b} = (-5; 1)$, $\vec{c} = (x; 7)$. Tìm x biết $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

A. $x = -15$.

B. $x = 3$.

C. $x = 15$.

D. $x = 5$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \begin{cases} 2\vec{a} = (2x; 4) \\ 3\vec{b} = (-15; 3) \end{cases} \longrightarrow 2\vec{a} + 3\vec{b} = (2x - 15; 7).$$

$$\text{Để } \vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b} \longleftrightarrow \begin{cases} x = 2x - 15 \\ 7 = 7 \end{cases} \longrightarrow x = 15.$$

Câu 10: Cho ba vector $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (3; 4)$, $\vec{c} = (7; 2)$. Giá trị của k , h để $\vec{c} = k.\vec{a} + h.\vec{b}$ là

A. $k = 2, 5$; $h = -1, 3$.

B. $k = 4, 6$; $h = -5, 1$.

C. $k = 4, 4$; $h = -0, 6$.

D. $k = 3, 4$; $h = -0, 2$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \begin{cases} k.\vec{a} = (2k; k) \\ h.\vec{b} = (3h; 4h) \end{cases} \longrightarrow k.\vec{a} + h.\vec{b} = (2k + 3h; k + 4h).$$

$$\text{Theo đề bài: } \vec{c} = k.\vec{a} + h.\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 2k + 3h \\ 2 = k + 4h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 4, 4 \\ h = -0, 6 \end{cases}.$$

Câu 11: Trong hệ tọa độ Oxy, cho $A(5; 2)$, $B(10; 8)$. Tìm tọa độ của vector $\overrightarrow{AB}$?

A. $\overrightarrow{AB} = (15; 10)$.

B. $\overrightarrow{AB} = (2; 4)$.

C. $\overrightarrow{AB} = (5; 6)$.

D. $\overrightarrow{AB} = (50; 16)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (5; 6)$.

Câu 12: Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1; 3)$, $B(-1; 2)$, $C(-2; 1)$. Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

A. $(-5; -3)$.

B. $(1; 1)$.

C. $(-1; 2)$.

D. $(-1; 1)$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2; -1) \\ \overrightarrow{AC} = (-3; -2) \end{cases} \longrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = (-2 - (-3); -1 - (-2)) = (1; 1).$$

Cách khác: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} = (1; 1)$.

Câu 13: Trong hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2; -3)$, $B(4; 7)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

A. $I(6; 4)$.

B. $I(2; 10)$.

C. $I(3; 2)$.

D. $I(8; -21)$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_I = \frac{2+4}{2} = 3 \\ y_I = \frac{-3+7}{2} = 2 \end{cases} \longrightarrow I(3; 2).$$

Câu 14: Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(3; 5)$, $B(1; 2)$, $C(5; 2)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC ?

A. $G(-3; -3)$.

B. $G\left(\frac{9}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

C. $G(9; 9)$.

D. $G(3; 3)$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_G = \frac{3+1+5}{3} = 3 \\ y_G = \frac{5+2+2}{3} = 3 \end{cases} \longrightarrow G(3; 3).$$

Câu 15: Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(6; 1)$, $B(-3; 5)$ và trọng tâm $G(-1; 1)$.

Tìm tọa độ đỉnh C ?

- A. $C(6; -3)$. B. $C(-6; 3)$. C. $C(-6; -3)$. D. $C(-3; 6)$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi $C(x; y)$.

$$\text{Vì } G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \text{ nên } \begin{cases} \frac{6+(-3)+x}{3} = -1 \\ \frac{1+5+y}{3} = 1 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -3 \end{cases}.$$

Câu 16: Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-2; 2)$, $B(3; 5)$ và trọng tâm là gốc tọa độ $O(0; 0)$. Tìm tọa độ đỉnh C ?

- A. $C(-1; -7)$. B. $C(2; -2)$. C. $C(-3; -5)$. D. $C(1; 7)$.

Lời giải

Chọn A.

Gọi $C(x; y)$.

$$\text{Vì } O \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \text{ nên } \begin{cases} \frac{-2+3+x}{3} = 0 \\ \frac{2+5+y}{3} = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -7 \end{cases}.$$

Câu 17: Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1; -1)$, $N(5; -3)$ và C thuộc trục Oy , trọng tâm G của tam giác thuộc trục Ox . Tìm tọa độ điểm C .

- A. $C(0; 4)$ B. $C(2; 4)$ C. $C(0; 2)$ D. $C(0; -4)$

Lời giải

Chọn A.

Vì C thuộc trục $Oy \longrightarrow C$ có hoành độ bằng 0. Loại B.

Trọng tâm G thuộc trục $Ox \longrightarrow G$ có tung độ bằng 0. Xét các đáp án còn lại chỉ có đáp án A thỏa mãn $\frac{y_A + y_B + y_C}{3} = 0$.

Câu 18: Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $C(-2; -4)$, trọng tâm $G(0; 4)$ và trung điểm cạnh BC là $M(2; 0)$. Tổng hoành độ của điểm A và B là

- A. -2 . B. 2 . C. 4 . D. 8 .

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Vì } M \text{ là trung điểm } BC \text{ nên } \begin{cases} x_B = 2x_M - x_C = 2.2 - (-2) = 6 \\ y_B = 2y_M - y_C = 2.0 - (-4) = 4 \end{cases} \Rightarrow B(6; 4).$$

$$\text{Vì } G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \text{ nên } \begin{cases} x_A = 3x_G - x_B - x_C = -4 \\ y_A = 3y_G - y_B - y_C = 12 \end{cases} \rightarrow A(-4; 12).$$

$$\text{Suy ra } x_A + x_B = 2.$$

Câu 19: Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-1;1)$, $B(1;3)$, $C(-2;0)$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$.

B. A, B, C thẳng hàng.

C. $\overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

D. $\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2; 2) \\ \overrightarrow{AC} = (-1; -1) \end{cases} \longrightarrow \overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}.$$

Câu 20: Trong hệ tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(3;-2)$, $B(7;1)$, $C(0;1)$, $D(-8;-5)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ là hai vectơ đối nhau.

B. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ ngược hướng.

C. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ cùng hướng.

D. A, B, C, D thẳng hàng.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (4; 3) \\ \overrightarrow{CD} = (-8; -6) \end{cases} \longrightarrow \overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB} \longrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \text{ ngược hướng.}$$

Câu 21: Trong hệ tọa độ Oxy , cho $A(-1;5)$, $B(5;5)$, $C(-1;11)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. A, B, C thẳng hàng.

B. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương.

C. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

D. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (6; 0) \\ \overrightarrow{AC} = (0; 6) \end{cases} \longrightarrow 6.6 \neq 0.0 \longrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ không cùng phương.}$$

Cách 2. Gọi I là trung điểm $M_1M_2 \longrightarrow I\left(\frac{3}{2}; -2\right)$.

Ta có $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = 2\overrightarrow{OI} = \left(2 \cdot \frac{3}{2}; 2 \cdot (-2)\right) = (3; -4)$.

Câu 25: Trong hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành $OABC$, điểm C thuộc trục hoành. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overline{AB}$ có tung độ khác 0.
- B. Hai điểm A, B có tung độ khác nhau.
- C. C có hoành độ bằng 0.
- D. $x_A + x_C - x_B = 0$.

Lời giải

Chọn D.

Từ giả thiết suy ra cạnh OC thuộc trục hoành $\longrightarrow$ cạnh AB song song với trục hoành nên $y_A = y_B \longrightarrow \overline{AB} = (x_A - x_B; 0)$. Do đó loại A và B.

Nếu C có hoành độ bằng 0 $\longrightarrow C(0;0) \equiv O$: mâu thuẫn với giả thiết $OABC$ là hình bình hành. Loại C.

Dùng phương pháp loại trừ, ta chọn D.

Cách 2. Gọi I là tâm của hình bình hành $OABC$. Suy ra

- I là trung điểm $AC \longrightarrow I\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + 0}{2}\right)$.
- I là trung điểm $OB \longrightarrow I\left(\frac{0 + x_B}{2}; \frac{0 + y_B}{2}\right)$.

Từ đó suy ra $\frac{x_A + x_C}{2} = \frac{0 + x_B}{2} \longrightarrow x_A + x_C - x_B = 0$.

Câu 26: Trong hệ tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(-5; -2)$, $B(-5; 3)$, $C(3; 3)$, $D(3; -2)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ cùng hướng.
- B. $ABCD$ là hình chữ nhật.
- C. $I(-1; 1)$ là trung điểm AC .
- D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\begin{cases} \overline{AB} = (0; 5) \\ \overline{CD} = (0; -5) \end{cases} \longrightarrow \overline{AB} = -\overline{CD}$ suy ra $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ ngược hướng. Loại A.

$$\text{Tọa độ trung điểm của } AC \text{ là } \begin{cases} x = \frac{-5+3}{2} = -1 \\ y = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}. \text{Loại C.}$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{OC} = (3; 3); \begin{cases} \overrightarrow{OA} = (-5; -2) \\ \overrightarrow{OB} = (-5; 3) \end{cases} \longrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (-10; 1) \neq \overrightarrow{OC}. \text{Loại D.}$$

Dùng phương pháp loại trừ ta chọn B.

Câu 27: Trong hệ tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(2;1)$, $B(2;-1)$, $C(-2;-3)$, $D(-2;-1)$. Xét hai mệnh đề:

(I). $ABCD$ là hình bình hành. (II). AC cắt BD tại $M(0;-1)$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Chỉ (I) đúng. B. Chỉ (II) đúng.
C. Cả (I) và (II) đều đúng. D. Cả (I) và (II) đều sai.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (0; -2)$, $\overrightarrow{DC} = (0; -2) \xrightarrow{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}} ABCD$ là hình bình hành.

Khi đó tọa độ trung điểm của AC là $(0; -1)$ và cũng là tọa độ trung điểm của BD .

Câu 28: Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1;1)$, $B(3;2)$, $C(6;5)$. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- A. $D(4;3)$. B. $D(3;4)$. C. $D(4;4)$. D. $D(8;6)$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Gọi } D(x; y). \text{ Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2; 1) \\ \overrightarrow{DC} = (6-x; 5-y) \end{cases}.$$

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\longrightarrow \begin{cases} 2 = 6-x \\ 1 = 5-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases} \longrightarrow D(4; 4).$$

Câu 29: Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(0;-3)$, $B(2;1)$, $D(5;5)$ Tìm tọa độ điểm C để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- A. $C(3;1)$. B. $C(-3;-1)$. C. $C(7;9)$. D. $C(-7;-9)$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Gọi } C(x, y). \text{ Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2; 4) \\ \overrightarrow{DC} = (x-5; y-5) \end{cases}.$$

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\longrightarrow \begin{cases} 2 = x-5 \\ 4 = y-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 9 \end{cases} \longrightarrow C(7; 9).$$

Câu 30: Trong hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có $A(0; 3)$, $D(2; 1)$ và $I(-1; 0)$ là tâm của hình chữ nhật. Tìm tọa độ tung điểm của cạnh BC .

- A. $(1; 2)$. B. $(-2; -3)$. C. $(-3; -2)$. D. $(-4; -1)$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi M là tọa độ trung điểm của cạnh $AD \longrightarrow M(1; 2)$.

Gọi $N(x_N; y_N)$ là tọa độ trung điểm của cạnh BC .

Do I là tâm của hình chữ nhật $\longrightarrow I$ là trung điểm của MN .

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x_N = 2x_I - x_M = -3 \\ y_N = 2y_I - y_M = -2 \end{cases} \longrightarrow N(-3; -2).$$

Câu 31: Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $B(9; 7)$, $C(11; -1)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Tìm tọa độ vector $\overrightarrow{MN}$?

- A. $\overrightarrow{MN} = (2; -8)$. B. $\overrightarrow{MN} = (1; -4)$. C. $\overrightarrow{MN} = (10; 6)$. D. $\overrightarrow{MN} = (5; 3)$.

Lời giải

Chọn B.

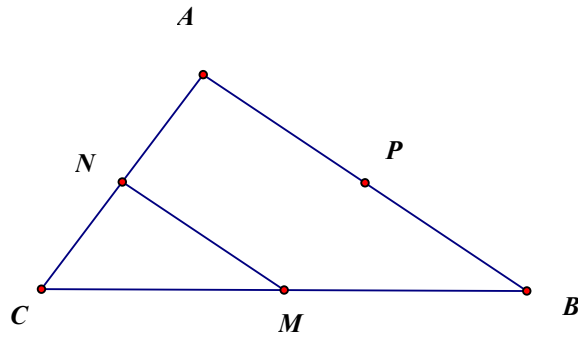
$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(2; -8) = (1; -4).$$

Câu 32: Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $M(2; 3)$, $N(0; -4)$, $P(-1; 6)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Tìm tọa độ đỉnh A ?

- A. $A(1; 5)$. B. $A(-3; -1)$. C. $A(-2; -7)$. D. $A(1; -10)$.

Lời giải

Chọn B.



Gọi $A(x; y)$.

Từ giả thiết, ta suy ra $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{MN}$. (*)

Ta có $\overrightarrow{PA} = (x+1; y-6)$ và $\overrightarrow{MN} = (-2; -7)$.

$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = -2 \\ y-6 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases} \longrightarrow A(-3; -1).$$

Câu 33: Trong hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 2)$, $B(-2; 3)$. Tìm tọa độ điểm I sao cho $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

- A. $I(1; 2)$. B. $I\left(1; \frac{2}{5}\right)$. C. $I\left(-1; \frac{8}{3}\right)$. D. $I(2; -2)$.

Lời giải

Chọn C.

$$\begin{aligned} \text{Gọi } I(x; y). \text{ Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{IA} = (1-x; 2-y) \\ \overrightarrow{IB} = (-2-x; 3-y) \end{cases} \longrightarrow 2\overrightarrow{IB} = (-4-2x; 6-2y) \\ \longrightarrow \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = (-3-3x; 8-3y). \end{aligned}$$

$$\text{Do đó từ giả thiết } \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \longrightarrow \begin{cases} -3-3x = 0 \\ 8-3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{8}{3} \end{cases}.$$

Câu 34: Trong hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2; -3)$, $B(3; 4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục hoành sao cho A, B, M thẳng hàng.

- A. $M(1; 0)$. B. $M(4; 0)$. C. $M\left(-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. D. $M\left(\frac{17}{7}; 0\right)$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Điểm } M \in Ox \longrightarrow M(m; 0). \text{ Ta có } \overrightarrow{AB} = (1; 7) \text{ và } \overrightarrow{AM} = (m-2; 3).$$

$$\text{Đề } A, B, M \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ cùng phương với } \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \frac{m-2}{1} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow m = \frac{17}{7}.$$

Câu 35: Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1;0)$, $B(0;3)$ và $C(-3;-5)$. Tìm điểm M thuộc trục hoành sao cho biểu thức $P = |2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $M(4;0)$. B. $M(-4;0)$. C. $M(16;0)$. D. $M(-16;0)$.

Lời giải

Chọn B.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} &= 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) - 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}), \forall I \\ &= \overrightarrow{MI} + 2(\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC}), \forall I. \end{aligned}$$

Chọn điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. (*)

Gọi $I(x; y)$, từ (*) ta có

$$\begin{cases} 2(1-x) - 3(0-x) + 2(-3-x) = 0 \\ 2(0-y) - 3(2-y) + 2(-5-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -16 \end{cases} \Rightarrow I(-4; -16).$$

$$\text{Khi đó } P = |2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MI}| = MI.$$

Để P nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất. Mà M thuộc trục hoành nên MI nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của I lên trục hoành $\longrightarrow M(-4; 0)$.