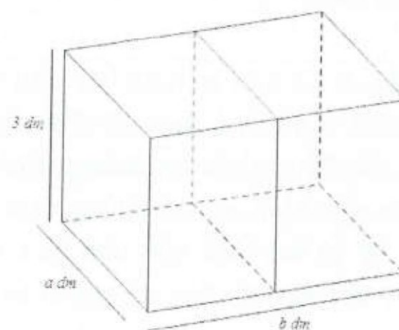


CHỦ ĐỀ 14: BÀI TOÁN THỰC TẾ HÌNH KHÔNG GIAN

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

II. CÁC DẠNG TOÁN TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Ví dụ 1: Người ta muốn thiết kế một bể cá bằng kính không có nắp với thể tích $72dm^3$ và chiều cao là $3dm$. Một vách ngăn (cung mặt kính) ở giữa, chia bể cá thành hai ngăn, với các kích thước a, b (đơn vị dm) như hình vẽ. Tính a, b để bể cá tốn ít nguyên liệu nhất (tính cả tấm kính ở giữa), coi bề dày các tấm kính như nhau và không ảnh hưởng đến thể tích của bể.



A. $a = \sqrt{24}, b = \sqrt{24}$. B. $a = 3, b = 8$.

C. $a = 3\sqrt{2}, b = 4\sqrt{2}$. D. $a = 4, b = 6$.

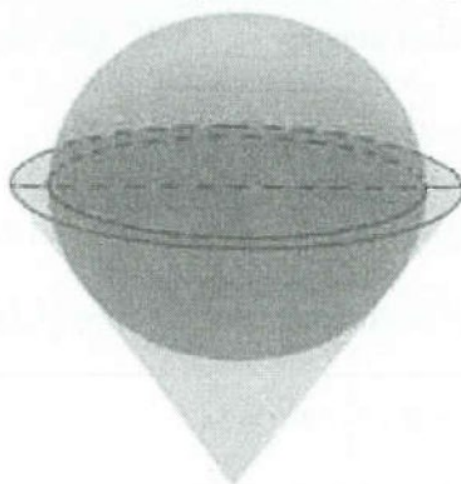
Lời giải

Thể tích của bể là $V_b = 3ab = 72 \Rightarrow ab = 24$.

Diện tích của bể cá là $S = 9a + 6b + ab = 24 + 9a + 6b \geq 24 + 2\sqrt{9a \cdot 6b} = 24 + 2\sqrt{54ab} = 96$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} ab = 24 \\ 9a = 6b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 6 \end{cases}$. **Chọn D.**

Ví dụ 2: Một bình đựng đầy nước có dạng hình nón (không có đáy). Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $18\pi (dm^3)$. Biết rằng khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và đúng một nửa của khối cầu đã chìm trong nước (hình dưới đây). Tính thể tích nước còn lại trong bình.



A. $12\pi(dm^3)$.

B. $54\pi(dm^3)$.

C. $6\pi(dm^3)$.

D. $24\pi(dm^3)$.

Lời giải

Gọi bán kính khối cầu là $R(dm)$.

Thể tích nước tràn ra ngoài bằng thể tích của nửa khối cầu

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = 2.18\pi \Rightarrow R^3 = 27 \Rightarrow R = 3(dm)$$

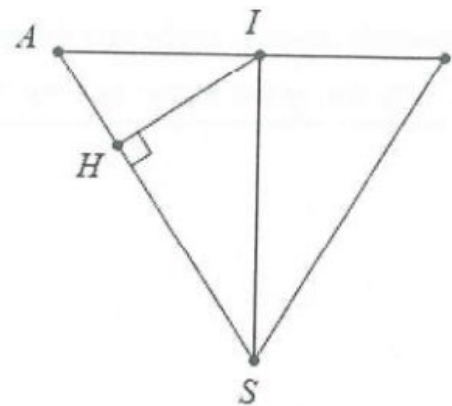
$$\Rightarrow \text{Chiều cao của bình nước là: } h = 2R = 2.3 = 6(dm)$$

Bán kính đáy của hình nón là IA và $\frac{1}{IA^2} + \frac{1}{SI^2} = \frac{1}{IH^2}$

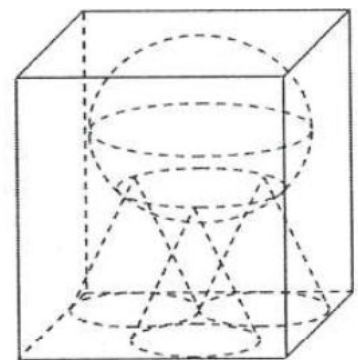
Suy ra $IA^2 = 12$. Vậy thể tích nước còn lại là

$$V = V_N - 18\pi = \frac{1}{3}\pi R_N^2 h - 18\pi = \frac{1}{3}\pi.12.6 - 18\pi = 6\pi.$$

Chọn C.



Ví dụ 3: Có một bể hình hộp chữ nhật chứa đầy nước. Người ta cho ba khối nón giống nhau có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân vào bể sao cho ba đường tròn đáy của ba khối nón tiếp xúc với nhau, một khối nón có đường tròn đáy chỉ tiếp xúc với một cạnh của đáy bể và hai khối nón còn lại có đường tròn đáy tiếp xúc với hai cạnh của đáy bể. Sau đó người ta đặt lên đỉnh của ba khối nón một khối cầu có bán kính bằng $\frac{4}{3}$ lần bán kính đáy của khối nón. Biết khối cầu vừa đủ ngập trong nước và lượng nước trào ra là $\frac{337\pi}{3}(cm^3)$. Tính thể tích nước ban đầu ở trong bể.



A. $\approx 885,2(cm^3)$.

B. $\approx 1209,2(cm^3)$.

C. $\approx 1106,2(cm^3)$.

D. $\approx 1174,2(cm^3)$.

Lời giải

Gọi r là bán kính đáy của hình nón suy ra chiều cao nón là $h = r$ (do thiết diện là tam giác vuông cân).

Chiều dài của khối hộp là $b = 4r$; bán kính của khối cầu là $R = \frac{4}{3}r$.

$$\text{Thể tích nước bị tràn là } 3 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{337\pi}{3} \Rightarrow r = 3(cm).$$

Gọi A, B, C là tâm của 3 đáy của khối nón suy ra $\triangle ABC$ đều cạnh $2r = R_{ABC} = \frac{2r}{\sqrt{3}}$

$$\text{Chiều rộng khối hộp là } a = 2r + \frac{2r\sqrt{3}}{2} = r(2 + \sqrt{3})$$

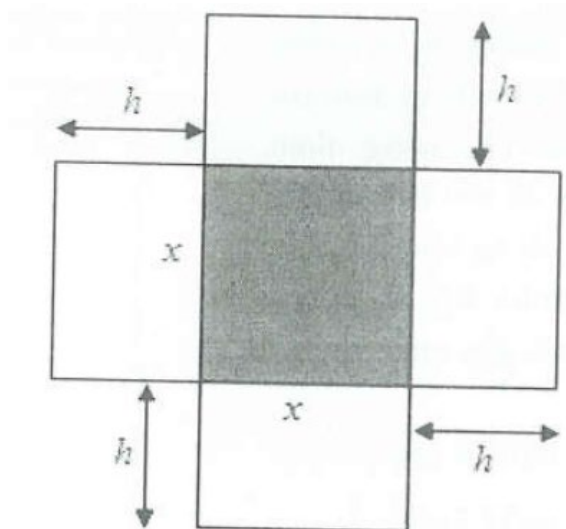
3 đỉnh nón chạm mặt cầu tại các điểm $M, N, P \Rightarrow \triangle MNP = \triangle ABC$

$$d(I;(MNP)) = \sqrt{R^2 - R_{(ABC)}^2} \text{ (với } I \text{ là tâm mặt cầu) do đó } d(I;(MNP)) = \frac{2}{3}r$$

$$\text{Suy ra chiều cao của khối trụ là } c = R + \frac{2}{3}r + r = 3r$$

$$\text{Thể tích nước ban đầu là } abc = 12(2 + \sqrt{3})r^3 = 1209,2(\text{cm}^3). \text{ Chọn B.}$$

Ví dụ 4: Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông theo hình vẽ. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh x (cm), chiều cao h (cm) và thể tích 500 cm^3 . Tính độ dài cạnh hình vuông x sao cho chiếc hộp làm ra tốn ít bìa các tông nhất.



A. $x = 5 \text{ cm.}$

B. $x = 10 \text{ cm.}$

C. $x = 2 \text{ cm.}$

D. $x = 3 \text{ cm.}$

Lời giải

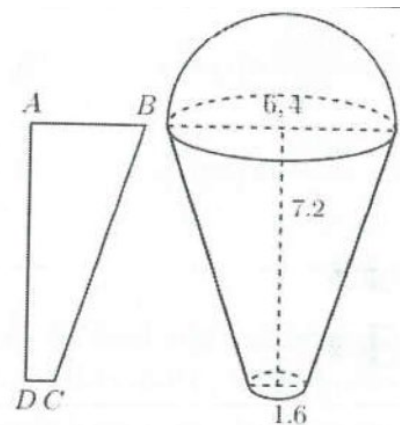
$$\text{Theo giả thiết ta có thể tích chiếc hộp là } V = x^2 h = 500 \Rightarrow h = \frac{500}{x^2}$$

$$\text{Diện tích các mảnh cát tông là } f(x) = x^2 + 4hx = x^2 + \frac{2000}{x}$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = x^2 + \frac{2000}{x} (x > 0) \text{ ta có: } f'(x) = 2x - \frac{2000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

Từ đó ta có: $f(x)$ nhỏ nhất khi $x = 10 \text{ cm.}$ **Chọn B.**

Ví dụ 5: Một cơ sở sản xuất kem chuẩn bị làm 1000 chiếc kem giống nhau theo đơn đặt hàng. Cốc đựng kem có dạng hình tròn xoay được tạo thành khi quay hình thang $ABCD$ vuông tại A và D xung quanh trục AD (xem hình vẽ). Chiếc cốc có bề dày không đáng kể, chiều cao 7,2 cm, đường kính miệng cốc bằng 6,4 cm, đường kính đáy cốc bằng 1,6 cm. Kem được đổ đầy cốc và dư ra phía ngoài một lượng có dạng nửa hình cầu, có bán kính bằng bán kính miệng cốc. Cơ sở đó cần dùng lượng kem **gần nhất với giá trị nào** trong các giá trị sau?



- A. 132 dm³. B. 293 dm³ C. 954 dm⁵. D. 170 dm³.

Lời giải

Thể tích của một chiếc kem cần tính bao gồm

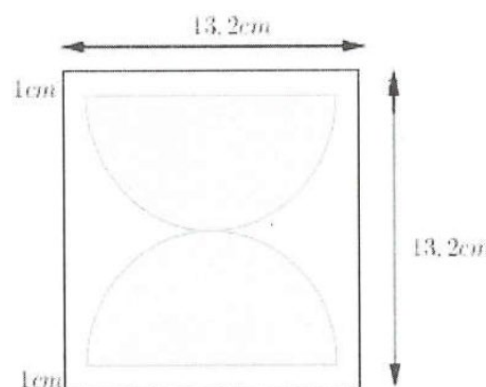
Thể tích của hình nón cụt có bán kính đáy lớn $R_1 = 3,2$ cm, bán kính đáy nhỏ $r_1 = 0,8$ cm và chiều cao $h = 7,2$ cm.

Thể tích của nửa khối cầu có bán kính $R = 3,7$ cm.

$$\text{Suy ra } V = \frac{1}{3} \pi h (R_1^2 + R_1 r_1 + r_1^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) \approx 170 \text{ cm}^3.$$

Vậy thể tích của 1000 chiếc kem là $170 \cdot 10^3 \text{ cm}^3 = 170 \text{ dm}^3$. **Chọn D.**

Ví dụ 6: Một xưởng sản xuất muốn tạo ra những chiếc đồng hồ cát bằng thủy tinh có dạng hình trụ, phần chứa cát là hai nửa hình cầu bằng nhau. Hình vẽ bên với các kích thước đã cho là bản thiết kế thiết diện qua trục của chiếc đồng hồ này (phần không tô màu làm bằng thủy tinh). Khi đó, lượng thủy tinh làm chiếc đồng hồ cát gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau?



- A. 711,6 cm³. B. 1070,8 cm³.
C. 602,2 cm³. D. 6021,3 cm³.

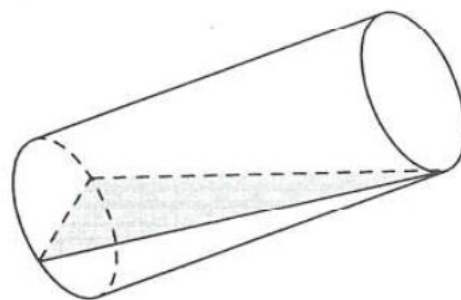
Lời giải

Thể tích của hình trụ là $V_1 = \pi r^2 h = \pi \cdot 6,6^2 \cdot 13,2 = 1806,39 \text{ cm}^3$.

Thể tích hình cầu chứa cát là $V_2 = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{13,2 - 2}{2} \right)^3 = 735,62 \text{ cm}^3$.

Vậy lượng thủy tinh cần phải làm là $V = V_1 - V_2 = 1070,77 \text{ cm}^3$. **Chọn B.**

Ví dụ 7: Một chiếc cốc hình trụ có đường kính đáy 6 cm, chiều cao 15 cm chứa đầy nước. Nghiêng cốc cho nước chảy từ từ ra ngoài đến khi mép nước ngang với đường kính của đáy cốc. Khi đó diện tích của bề mặt nước trong cốc bằng



- A. $\frac{9\sqrt{26}}{10}\pi(\text{cm}^2)$. B. $9\sqrt{26}\pi(\text{cm}^2)$.
C. $\frac{9\sqrt{26}}{2}\pi(\text{cm}^2)$. D. $\frac{9\sqrt{26}}{5}\pi(\text{cm}^2)$.

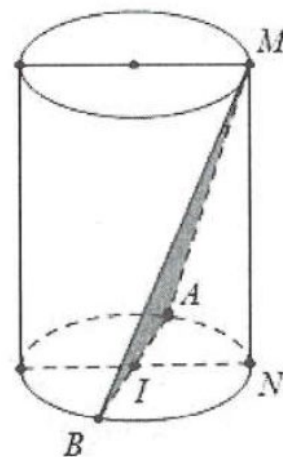
Lời giải

Chọn hệ trục như hình vẽ và cắt mặt nước theo thiết diện là tam giác vuông ABM . Hình chiếu vuông góc của mặt phẳng thiết diện xuống đáy là nửa đường tròn đường kính AB .

Theo công thức về hình chiếu ta có: $S \cos \varphi = \frac{1}{2} S_{(C)} = \frac{1}{2} \cdot \pi R^2 = \frac{9}{2} \pi$

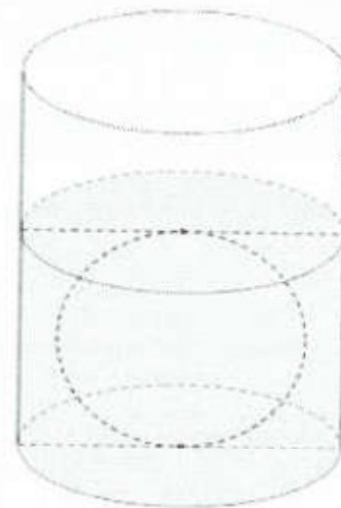
trong đó $\varphi = \widehat{(MAB);(NAB)}$

Lại có: $\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$. Vậy $S = \frac{9\pi\sqrt{26}}{2}$. **Chọn C.**



Ví dụ 8: Người ta thả một viên billiards snooker có dạng hình cầu với bán kính nhỏ hơn 4,5cm vào một chiếc cốc hình trụ đang chứa nước thì viên billiards đó tiếp xúc với đáy cốc và tiếp xúc với mặt nước sau khi dâng (tham khảo hình vẽ bên). Biết rằng bán kính của phần trong đáy cốc bằng 5,4 cm và chiều cao của mực nước ban đầu trong cốc bằng 4,5 cm. Bán kính của viên billiards đó bằng

- A. 4,2 cm. B. 3,6 cm.
C. 2,6 cm. D. 2,7 cm.



Lời giải

Thể tích mực nước ban đầu là: $V_1 = \pi r_1^2 h_1 = \pi \cdot 5,4^2 \cdot 4,5$.

Gọi R là bán kính của viên bi ta có tổng thể tích của nước và bi sau khi thả viên bi vào trong cốc là:

$$V = \pi r_1^2 \cdot (2R) = \pi \cdot 5,4^2 \cdot 2R$$

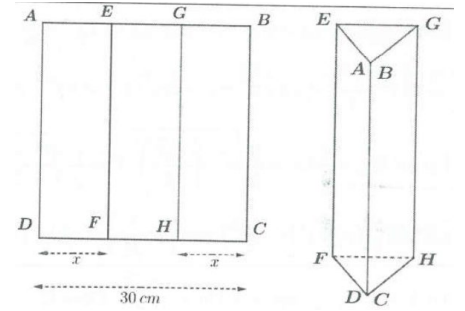
Thể tích của quả cầu là: $V_{(C)} = \frac{4}{3} \pi R^3$.

$$\text{Ta có: } V = V_1 + V_2 \Leftrightarrow 5,4^2 \cdot 4,5 + \frac{4}{3} R^3 = 5,4^2 \cdot 2R$$

Giải phương trình trên với điều kiện $R < 4,5 \Rightarrow R = 2,7$ cm. **Chọn D.**

Ví dụ 9: Một tấm kẽm hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 30 cm. Người ta gập tấm kẽm theo hai cạnh EF và GH cho đến khi AD và BC trùng nhau như hình vẽ bên để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Giá trị của x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất là:

- A. $x = 5$ cm. B. $x = 9$ cm.
C. $x = 8$ cm. D. $x = 10$ cm.



Lời giải

Thể tích khối lăng trụ được tạo thành là $V = S_{FDH} \cdot AD$.

Thể tích đạt giá trị lớn nhất khi S_{NAD} lớn nhất.

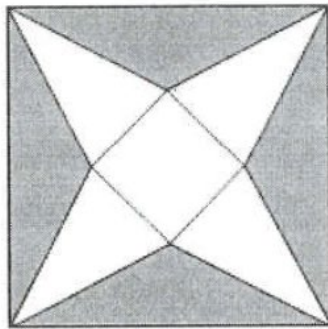
Theo hệ thức Hê-rông ta có: $S_{NAD} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{15 \cdot (15-x)^2 \cdot [15-(30-2x)]}$

Suy ra $S = \sqrt{15(15-x)^2(2x-15)}$. Áp dụng bất đẳng thức $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ ta có:

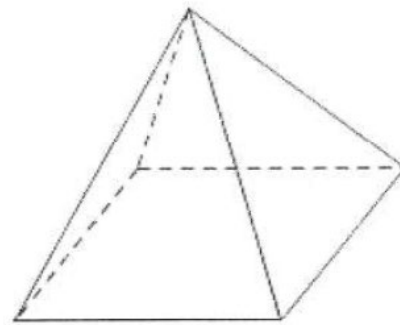
$$(15-x)(15-x)(2x-15) \leq \left(\frac{15-x+15-x+2x-15}{3}\right)^3 = 125.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow 15-x = 2x-15 \Leftrightarrow x = 10$ cm. **Chọn D.**

Ví dụ 10: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 1 (m) như hình vẽ dưới đây. Người ta cắt phần tô đậm của tấm nhôm rồi gập thành một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng x (m). Tìm giá trị của x để khối chóp nhận được có thể tích lớn nhất.



(Hình 1)



(Hình 2)

- A. $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$. B. $x = \frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$. D. $x = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Đặt cạnh bên là y và cạnh đáy của chóp đều là x

Ta có: Độ dài đường cao của mặt bên là: $a = \sqrt{y^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$

Khi đó theo hình 1 ta được: $2a + x = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}} + x = \sqrt{2}$ (bằng đường chéo hình vuông).

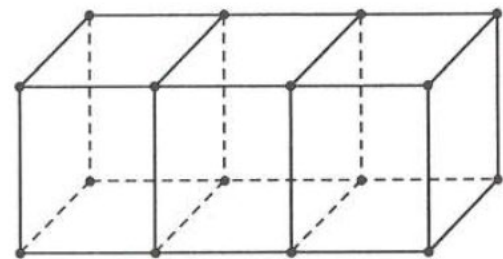
$$\Rightarrow 4\left(y^2 - \frac{x^2}{4}\right) = (\sqrt{2} - x)^2 = x^2 - 2x\sqrt{2} + 2 \Rightarrow 4y^2 = 2x^2 - 2x\sqrt{2} + 2.$$

$$\text{Lại có: } V_{chop} = \frac{1}{3}h.S_d = \frac{1}{3}\sqrt{y^2 - \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2} \cdot x^2 = \frac{x^2}{3}\sqrt{\frac{1-x\sqrt{2}}{2}} = \frac{x^2}{3\sqrt{2}}\sqrt{1-x\sqrt{2}}$$

$$\text{Xét hàm } f(x) = x^4(1-x\sqrt{2}) \text{ trên } \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ ta có: } f'(x) = 5x^4\sqrt{2} - 4x^3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{2}}{5}.$$

Từ đó suy ra $V_{\max}$ đạt được khi $x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$. **Chọn C.**

Ví dụ 11: Một người xây nhà xưởng hình hộp chữ nhật có diện tích mặt sàn là 1152 m^2 và chiều cao cố định. Người đó xây các bức tường xung quanh và bên trong để ngăn nhà xưởng thành ba phòng hình chữ nhật có kích thước như nhau (không kể trần nhà). Vậy cần phải xây các phòng theo kích thước nào để tiết kiệm chi phí nhất (bỏ qua độ dày của các bức tường).



A. $16 \times 24 \text{ m}$.

B. $8 \times 48 \text{ m}$.

C. $12 \times 32 \text{ m}$.

D. $24 \times 32 \text{ m}$.

Lời giải

Gọi h là chiều cao cố định của nhà xưởng. Và a, b lần lượt là chiều dài, chiều rộng của mặt sàn.

Xét một phòng sau khi bị ngăn bởi tường, khi đó phòng là một hình chữ nhật có “chiều cao h , kích thước

hai cạnh đáy là $\frac{a}{3}, b$ ” $\Rightarrow$ diện tích xây xưởng là

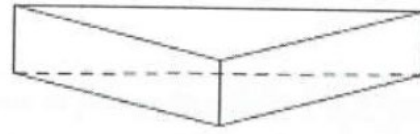
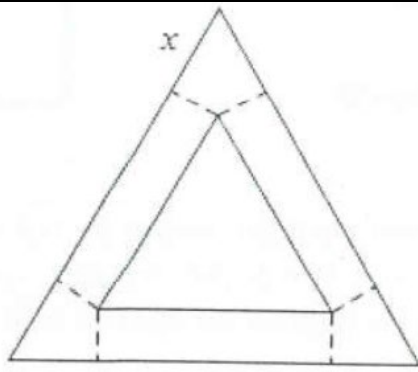
$$S = 6 \cdot \frac{a}{3} \cdot b + 6 \cdot \frac{a}{3} \cdot h + 4 \cdot b \cdot h = 2ab + 2h(a + 2b).$$

$$\text{Mà } ab = 1152 \Leftrightarrow b = \frac{1152}{a} \text{ nên suy ra } a + 2b = a + \frac{2304}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{2304}{a}} = 96.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } a = \frac{2304}{a} \Leftrightarrow a = 48. \text{ Do đó } S_{\min} = 192h + 2304.$$

Vậy cần xây các phòng theo kích thước $\frac{a}{3} \times b = 16 \times 24 \text{ m}$ thì chi phí sẽ thấp nhất. **Chọn A.**

Ví dụ 12: Cắt ba góc của một tam giác đều cạnh a các đoạn bằng x , $\left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$ phần còn lại là một tam giác đều bên ngoài là các hình chữ nhật, rồi gấp các hình chữ nhật lại tạo thành khối lăng trụ tam giác đều như hình vẽ. Tìm độ dài x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất.



A. $x = \frac{a}{3}$.

B. $x = \frac{a}{4}$.

C. $x = \frac{a}{5}$.

D. $x = \frac{a}{6}$.

Lời giải

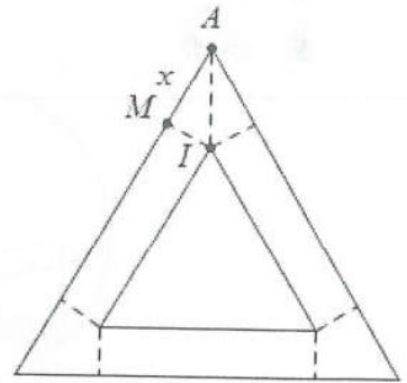
Xét $\triangle AMI$ như hình vẽ, đặt $AM = x > 0, \widehat{MAI} = 30^\circ \Rightarrow MI = \frac{x}{\sqrt{3}}$

Lăng trụ tạo thành là lăng trụ tam giác đều cạnh đáy

$$a - 2x, \left(0 < x < \frac{a}{2} \right)$$

Chiều cao là: $h = \frac{x}{\sqrt{3}}$ do đó thể tích khối lăng trụ là:

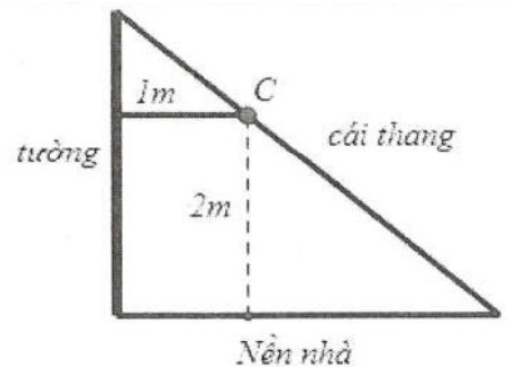
$$V = \frac{(a - 2x)^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{a^2 x - 4ax^2 + 4x^3}{4}$$



Ta chọn $a = 1$. Xét $f(x) = x - 4x^2 + 4x^3 \left(0 < x < \frac{1}{2} \right) \Rightarrow f'(x) = 1 - 8x + 12x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{ (loại)} \\ x = \frac{1}{6} \end{cases}$

Lại có: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = 0; f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{27}$ nên $\underset{\left(0; \frac{1}{2}\right)}{\text{Max}} f(x) = \frac{2}{27}$ khi $x = \frac{1}{6} = \frac{a}{6}$. **Chọn D.**

Ví dụ 13: Ông An cần sản xuất một cái thang để treo qua một bức tường nhà. Ông muốn một cái thang luôn được đặt đi qua vị trí C biết rằng điểm C cao 2m so với nền nhà và điểm C cách tường nhà 1m (như hình vẽ bên). Giả sử kinh phí để sản xuất thang là 400.000 đồng/ 1 mét dài. Hỏi ông An cần ít nhất bao nhiêu tiền để sản xuất 1 cái thang? (kết quả làm tròn đến hàng nghìn đồng)



A. 1.400.000 đồng.

B. 800.000 đồng.

C. 2.160.000 đồng.

D. 1.665.000 đồng.

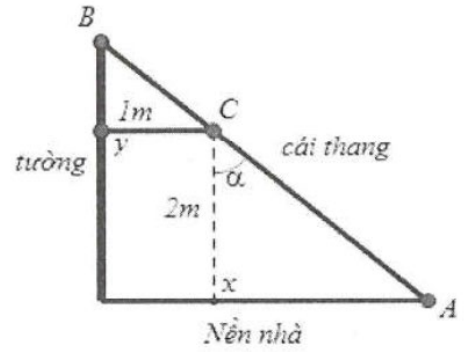
Lời giải

Đặt $\alpha = \widehat{ACx}$ khi đó $AC = \frac{2}{\cos \alpha}$; $\widehat{BCy} = 90^\circ - \alpha$

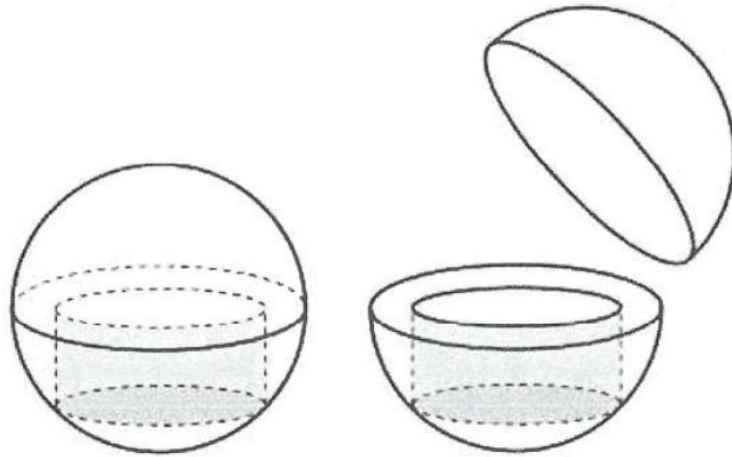
Do đó $BC = \frac{1}{\cos(90^\circ - \alpha)} \Rightarrow AB = \frac{2}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} (\alpha \in (0; 90^\circ))$

Ta có: $AB' = \frac{2 \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = 0 \Leftrightarrow 2 \sin^3 \alpha = \cos^3 \alpha$

$\Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow T = AB_{\min} \cdot 400000 \approx 1665000$. **Chọn D.**



Ví dụ 14: Một công ty mỹ phẩm chuẩn bị ra một mẫu sản phẩm dưỡng da mới mang tên Ngọc Trai với thiết kế một khối cầu như viên ngọc trai, bên trong là một khối trụ nằm trong nửa khối cầu để đựng kem dưỡng như hình vẽ. Theo dự kiến, nhà sản xuất có dự định để khối cầu có bán kính là $R = 3\sqrt{3}$ cm. Tìm thể tích lớn nhất của khối trụ đựng kem để thể tích thực ghi trên bìa hộp là lớn nhất (với mục đích thu hút khách hàng).



A. $108\pi \text{ cm}^3$.

B. $54\pi \text{ cm}^3$.

C. $18\pi \text{ cm}^3$.

D. $45\pi \text{ cm}^3$.

Lời giải

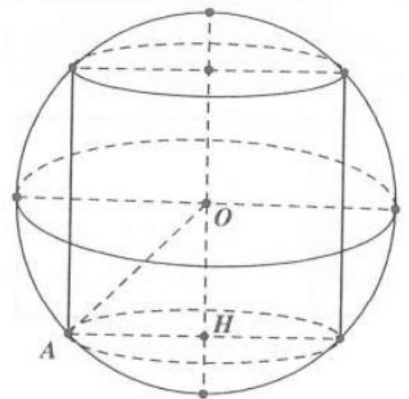
Xét khối trụ nội tiếp khối cầu. Gọi h và r là chiều cao và bán kính đáy của hình trụ đã cho

Khi đó ta có: $r^2 = R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2$ trong đó $h \in (0; 2R)$.

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \frac{\pi}{4} (4R^2 - h^2) \cdot h$.

Lại có $V' = \frac{\pi}{4} (4R^2 - 3h^2) = 0 \Rightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.

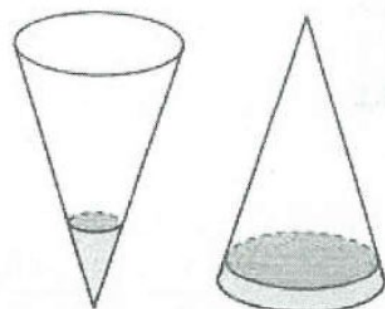
Khi đó $V_{\max} = \frac{4\pi\sqrt{3}R^3}{9}$.



Do khối trụ chỉ nằm trong nửa hộp kem nên $V_{\max} = \frac{2\pi\sqrt{3}R^3}{9} = 54\pi$. Chọn B.

Ví dụ 15: Một cái phễu có dạng hình nón. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của lượng nước trong phễu bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao của phễu. Hỏi nếu bịt kín miệng phễu rồi đảo lộn phễu lên thì chiều cao của nước bằng bao nhiêu? Biết rằng chiều cao của phễu bằng 15 cm.

- A. 0,3 (cm). B. 0,5 (cm).
C. 0,216 (cm). D. 0,188 (cm).



Lời giải

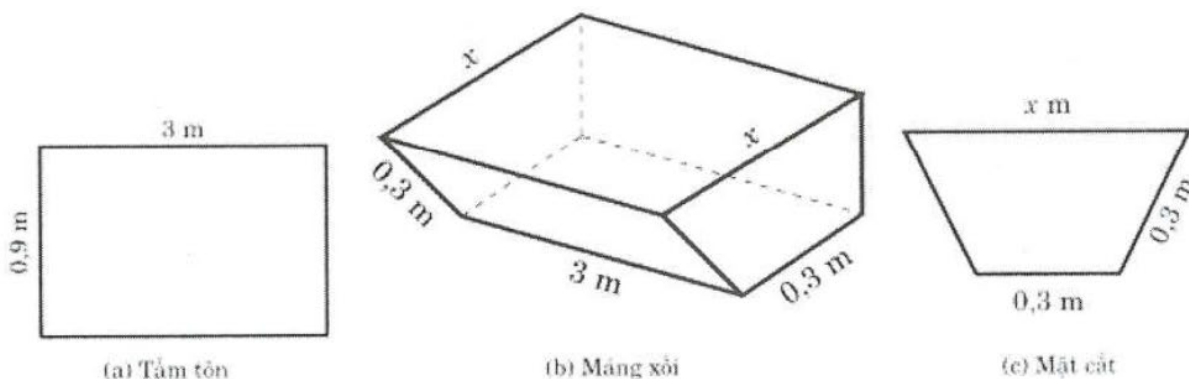
Gọi V là thể tích của phễu. Khi đó thể tích nước trong bình là $V_1 \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \left(\frac{h_1}{h}\right)^3 = \frac{1}{27}$ và thể tích phần

không chứa nước là $V_2 = \frac{26V}{27}$. Ta có: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$; $\frac{V_2}{V} = \left(\frac{h_2}{h}\right)^3$ (với h_2 là chiều cao cần tính)

Suy ra $\frac{26}{27} = \left(\frac{h_2}{h}\right)^3 \Rightarrow h_2 = h\sqrt[3]{\frac{26}{27}} \Rightarrow h_{ct} = h - h_2 \approx 0,188(\text{cm})$ (với h_{ct} là chiều cao cần tìm).

Chọn D.

Ví dụ 16: Để làm một máng xối nước, từ một tấm tôn kích thước $0,9 \times 3$ người ta gấp tấm tôn đó như hình vẽ dưới, biết mặt cắt của máng xối (bởi mặt phẳng song song với hai mặt đáy) là một hình thang cân và máng xối là một hình lăng trụ, có chiều cao bằng chiều dài của tấm tôn. Hỏi x (m) bằng bao nhiêu thì thể tích máng xối lớn nhất?

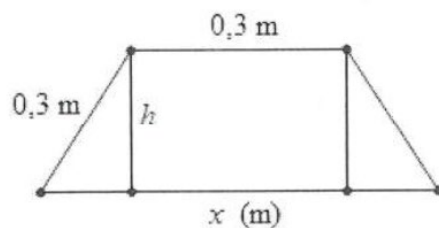


- A. $x = 0,5$. B. $x = 0,4$. C. $x = 0,6$. D. $x = 0,65$.

Lời giải

Mặt đáy của máng xối nước thang cân có đáy lớn là x đáy bé là 0,3 m

Cạnh bên của hình thang là $0,3m$ suy ra chiều cao của hình thang là $h = \sqrt{0,3^2 - \left(\frac{x-0,3}{2}\right)^2}$



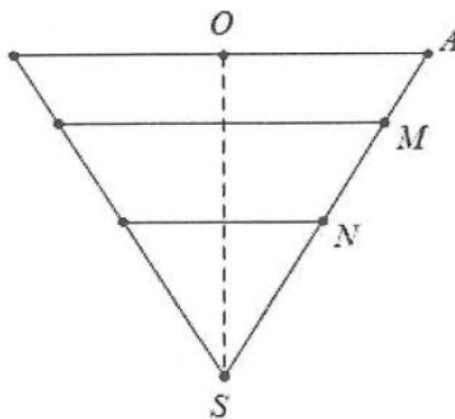
Khi đó $S_{ht} = \frac{0,3+x}{2} \cdot h = \frac{x+0,3}{2} \cdot \sqrt{0,3^2 - \left(\frac{x-0,3}{2}\right)^2} = f(x) (x > 0,3)$

Đến đây chúng ta có thể xét hàm $f(x)$ hoặc thay các giá trị x đề bài đã cho ta được

$$f(0,5) = \frac{2\sqrt{2}}{25}; f(0,4) \approx 0,105; f(0,6) \approx 0,117; f(0,65) \approx 0,1158.$$

Do đó ta thấy $f_{\max} = f(0,6)$. **Chọn C.**

Ví dụ 17: Một bể nước lớn của khu công nghiệp có phần chứa nước là một khối nón đỉnh S phía dưới (hình vẽ), đường sinh SA = 27 m. Có một lần lúc bể chứa đầy nước, người ta phát hiện nước trong bể không đạt yêu cầu về vệ sinh nên lãnh đạo khu công nghiệp cho thoát hết nước để làm vệ sinh bể chứa. Công nhân cho thoát nước ba lần qua một lỗ ở đỉnh S. Lần thứ nhất khi mực nước tới điểm M thuộc SA thì dừng, lần thứ hai khi mực nước tới điểm N thuộc SA thì dừng, lần thứ ba mới thoát hết nước. Biết rằng lượng nước mỗi lần thoát bằng nhau. Tính độ dài đoạn MN.



A. $27(\sqrt[3]{2}-1)m$.

B. $9\sqrt[3]{9}(\sqrt[3]{4}-1)m$.

C. $9\sqrt[3]{9}(\sqrt[3]{2}-1)m$.

D. $9\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{2}-1)m$.

Lời giải

Gọi V_1 ; V_2 lần lượt là lượng nước **còn lại** sau lần thoát nước thứ nhất và thứ hai, V là thể tích nước ban đầu.

Sau lần thoát nước thứ nhất còn lại: $V_1 = \frac{2V}{3} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{2}{3} = \left(\frac{SM}{SA}\right)^3$. Do đó $SM = 27\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

Sau lần thoát nước thứ hai còn lại $V_2 = \frac{V}{3} \Rightarrow \frac{V_2}{V} = \frac{1}{3} = \left(\frac{SN}{SA}\right)^3 \Rightarrow SN = 9\sqrt[3]{9}$.

Vậy $MN = SM - SN = 9\sqrt[3]{9}(\sqrt[3]{2} - 1)$. **Chọn C.**

Ví dụ 18: Một cái phễu có dạng hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Đổ nước vào phễu sao cho chiều cao của mực nước bằng $2\sqrt[3]{98}(cm)$. Sau đó ta đẩy nắp phễu và lật úp lại (lấy $ABCD$ là mặt đáy của phễu) thì lúc này chiều cao của mực nước là $4(cm)$. Hỏi chiều cao của cái phễu là bao nhiêu?

A. 16 (cm). B. 12 (cm). C. 10 (cm). D. 14 (cm).

Lời giải

Gọi h là chiều cao của chóp tứ giác, V là thể tích của chóp; V_n là thể tích của nước đổ vào chóp.

Ban đầu $\frac{V_n}{V} = \left(\frac{h_1}{h}\right)^3$; sau khi lật ngược phễu ta có: $\frac{V - V_n}{V} = \left(\frac{h - h_2}{h}\right)^3$ với $h_1 = 2\sqrt[3]{98}$; $h_2 = 4$

Cộng vế theo vế ta được $1 = \frac{784}{h^3} + \frac{(h-4)^3}{h^3} \Rightarrow h = 10cm$. **Chọn C.**

Ví dụ 19: Kim tự tháp Cheops (có dạng hình chóp) là kim tự tháp cao nhất ở Ai Cập. Chiều cao của kim tự tháp này là 144, đáy của kim tự tháp là hình vuông có cạnh dài 230. Các lối đi và phòng bên trong của kim tự tháp chiếm 30% thể tích của kim tự tháp. Biết một lần vận chuyển gồm 10 xe, 1 xe chở 6 tấn đá, và khối lượng riêng của đá bằng $2,5.10^3 kg/m^3$. Số lần để vận chuyển đá cho việc xây dựng kim tự tháp là

A. 740600. B. 7406. C. 74060. D. 76040.

Lời giải

Thể tích của Kim tự tháp không kể các lối đi và phòng bên trong của kim tự tháp là:

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 230^2 = 2539200(m^3).$$

Thể tích của Kim tự tháp kể cả các lối đi và phòng bên trong của kim tự tháp là:

$$(100\% - 30\%) \cdot 2539200 = 1777440(m^3).$$

Gọi n là số lần vận chuyển đá cho việc xây dựng kim tự tháp, ta có:

$$n \cdot 10 \cdot 6000 : 2,5 \cdot 10^3 = 1777440 \Leftrightarrow n = 74060 \text{ (lần)}. \text{ **Chọn C.**}$$

Ví dụ 20: Một cái trục lăn sơn nước có dạng một hình trụ. Đường kính của đường tròn đáy là $5cm$, chiều dài lăn là $23cm$ (hình bên). Sau khi lăn tròn 15 vòng thì trục lăn tạo nên sân phẳng một diện tích là



- A. $1735\pi \text{ cm}^2$. B. $3450\pi \text{ cm}^2$. C. $862,5\pi \text{ cm}^2$. D. $1725\pi \text{ cm}^2$.

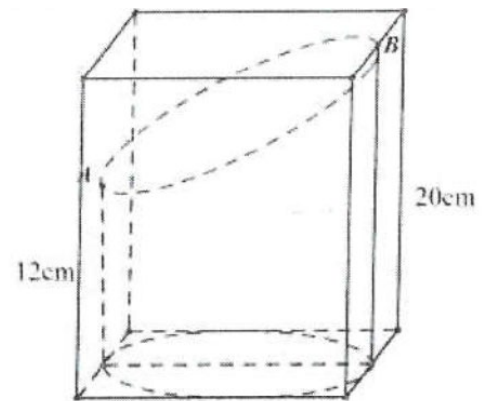
Lời giải

Chu vi đáy của lăn trụ là: $C = 2\pi R = 5\pi \text{ (cm)}$

Khi lăn tròn 15 vòng thì tạo nên sân phẳng có chiều dài là: $15.C = 15.5\pi = 75\pi \text{ (cm)}$

Diện tích của sân phẳng là: $S = 75\pi.23 = 1725\pi \text{ (cm}^2\text{)}$. **Chọn D.**

Ví dụ 21: Một khúc gỗ hình trụ có bán kính R bị cắt bởi một mặt phẳng không song song với đáy ta được thiết diện là một hình elip. Khoảng cách từ điểm A đến mặt đáy là 12 cm , khoảng cách từ điểm B đến mặt đáy là 20 cm . Đặt khúc gỗ đó vào trong hình hộp chữ nhật có chiều cao bằng 20 cm chứa đầy nước sao cho đường tròn đáy của khúc gỗ tiếp xúc với các cạnh đáy của hình hộp chữ nhật. Sau đó, người ta đo lượng nước còn lại trong hình hộp chữ nhật là 2 lít . Tính bán kính của khúc gỗ (giả sử khúc gỗ không thấm nước và kết quả làm tròn đến phần hàng chục).



- A. $R = 8,2 \text{ cm}$. B. $R = 4,8 \text{ cm}$. C. $R = 6,4 \text{ cm}$. D. $R = 5,2 \text{ cm}$.

Lời giải

Đường tròn nội tiếp hình chữ nhật $\Rightarrow$ hình chữ nhật là hình vuông cạnh $2R$.

Thể tích của hình hộp chữ nhật là $V_{h.h} = S.h = 20.(2R)^2 = 80R^2 \text{ cm}^3$ (1).

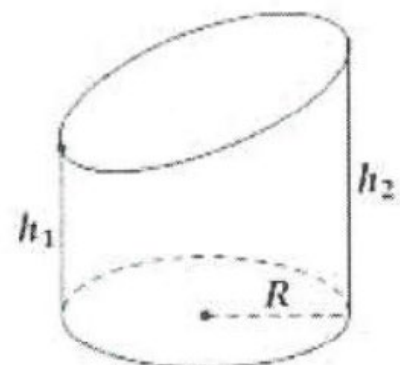
Công thức tính nhanh khối tròn xoay $\longrightarrow$ khối trụ cụt có bán kính R .

Diện tích xung quanh của khối trụ cụt là $S_{xq} = \pi R(h_1 + h_2)$.

Thể tích của khối trụ cụt là $V = \pi R^2 \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right)$.

Với bài toán trên, khúc gỗ là một khối trụ cụt có chiều cao

$$\begin{cases} h_1 = 12 \text{ cm} \\ h_2 = 20 \text{ cm} \end{cases}$$



$$\text{Thể tích của khúc gỗ là } V_g = \pi R^2 \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right) = 16\pi R^2 \text{ cm}^3 \quad (2).$$

$$\text{Vì đặt khúc gỗ vào trong hình hộp thì lượng nước còn lại chính bằng } V_{h.h} - V_g = 2000 \text{ cm}^3 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) suy ra } 80R^2 - 16\pi R^2 = 2000 \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{2000}{80 - 16\pi}} \approx 8,2 \text{ cm. Chọn A.}$$

Ví dụ 22: Người ta dùng một tấm sắt tây hình chữ nhật có kích thước $30 \times 48 \text{ cm}$ để làm một cái hộp không nắp bằng cách cắt bỏ đi bốn hình vuông bằng nhau ở bốn góc rồi gấp lên. Thể tích lớn nhất của hộp là
A. 3886 cm^3 . **B.** 3880 cm^3 . **C.** 3900 cm^3 . **D.** 3888 cm^3 .

Lời giải

Gọi x là độ dài cạnh hình vuông bị cắt. Khi đó, thể tích khối hộp là $V = x(30 - 2x)(48 - 2x)$.

Xét hàm số $f(x) = x(30 - 2x)(48 - 2x)$. với $x \in (0; 15)$. Ta có $f'(x) = 12(x^2 - 26x + 120)$.

$$\text{Phương trình } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 15 \\ x^2 - 26x + 120 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 15 \\ (x - 6)(x - 20) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $f(6) = 3888 \Rightarrow V_{\max} = 3888 \text{ cm}^3$. **Chọn D.**

Ví dụ 23: Người ta muốn xây một bể chứa nước dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3} \text{ m}^3$ đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công xây bể là 500.000 đồng/m^2 . Chi phí thuê nhân công thấp nhất là:
A. 150 triệu đồng. **B.** 75 triệu đồng. **C.** 60 triệu đồng. **D.** 100 triệu đồng.

Lời giải

Gọi chiều rộng của hình chữ nhật đáy bể là $x \text{ (m)}$ suy ra chiều dài của hình chữ nhật là $2x \text{ (m)}$.

$$\text{Gọi } h \text{ là chiều cao của bể nên ta có } V = S.h = 2x^2.h = \frac{500}{3} \Rightarrow x^2.h = \frac{250}{3} \Leftrightarrow h = \frac{250}{3x^2}$$

$$\text{Diện tích của bể là } S = 2.h.x + 2.2h.x + 2x^2 = 2x^2 + 6.hx = 2x^2 + 6.\frac{250}{3x^2}.x = 2x^2 + \frac{500}{x}.$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có } 2x^2 + \frac{500}{x} = 2x^2 + \frac{250}{x} + \frac{250}{x} \geq 3\sqrt[3]{2x^2 \cdot \frac{250}{x} \cdot \frac{250}{x}} = 150.$$

$$\text{Dấu } = \text{ xảy ra khi } 2x^2 = \frac{250}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{125} \Rightarrow \text{chi phí thấp nhất thuê nhân công là } 150 \cdot \frac{1}{2} = 75 \text{ triệu đồng.}$$

Chọn B.

Ví dụ 24: Một công ty dự kiến chi 1 tỷ đồng để sản xuất các thùng sơn hình trụ có dung tích 5 lít. Biết rằng chi phí để làm mặt xung quanh của thùng đó là 100.000 đ/m^2 , chi phí để làm mặt đáy là 120.000 đ/m^2 . Hãy

tính số thùng sơn tối đa mà công ty đó sản xuất được (giả sử chi phí cho các mối nối không đáng kể)

- A. 12525 thùng. B. 18209 thùng. C. 57582 thùng. D. 58135 thùng.

Lời giải

Gọi r và h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của 1 thùng sơn.

Suy ra dung tích thùng sơn là $V = \pi r^2 h = 0,005 (m^3)$

Diện tích xung quanh của thùng là $S_{xq} = 2\pi rh$, diện tích 2 đáy là $S_d = 2\pi r^2$

Chi phí là $T = 2\pi rh \cdot 100 + 2\pi r^2 \cdot 120$ ta sẽ tìm $T_{\min}$ khi đó $T = 40\pi (5rh + 6r^2)_{\min} \Leftrightarrow F = 5rh + 6r^2$ nhỏ nhất

$$\text{Ta có } F = 5 \cdot \frac{0,005}{\pi r} + 6r^2 = \frac{1}{80\pi r} + \frac{1}{80\pi r} + 6r^2 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{80\pi r} \cdot \frac{1}{80\pi r} \cdot 6r^2} = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{3200\pi^2}}$$

Chi phí ít nhất thì sẽ sản xuất được nhiều thùng nhất

Khi đó số thùng tối đa sản xuất được là: $n = \frac{1.000.000}{T_{\min}} = 58135$ thùng. **Chọn D.**

Ví dụ 25: Một người muốn làm một chiếc thùng dạng hình hộp chữ nhật không nắp, đáy là hình vuông và có thể tích bằng $2,16/m^3$. Biết giá của vật liệu làm đáy và mặt bên của thùng lần lượt là 90 000 đồng/ m^2 và 36 000 đồng/ m^2 . Để làm được chiếc thùng với chi phí mua vật liệu thấp nhất thì người thợ phải chọn các kích thước của chiếc thùng là bao nhiêu?

- A. Cạnh đáy 1,5 m và chiều cao 0,96 m. B. Cạnh đáy 1,2 m và chiều cao 1,5 m.
C. Cạnh đáy 1,0 m và chiều cao 1,7 m. D. Cạnh đáy 2 m và chiều cao 0,54 m.

Lời giải

Gọi cạnh đáy của hình hộp chữ nhật là x và chiều cao là y

Ta có: $V = x^2 y = 2,16 m^3, S_d = x^2; S_{xq} = 4xy$

$$\text{Khi đó } T = 90x^2 + 36 \cdot (4xy) = 90x^2 + \frac{311,04}{x} = 90x^2 + \frac{155,52}{x} + \frac{155,52}{x} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{90 \cdot 155,52^2} = 388,8$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow 90x^2 = \frac{155,52}{x} \Leftrightarrow x = \frac{6}{5} = 1,2; y = 1,5. \text{ Chọn B.}$$

Ví dụ 26: Gia đình An xây bể hình trụ có thể tích $150 m^3$. Đáy bể làm bằng bê tông giá 100000 đ/ m^2 . Phần thân làm bằng tôn giá 90000 đ/ m^2 , nắp bằng nhôm giá 120000 đ/ m^2 . Hỏi khi chi phí sản xuất bể đạt mức thấp nhất thì tỉ số giữa chiều cao bể và bán kính đáy là bao nhiêu?

- A. $\frac{22}{9}$. B. $\frac{9}{22}$. C. $\frac{31}{22}$. D. $\frac{21}{32}$.

Lời giải

Gọi bán kính đáy là R , chiều cao là h . Mặt khác: $V = \pi R^2 h = 150 \Rightarrow h = \frac{150}{\pi R^2}$

Diện tích đáy là: $\pi R^2 \Rightarrow$ Chi phí làm đáy là: $10\pi R^2$ (chục nghìn đồng)

Diện tích thân là: $2\pi Rh = 2\pi R \cdot \frac{150}{\pi R^2} = \frac{300}{R} \Rightarrow$ Chi phí làm thân là: $9 \cdot \frac{300}{R} = \frac{2700}{R}$

Diện tích nắp là: $\pi R^2 \Rightarrow$ Chi phí làm nắp là $12\pi R^2$

Chi phí sản xuất bể là: $10\pi R^2 + \frac{2700}{R} + 12\pi R^2 = 22\pi R^2 + \frac{2700}{R}$ (đồng)

Ta có: $22\pi R^2 + \frac{2700}{R} = \left(22\pi R^2 + \frac{2700}{R}\right) = \left(22\pi R^2 + \frac{1350}{R} + \frac{1350}{R}\right)$

$$\geq 3 \cdot \sqrt[3]{22\pi R^2 \cdot \frac{1350}{R} \cdot \frac{1350}{R}} = 3 \sqrt[3]{22\pi \cdot 1350^2}$$

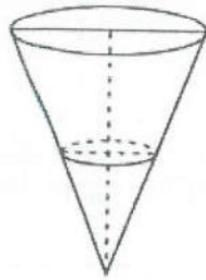
Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow 22\pi R^2 = \frac{1350}{R} \Leftrightarrow R^3 = \frac{675}{11\pi} \Rightarrow \frac{h}{R} = \frac{150}{\pi R^3} = \frac{22}{9}$. **Chọn A.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

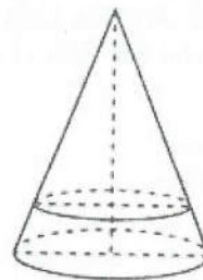
Câu 1: Một xưởng làm cơ khí nhận làm những chiếc thùng phuy với thể tích theo yêu cầu là 2000π lít nước mỗi chiếc. Hỏi bán kính đáy và chiều cao của thùng lần lượt bằng bao nhiêu để tiết kiệm vật liệu nhất?

- A. 1 m và 2 m. B. 2 dm và 1 dm. C. 2 m và 1 m. D. 1 dm và 2 dm.

Câu 2: Một cái phễu có dạng hình nón với chiều cao là 30 cm. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của cột nước trong phễu bằng 15 cm (Hình 1). Nếu bịt kín miệng phễu rồi lật ngược phễu lên (Hình 2) thì chiều cao của cột nước trong phễu gần bằng với giá trị nào sau đây?



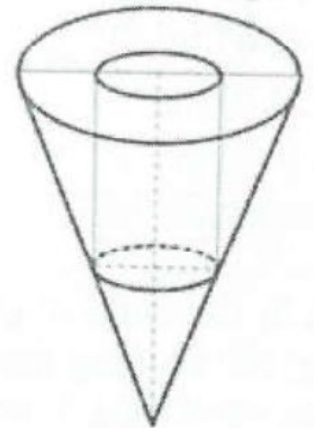
Hình 1



Hình 2

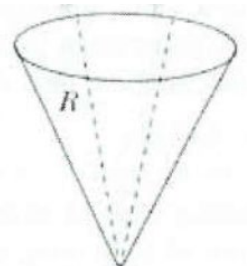
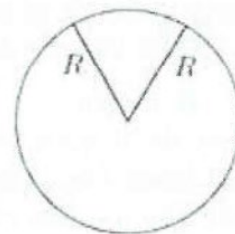
- A. 15 cm. B. 1,306 cm. C. 1,233 cm. D. 1,533 cm.

Câu 3: Một bình nước dạng hình nón không có đáy, đựng đầy nước. Biết rằng chiều cao của bình gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Người ta thả vào đó một khối trụ và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $\frac{16\pi}{9} dm^3$. Biết rằng một mặt của khối trụ nằm trên mặt đáy của hình nón, các điểm trên đường tròn đáy còn lại đều thuộc các đường sinh của hình nón (hình vẽ bên) và khối trụ có chiều cao bằng đường kính đáy của hình nón. Tính diện tích xung quanh của bình nước.



- A. $4\pi dm^2$. B. $4\pi\sqrt{10} dm^2$.
C. $\frac{9\pi\sqrt{10}}{2} dm^2$. D. $\frac{3\pi}{2} dm^2$.

Câu 4: Từ một miếng sắt tây hình tròn bán kính R, ta cắt đi một hình quạt và cuộn phần còn lại thành một cái phễu hình nón. số đo cung của hình quạt bị cắt đi phải là bao nhiêu độ (làm tròn đến đơn vị độ) để hình nón có dung tích lớn nhất?



- A. 65° . B. 90° . C. 45° . D. 60° .

Câu 5: Một đội xây dựng cần hoàn thiện một hệ thống cột trụ tròn gồm 10 chiếc của một ngôi nhà. Trước khi hoàn thiện, mỗi chiếc cột là một khối bê tông cốt thép hình lăng trụ đều, có đáy là tứ giác có cạnh bằng 20 cm. Sau khi hoàn thiện (bằng cách trát thêm vữa tổng hợp vào xung quanh) một cột là một khối trụ tròn có đường kính đáy bằng 50 cm. Chiều cao của mỗi cột trước và sau khi hoàn thiện là 4 m. Biết lượng xi

măng cần dùng chiếm 80% lượng vữa và cứ một bao xi măng 50 kg thì tương đương với 65000 cm^3 xi măng. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu xi măng loại 50 kg để hoàn thiện toàn bộ hệ thống cột?

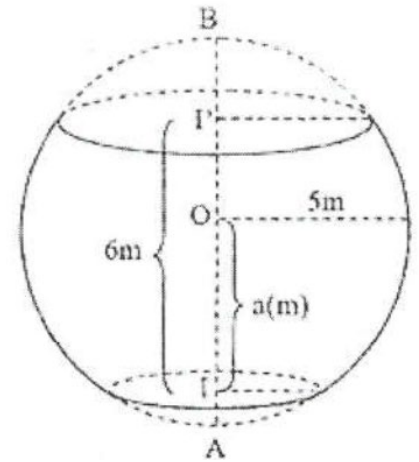
A. 77.

B. 65.

C. 90.

D. 72.

Câu 6: Một khối cầu bằng thép có bán kính 5 m. Để làm một chiếc lu đựng nước, người ta cắt bớt hai phần bằng hai mặt phẳng cách nhau 6 m và cùng vuông góc với đường kính AB, tạo thành thiết diện ở hai đáy là hình tròn tâm I và I' như hình vẽ. Mặt phẳng ở đáy dưới (chứa I) cách tâm O của khối cầu a m. Sau khi cắt, đáy dưới được hàn kín lại bằng tấm thép hình tròn, đáy trên để trống. Giả sử mỗi mét vuông thép có giá 100.000 đồng. Tính số tiền tối thiểu mua thép để hàn kín đáy dưới biết chiếc lu chứa được đúng 126 m^3 nước. (Coi bề dày của khối cầu và tấm thép ở đáy không đáng kể, kết quả làm tròn đến đơn vị nghìn đồng)



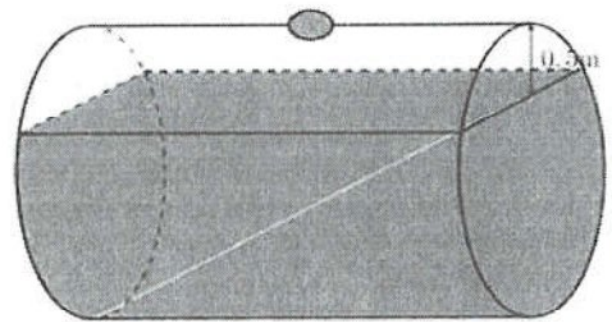
A. 2 triệu 827 nghìn đồng

B. 2 triệu 513 nghìn đồng

C. 3 triệu 140 nghìn đồng

D. 3 triệu 768 nghìn đồng

Câu 7: Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là 5 m, có bán kính đáy là 1 m, với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với 0,5 m của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn (theo đơn vị m^3).



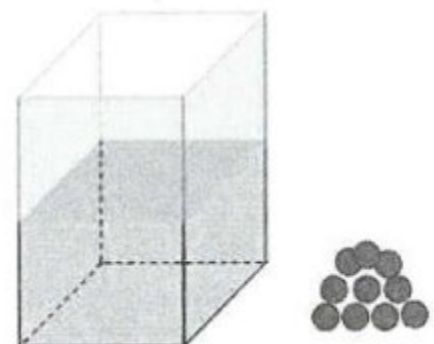
A. $12,637 \text{ m}^3$

B. $114,923 \text{ m}^3$

C. $11,781 \text{ m}^3$

D. $8,307 \text{ m}^3$

Câu 8: Cho hình vẽ như hình bên. Một con quạ muốn uống nước trong cốc có dạng hình chữ nhật (không có nắp) với đáy là hình vuông cạnh bằng 5 cm. Mực nước trong cốc đang có chiều cao 5 cm. Vì vậy, con quạ chưa thể uống được. Để uống được nước thì con quạ cần thả các viên bi đá vào cốc sao cho mực nước dâng cao thêm 1 cm nữa. Biết rằng các viên bi là hình cầu có đường kính 1 cm, chìm hoàn toàn trong nước và có số lượng đủ dùng. Hỏi con quạ cần thả ít nhất mấy viên bi vào cốc để có thể uống được nước?



A. 48 viên

B. 6 viên

C. 76 viên

D. 24 viên

Câu 9: Để làm một cống thoát nước cho một khu dân cư người ta cần đúc 500 ống hình trụ có đường kính và chiều cao trong ống bằng 1 m, độ dày của thành ống là 10 cm. Để trộn được một khối bê tông dùng để đúc ống nói trên cần 7 bao xi măng, số bao xi măng cần dùng để làm đủ 500 ống nói trên gần với số nào nhất trong các số sau.

A. 1230**B. 1210****C. 1220****D. 1200**

Câu 10: Một tấm nhôm hình chữ nhật có hai kích thước là a và $2a$ (a là độ dài cho trước). Người ta cuộn tấm nhôm đó thành một hình trụ, biết rằng chu vi đáy của hình trụ bằng $2a$. Tính thể tích V của khối trụ đó.

A. $V = \frac{a^3}{\pi}$

B. $V = \pi a^3$

C. $V = \frac{a^3}{2\pi}$

D. $V = 2\pi a^3$

Câu 11: Hai bạn X và Y có hai miếng bìa hình chữ nhật có chiều dài bằng a , chiều rộng bằng b . Bạn X cuộn tấm bìa theo chiều dài cho hai mép sát nhau rồi dùng băng dính dán lại được một mặt tròn xung quanh của một hình trụ và khối trụ này có thể tích V_1 (khi đó chiều rộng của tấm bìa là chiều cao của hình trụ). Bạn Y cuộn tấm bìa theo chiều rộng theo cách tương tự trên để được một mặt xung quanh hình trụ và khối trụ này có thể tích V_2 . Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{b}{a}$.

B. $\frac{V_1}{V_2} = 1$.

C. $\frac{V_1}{V_2} = ab$.

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{a}{b}$.

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Gọi R (m) và h (m) lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của thùng phuy.

Ta có: 2000π lít $= 2\pi(m^3)$. Thể tích của thùng phi là $V = 2\pi(m^3) \Rightarrow 2\pi R^2 h = 2\pi \Rightarrow h = \frac{2}{R^2}$.

Diện tích toàn phần của thùng phuy là: $S_{tp} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi \left(R^2 + \frac{2}{R} \right)$

Mặt khác $R^2 + \frac{2}{R} = R^2 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \geq 3\sqrt[3]{R^2 \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{R}} = 3$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow R = 1(m) \Rightarrow h = 2(m)$. **Chọn A.**

Câu 2: Thể tích nước ban đầu là V_1 , thể tích phễu là $V \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{8}$ (Do hai hình nón đồng dạng theo tỷ

lệ là $k = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$).

Nếu bịt kín miệng phễu rồi lật ngược phễu lên (Hình 2) thì chiều cao của cột nước trong phễu là x suy ra chiều cao phần không chứa nước là $h_2 = 30 - x$.

Thể tích phần không chứa nước là $V_2 = \frac{7}{8}V$ suy ra $\frac{V_2}{V} = \left(\frac{h_2}{h} \right)^3 \Leftrightarrow \frac{7}{8} = \left(\frac{30-x}{30} \right)^3$

$\Rightarrow 1 - \frac{x}{30} = \sqrt[3]{\frac{7}{8}} \Rightarrow x \approx 1,306$ cm. **Chọn B**

Câu 3: Xét hình nón như hình vẽ: $h = SO = 3r, r = OA, \ell = SA$.

Xét hình trụ: $h_1 = 2r = NQ, r_1 = ON = IQ$.

Ta có: $IQ \parallel OP \Rightarrow \frac{IQ}{OP} = \frac{SI}{SO} = \frac{1}{3} \Rightarrow r_1 = \frac{r}{3}$ (định lý Talet).

Thể tích khối trụ là: $V_t = \pi r_1^2 h_1 = \frac{2\pi r^3}{9} = \frac{16\pi}{9} \Rightarrow r = 2 \Rightarrow h = 6$.

$\Rightarrow \ell = \sqrt{h^2 + r^2} = 2\sqrt{10} \Rightarrow S_{xq} = \pi r \ell = 4\pi\sqrt{10}$ dm². **Chọn B.**

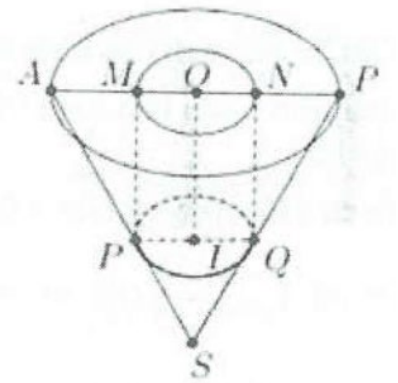
Câu 4: Xét hình nón được tạo thành, có độ dài đường sinh bằng $l_n = R$.

Gọi α (rad) là số đo cung của hình quạt còn lại, khi đó độ dài cung còn lại là $L = \alpha R$.

Và L chính là chu vi đường tròn đáy của hình nón $\Rightarrow 2\pi r_n = L = \alpha R \Leftrightarrow r_n = \frac{\alpha R}{2\pi}$.

Vậy thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3} \pi r_n^2 h_n = \frac{1}{3} \pi r_n^2 \cdot \sqrt{l_n^2 - r_n^2} = \frac{1}{3} \pi x^2 \sqrt{R^2 - x^2}$ với $x = r_n$.

Ta có $x^4 (R^2 - x^2) = 4 \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot (R^2 - x^2) \leq 4 \cdot \frac{R^6}{27} \Rightarrow x^2 \sqrt{R^2 - x^2} \leq \frac{2R^3}{3\sqrt{3}} \Rightarrow V_{max} = \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}$.



$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \frac{x^2}{2} = R^2 - x^2 \Leftrightarrow R^2 = \frac{3}{2}r_n^2 = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{\alpha \cdot R}{2\pi}\right)^2 \Leftrightarrow \alpha = \pi\sqrt{\frac{8}{3}} \approx 294^\circ.$$

Vậy số đo cung bị cắt là: $360^\circ - 294^\circ = 66^\circ$. **Chọn A.**

Câu 5: Tổng thể tích 10 khối trụ sau khi hoàn thiện là

$$V_1 = 10\pi r^2 h = 10\pi \cdot \left(\frac{50}{2}\right)^2 \cdot 400 = 2500000\pi \text{ cm}^3.$$

Để tính thể tích vữa ta tính thể tích của 10 khối lăng trụ tứ giác đều cạnh đáy 20 cm, chiều cao 4m.

Chú ý đáy mỗi khối cột là một hình tứ giác đều cạnh 20 cm, ta có diện tích đáy: $S = 20^2 = 400 \text{ cm}^2$.

Vì vậy tổng thể tích 10 chiếc cột ban đầu là: $V_2 = 10Sh = 10 \cdot 400 \cdot 400 = 1600000 \text{ cm}^3$.

Thể tích vữa cần dùng là: $V = V_1 - V_2 = 2500000\pi - 1600000 \text{ (cm}^3\text{)}.$

Số bao xi măng cần dùng là $n = \frac{0,8V}{65000} \approx 77$. **Chọn A.**

Câu 6: Dựa vào hình vẽ, ta thấy rằng $\begin{cases} IA = OA - OI = 5 - a \\ I'B = AB - AI - II' = a - 1 \end{cases}$

Thể tích của khối cầu bán kính $R = 5$ là $V_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{500\pi}{3}$

Thể tích khối chỏm cầu có chiều cao $h_1 = I'B$ là $V_1 = \pi h_1^2 \left(R - \frac{h_1}{3}\right) = \frac{(a+10)(5-a)^2 \pi}{3}$

Thể tích khối chỏm cầu có chiều cao $h_2 = IA$ là $V_2 = \pi h_2^2 \left(R - \frac{h_2}{3}\right) = \frac{(16-a)(a-1)^2 \pi}{3}$

Vậy thể tích chiếc Lu là $V = V_0 - V_1 - V_2 \Rightarrow (a+10)(5-a)^2 + (16-a)(a-1)^2 = 122$

Do đó $a = 4 \Rightarrow$ Bán kính đường tròn đáy dưới là $r = \sqrt{R^2 - a^2} = 3$

Vậy diện tích đáy dưới là $S = \pi r^2 = 9\pi$ nên số tiền mua thép là $T \approx 2$ triệu 827 nghìn đồng.

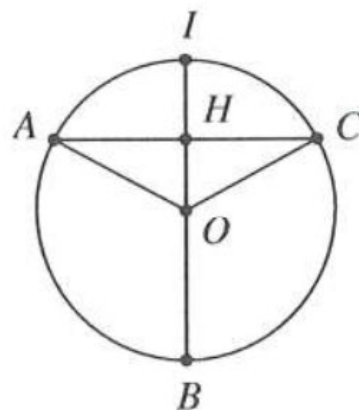
Chọn A.

Câu 7: Thể tích của khối dầu còn lại bằng diện tích mặt cắt ngang của phần dầu (diện tích hình tròn chứa cung $\widehat{ABC}$) còn lại nhân với chiều dài của bể

Ta có $IH = 0,5 \Rightarrow OH = 0,5 \Rightarrow AC = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{3}$

Do đó $S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}OH \cdot AC = \frac{\sqrt{3}}{4}$ và $\sin \widehat{AOC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{AOC} = 120^\circ$

Suy ra diện tích cần tính là $S = \frac{360-120}{360} \cdot \pi R^2 + S_{\Delta OAC} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$



Vậy thể tích khối dầu còn lại là $V = h.S = \frac{10\pi}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{4} \approx 12,637m^3$.

Chọn A.

Câu 8: Thể tích của một viên bi là $V_{bi} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6} cm^3$

Để mực nước dâng thêm 1 cm thì thể tích dâng thêm là $V_t = B.h = 5^2.1 = 25 cm^3$

Do đó, mực nước dâng thêm chính là thể tích của n viên bi

Vậy $n = \frac{V_t}{V_{bi}} = 25 : \frac{\pi}{6} = \frac{150}{\pi} \approx 48$ viên. **Chọn A.**

Câu 9: Thể tích khối trụ bán kính 0,6 m là $V_1 = \pi R_1^2 h = \pi.0,6^2.1 = \frac{9\pi}{25}$

Thể tích khối trụ bán kính 0,5 m là $V_2 = \pi R_2^2 h = \pi.0,5^2.1 = \frac{\pi}{4}$

Do đó, thể tích bê tông để đúc 1 ống là $V = V_1 - V_2 = \frac{11\pi}{100}$

Suy ra lượng bê tông để đúc 500 ống là $V_{500} = 500. \frac{11\pi}{100} = 55\pi$

Vậy số lượng bao xi măng cần mua là $55\pi.7 \approx 1210$. **Chọn B.**

Câu 10: Vì hình trụ có chu vi đáy bằng $2a \Rightarrow$ Chiều cao $h = a$

Bán kính đáy hình trụ là $R = \frac{C}{2\pi} = \frac{2a}{2\pi} = \frac{a}{\pi}$

Vậy thể tích khối trụ là $V = \pi R^2 h = \pi. \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 .a = \frac{a^3}{\pi}$. **Chọn A.**

Câu 11: Bạn X cuộn tấm bìa được khối trụ có chiều cao $h_1 = b$; chu vi đáy $C_1 = a \Rightarrow R_1 = \frac{a}{2\pi}$

Bạn Y cuộn tấm bìa được khối trụ có chiều cao $h = a$; chu vi đáy $C = b \Rightarrow R = \frac{b}{2\pi}$

Do đó thể tích $V_1 = \pi R_1^2 h_1 = \pi. \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 .b = \frac{a^2 b}{4\pi}$; thể tích $V_2 = \pi R_2^2 h_2 = \pi. \left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 .a = \frac{ab^2}{4\pi}$

Vậy tỉ số $\frac{V_1}{V_2} = \frac{a^2 b}{4\pi} : \frac{ab^2}{4\pi} = \frac{a}{b}$. **Chọn D.**