

“Nơi nào có ý chí, nơi đó có con đường.”

73

BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÀM SỐ HỢP TRONG CÁC ĐỀ THI THỬ 20-21



<https://luyenthitracnghiem.vn>

Ngày đã rạng, bình minh đang tỉnh giấc!

“Khi nào em cảm thấy muốn phê phán và chê bai một ai đó, hãy nhớ rằng không phải ai trên thế giới này cũng có những thuận lợi trong cuộc sống mà em có được.”

Họ và Tên học sinh:

Trường: Lớp:



<https://www.facebook.com/vietqld>



Câu 1: (Câu 31 - Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = x^2(1-x), \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $y = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- (A). 3. (B). 2. (C). 0. (D). 1.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = f(x^2)$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = [f(x^2)]' = 2x \cdot f'(x^2) = 2x \cdot x^4(1-x^2) = 2x^5(1-x^2)$$

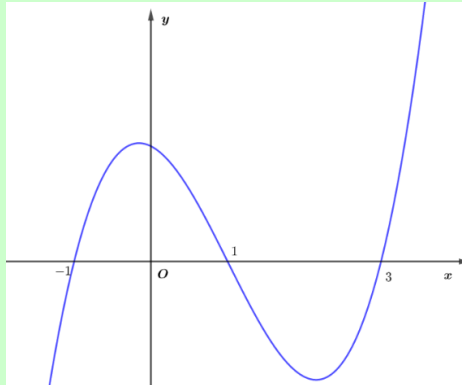
$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x^5(1-x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$y'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$y(x)$									

Vậy hàm số có 1 điểm cực tiểu.

Câu 2: (Câu 18 - THPT Lê Lợi - Thanh Hóa - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực đại của hàm số $y = f(x^2 + 1)$ là

- (A). 2. (B). 1. (C). 4. (D). 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 2x \cdot f'(x^2 + 1)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 1 = 1 \\ x^2 + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		0	$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số đạt cực đại tại điểm x_0 khi đạo hàm của hàm số đó đổi dấu dương (+) sang âm (-) khi đi qua điểm x_0 .

Vậy hàm số $y = f(x^2 + 1)$ có 1 cực đại.

Câu 3: (Câu 4 - THPT Quế Võ 1 - Bắc Ninh - Lần 02 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	1	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = f(2-x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Ⓐ. 1.

Ⓑ. 4.

Ⓒ. 3.

Ⓓ. 2.

Lời giải

Chọn C

Cách 1

Ta có $y = f(2-x) \Rightarrow y' = -f'(2-x)$.

$$\text{Ta có } y' = 0 \Leftrightarrow f'(2-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x = -1 \\ 2-x = 1 \\ 2-x = 2 \\ 2-x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \\ x = 0 \\ x = -1. \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} y' < 0 \Leftrightarrow f'(2-x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x < -1 \\ 2 < 2-x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -1 < x < 0 \end{cases} \\ y' > 0 \Leftrightarrow f'(2-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 2-x < 1 \\ 1 < 2-x < 2 \\ 2-x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3 \\ 0 < x < 1 \\ x < -1. \end{cases} \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu của $y' = -f'(2-x)$

x	$-\infty$	-1	0	1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Từ bảng xét dấu của $y' = -f'(2-x)$ ta thấy hàm số $y = f(2-x)$ có 3 điểm cực trị.

Cách 2

Số điểm cực trị của hàm số $f(2-x)$ bằng số điểm cực trị của hàm số $f(x)$.

Từ bảng xét dấu của $f'(x)$ ta thấy hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 4: (Câu 44 - MĐ 101 - BGD&ĐT - Đợt 1 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $f(x)$ bậc 4 có bảng biến thiên như sau:



<https://luyenthitrangnghiem.vn>

<https://www.facebook.com/vietqld>



x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		-2	3	-2	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^4 [f(x+1)]^2$ là

Ⓐ. 11.

Ⓑ. 9.

Ⓒ. 7.

Ⓓ. 5.

Lời giải

Chọn B

Ta chọn hàm bậc bốn $y = f(x) = 5x^4 - 10x^2 + 3$ có bảng biến thiên như đề cho.

Ta có $g'(x) = 4x^3 [f(x+1)]^2 + x^4 \cdot 2 \cdot f(x+1) f'(x+1) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^3 \cdot f(x+1) \cdot [2f(x+1) + xf'(x+1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 0 & (1) \\ f(x+1) = 0 & (2) \\ 2f(x+1) + xf'(x+1) = 0 & (3) \end{cases}$$

+ Phương trình (1) có nghiệm bội $x = 0$.

+ Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, ta có phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt $x \neq 1 \Rightarrow$ Phương trình (2): $f(x+1) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt $x \neq 0$.

+ Giải (3): Đặt $x+1 = t \Rightarrow x = t-1$, phương trình (3) trở thành:

$$2f(t) + (t-1) \cdot f'(t) = 0 \Leftrightarrow 2(5t^4 - 10t^2 + 3) + (t-1)(20t^3 - 20t) = 0$$

$$\Leftrightarrow 30t^4 - 20t^3 - 40t^2 + 20t + 6 = 0 \quad (3')$$

Bấm MTCT thấy phương trình (3') có 4 nghiệm phân biệt $t \neq 1$.

$\Rightarrow$ Phương trình (3) có 4 nghiệm phân biệt $x \neq 0$.

Ngoài ra, nghiệm của phương trình (2) không phải là nghiệm của phương trình (3) vì những giá trị x thỏa mãn $f(x+1) = 0$ không thỏa mãn phương trình (3).

Do đó phương trình $g'(x) = 0$ có 9 nghiệm phân biệt nên hàm số $g(x) = x^4 [f(x+1)]^2$ có 9 điểm cực trị.

Câu 5: (Câu 44) (MĐ 103 - BGD&ĐT - Đợt 1 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số bậc 4 có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			3				$+\infty$
		$\searrow$		$\nearrow$	$\searrow$		$\nearrow$	
			-1			-1		

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^4 [f(x-1)]^2$ là

A. 7.

B. 5.

C. 9.

D. 11.

Lời giải

Chọn C

Cách 1. Từ giả thiết đề bài đã cho ta thấy rằng hàm số $f(x)$ có dạng $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$.

Sử dụng giả thiết ta được

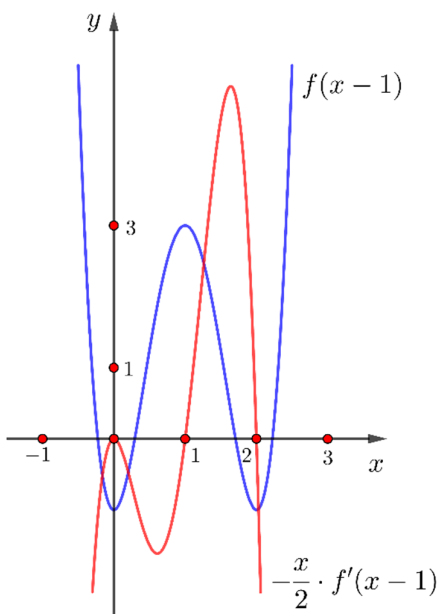
$$f(x) = 4x^4 - 8x^2 + 3 \Rightarrow f'(x-1) = 16(x-1)^3 - 16(x-1) = 16x(x-1)(x-2)$$

Ta có

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Leftrightarrow 4x^3 [f(x-1)]^2 + 2x^4 \cdot f(x-1) \cdot f'(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x-1) = 0 \\ 2f(x-1) + x \cdot f'(x-1) = 0 \quad (*) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét phương trình $(*) \Leftrightarrow f(x-1) = -\frac{x}{2} \cdot f'(x-1)$, ta có $-\frac{x}{2} \cdot f'(x-1) = -8x^2(x-1)(x-2)$.

Biểu diễn hai hàm số $f(x-1)$ và $-\frac{x}{2} \cdot f'(x-1)$ trên cùng một đồ thị đồ thị ta có



Như vậy phương trình $(*)$ có 4 nghiệm phân biệt.

$$\text{Xét phương trình } f(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = \frac{3}{2} \\ (x-1)^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} + 1 \\ x = \frac{5}{4} \\ x = \frac{3}{4} \end{cases}.$$

Thay 4 nghiệm này vào phương trình $(*)$ thì ta thấy rằng các nghiệm của phương trình này không phải là nghiệm của phương trình $(*)$.

Vậy hàm số đã cho có tất cả 9 điểm cực trị.

Cách 2.

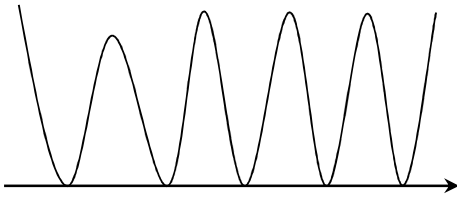


<https://luyenthitracnghiem.vn>

<https://www.facebook.com/ticagold>

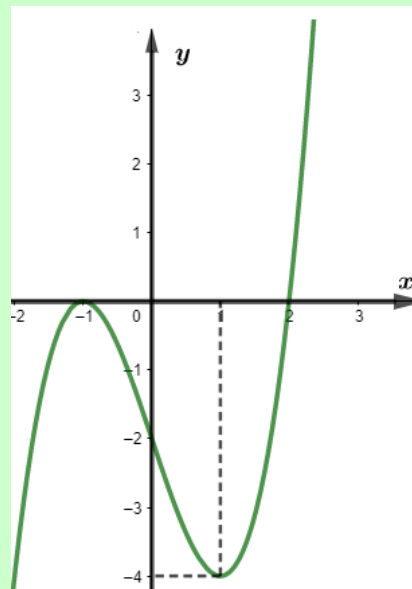


Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy rằng phương trình $f(x-1)=0$ có 4 nghiệm phân biệt khác 0, suy ra phương trình $g(x)=x^4[f(x-1)]^2=0$ có tất cả 5 nghiệm bội chẵn, khi đó đồ thị hàm số $g(x)$ sẽ có dạng như sau



Như vậy hàm $g(x)$ có 9 điểm cực trị.

Câu 6: (Câu 38 - SGD Cần Thơ - Mã đề 102 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ và có đồ thị $f'(x)$ như sau:



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 1)$ là

(A). 1.

(B). 3.

(C). 2.

(D). 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 1)$

$$\text{Xét } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

$$g'(2) = 4 \cdot f'(3) > 0$$

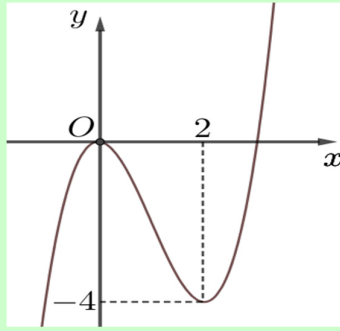
Ta có bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Vậy số điểm cực trị của hàm số là 3 điểm.



Câu 7: (Câu 41 - SGD Quảng Nam - Lần 2 - Năm 2020 - 2021) Biết hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực đại của hàm số $y = f^2[f(x)]$



(A). 3.

(B). 4.

(C). 2.

(D). 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$y' = 2f[f(x)] \cdot f'[f(x)] \cdot f'(x);$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 (1) \\ f'[f(x)] = 0 (2) \\ f[f(x)] = 0 (3) \end{cases}$$

$$\text{Giải (1): } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{Giải (2): } f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 (\text{kép}) \\ x = x_1 > 2 \\ x = x_2 > x_1 \end{cases}$$

$$\text{Giải (3): } f[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = x_1 (x_1 > 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 (\text{kép}) \\ x = x_1 > 2 \\ x = x_3 > x_2 \end{cases}$$

Vậy phương trình $y' = 0$ có nghiệm $x = 0$ (bội 5), $x = 2$, $x = x_1$ (kép), $x = x_2$, $x = x_3$. Phương trình (1) có 4 nghiệm làm đổi dấu y' nên hàm số đã cho có hai điểm cực đại, hai điểm cực tiểu.

Câu 8: (Câu 47 - SGD Quảng Nam - Lần 2 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên

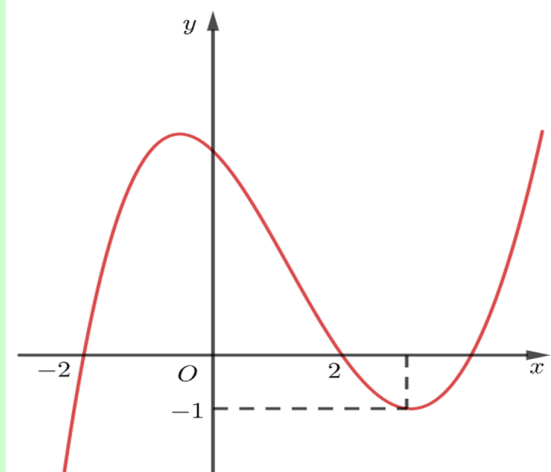


<https://luyenthitrucnghiem.vn>



<https://www.facebook.com/vietqld>





Số nghiệm thực của phương trình $f(|x^3 - 3x|) = 2$ là

(A). 9.

(B). 10.

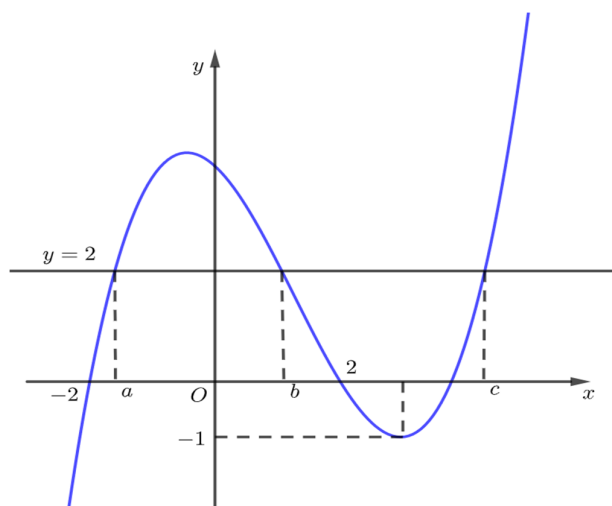
(C). 8.

(D). 6.

Lời giải

Chọn C

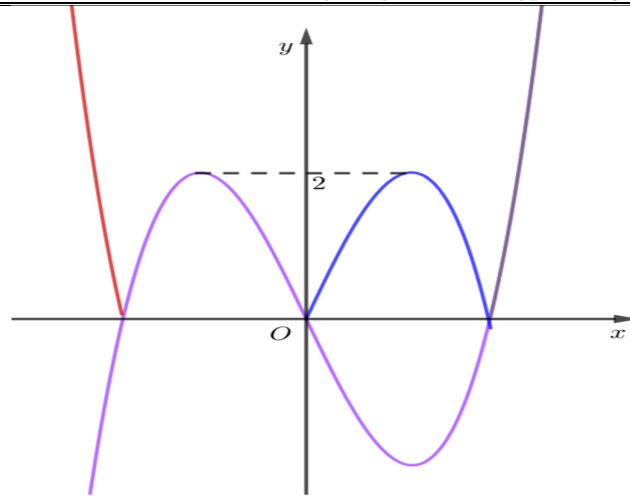
Đặt $t = |x^3 - 3x|$ ($t \geq 0$)



$$f(|x^3 - 3x|) = 2 \Leftrightarrow f(t) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a (-2 < a < 0) \\ t = b (0 < b < 2) \\ t = c (c > 2) \end{cases}$$

Ta có đồ thị hàm số $y = |x^3 - 3x|$ (là phần nằm phía trên trục hoành trong hình vẽ dưới đây)





Dựa vào đồ thị của hàm số $y = |x^3 - 3x|$ ta có

Với $t = a$ ta có $|x^3 - 3x| = a$ phương trình vô nghiệm

Với $t = b$ ta có $|x^3 - 3x| = b$ phương trình có 6 nghiệm thực phân biệt

Với $t = c$ ta có $|x^3 - 3x| = c$ phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt

Vậy số nghiệm thực của phương trình $f(|x^3 - 3x|) = 2$ là 8.

Câu 9: (Câu 38 - SGD Sơn La - Lần 2 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm

$f'(x) = (x-1)^2(x-2)$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 5})$ là

Ⓐ. 3.

Ⓑ. 0.

Ⓒ. 1.

Ⓓ. 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

$$g'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} f'(\sqrt{x^2 + 2x + 5}).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} f'(\sqrt{x^2 + 2x + 5}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ f'(\sqrt{x^2 + 2x + 5}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 5} = 1 (VN) \\ \sqrt{x^2 + 2x + 5} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu $g'(x)$:

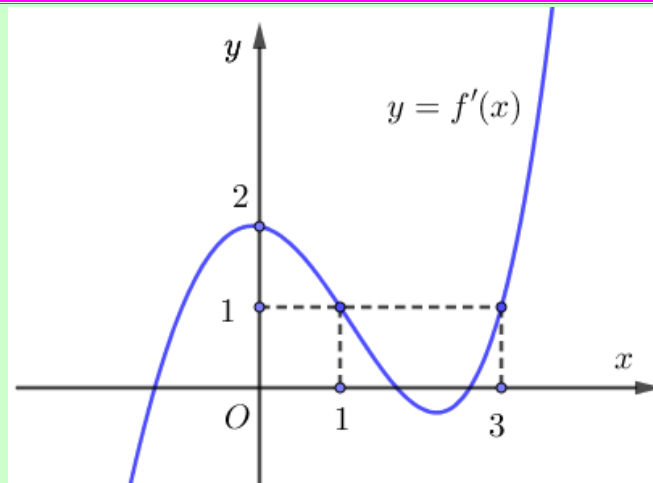
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$		0	$+$

Suy ra: **Chọn C**

Câu 10: (Câu 39 - THPT Chuyên Bắc Ninh - Lần 3 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$. Biết

hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $y = 2021^{f(x)} + 2020^{f(x)}$ là





Ⓐ. 2.

Ⓑ. 5.

Ⓒ. 3.

Ⓓ. 4.

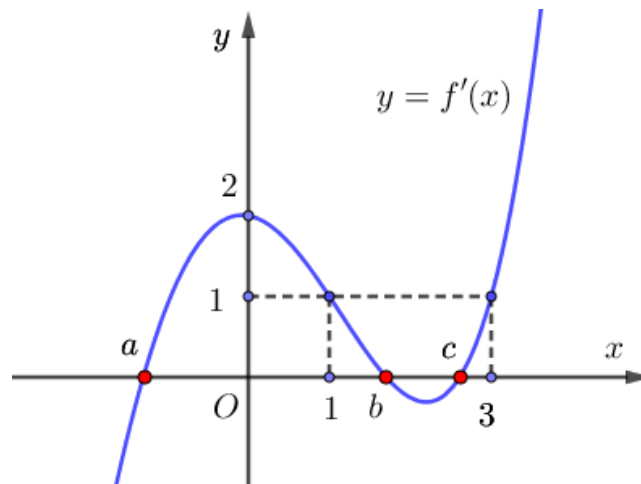
Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = f'(x) \cdot 2021^{f(x)} \cdot \ln 2021 + f'(x) \cdot 2020^{f(x)} \cdot \ln 2020$.

$= f'(x) \cdot [2021^{f(x)} \cdot \ln 2021 + 2020^{f(x)} \cdot \ln 2020]$.

Do $2021^{f(x)} \cdot \ln 2021 + 2020^{f(x)} \cdot \ln 2020 > 0, \forall x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = b \\ x_3 = c \end{cases}$



Vậy hàm số $y = 2021^{f(x)} + 2020^{f(x)}$ có ba điểm cực trị.

Câu 11: (Câu 24 - Chuyên Vinh- Nghệ An – Lần 1 – Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số $y = f(1-2x)$ đạt cực tiểu tại

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow 1$	$\searrow -2$	$\nearrow 1$	$\searrow$

Ⓐ. $x = -\frac{1}{2}$.

Ⓑ. $x = \frac{1}{2}$.

Ⓒ. $x = 1$.

Ⓓ. $x = 0$

Lời giải

Chọn B

$$g'(x) = -2f'(1-2x) = 0 \Leftrightarrow -2f'(1-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x = -1 \\ 1-2x = 0 \\ 1-2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	0	-
$g(x)$		↗	↘	↗	↘

Ta xét dấu bằng cách thay số

Với $x = 2 \Rightarrow g'(2) = -2f'(-3) < 0$

Với $x = \frac{3}{4} \Rightarrow g'\left(\frac{3}{4}\right) = -2f'\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$

Với $x = \frac{1}{4} \Rightarrow g'\left(\frac{1}{4}\right) = -2f'\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

Với $x = -1 \Rightarrow g'(-1) = -2f'(3) > 0$

Vậy hàm số $y = f(1-2x)$ đạt cực tiểu tại $x = \frac{1}{2}$.

Câu 12: (Câu 24 - Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - Lần 02 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

Điểm cực tiểu của hàm số $y = f(3x)$ là

- (A). $y = -3$ (B). $x = \frac{2}{3}$ (C). $x = 2$ (D). $x = -\frac{2}{3}$

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$y' = 3f'(3x)$$

Từ BBT của hàm số $y = f(x)$ ta có:



<https://luyenthitracnghiem.vn>

<https://www.facebook.com/vietqld>





$$y' = 0 \Leftrightarrow f'(3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -1 \\ 3x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x < -1 \\ 3x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{3} \\ x > \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$y' < 0 \Leftrightarrow -1 < 3x < 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$$

Do đó, điểm cực tiểu của hàm số là $x = \frac{2}{3}$.

Câu 13: (Câu 47 - Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$, có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-3)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 6})$

Ⓐ. 1.

Ⓑ. 2.

Ⓒ. 3.

Ⓓ. 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$

Xét hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 6})$ có $g'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 6}} f'(\sqrt{x^2 + 2x + 6})$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ f'(\sqrt{x^2 + 2x + 6}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ \sqrt{x^2 + 2x + 6} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-3 \\ x=1 \end{cases}$$

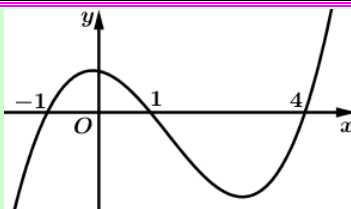
Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$			
$x+1$		$-$	$-$	0	$+$	$+$		
$f'(\sqrt{x^2+2x+6})$		$+$	0	$-$	0	$+$		
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng biến thiên. Ta thấy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 14: (Câu 45 - Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - Lần 3 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình dưới đây:





Hàm số $y = f(x^2 + x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

- (A). 1. (B). 0. (C). 3. (D). 2.

Lời giải

Chọn D

Bảng xét dấu của $f'(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Đặt $g(x) = f(x^2 + x)$, ta có $g'(x) = (2x+1)f'(x^2 + x)$,

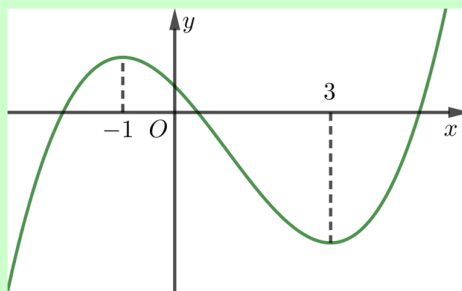
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ x^2+x=-1 \\ x^2+x=1 \\ x^2+x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Đặt $a = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$, $b = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $c = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $d = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$; Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$

x	$-\infty$	a	b		$-\frac{1}{2}$		c	d	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0

Từ bảng xét dấu của $g'(x)$ ta có hàm số $g(x) = f(x^2 + x)$ có 2 điểm cực đại.

Câu 15: (Câu 13 - Chuyên Quang Trung - Bình Phước - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f((x-1)^2 + m)$ có 3 điểm cực trị.

Tổng các phần tử của S là:

- (A). 2. (B). 4. (C). 8. (D). 10.

Lời giải



<https://luyenthitracnghiem.vn>

<https://www.facebook.com/vietqld>



Chọn A

Ta có $y' = 2(x-1)f'((x-1)^2 + m)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'((x-1)^2 + m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (x-1)^2 + m = -1 \\ (x-1)^2 + m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (x-1)^2 = -1 - m(1) \\ (x-1)^2 = 3 - m(2) \end{cases}$$

+) Nếu $-1 - m = 0 \Leftrightarrow m = -1$ khi đó phương trình (2) $\Leftrightarrow (x-1)^2 = 4$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 nên $m = -1$ thỏa mãn.

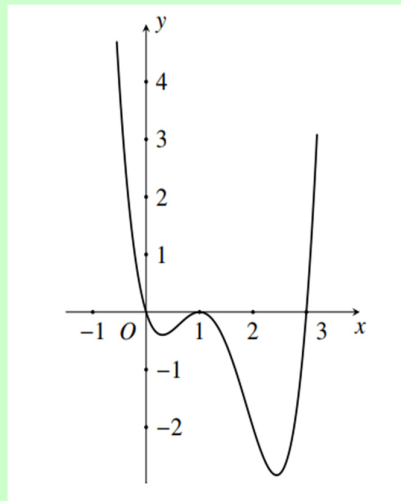
+) Nếu $3 - m = 0 \Leftrightarrow m = 3$ khi đó phương trình (1) $\Leftrightarrow (x-1)^2 = -4$ vô nghiệm. Do đó, $m = 3$ không thỏa mãn.

+) Để hàm số $y = f((x-1)^2 + m)$ có 3 điểm cực trị thì phương (1) có hai nghiệm phân biệt và (2) vô nghiệm; hoặc (1) vô nghiệm và (2) có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 - m > 0 \\ 3 - m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 3.$$

Vậy $-1 \leq m < 3 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-1; 0; 1; 2\}$. Chọn A.

Câu 16: (Câu 45 - Chuyên Quang Trung - Bình Phước - Lần 2 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ (với $f(x)$ là đa thức bậc 5). Đồ thị hàm $y = f'(x)$ hình vẽ sau



Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

(A). 1.

(B). 3.

(C). 2.

(D). 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = (2x-2)f'(x^2-2x)$



$$y' = 0 \Leftrightarrow (2x-2)f'(x^2-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2=0 \\ f'(x^2-2x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2-2x=0 \\ x^2-2x=1 \\ x^2-2x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=0 \\ x=2 \\ x=1\pm\sqrt{2} \\ x=3 \\ x=-1 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta suy ra $y' = 0$ có đúng 5 nghiệm bội lẻ là: $x = -1; x = 0; x = 1; x = 2; x = 3$ nên hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có 5 điểm cực trị.

Từ giả thiết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có 5 điểm cực trị suy ra hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có 3 điểm cực tiểu

Câu 17: (Câu 44 - Chuyên Quốc Học Huế - Huế - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)(x-3)$. Điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ là

Ⓐ. $x = 0$. Ⓑ. $x = -1$. Ⓒ. $x = 3$. Ⓓ. $x = 1$.

Lời giải

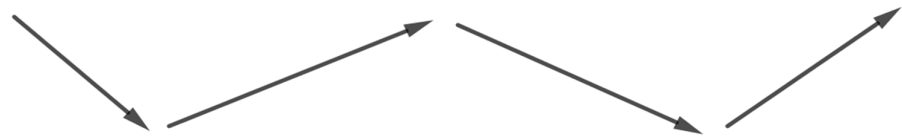
Chọn D

Theo giả thiết: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$ (trong đó $x = 0$ là nghiệm kép).

Ta có $g'(x) = (2x-2)f'(x^2-2x)$, có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2=0 \\ f'(x^2-2x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x=0 \\ x^2-2x=-2(vn) \\ x^2-2x=3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \text{ (trong đó } x = 0 \text{ và } x = 2 \text{ là nghiệm kép).}$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$							

Dựa vào BBT, hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.



<https://luyenthitrangnghiem.vn>



<https://www.facebook.com/vietqld>



Câu 18: (Câu 48 - Chuyên Thái Bình - Thái Bình - Lần 4 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	2	-1	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(3x^2 - 6x + 2)$ là:

(A). 3.

(B). 5.

(C). 7.

(D). 9.

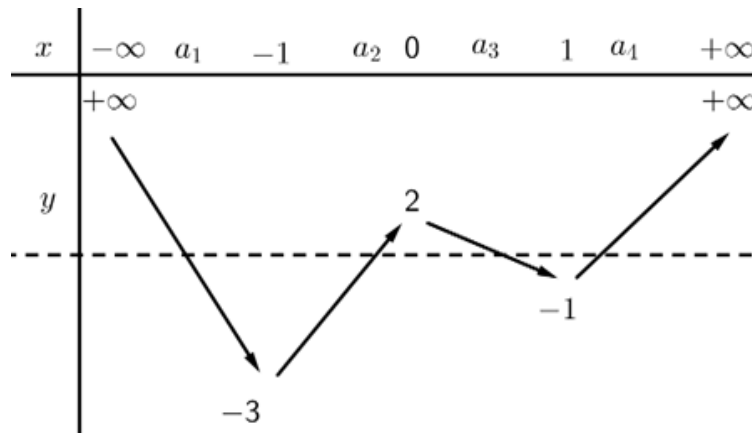
Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = (6x - 6)f'(3x^2 - 6x + 2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow (6x - 6)f'(3x^2 - 6x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(3x^2 - 6x + 2) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

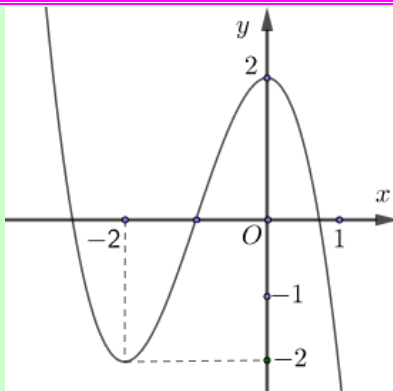
BBT:



$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = a_1 \in (-\infty; -1): (vn) \\ 3x^2 - 6x + 2 = a_2 \in (-1; 0) & (2n_0) \\ 3x^2 - 6x + 2 = a_3 \in (0; 1) & (2n_0) \\ 3x^2 - 6x + 2 = a_4 \in (1; +\infty) & (2n_0) \end{cases}$$

Vì phương trình $y' = 0$ có 7 nghiệm phân biệt nên hàm số $y = f(3x^2 - 6x + 2)$ có 7 cực trị.

Câu 19: (Câu 50 - THPT Cẩm Bình - Hà Tĩnh - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực tiểu của hàm số $y = f(-x^2 + x)$ bằng

- (A). 1. (B). 5. (C). 3. (D). 2.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị ta có hàm số bậc ba $y = f(x)$ có hai điểm cực trị $x = -2; x = 0$

Đặt $u = -x^2 + x$. Ta có $u' = -2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(-x^2 + x)$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$				$+\infty$	
u	$-\infty$	-2	0	$\frac{1}{4}$	0	-2	$-\infty$
$f(u)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$+\infty$
				$f\left(\frac{1}{4}\right)$			

Câu 20: Vậy hàm số $y = f(-x^2 + x)$ có 3 điểm cực tiểu. (Câu 46 - THPT Cẩm Bình - Hà Tĩnh - Lần 2 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y						

$-\infty$

$\nearrow$

5

$\searrow$

1

$\nearrow$

$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 4x + 1)$ là

- (A). 1. (B). 5. (C). 3. (D). 2.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số: $y = g(x) = f(x^2 - 4x + 1)$

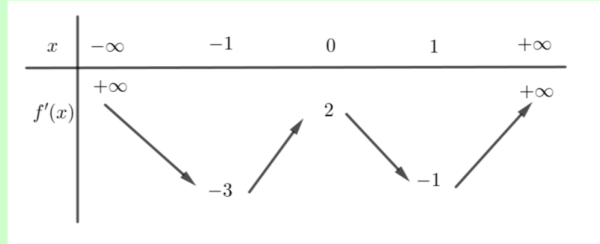
$$y' = g'(x) = (2x - 4)f'(x^2 - 4x + 1)$$



$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ f'(x^2 - 4x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ x^2 - 4x + 1 = -1 \\ x^2 - 4x + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 4x + 2 = 0 \\ x^2 - 4x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2 + \sqrt{2} \\ x = 2 - \sqrt{2} \\ x = 2 + \sqrt{6} \\ x = 2 - \sqrt{6} \end{cases}$$

Suy ra $g'(x)$ bị đổi dấu 5 lần, nên hàm số $y = f(x^2 - 4x + 1)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 21: (Câu 18 - THPT Đào Duy Từ - Hà Nội - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $f(x)$. Bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ là

(A). 7.

(B). 9.

(C). 3.

(D). 6.

Lời giải

Chọn A

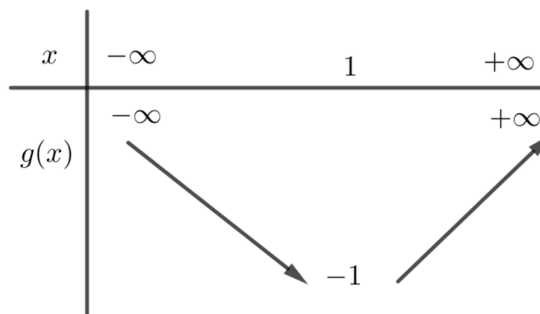
Có $y' = (2x - 2)f'(x^2 - 2x)$.

Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases}$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$, ta có

$$f'(x^2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = a \ (a < -1) & (1) \\ x^2 - 2x = b \ (-1 < b < 0) & (2) \\ x^2 - 2x = c \ (0 < c < 1) & (3) \\ x^2 - 2x = d \ (d > 1) & (4) \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 2x$, có bảng biến thiên như sau

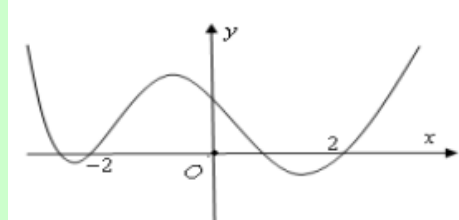


Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $g(x) = x^2 - 2x$, suy ra:

+ Phương trình (1) vô nghiệm.

- + Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1.
 - + Phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 khác các nghiệm: $x_1, x_2, 1$.
 - + Phương trình (4) có hai nghiệm phân biệt x_5, x_6 khác các nghiệm: $x_1, x_2, x_3, x_4, 1$.
- Vậy phương trình $y' = 0$ có 7 nghiệm phân biệt nên hàm số đã cho có 7 điểm cực trị.

Câu 22: (Câu 27 - THPT Đội Cấn - Vĩnh Phúc - Lần 01 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị hình vẽ bên?



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x)$ là

- Ⓐ. 7. Ⓑ. 9. Ⓒ. 11. Ⓓ. 5.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } g'(x) = (3x^2 - 3)f'(x^3 - 3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ f'(x^3 - 3x) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Dựa vào đồ thị ta có } f'(x^3 - 3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x = t \quad (-2 < t) \\ x^3 - 3x = u \quad (-2 < u < 0) \quad (*) \\ x^3 - 3x = v \quad (0 < v < 2) \end{cases}$$

Xét $h(x) = x^3 - 3x \Rightarrow h'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'		0	0	
		2	-2	
y	$-\infty$			$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta được (*) có 7 nghiệm phân biệt khác ± 1 nên $g'(x) = 0$ có 9 nghiệm đơn phân biệt. Vậy hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x)$ có 9 cực trị.

Câu 23: (Câu 37 - THPT Kinh Môn - Hải Dương - Lần 02 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.

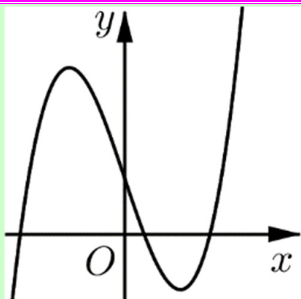


<https://luyenthitrangnhiem.vn>



<https://www.facebook.com/vietapd>





Hàm số $g(x) = f(|x|) + 2021$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- Ⓐ. 5. Ⓑ. 7. Ⓒ. 3. Ⓓ. 2.

Lời giải

Chọn A

Từ hình vẽ ta thấy đồ thị của $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm có hoành độ dương (và 1 điểm có hoành độ âm).

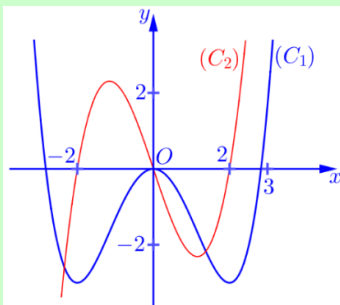
Suy ra hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị dương.

Suy ra hàm số $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Suy ra hàm số $g(x) = f(|x|) + 2021$ có 5 điểm cực trị (vì tịnh tiến đồ thị lên trên hay xuống dưới không ảnh hưởng đến số điểm cực trị của hàm số).

Câu 24: (Câu 36 - THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh - Lần 2 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị (C_2) như hình vẽ

bên. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x) = f[e^{-x} \cdot f(x)]$ trên khoảng $(-\infty; 3)$ là



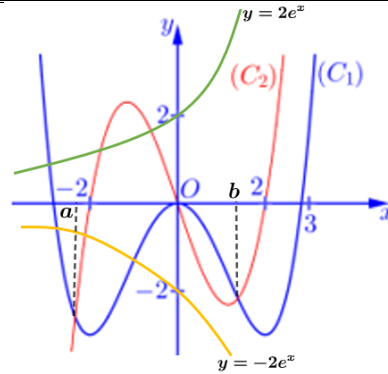
- Ⓐ. 9. Ⓑ. 6. Ⓒ. 7. Ⓓ. 8.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = e^{-x} \cdot [f'(x) - f(x)] \cdot f'(e^{-x} - f(x))$.





$$\text{Xét } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) - f(x) = 0 \\ f(e^{-x} \cdot f(x)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(e^{-x} \cdot f(x)) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = 0 \\ x = b \\ e^{-x} \cdot f(x) = -2 \\ e^{-x} \cdot f(x) = 0 \\ e^{-x} \cdot f(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = 0 \\ x = b \\ f(x) = 2e^{-x} \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2e^x \end{cases}$$

Từ đồ thị ta suy ra được:

Phương trình $f(x) = -2e^x$ có nghiệm đơn.

Phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm đơn và 1 nghiệm bội chẵn ($x = 0$).

Phương trình $f(x) = 2e^x$ có 1 nghiệm đơn.

Vậy $g'(x) = 0$ có 8 nghiệm đơn nên hàm số $g(x)$ có 8 điểm cực trị.

Câu 25: (Câu 45 - THPT Ngọc Tảo - Hà Nội - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

Ⓐ. 4.

Ⓑ. 1.

Ⓒ. 3.

Ⓓ. 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = (2x - 2)f'(x^2 - 2x)$.

Suy ra

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x - 2)f'(x^2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = 3 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = -1 \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \end{cases}$$



<https://luyenthitrangnghiem.vn>



<https://www.facebook.com/vietqld>



$$\text{Xét } g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (2x-2)f'(x^2-2x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2 \geq 0 \\ f'(x^2-2x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -2 \leq x^2-2x \leq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2 \leq 0 \\ f'(x^2-2x) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2-2x \geq 3 \\ x^2-2x \leq -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-2x+2 \geq 0 \\ x^2-2x-3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2-2x-3 \geq 0 \\ x^2-2x+2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 3 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

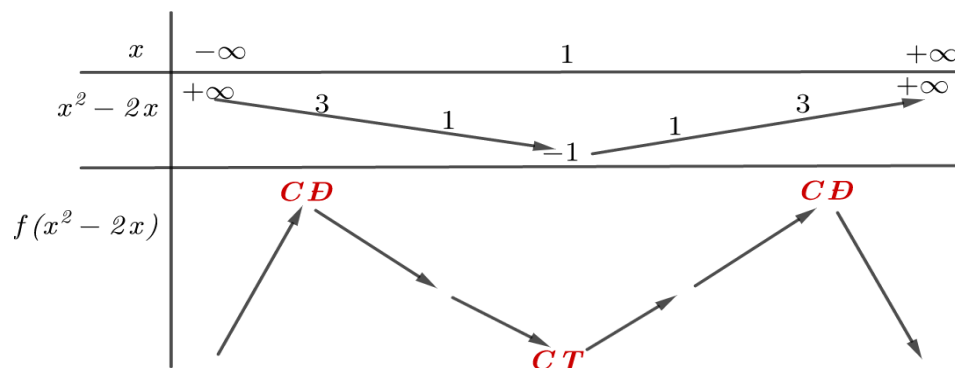
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$1 - \sqrt{2}$	1	$1 + \sqrt{2}$	3	$+\infty$				
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$											

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ có 1 điểm cực tiểu.

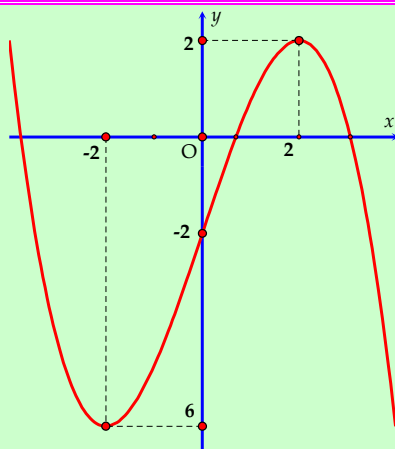
Cách khác:

Từ **BBT** hàm $f(x^2 - 2x)$ được mô tả ở dưới ta suy ra hàm có 1 điểm cực tiểu.



Câu 26: (Câu 45 - THPT Phụ Dục - Thái Bình - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$ có đồ thị hàm số như hình bên. Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = f(2-x) + 3$ là





Ⓐ. (0;5).

Ⓑ. (0;2).

Ⓒ. (5;-6).

Ⓓ. (5;3).

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$ và $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > 2 \end{cases}$.

Ta có $y' = -f'(2-x)$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x = -2 \\ 2-x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$.

Giả sử $y' > 0 \Leftrightarrow -f'(2-x) > 0 \Leftrightarrow f'(2-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x < 2 \\ 2-x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < 0 \end{cases}$.

Do đó ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗		$y(0)$	↘		$y(4)$
							$+\infty$

Vậy hàm số $y = f(2-x) + 3$ đạt cực đại tại $x = 0$ khi $y(0) = f(2) + 3 = 2 + 3 = 5$.

Vậy tọa độ điểm cực đại là (0;5).

Câu 27: (Câu 46 - THPT Tam Dương - Vĩnh Phúc - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗		5	↘		$+\infty$
							1

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 4x + 1)$ là:

Ⓐ. 1.

Ⓑ. 5.

Ⓒ. 3.

Ⓓ. 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g(x) = f(x^2 - 4x + 1)$.



<https://luyenthitranghien.vn>



<https://www.facebook.com/vietqld>



$$\Rightarrow g'(x) = (x^2 - 4x + 1)' \cdot f'(x^2 - 4x + 1) = 2(x - 2) \cdot f'(x^2 - 4x + 1).$$

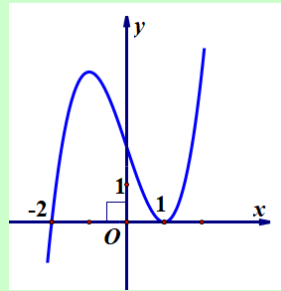
$$\text{Ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x - 2) \cdot f'(x^2 - 4x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 4x + 1 = -1 \\ x^2 - 4x + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2 - \sqrt{2} \\ x = 2 + \sqrt{2} \\ x = 2 - \sqrt{6} \\ x = 2 + \sqrt{6} \end{cases}.$$

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$.

x	$-\infty$		$2 - \sqrt{6}$		$2 - \sqrt{2}$		2		$2 + \sqrt{2}$		$2 + \sqrt{6}$		$+\infty$
$x - 2$		-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	
$f'(x^2 - 4x + 1)$		+	0	-	0	+	+	+	0	-	0	+	
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $g(x) = f(x^2 - 4x + 1)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 28: (Câu 47 - THPT Yên Hòa - Hà Nội - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 3)$ là

(A). 5.

(B). 4.

(C). 2.

(D). 3.

Lời giải

Chọn D

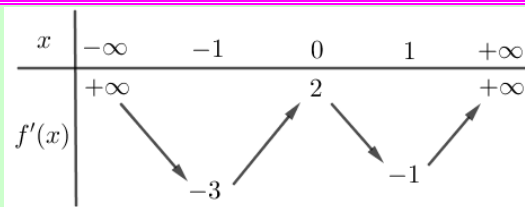
Đặt $g(x) = f(x^2 - 3)$ ta có $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 3)$.

$$\text{Từ đồ thị của } y = f'(x) \text{ ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ x^2 - 3 = 1 \\ x^2 - 3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm 1 \end{cases}.$$

Cũng từ đồ thị ta thấy $x = \pm 2$ là nghiệm kép của phương trình, nên ta có $x = 0, x = \pm 1$ là các nghiệm đơn của $g'(x) = 0$. Vậy hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 3)$ có tất cả là 3 cực trị.

Câu 29: (Câu 46 - MĐ 101 - BGD&ĐT - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau





Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ là

(A). 9.

(B). 3.

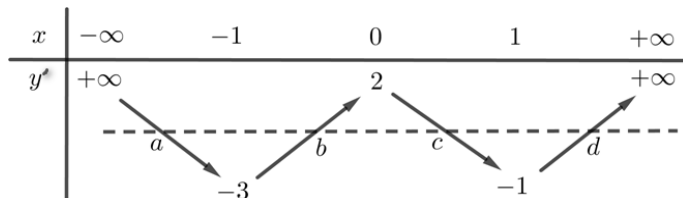
(C). 7.

(D). 5.

Lời giải

Chọn C

Cách 1



Từ bảng biến thiên ta có phương trình $f'(x) = 0$ có các nghiệm tương ứng là

$$\begin{cases} x = a, a \in (-\infty; -1) \\ x = b, b \in (-1; 0) \\ x = c, c \in (0; 1) \\ x = d, d \in (1; +\infty) \end{cases}$$

Xét hàm số $y = f(x^2 - 2x) \Rightarrow y' = 2(x-1)f'(x^2 - 2x)$.

Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)f'(x^2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2 - 2x = a \quad (1) \\ x^2 - 2x = b \quad (2) \\ x^2 - 2x = c \quad (3) \\ x^2 - 2x = d \quad (4) \end{cases}$

Xét hàm số $h(x) = x^2 - 2x$ ta có $h(x) = x^2 - 2x = -1 + (x-1)^2 \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$ do đó

Phương trình $x^2 - 2x = a, (a < -1)$ vô nghiệm.

Phương trình $x^2 - 2x = b, (-1 < b < 0)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ không trùng với nghiệm của phương trình (1).

Phương trình $x^2 - 2x = c, (0 < c < 1)$ có hai nghiệm phân biệt $x_3; x_4$ không trùng với nghiệm của phương trình (1) và phương trình (2).

Phương trình $x^2 - 2x = d, (d > 1)$ có hai nghiệm phân biệt $x_5; x_6$ không trùng với nghiệm của phương trình (1) và phương trình (2) và phương trình (3).

Vậy phương trình $y' = 0$ có 7 nghiệm phân biệt nên hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có 7 điểm cực trị.

Cách 2



<https://luyenthitranghien.vn>



<https://www.facebook.com/vietqld>





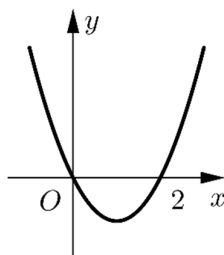
Từ bảng biến thiên ta có phương trình $f'(x) = 0$ có các nghiệm tương ứng là

$$\begin{cases} x = a, a \in (-\infty; -1) \\ x = b, b \in (-1; 0) \\ x = c, c \in (0; 1) \\ x = d, d \in (1; +\infty) \end{cases}$$

Xét hàm số $y = f(x^2 - 2x) \Rightarrow y' = 2(x-1)f'(x^2 - 2x)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)f'(x^2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = a \quad (1) \\ x^2 - 2x = b \quad (2) \\ x^2 - 2x = c \quad (3) \\ x^2 - 2x = d \quad (4) \end{cases}$$

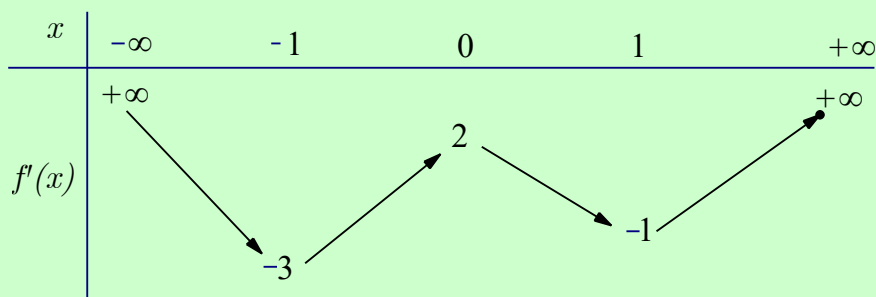
Vẽ đồ thị hàm số $h(x) = x^2 - 2x$



Dựa vào đồ thị ta thấy: phương trình (1) vô nghiệm. Các phương trình (2); (3); (4) mỗi phương trình có 2 nghiệm. Các nghiệm đều phân biệt nhau.

Vậy phương trình $y' = 0$ có 7 nghiệm phân biệt nên hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 30: (Câu 48 - MĐ 102 - BGD&ĐT - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ là

(A). 3.

(B). 9.

(C). 5.

(D). 7.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = (2x+2)f'(x^2 + 2x)$.



Dựa vào bảng biến thiên của hàm $f'(x)$ ta được

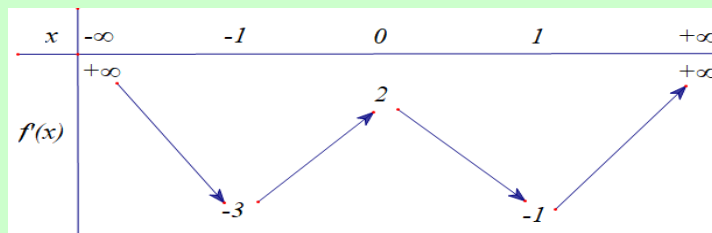
$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x = a \\ x^2 + 2x = b \\ x^2 + 2x = c \\ x^2 + 2x = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ (x+1)^2 = a+1 \quad (1) \\ (x+1)^2 = b+1 \quad (2) \\ (x+1)^2 = c+1 \quad (3) \\ (x+1)^2 = d+1 \quad (4) \end{cases}, \text{ trong đó } a < -1 < b < 0 < c < 1 < d.$$

Do $a < -1 < b < 0 < c < 1 < d$ nên $\begin{cases} a+1 < 0 \\ b+1 > 0 \\ c+1 > 0 \\ d+1 > 0 \end{cases}$.

Khi đó phương trình (1) vô nghiệm. Các phương trình (2), (3), (4) mỗi phương trình đều có 2 nghiệm phân biệt và khác nhau, cùng khác -1 . Suy ra phương trình $y' = 0$ có 7 nghiệm đơn.

Vậy hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 31: (Câu 48 - MĐ 103 - BGD&ĐT - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(4x^2 - 4x)$ là

(A). 9.

(B). 5.

(C). 7.

(D). 3.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (-\infty; -1) \\ x = b \in (-1; 0) \\ x = c \in (0; 1) \\ x = d \in (1; +\infty) \end{cases}$.

Ta có: $y' = (8x - 4)f'(4x^2 - 4x)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 4 = 0 \\ f'(4x^2 - 4x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 4x = a \in (-\infty; -1) \\ 4x^2 - 4x = b \in (-1; 0) \\ 4x^2 - 4x = c \in (0; 1) \\ 4x^2 - 4x = d \in (1; +\infty) \end{cases}$.



<https://luyenthitrangnghiem.vn>



<https://www.facebook.com/vietgiald>



Ta có khi $x = \frac{1}{2} \Rightarrow 4x^2 - 4x = -1$ và $f'(-1) = -3 \neq 0$

Mặt khác: $4x^2 - 4x = (2x-1)^2 - 1 \geq -1$ nên:

- $4x^2 - 4x = a$ vô nghiệm.
- $4x^2 - 4x = b$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .
- $4x^2 - 4x = c$ có 2 nghiệm phân biệt x_3, x_4 .
- $4x^2 - 4x = d$ có 2 nghiệm phân biệt x_5, x_6 .

Vậy phương trình $y' = 0$ có 7 nghiệm bội lẻ phân biệt nên hàm số có 7 điểm cực trị.

Cách 2:

Gọi m đại diện cho các tham số ta xét phương trình $4x^2 - 4x - m = 0$ có $\Delta' = 4(m+1)$,
 $\Delta' > 0 \Rightarrow m > -1$.

Vậy với mỗi giá trị b, c, d thuộc khoảng đã cho phương trình $f'(4x^2 - 4x) = 0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $y' = 0$ có 7 nghiệm bội lẻ phân biệt nên hàm số có 7 điểm cực trị.

Câu 32: (Câu 50 - MĐ 104 - BGD&ĐT - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$				2				$+\infty$
			-3				-1		

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(4x^2 + 4x)$ là

- Ⓐ. 5. Ⓑ. 9. Ⓒ. 7. Ⓓ. 3.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = (8x+4)f'(4x^2+4x); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(4x^2+4x) = 0 \\ 8x+4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(4x^2+4x) = 0 \\ x_1 = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Dựa vào bảng biến thiên của } f'(x) \text{ nhận thấy } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (-\infty; -1) \\ x = b \in (-1; 0) \\ x = c \in (0; 1) \\ x = d \in (1; +\infty) \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } f'(4x^2+4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+4x = a \in (-\infty; -1) \\ 4x^2+4x = b \in (-1; 0) \\ 4x^2+4x = c \in (0; 1) \\ 4x^2+4x = d \in (1; +\infty) \end{cases} \quad (*). \text{ Lại có}$$

$$4x^2+4x = a \text{ vô nghiệm vì } 4x^2+4x = (2x+1)^2 - 1 \geq -1, \forall x;$$



$$4x^2 + 4x = b \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_2; \\ x = x_3 \end{cases}$$

$$4x^2 + 4x = c \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_4; \\ x = x_5 \end{cases}$$

$$4x^2 + 4x = d \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_6; \\ x = x_7 \end{cases}$$

Vì $b \neq c \neq d$ do thuộc các khoảng khác nhau (như (*)) nên các nghiệm $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ đều khác nhau và khác $x_1 = -\frac{1}{2}$. Do đó $y' = 0$ có 7 nghiệm đơn phân biệt nên y' đổi dấu 7 lần suy ra hàm số có 7 điểm cực trị.

Câu 33: (Câu 45 - MĐ 102 - BGD&ĐT - Đợt 1 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	3	-1	3	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^2 [f(x-1)]^4$ là

(A). 7.

(B). 8.

(C). 5.

(D). 9.

Lời giải

Chọn D

Ta có hàm số $g(x)$ liên tục và có đạo hàm là

$$g'(x) = 2x \cdot [f(x-1)]^4 + 4x^2 \cdot f'(x-1) \cdot [f(x-1)]^3 = 2x [f(x-1)]^3 \cdot (f(x-1) + 2xf'(x-1))$$

$$\text{Cho } g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 = 0 \\ f(x-1) = 0 \\ f(x-1) + 2xf'(x-1) = 0 \end{cases}$$

* Với phương trình $f(x-1) = 0$.

Vì $f(x)$ là hàm bậc bốn và có bảng biến thiên như trên ta thấy phương trình $f(x-1) = 0$ có bốn nghiệm đơn phân biệt x_2, x_3, x_4, x_5 khác x_1 .

* Với phương trình $f(x-1) + 2xf'(x-1) = 0$

Ta thấy phương trình không nhận các số x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 làm nghiệm.

Gọi $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, vì $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $-1; 0; 1$ và $f(0) = -1, f(1) = 3$ nên $c = -1, a = -4, b = 8$, suy ra $f(x) = -4x^4 + 8x^2 - 1$.

Đặt $t = x - 1$, phương trình $f(x-1) + 2xf'(x-1) = 0$ trở thành $f(t) + 2(t+1)f'(t) = 0$

$$\Leftrightarrow -4t^4 + 8t^2 - 1 + 2(t+1)(-16t^3 + 16t) = 0 \Leftrightarrow -36t^4 - 32t^3 + 40t^2 + 32t - 1 = 0.$$



Xét hàm số $h(t) = -36t^4 - 32t^3 + 40t^2 + 32t - 1$ có $h'(t) = -144t^3 - 96t^2 + 80t + 32$, cho $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = -\frac{1}{3}, x = \frac{2}{3}$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$		
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 3$	$\searrow -\frac{175}{27}$	$\nearrow \frac{581}{27}$	$\searrow -\infty$		

Do đó phương trình $h(t) = 0$ có 4 nghiệm đơn phân biệt hay phương trình $f(x-1) + 2xf'(x-1) = 0$ có 4 nghiệm đơn phân biệt x_6, x_7, x_8, x_9 . Hay hàm số $g(x)$ có 9 điểm cực trị là $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$.

Câu 34: (Câu 46 - MĐ 104 - BGD&ĐT - Đợt 1 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	$\nearrow 3$	$\searrow -2$	$\nearrow 3$	$\searrow -\infty$		

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^2 [f(x+1)]^4$ là

(A). 7.

(B). 8.

(C). 9.

(D). 5.

Lời giải

Chọn C

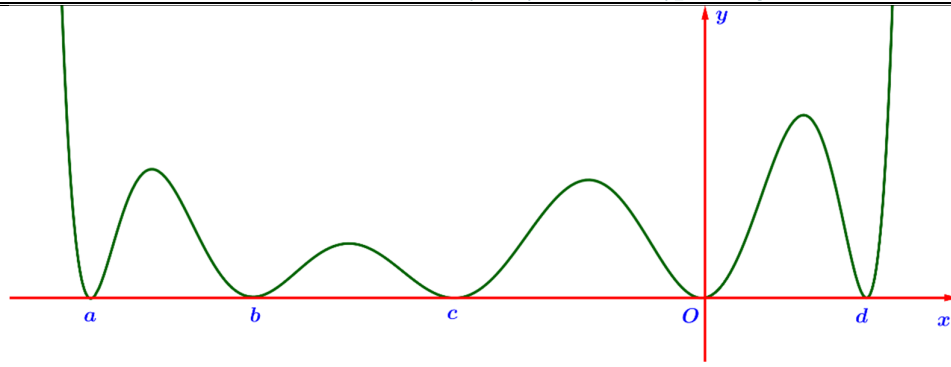
Nhận xét $\begin{cases} g(x) \geq 0, \forall x \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = +\infty \end{cases}$

Cho $g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ [f(x+1)]^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x+1) = 0 \end{cases}$

Nhận thấy: Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ sang trái 1 đơn vị ta thu được đồ thị của $f(x+1)$

Do đó $f(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a, a < -2 \\ x = b, -2 < b < -1 \\ x = c, -1 < c < 0 \\ x = d, d > 0 \end{cases}$



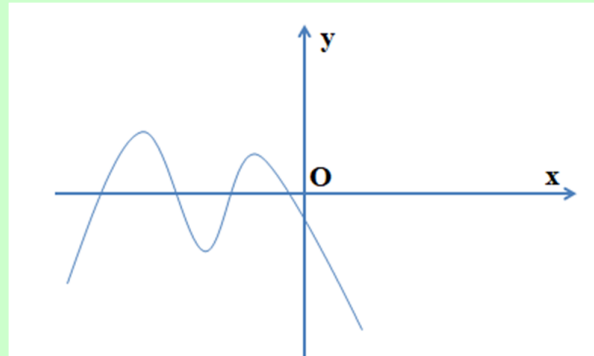


Vì thế $g(x) = 0$ có 5 nghiệm phân biệt

Hay đồ thị $g(x)$ có 5 điểm tiếp xúc với trục hoành

Vậy hàm số $g(x)$ có 9 cực trị.

Câu 35: (Câu 45 - MĐ 104 - BGD&ĐT - Đợt 2 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ với $f(0) = 0$. Biết $y = f'(x)$ là một hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong như hình dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^4) + x^2|$ là

(A). 3.

(B). 6.

(C). 5.

(D). 4.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $h(x) = f(x^4) + x^2 \Rightarrow h'(x) = 2x(2x^2 \cdot f'(x^4) + 1)$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 f'(x^4) + 1 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Giải phương trình (1)

Đặt $x^4 = t (t \geq 0)$, ta có phương trình $2\sqrt{t} f'(t) + 1 = 0 \Leftrightarrow f'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{t}} \quad (2)$ (Vì $t = 0$ không thỏa mãn)

Số nghiệm của phương trình (2) chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và đồ thị

$$\text{hàm số } y = -\frac{1}{2\sqrt{t}}$$

Ta có các đồ thị như sau

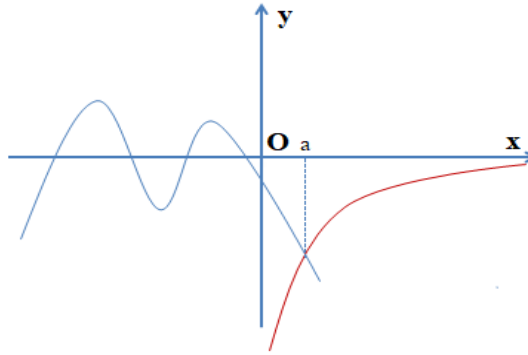


<https://luyenthihocthai.vn>



<https://www.facebook.com/vietqld>

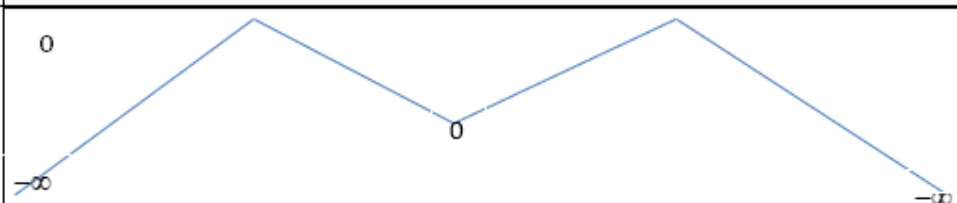
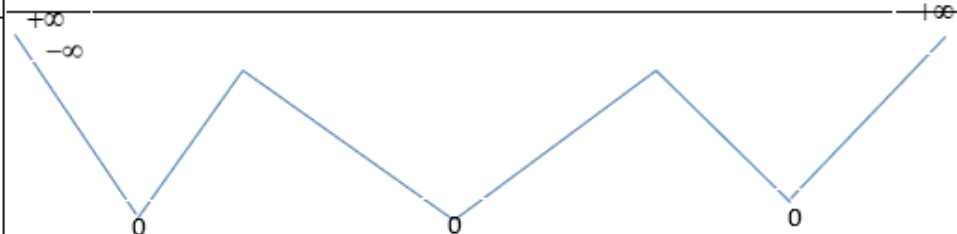




Căn cứ đồ thị, suy ra phương trình (2) có nghiệm duy nhất $t = a > 0 \Rightarrow x^4 = a \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{a}$

Căn cứ đồ thị hàm số $y = f'(t) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} (f'(t)) = -\infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} (2\sqrt{t}f'(t) + 1) = -\infty$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$ và $y = g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt[4]{a}$	0	$\sqrt[4]{a}$	$+\infty$		
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$							
$g(x)$							

Câu 36: (Câu 46 - Đề Tham Khảo - BGD&ĐT - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$
$f'(x)$				

Hàm số $g(x) = |f(x^3) - 3x|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Ⓐ. 3.

Ⓑ. 5.

Ⓒ. 4.

Ⓓ. 2.

Lời giải

Chọn A



- ♦ Bảng biến thiên hàm số $f(x)$

x	$-\infty$	-3	-1	x_0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$		0	$+$
$f(x)$	$+\infty$				$+\infty$

- ♦ Đặt $h(x) = f(x^3) - 3x \Rightarrow h'(x) = 3x^2 f'(x^3) - 3 = 0 \Leftrightarrow f'(x^3) = \frac{1}{x^2}$
- ♦ Đặt $t = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{t}$ thế vào phương trình trên ta được $f'(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}$ (1)
- ♦ Xét hàm số $y = \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} \Rightarrow y' = -\frac{2}{3\sqrt[3]{t^5}}$, $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y = 0$.
- ♦ Bảng biến thiên của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}$

t	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$		$-$
y	0	$+\infty$	0

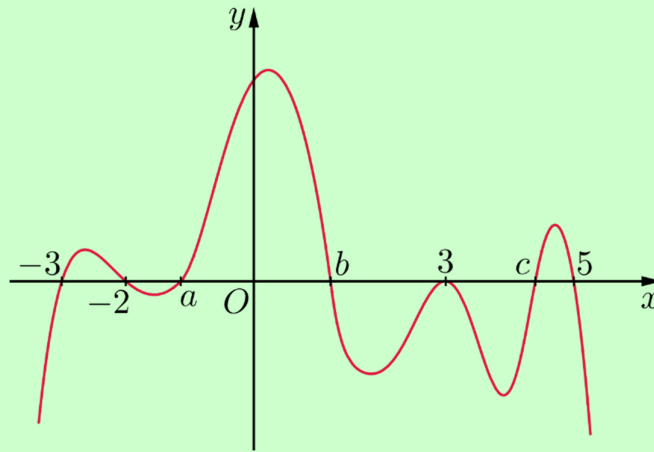
- ♦ Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) có một nghiệm $t = a > 0$.
- ♦ Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$\sqrt[3]{a}$	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$	0	$f(a) - 3\sqrt[3]{a}$	$+\infty$
$g(x) = h(x) $	$+\infty$	0	$3\sqrt[3]{a} - f(a)$	$+\infty$

- ♦ Vậy hàm số $g(x)$ có 3 cực trị.

Câu 37: (Câu 41 - SGD Bắc Giang - lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ -3 ; -2 ; a ; b ; 3 ; c ; 5 với $-\frac{4}{3} < a < -1$; $1 < b < \frac{4}{3}$; $4 < c < 5$ (có dạng như hình vẽ bên dưới). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số $y = f(2|x| + m - 3)$ có 7 điểm cực trị?





(A). 3.

(B). 2.

(C). 4.

(D). Vô số.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $h(x) = f(2x + m - 3)$

Ta có: $h'(x) = 2f'(2x + m - 3) = 0 \Leftrightarrow f'(2x + m - 3) = 0$

Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$ suy ra $f'(2x + m - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x + m - 3 = k \Leftrightarrow x = \frac{k + 3 - m}{2}$ với

$k \in \{-3; -2; a; b; 3; c; 5\}$ ($-\frac{4}{3} < a < -1$; $1 < b < \frac{4}{3}$; $4 < c < 5$)

Hàm số $y = f(2|x| + m - 3)$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ hàm số $h(x) = f(2x + m - 3)$ có 3 cực trị có hoành độ dương, mà 3 là nghiệm bội chẵn của $f'(x)$ nên hàm số $h(x) = f(2x + m - 3)$ có 3 cực trị có hoành độ dương $\Leftrightarrow$ phương trình $h'(x) = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt khác $\frac{6 - m}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a + 3 - m}{2} < 0 \\ \frac{b + 3 - m}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3 - m < 0 \\ b + 3 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > a + 3 \\ m < b + 3 \end{cases} \Leftrightarrow a + 3 < m < b + 3$$

Do $-\frac{4}{3} < a < -1$ và $1 < b < \frac{4}{3}$ nên $-1 + 3 \leq m \leq 1 + 3$ hay $2 \leq m \leq 4$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là 2 ; 3 ; 4.

Câu 38: (Câu 46 - SGD Hải Phòng - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = (x^2 - 16)(x + 1)(x^2 - 4x + m - 4)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2021; 2021]$ sao cho hàm số $g(x) = f(x^2)$ có 5 điểm cực trị?

(A). 2025.

(B). 2026.

(C). 2021.

(D). 4043.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2) = 2x(x^4 - 16)(x^2 + 1)(x^4 - 4x^2 + m - 4)$.



$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^4 - 16 = 0 \\ x^4 - 4x^2 + m - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \\ x^4 - 4x^2 + m - 4 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

TH1: Phương trình (*) có nghiệm $x = 0 \Rightarrow m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4$.

Thay $m = 4$ vào phương trình (*) ta có: $x^4 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$.

Khi đó $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm bội chẵn nên hàm số $g(x)$ không thể có 5 điểm cực trị nên $m = 4$ loại.

TH2: Phương trình (*) có nghiệm $x = \pm 2 \Rightarrow m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4$ (loại).

TH3: Phương trình (*) có 2 nghiệm đơn phân biệt, khác 0 và khác ± 2 hay

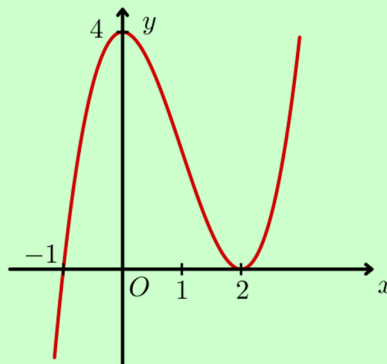
$$t^2 - 4t + m - 4 = 0 \text{ phải có hai nghiệm trái dấu (với } t = x^2) \Leftrightarrow m - 4 < 0 \Leftrightarrow m < 4.$$

Khi đó $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm phân biệt nên hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Kết hợp điều kiện m thuộc $[-2021; 2021]$ suy ra $-2021 \leq m < 4, m \in \mathbb{Z}$ nên có 2025 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 39: (Câu 48 - Sở GD Lào Cai - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$ có đồ

thị (C) của hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Đặt $g(x) = f(f'(x))$, $h(x) = f'(f(x))$. Tổng số điểm cực trị của $g(x)$ và $h(x)$ là:

- Ⓐ. 12. Ⓑ. 11. Ⓒ. 8. Ⓓ. 13.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + ax^3 + bx^2 + cx \Rightarrow f'(x) = x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$

Ta lại có: $\begin{cases} f'(0) = 4 \\ f'(-1) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ -1 + 3a - 2b + 4 = 0 \\ 8 + 12a + 4b + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ 3a - 2b = -3 \\ 12a + 4b = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 4 \end{cases}$

hay $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x$, $f'(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \rightarrow f''(x) = 3x^2 - 6x$



$$f''(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

- Tìm số cực trị của hàm số: $g(x) = f(f'(x))$

$$\text{Ta có: } g'(x) = f''(x) \cdot f'(f'(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f''(x) = 0 \\ f'(f'(x)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ f'(x) = -1 \\ f'(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_3 \\ x = x_4 \end{cases}$$

với x_1 là nghiệm của phương trình $f'(x) = -1$

và x_2, x_3, x_4 là ba nghiệm của phương trình $f'(x) = 2$, $x_1 < x_2 < 0 < x_3 < 2 < x_4$

Bảng xét dấu $y = g'(x)$

x	$-\infty$	x_1	x_2	0	x_3	2	x_4	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$

nhìn vào bảng trên, hàm số $g(x) = f(f'(x))$ có 3 cực trị

- Tìm số cực trị của hàm số $h(x) = f'(f(x))$

BBT của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{11}{4}$	4	$+\infty$

$$\text{Ta có: } h'(x) = f''(x) \cdot f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f''(x) = 0 \\ f'(f(x)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_3 \\ x = x_4 \end{cases}$$

Với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$, x_3, x_4 là nghiệm của phương trình $f(x) = 2$

và $x_3 < x_1 < -1 < x_2 < x_4 < 2$

Bảng xét dấu $y = h'(x)$

x	$-\infty$	x_3	x_1	-1	x_2	x_4	2	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

nhìn vào bảng trên, hàm số $h(x) = f'(f(x))$ có 5 cực trị



Vậy tổng có 8 cực trị.

Câu 40: (Câu 49 - SGD Nam Định - Online - Lần 01 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	0	-1	$-\sqrt{3}$	$+\infty$

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^4) - 4x$ có mấy điểm cực tiểu?

Ⓐ. 3.

Ⓑ. 1.

Ⓒ. 4.

Ⓓ. 2.

Lời giải

Chọn D

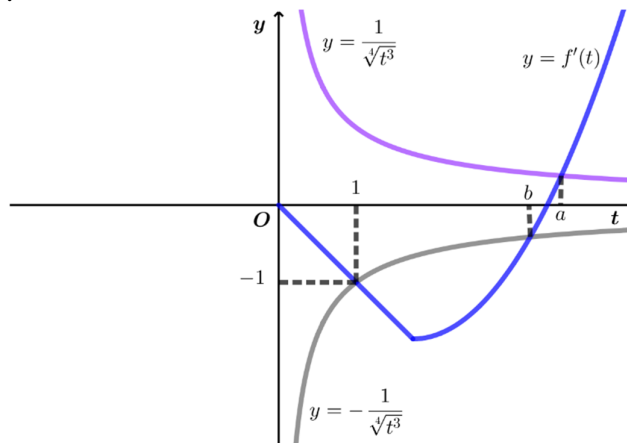
Có $g'(x) = 4x^3 f'(x^4) - 4$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 f'(x^4) - 4 = 0 \Leftrightarrow f'(x^4) = \frac{1}{x^3} \quad (x \neq 0) \quad (1).$$

Đặt $t = x^4 > 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{t}$ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} f'(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t^3}} & (2) \\ f'(t) = -\frac{1}{\sqrt[4]{t^3}} & (3) \end{cases}$$

Mô phỏng bằng đồ thị



Dựa vào đồ thị ta có:

(2) có nghiệm $t = a \Rightarrow x = \sqrt[4]{a}$

(3) có nghiệm $\begin{cases} t = 1 \Rightarrow x = -1 \\ t = b \Rightarrow x = -\sqrt[4]{b} \end{cases}$

Bảng biến thiên



<https://luyenthitranghien.vn>

<https://www.facebook.com/vietgptd>



x	$-\infty$	$-\sqrt[4]{b}$	-1	$\sqrt[4]{a}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$					

Vậy hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực tiểu.

Câu 41: (Câu 46 - SGD Quảng Bình - Năm 2020 - 2021) Cho $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn thỏa mãn $f(1) \leq 0$ và hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		-1	-3	

Hàm số $g(x) = \left| f(\sqrt{x^2+1}) + x^2 \right|$ có mấy điểm cực trị?

(A). 1.

(B). 3.

(C). 5.

(D). 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f''(x) = a(x^2 - 1) \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{3}x^3 - ax + C$

$$\begin{cases} f'(-1) = -1 \\ f'(1) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ C = -\frac{2}{9} \end{cases} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{9}x^3 - \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}$$

Xét hàm số $u = \sqrt{x^2+1}$ có $u' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, u' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
u'	$-$	0	$+$
u	$+\infty$	1	$+\infty$

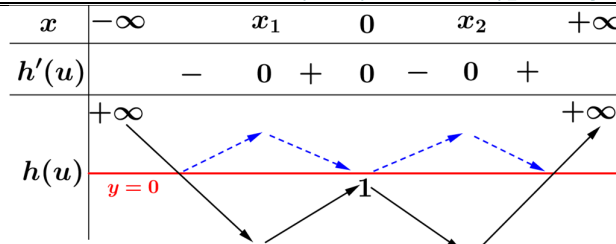
Xét hàm số $h(u) = f(u) + u^2 - 1$ có $h'(u) = u'f'(u) + 2u.u' = u'[f'(u) + 2u]$

$$h'(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u' = 0 \\ f'(u) = -2u \end{cases}$$

$u' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f'(u) = -2u \Leftrightarrow u = a \in (1; 2) \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = a$ có 2 nghiệm trái dấu x_1, x_2

Do $f(1) \leq 0$ nên ta có bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

Câu 42: (Câu 29 - SGD Quảng Trị - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	2	-1	$+\infty$

Hàm số $g(x) = f\left(\frac{\ln(x^2+1)-2}{2}\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A). 5.

(B). 9.

(C). 11.

(D). 7.

Lời giải

Chọn B

Xét $t(x) = \frac{\ln(x^2+1)-2}{2}$, ta có bảng giá trị của $|t(x)|$

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
$ t(x) $	$+\infty$	0	1	0	$+\infty$

Ta có $g(x) = f\left(\frac{\ln(x^2+1)-2}{2}\right) = f(|t(x)|)$

Hàm số không có đạo hàm tại hai điểm $x = \pm\sqrt{e^2-1}$.

Tại mọi điểm $x \neq \pm\sqrt{e^2-1}$, ta có:

$$g'(x) = f'(|t(x)|) \cdot (|t(x)|)' = \begin{cases} \frac{f'(|t(x)|) \cdot x}{x^2+1} & \text{khi } x \in (-\infty; -\sqrt{e^2-1}) \cup (\sqrt{e^2-1}; +\infty) \\ -\frac{f'(|t(x)|) \cdot x}{x^2+1} & \text{khi } x \in (-\sqrt{e^2-1}; \sqrt{e^2-1}) \end{cases} \quad (*)$$



$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ |t(x)| = t_1 & (t_1 < -1) \quad (1) \\ |t(x)| = t_2 & (-1 < t_2 < 0) \quad (2) \\ |t(x)| = t_3 & (0 < t_3 < 1) \quad (3) \\ |t(x)| = t_4 & (t_4 > 1) \quad (4) \end{cases}$$

Dựa vào bảng giá trị hàm $|t|$, suy ra:

+) Phương trình (1), (2) vô nghiệm.

+) Phương trình (3) có 4 nghiệm phân biệt khác 0.

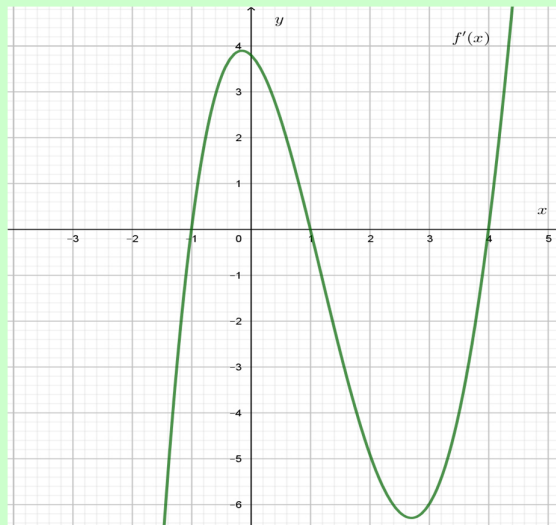
+) Phương trình (4) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 và khác các nghiệm của phương trình (3).

$\Rightarrow g'(x) = 0$ có 7 nghiệm và qua các nghiệm này $g'(x)$ đều đổi dấu.

Từ (*), ta thấy $g'(x)$ cũng đổi dấu khi x đi qua 2 điểm $-\sqrt{e^2 - 1}$, $\sqrt{e^2 - 1}$.

Vậy hàm số $g(x)$ có 9 cực trị.

Câu 43: (Câu 48 - SGD Sóc Trăng - Lần 2 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ là đường cong như hình vẽ bên dưới và $f(0) = -1$.



Hàm số $g(x) = |f(x^2) + 1|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

Ⓐ. 7.

Ⓑ. 5.

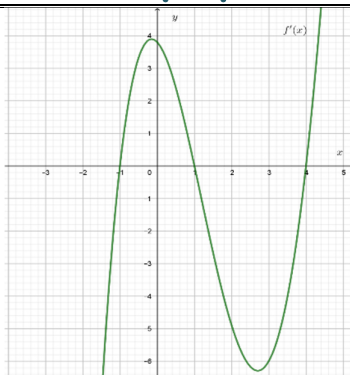
Ⓒ. 4.

Ⓓ. 3.

Lời giải

Chọn B





Xét $h(x) = f(x^2) + 1 \Rightarrow h'(x) = 2xf'(x^2)$.

Đặt $x^2 = t, t \geq 0$ ta có hàm $f'(t) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t < 1 \\ t > 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x^2 < 1 \\ x^2 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x > 2 \\ x < -2 \end{cases}$.

Vậy $f'(x^2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x > 2 \\ x < -2 \end{cases}$.

Ta có $f'(x)$ là hàm bậc ba có hệ số của x^3 dương suy ra $f(x)$ là hàm bậc bốn có hệ số của x^4 dương. Suy ra $h(x) = f(x^2)$ là hàm bậc tám có hệ số của x^8 dương. Vậy $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = +\infty$.

$$h(0) = f(0) + 1 = -1 + 1 = 0, \quad h(-2) = h(2) = f(4) + 1$$

Từ đồ thị hàm $f'(x)$ ta có $\int_0^1 f'(x) dx < \int_1^4 [-f'(x) dx] \Rightarrow f(4) < f(0) = -1 \Rightarrow f(4) < -1$.

Suy ra $h(-2) = h(2) < 0$. Vậy ta có bảng sau

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$2x$		-		-		-	0	+		+		+	
$f'(x^2)$		+	0	-	0	+		+	0	-	0	+	
$h'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	
$h(x)$	$+\infty$												$+\infty$

Từ bảng suy ra hàm số $g(x) = |h(x)|$ có 5 điểm cực tiểu.

Câu 44: (Câu 50 - SGD Vĩnh Phúc - Lần 2 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $f(x)$. Biết $f'(x)$ là hàm bậc 3. Có đồ thị như hình vẽ sau

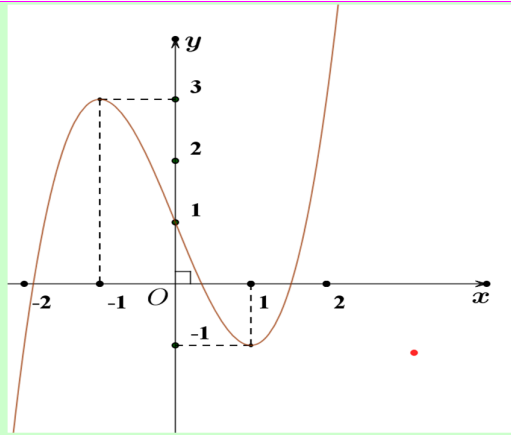


<https://luyenthitrangnhiem.vn>



<https://www.facebook.com/vietqld>





Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-10, 10]$ để hàm số $g(x) = f(x) + mx + 2021$ có đúng 1 cực trị?

(A). 20.

(B). 16.

(C). 15.

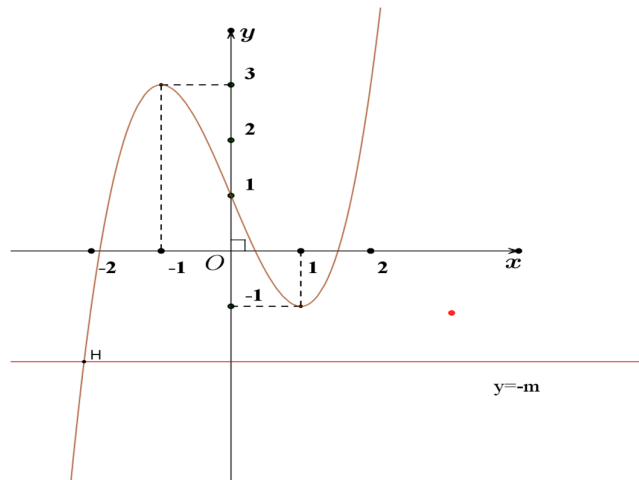
(D). 18.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = f'(x) + m \Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = -m$ (1)

Số nghiệm của (1) là số giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường $d: y = -m$



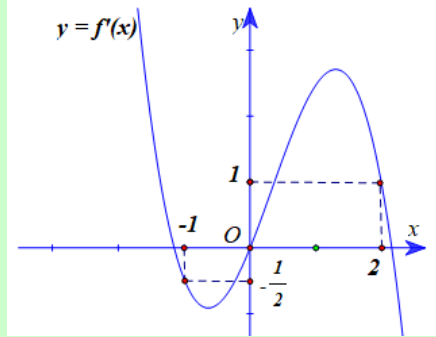
Dựa vào đồ thị trên. Để $g(x)$ có đúng 1 cực trị thì điều kiện là

$$\begin{cases} m \in [-10, 10] \\ m < -1 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2\}$$

Số giá trị của m là 16.

Câu 45: (Câu 48 - Chuyên Vinh- Nghệ An – Lần 1 – Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($ae < 0$). Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $y = |4f(x) - x^2|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu





(A). 3.

(B). 5.

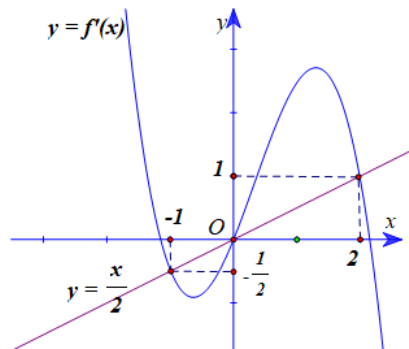
(C). 4.

(D). 2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = 4f(x) - x^2$. Ta có $g'(x) = 4f'(x) - 2x = 2(2f'(x) - x)$.



Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x}{2}$. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = \frac{x}{2}$ suy ra

$$f'(x) = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Theo hình vẽ ta có $a < 0$, mà $ae < 0 \Rightarrow e > 0$ suy ra $g(0) = 4f(0) = 4e > 0$.

Bảng biến thiên của $y = |g(x)|$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$	$g(-1)$	$g(0)$	$g(2)$	$-\infty$
$ g(x) $	$+\infty$	0	$g(0)$	0	$+\infty$

Dựa vào đồ thị $y = |g(x)|$ suy ra hàm số $y = |4f(x) - x^2|$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 46: (Câu 43 - Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - Lần 02 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:





x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$						$-\infty$

$\swarrow$ 2 $\nearrow$ 5 $\searrow$

Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = [f(2x^2 + x)]^2$ là

Ⓐ. 3.

Ⓑ. 2.

Ⓒ. 1.

Ⓓ. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g(x) = [f(2x^2 + x)]^2$; $g'(x) = 2f(2x^2 + x) \cdot f'(2x^2 + x) \cdot (4x + 1)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 1 = 0 \\ f(2x^2 + x) = 0 \\ f'(2x^2 + x) = 0 \end{cases}$$

$$4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Từ bảng biến thiên ta có: } f'(2x^2 + x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x = -2 \text{ (VN)} \\ 2x^2 + x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình $f(x) = 0$ chỉ có 1 nghiệm $x_0 > 1$ (Vì đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại một điểm có hoành độ lớn hơn 1). Khi đó

$$f(2x^2 + x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x = x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (-\infty; -1) \\ x = x_2 \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \end{cases}.$$

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ nên ta có bảng biến thiên:

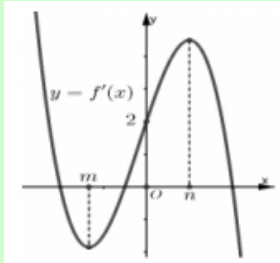
x	$-\infty$		x_1		-1		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$												$+\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$ ta có số điểm cực đại của hàm số $g(x) = [f(2x^2 + x)]^2$ là 2.

Câu 47: (Câu 50 - Chuyên Hưng Yên - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, (a \neq 0)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $e > n$





Số điểm cực trị của hàm số $y = f'(f(x) - 2x)$ là

Ⓐ. 7.

Ⓑ. 6.

Ⓒ. 10

Ⓓ. 14.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét } y = f'(f(x) - 2x) \Rightarrow y' = (f'(x) - 2) \cdot f''(f(x) - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 2 \\ f''(f(x) - 2x) = 0 \end{cases}$$

Với $f'(x) = 2$. Đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị $f'(x)$ tại 3 điểm phân biệt.

$$\text{Với } f''(f(x) - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - 2x = m, (m < 0) & (1) \\ f(x) - 2x = n, (n < e) & (2) \end{cases}$$

$$\text{Đặt } h(x) = f(x) - 2x \Rightarrow h'(x) = f'(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2.$$

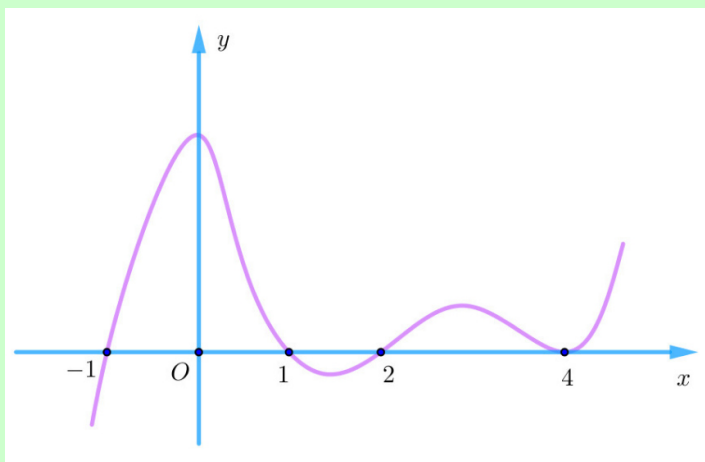
Bảng biến thiên của $h(x)$:

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
$h'(x)$		0	0	0	
$h(x)$					

$h(0) = e > n > m$

Vậy các phương trình (1) và (2) cho 4 nghiệm phân biệt.

Câu 48: Vậy số điểm cực trị của hàm số $y = f'(f(x) - 2x)$ là 7. (Câu 47 - Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi - Lần 3 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có đúng 4 điểm chung với trục hoành như hình vẽ bên dưới:



<https://luyenthitrangnghiem.vn>



<https://www.facebook.com/vietqld>



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = f(|x|^3 - 3|x| + m + 2021)$ có đúng 11 điểm cực trị?

(A). 0.

(B). 2.

(C). 5.

(D). 1.

Lời giải

Chọn D

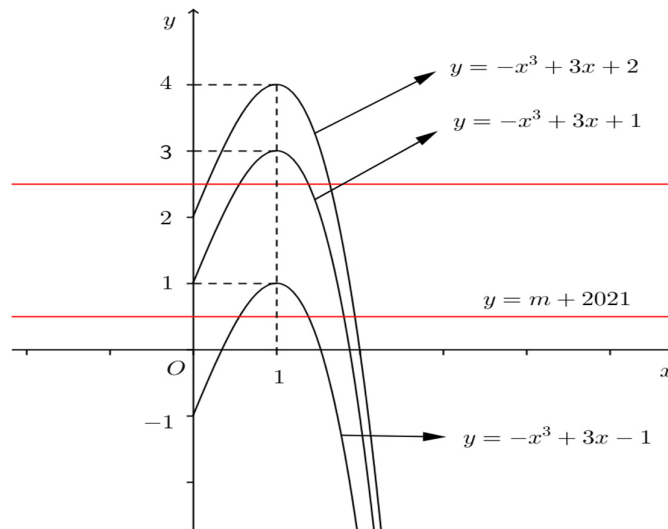
Xét $x > 0$: Hàm số có dạng $y = f(x^3 - 3x + m + 2021)$

$$y' = (3x^2 - 3)f'(x^3 - 3x + m + 2021)$$

Do nghiệm của phương trình $x^3 - 3x + m + 2021 = 4$ là các nghiệm bội bậc chẵn của phương trình $y' = 0$ nên ta có:

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ f'(x^3 - 3x + m + 2021) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (do } x > 0) \\ x^3 - 3x + m + 2021 = -1 \\ x^3 - 3x + m + 2021 = 1 \\ x^3 - 3x + m + 2021 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (do } x > 0) \\ m + 2021 = -x^3 + 3x - 1 \\ m + 2021 = -x^3 + 3x + 1 \\ m + 2021 = -x^3 + 3x + 2 \end{cases}$$

Vẽ đồ thị ba hàm số $y = -x^3 + 3x - 1$; $y = -x^3 + 3x + 1$; $y = -x^3 + 3x + 2$ với $x > 0$ trên cùng một hệ trục.



Hàm số $y = f(|x|^3 - 3|x| + m + 2021)$ có đúng 11 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ Hàm số $y = f(x^3 - 3x + m + 2021)$ có đúng 5 điểm cực trị dương

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f'(x^3 - 3x + m + 2021) = 0$ có đúng 4 nghiệm bội lẻ dương khác 1

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y = m + 2021$ cắt đồ thị ba hàm số $y = -x^3 + 3x - 1$; $y = -x^3 + 3x + 1$; $y = -x^3 + 3x + 2$ tại 4 điểm phân biệt có hoành độ dương khác 1

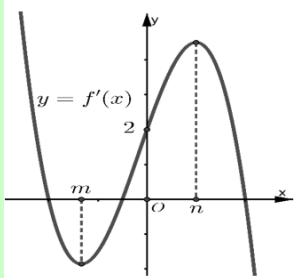
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m + 2021 < 1 \\ 2 < m + 2021 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2022 < m < -2020 \\ -2019 < m < -2018 \end{cases}$$

Do m nguyên nên $m = -2021$.

Vậy chỉ có 1 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 49: (Câu 4 - Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên - Lần 3 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, (a \neq 0)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ.





Biết rằng $e > n$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f'(f(x) - 2x)$ bằng

Ⓐ. 7.

Ⓑ. 10.

Ⓒ. 14.

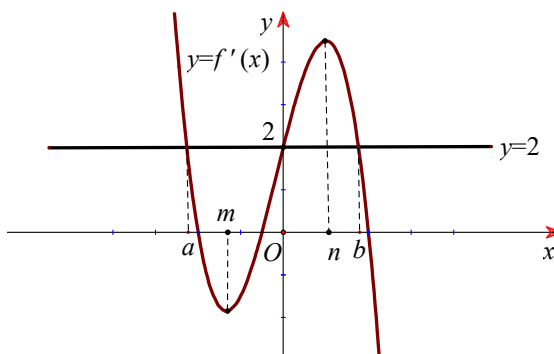
Ⓓ. 6.

Lời giải

Chọn A

$$g(x) = f'(f(x) - 2x) \Rightarrow g'(x) = [f'(x) - 2] \cdot f''(f(x) - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 2 \\ f''(f(x) - 2x) = 0 \end{cases}$$

$$+ f'(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a < m \\ x = 0 \\ x = b > n \end{cases}, \text{ (có 3 nghiệm đơn)}$$



$$+ \text{Từ đồ thị hàm số } y = f'(x) \text{ ta suy ra } f''(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = n \end{cases}$$

$$\text{Do đó } f''(f(x) - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - 2x = m, (1) \\ f(x) - 2x = n, (2) \end{cases}$$

Lập BBT cho hàm số $h(x) = f(x) - 2x$, với $h'(x) = f'(x) - 2$.

Ta có $h(0) = f(0) = e$, $e > n > m$

x	$-\infty$	a	0	b	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-	0	-
$h(x)$					

Do đó phương trình (1) và (2) có 4 nghiệm đơn.

Suy ra phương trình $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm đơn



<https://luyenthitracnghiem.vn>

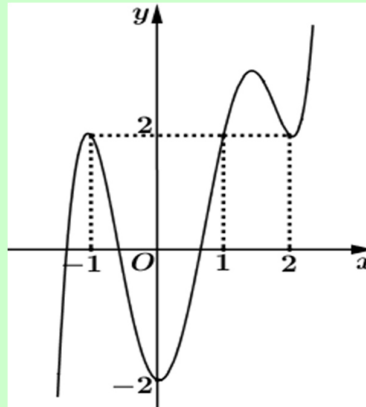


<https://www.facebook.com/vietqld>



nên hàm số $g(x) = f'(f(x) - 2x)$ có 7 cực trị.

Câu 50: (Câu 49 - Chuyên Lê Thánh Tông - Quảng Nam - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x-1)$ như hình vẽ



Khi đó hàm số $y = e^{f(x)+2x}$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- Ⓐ. $x_0 \in (-1; 0)$. Ⓑ. $x_0 \in (-4; -2)$. Ⓒ. $x_0 \in (0; 1)$. Ⓓ. $x_0 \in (-2; -1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = e^{f(x)+2x} \cdot (f'(x) + 2)$

$$y'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -2$$

Đồ thị $y = f'(x-1)$ dời sang phải 1 đơn vị theo trục Ox ta được đồ thị $y = f'(x)$. Khi đó đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị $y = f'(x)$ tại 2 điểm có hoành độ là 1 và a với $-1 < a < 0$ nên phương trình $y'(x) = 0$ có 2 nghiệm là 1 (nghiệm kép) và $-1 < a < 0$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	a	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$+$

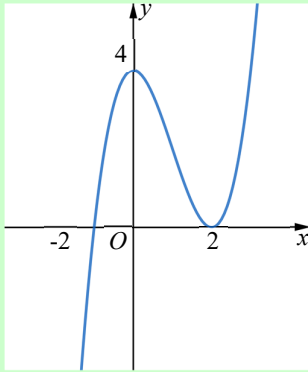
y

$f(a)$

$f(1)$

Vậy hàm số đạt tiểu tại điểm $x_0 = a \in (-1; 0)$.

Câu 51: (Câu 40 - Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Mệnh đề nào sau đây đúng:

- Ⓐ. Hàm số $y = f(\ln x)$ đạt cực tiểu tại $x = \frac{1}{e}$.
- Ⓑ. Hàm số $y = f(\ln x)$ đạt cực tiểu tại $x = e^2$.
- Ⓒ. Hàm số $y = f(\ln x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.
- Ⓓ. Hàm số $y = f(\ln x)$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Lời giải

Chọn B

♦ $y = g(x) = f(\ln x)$; TXĐ: $x > 0$

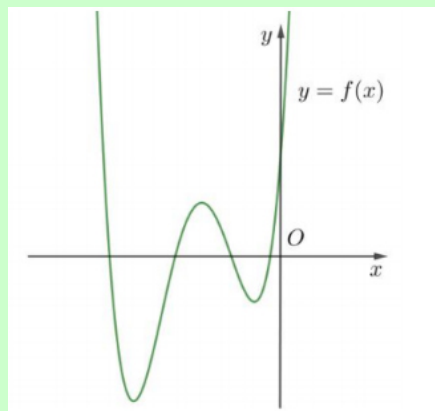
$$g'(x) = \frac{1}{x} \cdot f'(\ln x); g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \\ \ln x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = e^2 \end{cases}$$

BBT:

x	0	1		e^2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$-\infty$	↗ 4	↘ 0	↗ $+\infty$	

Từ BBT, ta thấy: hàm số $y = g(x) = f(\ln x)$ đạt cực tiểu tại $x = e^2$.

Câu 52: (Câu 50 - Chuyên Nguyễn Trãi - Hải Dương - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $F(x)$ có $F(0) = 0$. Biết $y = F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



<https://luyenthitracnghiem.vn>



<https://www.facebook.com/vietqld>



Số điểm cực trị của hàm số $G(x) = |F(x^6) - x^3|$ là

(A). 4.

(B). 5.

(C). 6.

(D). 3.

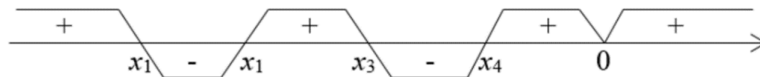
Lời giải

Chọn D

♦ Xét $g(x) = F(x^6) - x^3 \Rightarrow g'(x) = 6x^5 F'(x^6) - 3x^2 = 3x^2 [2x^3 f(x^6) - 1]$.

♦ Xét hàm số $h(x) = 2x^3 f(x^6) - 1 \Rightarrow h'(x) = 6x^2 f(x^6) + 12x^8 \cdot f'(x^6) = 3x^2 [2f(x^6) + 4x^6 \cdot f'(x^6)]$.

Từ đồ thị của $y = f(x)$ suy ra dấu của $f'(x)$



nên $\begin{cases} f(x^6) > 0 \\ f'(x^6) > 0 \end{cases} \Rightarrow h'(x) > 0 \quad \forall x$ nên hàm số $y = h(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = \pm\infty$

nên phương trình $h(x) = 0$ có 1 nghiệm duy nhất x_0 và $y = h(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua x_0 . Suy ra $g'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua x_0 nên x_0 là điểm cực tiểu.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$		$g(x_0)$	
$G(x)$		$-g(x_0)$	

Diagram showing the relationship between $g(x)$ and $G(x)$ at x_0 . Arrows indicate that $G(x)$ has a local minimum at x_0 with value $-g(x_0)$. The graph of $G(x)$ is shown with a blue line and a V-shape, with labels CT (Cực Trị) at the minimum and $g(x_0)$ at the points where $G(x) = 0$.

Câu 53: Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y = G(x)$ có 3 cực trị. (Câu 40 - Chuyên PTNK - HCM - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x-2)^2(x^2-x)$, $x \in \mathbb{R}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f\left(\frac{1}{2}x^2 - 6x + m\right)$ có 5 điểm cực trị. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

(A). 154.

(B). 17.

(C). 213.

(D). 153.

Lời giải

Chọn D

Ta có. Với $x=2$ là nghiệm kép, $x=0, x=1$ là nghiệm đơn. Đó đó hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị là $x=0, x=1$.



Đặt $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x^2 - 6x + m\right) \Rightarrow g'(x) = (x-6)f'\left(\frac{1}{2}x^2 - 6x + m\right)$.

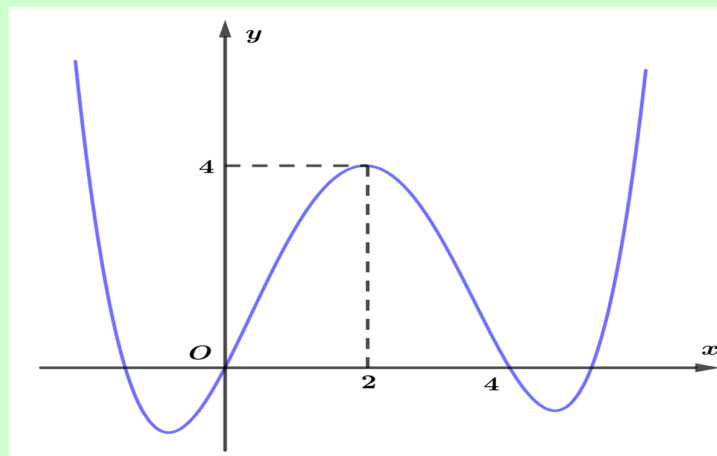
$$\text{Khi đó } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ \frac{1}{2}x^2 - 6x + m = 2 \\ \frac{1}{2}x^2 - 6x + m = 0(1) \\ \frac{1}{2}x^2 - 6x + m = 1(2) \end{cases}$$

Để hàm số có 5 điểm cực trị thì (1) & (2) có hai nghiệm phân biệt không trùng nhau và khác

$$6 \text{ Suy ra } \begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \frac{1}{2} \cdot 6^2 - 6 \cdot 6 + m \neq 0 \\ \frac{1}{2} \cdot 6^2 - 6 \cdot 6 + m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - \frac{m}{2} > 0 \\ 9 - \left(\frac{m-1}{2}\right) > 0 \\ m \neq 18, m \neq 19 \end{cases} \Leftrightarrow m < 18 \Rightarrow m \in \{1, 2, \dots, 17\}.$$

Vậy Tổng các giá trị của m là $1 + 2 + \dots + 17 = 153$.

Câu 54: (Câu 49 - Đề thi thử cụm trường THPT - Hải Dương - Lần 4 - năm 2021) Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2) - 2x^3 - 6x^2$ là



(A). 7.

(B). 10.

(C). 5.

(D). 11.

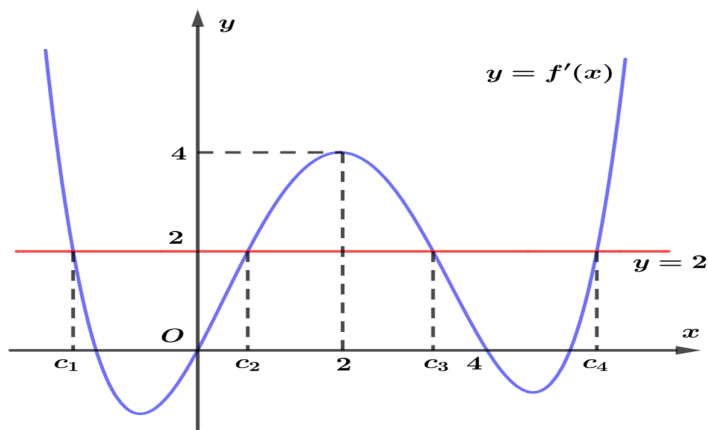
Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2) - 2x^3 - 6x^2$

Ta có $g'(x) = (3x^2 + 6x)f'(x^3 + 3x^2) - 6x^2 - 12x = 3x(x+2)[f'(x^3 + 3x^2) - 2]$.





$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ f'(x^3 + 3x^2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x^3 + 3x^2 = c_1 \quad (c_1 < 0) \quad (1) \\ x^3 + 3x^2 = c_2 \quad (0 < c_2 < 2) \quad (2) \\ x^3 + 3x^2 = c_3 \quad (2 < c_3 < 4) \quad (3) \\ x^3 + 3x^2 = c_4 \quad (c_4 > 4) \quad (4) \end{cases}$$

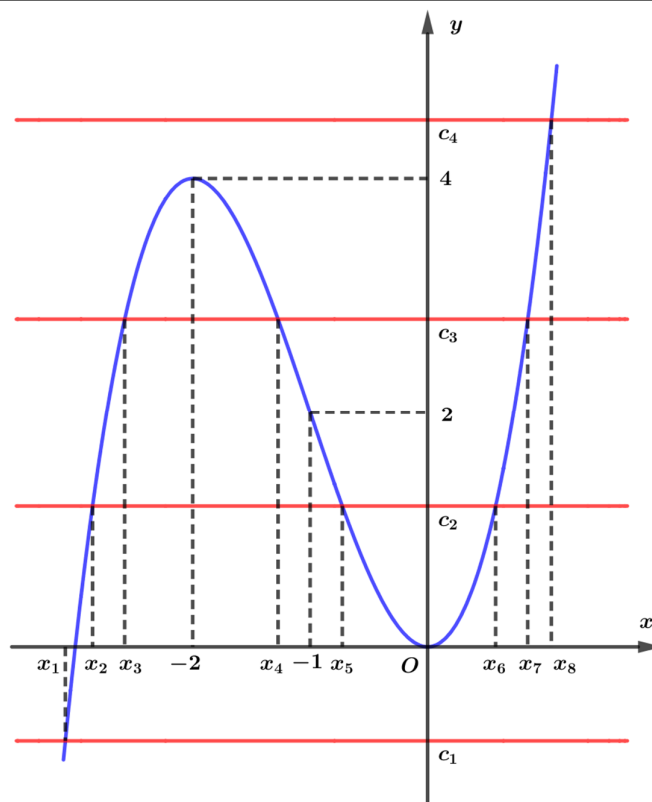
Xét hàm số $h(x) = x^3 + 3x^2$, ta có $h'(x) = 3x^2 + 6x$.

Bảng biến thiên $h(x)$:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

Vẽ đồ thị của các hàm số $y = h(x)$, $y = c_1$, $y = c_2$, $y = c_3$, $y = c_4$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ ta được





$$(1) \Leftrightarrow x = x_1; (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_2 \\ x = x_5 \\ x = x_6 \end{cases}; (3) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_3 \\ x = x_4 \\ x = x_7 \end{cases}; (4) \Leftrightarrow x = x_8$$

Trong đó $x_1 < x_2 < x_3 < -2 < x_4 < x_5 < 0 < x_6 < x_7 < x_8$.

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	-2	x_4	x_5	0	x_6	x_7	x_8	$+\infty$		
$g'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Từ bảng xét dấu ta kết luận được hàm số $g(x)$ có 10 điểm cực trị.

Câu 55: (Câu 44 - THPT Gia Bình - Bắc Ninh - Lần 1- Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

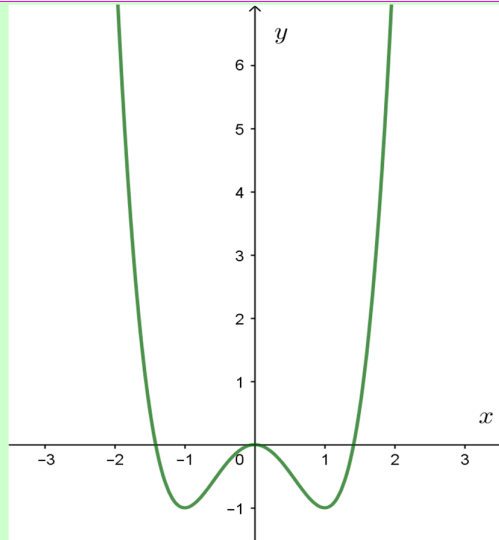


<https://luyenthitracnghiem.vn>



<https://www.facebook.com/vietgiald>





Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + f(x))$ là

(A). 11.

(B). 9.

(C). 8.

(D). 10.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta thấy hàm số trên có phương trình là $y = x^4 - 2x^2$. Vậy ta có:

$$f(x) = x^4 - 2x^2 \text{ và } f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$g'(x) = (f(x^3 + f(x)))' = (x^3 + f(x))' f'(x^3 + f(x)) = (3x^2 + f'(x)) f'(x^3 + f(x)).$$

$$\text{Suy ra } g'(x) = (3x^2 + f'(x)) f'(x^3 + f(x)) = (3x^2 + 4x^3 - 4x) f'(x^3 + x^4 - 2x^2).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (3x^2 + 4x^3 - 4x) f'(x^3 + x^4 - 2x^2) = 0$$

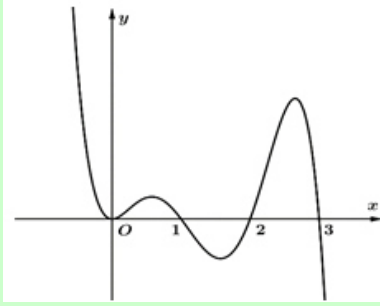
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 + 3x^2 - 4x = 0 \\ x^4 + x^3 - 2x^2 = 1 \\ x^4 + x^3 - 2x^2 = -1 \\ x^4 + x^3 - 2x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 + 3x^2 - 4x = 0 \\ x^4 + x^3 - 2x^2 - 1 = 0 \\ x^4 + x^3 - 2x^2 + 1 = 0 \\ x^4 + x^3 - 2x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x \approx 0,6930 \\ x \approx -1,4430 \\ x \approx 1,21195 \\ x \approx -2,0754 \\ x \approx -0,6710 \\ x \approx -1,9051 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Phương trình $g'(x) = 0$ có đúng 8 nghiệm đơn và 1 nghiệm bội lẻ $x = 0$ (nghiệm bội ba).

Vậy hàm số $g(x)$ có 9 điểm cực trị.

Câu 56: (Câu 42 - THPT Hàn Thuyên - Bắc Ninh - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm đa thức $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau





Có bao nhiêu giá trị của $m \in [0; 6]; 2m \in \mathbb{Z}$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - 2|x-1| - 2x + m)$ có đúng 9 điểm cực trị?

Ⓐ. 7.

Ⓑ. 5.

Ⓒ. 3.

Ⓓ. 6.

Lời giải

Chọn C

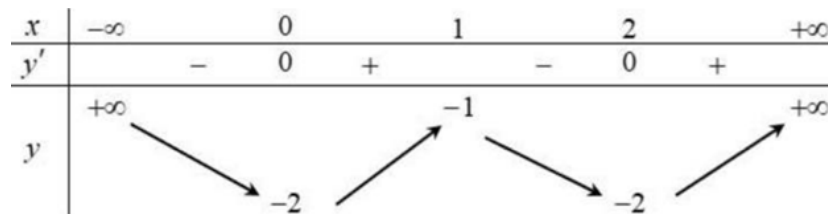
Ta có: $g'(x) = \frac{2(x-1)(|x-1|-1)}{|x-1|} f'(x^2 - 2|x-1| - 2x + m)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \\ f'(x^2 - 2|x-1| - 2x + m) = 0 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị hàm số

$$f'(x) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2|x-1| - 2x + m = 1 \\ x^2 - 2|x-1| - 2x + m = 2 \\ x^2 - 2|x-1| - 2x + m = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2|x-1| - 2x = 1 - m \\ x^2 - 2|x-1| - 2x = 2 - m \\ x^2 - 2|x-1| - 2x = 3 - m \end{cases}$$

Xét hàm số $h(x) = x^2 - 2|x-1| - 2x$. Ta có



Để hàm số có 9 cực trị thì

TH1: $-2 < 2 - m < -1 \Leftrightarrow 3 < m < 4$

TH2: $1 - m \geq -1 \Leftrightarrow m \leq 2$.

Vậy có ba giá trị của m.

Câu 57: (Câu 50 - THPT Hậu Lộc 4 - Thanh Hóa - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau



<https://luyenthitracnghiem.vn>

<https://www.facebook.com/vietgpd>





x	$-\infty$	-3	-1	1	2	3	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	2	0	2	-3	2	$-\infty$

Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = \left| f(|x^2 - 8x + 7| + x^2 - 3) \right|$ là

(A). 6 .

(B). 8 .

(C). 7 .

(D). 9 .

Lời giải

Chọn C

♦ Đặt $u(x) = |x^2 - 8x + 7| + x^2 - 3$, ta có $u(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 4 & \text{khi } x \leq 1 \vee x \geq 7 \\ 8x - 10 & \text{khi } 1 < x < 7 \end{cases}$.

$$\Rightarrow u'(x) = \begin{cases} 4x - 8 & \text{khi } x < 1 \vee x > 7 \\ 8 & \text{khi } 1 < x < 7 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$
$u'(x)$	$-$	$ $	$+$	$+$
$u(x)$	$+\infty$	-2	$+\infty$	$+\infty$

♦ Đặt $h(x) = f(u(x))$, ta có $h'(x) = u'(x) \cdot f'(u(x))$.

Ta có: $u'(x)$ chỉ đổi dấu qua $x = 1$.

$$f'(u(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = 3 \\ u(x) = 2 \\ u(x) = 1 \\ u(x) = -1 \\ u(x) = -3 \end{cases}$$

Từ bảng biến thiên của $u(x)$ ta có

$u(x) = 3$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_8 .

$u(x) = 2$ có hai nghiệm phân biệt x_2, x_7 .

$u(x) = 1$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_6 .

$u(x) = -1$ có hai nghiệm x_4, x_5 .

$u(x) = -3$ vô nghiệm.

♦ Ta có bảng biến thiên



x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	x_4	1	x_5	x_6	x_7	x_8	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	+	0	-
$h(x)$	$-\infty$	3	-3	a	0	a	0	a	-3	3	$-\infty$

Câu 58: Từ bảng, dễ dàng suy ra hàm số $g(x) = \left| f(|x^2 - 8x + 7| + x^2 - 3) \right| = |h(x)|$ có 7 điểm cực đại. (Câu 48 - THPT Hồng Quang - Hải Dương - Lần 3 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			6			$+\infty$
			2		2		

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \frac{1}{x^2}(f(x) - 6)^4$ là

- Ⓐ. 2. Ⓑ. 4. Ⓒ. 5. Ⓓ. 3.

Lời giải

Chọn B

♦ Theo giả thiết ta có $f(x) = ax^4 + bx^2 + c \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 2bx$.

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $f(x)$ đi qua $A(-2; 2), B(0; 6), C(2; 2)$ và có ba điểm cực trị

$$\Rightarrow \begin{cases} 16a + 4b + c = 2 \\ c = 6 \\ 32a + 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -2 \\ c = 6 \end{cases}. \text{ Vậy } f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 6, f'(x) = x^3 - 4x$$

♦ Ta có Hàm số $g(x) = \frac{1}{x^2}(f(x) - 6)^4$ xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$g'(x) = -\frac{2}{x^3}(f(x) - 6)^4 + \frac{1}{x^2} \cdot 4(f(x) - 6)^3 \cdot f'(x)$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{(f(x) - 6)^3}{x^3} (4x \cdot f'(x) - 2f(x) + 12)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - 6 = 0 & (1) \\ 4xf'(x) - 2f(x) + 12 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } (1) \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 6 = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2\sqrt{2} \end{cases}.$$



$$(2) \Leftrightarrow 4x(x^3 - 4x) - 2\left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 6\right) + 12 = 0 \Leftrightarrow \frac{7}{2}x^4 - 12x^2 = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{2\sqrt{42}}{7} \end{cases}$$

$$\text{Vì } x \neq 0 \text{ nên có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2\sqrt{2} \\ x = \pm \frac{2\sqrt{42}}{7} \end{cases} \text{ và các nghiệm đó đều là nghiệm bội lẻ.}$$

Do đó hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực trị.

Câu 59: (Câu 49 - THPT Kim Liên - Hà Nội - Lần 2 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$						

Số điểm cực đại của hàm số $y = f(|f(x)|)$ là

- (A). 2. (B). 3. (C). 0. (D). 1.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } g(x) = f(|f(x)|) \Rightarrow g'(x) = f'(|f(x)|) \cdot \frac{f'(x) \cdot f(x)}{|f(x)|}$$

Do đó $g'(x)$ không xác định khi $f(x) = 0$ hay $x = 0$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(|f(x)|) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ |f(x)| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ f(x) = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Từ bảng biến thiên của $f(x)$ ta có: $|f(x)| \in [0; 1], \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f'(|f(x)|) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

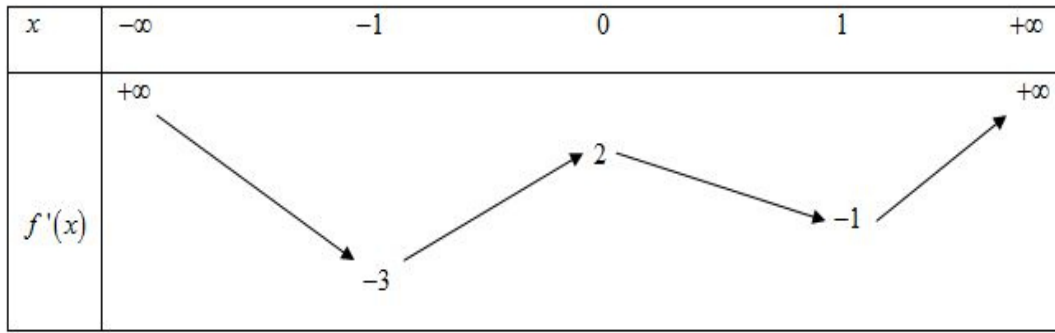
Ta có bảng xét dấu $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$		0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-$		$-$	0	$+$	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$

Từ bảng biến thiên suy ra số điểm cực đại của hàm số $y = f(|f(x)|)$ là 2..

Câu 60: (Câu 41 - THPT Kim Sơn A- Ninh Bình - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:





Hỏi hàm số

$$g(x) = f\left(\frac{\ln(x^2+1)-2}{2}\right) \text{ có bao nhiêu điểm cực tiểu?}$$

(A). 9.

(B). 4.

(C). 7.

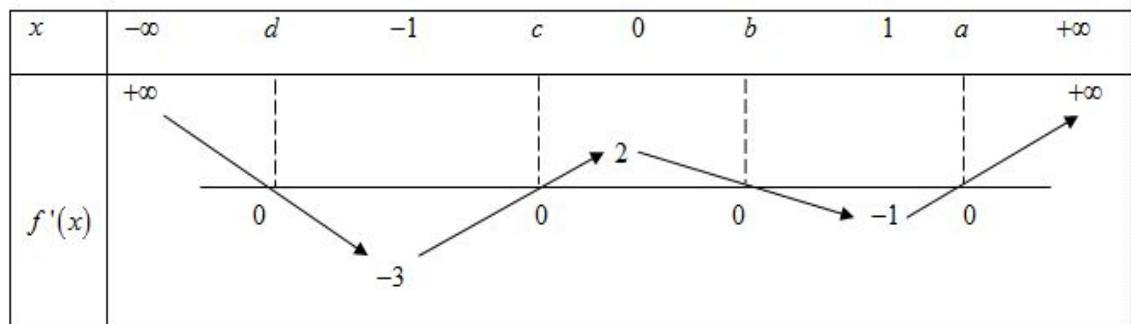
(D). 5.

Lời giải

Chọn B

+) Do $x^2 \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $\frac{\ln(x^2+1)-2}{2} \geq -1$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

+) Bảng biến thiên



$$\text{Suy ra } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (1; +\infty) \\ x = b \in (0; 1) \\ x = c \in (-1; 0) \\ x = d \in (-\infty; -1) \end{cases}.$$

+) Xét hàm số trên $y = f\left(\frac{\ln(x^2+1)-2}{2}\right)$ trên $[0; +\infty)$

$$y' = f'\left(\frac{\ln(x^2+1)-2}{2}\right) \cdot \frac{x}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'\left(\frac{\ln(x^2+1)-2}{2}\right) = 0 \\ \frac{x}{x^2+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\ln(x^2+1)-2}{2} = a \\ \frac{\ln(x^2+1)-2}{2} = b \\ \frac{\ln(x^2+1)-2}{2} = c \\ \frac{\ln(x^2+1)-2}{2} = d(\text{VN}) \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{e^{2a+2}} - 1 \\ x = \sqrt{e^{2b+2}} - 1 \\ x = \sqrt{e^{2c+2}} - 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Suy ra bảng biến thiên

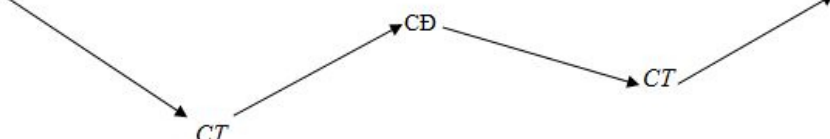


<https://luyenthitrangnghiem.vn>

<https://www.facebook.com/vietqld>





x	0	$\sqrt{e^{2c+2}}-1$	$\sqrt{e^{2b+2}}-1$	$\sqrt{e^{2a+2}}-1$	$+\infty$		
y'	-	0	+	0	-	0	+
y							

Mặt khác đồ thị hàm số $g(x) = f\left(\left|\frac{\ln(x^2+1)-2}{2}\right|\right)$ được vẽ như sau:

- Giữ phần đồ thị hàm số $y = f\left(\frac{\ln(x^2+1)-2}{2}\right)$ trên $[0; +\infty)$.

- Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y = f\left(\frac{\ln(x^2+1)-2}{2}\right)$ trên $[0; +\infty)$ qua Ox .

Vậy hàm số $g(x) = f\left(\left|\frac{\ln(x^2+1)-2}{2}\right|\right)$ có 4 điểm cực tiểu.



Câu 61: (Câu 50 - THPT Lê Hồng Phong - Nam Định - Năm 2020 - 2021) Cho $f(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	-1	-3	-1	$+\infty$

Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(|x^3|) - 3|x|$.

(A). 1.

(B). 2.

(C). 3.

(D). 0.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $h(x) = f(x^3) - 3x$.

$$h'(x) = 3x^2 \cdot f'(x^3) - 3.$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 \cdot f'(x^3) - 3 = 0 \quad (1).$$

Để thấy $x=0$ không là nghiệm của (1) nên $(1) \Leftrightarrow f'(x^3) = \frac{1}{x^2} \quad (2).$

Đặt $t = x^3$ thì (2) trở thành $f'(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} \quad (t \neq 0 - 3).$

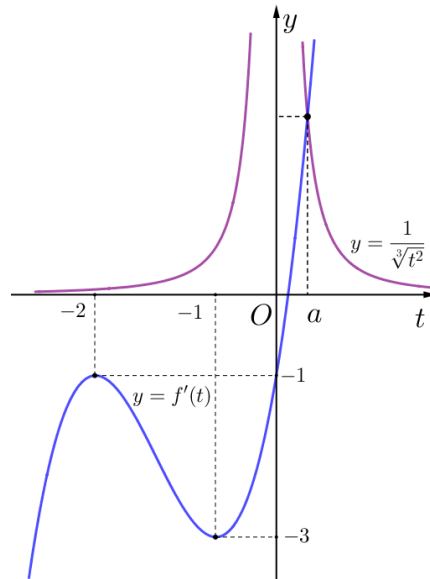


Xét hàm số $y = \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}$

+ $t > 0$ thì $y = t^{-\frac{2}{3}}$ là hàm số lũy thừa, $y' = -\frac{2}{3}t^{-\frac{5}{3}} < 0$ nên y nghịch biến trên $(0; +\infty)$ và đồ thị của y nhận hai trục tọa độ làm hai tiệm cận.

+ $y(t) = y(-t)$ nên y là hàm số chẵn. Do đó đồ thị của y nhận Oy làm trục đối xứng.

Vẽ đồ thị của $f'(t)$ và $y = \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}$ trên cùng hệ trục tọa độ ta có:



Từ đồ thị ta có $(3) \Leftrightarrow t = a > 0$. Suy ra $x = \sqrt[3]{a} > 0$

Bảng biến thiên của $h(x)$:

x	$-\infty$	0	$\sqrt[3]{a}$	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$	$h(0)$	$h(\sqrt[3]{a})$	$+\infty$

Ta thấy hàm số $g(x) = h(|x|)$ là hàm số chẵn nên đồ thị của $g(x)$ nhận Oy làm trục đối xứng.

Do đó ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt[3]{a}$	0	$\sqrt[3]{a}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0
$g(x)$	$+\infty$	$g(\sqrt[3]{a})$	$g(0)$	$g(\sqrt[3]{a})$	$+\infty$

(Đề ý $g(-\sqrt[3]{a}) = g(\sqrt[3]{a})$)

Vậy hàm số $g(x)$ có hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại.

Câu 62: --- HẾT --- (Câu 48 - THPT Ngô Quyền - Ba Vì - Hà Nội - Lần 2 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(x) + x$ là

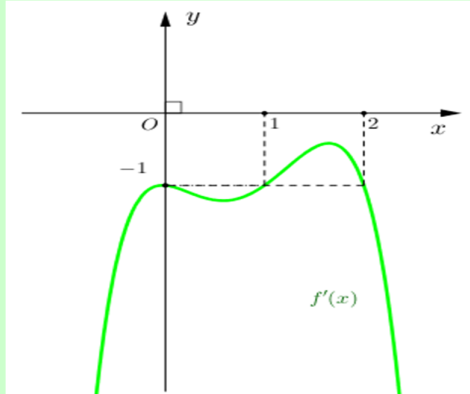


<https://luyenthitracnghiem.vn>



<https://www.facebook.com/vietqld>





Ⓐ. 1.

Ⓑ. 2.

Ⓒ. 3.

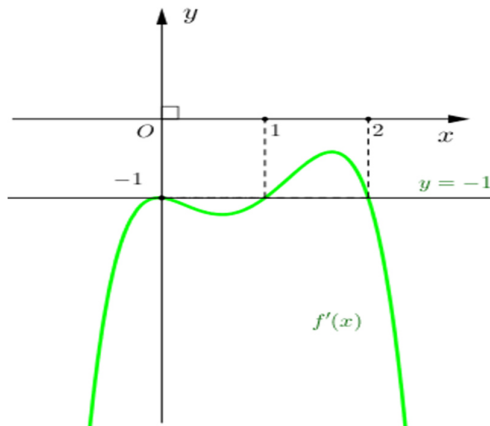
Ⓓ. 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x) = f'(x) + 1$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -1$ (*).

Phương trình chính là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $y = -1$.



Dựa vào đồ thị, ta thấy có nghiệm $x = 0$, $x = 1$ và $x = 2$.

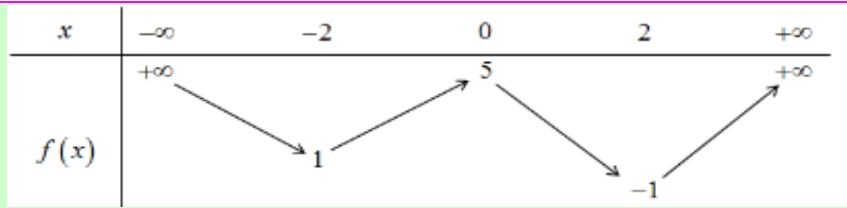
Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$:

x	$-\infty$	0		1	2		$+\infty$	
$g'(x)$	-		0	-	0	+	0	-
$g(x)$								

Dựa vào BBT, hàm số $g(x) = f(x) + x$ có một điểm cực tiểu $x = 1$.

Câu 63: (Câu 44 - THPT Nguyễn Đăng Đạo - Thanh Hóa - Lần 2 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có bảng biến thiên như sau:





Số điểm cực tiểu của hàm số $y = 2021^{f(x)} - 2020^{f(x)}$ là

- (A). 1. (B). 3. (C). 2. (D). 4.

Lời giải

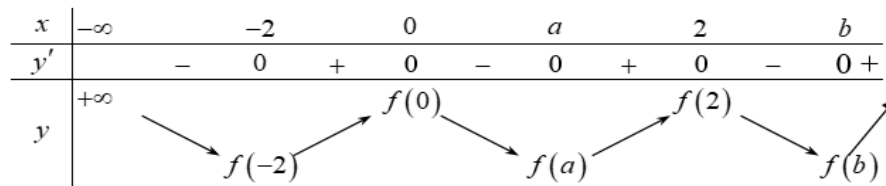
Chọn B

Xét hàm số $y = g(x) = 2021^{f(x)} - 2020^{f(x)}$

Ta có: $g'(x) = f'(x)(2021^{f(x)} \ln 2021 - 2020^{f(x)} \ln 2020)$.

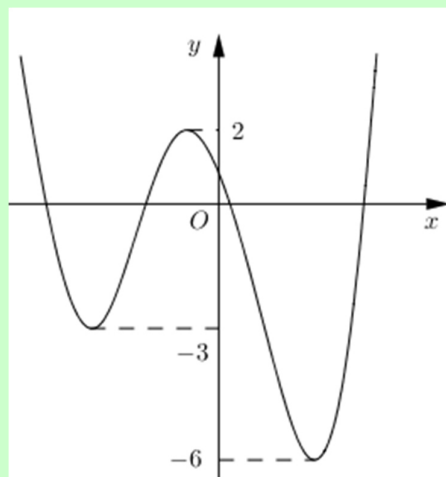
$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \pm 2 \\ \log 2021^{f(x)} \ln 2021 - 2020^{f(x)} \ln 2020 = 0(*) \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } (*) \Leftrightarrow \left(\frac{2021}{2020}\right)^{f(x)} = \log_{2021} 2020 \Leftrightarrow f(x) = \log_{\frac{2021}{2020}} (\log_{2021} 2020) \Rightarrow \begin{cases} x = a \in (0; 2) \\ x = b \in (2; +\infty) \end{cases}$$



Vậy, từ bảng xét dấu ta thấy số điểm cực tiểu của hàm số $y = g(x)$ là 3.

Câu 64: (Câu 49 - THPT Nguyễn Huệ - Đắk Lắk - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 4 và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-12; 12]$ để hàm số $g(x) = |2f(x-1) + m|$ có 5 điểm cực trị?



- (A). 12. (B). 14. (C). 15. (D). 13.

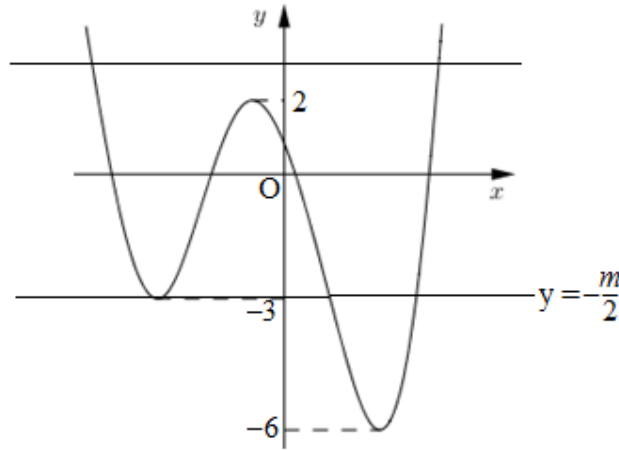
Lời giải

Chọn C



Nhận xét: Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x-1)$ bằng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định $\mathbb{R}$

Dựa vào đồ thị, hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị



Để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị

$\Leftrightarrow 2f(x) + m = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{m}{2}$ có 2 nghiệm phân biệt hoặc 3 nghiệm trong đó có 1 nghiệm bội chẵn và 2 nghiệm đơn

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{m}{2} \geq 2 \\ -6 < -\frac{m}{2} \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -4 \\ 6 \leq m < 12 \end{cases}$$

Mà m là giá trị nguyên thuộc $[-12; 12]$ nên $m \in \{-12; -11; \dots; -4; 6; 7; \dots; 11\}$

Vậy có 15 giá trị nguyên m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 65: (Câu 40 - PTNK Cơ Sở 2 - TPHCM - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)^2(x^2-x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f\left(\frac{1}{2}x^2 - 6x + m\right)$ có 5 điểm cực trị. Tính tổng các phần tử của S ?

(A). 154.

(B). 17.

(C). 213.

(D). 153.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = (x-2)^2(x^2-x) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$. Với $x = 2$ là nghiệm kép, $x = 1, x = 0$ là

nghiệm đơn. Do đó hàm số $f = f(x)$ đạt cực trị tại $x = 1, x = 0$.

Đặt $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x^2 - 6x + m\right) \Rightarrow g'(x) = (x-6)f'\left(\frac{1}{2}x^2 - 6x + m\right)$. Khi đó



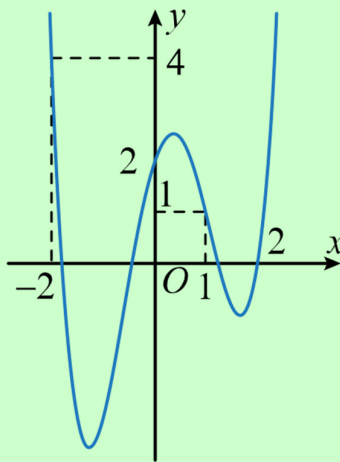
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ \frac{1}{2}x^2 - 6x + m = 2 \\ \frac{1}{2}x^2 - 6x + m = 0(1) \\ \frac{1}{2}x^2 - 6x + m = 1(2) \end{cases} \cdot \text{Giả sử } x_0 \text{ là nghiệm của phương trình (1) thì}$$

$\frac{1}{2}x_0^2 - 6x_0 + m = 0$ do đó x_0 không thể là nghiệm của phương trình (2) hay nói cách khác phương trình (1), (2) không có nghiệm chung. Vì vậy, để hàm số $f\left(\frac{1}{2}x^2 - 6x + m\right)$ có 5 điểm cực trị thì phương trình (1), (2) có hai nghiệm phân biệt khác 6 hay

$$\begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \frac{1}{2} \cdot 6^2 - 6 \cdot 6 + m \neq 0 \\ \frac{1}{2} \cdot 6^2 - 6 \cdot 6 + m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - \frac{m}{2} > 0 \\ 9 - \left(\frac{m-1}{2}\right) > 0 \\ m < 18 \\ m \neq 18, m \neq 19 \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}^+} m \in \{1, 2, \dots, 17\}.$$

Vậy tổng các giá trị của m là: $1 + 2 + \dots + 17 = 153$.

Câu 66: (Câu 49 - THPT Quảng Xương - Thanh Hóa - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x^2 - 4x + 3) - 3(x-2)^2 + \frac{1}{2}(x-2)^4$ là

(A). 7.

(B). 3.

(C). 4.

(D). 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$g'(x) = (2x-4)f'(x^2-4x+3) - 6(x-2) + 2(x-2)^3 = (2x-4)\left[f'(x^2-4x+3) - 3 + (x-2)^2\right]$$

$$\text{Ta có: } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4 = 0 \\ f'(x^2-4x+3) - 3 + (x-2)^2 = 0 \end{cases}$$



<https://luyenthitracnghiem.vn>

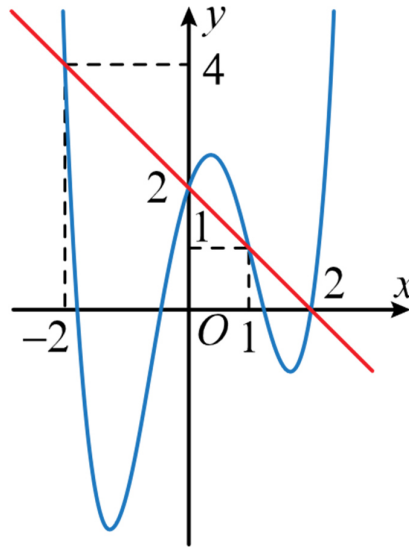


<https://www.facebook.com/tietquyld>



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ f'(x^2-4x+3)=2-(x^2-4x+3) \quad (*) \end{cases}$$

Đặt $x^2-4x+3=t$, ta có: $(*) \Leftrightarrow f'(t)=2-t$.



Từ đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = 2 - t$ ta có:

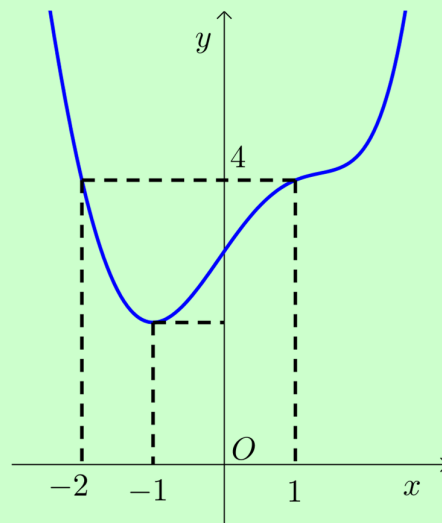
$$f'(t) = 2 - t \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = -2 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 1 \\ x^2 - 4x + 3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = 2 \pm \sqrt{2} \\ x = 2 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên hàm số $y = g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	$2-\sqrt{3}$	$2-\sqrt{2}$	1	2	3	$2+\sqrt{2}$	$2+\sqrt{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	-
$g(x)$									

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực đại.

Câu 67: (Câu 47 - THPT Quảng Xương 1 - Thanh Hóa - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ ($a \neq 0$) và hàm số $y = f'(x)$ có hình vẽ dưới đây



Đặt $g(x) = f(3x-1) - 9x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 6x + 2021$. Hỏi hàm số $f = g(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

Ⓐ. 7.

Ⓑ. 3.

Ⓒ. 9.

Ⓓ. 5.

Lời giải

Chọn B

$$g'(x) = 3f'(3x-1) - 27x^2 + 9x - 6$$

$$\text{Đặt } t = 3x-1 \Rightarrow 3x = t+1$$

$$g'(t) = 3f'(t) - 3t^2 - 3t - 6$$

$$* \quad g'(t) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = t^2 + t + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \\ t = -1 \Rightarrow x = 0 \\ t = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	0	-
$g(x)$	$+\infty$		$\frac{4085}{2}$		$+\infty$
			2127		$\frac{4029}{2}$

Vậy hàm số $g(|x|)$ có ba điểm cực trị

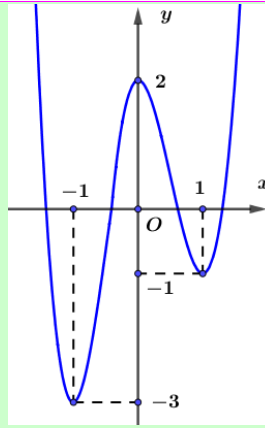
Câu 68: (Câu 50 - THPT Thăng Long - Hà Nội - Lần 2 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(4x^2 - 4x) - \frac{8}{3}x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ là



<https://luyenthitracnghiem.vn>

<https://www.facebook.com/vietqld>





Ⓐ. 4.

Ⓑ. 5.

Ⓒ. 9.

Ⓓ. 7.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y' = 4(2x-1)f'(4x^2-4x) - 4(2x-1)(x-1)$$

$$\Rightarrow y' = 4(2x-1)[f'(4x^2-4x) - (x-1)].$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow y' = 4(2x-1)[f'(4x^2-4x) - (x-1)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ f'(4x^2-4x) = x-1 \end{cases}$$

$$\text{Xét phương trình: } f'(4x^2-4x) = x-1 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = 4x^2 - 4x \Rightarrow 4x^2 - 4x - t = 0 \quad \Delta' = 4 + 4t \geq 0 \Leftrightarrow t \geq -1.$$

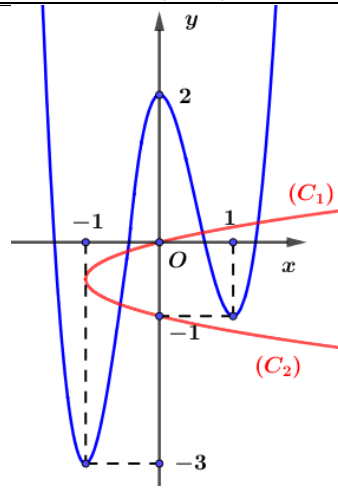
$$\text{Khi đó: } 4x^2 - 4x - t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1-\sqrt{1+t}}{2} \\ x = \frac{1+\sqrt{1+t}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{-1-\sqrt{1+t}}{2} \\ x-1 = \frac{-1+\sqrt{1+t}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Phương trình (1) trở thành: } \begin{cases} f'(t) = \frac{-1-\sqrt{1+t}}{2} \\ f'(t) = \frac{-1+\sqrt{1+t}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vẽ đồ thị 3 hàm số } y = f'(x), y = \frac{-1-\sqrt{1+x}}{2} (C_1), y = \frac{-1+\sqrt{1+x}}{2} (C_2) \text{ trên cùng hệ trục tọa độ}$$

ta thấy đồ thị (C_1) cắt đồ thị $y = f'(x)$ tại 3 điểm, đồ thị (C_2) cắt đồ thị $y = f'(x)$ tại 1 điểm.

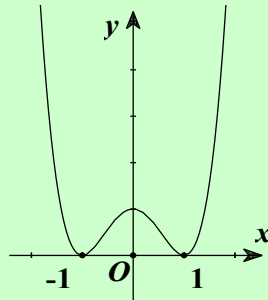




Với mỗi nhánh, mỗi giao điểm t sẽ tương ứng với một giá trị duy nhất của x khác $\frac{1}{2}$.

Vậy hàm số $y = f(4x^2 - 4x) - \frac{8}{3}x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ có 5 điểm cực trị.

Câu 69: (Câu 50 - THPT Thanh Chương 1 – Nghệ An – Lần 2 – Năm 2020 - 2021) Cho $f(x)$ là một hàm đa thức bậc năm thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



Hàm số $g(x) = \left| f(\sin x) + \frac{1}{3} \sin^3 x - \sin^2 x \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0; 3\pi)$?

(A). 15.

(B). 11.

(C). 9.

(D). 13.

Lời giải

Chọn D

Do $f(x)$ là một hàm đa thức bậc năm nên $f'(x)$ là một hàm đa thức bậc bốn.

Dựa vào đồ thị hình vẽ ta nhận thấy $f'(x)$ có dạng $f'(x) = ax^4 + bx^2 + c$, đồ thị đi qua các điểm $A(0; 1)$, $B(1; 0)$ và có điểm cực tiểu $x_{CT} = 1$. Từ đó ta có:

$$\begin{cases} f'(0) = 1 \\ f'(1) = 0 \\ f''(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 0 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x + c$$

$$\text{Do } f(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x.$$



<https://luyenthitranghien.vn>



<https://www.facebook.com/vietqld>





Xét hàm số $g(x) = \left| f(\sin x) + \frac{1}{3} \sin^3 x - \sin^2 x \right|$, ta đặt $h(x) = f(\sin x) + \frac{1}{3} \sin^3 x - \sin^2 x$

⊗ Tìm số cực trị của hàm số $y = h(x)$.

$$h'(x) = \cos x \cdot f'(\sin x) + \sin^2 x \cdot \cos x - 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ f'(\sin x) = -\sin^2 x + 2 \sin x \end{cases}$$

$$+) \text{ Với } \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình $\cos x = 0$ có 3 nghiệm đơn thuộc khoảng $(0; 3\pi)$. (1)

$$+) \text{ Với } f'(\sin x) = -\sin^2 x + 2 \sin x$$

$$\text{Đặt } t = \sin x, t \in [-1; 1] \Rightarrow f'(t) = -t^2 + 2t$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$-t^2 + 2t = t^4 - 2t^2 + 1 \Leftrightarrow t^4 - t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \alpha \ (\alpha \approx 1,3864) \ (l) \\ t = \beta \ (\beta \approx 0,4257) \ (n) \end{cases}$$

Với $t = \beta \in (0; 1)$ thì $\sin x = \beta$, khi đó $f'(\sin x) = -\sin^2 x + 2 \sin x$ có 4 nghiệm đơn thuộc khoảng $(0; 3\pi)$. (2)

Từ (1), (2) suy ra hàm số $y = h(x)$ có 7 cực trị trên khoảng $(0; 3\pi)$ (*)

⊗ Tìm số nghiệm của phương trình $h(x) = 0$.

$$t = \sin x \Rightarrow f(t) + \frac{1}{3} t^3 - t^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} t^5 - \frac{2}{3} t^3 + t + \frac{1}{3} t^3 - t^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \frac{1}{5} t^4 - \frac{1}{3} t^2 - t + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = a \ (a \approx 1,69) \ (l) \\ t = b \ (b \approx 0,86) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = b \ (b \approx 0,86) \end{cases}$$

$$+ \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{phương trình } h(x) = 0 \text{ có 2 nghiệm thuộc khoảng } (0; 3\pi). \ (3)$$

$$+ \sin x = b \ (b \approx 0,86) \Rightarrow \text{phương trình } h(x) = 0 \text{ có 4 nghiệm thuộc khoảng } (0; 3\pi). \ (4)$$

Từ (3), (4), suy ra $h(x) = 0$ có 6 nghiệm đơn trên khoảng $(0; 3\pi)$ (**)

Câu 70: Từ (*), (**) ta kết luận được hàm số $y = g(x)$ đã cho có 13 điểm cực trị. (Câu 40 - TX Quảng Trị - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$				$+\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		-3	2	-1	



Hàm số $g(x) = f\left(\left|\frac{\ln(x^2+1)-2}{2}\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A). 7.

(B). 11.

(C). 5.

(D). 9.

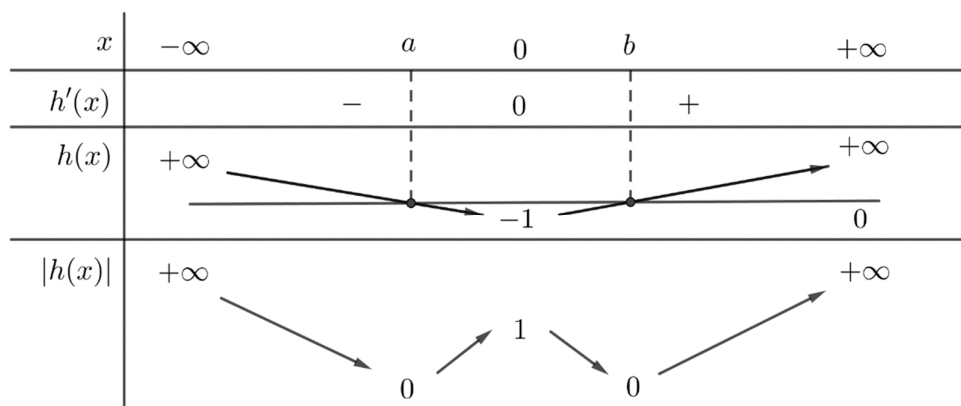
Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } h(x) = \frac{\ln(x^2+1)-2}{2} \Rightarrow h'(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$\text{Cho } h'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

BBT (1)



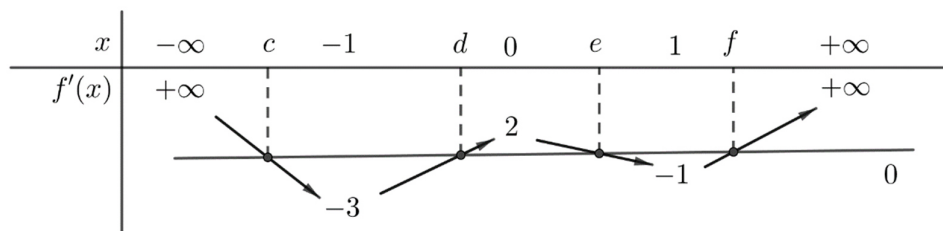
$$\text{Ta có: } g(x) = f(|h(x)|) \Rightarrow g'(x) = h'(x) \cdot \frac{h(x)}{|h(x)|} f'(|h(x)|)$$

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} h'(x) = 0 \\ h(x) = 0 \\ f'(|h(x)|) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Với } h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Với } h(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a (a < 0) \\ x = b (b > 0) \end{cases}$$

Với $f'(|h(x)|) = 0$, ta có:



$$\Rightarrow f'(|h(x)|) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |h(x)| = c (c < -1) \\ |h(x)| = d (-1 < d < 0) \\ |h(x)| = e (0 < e < 1) \\ |h(x)| = f (f > 1) \end{cases}$$



<https://luyenthitracnghiem.vn>



<https://www.facebook.com/vietqld>



Dựa vào bảng biến thiên (1) ta có được phương trình $|h(x)| = e$ có 4 nghiệm phân biệt và phương trình $|h(x)| = f$ có hai nghiệm phân biệt, tất cả đều khác 0, a và b .

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có tổng cộng 9 nghiệm bội lẻ $\Rightarrow$ hàm số $g(x)$ có 9 cực trị.

Câu 71: (Câu 40 - THPT – Thuận Thành 01 – Bắc Ninh – Lần 1 – Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên $f'(x)$ như hình vẽ:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	2	-1	$+\infty$

Hàm số $y = f(|e^{2x} - 2x - 2|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A). 9. (B). 7. (C). 11. (D). 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x) = 0$ tại $x_1; x_2; x_3; x_4$ trong đó $x_1 < -1 < x_2 < 0 < x_3 < 1 < x_4$

Xét hàm số $y = f(|e^{2x} - 2x - 2|)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$

$$y' = \frac{2(e^{2x} - 1)(e^{2x} - 2x - 2)}{|e^{2x} - 2x - 2|} f'(|e^{2x} - 2x - 2|)$$

Với $e^{2x} - 2x - 2 \neq 0$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{2x} - 1 = 0 \\ f'(|e^{2x} - 2x - 2|) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ |e^{2x} - 2x - 2| = x_3 \\ |e^{2x} - 2x - 2| = x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^{2x} - 2x - 2 = x_3 \\ e^{2x} - 2x - 2 = x_4 \\ e^{2x} - 2x - 2 = -x_3 \\ e^{2x} - 2x - 2 = -x_4 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix}$$

Xét hàm số $g(x) = e^{2x} - 2x - 2$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = 2e^{2x} - 2$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có: phương trình (1), (2), (3) có hai nghiệm phân biệt khác 0, phương trình (4) vô nghiệm vì vậy phương trình $y' = 0$ có 7 nghiệm phân biệt.

Mặt khác hàm số đạt cực trị tại các điểm thỏa mãn: $e^{2x} - 2x - 2 = 0$ (5).



Dựa vào bảng biến thiên hàm $g(x)$ suy ra phương trình (5) có hai nghiệm phân biệt khác 7 nghiệm của phương trình $y' = 0$.

Vậy hàm số đã cho có 9 điểm cực trị.

Câu 72: (Câu 42 - THPT Trần Phú - Đà Nẵng - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		5	$-\infty$
		3		

Hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

(A). 1.

(B). 4.

(C). 2.

(D). 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g(x) = f(x^3 - 3x) \Rightarrow g'(x) = (3x^2 - 3) \cdot f'(x^3 - 3x)$

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x^3 - 3x = x_0 \quad (x_0 > 3) \end{cases}$$

Xét hàm: $h(x) = x^3 - 3x \Rightarrow h'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

BBT:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$					

$-\infty$

2

$-\infty$

-2

2

-2

$+\infty$

$+\infty$

Từ BBT suy ra phương trình $x^3 - 3x = x_0 \quad (x_0 > 3)$ có 1 nghiệm đơn $x = x_1 \quad (x_1 > 1)$

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn $x = -1; x = 1; x = x_1 \quad (x_1 > 1)$ và $g'(-1) = -3, f'(-1) < 0$ (Do $f'(0) \in (3; 5)$) nên ta có BBT của hàm $g(x)$ như sau:



<https://luyenthitrangnhiem.vn>



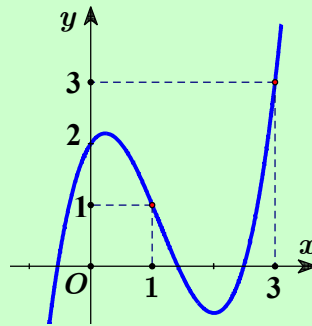
<https://www.facebook.com/vietqld>



x	$-\infty$	-1		1	x_1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$-$
$g(x)$						

Từ BBT ta có hàm số đã cho có 2 điểm cực đại.

Câu 73: (Câu 48 - THPT Triệu Sơn 1 - Thanh Hóa - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) [Mức độ 4] Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = -1$. Biết $y = f'(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong dưới đây.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^4) - 6x^2|$ là

Ⓐ. 3.

Ⓑ. 6.

Ⓒ. 5.

Ⓓ. 4.

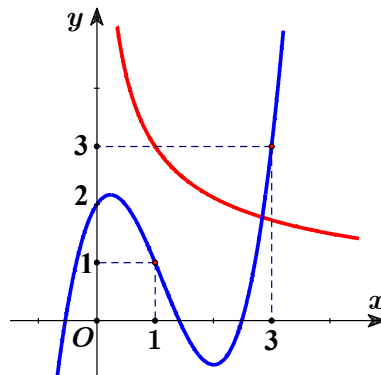
Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $h(x) = f(x^4) - 6x^2$ có $h'(x) = 4x^3 f'(x^4) - 12x = 4x [x^2 f'(x^4) - 3]$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x [x^2 f'(x^4) - 3] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^4) = \frac{3}{x^2} \quad (x \neq 0) \end{cases} \quad (1)$$

Xét phương trình (1): đặt $t = x^4$ thì phương trình có dạng $f'(t) = \frac{3}{\sqrt{t}}$ với $t > 0$ (2).



Dựa vào đồ thị, phương trình (2) có một nghiệm duy nhất $a > 0$.

Khi đó ta được $x = \pm \sqrt[4]{a}$.



Bảng biến thiên của hàm số $h(x) = f(x^4) - 6x^2$

x	$-\infty$	$-\sqrt[4]{a}$	0	$\sqrt[4]{a}$	$+\infty$				
h'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$				-1				$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^4) - 6x^2|$ bằng số điểm cực trị của hàm số $h(x) = f(x^4) - 6x^2$ cộng với số nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ của phương trình $h(x) = 0$.
Do đó hàm số $g(x)$ có 5 cực trị.



<https://luyenthitracnghiem.vn>

THAM GIA LỚP LUYỆN THI CHẤT LƯỢNG CAO MR.VIỆT MATH CLASS



82 Võ Thị Sáu - TDP Bến Chợ – Phường Q.Thuận - T.xã Ba Đồn – Tỉnh Quảng Bình



<http://luyenthitracnghiem.vn>



0905 193 688 (Điện thoại hoặc nhắn tin)



Facebook: <https://www.facebook.com/vietgold>

LIÊN
HỆ



<https://www.facebook.com/vietgold>

