

DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ GIỎI

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

PHƯƠNG PHÁP HÀM ĐẶC TRƯNG GIẢI PT, BPT MŨ - LÔGARIT

*** CÓ ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT**

*** CẬP NHẬT THÊM NHIỀU BÀI TOÁN MỚI**

ÔN THI HSG VÀ TN THPT

PHƯƠNG PHÁP HÀM ĐẶC TRƯNG GIẢI PT, BPT MŨ – LÔGARIT

Dạng 1: Phương pháp hàm đặc trưng giải pt, bpt mũ không chứa tham số	2
Dạng 2: Phương pháp hàm đặc trưng giải pt, bpt mũ chứa tham số	18
Dạng 3: Phương pháp hàm đặc trưng giải pt, bpt lôgarit không chứa tham số	28
Dạng 4: Phương pháp hàm đặc trưng giải pt, bpt lôgarit chứa tham số	54
Dạng 5: Phương pháp hàm đặc trưng giải pt, bpt có tổ hợp mũ - lôgarit không chứa tham số	73
Dạng 6: Phương pháp hàm đặc trưng giải pt, bpt có tổ hợp mũ - lôgarit chứa tham số	102

PHƯƠNG PHÁP HÀM ĐẶC TRƯNG GIẢI PT, BPT MŨ - LÔGARIT

Phương pháp hàm số đặc trưng thường xuyên xuất hiện trong đề thi THPT Quốc Gia và đề thi tốt nghiệp THPT, nó cũng là một trong những câu phân loại của đề:

-Câu 47 mã đề 101 – THPT QG năm 2017.

-Câu 35 đề tham khảo – BGD&ĐT năm 2018.

-Câu 46 mã đề 101 – THPT QG năm 2018.

-Câu 47 đề tham khảo – BGD&ĐT năm 2020.

-Câu 47 đề tham khảo – BGD&ĐT năm 2021.

-.....

Sau đây, tôi xin trình bày cơ sở lý thuyết và giới thiệu một số bài toán áp dụng của nó:

I - CƠ SỞ LÝ THUYẾT

Cho hàm số đặc trưng $y = f(t)$ liên tục trên tập D .

+ Nếu hàm số $f(t)$ đơn điệu một chiều (đồng biến hoặc nghịch biến) trên D và tồn tại

$u, v \in D$ thì $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

+ Nếu hàm số $f(t)$ đồng biến trên D và tồn tại $u, v \in D$ thì $f(u) > f(v) \Leftrightarrow u > v$.

+ Nếu hàm số $f(t)$ nghịch biến trên D và tồn tại $u, v \in D$ thì $f(u) > f(v) \Leftrightarrow u < v$.

II - ÁP DỤNG**DẠNG 1: PHƯƠNG PHÁP HÀM ĐẶC TRƯNG GIẢI PT, BPT MŨ KHÔNG CHỨA THAM SỐ****1 - PT MŨ KHÔNG CHỨA THAM SỐ**

Câu 1. Gọi S là tập hợp mọi nghiệm thực của phương trình $2^{x^2-3x+2} - 2^{x^2-x-2} = 2x-4$. Số phần tử của S là

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2^{x^2-3x+2} - 2^{x^2-x-2} = 2x-4 \Leftrightarrow 2^{x^2-3x+2} + x^2 - 3x + 2 = 2^{x^2-x-2} + x^2 - x - 2$.

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nên $f(x^2 - 3x + 2) = f(x^2 - x - 2)$.

$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2 \Leftrightarrow x = 2$.

Suy ra phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Suy ra số phần tử của S là 1.

Câu 2. Tính tổng các nghiệm của phương trình $2019^{x^3-3x^2+x} - 2019^{x-2} + x^3 - 3x^2 + 2 = 0$.

A. -3.

B. -2.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

$2019^{x^3-3x^2+x} - 2019^{x-2} + x^3 - 3x^2 + 2 = 0$.

$\Leftrightarrow 2019^{x^3-3x^2+x} + x^3 - 3x^2 + x = 2019^{x-2} + x - 2$ (1).

Xét hàm số: $f(t) = 2019^t + t$, $f'(t) = 2019^t \ln 2019 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(1) $\Leftrightarrow f(x^3 - 3x^2 + x) = f(x - 2) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + x = x - 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$.

Vậy tổng các nghiệm là 3.

- Câu 3.** Phương trình $2^{x^2-x} + 9^{3-2x} + x^2 + 6 = 4^{2x-3} + 3^{x-x^2} + 5x$ có số nghiệm là
A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với $2^{x^2-x} + 9^{3-2x} + x^2 + 6 = 4^{2x-3} + 3^{x-x^2} + 5x$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2-x} + x^2 - x - 3^{x-x^2} = 2^{4x-6} + 4x - 6 - 3^{6-4x} (*)$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t - 3^{-t}$, ta có $f(t) = 2^t \ln 2 + 1 + 3^{-t} \ln 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow f(x^2 - x) = f(4x - 6) \Leftrightarrow x^2 - x = 4x - 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}.$$

- Câu 4.** Phương trình $2^{23x^3} \cdot 2^x - 1024^{x^2} + 23x^3 = 10x^2 - x$ có tổng các nghiệm gần nhất với số nào dưới đây.
A. 0,35. **B.** 0,40. **C.** 0,50. **D.** 0,45.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } 2^{23x^3} \cdot 2^x - 1024^{x^2} + 23x^3 = 10x^2 - x \Leftrightarrow 2^{23x^3+x} + 23x^3 + x = 2^{10x^2} + 10x^2$$

Hàm số $f(t) = 2^t + t \Rightarrow f(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow 2^{23x^3+x} + 23x^3 + x = 2^{10x^2} + 10x^2 \Leftrightarrow 23x^3 + x = 10x^2 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \frac{5 \pm \sqrt{2}}{23}$$

Tổng các nghiệm bằng $\frac{10}{23} \approx 0,4347$.

- Câu 5.** Gọi $x_0 = \frac{a+b\sqrt{3}}{c}$ là một nghiệm lớn hơn 1 của phương trình
 $2x \left[\left(\sqrt{3} \right)^{\frac{1}{x}} - \left(\frac{1}{3} \right)^{1-x} + 1 \right] = 2x^2 - 1$. Giá trị của $P = a + b + c$ là
A. $P = 6$. **B.** $P = 0$. **C.** $P = 2$. **D.** $P = 4$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $x \neq 0$.

$$2x \left[\left(\sqrt{3} \right)^{\frac{1}{x}} - \left(\frac{1}{3} \right)^{1-x} + 1 \right] = 2x^2 - 1 \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{2x}} - 3^{x-1} + 1 = x - \frac{1}{2x}$$

$$\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{2x}} + \frac{1}{2x} = 3^{x-1} + x - 1 \quad (1). \text{ Xét hàm số } f(t) = 3^t + t \quad (t \neq 0), \quad f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0$$

$$(1) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2x}\right) = f(x-1) \Leftrightarrow \frac{1}{2x} = x-1 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \Rightarrow a=1, b=1, c=2. \text{ Vậy } P=4.$$

- Câu 6.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $1 \leq x \leq 2020$ và $x + x^2 - 9^y = 3^y$?
A. 2020. **B.** 1010. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$x + x^2 - 9^y = 3^y \Leftrightarrow x + x^2 = 3^y + (3^y)^2 \quad (1).$$

Xét hàm $f(t) = t + t^2, (t > 0)$.

Ta có: $f'(t) = 1 + 2t > 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Vì vậy, $(1) \Leftrightarrow f(x) = f(3^y) \Leftrightarrow x = 3^y$.

Theo giả thiết, $1 \leq x \leq 2020 \Leftrightarrow 1 \leq 3^y \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \log_3 2020$.

Vì y nguyên nên $y \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\} \Rightarrow x \in \{1; 3; 9; 27; 81; 243; 729\}$.

Vậy có 7 cặp $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 7. Có bao nhiêu số nguyên dương x thỏa mãn $2.2^x + x + \sin^2 y = 2^{\cos^2 y}$?

A. 4. B. 3. C. 1. D. 0.

Lời giải

Chọn D

Có $2.2^x + x + \sin^2 y = 2^{\cos^2 y} \Leftrightarrow 2^{x+1} + x + 1 = 2^{\cos^2 y} + \cos^2 x$ (3).

Đặt $f(t) = 2^t + t \Rightarrow f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t > 0 \Rightarrow$ Hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

Vì vậy phương trình (3) $\Leftrightarrow f(x+1) = f(\cos^2 x) \Leftrightarrow x+1 = \cos^2 x \Leftrightarrow x = -\sin^2 x \Rightarrow x \leq 0$.

Mà x là số nguyên dương. Vậy không có giá trị nào của x thỏa mãn.

Câu 8. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $3^{x+1} + x + 1 = 3^y + y$?

A. 2020. B. 2021. C. 2022. D. 2023.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $3^{x+1} + x + 1 = 3^y + y \Leftrightarrow f(x+1) = f(y)$

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t \Rightarrow f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Do đó $f(x+1) = f(y) \Leftrightarrow x+1 = y \Rightarrow x = y-1$

Vì $0 \leq x \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq y-1 \leq 2020 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 2021$

Mà $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{1; 2; 3; \dots; 2021\}$

Vậy có 2021 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ là nghiệm của phương trình $x.3125^x = (y+1)5^y$ và thỏa mãn $y \leq 60$.

A. 10. B. 13. C. 11. D. 12.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x.3125^x = (y+1)5^y \Leftrightarrow x.5^{5x} = (y+1)5^y$

$\Leftrightarrow \log_5(x.5^{5x}) = \log_5[(y+1)5^y] \Leftrightarrow 5x + \log_5 x = \log_5(y+1) + y$

$\Leftrightarrow 5x + \log_5 5x = (y+1) + \log_5(y+1)$.

Xét hàm số $f(t) = t + \log_5 t, t > 0$.

Ta có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 5} > 0, \forall t > 0$. Khi đó $f(5x) = f(y+1) \Leftrightarrow 5x = y+1$.

Như vậy tương ứng với mỗi giá trị x nguyên dương ta đều có y nguyên dương mà $y \leq 60$

suy ra $5x \leq 61 \Leftrightarrow x \leq \frac{61}{5}$.

Mặt khác x nguyên dương nên $x \in \{1; 2; 3; \dots; 12\}$.

Vậy có 12 cặp số $(x; y)$ nguyên dương thỏa mãn đề bài.

- Câu 10.** Tổng các nghiệm của phương trình $\frac{1}{5^{x+8}} + \frac{3^{(x+2)^2}}{27} + x + 1 = \frac{1}{5 \cdot 5^{x^2+4x}} + 9 \cdot 3^{x+6} + (x+4)(2-x)$ bằng
- A. $\sqrt{37}$. B. -6. C. 3. D. -3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\frac{1}{5^{x+8}} + \frac{3^{(x+2)^2}}{27} + x + 1 = \frac{1}{5 \cdot 5^{x^2+4x}} + 9 \cdot 3^{x+6} + (x+4)(2-x)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5^{x+8}} - 3^{x+8} - (x+8) = \frac{1}{5^{x^2+4x+1}} - 3^{x^2+4x+1} - (x^2+4x+1) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{5^t} - 3^t - t$,

có: $f'(t) = \frac{-\ln 5}{5^t} - 3^t \ln 3 - 1 < 0, \forall t$ nên hàm số $y = f(t)$ luôn nghịch biến

Do đó, phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow f(x+8) = f(x^2+4x+1)$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow x+8 = x^2+4x+1 \Leftrightarrow x^2+3x-7=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3+\sqrt{37}}{2} \\ x = \frac{-3-\sqrt{37}}{2} \end{cases}$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình trên là -3.

- Câu 11.** Số nghiệm của phương trình $x^2 - 5x - 2 = (x^2 - 8x + 3) \cdot 8^{3x-5} + (3x-5) \cdot 8^{x^2-8x+3}$ là
- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

Lời giải

Đặt $u = x^2 - 8x + 3$, $v = 3x - 5$, phương trình đã cho viết lại là

$$u + v = u \cdot 8^v + v \cdot 8^u \Leftrightarrow u(1 - 8^v) = v(8^u - 1) \quad (*)$$

Ta thấy $u = 0$ hoặc $v = 0$ thỏa mãn phương trình (*).

Với $u \neq 0$ và $v \neq 0$ ta có (*) $\Leftrightarrow \frac{1-8^v}{v} = \frac{8^u-1}{u} \quad (**)$

Ta thấy:

□ Nếu $u > 0$ thì $\frac{8^u-1}{u} > 0$ và nếu $u < 0$ thì $\frac{8^u-1}{u} > 0$. Do đó $VP(**) > 0, \forall u \neq 0$.

□ Nếu $v > 0$ thì $\frac{1-8^v}{v} < 0$ và nếu $v < 0$ thì $\frac{1-8^v}{v} < 0$. Do đó $VT(**) < 0, \forall v \neq 0$.

Từ đó suy ra (**) vô nghiệm.

Như vậy, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} u=0 \\ v=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-8x+3=0 \\ 3x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4+\sqrt{13} \\ x=4-\sqrt{13} \\ x=\frac{5}{3} \end{cases}$$

Vậy, phương trình đã cho có 3 nghiệm.

- Câu 12.** Phương trình $e^x - e^{\sqrt{2x+1}} = 1 - x^2 + 2\sqrt{2x+1}$ có nghiệm trong khoảng nào?

A. $\left(2; \frac{5}{2}\right)$.

B. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

C. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

D. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Lời giải

Chọn A

ĐK: $x \geq -\frac{1}{2}$

$$e^x - e^{\sqrt{2x+1}} = 1 - x^2 + 2\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow e^x - e^{\sqrt{2x+1}} = -(x+1)^2 + (\sqrt{2x+1}+1)^2$$

$$\Leftrightarrow e^x + (x+1)^2 = e^{\sqrt{2x+1}} + (\sqrt{2x+1}+1)^2 \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = e^t + (t+1)^2$ với $t \geq -\frac{1}{2}$

$$f'(t) = e^t + 2(t+1) > 0 \text{ với mọi } t \geq -\frac{1}{2}. \text{ Suy ra hàm số đồng biến trên } \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

$$(*) \Leftrightarrow f(x) = f(\sqrt{2x+1}) \Leftrightarrow x = \sqrt{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{2}.$$

Câu 13. Có bao nhiêu số nguyên $y < 10$ sao cho tồn tại số nguyên x thỏa mãn $5^{\sqrt{2}^y + x - 2} + \sqrt{2}^y = 5^{x^2 - x - 1} + (x-1)^2$?

A. 10

B. 1

C. 5

D. Vô số

Phân tíchPhương trình dạng $f(u) = f(v)$.

Phương pháp: Chứng minh $y = f(t)$ đơn điệu trên $(a; b)$. Từ phương trình suy ra $u = v$. Từ đó tìm sự liên hệ giữa 2 biến x, y và chọn x, y thích hợp.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $5^{\sqrt{2}^y + x - 2} + \sqrt{2}^y = 5^{x^2 - x - 1} + (x-1)^2 \Leftrightarrow 5^{\sqrt{2}^y + x - 2} + \sqrt{2}^y + x - 1 = 5^{x^2 - x - 1} + x^2 - x$

Xét: $f(t) = 5^{t-1} + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó từ phương trình trên suy ra:

$$\sqrt{2}^y + x - 1 = x^2 - x \Leftrightarrow (x-1)^2 = \sqrt{2}^y = 2^{\frac{y}{2}} \Leftrightarrow x = 1 \pm 2^{\frac{y}{4}}.$$

Do x nguyên nên ta có $2^{\frac{y}{4}} \in \mathbb{Z}$ và $y < 10$ nên $y \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$.

Câu 14. Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2 + xy} = (1 + xy)27^{9x}$?

A. 10.

B. 12.

C. 11.

D. 9.

Lời giải

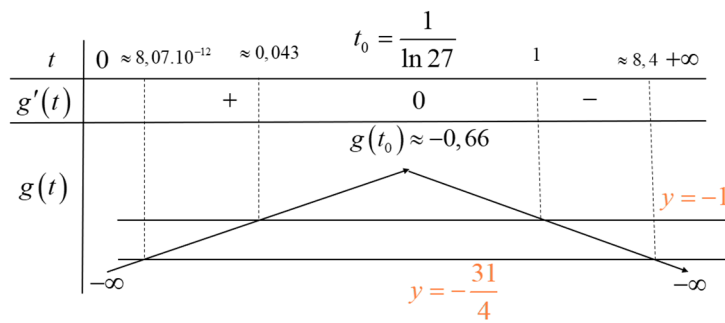
Chọn C

Viết lại phương trình thành $27^{3x^2 - 9x} = (1 + xy)27^{-xy}$

+) Ta có $(1) \Leftrightarrow 3x^2 - 9x = \log_{27}(1 + xy) - xy \Leftrightarrow 3x^2 - 9x - 1 = \log_{27} t - t$, với $t = 1 + xy > 0$.

+) Xét hàm số $f(x) = 3x^2 - 9x - 1$. Ta có $-\frac{31}{4} \leq f(x) < -1 \quad \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$.

+) Xét hàm số $g(t) = \log_{27} t - t, t > 0$. $g'(t) = \frac{1}{t \ln 27} - 1$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\ln 27}$



Ta có $-\frac{31}{4} \leq f(x) < -1, \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$ suy ra $-\frac{31}{4} \leq g(t) < -1 \Leftrightarrow \begin{cases} t \in (\approx 8,07.10^{-12}; \approx 0,04) \\ t \in (1; \approx 8,4) \end{cases}$

$$\text{hay } \begin{cases} \approx 8,07.10^{-12} < 1+xy < \approx 0,04 \\ 1 < 1+xy < \approx 8,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \approx \frac{-1+8,07.10^{-12}}{x} < y < \approx \frac{-1+0,04}{x} \\ 0 < y < \approx \frac{7,4}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3 < y < -\frac{1}{3}, (x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right), y \text{ nguyên}). \\ 0 < y \leq 22 \end{cases}$$

+) Nhận thấy $y = -2; y = -1$ thỏa mãn đề.

+) Với $0 < y \leq 22$, ta có (1) $\Leftrightarrow 3x^2 - 9x - 1 - \log_{27}(1+xy) + (1+xy) = 0$.

Nhập hàm, thay các giá trị nguyên của y , kiểm tra nghiệm $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$ dẫn đến chọn $1 \leq y \leq 9$.

Vậy $y \in \{-2; -1; 1; 2; \dots; 9\}$ nên có 11 giá trị nguyên của y thỏa mãn đề.

Câu 15. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời $1 \leq x \leq 2022$ và $384.128^{x^2-2x} - 6.8^y + 6 = 3y - 7x^2 + 14x$?

A. 674.

B. 1348.

C. 1346.

D. 2022.

Lời giải

Chọn B

+ Ta có: $384.128^{x^2-2x} - 6.8^y + 6 = 3y - 7x^2 + 14x \Leftrightarrow 3.2^{7(x-1)^2} + 7(x-1)^2 = 3.2^{3y+1} + 3y + 1$.

+ Xét hàm số $f(t) = 3.2^t + t, t \geq 0$ có $f'(t) = 3.2^t \ln 2 + 1 > 0$ nên hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$.

+ Do đó: $7(x-1)^2 = 3y + 1 \Leftrightarrow 7(x^2 - 2x) + 6 = 3y$.

+ Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $(x^2 - 2x) : 3 \Rightarrow \begin{cases} x-2 : 3 \\ x : 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3n + 2 \\ x = 3n \end{cases}, n \in \mathbb{Z}$

$$\text{mà } 1 \leq x \leq 2022 \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq 3n + 2 \leq 2022 \\ 1 \leq 3n \leq 2022 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} \leq n \leq \frac{2020}{3} \\ \frac{1}{3} \leq n \leq 674 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq n \leq 673 \\ 1 \leq n \leq 674 \end{cases}$$

hay có 1348 số nguyên n . Mỗi giá trị của n cho chúng ta một cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Vậy có 1348 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Câu 16. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $0 < x \leq 2020$ và $3^x(x+1) = 27^y y$.

A. 2020.

B. 673.

C. 672.

D. 2019.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $3^x(x+1) = 27^y y \Leftrightarrow \log_3 [3^x(x+1)] = \log_3 (27^y y)$

$$\Leftrightarrow x + \log_3(x+1) = 3y + \log_3 y$$

$$\Leftrightarrow (x+1) + \log_3(x+1) = 3y + \log_3 y + \log_3 3$$

$$\Leftrightarrow (x+1) + \log_3(x+1) = 3y + \log_3(3y). (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t + \log_3 t$, với $t \in (1; 2021]$.

$$f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 3} > 0, \forall t \in (1; 2021].$$

Suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $(0; 2021)$.

$$\text{Mà } (*) \Leftrightarrow f(x+1) = f(3y) \Leftrightarrow x+1 = 3y \Leftrightarrow x = 3y-1.$$

$$\text{Vì } 0 < x \leq 2020 \Leftrightarrow 0 < 3y-1 \leq 2020 \Leftrightarrow 1 < 3y \leq 2021 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < y \leq \frac{2021}{3}.$$

Do $y \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow y \in \{1; 2; 3; \dots; 673\}$. Ứng với mỗi giá trị y cho ta một x nguyên dương.

Vậy có 673 cặp $(x; y)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = e^x - e^{-x} + 2x^3 + x$. Phương trình $f(4^x + x) + f(2^{x+1} - x - 3) = 0$ có tập nghiệm là

A. $\{0\}$.

B. $\{1\}$.

C. $\{0; 1\}$.

D. $\{-1; 3\}$.

Lời giải

Chọn A

Trước hết ta nhận thấy rằng: $f(x)$ là hàm lẻ vì: $f(-x) = e^{-x} - e^x - 2x^3 - x = -f(x)$

Đạo hàm: $f'(x) = e^x + e^{-x} + 6x^2 + 1 > 0 \Rightarrow$ Hàm số đơn điệu tăng.

Từ phương trình giả thiết: $f(4^x + x) + f(2^{x+1} - x - 3) = 0 \Leftrightarrow f(4^x + x) = -f(2^{x+1} - x - 3)$

$$\Leftrightarrow f(4^x + x) = f(-2^{x+1} + x + 3) \Leftrightarrow 4^x + x = -2^{x+1} + x + 3 \Leftrightarrow 4^x - 2 \cdot 2^x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = -3 \text{ (VN)} \\ 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases} \rightarrow \text{tập nghiệm của phương trình đã cho là: } \{0\}.$$

Câu 18. Cho các số thực x, y với $x \geq 0$ thỏa mãn $e^{x+3y} + e^{xy+1} + x(y+1) + 1 = e^{-xy-1} + \frac{1}{e^{x+3y}} - 3y$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x + 2y + 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $m \in (2; 3)$.

B. $m \in (-1; 0)$.

C. $m \in (0; 1)$.

D. $m \in (1; 2)$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết $e^{x+3y} + e^{xy+1} + x(y+1) + 1 = e^{-xy-1} + \frac{1}{e^{x+3y}} - 3y$

$$\Leftrightarrow e^{x+3y} - \frac{1}{e^{x+3y}} + (x+3y) = e^{-xy-1} - \frac{1}{e^{-xy-1}} + (-xy-1) \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = e^t - \frac{1}{e^t} + t$ với $t \in \mathbb{R}$ ta có $f'(t) = e^t + \frac{1}{e^t} + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình (1) có dạng $f(x+3y) = f(-xy-1) \Rightarrow x+3y = -xy-1 \Rightarrow y = \frac{-x-1}{x+3} (x \geq 0)$.

Khi đó $T = x+2y+1 = x - \frac{2x+2}{x+3} + 1 \Rightarrow T' = 1 - \frac{4}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x+5}{(x+3)^2} > 0, \forall x \geq 0$

$\Rightarrow T_{\min} = 0 - \frac{2 \cdot 0 + 2}{0+3} + 1 = \frac{1}{3} = m$.

Câu 19. Có bao nhiêu cặp $(x; y)$ thỏa mãn $10^{\frac{10}{x+y}} = \left(x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) 10^{\frac{1}{xy}}$ và $x \in \mathbb{N}^*, y > 0$.

A. 14.

B. 7.

C. 21.

D. 10.

Lời giải

$$10^{\frac{10}{x+y}} = \left(x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) 10^{\frac{1}{xy}} \Leftrightarrow 10^{\frac{10}{x+y}} = \frac{(x+y)(xy+1)}{xy} \cdot 10^{\frac{1}{xy}} \Leftrightarrow \frac{10}{x+y} \cdot 10^{\frac{10}{x+y}} = \left(1+\frac{1}{xy}\right) \cdot 10^{\frac{1}{xy}+1}$$

Xét hàm số $f(t) = t \cdot 10^t$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

$f'(t) = 10^t + t \cdot 10^t \ln 10 > 0, \forall t > 0$ nên hàm số $f(t) = t \cdot 10^t$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

$$\text{Do đó: } \frac{10}{x+y} \cdot 10^{\frac{10}{x+y}} = \left(1+\frac{1}{xy}\right) \cdot 10^{\frac{1}{xy}+1} \Leftrightarrow \frac{10}{x+y} = 1+\frac{1}{xy}$$

$$\Leftrightarrow 10 = (x+y) \left(1+\frac{1}{xy}\right) \Leftrightarrow 10 - \left(y+\frac{1}{y}\right) = x + \frac{1}{x}$$

Vì $y + \frac{1}{y} \geq 2, \forall y > 0$ nên $x + \frac{1}{x} \leq 8 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow 4 - \sqrt{15} \leq x \leq 4 + \sqrt{15}, x \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow x \in A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Với mỗi số $a > 0$ phương trình $y + \frac{1}{y} = a \Leftrightarrow y^2 - ay + 1 = 0$ (*) có $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S = a > 0 \\ P = 1 > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Phương trình (*) luôn có hai nghiệm $y > 0$. Vậy có 14 cặp $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 20. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và

$$2.625^{x^2} - 10.125^y = 3y - 4x^2 + 1$$

A. 2020.

B. 674.

C. 2021.

D. 1347.

Lời giải

Chọn D

Cách 1

Ta có

$$2.625^{x^2} - 10.125^y = 3y - 4x^2 + 11 \Leftrightarrow 2.5^{4x^2} - 2.5^{3y+1} = 3y - 4x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 2.5^{4x^2} + 4x^2 = 2.5^{3y+1} + 3y + 1 (*)$$

Xét hàm số $f(t) = 2.5^t + t$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có $(*) \Leftrightarrow f(4x^2) = f(3y+1) \Leftrightarrow 4x^2 = 3y+1 \Leftrightarrow 4x^2 - 1 = 3y \Leftrightarrow (2x-1)(2x+1) = 3y (**)$

Do x, y nguyên nên $2x-1; 2x+1 \in \mathbb{Z}$ và 3 là số nguyên tố nên $(**)$ tương đương với hoặc $(2x-1):3$ hoặc $(2x+1):3$

Nếu $(2x-1):3 \Leftrightarrow 2x \equiv 1 \pmod{3} \Leftrightarrow 2x \equiv 4 \pmod{3} \Leftrightarrow x \equiv 2 \pmod{3}$

Nếu $(2x+1):3 \Leftrightarrow 2x \equiv -1 \pmod{3} \Leftrightarrow 2x \equiv 2 \pmod{3} \Leftrightarrow x \equiv 1 \pmod{3}$

Ta có 2021 giá trị nguyên của x sao cho $0 \leq x \leq 2020$. Trong đó có 674 số chia hết cho 3. Nên có 1347 số thỏa $(**)$. Với mỗi giá trị nguyên của x thì ta tìm được một và chỉ một giá trị y nguyên tương ứng. Vậy có 1347 cặp $(x; y)$ nguyên thỏa mãn bài toán.

Cách 2

Ta có

$$2.625^{x^2} - 10.125^y = 3y - 4x^2 + 11 \Leftrightarrow 2.5^{4x^2} - 2.5^{3y+1} = 3y - 4x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 2.5^{4x^2} + 4x^2 = 2.5^{3y+1} + 3y + 1 (*)$$

Xét hàm số $f(t) = 2.5^t + t$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } (*) \Leftrightarrow f(4x^2) = f(3y+1) \Leftrightarrow 4x^2 = 3y+1 \Leftrightarrow 4x^2 - 1 = 3y (**)$$

$$\text{Ta thấy } x \in \mathbb{N} \Rightarrow \begin{cases} x = 3k \\ x = 3k+1 \ (k \in \mathbb{N}) \\ x = 3k+2 \end{cases}$$

Với $x = 3k$ thì $4x^2 - 1 = 4.9k^2 - 1$ không chia hết cho 3 nên trường hợp này loại.

Với $\begin{cases} x = 3k+1 \\ x = 3k+2 \end{cases}$ thì $x^2 = 3m+1 \ (m \in \mathbb{N})$ nên $4x^2 - 1 = 12m+3$ chia hết cho 3.

Vậy $\begin{cases} x = 3k+1 \\ x = 3k+2 \end{cases}$ mặt khác $0 \leq x \leq 2020$ nên có 1347 số nguyên x thỏa $(**)$.

Với mỗi giá trị nguyên của x thì ta tìm được một và chỉ một giá trị y nguyên tương ứng. Vậy có 1347 cặp $(x; y)$ nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 21. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a; b)$ thỏa $4.2^{(a+b)^2} - 8^{ab-a-b} + a^2 + b^2 + 3(a+b) - ab + 2 = 0$?

A. 12.

B. 10.

C. 14.

D. 9.

Lời giải

Chọn A

$$+) \quad \text{Ta có:} \quad 4.2^{(a+b)^2} - 8^{ab-a-b} + a^2 + b^2 + 3(a+b) - ab + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^{(a+b)^2+2} + (a+b)^2 + 2 = 2^{3ab-3a-3b} + 3ab - 3a - 3b \quad (1).$$

+) Xét hàm $f(t) = 2^t + t$ trên $\mathbb{R}$, có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$, nên:

$$(1) \Leftrightarrow f((a+b)^2 + 2) = f(3ab - 3a - 3b) \Leftrightarrow (a+b)^2 + 2 = 3ab - 3a - 3b$$

$$\Leftrightarrow a^2 - (b-3)a + b^2 + 3b + 2 = 0 \quad (2).$$

+) Xem (2) là phương trình bậc hai biến a và b là tham số. Tồn tại cặp số thực $(a; b)$ thỏa (2) khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow (b-3)^2 - 4(b^2 + 3b + 2) \geq 0 \Leftrightarrow -3b^2 - 18b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-9-2\sqrt{21}}{3} \leq b \leq \frac{-9+2\sqrt{21}}{3}$$

Do b nguyên nên $b \in \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$.

$$+) \text{ Với } b = -6: \text{ phương trình (2) thành } a^2 + 9a + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ a = -5 \end{cases}.$$

$$+) \text{ Với } b = -5: \text{ phương trình (2) thành } a^2 + 8a + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = -6 \end{cases}.$$

$$+) \text{ Với } b = -4: \text{ phương trình (2) thành } a^2 + 7a + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = -6 \end{cases}.$$

$$+) \text{ Với } b = -3: \text{ phương trình (2) thành } a^2 + 6a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -3 \pm \sqrt{7}.$$

$$+) \text{ Với } b = -2: \text{ phương trình (2) thành } a^2 + 5a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -5 \end{cases}.$$

$$+) \text{ Với } b = -1: \text{ phương trình (2) thành } a^2 + 4a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -4 \end{cases}.$$

$$+) \text{ Với } b = 0: \text{ phương trình (2) thành } a^2 + 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = -2 \end{cases}.$$

Vậy có 12 cặp số nguyên (a, b) thỏa yêu cầu bài toán:

$$(-4; -6), (-6; -4), (-5; -2), (-2; -5),$$

$$(-5; -6), (-6; -5), (-1; -4), (-4; -1), (0; -2), (-2; 0), (0; -1), (-1; 0).$$

Câu 22. : Cho các số thực x, y thỏa mãn $e^{x^2+2y^2} + e^{xy}(x^2 - xy + y^2 - 1) - e^{1+xy+y^2} = 0$. Gọi M, m lần lượt là GTLN, GTNN của biểu thức $P = \frac{1}{1+xy}$. Tính $M - m$.

A. $M - m = 1$.

B. $M - m = 2$.

C. $M - m = \frac{1}{2}$.

D. $M - m = 3$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } e^{x^2+2y^2} + e^{xy}(x^2 - xy + y^2 - 1) - e^{1+xy+y^2} = 0 \Leftrightarrow e^{x^2+2y^2-xy} + (x^2 - xy + y^2 - 1) - e^{1+y^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2-xy+2y^2} + x^2 - xy + 2y^2 = e^{1+y^2} + 1 + y^2 \quad (1)$$

Xét hàm $f(t) = e^t + t, t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = e^t + 1 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow f(x^2 - xy + 2y^2) = f(1 + y^2) \Leftrightarrow x^2 - xy + 2y^2 = 1 + y^2 \Leftrightarrow x^2 - xy + y^2 = 1$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} 1 = (x - y)^2 + xy \geq xy \\ 1 = (x + y)^2 - 3xy \geq -3xy \end{cases} \text{ suy ra } 1 \geq xy \geq \frac{-1}{3}.$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{1+1} \leq P = \frac{1}{1+xy} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq P = \frac{1}{1+xy} \leq \frac{3}{2}. \text{ Vậy } M - m = 1$$

Câu 23. Cho các số thực x, y thỏa mãn $5 + 16.4^{x^2-2y} = (5 + 16^{x^2-2y}).7^{2y-x^2+2}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{10x+6y+26}{2x+2y+5}$. Tính $T = M + m$.

A. $T = \frac{21}{2}$.

B. $T = 10$.

C. $T = 15$.

D. $T = \frac{19}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = x^2 - 2y$, khi đó giả thiết tương đương với

$$5+16.4^t = (5+16^t).7^{2-t} \Leftrightarrow \frac{5+4^{t+2}}{7^{t+2}} = \frac{5+4^{2t}}{7^{2t}}. (1)$$

Xét hàm số $f(u) = 5\left(\frac{1}{7}\right)^u + \left(\frac{4}{7}\right)^u$ trên $\mathbb{R}$. Ta có: $f'(u) = 5\left(\frac{1}{7}\right)^u \ln \frac{1}{7} + \left(\frac{4}{7}\right)^u \ln \frac{4}{7} < 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Suy ra $f(u)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow f(t+2) = f(2t) \Leftrightarrow t+2 = 2t \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2y = 2 \Leftrightarrow 2y = x^2 - 2$$

$$\text{Khi đó } P = \frac{10x+6y+26}{2x+2y+5} = \frac{3x^2+10x+20}{x^2+2x+3}$$

$$\text{Ta có } P' = \frac{-4x^2-22x-10}{(x^2+2x+3)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}. \text{ Bảng biến thiên như sau:}$$

x	$-\infty$	-5	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$			
y'	$-$	0	$+$	0	$-$		
y	3	$\searrow$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	7	$\searrow$	3

Từ BBT, ta suy ra $M = 7, m = \frac{5}{2}$. Vậy $M+m = 7 + \frac{5}{2} = \frac{19}{2}$.

Câu 24. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn

$$(4xy+7y)(2x-1)(e^{2xy}-e^{4x+y+7}) = [2x(2-y)+y+7]e^y$$

A. 8.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } (4xy+7y)(2x-1)(e^{2xy}-e^{4x+y+7}) = [2x(2-y)+y+7]e^y$$

$$\Leftrightarrow (4x+7)(2xy-y)(e^{2xy-y}-e^{4x+7}) = 2x(2-y)+y+7 \quad (\text{vì } e^y > 0 \forall y)$$

$$\Leftrightarrow (4x+7)(2xy-y).(e^{2xy-y}-e^{4x+7}) = (4x+7)-(2xy-y)$$

$$\Leftrightarrow (4x+7).[(2xy-y)e^{2xy-y}-1] = (2xy-y)[(4x+7)e^{4x+7}-1]$$

$$\Rightarrow \frac{(2xy-y)e^{2xy-y}-1}{2xy-y} = \frac{(4x+7)e^{4x+7}-1}{4x+7} \quad \text{với } x \neq -\frac{7}{4}; x \neq \frac{1}{2}; y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2xy-y} - \frac{1}{2xy-y} = e^{4x+7} - \frac{1}{4x+7}.$$

$$\text{Xét } f(t) = e^t - \frac{1}{t} \quad (t \neq 0)$$

$$\Rightarrow f'(t) = e^t + \frac{1}{t^2} > 0 \quad \forall t \neq 0 \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên các khoảng xác định}$$

$$\Rightarrow f(2xy-y) = f(4x+7)$$

$$\square \text{ TH1: } (2xy-y).(4x+7) < 0$$

Giả sử $2xy-y < 0$ và $4x+7 > 0$. Do $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $2xy-y \leq -1$ và $4x+7 \geq 1$.

$$\Rightarrow \begin{cases} f(2xy-y) \leq f(-1) = 1 - \frac{1}{e} < 1 \\ f(4x+7) \geq f(1) = e-1 > 1 \end{cases} \text{ . Do đó, } f(2xy-y) \neq f(4x+7).$$

$$\square \text{ TH2: } (2xy-y) \cdot (4x+7) > 0$$

$$f(2xy-y) = f(4x+7) \Leftrightarrow 2xy-y = 4x+7 \Rightarrow y = \frac{4x+7}{2x-1} = 2 + \frac{9}{2x-1}.$$

Theo bài, $y \in \mathbb{Z}$ nên $2x-1 \in \{\pm 1; \pm 3; \pm 9\} \Rightarrow x \in \{-4; -1; 0; 1; 2; 5\}$.

2 - BPT MŨ KHÔNG CHỨA THAM SỐ

- Câu 25.** Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{2x^2-15x+100} - 2^{x^2+10x-50} + x^2 - 25x + 150 < 0$
A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Đặt $a = 2x^2 - 15x + 100$; $b = x^2 + 10x - 50$ ta có bất phương trình:

$$2^a - 2^b + a - b < 0 \Leftrightarrow 2^a + a < 2^b + b \Leftrightarrow a < b$$

(do hàm số $y = 2^x + x$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$)

$$\text{Với } a < b \Leftrightarrow 2x^2 - 15x + 100 < x^2 + 10x - 50 \Leftrightarrow x^2 - 25x + 150 < 0$$

$\Leftrightarrow x \in (10; 15)$. Vậy bất phương trình có 4 nghiệm nguyên.

- Câu 26.** Số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{2x^2-15x+100} - 2^{x^2+10x-50} + x^2 - 25x + 150 < 0$ là
A. 6. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

ĐKXD: $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Xét bất phương trình } 2^{2x^2-15x+100} - 2^{x^2+10x-50} + x^2 - 25x + 150 < 0.$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x^2-15x+100} - 2^{x^2+10x-50} + (2x^2 - 15x + 100) - (x^2 + 10x - 50) < 0.$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x^2-15x+100} + (2x^2 - 15x + 100) < 2^{x^2+10x-50} + (x^2 + 10x - 50) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ với $t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0$ với $\forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Mặt khác, } (1) \Leftrightarrow f(2x^2 - 15x + 100) < f(x^2 + 10x - 50).$$

$$\text{Suy ra } 2x^2 - 15x + 100 < x^2 + 10x - 50 \Leftrightarrow x^2 - 25x + 150 < 0 \Leftrightarrow -15 < x < -10.$$

Nghiệm nguyên của bất phương trình là $x \in \{-14; -13; -12; -11\}$.

Vậy số nghiệm nguyên của bất phương trình là 4.

- Câu 27.** Tập nghiệm S của bất phương trình $3^{\sqrt{2x+1}} - 3^{x+1} \leq -x^2 + 2x$ là
A. $S = [0; +\infty)$. **B.** $S = [0; 2]$. **C.** $S = [2; +\infty)$. **D.** $S = [2; +\infty) \cup \{0\}$

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x \geq 0$.

$$\text{Ta có } 3^{\sqrt{2x+1}} - 3^{x+1} \leq -x^2 + 2x \Leftrightarrow 3^{\sqrt{2x+1}} - 2x \leq 3^{x+1} - x^2 \quad (1)$$

Xét hàm $f(t) = 3^{t+1} - t^2$ trên $[0; +\infty)$.

$$\text{có } f'(t) = 3^{t+1} \ln 3 - 2t$$

có $f''(t) = 3^{t+1} \cdot (\ln 3)^2 - 2 > 0, \forall t \in [0; +\infty)$ nên hàm số $f'(t) = 3^{t+1} \cdot \ln 3 - 2t$ liên tục và đồng biến trên $[0; +\infty)$.

$\forall t \in [0; +\infty) \Rightarrow f'(t) \geq f'(0) = 3 \cdot \ln 3 > 0 \Rightarrow f(t) = 3^{t+1} - t^2$ liên tục và đồng biến trên $[0; +\infty)$.

$$\text{Vậy } (1) \Leftrightarrow f(\sqrt{2x}) \leq f(x) \Leftrightarrow \sqrt{2x} \leq x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x \leq x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x \geq 2 \end{cases}.$$

- Câu 28.** Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{2x^2-15x+100} - 2^{x^2+10x-50} + x^2 - 25x + 150 < 0$.
A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = 2x^2 - 15x + 100 \\ v = x^2 + 10x - 50 \end{cases} \Rightarrow u - v = x^2 - 25x + 150.$$

$$2^{2x^2-15x+100} - 2^{x^2+10x-50} + x^2 - 25x + 150 < 0 \Leftrightarrow 2^u - 2^v + u - v < 0 \Leftrightarrow 2^u + u < 2^v + v.$$

Xét hàm $f(t) = 2^t + t$ có $f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $f(u) < f(v)$ nên $u < v$.

$$\text{Suy ra } 2x^2 - 15x + 100 < x^2 + 10x - 50 \Leftrightarrow x^2 - 25x + 150 < 0 \Leftrightarrow 10 < x < 15.$$

Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{11, 12, 13, 14\}$.

Vậy bất phương trình đã cho có bốn nghiệm nguyên.

- Câu 29.** Bất phương trình $x\sqrt{x+1} \leq (2x-3) \cdot 2^{\frac{-x^3+16x^2-48x+36}{x^2}}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?
A. 8. **B.** 10. **C.** 9. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

Ta chỉ xét với các giá trị nguyên của x .

Với $x = \pm 1$ thay vào bất phương trình không thỏa mãn.

Với $x \geq 2$, bất phương trình tương đương với:

$$2x\sqrt{x+1} \leq (4x-6) \cdot 2^{\frac{16x^2-48x+36}{x^2} \cdot x} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} \cdot 2^{(\sqrt{x+1})^2} \leq \frac{4x-6}{x} \cdot 2^{\left(\frac{4x-6}{x}\right)^2} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = 2^{t^2} \cdot t$ trên khoảng $(0; +\infty)$ ta có: $f'(t) = 2^{t^2} + 2t^2 \cdot 2^{t^2} \ln 2 > 0, \forall t > 0$.

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$, khi đó:

$$(*) \Leftrightarrow f(\sqrt{x+1}) \leq f\left(\frac{4x-6}{x}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} \leq \frac{4x-6}{x}$$

$$\Leftrightarrow x^2(x+1) \leq 16x^2 - 48x + 36$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 15x^2 + 48x - 36 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x^2 - 12x + 12) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 - 2\sqrt{5} (\approx 1,101) \\ 3 \leq x \leq 6 + 2\sqrt{5} (\approx 10,898) \end{cases}.$$

Vậy bất phương trình có 8 nghiệm nguyên.

- Câu 30.** Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình

$$2021^{2x^2-4x+9} - 2021^{x^2+5x+1} - (x-1)(8-x) < 0.$$

A. 7.

B. 5.

C. 6.

D. 8.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 2021^{2x^2-4x+9} - 2021^{x^2+5x+1} - (x-1)(8-x) < 0$$

$$\Leftrightarrow 2021^{2x^2-4x+9} - 2021^{x^2+5x+1} + x^2 - 9x + 8 < 0$$

$$\Leftrightarrow 2021^{2x^2-4x+9} + 2x^2 - 4x + 9 < 2021^{x^2+5x+1} + x^2 + 5x + 1$$

$$\Leftrightarrow f(2x^2 - 4x + 9) < f(x^2 + 5x + 1), \text{ với } f(t) = 2021^t + t.$$

$$f'(t) = 2021^t \ln 2021 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}, \text{ suy ra hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

$$\text{Do vậy } f(2x^2 - 4x + 9) < f(x^2 + 5x + 1) \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 9 < x^2 + 5x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 8 < 0$$

$$\Leftrightarrow 1 < x < 8. \text{ Vì } x \text{ nguyên nên suy ra } x \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Vậy bất phương trình có 6 nghiệm nguyên.

Câu 31. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $1 \leq x \leq 10$ và $x + x^2 - 9^y \geq 3^y$

A. 10.

B. 11.

C. 9.

D. 8.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } x + x^2 - 9^y \geq 3^y \Leftrightarrow x + x^2 \geq 9^y + 3^y.$$

$$\text{Xét hàm số đặc trưng } f(t) = t^2 + t \text{ với } t > 0.$$

$$\text{Ta có } f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t > 0 \text{ suy ra } f(t) \text{ là hàm số đồng biến trên } (t > 0).$$

$$\text{Suy ra } x + x^2 \geq 9^y + 3^y \Leftrightarrow f(x) \geq f(3^y) \Leftrightarrow x \geq 3^y.$$

$$\text{Với giả thiết } 1 \leq x \leq 10 \text{ ta có: } 3^y \leq 10 \Rightarrow y \leq 2.$$

$$\text{TH1: } y = 1 \Rightarrow 3^1 \leq x \leq 10 \Rightarrow x \in \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\} \text{ có 8 cặp nghiệm } (x; y) \text{ thỏa mãn.}$$

$$\text{TH2: } y = 2 \Rightarrow 3^2 = 9 \leq x \leq 10 \Rightarrow x \in \{9; 10\} \text{ có 2 cặp nghiệm } (x; y) \text{ thỏa mãn.}$$

Vậy có tất cả 10 cặp nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 32. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $2.2^x + x + \sin^2 y \leq 2^{\cos^2 y}$

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Lời giải:

Chọn B

$$\text{Ta có } 2.2^x + x + \sin^2 y \leq 2^{\cos^2 y} \Leftrightarrow 2^{x+1} + x + 1 \leq 2^{\cos^2 y} + \cos^2 y. \quad (1)$$

$$\text{Đặt } f(t) = 2^t + t \Rightarrow f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t > 0.$$

$$\text{Suy ra hàm số } y = f(t) \text{ là hàm số đồng biến trên } (0; +\infty).$$

$$\text{Suy ra } (1) \Leftrightarrow f(x+1) \leq f(\cos^2 y) \Leftrightarrow x+1 \leq \cos^2 y \Leftrightarrow x \leq -\sin^2 y \Rightarrow x \leq 0 \text{ vô lí.}$$

Vậy không tồn tại cặp số nguyên dương $(x; y)$ nào thỏa mãn đề bài.

Câu 33. Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x + y.4^{x+y-1} \geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^2 + y^2 + 4x + 6y \text{ bằng}$$

A. $\frac{65}{8}$.B. $\frac{33}{4}$.C. $\frac{57}{8}$.D. $\frac{49}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2x + y \cdot 4^{x+y-1} \geq 3 \Leftrightarrow y \cdot 2^{2x+2y-2} \geq 3 - 2x \Leftrightarrow 2y \cdot 2^{2y} \geq (3 - 2x) \cdot 2^{3-2x} \cdot (1)$

□ Nếu $y \geq 0$ và $x \geq \frac{3}{2}$ thì (1) luôn đúng. (2)

□ Nếu $y \geq 0$ và $x < \frac{3}{2}$, khi đó ta xét hàm số $f(t) = t \cdot 2^t$ với $t > 0$, ta có $f(t)$ liên tục trên $[0; +\infty)$ và $f'(t) = 2^t + t \cdot 2^t \ln 2 > 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên nửa khoảng $[0; +\infty)$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow f(2y) \geq f(3-2x) \Leftrightarrow 2x + 2y \geq 3 \Leftrightarrow x + y \geq \frac{3}{2}$ (3).

Gọi phương trình đường thẳng $d: x + y - \frac{3}{2} = 0$.

Từ (2) và (3) suy ra tập hợp các điểm $M(x; y)$ thỏa mãn đề là (T) , với (T) miền mặt phẳng thuộc góc phần tư thứ nhất nằm phía trên đường thẳng d kể cả đường thẳng d .

Ta có $P = x^2 + y^2 + 4x + 6y \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+3)^2 = P+13$ với $P > 13$ vì tâm $I(-2; -3)$ không thỏa mãn $x + y \geq \frac{3}{2}$.

Gọi $(C): (x+2)^2 + (y+3)^2 = P+13$ là đường tròn có $\begin{cases} \text{tâm } I(-2; -3) \\ R = \sqrt{P+13} \end{cases}$.

Khi (T) và (C) có điểm chung thì $d(I, d) \leq R$

$$\Leftrightarrow \frac{\left| -2 - 3 - \frac{3}{2} \right|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{P+13} \Leftrightarrow P+13 \geq \frac{169}{8} \Leftrightarrow P \geq \frac{65}{8}.$$

Khi $P = \frac{65}{8}$ đường tròn (C) tiếp xúc đường thẳng d tại $A\left(\frac{5}{4}; \frac{1}{4}\right)$ thỏa vì A thuộc (T) .

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{65}{8}$ khi $x = \frac{5}{4}$ và $y = \frac{1}{4}$.

Câu 34. Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $x + 3y \cdot 3^{x+3y-4} \geq 4$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 5x + 4y$ bằng

A. $\frac{43}{8}$.

B. $\frac{33}{4}$.

C. $\frac{49}{8}$.

D. $\frac{57}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $x + 3y \cdot 3^{x+3y-4} \geq 4 \Leftrightarrow 3y \cdot 3^{x+3y-4} \geq 4 - x \Leftrightarrow 3y \cdot 3^{3y} \geq (4 - x)3^{4-x} (*)$

Xét hàm số $f(t) = t \cdot 3^t, \forall t \geq 0$, ta có

$$f'(t) = 3^t(1 + t \ln 3) > 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên } [0; +\infty).$$

$$(*) \Leftrightarrow f(3y) \geq f(4-x), \forall x, y \geq 0 \Leftrightarrow 3y \geq 4-x \Leftrightarrow x \geq 4-3y, \forall x, y \geq 0$$

$$\text{Xét biểu thức } P = x^2 + y^2 + 5x + 4y \Rightarrow P \geq (4-3y)^2 + y^2 + 5(4-3y) + 4y$$

$$\Leftrightarrow P \geq 10y^2 - 35y + 36 \geq \frac{43}{8}$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{43}{8} \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} y = \frac{7}{4} \\ x = 4-3y \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = \left(-\frac{5}{4}; \frac{7}{4}\right)$$

Câu 35. Cho các số thực x, y thỏa mãn $5 + 16 \cdot 4^{x^2-2y} \leq (5 + 16^{x^2-2y}) \cdot 7^{2y-x^2+2}$ và $\frac{x^2}{2} \geq y+1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{10x+6y+26}{2x+2y+5}$. Khi đó, giá trị của biểu thức $T = M + m$ bằng

- A. $T = 10$. B. $T = \frac{21}{2}$. C. $T = \frac{19}{2}$. D. $T = 15$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = x^2 - 2y$.

Ta có $5 + 16 \cdot 4^t \leq (5 + 4^{2t}) \cdot 7^{2-t} \Leftrightarrow \frac{5 + 4^{t+2}}{7^{t+2}} \leq \frac{5 + 4^{2t}}{7^{2t}}$ (1).

Xét hàm số $f(u) = \frac{5 + 4^u}{7^u} = 5\left(\frac{1}{7}\right)^u + \left(\frac{4}{7}\right)^u$ ta có $f'(u) = 5\left(\frac{1}{7}\right)^u \ln \frac{1}{7} + \left(\frac{4}{7}\right)^u \ln \frac{4}{7} < 0, \forall u \in \mathbb{R}$

Suy ra hàm số $f(u)$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow f(t+2) \leq f(2t) \Leftrightarrow t+2 \geq 2t \Leftrightarrow t \leq 2$.

Mặt khác $\frac{x^2}{2} \geq y+1 \Leftrightarrow x^2 - 2y \geq 2 \Leftrightarrow t \geq 2$. Suy ra $t = 2 \Leftrightarrow y = \frac{x^2 - 2}{2}$. Thay vào P ta được

$P = \frac{3x^2 + 10x + 20}{x^2 + 2x + 3} \Leftrightarrow (3-P)x^2 + 2(5-P)x + 20 - 3P = 0$ (2).

Khi $P \neq 3$, vì P xác định nên phương trình (2) có nghiệm.

Khi đó $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (5-P)^2 - (3-P)(20-3P) \geq 0 \Leftrightarrow -2P^2 + 19P - 35 \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq P \leq 7$. Vậy $T = M + m = \frac{5}{2} + 7 = \frac{19}{2}$.

Câu 36. Xét các số thực dương x, y thỏa $2021^{2(x^2-y+2)} - \frac{4x+y+2}{(x+2)^2} \geq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2y - 4x$.

- A. 2021. B. 2020. C. $\frac{1}{2}$. D. 2.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết, ta suy ra $2021^{2(x^2-y+2)} \geq \frac{4x+y+2}{(x+2)^2} \Leftrightarrow 2(x^2-y+2) \geq \log_{2021} \frac{4x+y+2}{(x+2)^2}$ (1).

Đặt $\begin{cases} a = 4x + y + 2 \\ b = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Rightarrow b - a = x^2 - y + 2$ thì (1) trở thành

$\Rightarrow 2(b-a) \geq \log_{2021} a - \log_{2021} b \Leftrightarrow \log_{2021} a + 2a \geq \log_{2021} b + 2b$ (2).

Xét hàm số $f(t) = \log_{2021} t + 2t$ trên $(0; +\infty)$ ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2021} + 2 > 0, \forall t > 0$

Suy ra hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Khi đó (2) $\Leftrightarrow f(a) \geq f(b) \Leftrightarrow a \geq b \Leftrightarrow 4x + y + 2 \geq (x+2)^2 \Leftrightarrow y \geq x^2 + 2$.

Thay vào P , ta được $P \geq 2x^2 - 4x + 4 = 2(x-1)^2 + 2 \geq 2$.

Vậy $P_{\min} = 2$ khi và chỉ khi $x = 1, y = 3$.

DẠNG 2: PHƯƠNG PHÁP HÀM ĐẶC TRƯNG GIẢI PT, BPT MŨ CHỨA THAM SỐ

Câu 37. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m nhỏ hơn 2021 để phương trình $m + \sqrt{m+2^x} = 2^{2x}$ có nghiệm thực.

A. 2020.

B. 2021.

C. 2022.

D. 2019.

Lời giải

Chọn A

Ta có $m + \sqrt{m+2^x} = 2^{2x} \Leftrightarrow m + 2^x + \sqrt{m+2^x} = 2^x + 2^{2x}(1)$.

Dễ thấy: khi $m > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{m+2^x} > 0 \\ 2^x > 0 \end{cases}$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$

Dễ thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow f(\sqrt{2^x + m}) = f(2^x) \Leftrightarrow 2^x + m = 2^{2x} \Leftrightarrow m = 2^{2x} - 2^x$

Đặt $2^x = a$ với $a > 0 \Rightarrow m = g(a) = a^2 - a$ trên khoảng $(0; +\infty)$

a	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g(a)$	0	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq -\frac{1}{4}$.

Vậy có 2020 giá trị của m thỏa mãn điều kiện.

Câu 38. Cho phương trình $2^{x^3+x^2-2x+m} - 2^{x^2+x} + x^3 - 3x + m = 0$. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình có ba nghiệm phân biệt?

A. 5.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$2^{x^3+x^2-2x+m} - 2^{x^2+x} + x^3 - 3x + m = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^3+x^2-2x+m} + x^3 + x^2 - 2x + m = 2^{x^2+x} + x^2 + x (*)$$

Xét $f(t) = 2^t + t$

Có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0$ suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$

Khi đó

$$(*) \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x + m = x^2 + x$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x = -m(**)$$

Xét

$$h(x) = x^3 - 3x; h'(x) = 3x^2 - 3; h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$h_{CD} = h(-1) = 2; h_{CT} = h(1) = -2$$

x	-1	1
$h'(x)$	+	-
$h(x)$	2	-2

Phương trình có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-2 < -m < 2 \Leftrightarrow -2 < m < 2$

Mà m nguyên nên $m \in \{-1; 0; 1\}$

Kết luận: Có ba số nguyên m để phương trình có ba nghiệm phân biệt.

- Câu 39.** Cho phương trình $(\sqrt{3})^{3x^2-3mx+4} - (\sqrt{3})^{2x^2-mx+3m} = -x^2 + 2mx + 3m - 4$ (1). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(0; 2020)$ sao cho phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Số phần tử của tập S là
- A. 2020. B. 2018. C. 2019. D. 2021.

Lời giải

Chọn B

$$(\sqrt{3})^{3x^2-3mx+4} - (\sqrt{3})^{2x^2-mx+3m} = -x^2 + 2mx + 3m - 4$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3})^{3x^2-3mx+4} + 3x^2 - 3mx + 4 = (\sqrt{3})^{2x^2-mx+3m} + 2x^2 - mx + 3m \quad (2).$$

Xét hàm số $f(t) = (\sqrt{3})^t + t$ trên tập $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = (\sqrt{3})^t \ln \sqrt{3} + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó, phương trình (2) $\Leftrightarrow f(3x^2 - 3mx + 4) = f(2x^2 - mx + 3m)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 3mx + 4 = 2x^2 - mx + 3m \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 3m + 4 = 0 \quad (3).$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 + 3m - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -4 \end{cases}$.

Mà m nguyên và thuộc khoảng $(0; 2020)$ suy ra $S = \{2; 3; 4; \dots; 2019\}$.

Vậy tập S có 2018 phần tử.

- Câu 40.** Cho phương trình $e^{m \sin 2x - \cos 2x} - e^{\cos^2 x + 2} = 3 \cos^2 x - m \sin 2x + 1$ (m là tham số thực). Số giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho vô nghiệm là
- A. 3. B. 2. C. Vô số. D. 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$e^{m \sin 2x - \cos 2x} - e^{\cos^2 x + 2} = 3 \cos^2 x - m \sin 2x + 1 \Leftrightarrow e^{m \sin 2x - \cos 2x} + m \sin 2x - \cos 2x = e^{\cos^2 x + 2} + \cos^2 x + 2$$

$$\Leftrightarrow f(m \sin 2x - \cos 2x) = f(\cos^2 x + 1) \text{ với } f(t) = e^t + t.$$

Xét $f(t) = e^t + t$ có $f'(t) = e^t + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Do đó ta có:

$$f(m \sin 2x - \cos 2x) = f(\cos^2 x + 2) \Leftrightarrow m \sin 2x - \cos 2x = \cos^2 x + 2.$$

$\Leftrightarrow 2m\sin 2x - 3\cos 2x = 5$ vô nghiệm khi và chỉ khi:
 $(2m)^2 + (-3)^2 < 5^2 \Leftrightarrow m^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < m < 2$. Vì $m \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow m = 1$.

Câu 41. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để phương trình

$$256^{2\cos^2 x + \cos x} + 8\cos 2x + 2(4-m)\cos x = 2^{2m\cos x + m} + m - 8$$

có đúng 2 nghiệm phân biệt thuộc $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

A. 4.

B. 8.

C. 7.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$256^{2\cos^2 x + \cos x} + 8\cos 2x + 2(4-m)\cos x = 2^{2m\cos x + m} + m - 8 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 2^{8(2\cos^2 x + \cos x)} + 8(2\cos^2 x - 1) + 8\cos x - 2m\cos x = 2^{2m\cos x + m} + m - 8$$

$$\Leftrightarrow 2^{8(2\cos^2 x + \cos x)} + 8(2\cos^2 x + \cos x) = 2^{2m\cos x + m} + 2m\cos x + m \quad (2)$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = 2^t + t$ có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Phương trình (2)} \Leftrightarrow f(8(2\cos^2 x + \cos x)) = f(2m\cos x + m)$$

$$\Leftrightarrow 8(2\cos^2 x + \cos x) = 2m\cos x + m \Leftrightarrow 8\cos x(2\cos x + 1) - m(2\cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(8\cos x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \cos x = \frac{m}{8} \end{cases}$$

Do phương trình $\cos x = -\frac{1}{2}$ không có nghiệm trong $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ nên phương trình (1) có đúng 2

nghiệm phân biệt trong $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ khi $0 \leq \frac{m}{8} < 1 \Leftrightarrow 0 \leq m < 8$.

Vì m nguyên nên $m \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\} \Rightarrow$ có 8 giá trị m thỏa mãn.

Câu 42. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình sau có nghiệm thực?

$$2^{\sin x - 2 + \sqrt[3]{m - 3\sin x}} + (\sin^3 x + 6\cos^2 x + 9\sin x + m - 6)2^{\sin x - 2} = 2^{\sin x + 1} + 1$$

A. 20.

B. 21.

C. 22.

D. 24.

Lời giải

Chọn B

Chia cả hai vế phương trình cho $2^{\sin x - 2}$ ta được:

$$2^{\sqrt[3]{m - 3\sin x}} + \sin^3 x + 6\cos^2 x + 9\sin x + m - 6 = 8 + 2^{2 - \sin x}$$

$$\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m - 3\sin x}} + \sin^3 x - 6\sin^2 x + 9\sin x + m = 8 + 2^{2 - \sin x}$$

$$\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m - 3\sin x}} + m - 3\sin x = 2^{2 - \sin x} + 8 - 12\sin x + 6\sin^2 x - \sin^3 x$$

$$\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m - 3\sin x}} + m - 3\sin x = 2^{2 - \sin x} + (2 - \sin x)^3 \quad (1)$$

Xét hàm $f(u) = 2^u + u^3$ trên $\mathbb{R}$.

Có $f'(u) = 2^u \ln 2 + 3u^2 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó phương trình (1)} \Leftrightarrow f(\sqrt[3]{m-3\sin x}) = f(2-\sin x) \Leftrightarrow \sqrt[3]{m-3\sin x} = 2-\sin x$$

$$\Leftrightarrow m-3\sin x = (2-\sin x)^3 \Leftrightarrow m = 3\sin x + (2-\sin x)^3 \quad (2)$$

Đặt $t = \sin x$, $(-1 \leq t \leq 1)$ thì (2) trở thành: $m = 3t + (2-t)^3$ (3).

Xét hàm số $g(t) = 3t + (2-t)^3$ trên đoạn $[-1;1]$.

$$\text{Có } g'(t) = 3 - 3(2-t)^2 \Rightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow (2-t)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \notin [-1;1] \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	-1		1
$g'(t)$		-	
$g(t)$	24		4

Phương trình (3) có nghiệm trên đoạn $[-1;1]$ khi và chỉ khi $4 \leq m \leq 24$.

Do m nguyên nên $m \in \{4; 5; \dots; 24\}$.

Vậy có 21 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 43. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m nhỏ hơn 20 để phương trình

$$e^{\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2}} - \sqrt{\frac{x^2+mx+1}{x}}} = \frac{x^3 + mx^2 + x}{x^4 + 1} \text{ có nghiệm thực dương?}$$

A. 19.

B. 16.

C. 18.

D. 17.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{x^2 + mx + 1}{x} \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } e^{\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2}} - \sqrt{\frac{x^2+mx+1}{x}}} = \frac{x^3 + mx^2 + x}{x^4 + 1} \Leftrightarrow e^{\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2}} - \sqrt{\frac{x^2+mx+1}{x}}} = \frac{x^2}{x^4 + 1} \cdot \frac{x^2 + mx + 1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4 + 1}{x^2} \cdot e^{\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2}}} = \frac{x^2 + mx + 1}{x} \cdot e^{\sqrt{\frac{x^2+mx+1}{x}}} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 \cdot e^t$, với $t \geq 0$.

$f'(t) = 2t \cdot e^t + t^2 \cdot e^t \geq 0, \forall t \geq 0$. Do đó hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

$$\text{Phương trình (*) có dạng } f\left(\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2}}\right) = f\left(\sqrt{\frac{x^2+mx+1}{x}}\right).$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{\frac{x^4+1}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2+mx+1}{x}} \Leftrightarrow \frac{x^4+1}{x^2} = \frac{x^2+mx+1}{x} \Leftrightarrow x^4 - x^3 - x + 1 = mx^2.$$

$$\Leftrightarrow m = x^2 + \frac{1}{x^2} - x - \frac{1}{x} \quad (**).$$

Đặt $a = x + \frac{1}{x}, x > 0 \Rightarrow a \geq 2$ và $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$.

(**) trở thành $m = a^2 - a - 2$ (***)

(*) có nghiệm thực dương $\Leftrightarrow$ (***) có nghiệm $a \in [2; +\infty)$.

Xét hàm số $g(a) = a^2 - a - 2$ trên $[2; +\infty)$.

Có $g'(a) = 2a - 1 > 0, \forall a \geq 2$. Suy ra hàm $g(a)$ đồng biến trên $[2; +\infty)$.

Do đó $g(a) \geq g(2), \forall a \in [2; +\infty) \Leftrightarrow g(a) \geq 0, \forall a \in [2; +\infty)$.

Vậy (***) có nghiệm $a \in [2; +\infty) \Leftrightarrow m \geq 0$. Mà $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ 0 < m < 20 \end{cases} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; \dots; 19\}$.

Có 19 giá trị của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 44. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m sao cho hai phương trình $2x^2 + 1 = 3^m$ và $m = 3^x - 2x^2 + x - 1$ có nghiệm chung. Tính tổng các phần tử của S .

A. 6

B. 3.

C. 1.

D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Vì hai phương trình đã cho có nghiệm chung nên hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} 2x^2 + 1 = 3^m \\ m = 3^x - 2x^2 + x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \log_3(2x^2 + 1) \\ m = 3^x - 2x^2 + x - 1 \end{cases} \Rightarrow \log_3(2x^2 + 1) = 3^x - 2x^2 + x - 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x^2 + 1) + 2x^2 + 1 = 3^x + x \Leftrightarrow 3^{\log_3(2x^2 + 1)} + \log_3(2x^2 + 1) = 3^x + x.$$

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t$ xác định trên $\mathbb{R} \Rightarrow f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0$ suy ra hàm $f(t) = 3^t + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ suy ra $\log_3(2x^2 + 1) = x \Leftrightarrow 2x^2 + 1 = 3^x$.

Xét hàm số $g(x) = 2x^2 + 1 - 3^x$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = 4x - 3^x \ln 3 \Rightarrow g''(x) = 4 - 3^x \ln^2 3 \Rightarrow g'''(x) = -3^x \ln^3 3 < 0$. Suy ra hàm số $g''(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó $g(x) = 0$ có nhiều nhất là 3 nghiệm.

$$\text{Ta lại có } g(0) = g(1) = g(2) = 0. \text{ Suy ra phương trình } 2x^2 + 1 = 3^x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ m = 2 \end{cases}.$$

Vậy $S = 3$.

Câu 45. Cho phương trình $3^x(3^{2x} + 1) - (3^x + m + 2)\sqrt{3^x + m + 3} = 2\sqrt{3^x + m + 3}$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để phương trình có nghiệm thực?

A. 3.

B. 6.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

$$3^x(3^{2x} + 1) - (3^x + m + 2)\sqrt{3^x + m + 3} = 2\sqrt{3^x + m + 3}$$

$$\Leftrightarrow 3^x(3^{2x} + 1) = (3^x + m + 2)\sqrt{3^x + m + 3} + 2\sqrt{3^x + m + 3}$$

$$\Leftrightarrow 3^{3x} + 3^x = (3^x + m + 3)\sqrt{3^x + m + 3} + \sqrt{3^x + m + 3}$$

$$\Leftrightarrow 3^{3x} + 3^x = \left(\sqrt{3^x + m + 3}\right)^3 + \sqrt{3^x + m + 3}.$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = t^3 + t$ có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

$$\text{Vậy } \Leftrightarrow 3^{3^x} + 3^x = \left(\sqrt{3^x + m + 3}\right)^3 + \sqrt{3^x + m + 3} \Leftrightarrow f(3^x) = f\left(\sqrt{3^x + m + 3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3^x = \sqrt{3^x + m + 3} \Leftrightarrow 3^{2x} - 3^x - 3 = m. (*)$$

Đặt $u = 3^x$, với điều kiện $u > 0$ và đặt $g(u) = u^2 - u - 3$

Phương trình (*) $\Leftrightarrow g(u) = m$.

$g'(u) = 2u - 1, g'(u) = 0 \Leftrightarrow u = \frac{1}{2}$ ta có bảng biến thiên của $g(u)$:

u	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(u)$		-	0 +
$g(u)$	-3	$-\frac{13}{4}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình đã cho có nghiệm thực khi và chỉ khi $m > -\frac{13}{4}$.

Vậy có tất cả 3 giá trị nguyên âm của m để phương trình có nghiệm thực là: -3; -2; -1.

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $5x^2 + 12x + 16 = m(x+2)\sqrt{x^2+2}$ có hai nghiệm thực phân biệt thỏa mãn điều kiện $2017^{2x+\sqrt{x+1}} - 2017^{2+\sqrt{x+1}} + 2018x \leq 2018$.

A. $m \in (2\sqrt{6}; 3\sqrt{3}]$. **B.** $m \in [2\sqrt{6}; 3\sqrt{3}]$.

C. $m \in \left(3\sqrt{3}; \frac{11}{3}\sqrt{3}\right) \cup \{2\sqrt{6}\}$.

D. $m \in \left(2\sqrt{6}; \frac{11}{3}\sqrt{3}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2017^{2x+\sqrt{x+1}} - 2017^{2+\sqrt{x+1}} + 2018x \leq 2018$

$$\Leftrightarrow 2017^{2x+\sqrt{x+1}} + 1009(2 + \sqrt{x+1}) \leq 2017^{2+\sqrt{x+1}} + 1009(2 + \sqrt{x+1})$$

$$\Leftrightarrow f(2x + \sqrt{x+1}) \leq f(2 + \sqrt{x+1}).$$

Xét hàm số $f(u) = 2017^u + 1009u$

Ta có $f'(t) = 2017^t \ln 2017 + 1009 > 0, \forall u \Rightarrow f(u)$ đồng biến.

$$\text{Nên } 2x + \sqrt{x+1} \leq 2 + \sqrt{x+1} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

$$\text{Ta lại có } 5x^2 + 12x + 16 = m(x+2)\sqrt{x^2+2} \Leftrightarrow 3(x+2)^2 + 2(x^2+2) = m(x+2)\sqrt{x^2+2}$$

$$\Rightarrow 3\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}\right)^2 + 2 = m \cdot \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}.$$

$$\text{Xét } t = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}} \Rightarrow t'(x) = \frac{2-2x}{(\sqrt{x^2+2})^3} \geq 0, \forall x \in [-1; 1]$$

$$\text{Nên } \frac{\sqrt{3}}{3} \leq t \leq \sqrt{3}.$$

Khi đó phương trình trở thành $3t^2 + 2 = mt \Leftrightarrow 3t + \frac{2}{t} = m$.

Xét hàm số $f(t) = 3t + \frac{2}{t}$. ta có $f'(t) = 3 - \frac{2}{t^2} = \frac{3t^2 - 2}{t^2}$.

Cho $f'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Bảng biến thiên

x	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\sqrt{3}$
$f'(t)$	-	+	
$f(t)$	$3\sqrt{3}$	$2\sqrt{6}$	$\frac{11\sqrt{3}}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $2\sqrt{6} < m \leq 3\sqrt{3}$.

Câu 47. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2021; 2021]$ để phương trình $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 6x^2 + 9x + m)2^{x-2} = 2^{x+1} + 1$ có một nghiệm duy nhất?

A. 4038.

B. 3.

C. 2021.

D. 4039.

Lời giải

Chọn A

Chia cả hai vế của phương trình cho 2^{x-2} ta được:

$$2^{\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 6x^2 + 9x + m) = 8 + 2^{2-x} \Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m-3x}} + m - 3x = 2^{2-x} + (2-x)^3 \quad (*)$$

Xét hàm đặc trưng: $f(t) = 2^t + t^3$

Ta có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 3t^2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(*) \Rightarrow \sqrt[3]{m-3x} = 2-x \Leftrightarrow m = -x^3 + 6x^2 - 9x + 8.$$

Xét hàm số $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 8$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0 +	0	-
$f(x)$	$+\infty$	4	8	$-\infty$

Phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi: $\begin{cases} m > 8 \\ m < 4 \end{cases}$.

Kết hợp với yêu cầu đề bài ta có: $\begin{cases} 9 \leq m \leq 2021 \\ -2021 \leq m \leq 3 \end{cases}$. Vậy có tất cả 4038 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 48. Phương trình $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 6x^2 + 9x + m)2^{x-2} = 2^{x+1} + 1$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \in (a; b)$ đặt $T = b^2 - a^2$ thì

A. $T = 36$.

B. $T = 48$.

C. $T = 64$.

D. $T = 72$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 6x^2 + 9x + m)2^{x-2} = 2^{x+1} + 1$

$$\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 6x^2 + 9x + m) = 2^3 + 2^{2-x}.$$

$$\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m-3x}} + m - 3x = 2^{2-x} + (2-x)^3.$$

Xét hàm $f(t) = 2^t + t^3$ trên $\mathbb{R}$.

có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 3t^2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó từ suy ra $m - 3x = (2-x)^3 \Leftrightarrow m = 8 - 9x + 6x^2 - x^3$.

Xét hàm số $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 8$ trên $\mathbb{R}$.

$$\text{có } f'(x) = -3x^2 + 12x - 9; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$				8		$-\infty$
			4				

Dựa vào bảng biến thiên ta có, phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi $4 < m < 8$.

Suy ra $a = 4; b = 8 \Rightarrow T = b^2 - a^2 = 48$.

Câu 49. Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 9x^2 + 24x + m) \cdot 3^{x-3} = 3^x + 1$ có ba nghiệm phân biệt bằng

A. 45.

B. 38.

C. 34.

D. 27.

Lời giải

Chọn D

Phương trình tương đương với

$$3^{\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 9x^2 + 24x + m) = 27 + 3^{3-x} \Leftrightarrow 3^{\sqrt[3]{m-3x}} + m - 3x = 3^{3-x} + (3-x)^3$$

Xét hàm đặc trưng: $f(t) = 3^t + t^3 \Rightarrow f'(t) = 3^t \ln 3 + 3t^2 > 0; \forall t \in \mathbb{R}$.

$$3^{\sqrt[3]{m-3x}} + m - 3x = 3^{3-x} + (3-x)^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{m-3x} = 3-x \Leftrightarrow m = (3-x)^3 + 3x$$

$$\Leftrightarrow m = -x^3 + 9x^2 - 24x + 27.$$

$$\text{Đặt } g(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 27 \Rightarrow g'(x) = -3x^2 + 18x - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	
$g(x)$	$+\infty$				11		$-\infty$
			7				

Để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì $7 < m < 11 \Rightarrow m \in \{8; 9; 10\}$. Vậy tổng các giá trị m bằng 27.

- Câu 50.** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $e^{3m} + e^m = 2\left(x + \sqrt{1-x^2}\right)\left(1 + x\sqrt{1-x^2}\right)$ có nghiệm là
- A. $\left(0; \frac{1}{2}\ln 2\right)$. B. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\ln 2\right]$. C. $\left(0; \frac{1}{e}\right)$. D. $\left[\frac{1}{2}\ln 2; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } t = x + \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq t \leq \sqrt{2} \\ t^2 - 1 = 2x\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } e^{3m} + e^m = t(t^2 + 1) \Leftrightarrow e^{3m} + e^m = t^3 + t.$$

Xét hàm $f(u) = u^3 + u \Rightarrow f'(u) = 3u^2 + 1 > 0$ Hàm số luôn đồng biến.

$$\Rightarrow e^{3m} + e^m = t^3 + t \Leftrightarrow e^m = t$$

$$\text{Phương trình có nghiệm: } e^m \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}\ln 2.$$

- Câu 51.** Tìm số giá trị nguyên của tham số thực m để tồn tại các số thực $x; y$ thỏa mãn $e^{x^2+y^2-m} + e^{x+y+xy-m} = x^2 + y^2 + x + y + xy - 2m + 2$:
- A. 6. B. 9. C. 8. D. 7.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } e^{x^2+y^2-m} + e^{x+y+xy-m} = x^2 + y^2 + x + y + xy - 2m + 2$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2+y^2-m} - (x^2 + y^2 - m) - 1 + e^{x+y+xy-m} - (x + y + xy - m) - 1 = 0 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = e^t - t - 1$ trên $\mathbb{R}$

$$f'(t) = e^t - 1, \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow e^t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $f(t) \geq 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow f(x^2 + y^2 - m) + f(x + y + xy - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - m = 0 \\ x + y + xy - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy - m = 0 \\ x + y + xy - m = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases} \quad (S^2 \geq 4P)$$

$$(2) \text{ trở thành } \begin{cases} S^2 - 2P - m = 0 \\ S + P - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + 2S = 3m \\ S + P = m \end{cases} \quad (3)$$

Xét phương trình $S^2 + 2S = 3m \Leftrightarrow S^2 + 2S - 3m = 0$ (4)

Hệ (3) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (4) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 1 + 3m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{3}$

Do $S^2 \geq 4P$ nên $P \leq \frac{1}{4}S^2$

Ta có: $S^2 + 2S = 3m = 3S + 3P \leq 3S + \frac{3}{4}S^2 \Rightarrow \frac{1}{4}S^2 - S \leq 0 \Rightarrow 0 \leq S \leq 4$

$\Rightarrow 0 \leq S^2 + 2S \leq 24 \Rightarrow 0 \leq 3m \leq 24 \Rightarrow 0 \leq m \leq 8$

Do m nguyên nên $m \in \{0; 1; \dots; 8\}$.

Vậy có 9 giá trị nguyên của tham số thực m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 52. Cho bất phương trình $3^{\frac{2-\sqrt{x^2-2x+m}}{2}} + 3^{\frac{2}{\sqrt{x^2-2x+m}-2}} > \frac{10}{3}$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 2]$?

A. 9.

B. 11.

C. 10.

D. 15.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 2x + m \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - 2x + m} \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + m \geq 0 \\ x^2 - 2x + m \neq 4 \end{cases}$.

Đặt: $t = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + m} - 2}{2} = -\frac{2 - \sqrt{x^2 - 2x + m}}{2} \Rightarrow \frac{1}{t} = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 2x + m} - 2}$ ($t \geq -1, t \neq 0$).

Khi đó bất phương trình trở thành: $3^{-t} + 3^{\frac{1}{t}} > \frac{10}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^t + 3^{\frac{1}{t}} > \frac{1}{3} + 3$.

Xét hàm số $f(t) = 3^{-t} + 3^{\frac{1}{t}}$.

Ta có $f'(t) = -3^{-t} \cdot \ln 3 - \frac{1}{t^2} \cdot 3^{\frac{1}{t}} \cdot \ln 3 < 0, (\forall t \geq -1, t \neq 0)$.

Nên $f(t)$ nghịch biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(0; +\infty)$.

+ Trên khoảng $(-1; 0)$ ta có $f(t) < f(-1) = \frac{10}{3}$ nên bất phương trình vô nghiệm.

+ Trên khoảng $(0; +\infty)$. Ta có $\left(\frac{1}{3}\right)^t + 3^{\frac{1}{t}} > \frac{1}{3} + 3 \Leftrightarrow f(t) > f(1) \Leftrightarrow t < 1$.

Hay $0 < \frac{\sqrt{x^2 - 2x + m} - 2}{2} < 1 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{x^2 - 2x + m} - 2 < 2$

$\Leftrightarrow 4 < x^2 - 2x + m < 16 \Leftrightarrow 5 - m < (x-1)^2 < 17 - m$.

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 2]$ khi và chỉ khi

$\begin{cases} (x-1)^2 < 17 - m \\ (x-1)^2 > 5 - m \end{cases} \text{ đúng với mọi } x \in [0; 2] \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < 17 - m \\ 0 > 5 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 16 \\ m > 5 \end{cases}$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$.

Có 10 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 53. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in [-3; 5]$: $2^{m(x-2)+x-m^2} - 2^{x(x-m)} < \left[\sqrt{2}x - \sqrt{2}(m+1) \right]^2$?

A. 41.

B. 32.

C. 35.

D. 38.

Lời giải

Ta có:

$$2^{m(x-2)+x-m^2} - 2^{x(x-m)} < \left[\sqrt{2}x - \sqrt{2}(m+1) \right]^2, \forall x \in [-3; 5]$$

$$\Leftrightarrow 2^{(m+1)x-(m+1)^2} - 2^{x^2-mx-1} < \left[x - (m+1) \right]^2, \forall x \in [-3; 5]$$

$$\Leftrightarrow 2^{(m+1)x-(m+1)^2} - 2^{x^2-mx-1} < (x^2 - mx - 1) - \left[(m+1)x - (m+1)^2 \right], \forall x \in [-3; 5]$$

$$\Leftrightarrow 2^{(m+1)x-(m+1)^2} + \left[(m+1)x - (m+1)^2 \right] < 2^{x^2-mx-1} + (x^2 - mx - 1), \forall x \in [-3; 5] (*)$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ trên $\mathbb{R}$.

$$f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$(*) \Leftrightarrow f\left[(m+1)x - (m+1)^2\right] < f(x^2 - mx - 1), \forall x \in [-3; 5]$$

$$\Leftrightarrow (m+1)x - (m+1)^2 < x^2 - mx - 1, \forall x \in [-3; 5]$$

$$\Leftrightarrow \left[x - (m+1) \right]^2 > 0, \forall x \in [-3; 5]$$

$$\Leftrightarrow x \neq m+1, \forall x \in [-3; 5]$$

$$\begin{cases} m+1 < -3 \\ m+1 > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m > 4 \end{cases}$$

Mặt khác $m \in [-20; 20]$ nên $\begin{cases} -20 \leq m < -4 \\ 4 < m \leq 20 \end{cases}$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên có 32 số nguyên m thỏa mãn.

DẠNG 3: PHƯƠNG PHÁP HÀM ĐẶC TRƯNG GIẢI PT, BPT LÔGARIT KHÔNG CHỨA THAM SỐ

1 - PT LÔGARIT KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Câu 54. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm thực của phương trình $\log_3 \frac{x-2}{x^2-4x+5} - x^2 + 7x - 10 = 0$. Tính

$$|x_1 - x_2|.$$

A. 5.

B. $\sqrt{3}$.C. $\sqrt{5}$.

D. 3.

Lời giải

Chọn C+) Điều kiện: $x > 2$.

$$+) \text{ Khi đó phương trình } \Leftrightarrow \log_3 \frac{3(x-2)}{x^2-4x+5} - x^2 + 7x - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3(3x-6) - \log_3(x^2-4x+5) + (3x-6) - (x^2-4x+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3(3x-6) + (3x-6) = \log_3(x^2-4x+5) + (x^2-4x+5) (*)$$

+) Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ trên $(0; +\infty)$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0.$$

Vậy hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Mà (*) có dạng $f(3x-6) = f(x^2-4x+5)$

$$\text{Nên phương trình } \Leftrightarrow 3x-6 = x^2-4x+5 \Leftrightarrow x^2-7x+11=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7+\sqrt{5}}{2} (tm) \\ x = \frac{7-\sqrt{5}}{2} (tm) \end{cases}$$

$$\Rightarrow |x_1 - x_2| = \sqrt{5}.$$

Câu 55. Phương trình $\log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 3x^2 - 8x + 5$ có hai nghiệm là a và $\frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của b là

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2x-1 > 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } \log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 3x^2 - 8x + 5.$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} - 1 = 3x^2 - 8x + 4 \Leftrightarrow \log_3 \frac{2x-1}{3(x-1)^2} = 3(x-1)^2 - (2x-1).$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (2x-1) + (2x-1) = \log_3 (3(x-1)^2) + 3(x-1)^2 \quad (1).$$

Xét hàm số: $f(t) = \log_3(t) + t$ với $t > 0$.

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0 \quad \forall t > 0.$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow f(2x-1) = f(3(x-1)^2)$$

$$\Leftrightarrow 2x-1 = 3(x-1)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0 \text{ hay } \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Vậy hai nghiệm của phương trình là 2 và $\frac{2}{3}$ suy ra $b = 3$.

Câu 56. Phương trình $\log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 3x^2 - 8x + 5$ có hai nghiệm là a và $\frac{a}{b}$. Giá trị của b là

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2x-1 > 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } \log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 3x^2 - 8x + 5.$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} - 1 = 3x^2 - 8x + 4 \Leftrightarrow \log_3 \frac{2x-1}{3(x-1)^2} = 3(x-1)^2 - (2x-1).$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (2x-1) + (2x-1) = \log_3 (3(x-1)^2) + 3(x-1)^2 \quad (1).$$

Xét hàm số: $f(t) = \log_3(t) + t$ với $t > 0$.

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0 \quad \forall t > 0.$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow f(2x-1) = f(3(x-1)^2).$$

$$\Leftrightarrow 2x-1 = 3(x-1)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0 \text{ hay } \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Vậy hai nghiệm của phương trình là 2 và $\frac{2}{3}$ suy ra $b = 3$.

Câu 57. Biết x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là nghiệm của phương trình $\log_4 \left(\frac{x^2+1}{2x+3} \right) + x^2 - x = 0$ và

$2x_1 + 3x_2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{b})$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $a + b$.

A. $a + b = 4$.

B. $a + b = 13$.

C. $a + b = 8$.

D. $a + b = 11$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện của phương trình là: $\frac{x^2+1}{2x+3} > 0 \Leftrightarrow 2x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$. Với điều kiện này thì phương trình đã cho tương đương:

$$\frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{x^2+1}{2x+3} \right) + x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{x^2+1}{2x+3} \right) + 2x^2 - 2x = 0$$

$$\log_2 (x^2+1) + 2x^2 = \log_2 (2x+3) + 2x$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^2+1) + 2x^2 + 3 = \log_2 (2x+3) + 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^2+1) + 1 + 2x^2 + 2 = \log_2 (2x+3) + (2x+3)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2x^2+2) + 2x^2 + 2 = \log_2 (2x+3) + (2x+3) (*).$$

Xét hàm số, $g(t) = \log_2 t + t$, chúng ta có thể dễ dàng thấy rằng khi $t > 0$ thì hàm số $g(t)$ liên tục và luôn đồng biến. Hơn nữa, phương trình (*) chúng ta có thể viết lại

$$g(2x^2+2) = g(2x+3) \Leftrightarrow 2x^2+2 = 2x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } 2x_1 + 3x_2 = 2 \cdot \frac{1-\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{3}) = \frac{1}{2}(a + \sqrt{b}) \Rightarrow a = 5, b = 3 \Rightarrow a + b = 8.$$

Câu 58. Phương trình $\ln \frac{x^2+3x+4}{-x+2} + x^2 + 4x + 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Khi đó $x_1 + x_2$ bằng

A. -4.

B. 2.

C. 4.

D. -2.

Lời giải

Chọn A

Với điều kiện $x < 2$ ta có: $\ln \frac{x^2 + 3x + 4}{-x + 2} + x^2 + 4x + 2 = 0$.

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 + 3x + 4) + (x^2 + 3x + 4) = \ln(-x + 2) + (-x + 2) \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = t + \ln t, t \in (0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t} > 0, \forall t \in (0; +\infty)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Phương trình (1) có dạng $f(x^2 + 3x + 4) = f(-x + 2)$ nên ta có:

$$x^2 + 3x + 4 = -x + 2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 + \sqrt{2} \\ x_2 = -2 - \sqrt{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy ta có: $x_1 + x_2 = -4$.

Câu 59. Biết x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_7 \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} \right) + 4x^2 + 1 = 6x$ và

$$x_1 + 2x_2 = \frac{1}{4}(a + \sqrt{b}) \text{ với } a, b \text{ là hai số nguyên dương. Tính } a + b.$$

A. $a + b = 13$.B. $a + b = 11$.C. $a + b = 16$.D. $a + b = 14$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > 0, x \neq \frac{1}{2}$.

$$\text{Ta có: } \log_7 \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} \right) + 4x^2 + 1 = 6x \Leftrightarrow \log_7 (4x^2 - 4x + 1) + 4x^2 - 4x + 1 = \log_7 (2x) + 2x.$$

Xét hàm số $f(t) = \log_7 t + t$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 7} + 1 > 0 \quad \forall t > 0$ nên là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Do đó ta có } 4x^2 - 4x + 1 = 2x \Leftrightarrow 4x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Khi đó

$$x_1 + 2x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{4} + 2 \frac{3 + \sqrt{5}}{4} = \frac{1}{4}(9 + \sqrt{5}) \text{ hoặc } x_1 + 2x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{4} + 2 \frac{3 - \sqrt{5}}{4} = \frac{1}{4}(9 - \sqrt{5}).$$

$$\text{Vậy } x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}; x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}. \text{ Do đó } a = 9; b = 5 \text{ và } a + b = 9 + 5 = 14.$$

Câu 60. Phương trình $\log_2 \frac{x^2 + 3x + 2}{3x^2 - 5x + 8} = x^2 - 4x + 3$ có các nghiệm x_1, x_2 . Hãy tính giá trị của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$.

A. 31.

B. -31.

C. 1.

D. -1

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 3x^2 - 5x + 8 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ nên điều kiện của phương trình là: } x^2 + 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > -1 \end{cases}.$$

Khi đó $\log_2 \frac{x^2+3x+2}{3x^2-5x+8} = x^2-4x+3$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2+3x+2) - \log_2(3x^2-5x+8) = \frac{1}{2}[(3x^2-5x+8) - (x^2+3x+2)].$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2+3x+2) + \frac{1}{2}(x^2+3x+2) = \log_2(3x^2-5x+8) + \frac{1}{2}(3x^2-5x+8).$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + \frac{1}{2}t, (t > 0); f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + \frac{1}{2} > 0 \forall t > 0.$

Nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Mà phương trình có dạng: $f(x^2+3x+2) = f(3x^2-5x+8).$

Do đó phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$(3x^2-5x+8) = (x^2+3x+2) \Leftrightarrow 2x^2-8x+6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases} (T/m).$$

Vậy $A = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 5x_1x_2 = 4^2 - 5.3 = 1.$

Câu 61. Biết phương trình $\log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$ có một nghiệm dạng $x = a + b\sqrt{2}$ trong đó a, b là các số nguyên. Tính $2a + b$.

A. 3.

B. 8.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \Leftrightarrow \log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3 \left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}} \right) (1).$

ĐKXĐ: $x > 1.$

$$(1) \Leftrightarrow \log_5(2\sqrt{x}+1) + 2\log_3 2\sqrt{x} = \log_5 x + 2\log_3(x-1) (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_5 t + 2\log_3(t-1),$ với $t > 1.$

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 5} + \frac{2}{(t-1) \ln 3} > 0 \text{ với mọi } t > 1, \text{ suy ra } f(t) \text{ đồng biến trên khoảng } (1; +\infty).$$

Từ (*) ta có $f(2\sqrt{x}+1) = f(x)$ nên suy ra

$$2\sqrt{x}+1 = x \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 + \sqrt{2} \text{ (do } x > 1).$$

Suy ra $x = 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow a = 3; b = 2 \Rightarrow 2a + b = 8.$

Câu 62. Tổng các nghiệm phương trình $\log_3 \frac{x^2+x+3}{x^2+2x+2} = x^2+3x+1+2\log_9 2$ có giá trị bằng

A. 1.

B. 2.

C. -3.

D. -1.

Lời giải

Chọn C

Phương trình: $\log_3 \frac{x^2+x+3}{x^2+2x+2} = x^2+3x+1+2\log_9 2$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{x^2+x+3}{x^2+2x+2} - \log_3 2 = (2x^2+4x+4) - (x^2+x+3)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 4x + 4} = (2x^2 + 4x + 4) - (x^2 + x + 3)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (x^2 + x + 3) + (x^2 + x + 3) = \log_3 (2x^2 + 4x + 4) + (2x^2 + 4x + 4).$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$, $t > 0$ thì $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0$, $\forall t > 0$.

Do đó $f(t)$ đồng biến với mọi $t > 0$, nên phương trình $f(x^2 + x + 3) = f(2x^2 + 4x + 4)$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 3 = 2x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 = 0.$$

Phương trình có 2 nghiệm $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình có giá trị là -3 .

Câu 63. Biết $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $\log_7 \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} \right) + 4x^2 + 1 = 6x$ và

$$x_1 + 3x_2 = \frac{1}{4}(a + 2\sqrt{b}) \text{ với } a, b \text{ là các số nguyên dương. Tính } a + b$$

A. $a + b = 14$.

B. $a + b = 16$.

C. $a + b = 17$.

D. $a + b = 15$.

Lời giải

$$\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} > 0 \Leftrightarrow \frac{(2x - 1)^2}{2x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\log_7 \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} \right) + 4x^2 + 1 = 6x \Leftrightarrow \log_7 (2x - 1)^2 + (2x - 1)^2 = \log_7 2x + 2x$$

Xét hàm $f(t) = \log_7 t + t (t > 0)$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 7} + 1 > 0 \forall t > 0$, vậy $f(t) = \log_7 t + t (t > 0)$ là hàm đồng biến suy ra

$$\log_7 (2x - 1)^2 + (2x - 1)^2 = \log_7 2x + 2x \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 2x \Leftrightarrow 4x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{4} \\ x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{4} \end{cases}.$$

$$x_1 + 3x_2 = \frac{1}{4}(12 + 2\sqrt{5}).$$

Câu 64. Tìm tổng các nghiệm của phương trình: $\log_4 (x^3 - x - 2) + x^3 + 7x = \log_2 (x - 1) + 4x^2 + 7$.

A. 17.

B. 2.

C. 9.

D. 11.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^3 - x - 2 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases}$$

Với điều kiện trên, ta có: $\log_4 (x^3 - x - 2) + x^3 + 7x = \log_2 (x - 1) + 4x^2 + 7$

$$\Leftrightarrow \log_2 \sqrt{x^3 - x - 2} + x^3 - x - 2 = \log_2 (2x - 2) + 4x^2 - 8x + 4$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \sqrt{x^3 - x - 2} + x^3 - x - 2 = \log_2 (2x - 2) + (2x - 2)^2 (*)$$

Đặt $f(t) = \log_2 t + t^2, t > 0$

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 2t > 0, \forall t > 0$

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Nên (*) $\Leftrightarrow f(\sqrt{x^3 - x - 2}) = f(2x - 2) \Leftrightarrow \sqrt{x^3 - x - 2} = 2x - 2$

$$\Leftrightarrow x^3 - x - 2 = (2x - 2)^2 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 7x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là 2.

Câu 65. Cho phương trình $\log(x-3) + 2x\sqrt{x-3} + 6x - 16 = 2\log(x-4) + 2(x-3)^3$ có một nghiệm có dạng $x = \frac{a+\sqrt{b}}{2}$, trong đó a, b là hai số nguyên dương. Giá trị của biểu thức $a+b$ bằng

A. 9.

B. 10.

C. 14.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x > 4$.

$$\text{Bất phương trình } \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log(x-3) + x\sqrt{x-3} + 3x - 8 = \log(x-4) + (x-3)^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \log(x-3) + (x-3)\sqrt{x-3} + 3\sqrt{x-3} + 3(x-3) + 1 = \log(x-4) + (x-4+1)^3$$

$$\Leftrightarrow \log\sqrt{x-3} + (\sqrt{x-3} + 1)^3 = \log(x-4) + (x-4+1)^3 \Leftrightarrow f(\sqrt{x-3}) = f(x-4) (*)$$

Với hàm số $f(t) = \log t + t^3; t > 0$, có đạo hàm: $f'(t) = \frac{1}{t \ln 10} + 3t^2; \forall t > 0$

Suy ra hàm số đơn điệu tăng. Từ (*) suy ra:

$$f(\sqrt{x-3}) = f(x-4) \Leftrightarrow \sqrt{x-3} = x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x-3 = (x-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x = \frac{9 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{9 + \sqrt{5}}{2} = \frac{a + \sqrt{b}}{2}$$

$$\text{suy ra: } \begin{cases} a = 9 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow (a+b) = 14.$$

Câu 66. phương trình $\frac{1}{2} \log_2(x+2) + x + 3 = \log_2 \frac{2x+1}{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{x+2}$, gọi S là tổng tất cả các nghiệm của nó. Khi đó, giá trị của S là

A. $S = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$.

B. $S = 2$.

C. $S = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

D. $S = -2$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} -2 < x < -\frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2} \log_2(x+2) + x + 3 = \log_2 \frac{2x+1}{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \sqrt{x+2} + (\sqrt{x+2} - 1)^2 = \log_2 \left(2 + \frac{1}{x}\right) + \left[\left(2 + \frac{1}{x}\right) - 1\right]^2 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + (t-1)^2, t > 0$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 2(t-1) = \frac{2 \ln 2 \cdot t^2 - 2 \ln 2 \cdot t + 1}{t \cdot \ln 2}, t > 0$.

Vì $2 \ln 2 \cdot t^2 - 2 \ln 2 \cdot t + 1$ có $\begin{cases} a = 2 \ln 2 > 0 \\ \Delta' = \ln^2 2 - 2 \ln 2 < 0 \end{cases}$ suy ra $2 \ln 2 \cdot t^2 - 2 \ln 2 \cdot t + 1 > 0$.

Do đó $f'(t) > 0; \forall t > 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Vậy (1) $\Leftrightarrow f(\sqrt{x+2}) = f\left(2 + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow \sqrt{x+2} = 2 + \frac{1}{x}$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $\begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$. Vậy $S = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$.

- Câu 67.** Cho phương trình $\log_2 \frac{4x+2019}{x^2-2x+3} = x^2-6x-2016$. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình là
- A.** 2. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\frac{4x+2019}{x^2-2x+3} > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{2019}{4}$ (1)

Đây là một dạng cơ bản của phương trình hàm đặc trưng:

$$\log_a \frac{u}{v} = v - u \Leftrightarrow \log_a u + u = \log_a v + v$$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_2 \frac{4x+2019}{x^2-2x+3} = (x^2-2x+3) - (4x+2019)$

$$\Leftrightarrow \log_2 (4x+2019) - \log_2 (x^2-2x+3) = (x^2-2x+3) - (4x+2019)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (4x+2019) + (4x+2019) = \log_2 (x^2-2x+3) + (x^2-2x+3)$$

$$\Leftrightarrow f(4x+2019) = f(x^2-2x+3)$$

Với hàm số: $f(t) = t + \log_2 t$ có đạo hàm: $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 2} > 0, \forall t > 0$.

Suy ra hàm số đơn điệu trên tập xác định.

Suy ra: $f(4x+2019) = f(x^2-2x+3) \Leftrightarrow 4x+2019 = x^2-2x+3 \Leftrightarrow x^2-6x-2016 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 48 \\ x = -42 \end{cases}. \text{ Vậy } x_1 + x_2 = 6.$$

- Câu 68.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của y thỏa mãn $5^x = \log_5(x+y) + y$. Biết rằng $|y| \leq 2020$.
- A.** 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x + y > 0$.

Đặt $\log_5(x + y) = t \Leftrightarrow x + y = 5^t$.

Khi đó: $\begin{cases} 5^x = t + y \\ 5^t = x + y \end{cases} \Leftrightarrow 5^t + t = 5^x + x$.

Xét hàm số $f(u) = 5^u + u \Rightarrow f'(u) = 5^u \ln 5 + 1 > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến với $\forall u \in \mathbb{R}$.

Ta có: $f(t) = f(x) \Rightarrow t = x$.

Khi đó: $5^x = x + y \Leftrightarrow y = 5^x - x$.

Đặt $g(x) = 5^x - x \Rightarrow g'(x) = 5^x \ln 5 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\log_5(\ln 5)$.

x	$-\infty$	$-\log_5(\ln 5)$	$+\infty$
$g'(x)$			
$g(x)$			

$\frac{1}{\ln 5} + \log_5(\ln 5)$

Để phương trình có nghiệm thì $y \geq \frac{1}{\ln 5} + \log_5(\ln 5) \approx 0,917$.

Mà $|y| \leq 2020$ nên có đúng 2020 giá trị nguyên của y thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 69. Có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ thuộc đoạn $[1; 2020]$ thỏa mãn y là số nguyên và $x + \ln x = y + e^y$?

A. 2021.

B. 2020.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(t) = t + e^t \Rightarrow f'(t) = 1 + e^t > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ (1).

Theo đề ra: $x + \ln x = y + e^y \Leftrightarrow f(\ln x) = f(y)$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$. Để $1 \leq x \leq 2020$ thì $1 \leq e^y \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \ln 2020$.

$\begin{cases} y \in \mathbb{Z} \\ 1 \leq y \leq 2020 \end{cases} \Rightarrow y \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Với mỗi giá trị $y \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ ta có một giá trị x tương ứng thuộc đoạn $[1; 2020]$

Vậy có 7 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 70. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ với $x \leq 2020$ thỏa mãn $\log_2(x-1) + 2x - 2y = 1 + 4^y$.

A. 5.

B. 1010.

C. 6.

D. 2020.

Lời giải

Chọn A

Theo đề bài $\log_2(x-1) + 2x - 2y = 1 + 4^y \Leftrightarrow \log_2 2(x-1) + 2(x-1) = 2y + 2^{2y}$

Đặt $t = \log_2 2(x-1) \Rightarrow 2(x-1) = 2^t$.

Ta có $2^t + t = 2^{2y} + 2y(1)$.

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ trên $\mathbb{R}$

$f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(1) \Leftrightarrow f(t) = f(2y) \Leftrightarrow t = 2y \Leftrightarrow \log_2 2(x-1) = 2y \Leftrightarrow 2(x-1) = 2^{2y} \Leftrightarrow x = 2^{2y-1} + 1.$$

$$\text{Mà } x \leq 2020 \Rightarrow 2^{2y-1} + 1 \leq 2020 \Leftrightarrow y \leq \frac{1}{2}(1 + \log_2 2019).$$

$$\text{Vì } y \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow y \in \{1; 2; 3; 4; 5\}.$$

Vậy có 5 cặp điểm cặp số nguyên dương $(x; y)$.

Câu 71. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $1 \leq x \leq 2020$ và $2^y + y = 2x + \log_2(x + 2^{y-1})$?

A. 2021.

B. 10.

C. 2020.

D. 11.

Lời giải

Chọn D

Theo đề bài, $2^y + y = 2x + \log_2(x + 2^{y-1})$

$$\Leftrightarrow 2^y + \log_2(2^y) = 2x + \log_2\left(x + \frac{2^y}{2}\right) \Leftrightarrow 2^y + 2^y + \log_2(2^y) = 2x + 2^y + \log_2\left(\frac{2x + 2^y}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot (2^y) + \log_2(2^y) = 2 \cdot \left(\frac{2x + 2^y}{2}\right) + \log_2\left(\frac{2x + 2^y}{2}\right) \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = 2t + \log_2 t, t > 0$.

Vì $f'(t) = 2 + \frac{1}{t \ln 2} > 0 \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

$$\text{nên } (1) \Leftrightarrow f(2^y) = f\left(\frac{2x + 2^y}{2}\right) \Leftrightarrow 2^y = \frac{2x + 2^y}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot 2^y = 2x + 2^y \Leftrightarrow 2x = 2^y \Leftrightarrow x = 2^{y-1}.$$

Do $1 \leq x \leq 2020$ nên $0 \leq y-1 \leq \log_2 2020 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 11,98$.

Do $y \in \mathbb{N}^*$ nên $y \in \{1; 2; 3; \dots; 11\}$, với mỗi giá trị y cho ta 1 giá trị x thỏa đề.

Vậy có 11 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 72. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y$?

A. 2019.

B. 6.

C. 2020.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

+ Ta có: $\log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y \Leftrightarrow 1 + \log_3(x+1) + x = 2y + 9^y \quad (1)$.

+ Đặt $t = \log_3(x+1)$. Suy ra: $x+1 = 3^t \Leftrightarrow x = 3^t - 1$.

Khi đó: $(1) \Leftrightarrow t + 3^t = 2y + 3^{2y} \quad (2)$.

Xét hàm số: $f(h) = h + 3^h$, ta có: $f'(h) = 1 + 3^h \ln 3 > 0 \forall h \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(h)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó: $(2) \Leftrightarrow f(t) = f(2y) \Leftrightarrow t = 2y \Leftrightarrow \log_3(x+1) = 2y \Leftrightarrow x+1 = 3^{2y} \Leftrightarrow x+1 = 9^y$.

+ Do $0 \leq x \leq 2020$ nên $1 \leq x+1 \leq 2021 \Leftrightarrow 1 \leq 9^y \leq 2021 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \log_9 2021 \approx 3,46$.

Do $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{0; 1; 2; 3\}$, với mỗi giá trị y cho ta 1 giá trị x thỏa đề.

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa đề.

Câu 73. Cho $0 \leq x \leq 2021$ và $\log_3(x+1) + x - 3y + 1 = 27^y$. Có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa mãn điều kiện trên?

A. 2021.

B. 2020.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$\log_3(x+1) + x - 3y + 1 = 27^y \Leftrightarrow \log_3(x+1) + x + 1 = 27^y + 3y$$

$$\Leftrightarrow 3^{\log_3(x+1)} + \log_3(x+1) = 3^{3y} + 3y(*).$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = 3^t + t$.

Ta có $f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t) = 3^t + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó, từ phương trình (*) ta có:

$$f(\log_3(x+1)) = f(3y) \Leftrightarrow \log_3(x+1) = 3y \Leftrightarrow x+1 = 27^y \Leftrightarrow x = 27^y - 1.$$

$$\text{Mà } 0 \leq x \leq 2021 \Leftrightarrow 0 \leq 27^y - 1 \leq 2021 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \log_{27} 2022 \approx 2,31.$$

$$\text{Vì } y \in \mathbb{Z} \text{ nên } y \in \{0; 1; 2\} \Rightarrow x \in \{0; 26; 728\}.$$

Do đó có 3 cặp số nguyên $(x; y) \in \{(0; 0); (26; 1); (728; 2)\}$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Câu 74. Cho $1 \leq x \leq 2022$ và $\log_2 4(x+2) + x - 2y = 4^y$. Hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ nguyên thỏa mãn các điều kiện trên?

A. 1.

B. 4.

C. 5.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \log_2 4(x+2) + x - 2y = 4^y \Leftrightarrow \log_2(x+2) + 2 + x = 4^y + 2y$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+2) + (x+2) = 2^{2y} + 2y = t + \log_2 t \{t = 2^{2y}\}$$

$$\Leftrightarrow f(x+2) = f(t) \Leftrightarrow 3 \leq x+2 = t = 2^{2y} \leq 2024 \Leftrightarrow \log_2 3 \leq 2y \leq \log_2 2024$$

$$\Leftrightarrow 0,8 \cong \frac{\log_2 3}{2} \leq y \leq \frac{\log_2 2024}{2} \cong 5,5 \xrightarrow{t \in \mathbb{R}} 1 \leq y \leq 5.$$

Vậy có đúng 5 giá trị nguyên của y thỏa mãn ứng với 5 cặp $(x; y)$ nguyên thỏa mãn.

Câu 75. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $1 \leq x \leq 10^6$ và $\log(10x^2 - 20x + 20) = 10^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1$?

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $10x^2 - 20x + 20 > 0$, đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có} \quad \log(10x^2 - 20x + 20) = 10^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + \log[10(x^2 - 2x + 2)] = 10^{y^2} + y^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + \log 10 + \log(x^2 - 2x + 2) = 10^{y^2} + y^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 2) + \log(x^2 - 2x + 2) = 10^{y^2} + y^2$$

$$\Leftrightarrow 10^{\log(x^2 - 2x + 2)} + \log(x^2 - 2x + 2) = 10^{y^2} + y^2 (*).$$

Xét hàm $f(t) = 10^t + t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 10^t \ln 10 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow f[\log(x^2 - 2x + 2)] = f(y^2) \Leftrightarrow \log(x^2 - 2x + 2) = y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 10^{y^2}$
 $\Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 = 10^{y^2}$.

Vì $1 \leq x \leq 10^6$ nên $1 \leq (x-1)^2 + 1 = 10^{y^2} \leq (10^6 - 1)^2 + 1 \Rightarrow 0 \leq y^2 \leq \log[(10^6 - 1)^2 + 1]$.

Vì $y \in \mathbb{Z}^+$ nên $y \in \{1; 2; 3\}$.

+ Với $y=1 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 10 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ (ktm)} \\ x = 4 \text{ (tm)} \end{cases}$.

+ Với $y=2 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 10^4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 9998 = 0$ (không có giá trị x nguyên nào thỏa mãn).

+ Với $y=3 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 10^9 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 999999998 = 0$ (không có giá trị x nguyên nào thỏa mãn).

Vậy có một cặp nguyên dương $(x; y) = (4; 1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 76. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x + y > 0; -20 \leq x \leq 20$ và $\log_2(x + 2y) + x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y = 0$?

A. 19.

B. 6

C. 20.

D. 41.

Lời giải

Chọn C

+ Điều kiện: $x + 2y > 0$

+ Ta có: $x + y > 0$ nên

$\log_2(x + 2y) + x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y = 0$

$\Leftrightarrow \log_2 \frac{(x+y)(x+2y)}{x+y} + x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y = 0$

$\Leftrightarrow \log_2(x^2 + 2y^2 + 3xy) - \log_2(x+y) + x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y = 0$

$\Leftrightarrow \log_2(x^2 + 2y^2 + 3xy) + x^2 + 2y^2 + 3xy = \log_2(x+y) + x + y(1)$

Xét hàm số: $f(t) = \log_2 t + t$, ta có: $f'(h) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0 \forall t \in (0; +\infty)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Do đó: $(1) \Leftrightarrow f(x^2 + 2y^2 + 3xy) = f(x+y) \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 + 3xy = x + y$

$\Leftrightarrow (x+y)(x+2y-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 - 2y$ vì $x + y > 0$

+ Do $-20 \leq x \leq 20$ suy ra $-\frac{19}{2} \leq y \leq \frac{21}{2}$

+ Do $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{-9; -8; \dots; 9; 10\}$, với mỗi giá trị y cho ta 1 giá trị x thỏa đề.

Vậy có 20 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa đề.

Câu 77. Phương trình $\left(\frac{1}{2020}x + 9\right) \log_3 \left((x^2 + 1) \left(\frac{1}{2020}x + 9\right)\right) = 9 - (x^2 - 1) \left(\frac{1}{2020}x + 9\right)$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

$$\left(\frac{1}{2020}x+9\right)\log_3\left((x^2+1)\left(\frac{1}{2020}x+9\right)\right)=9-(x^2-1)\left(\frac{1}{2020}x+9\right) \quad (1)$$

$$\text{ĐKXĐ: } \frac{1}{2020}x+9 > 0 \Leftrightarrow x > -18180.$$

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\frac{1}{2020}x+9$ ta được:

$$\log_3\left((x^2+1)\left(\frac{1}{2020}x+9\right)\right)=\frac{9}{\frac{1}{2020}x+9}-(x^2-1)$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x^2+1)+\log_3\left(\frac{1}{2020}x+9\right)=\frac{9}{\frac{1}{2020}x+9}-(x^2+1)+2$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x^2+1)+\log_3\left(\frac{1}{2020}x+9\right)=\frac{9}{\frac{1}{2020}x+9}-(x^2+1)+\log_3 9$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x^2+1)+(x^2+1)=\log_3\left(\frac{9}{\frac{1}{2020}x+9}\right)+\frac{9}{\frac{1}{2020}x+9} \quad (2)$$

Đặt $f(t)=\log_3 t+t$ với $t>0$,

$$f'(t)=\frac{1}{t\ln 3}+1>0, \forall t>0.$$

Suy ra hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

$$\text{Do đó, (2)} \Leftrightarrow f(x^2+1)=f\left(\frac{9}{\frac{1}{2020}x+9}\right) \Leftrightarrow x^2+1=\frac{9}{\frac{1}{2020}x+9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2020}x^3+9x^2+\frac{1}{2020}x=0 \Leftrightarrow x^3+18180x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x^2+18180x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0(TM) \\ x=-9090+\sqrt{9090^2-1}(TM) \\ x=-9090-\sqrt{9090^2-1}(TM) \end{cases}$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm thực phân biệt.

Câu 78. Có bao nhiêu số nguyên dương x thỏa mãn $\log_2\left(\frac{x+1}{2}\right)+x=4^{\sin^4 y+\cos^4 y}-\sin^2 2y$?

A. Vô số.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$\log_2\left(\frac{x+1}{2}\right)+x=4^{\sin^4 y+\cos^4 y}-\sin^2 2y \Leftrightarrow \log_2(x+1)+x-1=4^{\sin^4 y+\cos^4 y}-\sin^2 2y$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1) + x + 1 = 2^{2(\sin^4 y + \cos^4 y)} - 4\sin^2 y \cdot \cos^2 y + 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1) + x + 1 = 2^{2(\sin^4 y + \cos^4 y)} - 4\sin^2 y \cdot \cos^2 y + 2(\sin^2 y + \cos^2 y)^2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1) + x + 1 = 2^{2(\sin^4 y + \cos^4 y)} + 2(\sin^4 y + \cos^4 y) \quad (2).$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t \Rightarrow f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t > 0$.

$\Rightarrow$ hàm số $y = f(t)$ đồng biến $(0; +\infty)$.

$$\text{Vì vậy } (2) \Leftrightarrow f(\log_2(x+1)) = f(2(\sin^4 y + \cos^4 y)) \Leftrightarrow x+1 = 2^{2(\sin^4 y + \cos^4 y)}.$$

$$\text{Ta có: } \sin^4 y + \cos^4 y = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2y \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \quad \text{nên} \quad 1 \leq 2(\sin^4 y + \cos^4 y) \leq 2$$

$$\Rightarrow 2 \leq x+1 \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3.$$

Mà x là số nguyên dương $\Rightarrow x \in \{1; 2; 3\}$.

Vậy có 3 giá trị x thỏa mãn.

Câu 79. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình

$$\frac{1}{2} \log_2(x+3) = \log_2(x+1) + x^2 - x - 4 + 2\sqrt{x+3}.$$

A. $S = 2$.

B. $S = 1$.

C. $S = -1$.

D. $S = 1 - \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > -1$.

Ta có:

$$\frac{1}{2} \log_2(x+3) = \log_2(x+1) + x^2 - x - 4 + 2\sqrt{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \sqrt{x+3} + (\sqrt{x+3} - 1)^2 = \log_2(x+1) + x^2 \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + (t-1)^2$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 2(t-1) = \frac{1 + 2 \ln 2(t^2 - t)}{t \ln 2} = \frac{2 \ln 2 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + (1 - \ln 2)}{t \ln 2} > 0 \quad \forall t > 0.$$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Suy ra

$$(*) \Leftrightarrow f(\sqrt{x+3}) = f(x+1) \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình bằng 1.

Câu 80. Số nghiệm của phương trình $\sin 2x - \cos x = 1 + \log_2(\sin x)$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là:

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Vì $\sin x > 0$ và $\cos x > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên phương trình đã cho tương đương

$$\sin 2x - \cos x + \log_2(\cos x) = 1 + \log_2(\sin x) + \log_2(\cos x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(\cos x) - \cos x = \log_2(\sin 2x) - \sin 2x \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t - t$, với $t \in (0;1)$ ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} - 1 > 0, \forall t \in (0;1)$.

Do đó, hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Từ phương trình $(*)$, ta có $f(\cos x) = f(\sin 2x) \Leftrightarrow \cos x = \sin 2x \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$ hay $x = \frac{\pi}{6}$.

Câu 81. Biết phương trình $\log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$ có một nghiệm dạng $x = a + b\sqrt{2}$ trong đó a, b là các số nguyên. Tính $2a + b$.

A. 3.

B. 8.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x} > \frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

Ta có:

$$\log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3 \left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}} \right) \Leftrightarrow \log_5 (2\sqrt{x}+1) - \log_5 x = 2\log_3 (x-1) - 2\log_3 (2\sqrt{x})$$

$$\Leftrightarrow \log_5 (2\sqrt{x}+1) + 2\log_3 (2\sqrt{x}) = \log_5 x + 2\log_3 (x-1) \quad (*)$$

Xét hàm số: $f(t) = \log_5(t+1) + 2\log_3(t)$ trên $(2; +\infty)$

Ta có: $f'(t) = \frac{1}{(t+1)\ln 5} + \frac{2}{t \ln 3} > 0$ với mọi $t \in (2; +\infty)$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$

$$\text{Từ đó ta có } (*) \Leftrightarrow f(2\sqrt{x}) = f(x-1) \Rightarrow 2\sqrt{x} = x-1 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 - \sqrt{2} \\ \sqrt{x} = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \sqrt{x} = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow x = 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow a = 3, b = 2$$

Câu 82. Số nghiệm thực của phương trình $2^{\sqrt{x^2+1}} \log_2(x + \sqrt{x^2+1}) = 4^x \log_2(3x)$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Đk: $x > 0$.

Ta có $x + \sqrt{x^2+1} > 1, \forall x > 0$ do đó $2^{\sqrt{x^2+1}} \log_2(x + \sqrt{x^2+1}) > 0, \forall x > 0$.

Với $0 < x \leq \frac{1}{3}$ thì $\begin{cases} 2^{\sqrt{x^2+1}} \log_2(x + \sqrt{x^2+1}) > 0 \\ 4^x \log_2(3x) \leq 0 \end{cases}$, do đó phương trình đã cho vô nghiệm.

Với $x > \frac{1}{3}$.

$$2^{\sqrt{x^2+1}} \log_2(x + \sqrt{x^2+1}) = 4^x \log_2(3x) \Leftrightarrow 2^{x+\sqrt{x^2+1}} \log_2(x + \sqrt{x^2+1}) = 2^{3x} \log_2(3x). (*)$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t \log_2 t$, với $t > 1$.

Có $f'(t) = 2^t \left(\frac{1}{t \ln 2} + \ln 2 \log_2 t \right) \Rightarrow f'(t) > 0, \forall t \in (1; +\infty)$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow f(x + \sqrt{x^2 + 1}) = f(3x) \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} = 3x \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm thực.

Câu 83. Cho phương trình $\frac{1}{2} \log_2(x+2) + x + 3 = \log_2 \frac{2x+1}{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{x+2}$, gọi S là tổng tất cả các nghiệm của nó. Khi đó, giá trị của S là

- A. $S = -2$. B. $S = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$. C. $S = 2$. D. $S = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Lời giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} -2 < x < -\frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases}$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + (t-1)^2, t > 0$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 2(t-1) = \frac{2 \ln 2 \cdot t^2 - 2 \ln 2 \cdot t + 1}{t \cdot \ln 2} > 0, \forall t > 0$, do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Mặt khác ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log_2(x+2) + x + 3 &= \log_2 \frac{2x+1}{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{x+2} \\ \Leftrightarrow \log_2 \sqrt{x+2} + (\sqrt{x+2} - 1)^2 &= \log_2 \left(2 + \frac{1}{x}\right) + \left[\left(2 + \frac{1}{x}\right) - 1\right]^2 \Leftrightarrow f(\sqrt{x+2}) = f\left(2 + \frac{1}{x}\right) \\ \Rightarrow \sqrt{x+2} &= 2 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện ta được } \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{cases}. \text{ Vậy } S = \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

Câu 84. Cho x, y là hai số thỏa mãn $x^2 + 2x - y + 1 = \log_2 \frac{\sqrt{2y+1}}{x+1}$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = e^{2x-1} + 4x^2 - 2y + 1$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. 1. D. -1.

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2y+1 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ y > -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } x^2 + 2x - y + 1 = \log_2 \frac{\sqrt{2y+1}}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)^2 - y = \log_2 \sqrt{2y+1} - \log_2 (x+1)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + \log_2 (x+1) = \frac{1}{2} \log_2 (2y+1) + y$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)^2 + \log_2 [2(x+1)^2] = (2y+1) + \log_2 (2y+1). \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t + \log_2 t$ trên khoảng $(0; +\infty)$ có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 2} > 0, \forall t \in (0; +\infty)$. Suy ra hàm số $f(t) = t + \log_2 t$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Khi đó ta có } (1) \Leftrightarrow 2(x+1)^2 = 2y+1 \Leftrightarrow 2y = 2x^2 + 4x + 1.$$

$$\text{Suy ra } P = e^{2x-1} + 4x^2 - 2y + 1 = e^{2x-1} + 2x^2 - 4x.$$

Xét hàm số $g(x) = e^{2x-1} + 2x^2 - 4x$ trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Có $g'(x) = 2e^{2x-1} + 4x - 4$, $g''(x) = 4e^{2x-1} + 4 > 0 \forall x$. Suy ra $g'(x) = 2e^{2x-1} + 4x - 4$ đồng biến, do đó $g'(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm.

$$\text{Ta thấy } g'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ nên } g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \in (-1; +\infty).$$

Bảng biến thiên hàm số $y = g(x)$

x	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		0	
	$-$		$+$
$g(x)$		$-\frac{1}{2}$	

$$\text{Suy ra } \min_{(-1; +\infty)} g(x) = -\frac{1}{2}. \text{ Vậy } \min P = -\frac{1}{2}.$$

Câu 85. Cho phương trình $\frac{1}{2} \log_2 (x+2) + x + 3 = \log_2 \frac{2x+1}{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{x+2}$. Gọi S là tổng tất cả các nghiệm của nó. Khi đó, giá trị của S là

A. $S = -2$. B. $S = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$. C. $S = 2$. D. $S = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+2 > 0 \\ \frac{2x+1}{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > 0 \\ x < -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -2 < x < -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Khi đó phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow \log_2 \sqrt{x+2} + (x+2-2\sqrt{x+2}+1) = \log_2 \left(2+\frac{1}{x}\right) + \left[\left(2+\frac{1}{x}\right)-1\right]^2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \sqrt{x+2} + (\sqrt{x+2}-1)^2 = \log_2 \left(2+\frac{1}{x}\right) + \left[\left(2+\frac{1}{x}\right)-1\right]^2 \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + (t-1)^2$, với $t \in (0; +\infty)$.

$$\text{Có } f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 2t - 2 = \frac{t^2 \ln 4 - t \ln 4 + 1}{t \ln 2}.$$

Xét tam thức bậc hai $t^2 \ln 4 - t \ln 4 + 1$.

Ta có $\Delta = (\ln 4)^2 - 4 \ln 4 < 0$ nên $t^2 \ln 4 - t \ln 4 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó $f'(t) > 0, \forall t > 0$.

Suy ra hàm số $f(t) = \log_2 t + (t-1)^2$ luôn đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Khi đó

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 2 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = \frac{2x+1}{x} \Leftrightarrow x+2 = \frac{4x^2+4x+1}{x^2} \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm $x = -1, x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm là $S = -1 + \frac{3+\sqrt{13}}{2} = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Câu 86. Xét các số thực dương x và y thỏa mãn $\ln \left(\frac{1-2x}{x+y} \right) = 3x + y - 1$. Giá

trị nhỏ nhất của biểu thức $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x+y}$ bằng

A. $\frac{1}{8}$.

B. 8.

C. $\frac{1}{4}$.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $0 < x < \frac{1}{2}$.

$$\text{Ta có từ giả thiết: } \ln \left(\frac{1-2x}{x+y} \right) = 3x + y - 1 \Leftrightarrow \ln(1-2x) + (1-2x) = \ln(x+y) + (x+y) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \ln t + t$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Ta có $f'(t) = \frac{1}{t} + 1 > 0$ với mọi $t > 0$

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Vậy } (1) \Leftrightarrow 1-2x = x+y \Leftrightarrow y = 1-3x$$

Ta có $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{1-2x} = \frac{1}{x-2x^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{4x-1}{(x-2x^2)^2} \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

Khi đó ta có BBT

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	
g'		-	0	+
g			8	

Vậy GTNN của $g(x)$ là 8 khi $x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{4}$.

Câu 87. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn:

$$\log_7 \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{6xy + 1 + 2x + 3y} = 14x + 3y - 7(x^2 + 1) \text{ đồng thời } 1 < x < 2022?$$

A. 1347.

B. 1348.

C. 674.

D. 673.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_7 \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{6xy + 1 + 2x + 3y} = 14x + 3y - 7(x^2 + 1)$

$$\Leftrightarrow \log_7 \frac{(x-1)^2 (2x+1)}{(3y+1)(2x+1)} = 14x + 3y - 7(x^2 + 1) \Leftrightarrow \log_7 (x-1)^2 - \log_7 (3y+1) = 3y - 7(x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \log_7 (x-1)^2 + 7(x-1)^2 = \log_7 (3y+1) + 3y$$

$$\Leftrightarrow \log_7 7(x-1)^2 + 7(x-1)^2 = \log_7 (3y+1) + 3y + 1 (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_7 t + t$. Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 7} + 1 > 0, \forall t > 0$ nên $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Do đó, (*) $\Leftrightarrow 7(x-1)^2 = 3y + 1 \Rightarrow y = \frac{7(x-1)^2 - 1}{3}$.

y nguyên dương khi $7(x-1)^2 - 1 : 3 \Rightarrow x$ chia hết cho 3 hoặc x chia 3 dư 2.

Do đó $x \in \{2; 3; \dots; 2021\} \setminus \{4; 7; 10; \dots; 2020\}$. Vậy có $2020 - 673 = 1347$ cặp $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 88. Lần lượt cho hai số thực dương x, y thỏa mãn phương trình sau đây:

$$\log_2 \left(\frac{3x+3y}{x^2+y^2+xy+3} \right) = x^2 + y^2 + xy - 6(x+y) + 2. \text{ Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của}$$

biểu thức $P = \frac{2x+3y+2}{x+y+1}$ lần lượt là M và m . Giá trị của biểu thức $(M+m)$ bằng

A. $\frac{60}{13}$.

B. 12.

C. $\frac{26}{5}$.

D. $\frac{40}{13}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \log_2 \left(\frac{3x+3y}{x^2+y^2+xy+3} \right) = x^2+y^2+xy-6(x+y)+2$$

$$\Leftrightarrow 1+\log_2 \left(\frac{3x+3y}{x^2+y^2+xy+3} \right) = x^2+y^2+xy-6(x+y)+3$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{6(x+y)}{x^2+y^2+xy+3} \right) = x^2+y^2+xy-6(x+y)+3$$

$$\log_2 (x^2+y^2+xy+3) + (x^2+y^2+xy+3) = \log_2 (6(x+y)) + (6(x+y))$$

$$\text{Xét hàm đặc trưng } y = f(t) = \log_2 t + t \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0 \quad \forall t > 0.$$

$$\text{Suy ra hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên } (0; +\infty) \Rightarrow x^2+y^2+xy+3 = 6(x+y)$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} x = a+b \\ y = a-b \end{cases} \Rightarrow (a+b)^2 + (a-b)^2 + (a+b)(a-b) + 3 = 6(a+b) + 6(a-b)$$

$$\Leftrightarrow 3(a-2)^2 + b^2 = 9 = 3^2. \text{ Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt{3} \cos t + 2 \\ b = 3 \sin t \end{cases}$$

Suy ra biểu thức

$$\begin{aligned} P &= \frac{2x+3y+2}{x+y+1} = \frac{2(a+b)+3(a-b)+2}{(a+b)+(a-b)+1} = \frac{5a-b+2}{2a+1} = \frac{5(\sqrt{3} \cos t + 2) - 3 \sin t + 2}{2(\sqrt{3} \cos t + 2) + 1} \\ &= \frac{5\sqrt{3} \cos t - 3 \sin t + 12}{2\sqrt{3} \cos t + 5} \Leftrightarrow (2\sqrt{3}P - 5\sqrt{3}) \cos t + 3 \sin t = 12 - 5P \end{aligned}$$

$$\text{Điều kiện có nghiệm } (2\sqrt{3}P - 5\sqrt{3})^2 + 9 \geq (12 - 5P)^2 \Leftrightarrow \frac{30 - 2\sqrt{30}}{13} \leq P \leq \frac{30 + 2\sqrt{30}}{13}$$

$$\text{Như vậy suy ra: } \begin{cases} P_{\max} = M = \frac{30 + 2\sqrt{30}}{13} \\ P_{\min} = m = \frac{30 - 2\sqrt{30}}{13} \end{cases} \Rightarrow M + m = \frac{60}{13}$$

Câu 89. Có bao nhiêu cặp số x, y là các số nguyên không âm thỏa mãn:

$$2(1+\sqrt{x+2y})^2 + \log_2(x+2y) = 2\log_2(x^2+y^2+2xy+x) + 2(x+y)^2 + 4x+4y$$

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 2(1+\sqrt{x+2y})^2 + \log_2(x+2y) = 2\log_2(x^2+y^2+2xy+x) + 2(x+y)^2 + 4x+4y$$

$$\Leftrightarrow 1+2\sqrt{x+2y}+x+2y+\frac{1}{2}\log_2(x+2y) = \log_2[(x+y)^2+x] + (x+y)^2+2x+2y$$

$$\Leftrightarrow 1+\log_2\sqrt{x+2y}+2\sqrt{x+2y} = \log_2[(x+y)^2+x] + (x+y)^2+x$$

$$\Leftrightarrow \log_2 2\sqrt{x+2y} + 2\sqrt{x+2y} = \log_2 \left[(x+y)^2 + x \right] + \left[(x+y)^2 + x \right] \quad (1)$$

Xét hàm số $g(t) = \log_2 t + t$ với $t > 0$, có $g'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$.

Suy ra hàm số $y = g(t) = \log_2 t + t$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Từ (1)} \Leftrightarrow g(2\sqrt{x+2y}) = g((x+y)^2 + x) \Leftrightarrow 2\sqrt{x+2y} = (x+y)^2 + x$$

$$\Leftrightarrow x + 2y + 2\sqrt{x+2y} = (x+y)^2 + 2(x+y) \quad (2)$$

Xét hàm số $h(u) = u^2 + u$ với $u > 0$, có $h'(u) = 2u + 1 > 0, \forall u > 0$.

Suy ra hàm số $y = h(u) = u^2 + u$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Từ (2)} \Leftrightarrow h(\sqrt{x+2y}) = h(x+y) \Leftrightarrow \sqrt{x+2y} = x+y \Leftrightarrow x+2y = (x+y)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x + 2y \Leftrightarrow y^2 + 2(x-1)y + x^2 - x = 0 \quad (3)$$

Ta coi phương trình (3) là phương trình bậc hai ẩn y , khi đó: Phương trình (3) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta_y' \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - (x^2 - x) \geq 0 \Leftrightarrow -x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1.$$

Do x là số nguyên không âm nên $x = 0$ hoặc $x = 1$.

$$+) \text{ Với } x = 0, \text{ suy ra (3)} \Leftrightarrow y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$+) \text{ Với } x = 1, \text{ suy ra (3)} \Leftrightarrow y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy có 3 cặp $(x; y)$ thỏa mãn là $(0; 0), (0; 2), (1; 0)$.

Câu 90. Cho các số thực a, b, c lớn hơn 1 thỏa $\log_2(abc) = 1 + \frac{8}{c} - 4ab$. Khi ấy, giá trị nhỏ nhất của

biểu thức $T = \frac{1}{2} \log_{2a^2} 2 + \frac{1}{3} \log_{2b^3} 2 + \frac{1}{6} \log_{2c^6} 2$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\sqrt[6]{2}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đầu tiên, ta có: } \log_2(abc) = 1 + \frac{8}{c} - 4ab \Leftrightarrow \log_2(4ab) + (4ab) = \log_2\left(\frac{8}{c}\right) + \left(\frac{8}{c}\right)$$

Xét hàm số $y = f(t) = \log_2 t + t$, $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(4ab) = f\left(\frac{8}{c}\right) \Leftrightarrow 4ab = \frac{8}{c} \Leftrightarrow abc = 2 \Rightarrow \log_2 a + \log_2 b + \log_2 c = 1$$

$$\text{Đặt } x = \log_2 a; y = \log_2 b; z = \log_2 c \Rightarrow x + y + z = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } T &= \frac{1}{2} \log_{2a^2} 2 + \frac{1}{3} \log_{2b^3} 2 + \frac{1}{6} \log_{2c^6} 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\log_2 2a^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\log_2 2b^3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\log_2 2c^6} \\ &= \frac{1}{2+4\log_2 a} + \frac{1}{3+9\log_2 b} + \frac{1}{6+36\log_2 c} = \frac{1}{2+4x} + \frac{1}{3+9y} + \frac{1}{6+36z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{2+4x} + \frac{2+4x}{16} \right) + \left(\frac{1}{3+9y} + \frac{3+9y}{36} \right) + \left(\frac{1}{6+36z} + \frac{6+36z}{144} \right) - \left(\frac{2+4x}{16} + \frac{3+9y}{36} + \frac{6+36z}{144} \right) \\
&\geq 2\sqrt{\frac{1}{2+4x} \cdot \frac{2+4x}{16}} + 2\sqrt{\frac{1}{3+9y} \cdot \frac{3+9y}{36}} + 2\sqrt{\frac{1}{6+36z} \cdot \frac{6+36z}{144}} - \left(\frac{2+4x}{16} + \frac{3+9y}{36} + \frac{6+36z}{144} \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \left(\frac{2+4x}{16} + \frac{3+9y}{36} + \frac{6+36z}{144} \right) = \frac{3}{4} - \frac{x+y+z}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Vậy $T_{\min} = \frac{1}{2}$ khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{3}; z = \frac{1}{6} \Rightarrow (a; b; c) = (\sqrt{2}; \sqrt[3]{2}; \sqrt[6]{2})$

2 - BPT LÔGARIT KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Câu 91. Tính tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2(x^2 + 3) - \log_2 x + x^2 - 4x + 1 \leq 0$.

A. 4.

B. 6.

C. 5.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có $\log_2(x^2 + 3) - \log_2 x + x^2 - 4x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \log_2(x^2 + 3) + x^2 + 3 \leq \log_2 4x + 4x (*)$.

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên $D = (0; +\infty)$. Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0 \forall t \in D \Rightarrow$ hàm số f đồng biến trên D .

Suy ra $(*) \Leftrightarrow f(x^2 + 3) \leq f(4x) \Leftrightarrow x^2 + 3 \leq 4x \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$.

Vậy tập hợp các nghiệm nguyên của bất phương trình là $\{1; 2; 3\}$.

Câu 92. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_3 \frac{3x^2 + x + 1}{2x^2 + 2x + 3} + x^2 - x - 2 \leq 0$ là

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} \frac{3x^2 + x + 1}{2x^2 + 2x + 3} > 0 \\ 2x^2 + 2x + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3x^2 + x + 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Ta

có

$$\log_3 \frac{3x^2 + x + 1}{2x^2 + 2x + 3} + x^2 - x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \log_3(3x^2 + x + 1) - \log_3(2x^2 + 2x + 3) + x^2 - x - 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3(3x^2 + x + 1) + 3x^2 + x + 1 \leq \log_3(2x^2 + 2x + 3) + 2x^2 + 2x + 3 (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ với $t > 0$. Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0 \forall t > 0$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến với $t > 0$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow 3x^2 + x + 1 \leq 2x^2 + 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$.

Do $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-1; 0; 1; 2\}$. Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên.

Câu 93. Biết tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 6x + 2 + \log_2(x^2 - 2x) + \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) < 0$ là khoảng

$(2; a + \sqrt{b})$ với $a, b \in \mathbb{N}$, giá trị của $a + b$ bằng

A. 10.

B. 22.

C. 8.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2 - 2x > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$$

Ta có

$$x^2 - 6x + 2 + \log_2(x^2 - 2x) + \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 2 + \log_2(x^2 - 2x) - \log_2(x - 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + \log_2(x^2 - 2x) < 4(x - 1) + 2 + \log_2(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + \log_2(x^2 - 2x) < 4(x - 1) + \log_2 4(x - 1)$$

$$\text{Xét } f(u) = u + \log_2 u \Rightarrow f'(u) = 1 + \frac{1}{u \ln 2} > 0 \forall u > 0$$

Hàm $y = f(u)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ (*).

$$\text{Từ (*) ta có } x^2 - 2x + \log_2(x^2 - 2x) < 4(x - 1) + \log_2 4(x - 1) \Leftrightarrow x^2 - 2x < 4(x - 1) \forall x > 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 4 < 0, \forall x > 2 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{5} < x < 3 + \sqrt{5}, \forall x > 2.$$

Đổi chiếu với điều kiện ta có tập nghiệm là $S = (2; 3 + \sqrt{5})$

$$\text{Vậy } a = 3; b = 5 \Rightarrow a + b = 8.$$

Câu 94. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $x \leq 2020$ và $3(9^y + 2y) \leq x + \log_3(x + 1)^3 - 2$?

A. 4.

B. 2.

C. 3772.

D. 3774.

Lời giải:

Chọn D

$$\text{Ta có } 3(9^y + 2y) \leq x + \log_3(x + 1)^3 - 2 \Leftrightarrow 3 \cdot 9^y + 6y \leq x + 3\log_3(x + 1) - 2$$

$$\Leftrightarrow 3^{2y+1} + 3(2y + 1) \leq (x + 1) + 3\log_3(x + 1). (*)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = 3^t + 3t \text{ có } f'(t) = 3^t \ln 3 + 3 > 0, \forall t.$$

Suy ra hàm số $f(t) = 3^t + 3t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow f(2y + 1) \leq f(\log_3(x + 1)) \Leftrightarrow 2y + 1 \leq \log_3(x + 1) \Leftrightarrow 3^{2y+1} - 1 \leq x.$$

$$\text{Vì } x \leq 2020 \text{ nên } 3^{2y+1} - 1 \leq 2020 \Leftrightarrow y \leq \frac{\log_3 2021 - 1}{2} \approx 2,9.$$

Với giả thiết y nguyên dương suy ra $y \in \{1; 2\}$.

Với $y = 1$ có $26 \leq x \leq 2020$ suy ra có 1995 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn.

Với $y = 2$ có $242 \leq x \leq 2020$ suy ra có 1779 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn.

Vậy có tất cả 3774 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 95. Biết tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 6x + 2 + \log_2(x^2 - 2x) + \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) < 0$ là khoảng

$(2; a + \sqrt{b})$, với a, b là các số tự nhiên. Giá trị của $a + b$ bằng

A. 10.

B. 22.

C. 8.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

♦ Điều kiện xác định: $x > 2$ (*).

- ♦ Ta có: Bpt $\Leftrightarrow x^2 - 2x + \log_2(x^2 - 2x) < \log_2(x-1) + 4x - 2$
 $\Leftrightarrow x^2 - 2x + \log_2(x^2 - 2x) < 4x - 4 + \log_2(4x - 4), (1).$
 - ♦ Xét hàm đặc trưng: $f(t) = t + \log_2 t$ liên tục và đồng biến trên $(0; +\infty)$.
 - ♦ Do đó: $(1) \Leftrightarrow f(x^2 - 2x) < f(4x - 4) \Leftrightarrow x^2 - 2x < 4x - 4$
 $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 4 < 0 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{5} < x < 3 + \sqrt{5}.$
 - ♦ Giao với điều kiện (*) ta được: $2 < x < 3 + \sqrt{5}$. Vậy $S = (2; 3 + \sqrt{5})$.
- Như vậy $a = 3; b = 5 \Rightarrow a + b = 8$.

Câu 96. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x\sqrt{x^2+2} + 4 - x^2) + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 1$ là $(-\sqrt{a}; -\sqrt{b}]$.

Khi đó a, b bằng:

A. $\frac{15}{16}$.

B. $\frac{12}{5}$.

C. $\frac{16}{15}$.

D. $\frac{5}{12}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $x\sqrt{x^2+2} - x^2 = x(\sqrt{x^2+2} - x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2} + x}.$

Ta có: $\log_2(x\sqrt{x^2+2} + 4 - x^2) + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 1$

$\Leftrightarrow \log_2(x(\sqrt{x^2+2} - x) + 4) + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 1$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+2} + x} + 4\right) + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 1 \Leftrightarrow \log_2\frac{2(3x + 2\sqrt{x^2+2})}{\sqrt{x^2+2} + x} + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 1, (1)$

Ta có $\sqrt{x^2+2} + x > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

Điều kiện: $3x + 2\sqrt{x^2+2} > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+2} > -3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 0 \\ 4x^2 + 8 > 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x > -\sqrt{\frac{8}{5}}, (*)$

Với điều kiện (*), ta có

$(1) \Leftrightarrow \log_2(3x + 2\sqrt{x^2+2}) + 3x + 2\sqrt{x^2+2} \leq \log_2(\sqrt{x^2+2} + x) + \sqrt{x^2+2} + x, (2)$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ với $t > 0$. Có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$.

Hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ đồng biến trên $(0; +\infty)$, $(3x + 2\sqrt{x^2+2}) \in (0; +\infty)$ và $(\sqrt{x^2+2} + x) \in (0; +\infty)$

Nên $(2) \Leftrightarrow f(3x + 2\sqrt{x^2+2}) \leq f(\sqrt{x^2+2} + x)$

$\Leftrightarrow 3x + 2\sqrt{x^2+2} \leq \sqrt{x^2+2} + x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2} \leq -2x \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \geq 0 \\ x^2 + 2 \leq 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 3x^2 \geq 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \leq -\sqrt{\frac{2}{3}}.$

Kết hợp với ĐK ta có tập nghiệm bất phương trình là $\left[-\sqrt{\frac{8}{5}}; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ hay $a.b = \frac{16}{15}$.

Câu 97. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn bất đẳng thức $\log \frac{x+1}{3y+1} \leq 9y^4 + 6y^3 - x^2y^2 - 2y^2x(1)$. Biết $y \leq 1000$, hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn bất đẳng thức (1)?

A. 1501100.

B. 1501300.

C. 1501400.

D. 1501500.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\log \frac{x+1}{3y+1} \leq 9y^4 + 6y^3 - x^2y^2 - 2y^2x \Leftrightarrow \log \frac{xy+y}{3y^2+y} \leq (9y^4 + 6y^3 + y^2) - (x^2y^2 + 2xy.y + y^2)$$

$$\Leftrightarrow \log(xy+y) - \log(3y^2+y) \leq (3y^2+y)^2 - (xy+y)^2$$

$$\Leftrightarrow \log(xy+y) + (xy+y)^2 \leq \log(3y^2+y) + (3y^2+y)^2 (*)$$

Xét hàm $f(t) = \log t + t^2$ với $t \in (0; +\infty)$

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 10} + 2t > 0, \forall t \in (0; +\infty). \text{ Suy ra } f(t) \text{ là hàm đồng biến trên } t \in (0; +\infty).$$

$$(*) \Leftrightarrow f(xy+y) \leq f(3y^2+y) \Leftrightarrow xy+y \leq 3y^2+y \Leftrightarrow x \leq 3y.$$

Vì $y \leq 2020$ nên ta có các trường hợp sau

$$y=1 \Rightarrow x \in \{1; 2; 3\}.$$

$$y=2 \Rightarrow x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

.....

$$y=1000 \Rightarrow x \in \{1; 2; \dots; 3000\}.$$

Vậy số cặp nghiệm thỏa mãn điều kiện đề bài là: $3+6+9+\dots+3000=1501500$.

Câu 98. Tập nghiệm của bất phương trình

$$\log_2 \left(x\sqrt{x^2+2} + 4 - x^2 \right) + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 1 \text{ là } \left[-\sqrt{a}; -\sqrt{b} \right]. \text{ Khi đó } ab \text{ bằng}$$

A. $\frac{12}{5}$.

B. $\frac{5}{12}$.

C. $\frac{15}{16}$.

D. $\frac{16}{15}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện: } x\sqrt{x^2+2} + 4 - x^2 > 0.$$

Bất phương trình trở thành:

$$\log_2 \left[x\left(\sqrt{x^2+2} - x\right) + 4 \right] + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+2} + x} + 4 \right) + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 1 \Leftrightarrow 1 + \log_2 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2} + x} + 2 \right) + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2} + x} + 2 \right) + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 0 \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{3x + 2\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2} + x} \right) + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \left(3x + 2\sqrt{x^2+2} \right) - \log_2 \left(x + \sqrt{x^2+2} \right) + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(3x + 2\sqrt{x^2 + 2}) + 3x + 2\sqrt{x^2 + 2} \leq \log_2(x + \sqrt{x^2 + 2}) + x + \sqrt{x^2 + 2} (*)$$

Điều kiện: $\begin{cases} 3x + 2\sqrt{x^2 + 2} > 0 \\ x + \sqrt{x^2 + 2} > 0 \end{cases} (**).$

Xét hàm số $f(t) = t + \log_2 t$, với $t > 0$.

Ta có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 2} > 0, \forall t > 0$. Do đó hàm $f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Bất phương trình (*) trở thành

$$f(3x + 2\sqrt{x^2 + 2}) \leq f(x + \sqrt{x^2 + 2}) \Leftrightarrow 3x + 2\sqrt{x^2 + 2} \leq x + \sqrt{x^2 + 2}.$$

Kết hợp với điều kiện (**) tức là ta đi giải: $\begin{cases} 3x + 2\sqrt{x^2 + 2} > 0 (1) \\ 3x + 2\sqrt{x^2 + 2} \leq x + \sqrt{x^2 + 2} (2) \end{cases}$

+) Giải (1)

$$3x + 2\sqrt{x^2 + 2} > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + 2} > -3x \Leftrightarrow \begin{cases} -3x \leq 0 \\ -3x > 0 \\ 4(x^2 + 2) > (-3x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 0 \\ 8 > 5x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 0 \\ -\sqrt{\frac{8}{5}} < x < \sqrt{\frac{8}{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ -\sqrt{\frac{8}{5}} < x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -\sqrt{\frac{8}{5}}$$

Do đó tập nghiệm của (1) là $S_1 = \left(-\sqrt{\frac{8}{5}}; +\infty\right)$.

+) Giải (2)

$$3x + 2\sqrt{x^2 + 2} \leq x + \sqrt{x^2 + 2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2} \leq -2x \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \geq 0 \\ x^2 + 2 \leq 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \leq -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ x \geq \sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Do đó tập nghiệm của (2) là $S_2 = \left(-\infty; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = S_1 \cap S_2 = \left[-\sqrt{\frac{8}{5}}; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$.

$$\text{Từ đó } ab = \frac{8}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{15}.$$

DẠNG 4: PHƯƠNG PHÁP HÀM ĐẶC TRƯNG GIẢI PT, BPT LÔGARIT CHỨA THAM SỐ**1 - PT LÔGARIT CHỨA THAM SỐ**

Câu 1. Cho phương trình: $\ln \frac{x^2 + m}{2x^2 + 3} = x^2 - m + 3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương m không vượt quá 20 để phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

A. 14.

B. 15.

C. 16.

D. 17.

Lời giải**Chọn D**

Do m nguyên dương nên $x^2 + m > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Phương trình } \ln \frac{x^2 + m}{2x^2 + 3} = x^2 - m + 3 \Leftrightarrow \ln(x^2 + m) - \ln(2x^2 + 3) = (2x^2 + 3) - (x^2 + m)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 + m) + (x^2 + m) = \ln(2x^2 + 3) + (2x^2 + 3) \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = \ln t + t$ với $t > 0$.

Có $f'(t) = \frac{1}{t} + 1 > 0, \forall t > 0$. Do đó hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Mà phương trình (1) có dạng $f(x^2 + m) = f(2x^2 + 3)$.

Do đó suy ra $x^2 + m = 2x^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 = m - 3 \quad (2)$.

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > 3$.

Lại do $\begin{cases} m \in \mathbb{Z}^+ \\ m \leq 20 \end{cases}$ nên ta được 17 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 2. Có bao nhiêu số nguyên dương của tham số m để phương trình $\log_4(x^2 - 2x + m) - \log_4 x = 72x + 2 - 4m - 4x^2$ có nghiệm?

A. 80.

B. 82.

C. 81.

D. 83.

Lời giải**Chọn C**

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 2x + m > 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \log_4(x^2 - 2x + m) - \log_4 x = 72x + 2 - 4m - 4x^2$$

$$\Leftrightarrow \log_4(x^2 - 2x + m) + 4(x^2 - 2x + m) = \log_4(16x) + 4.16x \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_4 t + 4t$ với $t > 0$

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 4} + t > 0$ với mọi $t > 0 \Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến

$$\text{Do đó, } (*) \Leftrightarrow f(x^2 - 2x + m) = f(16x) \Leftrightarrow x^2 - 2x + m = 16x \Leftrightarrow m = -x^2 + 18x \quad (1)$$

Phương trình (*) có nghiệm khi phương trình (1) có nghiệm $x > 0$.

Ta có BBT của hàm số $y = -x^2 + 18x$ trên $(0; +\infty)$ như sau:

x	0	9	$+\infty$
y'	+	0	-
y	0	81	$-\infty$

Dựa vào BBT ta thấy, phương trình (1) có nghiệm $x > 0$ khi $m \leq 81$.

Vì $m \in \mathbb{Z}^+$ nên $m \in \{1; 2; 3; \dots; 81\}$.

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$\log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} = x^2 - 5x + 2 - m$$

có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1?

A. 5.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $3x^2 + 3x + m + 1 > 0$ (*).

Biến đổi phương trình sang dạng

$$\log_2 (3x^2 + 3x + m + 1) + 3x^2 + 3x + m + 1 = \log_2 [2 \cdot (2x^2 - x + 1)] + 2 \cdot (2x^2 - x + 1), (**)$$

$$\text{Xét hàm số } y = \log_2 t + t, t > 0 \Rightarrow y' = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0$$

Từ phương trình (**) ta có: $y(3x^2 + 3x + m + 1) = y(2x^2 - x + 1)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3x + m + 1 = 2(2x^2 - x + 1) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 1 - m = 0, (1)$$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 - 2 > 0 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21 + 4m > 0 \\ 5 - 2 > 0 \\ 1 - m - 5 + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{21}{4} < m < -3$$

Vậy có hai giá trị.

Câu 4. Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $5x + y = 4$. Tổng tất cả giá trị nguyên của tham số

m để phương trình $\log_3 \frac{x^2 + 2y + m}{x + y} + x^2 - 3x - y + m - 1 = 0$ có nghiệm là

A. 10.

B. 5.

C. 9.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

$$\log_3 \frac{x^2 + 2y + m}{x + y} + x^2 - 3x - y + m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (x^2 + 2y + m) + x^2 + 2y + m = \log_3 3(x + y) + 3(x + y)(1)$$

Vì $x, y > 0$ nên $x + y > 0$. Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow x^2 + 2y + m = 3x + 3y \Leftrightarrow x^2 - 3x - y + m = 0 (*)$$

Kết hợp với điều kiện $5x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - 5x$. Vì $x, y > 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{4}{5}$.

Ta có (*) $\Leftrightarrow x^2 + 2x + m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = -x^2 - 2x + 4, \forall x \in \left(0; \frac{4}{5}\right)$.

Hàm số $y = -x^2 - 2x + 4$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{4}{5}\right)$ (do $-1 < 0$) nên $\frac{44}{25} < -x^2 - 2x + 4 < 4$.

Do vậy $m \in \{2; 3\}$ là các giá trị cần tìm.

Vậy tổng tất cả các giá trị m thỏa ycbt là 5.

Câu 5. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình:

$$\log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} = x^2 - 5x + 2 - m \text{ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1?}$$

A. 3.

B. vô số.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $3x^2 + 3x + m + 1 > 0$.

Ta có:

$$\log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} = x^2 - 5x + 2 - m \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} \right) - 1 = x^2 - 5x + 1 - m$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{4x^2 - 2x + 2} = x^2 - 5x + 1 - m$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (3x^2 + 3x + m + 1) - \log_2 (4x^2 - 2x + 2) = (x^2 - 2x + 2) - (3x^2 + 3x + m + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (3x^2 + 3x + m + 1) + (3x^2 + 3x + m + 1) = \log_2 (4x^2 - 2x + 2) + (4x^2 - 2x + 2) \quad (1)$$

Xét hàm số: $f(t) = t + \log_2 t$ trên $(0; +\infty)$, ta có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 2} > 0, \forall t \in (0; +\infty)$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Suy ra: } (1) \Leftrightarrow f(4x^2 - 2x + 2) = f(3x^2 + 3x + m + 1)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 2x + 2 = 3x^2 + 3x + m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x = m - 1 \quad (2). \text{ Điều này đúng với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Xét hàm số: $g(x) = x^2 - 5x$ trên $\mathbb{R}$, ta có $g'(x) = 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
y'		-	0	-	0	+	
y							
				-4		$-\frac{25}{4}$	

Theo bảng biến thiên ta thấy: phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 khi và chỉ

$$\text{khi } -\frac{25}{4} < m - 1 < -4 \Leftrightarrow -\frac{21}{4} < m < -3.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-5; -4\}$.

Câu 6. Tìm m để phương trình $\log_2 \left(\frac{3x^2 - 2x + 3}{x^2 + m^2} \right) = -x^2 + 2x + 2m^2 - 2$ luôn có nghiệm.

A. $|m| \geq 1$.

B. $|m| \geq \sqrt{2}$.

C. $m \geq 1$.

D. $m \geq \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $\frac{3x^2 - 2x + 3}{x^2 + m^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ m \neq 0 \end{cases}$.

Ta có: $\log_2 \left(\frac{3x^2 - 2x + 3}{x^2 + m^2} \right) = -x^2 + 2x + 2m^2 - 2$

$\Leftrightarrow \log_2 (3x^2 - 2x + 3) - \log_2 [2(x^2 + m^2)] = 2(x^2 + m^2) - (3x^2 - 2x + 3)$

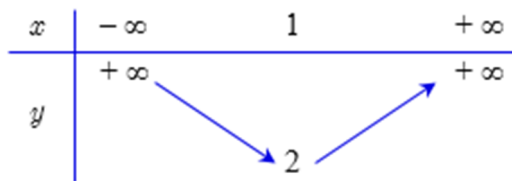
$\Leftrightarrow \log_2 (3x^2 - 2x + 3) + (3x^2 - 2x + 3) = \log_2 [2(x^2 + m^2)] + 2(x^2 + m^2)$.

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t (t > 0)$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$.

Suy ra hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Ta được $f(3x^2 - 2x + 3) = f(2(x^2 + m^2)) \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 3 = 2(x^2 + m^2) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 2m^2$.

Xét parabol $y = x^2 - 2x + 3$ có bảng biến thiên như sau:



Để phương trình có nghiệm thì $2m^2 \geq 2 \Leftrightarrow |m| \geq 1$.

Câu 7. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} = x^2 - 5x + 2 - m$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

A. 3.

B. Vô số.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $3x^2 + 3x + m + 1 > 0$.

Ta có:

$\log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} = x^2 - 5x + 2 - m \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} \right) - 1 = x^2 - 5x + 1 - m$

$\Leftrightarrow \log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{4x^2 - 2x + 2} = x^2 - 5x + 1 - m$

$\Leftrightarrow \log_2 (3x^2 + 3x + m + 1) - \log_2 (4x^2 - 2x + 2) = (4x^2 - 2x + 2) - (3x^2 + 3x + m + 1)$

$\Leftrightarrow \log_2 (3x^2 + 3x + m + 1) + (3x^2 + 3x + m + 1) = \log_2 (4x^2 - 2x + 2) + (4x^2 - 2x + 2) \quad (1)$

Xét hàm số: $f(t) = t + \log_2 t$ trên $(0; +\infty)$, ta có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 2} > 0, \forall t \in (0; +\infty)$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Suy ra: } (1) \Leftrightarrow f(4x^2 - 2x + 2) = f(3x^2 + 3x + m + 1)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 2x + 2 = 3x^2 + 3x + m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x = m - 1 \quad (2).$$

Xét hàm số: $g(x) = x^2 - 5x$ trên $\mathbb{R}$, ta có $g'(x) = 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$	
y'		-	0	-	0	+		
y	$+\infty$							$+\infty$

- Theo bảng biến thiên ta thấy: phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 khi và chỉ khi $-\frac{25}{4} < m - 1 < -4 \Leftrightarrow -\frac{21}{4} < m < -3$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-5; -4\}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8. Cho phương trình $\log_2 \frac{4x-1}{x^2-2mx+4} = x^2 - 2(m+2)x + 5$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt nằm trong đoạn $[2; 6]$ và thỏa mãn $100m$ là số nguyên?

A. 40.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

♦ Đây là một dạng cơ bản sử dụng phương trình đặc trưng.

♦ Với trường hợp $u, v > 0$ ta có:

$$\log_a \frac{u}{v} = v - u \Leftrightarrow \log_a u + u = \log_a v + v \Leftrightarrow f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow v - u = 0.$$

♦ Hàm số $f(t) = \log_a t + t$ là một hàm đơn điệu có đạo hàm dương $f'(t) = \frac{1}{t \ln a} + 1 > 0 \quad \forall t > 0$.

♦ Ta biến đổi phương trình ban đầu như sau:

$$\text{♦ Điều kiện xác định: } \frac{4x-1}{x^2-2mx+4} > 0.$$

♦ Vì yêu cầu bài toán cho biết có hai nghiệm

$$x \in [2; 6] \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-1 > 0 \\ x^2-2mx+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2-2mx+4 > 0$$

$$\text{♦ Ta có } \log_2 \frac{4x-1}{x^2-2mx+4} = x^2 - 2(m+2)x + 5$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (4x-1) - \log_2 (x^2-2mx+4) = (x^2-2mx+4) - (4x-1).$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (4x-1) + (4x-1) = \log_2 (x^2-2mx+4) + (x^2-2mx+4).$$

$$\Leftrightarrow f(4x-1) = f(x^2 - 2mx + 4) \quad (1)$$

♦ Áp dụng tính chất của hàm đơn điệu suy ra
 $\Leftrightarrow 4x-1 = x^2 - 2mx + 4 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+2)x + 5 = 0$

♦ Điều kiện có hai nghiệm phân biệt $\Delta' = (m+2)^2 - 5 = m^2 + 4m - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 - \sqrt{5} \\ m > -2 + \sqrt{5} \end{cases} \quad (*)$

♦ Suy ra nghiệm $x = (m+2) \pm \sqrt{m^2 + 4m - 1}$

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2+\sqrt{m^2+4m-1} \geq 2 \\ m+2+\sqrt{m^2+4m-1} \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \sqrt{m^2+4m-1} \\ \sqrt{m^2+4m-1} \leq 4-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq \frac{1}{4} \\ m \leq 4 \\ m \leq \frac{17}{12} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{1}{4}$$

(**)

♦ Kết hợp (*) và (**) suy ra $-2 + \sqrt{5} \leq m \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow -23,6 \approx -200 + 100\sqrt{5} \leq 100m \leq 25 \Rightarrow$ có hai giá trị thực của m thỏa mãn điều kiện bài toán là $m = \left\{ \frac{24}{100}; \frac{25}{100} \right\}$.

Câu 9. Cho phương trình $\log_2 \frac{x^3 - 9x + 2m}{3x^2 + 1} = 1 + 3x^2 + 9x - x^3 - 2m$, với m là tham số. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt.
A. 14. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 17.

Lời giải

Chọn B

♦ Điều kiện xác định: $\begin{cases} 3x^2 + 1 > 0 \\ x^3 - 9x + 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^3 - 9x + 2m > 0. (*)$

♦ Ta sẽ đưa phương trình về dạng $\log_a \frac{u}{v} = v - u \Leftrightarrow .. \Leftrightarrow u = v$.

♦ Ta có $\log_2 \frac{x^3 - 9x + 2m}{3x^2 + 1} = 1 + 3x^2 + 9x - x^3 - 2m$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^3 - 9x + 2m) - \log_2 (3x^2 + 1) = (3x^2 + 1) - (x^3 - 9x + 2m).$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^3 - 9x + 2m) + (x^3 - 9x + 2m) = \log_2 (3x^2 + 1) + (3x^2 + 1).$$

$$\Leftrightarrow f(x^3 - 9x + 2m) = f(3x^2 + 1) \quad (1)$$

♦ Với hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ đơn điệu tăng trên miền $t > 0$.

♦ Từ (1) suy ra $f(x^3 - 9x + 2m) = f(3x^2 + 1) \Leftrightarrow x^3 - 9x + 2m = 3x^2 + 1$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x = 1 + 2m \quad (2)$$

♦ Tất cả các nghiệm phương trình (2) luôn thỏa mãn điều kiện (*) vì:
 $x^3 - 9x + 2m = 3x^2 + 1 > 0$

♦ Để (2) có hai nghiệm phân biệt $-29 = y_{CT}(x^3 - 3x^2 - 9x) < 1 + 2m < y_{CD}(x^3 - 3x^2 - 9x) = 5$
 $\Leftrightarrow -2 < m < 14$. Suy ra có 15 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

- Câu 10.** Cho phương trình $\log_2 \frac{x^2 + mx + m}{3x^2 + 1} = x^2 - 2mx - 2m$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2022; 2022]$ để phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt. Số phần tử của tập S là
- A. 3. B. 4042. C. 4043. D. 4041.

Lời giải

Chọn B

♦ Đây là dạng phát triển từ dạng cơ bản, chúng ta phải biến đổi khéo léo:

♦ Với trường hợp $u, v > 0$ ta có:

$$\log_a \frac{u}{v} = v - u \rightarrow \log_a \frac{a^k \cdot u}{v} = v - a^k \cdot u \Leftrightarrow \log_a \frac{u}{v} = v - a^k \cdot u - k.$$

$$\text{♦ Với phương trình đã cho } \log_2 \frac{x^2 + mx + m}{3x^2 + 1} = x^2 - 2mx - 2m \quad (1)$$

$$\text{♦ Điều kiện xác định: } \begin{cases} 3x^2 + 1 > 0 \\ x^2 - mx + m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - mx + m > 0. \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \log_2 \frac{x^2 + mx + m}{3x^2 + 1} = x^2 - 2mx - 2m + 1 \Leftrightarrow \log_2 \frac{2x^2 + 2mx + 2m}{3x^2 + 1} = x^2 - 2mx - 2m + 1. \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2x^2 + 2mx + 2m) + 2x^2 + 2mx + 2m = \log_2 (3x^2 + 1) + (3x^2 + 1) \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2x^2 + 2mx + 2m) + 2x^2 + 2mx + 2m = \log_2 (3x^2 + 1) + (3x^2 + 1) \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2x^2 + 2mx + 2m) + 2x^2 + 2mx + 2m = \log_2 (3x^2 + 1) + (3x^2 + 1) \quad (3)$$

$$\text{♦ Xét hàm đặc trưng } f(t) = \log_2 t + t \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0 \quad \forall t > 0 \Rightarrow \text{hàm đơn điệu tăng.}$$

$$\text{♦ Từ (3)} \Leftrightarrow f(2x^2 + 2mx + 2m) = f(3x^2 + 1) \Leftrightarrow 2x^2 - 2mx + 2m = 3x^2 + 1 \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2mx - 2m + 1 = 0. \text{ Dễ thấy hệ thức (4) thỏa mãn điều kiện (2)}$$

$$\text{♦ Để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt thì phương trình } x^2 - 2mx - 2m + 1 = 0 \text{ có hai nghiệm thực phân biệt. Suy ra } \Delta' = m^2 + 2m - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 - \sqrt{2} \\ m > -1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{♦ Suy ra } \begin{cases} -2022 \leq m \leq -3 \\ -1 \leq m \leq 2022 \end{cases} \Rightarrow \text{có 4042 giá trị } m \text{ nguyên thỏa mãn.}$$

- Câu 11.** Cho phương trình $\log_2 \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 3m + 8}{x^2 + 2x + 3} = -x^3 + 3x + 3m + 2$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm. Số phần tử của S là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Lời giải

Chọn A

$$\text{♦ Điều kiện xác định: } \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 3m + 8}{x^2 + 2x + 3} > 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x - 3m + 8 > 0.$$

$$\text{♦ Phương trình đã cho biến đổi thành } \log_2 \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 3m + 8}{x^2 + 2x + 3} - 1 = -x^3 + 3x + 3m + 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 3m + 8}{x^2 + 2x + 3} = (-x^3 - 3x^2 - 3x + 3m - 8) + (3x^2 + 6x + 9)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^3 + 3x^2 + 3x - 3m + 8) + (x^3 + 3x^2 + 3x - 3m + 8) = \log_2(3x^2 + 6x + 9) + (3x^2 + 6x + 9)$$

(*)

♦ Xét hàm đặc trưng $f(t) = \log_2 t + t$ là đơn điệu trên khoảng $(0; +\infty)$. Nên từ (*) suy ra:

♦ $\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x - 3m + 8 = 3x^2 + 6x + 9 > 0$ (TM điều kiện)

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x = 3m + 1 \text{ có hai nghiệm khi và chỉ khi } \begin{cases} 3m + 1 = 2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3} \\ 3m + 1 = -2 \Leftrightarrow m = -1 \end{cases}$$

♦ Suy ra có duy nhất một giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_5(3x+m) - 2\log_5 x = x^2 - 75x - 25m - 2$ có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 57.

B. 58.

C. 55.

D. 56.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $\begin{cases} 3x + m > 0 \\ x > 0 \end{cases}$.

$$\log_5(3x+m) - 2\log_5 x = x^2 - 75x - 25m - 2$$

$$\Leftrightarrow \log_5(3x+m) - \log_5 x^2 = x^2 - 25(3x+m) - \log_5 25$$

$$\Leftrightarrow \log_5(3x+m) + 25(3x+m) = \log_5\left(\frac{x}{5}\right)^2 + 25\left(\frac{x}{5}\right)^2 \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_5 t + 25t$, với $t > 0$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 5} + 25 > 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow 3x + m = \left(\frac{x}{5}\right)^2 \Leftrightarrow m = \frac{x^2}{25} - 3x.$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = \frac{x^2}{25} - 3x, x > 0. \text{ Ta có } g'(x) = \frac{2x}{25} - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{75}{2}.$$

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	0	$\frac{75}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		0	+
$g(x)$	0	$-\frac{225}{4}$	$+\infty$

Phương trình đầu có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $m = \frac{x^2}{25} - 3x$ có hai

nghiệm phân biệt dương $\Leftrightarrow m \in \left(-\frac{225}{4}; 0\right)$. Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-56; -55; -54; \dots; -2; -1\}$ có

56 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình

$$\log_2\left(\frac{\sqrt{2x^2 + mx + 1}}{x + 2}\right) + \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x + 2 \text{ có hai nghiệm thực phân biệt?}$$

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+2 > 0 \\ 2x^2+mx+1 > 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } \log_2 \left(\frac{\sqrt{2x^2+mx+1}}{x+2} \right) + \sqrt{2x^2+mx+1} = x+2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \sqrt{2x^2+mx+1} + \sqrt{2x^2+mx+1} = \log_2 (x+2) + x+2$$

$$\Leftrightarrow f(\sqrt{2x^2+mx+1}) = f(x+2) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ với $t \in (0; +\infty)$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$

$$\Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên } (0; +\infty) \text{ nên } (1) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+mx+1} = x+2.$$

$$\text{Từ đó } \begin{cases} x > -2 \\ 2x^2+mx+1 = (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x^2 + (m-4)x - 3 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

YCBT $\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 lớn hơn -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-4)^2 + 12 > 0 \\ (x_1+2) + (x_2+2) > 0 \\ (x_1+2)(x_2+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ x_1+x_2+4 > 0 \\ x_1x_2+2(x_1+x_2)+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ 4-m+4 > 0 \\ -3+2(4-m)+4 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 8 \\ m < \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{9}{2} \text{ mà } m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4\}.$$

-----HẾT-----

Câu 14. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\ln(m+2\sin x) + \ln(m+3\sin x) = \sin x$ có nghiệm thực?

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} m+2\sin x + \ln(m+3\sin x) > 0 \\ m+3\sin x > 0 \end{cases}.$$

Phương trình đã cho tương đương: $m+2\sin x + \ln(m+3\sin x) = e^{\sin x}.$

$$\Leftrightarrow m+3\sin x + \ln(m+3\sin x) = e^{\sin x} + \sin x.$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(m+3\sin x)} + \ln(m+3\sin x) = e^{\sin x} + \sin x, \quad (1).$$

Xét $f(t) = e^t + t, t \in \mathbb{R}.$

Ta có $f'(t) = e^t + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}.$ Nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}.$

$$\text{Vậy } (1) \Leftrightarrow f[\ln(m+3\sin x)] = f(\sin x) \Leftrightarrow \ln(m+3\sin x) = \sin x.$$

Đặt $a = \sin x, a \in [-1; 1].$ Phương trình trở thành: $\ln(m+3a) = a \Leftrightarrow m = e^a - 3a.$

Xét $g(a) = e^a - 3a, a \in [-1; 1], g'(a) = e^a - 3 < 0, \forall a \in [-1; 1].$

Vậy để phương trình có nghiệm thực thì $g(1) \leq m \leq g(-1) \Leftrightarrow e-3 \leq m \leq \frac{1}{e}+3$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m là: 0; 1; 2; 3.

Câu 15. Tìm giá trị lớn nhất của tham số m để phương trình $\ln[m + \ln(m + \cos x)] = \cos x$ có nghiệm thực?

A. $\frac{e+1}{2}$.

B. $e-1$.

C. e .

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Đặt $v = \ln(m + \cos x) \Leftrightarrow e^v = m + \cos x \Leftrightarrow m = e^v - \cos x$.

Phương trình trở thành $\ln(m + v) = \cos x \Leftrightarrow m + v = e^{\cos x} \Leftrightarrow m = e^{\cos x} - v$.

Do đó $e^v - \cos x = e^{\cos x} - v \Leftrightarrow e^v + v = e^{\cos x} + \cos x$ (1).

Xét hàm số $f(u) = e^u + u$.

$f'(u) = e^u + 1 > 0$ với $\forall u \in \mathbb{R}$.

Vậy (1) $\Leftrightarrow f(v) = f(\cos x) \Leftrightarrow v = \cos x \Leftrightarrow e^{\cos x} - \cos x = m$ (2).

Đặt $g(t) = e^t - t$, với $t = \cos x$, $t \in [-1; 1]$.

$g'(t) = e^t - 1 \Rightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Bảng biến thiên

t	-1	0	1
$g'(t)$	-	0	+
$g(t)$	$\frac{1}{e} + 1$		$e - 1$

Để phương trình (2) có nghiệm thì $1 \leq m \leq e-1$.

Vậy giá trị lớn nhất của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $e-1$.

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $8\sin^2 x - 10\sin x + 2 - m = \log_2 \frac{2\sin x + m + 1}{(2\sin x - 1)^2}$ có đúng bốn nghiệm phân biệt thuộc đoạn

$\left[0; \frac{5\pi}{6}\right]$

A. $m \in \left(-\frac{17}{8}; -2\right)$.

B. $m \in \left[-\frac{17}{8}; -2\right)$.

C. $m \in \left(-\frac{17}{8}; -1\right)$.

D. $\nexists m \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $\begin{cases} 2\sin x + m + 1 > 0 \\ 2\sin x - 1 \neq 0 \end{cases}$ (a).

Phương trình đã cho viết lại thành

$2(2\sin x - 1)^2 - (2\sin x + m) = \log_2 (2\sin x + m + 1) - \log_2 (2\sin x - 1)^2$

$\Leftrightarrow 2(2\sin x - 1)^2 + \log_2 (2\sin x - 1)^2 + 1 = (2\sin x + m + 1) + \log_2 (2\sin x + m + 1)$

$\Leftrightarrow 2(2\sin x - 1)^2 + \log_2 [2(2\sin x - 1)^2] = (2\sin x + m + 1) + \log_2 (2\sin x + m + 1) \quad (1)$

Xét hàm số $f(t) = t + \log_2 t$, $t \in (0; +\infty)$, có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 2} > 0, \forall t \in (0; +\infty)$ nên $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Phương trình (1) được viết lại thành

$$f(2(2\sin x - 1)^2) = f(2\sin x + m + 1) \Leftrightarrow 2(2\sin x - 1)^2 = 2\sin x + m + 1$$

$$\Leftrightarrow 8\sin^2 x - 10\sin x + 1 = m(2)$$

Đặt $t = \sin x$, với $x \in \left[0; \frac{5\pi}{6}\right]$ và $\sin x \neq \frac{1}{2}$ ta được $t \in [0; 1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Với mỗi $t \in \left[0; \frac{1}{2}\right) \cup \{1\}$ chỉ thu được 1 giá trị của $x \in \left[0; \frac{5\pi}{6}\right]$.

Với mỗi $t \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ ta thu được 2 giá trị của $x \in \left[0; \frac{5\pi}{6}\right]$.

Phương trình (2) trở thành: $8t^2 - 10t + 1 = m(3)$.

Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (3) có hai nghiệm phân biệt

$$t \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$$

Xét $f(t) = 8t^2 - 10t + 1, t \in [0; 1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, có $f'(t) = 16t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{8}$.

Bảng biến thiên của $f(t)$

t	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	1
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$	1	-2	$-\frac{17}{8}$	-1

Từ bảng biến thiên suy ra $-\frac{17}{8} < m < -2$.

Câu 17. Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\frac{1}{2} \log_2 \frac{2x^2 - 4x + 6}{|x - m| + 1} + x^2 = 2(x + |x - m|)$

có đúng ba nghiệm phân biệt là

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\frac{2x^2 - 4x + 6}{|x - m| + 1} > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$.

Phương trình: $\frac{1}{2} \log_2 \frac{2x^2 - 4x + 6}{|x - m| + 1} + x^2 = 2(x + |x - m|)$ (*)

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{2x^2 - 4x + 6}{|x - m| + 1} + 2x^2 = 4(x + |x - m|)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2x^2 - 4x + 6) - \log_2 (|x - m| + 1) + 2x^2 - 4x = 4|x - m|$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x^2 - 4x + 6) + (2x^2 - 4x + 6) = \log_2(|x - m| + 1) + 2 + (4|x - m| + 4)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x^2 - 4x + 6) + (2x^2 - 4x + 6) = \log_2(4|x - m| + 4) + (4|x - m| + 4) \quad (1)$$

• Xét hàm $f(t) = \log_2 t + t$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

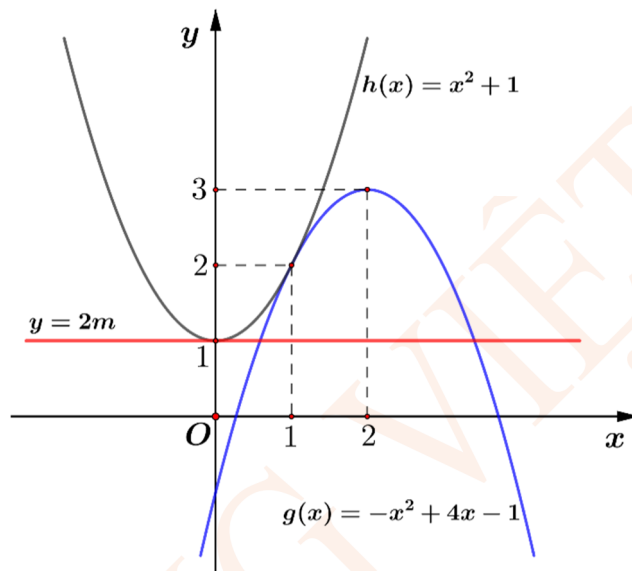
Khi đó (1) $\Leftrightarrow f(2x^2 - 4x + 6) = f(4|x - m| + 4) \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 6 = 4|x - m| + 4$

$$\Leftrightarrow 2|x - m| = x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2m = x^2 - 2x + 1 \\ 2x - 2m = -(x^2 - 2x + 1) \end{cases} \quad (\text{do } x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m = -x^2 + 4x - 1 \\ 2m = x^2 + 1 \end{cases} \quad (2)$$

• Vẽ đồ thị hai hàm số $g(x) = -x^2 + 4x - 1$ và $h(x) = x^2 + 1$ trên cùng hệ trục tọa độ Oxy



(Chú ý: Hai đồ thị hàm số $y = g(x)$ và $y = h(x)$ tiếp xúc với nhau tại điểm $A(1; 2)$)

Để phương trình (*) có đúng ba nghiệm phân biệt thì (2) phải có đúng ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = 2m$ và hai đồ thị trên có đúng ba điểm chung phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m = 1 \\ 2m = 2 \\ 2m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = 1 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Vậy tổng tất cả các giá trị của m bằng 3.

Câu 18. Có bao nhiêu số nguyên của m để phương trình $\log_2(2x + m) - 2\log_2 x = x^2 - 4x - 2m - 1$ có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x > 0 \\ x > -\frac{m}{2} \end{cases}$$

$$\log_2(2x+m) - 2\log_2 x = x^2 - 4x - 2m - 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x+m) - 2\log_2 x = x^2 - 2(x+2m) - 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x+m) + 2(x+2m) + 1 = \log_2 x^2 + x^2$$

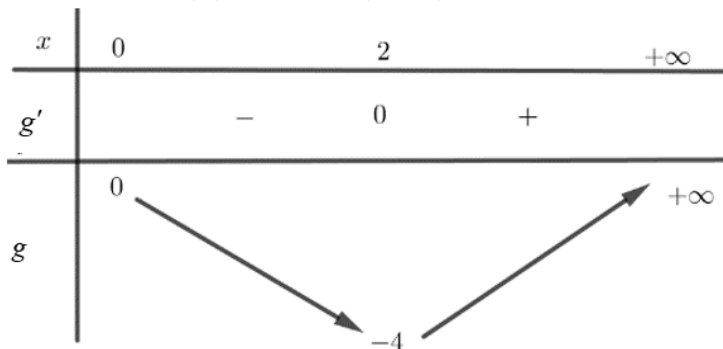
$$\Leftrightarrow \log_2 2(2x+m) + 2(x+2m) = \log_2 x^2 + x^2 \quad (1)$$

$$\text{Xét } f(u) = \log_2 u + u, (u > 0)$$

$$f'(u) = \frac{1}{u \ln 2} + 1 > 0, \text{ do đó hàm số đồng biến trên } (0; +\infty).$$

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow f(2(2x+m)) = f(x^2) \Leftrightarrow 2(2x+m) = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 2m$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = x^2 - 4x, (x > 0)$$



Phương trình có 2 nghiệm dương khi $-4 < 2m < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 0$ suy ra có 1 giá trị nguyên.

Câu 19. Cho phương trình $3\log_3 x - \log_3(3x+m) + 2x^3 - 6x - 2m = 0$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 1. B. 3. C. 4. D. vô số.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ 3x+m > 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } 3\log_3 x - \log_3(3x+m) + 2x^3 - 6x - 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x^3 - \log_3(3x+m) + 2x^3 - 6x - 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x^3 + 2x^3 = \log_3(3x+m) + 6x + 2m$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x^3 + 2x^3 = \log_3(3x+m) + 2(3x+m) \quad (1)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \log_3 t + 2t \text{ trên } (0; +\infty) \text{ ta có } f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 2 > 0, \text{ với mọi } t \in (0; +\infty).$$

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Từ (1) ta có } f(x^3) = f(3x+m) \Leftrightarrow x^3 = 3x+m \Leftrightarrow m = x^3 - 3x \quad (2)$$

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x$ trên khoảng $(0; +\infty)$, ta có bảng biến thiên

x	0	1			$+\infty$	
$g'(x)$		-	0	+		
$g(x)$	0					$+\infty$

$\searrow$ $\nearrow$
 -2

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty) \Leftrightarrow -2 < m < 0$.

Mặt khác, do m nguyên nên $m = -1$.

Câu 20. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên đoạn $[-2021; 2021]$ để phương trình

$$\ln\left(x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right)\left(\sqrt{2x^2-3x-m+1}-\sqrt{2x^2-3x-m}\right)+x^3-6x^2+13x-10=$$

$$(2x^2-3x-m+1)\sqrt{2x^2-3x-m}$$

có nghiệm thực

A. 2020.

B. 2019.

C. 2021.

D. 2023.

Lời giải

Chọn A

Ta có pt đã cho tương đương với:

$$\ln\left(\frac{x-2+\sqrt{x^2-4x+5}}{\sqrt{2x^2-3x-m+1}+\sqrt{2x^2-3x-m}}\right)+(x-2)+(x-2)^3=\sqrt{2x^2-3x-m}+(\sqrt{2x^2-3x-m})^3$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(x-2+\sqrt{(x-2)^2+1}\right)+(x-2)+(x-2)^3=$$

$$\ln\left(\sqrt{2x^2-3x-m}+\sqrt{(\sqrt{2x^2-3x-m})^2+1}\right)+\sqrt{2x^2-3x-m}+(\sqrt{2x^2-3x-m})^3 \quad (1)$$

Xét hàm số: $f(t) = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) + t + t^3, t \in \mathbb{R}$

Suy ra: $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} + 1 + 3t^2 > 0 \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: (1) $\Leftrightarrow f(x-2) = f(\sqrt{2x^2-3x-m})$.

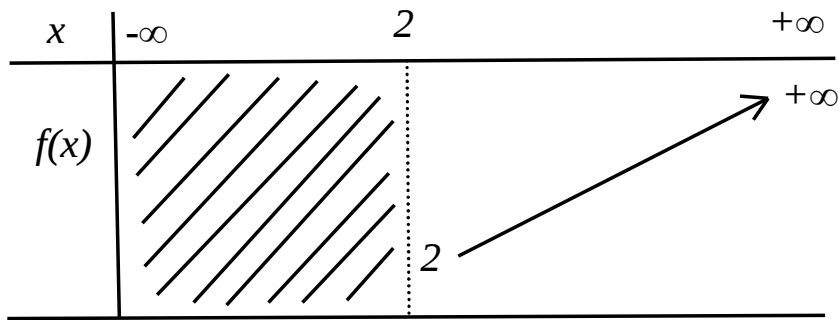
$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-3x-m} = x-2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 2x^2-3x-m = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2+x-4 = m(2) \end{cases}$$

Để phương trình đã cho có nghiệm tương đương với (2) có nghiệm $x \in [2; +\infty)$.

Xét hàm số: $g(x) = x^2 + x - 4, x \in [2; +\infty)$.

Ta có bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta có $ycbt \Leftrightarrow m \geq 2$ suy ra có 2020 giá trị m thỏa mãn.

Câu 21. Tìm số giá trị nguyên của m thuộc $[-20; 20]$ để phương trình

$$\log_2(x^2 + m + x\sqrt{x^2 + 4}) = (2m - 9)x - 1 + (1 - 2m)\sqrt{x^2 + 4} \text{ có nghiệm?}$$

A. 12.

B. 23.

C. 25.

D. 10.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $x^2 + m + x\sqrt{x^2 + 4} > 0$.

$$\log_2(x^2 + m + x\sqrt{x^2 + 4}) = (2m - 9)x - 1 + (1 - 2m)\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x(\sqrt{x^2 + 4} + x) + m) = 2mx - 9x - 1 + \sqrt{x^2 + 4} - 2m\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{4x}{\sqrt{x^2 + 4} - x} + m\right) = 2mx - 9x - 1 + \sqrt{x^2 + 4} - 2m\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{4x + m\sqrt{x^2 + 4} - mx}{\sqrt{x^2 + 4} - x}\right) = 2mx - 9x - 1 + \sqrt{x^2 + 4} - 2m\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2(4x + m\sqrt{x^2 + 4} - mx) + (8x + 2m\sqrt{x^2 + 4} - 2mx) + 1 = \log_2(\sqrt{x^2 + 4} - x) + (\sqrt{x^2 + 4} - x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(8x + 2m\sqrt{x^2 + 4} - 2mx) + (8x + 2m\sqrt{x^2 + 4} - 2mx) = \log_2(\sqrt{x^2 + 4} - x) + (\sqrt{x^2 + 4} - x) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$, $t \in (0; +\infty)$.

$f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$ nên hàm số luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow 8x + 2m\sqrt{x^2 + 4} - 2mx = \sqrt{x^2 + 4} - x$$

$$\Leftrightarrow 2m(\sqrt{x^2 + 4} - x) = (\sqrt{x^2 + 4} - x) - 8x \Leftrightarrow 2m = 1 - \frac{8x}{\sqrt{x^2 + 4} - x}$$

$$\Leftrightarrow 2m = 1 - \frac{8x(\sqrt{x^2 + 4} + x)}{4} \Leftrightarrow 2m = 1 - 2x(\sqrt{x^2 + 4} + x)$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2 + 4} + x^2 = \frac{1 - 2m}{2}.$$

Xét hàm số $g(x) = x\sqrt{x^2 + 4} + x^2$ với $x \in (-\infty; +\infty)$.

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + 4} + x)^2}{\sqrt{x^2 + 4}} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x(\sqrt{x^2 + 4} + x) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4} - x} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{-\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} - 1} = -2;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} + 1 \right) \right] = +\infty.$$

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$			$+\infty$
	-2		

Để phương trình có nghiệm thì $\frac{1-2m}{2} > -2 \Leftrightarrow m < \frac{5}{2}$.

Do m nguyên thuộc $[-20; 20]$ nên số giá trị m là 23.

Câu 22. Cho biết phương trình $\log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$ có nghiệm duy nhất $x = a + b\sqrt{2}$.

Hỏi m thuộc khoảng nào dưới đây để hàm số $y = \frac{mx+a-2}{x-m}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 2]$ bằng -2 .

A. $m \in (7; 9)$. **B.** $m \in (6; 7)$. **C.** $m \in (2; 4)$. **D.** $m \in (4; 6)$.

Lời giải

+ Điều kiện: $x > 1$.

$$\text{Ta có: } \log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \Leftrightarrow \log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3 \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow \log_5 (2\sqrt{x}+1) - \log_5 x = \log_3 (x-1)^2 - \log_3 (2\sqrt{x})^2$$

$$\Leftrightarrow \log_5 (2\sqrt{x}+1) + \log_3 (2\sqrt{x})^2 = \log_5 x + \log_3 (x-1)^2 (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_5 t + \log_3 (t-1)^2$, với $t > 1$

$$\text{có } f'(t) = \frac{1}{t \ln 5} + \frac{2}{(t-1) \ln 3} > 0, \forall t > 1$$

nên $f(t)$ đồng biến do đó (*) $\Leftrightarrow x = 2\sqrt{x} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 + \sqrt{2}$ (vì $x > 1$)

$$\Leftrightarrow x = 3 + 2\sqrt{2}. \text{ Vậy } a = 3.$$

+ Với $a = 3$, ta xét hàm số $y = \frac{mx+1}{x-m}$

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$$

$$y' = \frac{-m^2 - 1}{(x-m)^2} < 0 \text{ do đó hàm số luôn nghịch biến.}$$

Khi đó hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 2]$ bằng $-2 \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin [1; 2] \\ y(1) = -2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \notin [1; 2] \\ \frac{m+1}{1-m} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

Câu 23. Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $5x + y = 4$. Tổng tất cả giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_3 \frac{x^2 + 2y + m}{x + y} + x^2 - 3x - y + m - 1 = 0$ có nghiệm là

A. 10.

B. 5.

C. 9.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

$$\log_3 \frac{x^2 + 2y + m}{x + y} + x^2 - 3x - y + m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (x^2 + 2y + m) + x^2 + 2y + m = \log_3 3(x + y) + 3(x + y) \quad (1)$$

Vì $x, y > 0$ nên $x + y > 0$. Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow x^2 + 2y + m = 3x + 3y \Leftrightarrow x^2 - 3x - y + m = 0 \quad (*)$$

Kết hợp với điều kiện $5x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - 5x$. Vì $x, y > 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{4}{5}$.

$$\text{Ta có } (*) \Leftrightarrow x^2 + 2x + m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = -x^2 - 2x + 4, \forall x \in \left(0; \frac{4}{5}\right).$$

Hàm số $y = -x^2 - 2x + 4$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{4}{5}\right)$ (do $-1 < 0$) nên $\frac{44}{25} < -x^2 - 2x + 4 < 4$.

Do vậy $m \in \{2; 3\}$ là các giá trị cần tìm.

Vậy tổng tất cả các giá trị m thỏa yêu cầu là 5.

2 - BPT LÔGARIT CHỨA THAM SỐ

Câu 24. Với giá trị nào của m thì bất phương trình $\log_2 \frac{x^2 + 3x + m}{3x^2 - 5x + 4} \leq x^2 - 4x + 2 - \frac{m}{2}$ có nghiệm thỏa

$\forall x \in \mathbb{R}$.

A. $m = \emptyset$.B. $m \leq -2$.C. $m < -4$.D. $m < -2$.

Lời giải

Chọn A

Vì $3x^2 - 5x + 4 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên điều kiện: $x^2 + 3x + m > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có:

$$\log_2 \frac{x^2 + 3x + m}{3x^2 - 5x + 4} \leq x^2 - 4x + 2 - \frac{m}{2}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^2 + 3x + m) - \log_2 (3x^2 - 5x + 4) \leq \frac{1}{2} [(3x^2 - 5x + 4) - (x^2 + 3x + m)]$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^2 + 3x + m) + \frac{1}{2} (x^2 + 3x + m) \leq \log_2 (3x^2 - 5x + 4) + \frac{1}{2} (3x^2 - 5x + 4) \quad (1)$$

Xét hàm số:

$$f(t) = \log_2 t + \frac{1}{2} t \text{ trên khoảng } (0; +\infty) \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + \frac{1}{2} > 0; \forall t > 0.$$

Nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$(1) \Leftrightarrow f(x^2 + 3x + m) \leq f(3x^2 - 5x + 4)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + m \leq 3x^2 - 5x + 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow m \leq 2x^2 - 8x + 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Kết hợp điều kiện:

$$\begin{cases} 2x^2 - 8x + 4 - m \geq 0 \\ x^2 + 3x + m > 0 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8 + 2m \leq 0 \\ 9 - 4m < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = \emptyset.$$

Câu 25. Cho bất phương trình $\log_2 \left(\frac{x^2 - 2x + m}{x^2 + x + 1} \right) < x^2 + 4x + 3 - m$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 4)$?

A. 4.

B. 1.

C. 0.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\frac{x^2 - 2x + m}{x^2 + x + 1} > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + m > 0 \quad (1)$

Ta có: $\log_2 \left(\frac{x^2 - 2x + m}{x^2 + x + 1} \right) < x^2 + 4x + 3 - m \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{x^2 - 2x + m}{x^2 + x + 1} \right) - 1 < x^2 + 4x + 2 - m$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 - 2x + m) - \log_2(2x^2 + 2x + 2) < x^2 + 4x + 2 - m$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 - 2x + m) - \log_2(2x^2 + 2x + 2) < (2x^2 + 2x + 2) - (x^2 - 2x + m)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 - 2x + m) + (x^2 - 2x + m) < \log_2(2x^2 + 2x + 2) + (2x^2 + 2x + 2)$$

Đặt $f(t) = \log_2 t + t$ với $t \in (0; +\infty)$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \quad \forall t \in (0; +\infty)$$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Mà $f(x^2 - 2x + m) < f(2x^2 + 2x + 2)$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + m < 2x^2 + 2x + 2$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 2 - m > 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} m > -x^2 + 2x = g(x) \\ m < x^2 + 4x + 2 = h(x) \end{cases}, \quad \forall x \in (0; 4)$

Bảng biến thiên

x	0	1	4
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0	1	-8

x	0	4
$h'(x)$	+	
$h(x)$	2	34

Từ bảng biến thiên ta suy ra $\begin{cases} m > 1 \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \leq 2$

Vậy $m = 2$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $2\log_3(\sin x + m^2) - 4\log_3 \sin x + 2\sin x + \cos 2x + 2m^2 - 1 \leq 0$ có nghiệm.

- A. $m \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. B. $m \leq -\frac{1}{4}$. C. $m \in \emptyset$. D. $m = 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có điều kiện của bất phương trình $\begin{cases} \sin x > 0 \\ \sin x + m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x > 0$.

Khi đó

$$2\log_3(\sin x + m^2) - 4\log_3 \sin x + 2\sin x + \cos 2x + 2m^2 - 1 \leq 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(\sin x + m^2) + 2(\sin x + m^2) \leq 4\log_3 \sin x + 1 - \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(\sin x + m^2) + 2(\sin x + m^2) \leq 4\log_3 \sin x + 2\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \log_3(\sin x + m^2) + \sin x + m^2 \leq 2\log_3 \sin x + \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \log_3(\sin x + m^2) + \sin x + m^2 \leq \log_3 \sin^2 x + \sin^2 x \quad (2).$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ với $t > 0$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$ nên hàm $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Do đó bất phương trình (2) tương đương với $\sin x + m^2 \leq \sin^2 x \Leftrightarrow m^2 \leq \sin^2 x - \sin x$.

Suy ra bất phương trình (1) có nghiệm khi $m^2 \leq \max(\sin^2 x - \sin x)$ trên miền $\sin x > 0$.

Xét hàm số $g(t) = t^2 - t$, với $t \in (0; 1]$. $g'(t) = 2t - 1$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

Vì $g(1) = 0$; $g(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$; $g(0) = 0$ nên $\max_{(0;1]} g(t) = 0$; $\min_{(0;1]} g(t) = -\frac{1}{4}$.

Vậy bất phương trình (*) có nghiệm khi $m^2 \leq 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 27. Cho bất phương trình: $\log_4 \frac{-2x^3 + 2x^2 + 2m - 2}{4x^2 - 4x + 2} + 2x - 2 + m \geq x^3 + x^2 \quad (1)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (0; 15)$ để bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi số thực $x \in [1; 2]$?

- A. 6. B. 8. C. 7. D. 5.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $-2x^3 + 2x^2 + 2m - 2 > 0 \Leftrightarrow 2m > g(x) = 2x^3 - 2x^2 + 2$

- Bất phương trình (1)

$$\Leftrightarrow \log_2(4x^2 - 4x + 2) + 4x^2 - 4x + 2 \leq \log_2(-2x^3 + 2x^2 + 2m - 2) + (-2x^3 + 2x^2 + 2m - 2)$$

Xét hàm số: $f(t) = t + \log_2 t$ với $t > 0$, có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 2} > 0, \forall t > 0$.

Nên bất phương trình (2)

$$\Leftrightarrow f(4x^2 - 4x + 2) \leq f(-2x^3 + 2x^2 + 2m - 2) \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 2 \leq -2x^3 + 2x^2 + 2m - 2$$

$$\Leftrightarrow h(x) = x^3 + x^2 - 2x + 2 \leq m.$$

- Xét hàm số: $h(x) = x^3 + x^2 - 2x + 2$ với $x \in [1; 2]$, có $h'(x) = 3x^2 + 2x - 2 > 0$ với $\forall x \in [1; 2]$

Suy ra hàm số $h(x)$ đồng biến trên đoạn $[1; 2] \Rightarrow \max_{[1;2]} h(x) = h(2) = 10$.

- Xét hàm số: $g(x) = 2x^3 - 2x^2 + 2$ với $x \in [1; 2]$, có $g'(x) = 6x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [1; 2] \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$

Ta có $g(1) = 2; g(2) = 10; g\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{46}{27} \Rightarrow \max_{[1;2]} g(x) = g(2) = 10$

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi số thực $x \in [1; 2]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m > g(x), \forall x \in [1; 2] \\ m \geq h(x), \forall x \in [1; 2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m > \max_{[1;2]} g(x) \\ m \geq \max_{[1;2]} h(x) \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 10.$$

Do m nguyên và $m \in (0, 15) \Rightarrow m \in \{10, 11, 12, 13, 14\}$

- Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

Câu 28. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình

$$\log_2 \left(\frac{\sqrt{2x^2 + mx + 1}}{x + 2} \right) - 2 \leq x - \sqrt{2x^2 + mx + 1} \text{ nghiệm đúng với } \forall x \in (0; 1)?$$

A. 10.

B. 5.

C. 1.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x + 2 > 0 \\ 2x^2 + mx + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \log_2 \left(\frac{\sqrt{2x^2 + mx + 1}}{x + 2} \right) + \sqrt{2x^2 + mx + 1} \leq x + 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \sqrt{2x^2 + mx + 1} + \sqrt{2x^2 + mx + 1} \leq \log_2 (x + 2) + x + 2 \Leftrightarrow f(\sqrt{2x^2 + mx + 1}) \leq f(x + 2) \quad (1)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \log_2 t + t \text{ với } t \in (0; +\infty) \text{ có } f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$$

$$\Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên } (0; +\infty) \text{ nên } (1) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + mx + 1} \leq x + 2.$$

$$\text{Từ đó } \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 2x^2 + mx + 1 \leq (x + 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x^2 + (m - 4)x - 3 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow m - 4 \leq -x + \frac{3}{x}.$$

$$\text{YCBT } \Leftrightarrow m - 4 \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 6.$$

DẠNG 5: PHƯƠNG PHÁP HÀM ĐẶC TRƯNG GIẢI PT, BPT CÓ TỔ HỢP MŨ - LÔGARIT KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Câu 29. Có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ thuộc đoạn $[1; 2020]$ thỏa mãn y là số nguyên và $x + \ln x = y + e^y$?

A. 6.

B. 7.

C. 2021.

D. 2020.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } x + \ln x = y + e^y \Leftrightarrow x + \ln x = e^y + \ln e^y.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t + \ln t \text{ trên } (0; +\infty), \text{ ta có } f'(t) = 1 + \frac{1}{t} > 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên}$$

$$(0; +\infty) \Rightarrow f(x) = f(e^y) \Rightarrow x = e^y.$$

Do $x \in [1; 2020]$ nên $1 \leq e^y \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \ln 2020$.

Mà $y \in \mathbb{Z}$ và $y \in [1; 2020]$ nên $y \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Vậy có 7 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn bài toán.

Câu 30. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x \in [2; 4374)$ và $2 \cdot 3^y - \log_3(x + 3^{y-1}) = 3x - y$?

A. 7.

B. 8.

C. 6.

D. 9.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 3^{y-1} \Rightarrow 3^y = 3t \Rightarrow y = \log_3(3t)$.

Phương trình đã cho tương đương với: $6t - \log_3(x + t) = 3x - \log_3(3t)$

$$\Leftrightarrow 6t + \log_3(3t) = 3x + \log_3(x + t)$$

$$\Leftrightarrow 9t + \log_3(3t) = 3(x + t) + \log_3(x + t) \quad (*)$$

Xét hàm số: $f(u) = 3u + \log_3 u$ liên tục trên $(0; +\infty)$, có $f'(u) = 3 + \frac{1}{u \ln 3} > 0, \forall u \in (0; +\infty)$.

Suy ra: hàm số $y = f(u)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ (1)

$$(*) \Leftrightarrow f(3t) = f(x + t) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Leftrightarrow 3t = x + t \Leftrightarrow 2t = x \Leftrightarrow 2 \cdot 3^{y-1} = x$.

Ta có: $2 \leq x < 4374$, suy ra: $2 \leq 2 \cdot 3^{y-1} < 4374 \Leftrightarrow \log_3 2 \leq \log_3 2 + y - 1 < \log_3 4374$

$$\Leftrightarrow 1 \leq y < 1 + \log_3 4374 - \log_3 2 \Leftrightarrow 1 \leq y < 8. \text{ Vì } y \text{ nguyên, nên } y \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}.$$

Dễ thấy, ứng mỗi giá trị của y , ta tìm được một giá trị nguyên của x .

Vậy có 7 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 31. Tính tổng S tất cả các nghiệm của phương trình: $\ln\left(\frac{5^x + 3^x}{6x + 2}\right) + 5^{x+1} + 5 \cdot 3^x - 30x - 10 = 0$.

A. $S = 1$.

B. $S = 2$.

C. $S = -1$.

D. $S = 3$

Lời giải

Điều kiện $x > -\frac{1}{3}$.

Phương trình tương đương

$$\ln(5^x + 3^x) - \ln(6x + 2) + 5(5^x + 3^x) - 5(6x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(5^x + 3^x) + 5(5^x + 3^x) = \ln(6x + 2) + 5(6x + 2) \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = \ln t + 5t, t > 0$. Có $f'(t) = \frac{1}{t} + 5 > 0, \forall t > 0$ nên $f(t)$ đồng biến. Từ (1)

$$\text{suy ra } f(5^x + 3^x) = f(6x + 2) \Leftrightarrow 5^x + 3^x = 6x + 2 \Leftrightarrow 5^x + 3^x - 6x - 2 = 0$$

$$\text{Xét } g(x) = 5^x + 3^x - 6x - 2, g'(x) = 5^x \ln 5 + 3^x \ln 3 - 6$$

$$g''(x) = 5^x (\ln 5)^2 + 3^x (\ln 3)^2 > 0 \quad \forall x > -\frac{1}{3}.$$

Nên $g'(x) = 0$ có không quá 1 nghiệm suy ra $g(x) = 0$ có không quá 2 nghiệm trên

$$\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right).$$

Với $y = -1$ ta có: $g(x) \geq -1$. Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $\Rightarrow x \in \{0; 1\}$. Trường hợp này có 2 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn.

Vậy có tất cả 6 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 34. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $[3^{2x} - 4 \cdot 3^{x+1} + 27] \cdot [\log_3(x+1) + x - 3] \leq 0$?

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

$$\text{Ta có } [3^{2x} - 4 \cdot 3^{x+1} + 27] \cdot [\log_3(x+1) + x - 3] \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{2x} - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 \geq 0 \\ \log_3(x+1) + x - 3 \leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 3^{2x} - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 \leq 0 \\ \log_3(x+1) + x - 3 \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Giải hệ (1) ta có $\begin{cases} 3^{2x} - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 \geq 0 \\ \log_3(x+1) + x - 3 \leq 0 \end{cases}$.

$$+) 3^{2x} - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 \geq 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 12 \cdot 3^x + 27 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \geq 9 \\ 3^x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

Suy ra tập nghiệm $S_1 = (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.

$$+) \log_3(x+1) + x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow \log_3(x+1) + (x+1) \leq 4 \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t \cdot \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$ nên hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Từ (3) $\Leftrightarrow f(x+1) \leq f(3) \Leftrightarrow x+1 \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 2$ nên tập nghiệm $S_2 = (-1; 2]$.

Do đó tập nghiệm của hệ (1) là $S = S_1 \cap S_2 = (-1; 1] \cup \{2\}$.

Giải hệ (2) ta có $\begin{cases} 3^{2x} - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 \leq 0 \\ \log_3(x+1) + x - 3 \geq 0 \end{cases}$.

$$+) 3^{2x} - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 \leq 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 12 \cdot 3^x + 27 \leq 0 \Leftrightarrow 3 \leq 3^x \leq 9 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2.$$

Suy ra tập nghiệm $S_3 = [1; 2]$

$$+) \log_3(x+1) + x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \log_3(x+1) + (x+1) \geq 4 \quad (4)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t \cdot \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$ nên hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Từ (4) $\Leftrightarrow f(x+1) \geq f(3) \Leftrightarrow x+1 \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 2$ nên tập nghiệm $S_4 = [2; +\infty)$.

Do đó tập nghiệm của hệ (2) là $S = S_3 \cap S_4 = \{2\}$.

Kết luận: Bất phương trình có tập nghiệm $S = (-1; 1] \cup \{2\}$.

Vậy bất phương trình có 3 nghiệm nguyên.

Câu 35. Tổng S của tất cả các nghiệm thuộc khoảng $(0; 4\pi)$ của phương trình

$$2022^{\sin^2 x} - 2022^{\cos^2 x} = 2 \ln(\cot x) \text{ là}$$

A. $S = 18\pi$.

B. $S = 8\pi$.

C. $S = 7\pi$.

D. $S = 16\pi$.

Lời giải.

Điều kiện $\cot x > 0$. Ta có

$$2022^{\sin^2 x} - 2022^{\cos^2 x} = 2 \ln(\cot x) \Leftrightarrow 2022^{\sin^2 x} - 2022^{\cos^2 x} = \ln(\cos^2 x) - \ln(\sin^2 x)$$

$$\Leftrightarrow 2022^{\sin^2 x} + \ln(\sin^2 x) = 2022^{\cos^2 x} + \ln(\cos^2 x)$$

Xét hàm số $f(t) = 2022^t + \ln t$ với $t > 0$

$$f'(t) = 2022^t \cdot \ln 2022 + \frac{1}{t} > 0, \forall t > 0 \Rightarrow \text{hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên khoảng } (0; +\infty).$$

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow f(\sin^2 x) = f(\cos^2 x) \Leftrightarrow \sin^2 x = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Do } \cot x > 0 \text{ nên } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Mà } x \in (0; 4\pi) \text{ suy ra } x \in \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}; \frac{13\pi}{4} \right\}. \text{ Suy ra } S = 7\pi.$$

Câu 36. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $2 \leq x \leq 2022$,

$$1 \leq y \leq 2022 \text{ và } \log_2 \sqrt[4]{\frac{y+3}{2x+1}} + 4^x = 2^{y+2}?$$

A. 1011.

B. 1010.

C. 1009.

D. 1012.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{4} \log_2 \frac{y+3}{2x+1} + 4^x = 2^{y+2} \Leftrightarrow \log_2 \frac{y+3}{2x+1} + 2^{2x+2} = 2^{y+4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2(y+3) - 2^{y+4} = \log_2(2x+1) - 2^{2x+2} \quad (1)$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = \log_2 t - 2^{t+1} \forall t \in [4; +\infty)$$

$$f'(t) = \frac{1-t \cdot 2^{t+1} \ln 2 \cdot \ln 2}{t \cdot \ln 2} < 0 \forall t \in [4; +\infty)$$

$$\text{Suy ra: } (1) \Leftrightarrow y+3 = 2x+1 \Leftrightarrow y = 2x-2$$

$$\text{Do } 1 \leq y \leq 2022 \Rightarrow \frac{3}{2} \leq x \leq 1012 \Rightarrow x \in \{2; 3; \dots, 1012\}$$

Do đó: $(x; y) \in \{(2; 2); (3; 4); \dots; (1012; 2022)\}$ có 1011 cặp thỏa mãn ycbt

Câu 37. Có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa mãn $0 \leq x \leq 2022$ và $\log_2(2x+2) + x - 3y = 8^y$?

A. 2018.

B. 1.

C. 4.

D. 2019.

Lời giải**Chọn C**

$$\diamond \text{ Đặt } \log_2(2x+2) = t \Rightarrow 2x+2 = 2^t.$$

$$\diamond \text{ Khi đó ta được phương trình } t + \frac{2^t - 2}{2} - 3y = 8^y \Leftrightarrow t + 2^{t-1} - 1 - 3y = 2^{3y} \Leftrightarrow 2^{t-1} + t - 1 = 2^{3y} + 3y (*).$$

$$\diamond \text{ Xét hàm số } f(a) = 2^a + a \text{ trên } \mathbb{R} \text{ có } f'(a) = 2^a \ln 2 + 1 > 0 \forall a \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Khi đó hàm số đồng biến trên } \mathbb{R} \text{ nên phương trình } (*) \Leftrightarrow f(t-1) = f(3y) \Leftrightarrow t-1 = 3y \Leftrightarrow t = 3y+1$$

$$\text{hay } \log_2(2x+2) = 3y+1.$$

$$\diamond \text{ Do } 0 \leq x \leq 2022 \text{ nên } \log_2 2 - 1 \leq 3y \leq \log_2 4046 - 1 \Leftrightarrow \frac{\log_2 2 - 1}{3} \leq y \leq \frac{\log_2 4046 - 1}{3}$$

Và $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Câu 38. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 < y \leq 2022$ và $\log_2 \left(\frac{3^x - 1}{y} \right) = y + 1 - 3^x$?

A. 7.

B. 6.

C. 2022.

D. 2021.

Lời giải

Chọn B

ĐK: $3^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

$$\log_2 \left(\frac{3^x - 1}{y} \right) = y + 1 - 3^x \Leftrightarrow \log_2 (3^x - 1) + 3^x - 1 = \log_2 y + y \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ với $t > 0$

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên khoảng } (0; +\infty) \text{ suy ra}$$

$$(*) \Leftrightarrow 3^x - 1 = y, \text{ vì } 0 < y \leq 2022 \Leftrightarrow 0 < 3^x - 1 \leq 2022 \Leftrightarrow 0 < x \leq \log_3 2023$$

Mà x nguyên nên $x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Vì ứng với mỗi giá trị $x = x_0$ có duy nhất 1 giá trị $y = 3^{x_0} - 1$ do đó có 6 cặp cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 39. Cho $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_2 (2x + 2) + x - 3y = 8^y$. Có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa mãn các điều kiện trên?

A. 1.

B. 2019.

C. 4.

D. 2018.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \log_2 (2x + 2) = u \Rightarrow x = 2^{u-1} - 1$$

$$\text{Khi đó phương trình đã cho trở thành: } u + 2^{u-1} - 1 - 3y = 8^y \Leftrightarrow 2^{u-1} + (u - 1) = 2^{3y} + 3y.$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = 2^t + t$, có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t \Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } 2^{u-1} + (u - 1) = 2^{3y} + 3y \Leftrightarrow f(u - 1) = f(3y) \Leftrightarrow u - 1 = 3y \Leftrightarrow x = 2^{3y} - 1.$$

$$\text{Theo bài ra: } 0 \leq 2^{3y} - 1 \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \frac{\log_2 2021}{3} \approx 3,7.$$

Vậy có 4 cặp $(x; y)$ thỏa mãn là $(0; 0), (7; 1), (63; 2), (511; 3)$.

Câu 40. Giả sử $(x; y)$ là cặp số nguyên thỏa mãn đồng thời $8 \leq x \leq 2022$ và $2^y - \log_2 (x + 2^{y-1}) = 2x - y$. Tổng các giá trị của y bằng

A. 60.

B. 63.

C. 2022.

D. 49.

Lời giải

Chọn D

$$+ \text{ Ta có: } 2^y - \log_2 (x + 2^{y-1}) = 2x - y \Leftrightarrow 2 \cdot 2^y + y + 1 = 2x + 2^y + \log_2 (2x + 2^y)$$

$$\Leftrightarrow 2^{y+1} + \log_2 2^{y+1} = 2x + 2^y + \log_2 (2x + 2^y) \quad (*)$$

+ Xét hàm số $f(t) = t + \log_2(t)$, $t > 0$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên

$$(*) \Leftrightarrow 2^{y+1} = 2x + 2^y \Leftrightarrow x = 2^{y-1}$$

$$+ \text{ ta có: } 8 \leq x \leq 2022 \Rightarrow 8 \leq 2^{y-1} \leq 2022 \Leftrightarrow 4 \leq y \leq \log_2 2024 \Rightarrow 4 \leq y \leq 10$$

Suy ra $y \in \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Câu 41. Có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ (trong đó x, y nguyên dương thuộc đoạn $[0; 2022]$ thỏa mãn điều kiện $2^x - \log_2(y^2 + 615) = y^2 - x + 615$

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

$$2^x + x = (y^2 + 615) + \log_2(y^2 + 615).$$

$$\text{Đặt } t = \log_2(y^2 + 615) \Leftrightarrow y^2 + 615 = 2^t. \text{ Khi đó ta có } 2^x + x = 2^t + t.$$

Xét hàm số $f(x) = 2^x + x, x \in \mathbb{R}$, ta có $f'(x) = 2^x \ln 2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do vậy } 2^x + x = 2^t + t \Leftrightarrow x = t \Leftrightarrow x = \log_2(y^2 + 615) \Leftrightarrow y^2 = 2^x - 615.$$

$$\text{Theo bài ra } 0 \leq y \leq 2022 \Leftrightarrow 0 \leq y^2 \leq 2022^2 \Leftrightarrow 0 \leq 2^x - 615 \leq 2022^2 \Leftrightarrow \log_2 615 < x < \log_2(2022^2 + 615) \Leftrightarrow 9,3 \leq x \leq 21,9.$$

Khi x chạy từ 10 tới 21, ta thấy $x = 12 \Rightarrow y = 59$. Vậy có 1 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 42. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $2 \leq x \leq 2021$ và $2^y - \log_2(x + 2^{y-1}) = 2x - y$

A. 2020.

B. 10.

C. 9.

D. 2021.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } \log_2(x + 2^{y-1}) = t \Leftrightarrow x + 2^{y-1} = 2^t \Leftrightarrow x + \frac{2^y}{2} = 2^t \Leftrightarrow 2x + 2^y = 2.2^t \Leftrightarrow 2x = 2.2^t - 2^y$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành: } 2^y - t = 2.2^t - 2^y - y \Leftrightarrow 2.2^y + y = 2.2^t + t (*)$$

Xét hàm số: $f(u) = 2.2^u + u$. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(u) = 2.2^u \ln 2 + 1 > 0 \forall u$. Suy ra hàm số $f(u) = 2.2^u + u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó phương trình $(*)$ có một nghiệm duy nhất:

$$y = t \Leftrightarrow 2x = 2.2^y - 2^y \Leftrightarrow 2x = 2^y \Leftrightarrow y = \log_2(2x)$$

$$\text{Do } 2 \leq x \leq 2021 \Leftrightarrow \log_2 4 \leq y \leq \log_2 4042 \Leftrightarrow 2 \leq y \leq \log_2 4042 \approx 11,98$$

Lại có y là số nguyên nên: $y \in \{2; 3; \dots; 11\}$

Với mỗi giá trị của y ta tìm được duy nhất một giá trị của x . Vậy có 10 cặp số nguyên $(x; y)$ để thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 43. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 < y \leq 2022$ và $3^x + 3x - 6 = 9y + \log_3 y^3$.

A. 2022.

B. 9.

C. 8.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } t = \log_3 y \Rightarrow y = 3^t.$$

Phương trình trở thành

$$3^x + 3x - 6 = 9.3^t + 3t \Leftrightarrow 3^x + 3x = 3^{t+2} + 3(t+2)$$

Xét hàm số $f(a) = 3^a + 3a \Rightarrow f'(a) = 3^a \ln 3 + 3 > 0, \forall a \in \mathbb{R}$, tức là $f(a)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Suy ra } x = t + 2 \Rightarrow x = \log_3 y + 2.$$

Để $x \in \mathbb{Z}$ thì $\log_3 y \in \mathbb{Z}$

$$\text{Mà } 0 < y \leq 2022 \Rightarrow y \in \{1; 3; 3^2; 3^3; \dots; 3^6\}$$

Suy ra có 7 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 44. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , điểm $M(x; y)$ biểu diễn nghiệm của phương trình $\log_3(9x+18) + x = y + 3^y$. Có bao nhiêu điểm M có tọa độ nguyên thuộc hình tròn tâm O bán kính $R = 7$?

A. 7.

B. 2.

C. 3.

D. 49.

Lời giải

Chọn BĐiều kiện: $x > -2$

$$\text{Ta có } \log_3(9x+18) + x = y + 3^y \Leftrightarrow \log_3(x+2) + x + 2 = y + 3^y$$

$$\text{Đặt } t = \log_3(x+2) \Leftrightarrow x+2 = 3^t \text{ ta được } 3^t + t = 3^y + y$$

Xét hàm số $f(u) = 3^u + u$ thì $f(u)$ là hàm đồng biến, vậy $y = t = \log_3(x+2)$

Do M có tọa độ nguyên và nằm trên hình tròn tâm O bán kính bằng $R = 7$ nên: $x^2 + y^2 \leq 49$

$$M \text{ có tọa độ nguyên nên } \begin{cases} -2 < x \leq 7 \\ x \in \mathbb{Z} \\ \log_3(x+2) \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{TH1: } x = -1 \Rightarrow y = 0 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{TH2: } x = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{TH3: } x = 7 \Rightarrow y = 2 \text{ (loại)}$$

Vậy có 2 điểm thỏa mãn yêu cầu là $(-1; 0), (1; 1)$

Câu 45. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn

$$3^{4x^2-1} \log(4x^2 + 4x + 2) = 3^{y-2x-4} \log(2x + y - 1) \text{ đồng thời } x, y \leq 2021$$

A. 15.

B. 28.

C. 22.

D. 35.

Lời giải

Chọn C

$$3^{4x^2-1} \log(4x^2 + 4x + 2) = 3^{y-2x-4} \log(2x + y - 1)$$

$$\Leftrightarrow 3^{4x^2+4x+2} \log(4x^2 + 4x + 2) = 3^{2x+y-1} \log(2x + y - 1) \quad (1)$$

$$\text{Xét } f(t) = 3^t \cdot \log t \quad (t \geq 2).$$

$$f'(t) = 3^t \ln 3 \cdot \log t + \frac{3^t}{t \cdot \ln 10} = 3^t \left(\ln 3 \cdot \log t + \frac{1}{t \cdot \ln 10} \right) > 0, \forall t \geq 2.$$

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 2 = 2x + y - 1 \Leftrightarrow y = 4x^2 + 2x + 3$$

$$y \leq 2021 \Leftrightarrow 4x^2 + 2x + 3 \leq 2021 \Leftrightarrow \frac{-1-3\sqrt{897}}{4} \leq x \leq \frac{-1+3\sqrt{897}}{4}$$

$$\text{Vì } x \in \mathbb{Z}^+ \cap (0; 2022) \text{ nên } x \in \{1; 2; 3; \dots; 21; 22\}.$$

Vì mỗi giá trị của x có đúng một giá trị của y nên có 22 cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn.

Câu 46. Có bao nhiêu số nguyên y thuộc đoạn $[-2021; 2021]$ sao cho ứng với mỗi y tồn tại số thực

$$x \text{ thỏa mãn } \log_2(y - 5 + \sqrt{y + 2^x - 5}) = 2x?$$

A. 2017.

B. 2016.

C. 4041.

D. 2021.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\log_2(y-5+\sqrt{y+2^x-5})=2x \Leftrightarrow y-5+\sqrt{y+2^x-5}=2^{2x}$$

$$\Leftrightarrow y+2^x-5+\sqrt{y+2^x-5}=2^{2x}+2^x \quad (1).$$

Xét hàm số $g(t)=t^2+t, \forall t>0$.Có $g'(t)=2t+1>0, \forall t>0$. Do đó, hàm số $g(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

$$(1) \Leftrightarrow g(\sqrt{y+2^x-5})=g(2^x) \Leftrightarrow y+2^x-5=2^{2x} \Leftrightarrow y=2^{2x}-2^x+5.$$

Xét hàm số $f(x)=2^{2x}-2^x+5$.

$$\text{Có } f'(x)=2\ln 2 \cdot 2^{2x}-\ln 2 \cdot 2^x, f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$$

Ta có BBT

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{19}{4}$	$+\infty$

Vì $y \in [-2021; 2021], y \in \mathbb{Z}$ nên $\frac{19}{4} \leq y \leq 2021$.

Vậy có 2017 giá trị cần tìm của y .

Câu 47. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq y \leq 2020$ và $\log_2(4y+4)-x=1+2^x-y$?

A. 11.

B. 12.

C. 2021.

D. 10.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $4y+4>0 \Leftrightarrow y>-1$.Ta có: $\log_2(4y+4)-x=1+2^x-y$

$$\Leftrightarrow \log_2[4(y+1)]-x=1+2^x-y \Leftrightarrow 2+\log_2(y+1)-x=1+2^x-y$$

$$\Leftrightarrow \log_2(y+1)+y+1=x+2^x \Leftrightarrow \log_2(y+1)+2^{\log_2(y+1)}=x+2^x$$

Xét hàm đặc trưng $f(t)=t+2^t$ ta có $f'(t)=1+2^t \ln 2 > 0$ $\Rightarrow$ Hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó ta có $\log_2(y+1)=x \Leftrightarrow y+1=2^x$ Theo đề bài ta có: $0 \leq y \leq 2020$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2^x-1 \leq 2020 \Leftrightarrow 1 \leq 2^x \leq 2021 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \log_2 2021 \approx 10,98$$

$$\text{Mà } y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$$

Ứng với mỗi giá trị của y cho 1 giá trị x tương ứng.Vậy có 11 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 48. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\log_3(3x+6)+x-2y=3 \cdot 9^y$. Biết $5 \leq x \leq 2021$, tìm số cặp x, y nguyên thỏa mãn đẳng thức trên.

A. 5

B. 2

C. 4

D. 3

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_3(3x+6) + x - 2y = 3 \cdot 9^y \Leftrightarrow \log_3(x+2) + x + 2 = 3^{2y+1} + 2y + 1$

$$\Leftrightarrow \log_3(x+2) + x + 2 = 3^{2y+1} + \log_3 3^{2y+1} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3(t) + t, t > 0$

Ta có: $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến trên tập xác định

Từ (1) suy ra $x + 2 = 3^{2y+1} \Leftrightarrow x = 3^{2y+1} - 2$

Do $5 \leq x \leq 2021$ nên $5 \leq 3^{2y+1} - 2 \leq 2021 \Leftrightarrow \frac{\log_3 7 - 1}{2} \leq y \leq \frac{\log_3 2023 - 1}{2}$

Mà y nguyên nên $\Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=25 \\ x=241 \end{cases}$

Câu 49. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ với $x \leq 2020$ thỏa mãn

$$2(3x - y) = 3(1 + 9^y) - \log_3(2x - 1)$$

A. 1010.

B. 2020.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\log_3(2x-1) = t \Rightarrow 2x = 3^t + 1$, ta được

$$3(3^t + 1) - 2y = 3(1 + 3^{2y}) - t \Leftrightarrow 3 \cdot 3^t + t = 3 \cdot 3^{2y} + 2y \quad (*).$$

Xét hàm số $f(u) = 3 \cdot 3^u + u \Rightarrow f'(u) = 3 \cdot 3^u \ln 3 + 1 > 0, \forall u \in \mathbb{R} \Rightarrow f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow t = 2y$, vậy nên $2x = 3^{2y} + 1 \Leftrightarrow 9^y = 2x - 1$.

Vì $x \leq 2020 \Rightarrow 9^y \leq 4039 \Leftrightarrow y \leq \log_9 4039$. Vì y nguyên dương nên $y \in \{1; 2; 3\}$. Ta thấy với mỗi giá trị nguyên của y thì tìm được 1 giá trị nguyên của x . Vậy có 3 cặp $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 50. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 < y < 2020$ và $3^x + 3x - 6 = 9y + \log_3 y^3$.

A. 2020

B. 9.

C. 7.

D. 8.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3^x + 3x - 6 = 9y + \log_3 y^3 \Leftrightarrow 3^x + 3(x - 2) = 9y + 3 \log_3 y \Leftrightarrow 3^x + 3(x - 2) = 3^{2 + \log_3 y} + 3 \log_3 y \quad (*)$

Xét hàm số: $f(t) = 3^t + 3(t - 2)$.

Ta có: $f'(t) = 3^t \ln 3 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó: $(*) \Leftrightarrow f(x) = f(2 + \log_3 y) \Leftrightarrow x = 2 + \log_3 y \Leftrightarrow y = 3^{x-2}$.

Do $0 < y < 2020$ và x, y nguyên nên:

$$1 \leq 3^{x-2} < 2020 \Leftrightarrow 2 \leq x < 2 + \log_3 2020 \Rightarrow x \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}.$$

Ứng với mỗi giá trị x có một giá trị của y nên có 7 cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 51. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 4000$ và

$$5(25^y + 2y) = x + \log_5(x+1)^5 - 4?$$

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\log_5(x+1) = t \Rightarrow x = 5^t - 1$.

Phương trình trở thành:

$$5(5^{2y} + 2y) = 5^t - 1 + 5t - 4 \Leftrightarrow 5^{2y} + 2y = 5^{t-1} + (t-1).$$

Xét hàm số $f(u) = 5^u + u \Rightarrow f'(u) = 5^u \ln 5 + 1 > 0$ nên hàm số luôn đồng biến.

$$\text{Vậy để } f(2y) = f(t-1) \Leftrightarrow 2y = t-1 \Leftrightarrow 2y+1 = t = \log_5(x+1)$$

$$\Rightarrow 0 \leq 2y+1 \leq \log_5 4001 \Rightarrow 0 \leq 2y+1 \leq 5 \Rightarrow y = \{0; 1; 2\}$$

Với mỗi nghiệm y ta tìm được một nghiệm x tương ứng.

Câu 52. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 < y \leq 2021$ và $3^x + 3x - 6 = 9y + \log_3 y^3$?

A. 2021.

B. 7.

C. 9.

D. 2020.

Lời giải

Chọn B

$$3^{x-1} + (x-1) = 3y + \log_3(3y)$$

$$\text{Đặt } 3^{x-1} = u \Rightarrow x-1 = \log_3 u, (u > 0), \text{ suy ra: } u + \log_3 u = 3y + \log_3(3y). (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t + \log_3 t$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có: $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 3} > 0, \forall t > 0$ nên từ $(*)$ suy ra:

$$(*) \Leftrightarrow f(u) = f(3y) \Leftrightarrow u = 3y$$

$$\text{Khi đó ta có: } 3y = 3^{x-1} \Leftrightarrow y = 3^{x-2} (**)$$

Theo giả thiết: $\begin{cases} y \in \mathbb{Z} \\ 0 < y \leq 2021 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq y \leq 2021$, suy ra:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ 1 \leq 3^{x-2} \leq 2021 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq x-2 \leq \log_3 2021 \approx 6,928 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq x-2 \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ 2 \leq x \leq 8 \end{cases} \Rightarrow x \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\} \text{ (có 7 số)}$$

Từ $(**)$ ta có, ứng với mỗi giá trị của x , cho duy nhất một giá trị của y nên có 7 cặp.

Câu 53. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $2 \leq x \leq 2021$ và $2^y - \log_2(x + 2^{y-1}) = 2x - y$?

A. 2020.

B. 9.

C. 2019.

D. 10.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } \log_2(x + 2^{y-1}) = t. \text{ Suy ra } x + 2^{y-1} = 2^t, x = 2^t - 2^{y-1}.$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành: } 2^y - t = 2(2^t - 2^{y-1}) - y \Leftrightarrow 2.2^y + y = 2.2^t + t.$$

Xét hàm số $g(x) = 2.2^x + x$ có $g'(x) = 2.2^x \ln 2 + 1 > 0, \forall x$ nên hàm số $y = g(x)$ luôn đồng biến.

$$\text{Khi đó } 2.2^y + y = 2.2^t + t \Leftrightarrow y = t \text{ hay } y = \log_2(x + 2^{y-1}).$$

$$\text{Suy ra } x + 2^{y-1} = 2^y \Leftrightarrow x = 2^y - 2^{y-1} = 2^{y-1}.$$

$$\text{Mà } 2 \leq x \leq 2021 \text{ nên } 2 \leq 2^{y-1} \leq 2021 \Leftrightarrow 1 \leq y-1 \leq \log_2 2021 \text{ hay } 2 \leq y \leq (\log_2 2021) + 1.$$

Lại có y là số nguyên nên $y \in \{2, 3, \dots, 11\}$ tức 10 giá trị thỏa mãn.

Xét biểu thức $x = 2^{y-1}$, mỗi giá trị nguyên của y cho tương ứng 1 giá trị nguyên của x nên có 10 cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 54. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq y \leq 2020$ và $\log_3 \left(\frac{2^x - 1}{y} \right) = y + 1 - 2^x$?

A. 2019.

B. 11.

C. 2020.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Từ giả thiết ta có: } \begin{cases} y \neq 0 \\ \frac{2^x - 1}{y} > 0 \Leftrightarrow 2^x > 1 \Leftrightarrow x > 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: PT} \Leftrightarrow \log_3 (2^x - 1) + 2^x - 1 = \log_3 y + y \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ trên $(0; +\infty)$

Khi đó $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0$ do đó hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

$$(*) \text{ có dạng } f(2^x - 1) = f(y) \Leftrightarrow y = 2^x - 1$$

$$\text{Vì } 0 \leq y \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq 2^x - 1 \leq 2020 \Leftrightarrow 1 \leq 2^x \leq 2021 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \log_2 (2021)$$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \log_2 (2021) \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}. \text{ Vậy có 11 cặp } (x; y) \text{ thỏa mãn.}$$

Câu 55. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_3 (3x + 3) + x = 2y + 9^y$?

A. 2019.

B. 6.

C. 2020.

D. 4.

Lời giải

Chọn D**Cách 1:**

$$\text{Ta có: } \log_3 (3x + 3) + x = 2y + 9^y \Leftrightarrow \log_3 (x + 1) + x + 1 = 2y + 3^{2y}. \quad (1)$$

$$\text{Đặt } \log_3 (x + 1) = t \Rightarrow x + 1 = 3^t.$$

$$\text{Phương trình (1) trở thành: } t + 3^t = 2y + 3^{2y} \quad (2)$$

Xét hàm số $f(u) = u + 3^u$ trên $\mathbb{R}$.

$$f'(u) = 1 + 3^u \ln 3 > 0, \forall u \in \mathbb{R} \text{ nên hàm số } f(u) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

$$\text{Do đó } (2) \Leftrightarrow f(t) = f(2y) \Leftrightarrow t = 2y \Rightarrow \log_3 (x + 1) = 2y \Leftrightarrow x + 1 = 9^y \Leftrightarrow x = 9^y - 1$$

$$\text{Vì } 0 \leq x \leq 2020 \Rightarrow 0 \leq 9^y - 1 \leq 2020 \Leftrightarrow 1 \leq 9^y \leq 2021 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \log_9 2021$$

$$(\log_9 2021 \approx 3,464)$$

$$\text{Do } y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{0; 1; 2; 3\}, \text{ có 4 giá trị của } y \text{ nên cũng có 4 giá trị của } x$$

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x; y)$.

Cách 2:

$$\text{Ta có: } \log_3 (3x + 3) + x = 2y + 9^y \Leftrightarrow \log_3 (x + 1) + x + 1 = 2y + 3^{2y}$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \log_3 (x + 1) + x + 1 \text{ với } x \in [0; 2020].$$

Ta có $f'(x) = \frac{1}{(x+1)\ln 3} + 1 > 0, \forall x \in x \in [0; 2020] \Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[0; 2020]$.

Suy ra $f(0) \leq f(x) = \log_3(x+1) + x + 1 \leq f(2020) \Leftrightarrow 1 \leq f(x) \leq \log_3 2021 + 2021$

$\Rightarrow 1 \leq 2y + 9^y \leq \log_3 2021 + 2021 < 2028$

Nếu $y < 0 \Rightarrow 2y + 9^y < 9^y < 9^0 = 1 \Rightarrow y \geq 0$

Khi đó $y \in \mathbb{N} \Rightarrow (2y + 9^y) \in \mathbb{N} \Rightarrow 2y + 9^y \leq 2027 \Rightarrow 9^y \leq 2027 - 2y \leq 2027$

$\Rightarrow y \leq \log_9 2027 \approx 3,465 \Rightarrow y \leq 3 \Rightarrow 0 \leq y \leq 3$

$\Rightarrow y \in \{0; 1; 2; 3\}$. Do $f(x)$ là hàm số luôn đồng biến nên với mỗi giá trị của y chỉ cho 1 giá trị của x .

+) $y = 0 \Rightarrow \log_3(x+1) + x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$

+) $y = 1 \Rightarrow \log_3(x+1) + x + 1 = 11 \Leftrightarrow \log_3(x+1) + x = 10 \Leftrightarrow x = 8$

+) $y = 2 \Rightarrow \log_3(x+1) + x + 1 = 85 \Leftrightarrow \log_3(x+1) + x = 84 \Leftrightarrow x = 80$

+) $y = 3 \Rightarrow \log_3(x+1) + x + 1 = 735 \Leftrightarrow \log_3(x+1) + x = 734 \Leftrightarrow x = 729$

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x; y)$.

Câu 56. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $1 \leq x \leq 2020$ và $2^y + y = 2x + \log_2(x + 2^{y-1})$

A. 2021.

B. 10.

C. 2020.

D. 11.

Lời giải

Chọn D

Theo đề bài, $2^y + y = 2x + \log_2(x + 2^{y-1})$

$$\Leftrightarrow 2^y + \log_2(2^y) = 2x + \log_2\left(x + \frac{2^y}{2}\right) \Leftrightarrow 2^y + 2^y + \log_2(2^y) = 2x + 2^y + \log_2\left(\frac{2x + 2^y}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot (2^y) + \log_2(2^y) = 2 \cdot \left(\frac{2x + 2^y}{2}\right) + \log_2\left(\frac{2x + 2^y}{2}\right) \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = 2t + \log_2 t, t > 0$.

Vì $f'(t) = 2 + \frac{1}{t \ln 2} > 0 \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

$$\text{nên } (1) \Leftrightarrow f(2^y) = f\left(\frac{2x + 2^y}{2}\right) \Leftrightarrow 2^y = \frac{2x + 2^y}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot 2^y = 2x + 2^y \Leftrightarrow 2x = 2^y \Leftrightarrow x = 2^{y-1}.$$

Do $1 \leq x \leq 2020$ nên $0 \leq y - 1 \leq \log_2 2020 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 11,98$.

Do $y \in \mathbb{N}^*$ nên $y \in \{1; 2; 3; \dots; 11\}$, với mỗi giá trị y cho ta 1 giá trị x thỏa đề.

Vậy có 11 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 57. Cho phương trình $\log_3(3x^2 - 6x + 6) = 3^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1$. Hỏi có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ và $0 < x < 2020; y \in \mathbb{N}$ thỏa mãn phương trình đã cho?

A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

$$\log_3(3x^2 - 6x + 6) = 3^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1 \Leftrightarrow \log_3 3(x^2 - 2x + 2) = 3^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1.$$

$$\Leftrightarrow 1 + \log_3(x^2 - 2x + 2) = 3^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1.$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x^2 - 2x + 2) + (x^2 - 2x + 2) = 3^{y^2} + y^2 \quad (1).$$

Đặt $\log_3(x^2 - 2x + 2) = z \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 3^z$ thì (1) trở thành:

$$\Leftrightarrow 3^z + z = 3^{y^2} + y^2 \quad (2).$$

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t \Rightarrow f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(2) \Leftrightarrow f(z) = f(y^2) \Leftrightarrow z = y^2.$$

Thay trở lại cách đặt ta có: $\log_3(x^2 - 2x + 2) = y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 3^{y^2}$.

Xét hàm số: $g(x) = x^2 - 2x + 2, x \in (0; 2020) \Rightarrow g'(x) = 2x - 2$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên:

x	0	1	2020
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$	2	1	4076362

Suy ra:

$$\Leftrightarrow 1 \leq g(x) < 4076362 \Leftrightarrow 1 \leq 3^{y^2} < 4076362 \Leftrightarrow 0 \leq y^2 < \log_3 4076362.$$

$$\text{Do } y \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq y < \sqrt{\log_3 4076362} \approx 3,7 \Rightarrow y \in \{0; 1; 2; 3\} \Rightarrow \begin{cases} g(x) = 1 \\ g(x) = 3 \\ g(x) = 3^4 \\ g(x) = 3^9 \end{cases}.$$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ ta thấy mỗi phương trình trên có một nghiệm $0 < x < 2020$.

Vậy có 4 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 58. Có bao nhiêu cặp số nguyên (x, y) với $1 \leq x \leq 2020$ thỏa mãn $x(2^y + y - 1) = 2 - \log_2 x^x$?

A. 4.

B. 9.

C. 10.

D. 11.

Lời giải

Ta có $x(2^y + y - 1) = 2 - \log_2 x^x \Leftrightarrow x \log_2 x + x(2^y + y - 1) = 2$. Đặt $t = \log_2 x \Leftrightarrow x = 2^t$. Khi đó

$$2^t \cdot t + 2^t (2^y + y - 1) = 2 \Leftrightarrow t + 2^y + y - 1 = 2^{1-t} \Leftrightarrow 2^y + y = 2^{1-t} + (1-t)$$

$$\Leftrightarrow y = 1 - t \Leftrightarrow t = 1 - \log_2 x \Leftrightarrow \log_2 x = 1 - y \Leftrightarrow x = 2^{1-y}$$

$$\text{Vì } 1 \leq x \leq 2020 \Leftrightarrow 1 \leq 2^{1-y} \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq 1 - y \leq \log_2 2020 \Leftrightarrow 1 - \log_2 2020 \leq y \leq 1$$

Khi đó $y \in \{-9; \dots; 1\}, x = 2^{1-y} \Rightarrow 11.1 = 11$ cặp số nguyên thỏa mãn

- Câu 59.** Có bao nhiêu số nguyên y sao cho bất phương trình $5^{-\log_3 y} + 9x > \left(\frac{1}{125}\right)^x + \log_3 y^3$ nghiệm đúng với mọi $x \geq 3$?
- A. 19683. B. 243. C. 242. D. 19682.

Lời giải

Điều kiện: $y > 0$.

$$5^{-\log_3 y} + 9x > \left(\frac{1}{125}\right)^x + \log_3 y^3 \Leftrightarrow 5^{-\log_3 y} + 9x > 5^{-3x} + 3\log_3 y \Leftrightarrow 5^{-\log_3 y} - 3\log_3 y > 5^{-3x} - 3.3x$$

Xét hàm số $f(t) = 5^{-t} - 3t$.

Ta có $f'(t) = -5^{-t} \ln 5 - 3 < 0, \forall t \geq 9$ nên hàm số $y = f(t)$ nghịch biến.

Từ giả thiết: $f(\log_3 y) > f(3x) \Leftrightarrow \log_3 y < 3x \Leftrightarrow 0 < y < 27^x$ (*)

Bất phương trình (*) nghiệm đúng với mọi $x \geq 3$ khi $0 < y < 27^3 = 19683$.

Vì y nguyên nên $y \in \{1; 2; 3; \dots; 19682\}$.

Vậy có 19682 số nguyên y thỏa mãn đề bài.

- Câu 60.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $\log_2(2x - 2002) + x = y + 1002 + 2^y$ và $1002 \leq x \leq 2021$?
- A. 10. B. 11. C. 12. D. 18.

Lời giải

Phương trình trở thành

$$\log_2(x - 1001) + (x - 1001) = y + 2^y$$

$$\text{Hàm số } f(t) = \log_2 t + t \Rightarrow f(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0 \forall t \in (0; +\infty)$$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Vậy $x - 1001 = 2^y$

$$\Rightarrow 1002 \leq 2^y + 1001 \leq 2021 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \log_2 1020.$$

Do mỗi y cho ta một x và y nguyên nên $y \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}$

Vậy có 10 cặp $(x; y)$ thỏa mãn.

- Câu 61.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $2[x + \ln(x+1)] + x^2 + 1 = y + e^y$?
- A. 0. B. 7. C. 1. D. 8.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 2[x + \ln(x+1)] + x^2 + 1 = y + e^y \Leftrightarrow \ln(x+1)^2 + (x+1)^2 = \ln e^y + e^y \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \ln t + t$ trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{1}{t} + 1 > 0 \text{ với mọi } t \in (0; +\infty).$$

Suy ra hàm số $f(t) = \ln t + t$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow (x+1)^2 = e^y \Leftrightarrow y = \ln(x+1)^2.$$

Vì x nguyên nên e^y nguyên mà e^y nguyên khi và chỉ khi $y = 0$.

Thử lại ta thấy $y = 0$ thì $x = 0$.

Vậy có duy nhất một cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Câu 62.** Xét cặp số nguyên dương $(x_0; y_0)$ thỏa $\log_7(7x+7) - 3y = 343^y - x$ và $0 < x \leq 2020$. Giá trị $x_0 - 42y_0$ bằng
- A. 300. B. 0. C. 400. D. 2020.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_7(7x+7) - 3y = 343^y - x \Leftrightarrow 1 + \log_7(x+1) - 3y = 7^{3y} - x$

$$\Leftrightarrow (x+1) + \log_7(x+1) = 7^{3y} + 3y.$$

Xét hàm số $f(t) = t + \log_7 t, t \in (1; 2021]$.

$$f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 7} > 0, \forall t \in (1; 2021] \Rightarrow \text{hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên khoảng } (1; 2021).$$

$$\text{Mà } f(x+1) = f(7^{3y}), \text{ Suy ra } x+1 = 7^{3y} \Leftrightarrow y = \frac{\log_7(x+1)}{3}.$$

$$0 < x \leq 2020 \Leftrightarrow 1 < x+1 \leq 2021 \Rightarrow 0 < \log_7(x+1) \leq \log_7 2021 \approx 3.9$$

$$\text{Mà } y \in \mathbb{Z} \text{ suy ra } \log_7(x+1) \in \mathbb{Z} \text{ và phải chia hết cho 3} \Rightarrow \log_7(x+1) = 3 \Leftrightarrow x = 342 \Rightarrow y = 1$$

$$\text{Vậy } x_0 - 42y_0 = 300.$$

- Câu 63.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $x > -15$ thỏa mãn
- $$\left[9\log_3(3^x + 3) - 3^{2 \cdot 3^x} \cdot 3^x - 9 \cdot 3^x - 9x + 45 \right] \left[\log_4(2-x) - 1 \right] \geq 0.$$

- A. 12. B. 13. C. 15. D. 14.

Lời giải

Điều kiện: $x < 2$.

$$\text{Đặt } g(x) = \left[9\log_3(3^x + 3) - 3^{2 \cdot 3^x} \cdot 3^x - 9 \cdot 3^x - 9x + 45 \right] \left[\log_4(2-x) - 1 \right].$$

$$\bullet \text{ Xét } \log_4(2-x) - 1 = 0 \Rightarrow x = -2 (\text{N}).$$

$$\bullet \text{ Xét } 9\log_3(3^x + 3) - 3^{2 \cdot 3^x} \cdot 3^x - 9 \cdot 3^x - 9x + 45 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9\log_3(3^x + 3) = 3^{2 \cdot 3^x} \cdot 3^x + 9 \cdot 3^x + 9x - 45$$

$$\Leftrightarrow \log_3(3^x + 3) = 3^{2 \cdot 3^x} \cdot 3^x \cdot 3^{-2} + 3^x + x - 5$$

$$\Leftrightarrow \log_3(3^x + 3) + 3^x + 3 = 3^{2 \cdot 3^x + x - 2} + 2 \cdot 3^x + x - 2$$

$$\Leftrightarrow 3^{\log_3(3^x + 3)} + \log_3(3^x + 3) = 3^{2 \cdot 3^x + x - 2} + 2 \cdot 3^x + x - 2.$$

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t \Rightarrow f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0 \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến.

$$\Rightarrow f[\log_3(3^x + 3)] = f(2 \cdot 3^x + x - 2)$$

$$\Leftrightarrow \log_3(3^x + 3) = 2 \cdot 3^x + x - 2$$

$$\Leftrightarrow \log_3(3^x + 3) + 3^x + 3 = 3 \cdot 3^x + x + 1 = 3^{x+1} + x + 1$$

$$\Leftrightarrow 3^{\log_3(3^x + 3)} + \log_3(3^x + 3) = 3^{x+1} + x + 1$$

Xét hàm số $f(u) = 3^u + u \Rightarrow f'(u) = 3^u \ln 3 + 1 > 0 \Rightarrow$ Hàm số $f(u)$ đồng biến.

$$\Rightarrow f\left[\log_3(3^x + 3)\right] = f(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \log_3(3^x + 3) = x+1$$

$$\Leftrightarrow 3^x + 3 = 3^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 3^x = 3$$

$$\Rightarrow x = \log_3\left(\frac{3}{2}\right) \in \mathbb{N}$$

Ta có bảng xét dấu $g(x)$:

x	-15	-2	$\log_3 \frac{3}{2}$		2		
g(x)		+	0	-	0	+	

$\Rightarrow x \in \{-14, -13, -12, \dots, -2, 1\}$. Vậy có 14 giá trị nguyên x thỏa mãn.

- Câu 64.** Số nghiệm của phương trình $e^{\frac{x^2}{2} + x - 2020} = \ln(x^2 - 2) + \frac{x^2}{2} - x + 2018$ là
- A. 4. B. 2. C. 0. D. 3.

Lời giải

Chọn A

♦ Điều kiện của phương trình: $\begin{cases} x > \sqrt{2} \\ x < -\sqrt{2} \end{cases}$.

♦ Ta có: $e^{\frac{x^2}{2} + x - 2020} = \ln(x^2 - 2) + \frac{x^2}{2} - x + 2018 \Leftrightarrow$

$$e^{\frac{x^2}{2} + x - 2020} + \left(\frac{x^2}{2} + x - 2020\right) = \ln(x^2 - 2) + (x^2 - 2)$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{x^2}{2} + x - 2020} + \left(\frac{x^2}{2} + x - 2020\right) = e^{\ln(x^2 - 2)} + \ln(x^2 - 2) \quad (1).$$

♦ Xét hàm số $f(t) = e^t + t, t \in \mathbb{R}$.

$$f'(t) = e^t + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

$$(1) \Leftrightarrow f\left(\frac{x^2}{2} + x - 2020\right) = f(\ln(x^2 - 2)) \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + x - 2020 = \ln(x^2 - 2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + x - 2020 - \ln(x^2 - 2) = 0 \quad (2).$$

♦ Xét hàm số $g(x) = \frac{x^2}{2} + x - \ln(x^2 - 2) - 2020$.

$$g'(x) = x + 1 - \frac{2x}{x^2 - 2} = \frac{x^3 + x^2 - 4x - 2}{x^2 - 2}.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \approx -2,34 \\ x_2 \approx -0,47 \\ x_3 \approx 1,81 \end{cases}$$

♦ Bảng biến thiên của $g(x)$:

x	$-\infty$	x_1	$-\sqrt{2}$	x_2	$\sqrt{2}$	x_3	$+\infty$	
$g'(x)$	-	0	+			-	0	+
$g(x)$	$+\infty$		$+\infty$			$+\infty$		$+\infty$

Ta có: $g(x_1) \approx -2020,85 < 0$, $g(x_3) \approx -2016,8 < 0$ nên (2) có 4 nghiệm phân biệt thuộc $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

♦ Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Câu 65. Cho hai số dương x, y thỏa mãn $\log_2(4x + y + 2xy + 2)^{y+2} = 8 - (2x - 2)(y + 2)$. Giá trị nhỏ nhất của $P = 2x + y$ là số có dạng $M = a\sqrt{b} + c$ với $a, b \in \mathbb{N}$, $a > 2$. Khi đó $S = a + b + c$ bằng

A. $S = 17$.

B. $S = 7$.

C. $S = 19$.

D. $S = 3$.

Lời giải

Chọn D

Với hai số dương x, y thỏa mãn $\log_2(4x + y + 2xy + 2)^{y+2} = 8 - (2x - 2)(y + 2)$.

$$(y + 2)\log_2(4x + y + 2xy + 2) = 8 - (2x - 2)(y + 2)$$

$$\Leftrightarrow (y + 2)\log_2(2x + 1)(y + 2) = 8 - (2x + 1)(y + 2) + 3(y + 2)$$

$$\text{Ta có } \Leftrightarrow \log_2(2x + 1) + \log_2(y + 2) = \frac{8}{y + 2} - (2x + 1) + 3$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x + 1) + (2x + 1) = \log_2\left(\frac{8}{y + 2}\right) + \frac{8}{y + 2} \quad (1)$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = \log_2 t + t$ trên $(0; +\infty)$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ (2).

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } f(2x + 1) = f\left(\frac{8}{y + 2}\right) \Rightarrow 2x + 1 = \frac{8}{y + 2} \Leftrightarrow y = \frac{8}{2x + 1} - 2.$$

$$P = 2x + y = 2x + \frac{8}{2x + 1} - 2 = (2x + 1) + \left(\frac{8}{2x + 1}\right) - 3 \stackrel{AM-GM}{\geq} 4\sqrt{2} - 3.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } 2x + 1 = \frac{8}{2x + 1} \Leftrightarrow (2x + 1)^2 = 8 \Leftrightarrow x = \frac{-1 + 2\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $S = a + b + c = 3$.

Câu 66. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_3(3x + 3) + x = 2y + 9^y$?

A. 2019.

B. 6.

C. 2020.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

ĐK: $x > -1$.

$$\text{Ta có } \log_3(3x + 3) + x = 2y + 9^y$$

$$\Leftrightarrow 3\log_3(3x + 3) + 3^{\log_3(3x + 3)} = 3(2y + 1) + 3^{2y + 1} (*)$$

Xét hàm số $f(t) = 3t + 3^t$ trên $\mathbb{R}$, vì $f'(t) = 3 + 3^t \ln 3 > 0, \forall t > 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Từ đó } (*) \Leftrightarrow f(\log_3(3x+3)) = f(2y+1) \Leftrightarrow \log_3(3x+3) = 2y+1.$$

$$\text{Mặt khác } 0 \leq x \leq 2020 \Leftrightarrow \log_3(3x+3) \in [1; \log_3(6063)] \Rightarrow 2y+1 \in [1; \log_3(6063)]$$

$$\begin{cases} 1 \leq 2y+1 \leq \log_3(6063) \\ y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 3. \text{ Vậy có 4 cặp } (x; y) \text{ thỏa mãn.}$$

Câu 67. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq y \leq 2020$ và $\log_3\left(\frac{2^x-1}{y}\right) = y+1-2^x$?

A. 2019.

B. 11.

C. 2020.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Từ giả thiết ta có: } \begin{cases} y \neq 0 \\ \frac{2^x-1}{y} > 0 \Leftrightarrow 2^x > 1 \Leftrightarrow x > 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: PT } \Leftrightarrow \log_3(2^x-1) + 2^x - 1 = \log_3 y + y (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ trên $(0; +\infty)$.

Khi đó $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0$ do đó hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

$$(*) \text{ có dạng } f(2^x-1) = f(y) \Leftrightarrow y = 2^x - 1$$

$$\text{Vì } 0 \leq y \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq 2^x - 1 \leq 2020 \Leftrightarrow 1 \leq 2^x \leq 2021 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \log_2(2021)$$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \log_2(2021) \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}. \text{ Vậy có 11 cặp } (x; y) \text{ thỏa mãn.}$$

Câu 68. Số nghiệm thực của phương trình $6^x = 3\log_6(5x+1) + 2x+1$ là

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện: } x > -\frac{1}{5}.$$

$$\text{PT: } \Leftrightarrow 6^x + 3x = 3\log_6(5x+1) + 5x+1 \Leftrightarrow 6^x + 3x = 6^{\log_6(5x+1)} + 3\log_6(5x+1)(1).$$

Xét hàm số $f(t) = 6^t + 3t$, vì $f'(t) = 6^t \ln 6 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow f(x) = f(\log_6(5x+1)) \Leftrightarrow x = \log_6(5x+1) \Leftrightarrow \log_6(5x+1) - x = 0$$

Xét hàm số $h(x) = \log_6(5x+1) - x$ trên $\left(-\frac{1}{5}; +\infty\right)$, ta có

$$h'(x) = \frac{5}{(5x+1)\ln 6} - 1$$

$$h''(x) = -\frac{25}{(5x+1)^2 \ln 6} < 0, \forall x > -\frac{1}{5} \text{ và } \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{5}\right)^+} h'(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} h'(x) = -1$$

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{1}{5}$	x_0	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	$-\infty$	$h(x_0)$	-1

Từ BBT suy ra phương trình $h(x) = 0$ có nhiều nhất 2 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{1}{5}; +\infty\right)$

Mà $h(0) = 0, h(1) = 0$.

Vậy phương trình đã cho có đúng hai nghiệm $x = 0, x = 1$.

Câu 69. Cho $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_2(2x+2) + x - 3y = 8^y$. Có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa mãn các điều kiện trên?

A. 2019.

B. 2018.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Do $0 \leq x \leq 2020$ nên $\log_2(2x+2)$ luôn có nghĩa.

Ta có $\log_2(2x+2) + x - 3y = 8^y$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1) + x + 1 = 3y - 2^{3y} \Leftrightarrow \log_2(x+1) + 2^{\log_2(x+1)} = 3y + 2^{3y} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t + 2^t$.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ và $f'(t) = 1 + 2^t \ln 2 \Rightarrow f'(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó $(1) \Leftrightarrow \log_2(x+1) = 3y \Leftrightarrow x+1 = 2^{3y}$

$$\Leftrightarrow y = \log_8(x+1).$$

Ta có $0 \leq x \leq 2020$ nên $1 \leq x+1 \leq 2021$ suy ra $0 \leq \log_8(x+1) \leq \log_8 2021$.

Lại có $\log_8 2021 \approx 3,66$ nên nếu $y \in \mathbb{Z}$ thì $y \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Vậy có 4 cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa yêu cầu bài toán là các cặp $(0; 0), (7; 1), (63; 2), (511; 3)$.

Câu 70. Tính tổng S tất cả các nghiệm của phương trình $\ln\left(\frac{5^x + 3^x}{6x+2}\right) + 5^{x+1} + 5 \cdot 3^x - 30x - 10 = 0$.

A. $S = 1$.

B. $S = 2$.

C. $S = -1$.

D. $S = 3$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x > -\frac{1}{3}$.

Phương trình tương đương

$$\ln(5^x + 3^x) - \ln(6x+2) + 5(5^x + 3^x) - 5(6x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(5^x + 3^x) + 5(5^x + 3^x) = \ln(6x+2) + 5(6x+2) \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = \ln t + 5t, t > 0$. Có $f(t) = \frac{1}{t} + 5 > 0, \forall t > 0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Từ (1) suy ra $f(5^x + 3^x) = f(6x + 2) \Leftrightarrow 5^x + 3^x = 6x + 2 \Leftrightarrow 5^x + 3^x - 6x - 2 = 0$

Xét $g(x) = 5^x + 3^x - 6x - 2, g'(x) = 5^x \ln 5 + 3^x \ln 3 - 6$

$g''(x) = 5^x (\ln 5)^2 + 3^x (\ln 3)^2 > 0, \forall x > -\frac{1}{3}$.

Nên $g'(x) = 0$ có không quá 1 nghiệm suy ra $g(x) = 0$ có không quá 2 nghiệm trên $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$. Mà $g(0) = g(1) = 0$. Vậy phương trình có tập nghiệm là $\{0, 1\}$. Do đó $S = 1$.

Câu 71. Số nghiệm của phương trình $\ln \frac{\sqrt{x^2 + 80}}{3^x} = 2 \cdot 3^{x+1} - 2\sqrt{x^2 + 80} + \ln 3$ là

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

PT $\Leftrightarrow \ln \sqrt{x^2 + 80} + 2\sqrt{x^2 + 80} = \ln 3^{x+1} + 2 \cdot 3^{x+1}$ (1)

Xét hàm số $f(t) = \ln t + 2t, \forall t > 0$; Ta có: $f'(t) = \frac{1}{t} + 2 > 0, \forall t > 0 \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Từ (1) suy ra $f(\sqrt{x^2 + 80}) = f(3^{x+1}) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 80} = 3^{x+1} \Leftrightarrow x^2 + 80 = 9^{x+1} \Leftrightarrow 9^{x+1} - x^2 - 80 = 0$

Xét hàm số $g(x) = 9^{x+1} - x^2 - 80$ trên $\mathbb{R}$. Ta có:

$g'(x) = 2 \cdot 9^{x+1} \ln 3 - 2x$

$g''(x) = 4 \cdot 9^{x+1} (\ln 3)^2 - 2$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = -\log_9(2 \ln^2 3) - 1 \Rightarrow g'(x_0) = g'(-\log_9(2 \ln^2 3) - 1) \approx 3,7 > 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = +\infty$

Bảng biến thiên:

x	6	$-\log_9(2 \ln^2 3) - 1$	$+\infty$
$g''(x)$	-	0	+
$g'(x)$	$+\infty$	$g'(x_0)$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $g'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ phương trình $g(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm.

Mà $g(1) = 0$

Do đó phương trình đã cho có duy nhất 1 nghiệm.

Câu 72. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $1 \leq x \leq 2020$ và $2^y + y = 2x + \log_2(x + 2^{y-1})$

A. 2021.

B. 10.

C. 2020.

D. 11.

Lời giải

Chọn DTheo đề bài, $2^y + y = 2x + \log_2(x + 2^{y-1})$

$$\Leftrightarrow 2^y + \log_2(2^y) = 2x + \log_2\left(x + \frac{2^y}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2^y + 2^y + \log_2(2^y) = 2x + 2^y + \log_2\left(\frac{2x + 2^y}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot (2^y) + \log_2(2^y) = 2 \cdot \left(\frac{2x + 2^y}{2}\right) + \log_2\left(\frac{2x + 2^y}{2}\right) \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = 2t + \log_2 t, t > 0$.Vì $f'(t) = 2 + \frac{1}{t \ln 2} > 0 \quad \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

$$\text{nên } (1) \Leftrightarrow f(2^y) = f\left(\frac{2x + 2^y}{2}\right) \Leftrightarrow 2^y = \frac{2x + 2^y}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot 2^y = 2x + 2^y \Leftrightarrow 2x = 2^y \Leftrightarrow x = 2^{y-1}.$$

Do $1 \leq x \leq 2020$ nên $0 \leq y-1 \leq \log_2 2020 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 11,98$.Do $y \in \mathbb{N}^*$ nên $y \in \{1; 2; 3; \dots; 11\}$, với mỗi giá trị y cho ta 1 giá trị x thỏa đề.Vậy có 11 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 73. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ và $0 \leq x \leq 2020$ thỏa mãn

$$\log_2 \left(\frac{2x+6}{x-1} \right) + \frac{8}{x-1} = y - 2 + 2^y ?$$

A. 2018.

B. 2.

C. 2020.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện của x : $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$. Nên ta chỉ kiểm tra $2 \leq x \leq 2020$

$$\text{Ta có: } \log_2 \left(\frac{2x+6}{x-1} \right) + \frac{8}{x-1} = y - 2 + 2^y \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{2x+6}{x-1} \right) + 2 + \frac{8}{x-1} = y + 2^y$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{2x+6}{x-1} \right) + \frac{2x+6}{x-1} = y + 2^y \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{2x+6}{x-1} \right) + 2^{\log_2 \left(\frac{2x+6}{x-1} \right)} = y + 2^y \quad (1)$$

$$\text{Đặt } f(t) = 2^t + t.$$

Ta có: $f'(t) = 1 + 2^t \ln 2 > 0 \forall t \Rightarrow f(t)$ luôn đồng biến.

$$\text{Do đó: } (1) \Rightarrow f(y) = f \left(\log_2 \left(\frac{2x+6}{x-1} \right) \right) \Rightarrow y = \log_2 \left(\frac{2x+6}{x-1} \right) \Rightarrow \frac{2x+6}{x-1} = 2^y$$

$$\text{Đặt } u = \frac{2x+6}{x-1} \Rightarrow u' = \frac{-8}{(x-1)^2} < 0 \forall x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$$

$$\text{Do } 2 \leq x \leq 2020 \text{ và } u = \frac{2x+6}{x-1} \text{ luôn nghịch biến trên } [2; 2020] \text{ nên } u \in \left[\frac{4046}{2019}; 10 \right]$$

$$\text{Mà: } u = 2^y \text{ và } y \in \mathbb{Z} \text{ nên } u \in \{4; 8\}$$

$$\text{*Với } u = 4 \Rightarrow \begin{cases} 4 = 2^y \Leftrightarrow y = 2 \\ \frac{2x+6}{x-1} = 4 \Leftrightarrow 2x+6 = 4x-4 \Leftrightarrow x = 5 \end{cases}$$

$$\text{*Với } u = 8 \Rightarrow \begin{cases} 8 = 2^y \Leftrightarrow y = 3 \\ \frac{2x+6}{x-1} = 8 \Leftrightarrow 2x+6 = 8x-8 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy, phương trình có một cặp nghiệm thỏa bài toán: $(5; 2)$.

Câu 74. Có tất cả bao nhiêu cặp số (a, b) với a, b là các số nguyên dương thỏa mãn

$$\log_3(a+b) + (a+b)^3 = 3(a^2+b^2) + 3ab(a+b-1) + 1?$$

A. 2

B. 3

C. 1

D. Vô số

Lời giải

Chọn A

Với a, b là các số nguyên dương, ta có

$$\log_3(a+b) + (a+b)^3 = 3(a^2+b^2) + 3ab(a+b-1) + 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{a^3+b^3}{a^2+b^2-ab} + a^3+b^3+3ab(a+b) = 3(a^2+b^2-ab) + 3ab(a+b) + 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3(a^3+b^3) + a^3+b^3 = \log_3[3(a^2+b^2-ab)] + 3(a^2+b^2-ab)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ trên $(0; +\infty)$

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0 \text{ nên hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên } (0; +\infty)$$

Khi đó, phương trình (1) trở thành

$$f(a^3 + b^3) = f[3(a^2 + b^2 - ab)]$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 = 3(a^2 + b^2 - ab)$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 - ab)(a + b - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow [a^2 + b^2 - ab = 0(*)]$$

$$a + b - 3 = 0$$

Do $a, b \in \mathbb{N}^*$ nên phương trình (*) vô nghiệm. Suy ra $a + b = 3$ Mà a, b là các số nguyên

$$\text{dương nên } \begin{cases} 0 < a < 3 \\ 0 < b < 3 \\ a + b = 3 \\ a, b \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ b = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Vậy có hai cặp số (a, b) thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 75. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (x, y) thỏa $1 < x \leq 100$ và $\log_2(y + \sqrt{x+y}) \cdot \log_x 2 = 2$?

A. 99.

B. 98.

C. 10.

D. 90.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \log_2(y + \sqrt{x+y}) \cdot \log_x 2 = 2 \Leftrightarrow \log_2(y + \sqrt{x+y}) = \frac{2}{\log_x 2}$$

$$\Leftrightarrow \log_2(y + \sqrt{x+y}) = 2 \log_2 x \Leftrightarrow \log_2(y + \sqrt{x+y}) = \log_2 x^2$$

$$\Leftrightarrow y + \sqrt{x+y} = x^2 \Leftrightarrow (x+y) + \sqrt{x+y} = x^2 + x \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t, \forall t > 1$. Ta có $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t > 1$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(1, +\infty)$.

$$\text{Khi đó, } (1) \Leftrightarrow f(\sqrt{x+y}) = f(x) \Leftrightarrow \sqrt{x+y} = x \Leftrightarrow x+y = x^2 \Leftrightarrow y = x^2 - x.$$

Để thấy ứng với mỗi số nguyên dương $1 < x \leq 100$ ta có 1 số nguyên dương y thỏa $y = x^2 - x$.

Vậy có tổng cộng $100 - 2 + 1 = 99$ cặp số nguyên dương (x, y) thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 76. Tìm số nghiệm x thuộc $[0; 100]$ của phương trình sau

$$2^{\cos \pi x - 1} + \frac{1}{2} = \cos \pi x + \log_4(3 \cos \pi x - 1).$$

A. 51.

B. 49.

C. 50.

D. 52.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } 2^{\cos \pi x - 1} + \frac{1}{2} = \cos \pi x + \log_4(3 \cos \pi x - 1); \text{ĐK: } \cos \pi x > \frac{1}{3}.$$

$$\Leftrightarrow 2^{\cos \pi x} + 1 = 2 \cos \pi x + \log_2(3 \cos \pi x - 1).$$

$$\Leftrightarrow 2^{\cos \pi x} + \cos \pi x = 3 \cos \pi x - 1 + \log_2(3 \cos \pi x - 1)$$

$$\Leftrightarrow 2^{\cos \pi x} + \log_2(2^{\cos \pi x}) = 3 \cos \pi x - 1 + \log_2(3 \cos \pi x - 1), (1)$$

Xét hàm số: $f(t) = t + \log_2 t; t > 0$.

$f'(t) = 1 + \frac{1}{t \cdot \ln 2} > 0, \forall t > 0$. Nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Phương trình (1) $\Leftrightarrow f(2^{\cos \pi x}) = f(3 \cos \pi x - 1)$.

$$\Leftrightarrow 2^{\cos \pi x} = 3 \cos \pi x - 1$$

Đặt $a = \cos \pi x; a \in \left(\frac{1}{3}; 1\right]$. Phương trình trở thành: $2^a - 3a + 1 = 0, (2)$. Xét

$$g(a) = 2^a - 3a + 1; a \in \left(\frac{1}{3}; 1\right]$$

$g'(a) = 2^a \cdot \ln 2 - 3 < 0, \forall a \in \left(\frac{1}{3}; 1\right]$. Vậy hàm số $g(a)$ nghịch biến trên $\left(\frac{1}{3}; 1\right]$.

Do đó nếu phương trình (2) có nghiệm thì có nhiều nhất một nghiệm, ta thấy $g(1) = 0$, Suy ra phương trình

có nghiệm duy nhất: $a = 1 \Rightarrow \cos \pi x = 1 \Leftrightarrow \pi x = k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

$$\Leftrightarrow x = 2k, \text{ mà } x \in [0; 100]. \text{ Suy ra } x = 0; 2; 4; \dots; 100.$$

Vậy có tất cả 51 giá trị x thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 77. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $2(x + \ln(x+1)) + x^2 + 1 = y + e^y$?

A. 0.

B. 7.

C. 1.

D. 8.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2(x + \ln(x+1)) + x^2 + 1 = y + e^y \Leftrightarrow 2\ln(x+1) + e^{2\ln(x+1)} = y + e^y$ (1).

Xét hàm số: $f(t) = t + e^t$, ta có: $f'(t) = 1 + e^t > 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó: (1) $\Leftrightarrow f(2\ln(x+1)) = f(y) \Leftrightarrow y = 2\ln(x+1)$.

+ Do $0 \leq x \leq 2020$ nên $1 \leq x+1 \leq 2021 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 2\ln 2021 \approx 15, 22$.

Do $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{0; 1; 2; \dots; 14; 15\}$.

$$\text{Có } y = 2\ln(x+1) \Leftrightarrow x = e^{\frac{y}{2}} - 1.$$

Với $y \in \{0; 1; 2; \dots; 14; 15\}$ thì chỉ có $y = 0$ thì $x \in \mathbb{Z}$.

Vậy có duy nhất 1 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 78. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $1 \leq x \leq 10^6$ và $\log(10x^2 - 20x + 20) = 10^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1$?

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $10x^2 - 20x + 20 > 0$, đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $\log(10x^2 - 20x + 20) = 10^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + \log[10(x^2 - 2x + 2)] = 10^{y^2} + y^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + \log 10 + \log(x^2 - 2x + 2) = 10^{y^2} + y^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 2) + \log(x^2 - 2x + 2) = 10^{y^2} + y^2$$

$$\Leftrightarrow 10^{\log(x^2-2x+2)} + \log(x^2-2x+2) = 10^{y^2} + y^2 \quad (*).$$

Xét hàm $f(t) = 10^t + t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 10^t \ln 10 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow f[\log(x^2-2x+2)] = f(y^2) \Leftrightarrow \log(x^2-2x+2) = y^2 \Leftrightarrow x^2-2x+2 = 10^{y^2} \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 = 10^{y^2}.$$

$$\text{Vì } 1 \leq x \leq 10^6 \text{ nên } 1 \leq (x-1)^2 + 1 = 10^{y^2} \leq (10^6 - 1)^2 + 1 \Rightarrow 0 \leq y^2 \leq \log[(10^6 - 1)^2 + 1].$$

Vì $y \in \mathbb{Z}^+$ nên $y \in \{1; 2; 3\}$.

$$+ \text{ Với } y=1 \Rightarrow x^2-2x+2=10 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \text{ (ktm)} \\ x=4 \text{ (tm)} \end{cases}.$$

+ Với $y=2 \Rightarrow x^2-2x+2=10^4 \Leftrightarrow x^2-2x-9998=0$ (không có giá trị x nguyên nào thỏa mãn).

+ Với $y=3 \Rightarrow x^2-2x+2=10^9 \Leftrightarrow x^2-2x-999999998=0$ (không có giá trị x nguyên nào thỏa mãn).

Vậy có một cặp nguyên dương $(x; y) = (4; 1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 79. Cho phương trình $2\log_3 \frac{6x}{\sqrt{2x+1}-1} + 2(\sqrt{2x+1}-|y|) - 3^{2|y|} + 2x = 0$. Với các cặp số $(x; y)$

thỏa mãn phương trình trên, giá trị nhỏ nhất của $T = \frac{1}{3}\sqrt{2x+1}(2x+4) + 2x + \frac{7}{3} - 2 \cdot 3^{2|y|}$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-4; -2)$.

B. $(-11; -9, 5)$.

C. $(-6; -4)$.

D. $(-9, 5; -8)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x > 0$.

$$\text{Ta có } 2\log_3 \frac{6x}{\sqrt{2x+1}-1} + 2(\sqrt{2x+1}-|y|) - 3^{2|y|} + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(3(\sqrt{2x+1}+1)) + 2\sqrt{2x+1} - 2|y| - 3^{2|y|} + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2\log_3(\sqrt{2x+1}+1) + 2\sqrt{2x+1} - 2|y| - 3^{2|y|} + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(\sqrt{2x+1}+1)^2 + 2x + 2 + 2\sqrt{2x+1} = 2|y| + 3^{2|y|}$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(\sqrt{2x+1}+1)^2 + (\sqrt{2x+1}+1)^2 = \log_3 3^{2|y|} + 3^{2|y|} \quad (1)$$

$$\text{Xét hàm số } y = f(t) = \log_3 t + t \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0.$$

Suy ra hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Từ (1)} \Leftrightarrow f((\sqrt{2x+1}+1)^2) = f(3^{2|y|}) \Leftrightarrow (\sqrt{2x+1}+1)^2 = 3^{2|y|}.$$

$$\text{Do đó } T = \frac{1}{3}\sqrt{2x+1}(2x+4) + 2x + \frac{7}{3} - 2 \cdot 3^{2|y|} = \frac{1}{3}\sqrt{2x+1}(2x+4) + 2x + \frac{7}{3} - 2 \cdot (\sqrt{2x+1}+1)^2.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2x+1} > 1 \Rightarrow 2x = t^2 - 1.$$

$$\text{Suy ra } T = \frac{1}{3}t(t^2 - 1 + 4) + t^2 - 1 + \frac{7}{3} - 2(t+1)^2 = \frac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t - \frac{2}{3}.$$

$$\text{Có } T' = t^2 - 2t - 3 \Rightarrow T' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

t	-1	1	3	$+\infty$
T'	0	$-$	0	$+$
T		$-\frac{13}{3}$	$-\frac{29}{3}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min T = -\frac{29}{3} \approx -9,67 \in (-11; -9,5)$.

Câu 80. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $2^{\ln(\frac{x+y}{2})} \cdot 5^{\ln(x+y)} = 2^{\ln 5}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (x+1)\ln x + (y+1)\ln y$ với $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ và $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$ là m , khi đó m thuộc khoảng nào sau đây

A. $m \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

B. $m \in (0; 1)$.

C. $m \in (1; 2)$.

D. $m \in (2; 4)$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 2^{\ln(\frac{x+y}{2})} \cdot 5^{\ln(x+y)} &= 2^{\ln 5} \Leftrightarrow 2^{\ln(x+y) - \ln 2} \cdot 5^{\ln(x+y)} = 2^{\ln 5} \Leftrightarrow 2^{\ln(x+y)} \cdot 5^{\ln(x+y)} = 2^{\ln 5} \cdot 2^{\ln 2} \\ &\Leftrightarrow 10^{\ln(x+y)} = 2^{\ln 10} \Leftrightarrow \ln(x+y) = \log(2^{\ln 10}) \Leftrightarrow \ln(x+y) = \ln 10 \cdot \log 2 \Leftrightarrow e^{\ln(x+y)} = e^{\ln 10 \cdot \log 2} \\ &\Leftrightarrow x+y = 10^{\log 2} \Leftrightarrow x+y = 2. \end{aligned}$$

Do

đó

$$P = (x+1)\ln x + (y+1)\ln y = (x+1)\ln x + (3-x)\ln(2-x).$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = (x+1)\ln x + (3-x)\ln(2-x)$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = \ln x + \frac{x+1}{x} - \ln(2-x) - \frac{3-x}{2-x} = \ln \frac{x}{2-x} + \frac{2-2x}{x(2-x)}.$$

$$\text{Lại có: } f''(x) = \frac{2}{(2-x)^2} \cdot \frac{2-x}{x} - \frac{2x^2 - 4x + 4}{(2x - x^2)^2} = \frac{-4(x-1)^2}{(2x - x^2)^2} < 0, \forall x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$$

$$\text{Do đó } f'(x) = 0 \text{ có nhiều nhất một nghiệm trên } \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right].$$

Mà $x=1$ là một nghiệm của pt $f'(x) = 0$ nên phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất là $x=1$. Từ đó ta có bảng biến thiên như sau:

x	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			0	
	$f\left(\frac{1}{2}\right)$			$f\left(\frac{3}{2}\right)$

Dựa vào BBT, ta suy ra $\min_{x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]} P = \min_{x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \ln \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \ln \frac{3}{2} \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Câu 81. Có bao nhiêu số nguyên dương b sao cho ứng với mỗi b , có đúng 3 giá trị nguyên dương của a thỏa mãn $\log_2 \frac{2^a + a}{ab} + 2^a \leq a(b-1)$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

* Ta có $\log_2 \frac{2^a + a}{ab} + 2^a \leq a(b-1) \Leftrightarrow \log_2 (2^a + a) + (2^a + a) \leq \log_2 (ab) + ab$ (1)

* Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên khoảng $(0; +\infty)$, vì $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$

nên $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Do đó (1) $\Leftrightarrow 2^a + a \leq ab \Leftrightarrow \frac{2^a}{a} + 1 \leq b$.

* Xét hàm số $g(a) = \frac{2^a}{a} + 1$ trên khoảng $(0; +\infty)$, ta thấy

$$g'(a) = \frac{2^a \cdot \ln 2 \cdot a - 2^a}{a^2}; g'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{\ln 2}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(a)$:

a	0	$\frac{1}{\ln 2}$	$+\infty$	
$g'(a)$		-	0	+
$g(a)$	$+\infty$		$g\left(\frac{1}{\ln 2}\right)$	$+\infty$

Mặt khác: $g\left(\frac{1}{\ln 2}\right) \approx 2,9; g(1) = 3; g(2) = 3; g(3) = \frac{11}{3} \approx 3,7; g(4) = 5$.

Do đó chỉ khi $b = 4$ thì có đúng 3 giá trị nguyên dương của a thỏa mãn bất phương trình đã cho. Vậy có đúng một số nguyên b thỏa mãn.

Câu 82. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi số nguyên x có đúng 5 số nguyên y thỏa mãn $3^{y^2 - |x-2y|} \leq \log_{y^2+3}(|x-2y|+3)$?

A. 13.

B. 11.

C. 12.

D. 10.

Lời giải

Chọn D

$$+ \text{Ta có: } 3^{y^2-|x-2y|} \leq \log_{y^2+3}(|x-2y|+3) \Leftrightarrow \frac{3^{y^2+3}}{3^{|x-2y|+3}} \leq \frac{\ln(|x-2y|+3)}{\ln(y^2+3)}$$

$$\Leftrightarrow 3^{y^2+3} \cdot \ln(y^2+3) \leq 3^{|x-2y|+3} \cdot \ln(|x-2y|+3)$$

+ Xét hàm số $f(t) = 3^t \cdot \ln t$ (với $t \geq 3$) có

$$f'(t) = 3^t \cdot \ln 3 \cdot \ln t + \frac{3^t}{t} > 0 \text{ nên hàm số đồng biến trên } (3; +\infty).$$

+ Do đó: $3^{y^2-|x-2y|} \leq \log_{y^2+3}(|x-2y|+3) \Leftrightarrow y^2+3 \leq |x-2y|+3 \Leftrightarrow y^2 \leq |x-2y|$ (*)

TH1: $x \geq 2y$ thì (*) $\Leftrightarrow x \geq y^2 + 2y$. Xét hàm số $g(y) = y^2 + 2y$ có bảng biến thiên

y	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	$+\infty$
$g(y)$	$+\infty$			-1			$+\infty$

Để có 5 giá trị nguyên của y thỏa mãn bài toán thì điều kiện là $g(1) \leq x < g(2) \Leftrightarrow 3 \leq x < 8$.

TH2: $x < 2y$ thì (*) $\Leftrightarrow x \leq -y^2 + 2y$. Xét hàm số $h(y) = -y^2 + 2y$ có bảng biến thiên

y	$-\infty$	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$h(y)$	$-\infty$			1			$-\infty$

Để có 5 giá trị nguyên của y thỏa mãn bài toán thì điều kiện là $h(4) < x \leq h(3) \Leftrightarrow -8 < x \leq -3$.

Vậy có 10 giá trị nguyên của x thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Câu 83. Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi y , có đúng bốn số nguyên dương x

$$\text{thỏa mãn } \ln \frac{2^x + 3x}{xy} + 2^x + x(3-y) \leq 0?$$

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Với $\forall x, y \in (0; +\infty)$ ta có

$$\ln \frac{2^x + 3x}{xy} + 2^x + x(3-y) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(2^x + 3x) - \ln(xy) + 2^x + 3x - xy \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(2^x + 3x) + 2^x + 3x \leq \ln(xy) + xy (*)$$

Xét hàm $f(t) = \ln t + t$ với $t \in (0; +\infty)$.

$$f'(t) = \frac{1}{t} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty). \text{ Suy ra } f(t) \text{ là hàm đồng biến trên } (0; +\infty).$$

$$(*) \Leftrightarrow f(2^x + 3x) \leq f(xy) \Leftrightarrow 2^x + 3x \leq xy \Leftrightarrow y \geq \frac{2^x + 3x}{x} \Leftrightarrow y \geq \frac{2^x}{x} + 3.$$

Xét hàm $g(x) = \frac{2^x}{x} + 3$ với $x \in (0; +\infty)$.

$$g'(x) = \frac{2^x(x \ln 2 - 1)}{x^2}; \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln 2}.$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{1}{\ln 2}$	4	5	$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	+
$g(x)$	$+\infty$				$+\infty$

Diagram showing the function's behavior: A vertical line at $x=0$ goes to $+\infty$. The function decreases to a minimum at $x = \frac{1}{\ln 2}$, then increases through $x=4$ and $x=5$ towards $+\infty$. Arrows indicate the path from the minimum point to 7 and then to $\frac{47}{5}$.

Yêu cầu bài toán thỏa mãn $\Leftrightarrow 7 \leq y < \frac{47}{5}$.

Mà y nguyên dương nên $y \in \{7; 8; 9\}$.

DẠNG 6: PHƯƠNG PHÁP HÀM ĐẶC TRƯNG GIẢI PT, BPT CÓ TỔ HỢP MŨ - LÔGARIT CHỨA THAM SỐ

Câu 84. Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-20; 20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 19

B. 9

C. 21

D. 20

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > m$

$$\text{Đặt: } t = \log_5(x - m) \Rightarrow \begin{cases} x - m = 5^t \\ 5^x + m = t \end{cases} \Rightarrow 5^x + x = 5^t + t \quad (1).$$

Xét hàm số $f(u) = 5^u + u \Rightarrow f'(u) = 5^u \ln 5 + 1 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$.

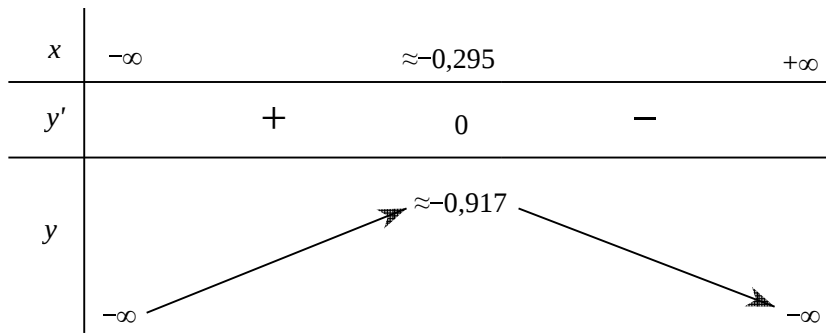
Do đó: $(1) \Leftrightarrow x = t \Leftrightarrow x = 5^x + m \Leftrightarrow m = x - 5^x$.

Xét hàm số $f(x) = x - 5^x, x > m$

Do: $5^x > 0 \Rightarrow m < x$, suy ra phương trình có nghiệm luôn thỏa điều kiện.

$$f'(x) = 1 - 5^x \ln 5, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 5^x \ln 5 = 0 \Leftrightarrow x = \log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right).$$

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow m \leq \approx -0,917 \xrightarrow{m \in (-20; 20)} m = \{-19; -18; \dots; -1\}$.

Vậy có 19 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

Câu 85. Cho phương trình $3^x + m = \log_3(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-15; 15)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 15

B. 16

C. 9

D. 14

Lời giải

Chọn D

Ta có: $3^x + m = \log_3(x - m) \Leftrightarrow 3^x + x = \log_3(x - m) + x - m \quad (*)$.

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t$, với $t \in \mathbb{R}$. Có $f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên tập xác định. Mặt khác phương trình $(*)$ có dạng: $f(x) = f(\log_3(x - m))$. Do đó ta có $f(x) = f(\log_3(x - m)) \Leftrightarrow x = \log_3(x - m) \Leftrightarrow 3^x = x - m \Leftrightarrow 3^x - x = -m$

Xét hàm số $g(x) = 3^x - x$, với $x \in \mathbb{R}$. Có $g'(x) = 3^x \ln 3 - 1$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right)$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right)$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$g\left(\log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right)\right)$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy các giá trị của tham số để phương trình có nghiệm là:

$m \in \left(-\infty; -g\left(\log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right)\right)\right]$. Vậy số giá trị nguyên của $m \in (-15; 15)$ để phương trình đã cho có nghiệm là: 14.

Câu 86. Cho phương trình $7^x + m = \log_7(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-25; 25)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 9

B. 25

C. 24

D. 26

Lời giải

Chọn C

ĐK: $x > m$

Đặt $t = \log_7(x - m)$ ta có $\begin{cases} 7^x + m = t \\ 7^t + m = x \end{cases} \Rightarrow 7^x + x = 7^t + t \quad (1)$

Do hàm số $f(u) = 7^u + u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên ta có $(1) \Leftrightarrow t = x$. Khi đó:

$$7^x + m = x \Leftrightarrow m = x - 7^x.$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = x - 7^x \Rightarrow g'(x) = 1 - 7^x \ln 7 = 0 \Leftrightarrow x = -\log_7(\ln 7).$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\log_7(\ln 7)$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	$g(-\log_7(\ln 7))$	$-\infty$

Từ đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \leq g(-\log_7(\ln 7)) \approx -0,856$ (các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện vì $x - m = 7^x > 0$)

Do m nguyên thuộc khoảng $(-25; 25)$, nên $m \in \{-24; -16; \dots; -1\}$.

Câu 87. Cho phương trình $\log_2(2x - m) = 4^x + m$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-27; 27)$ sao cho phương trình trên có nghiệm?

A. 10.

B. 26.

C. 1.

D. 53.

Lời giải

Chọn B

♦ Điều kiện: $2x - m > 0$.

♦ Ta có $\log_2(2x - m) = 4^x + m$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x - m) + 2x - m = 4^x + 2x \Leftrightarrow 2^{\log_2(2x - m)} + \log_2(2x - m) = 2^{2x} + 2x \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t, t \in \mathbb{R}$.

Có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ (1) ta được $f(\log_2(2x - m)) = f(2x) \Leftrightarrow \log_2(2x - m) = 2x$

$$\Leftrightarrow 4^x = 2x - m \Leftrightarrow 4^x - 2x = -m \quad (2).$$

Xét hàm $g(x) = 4^x - 2x$.

Ta có $g'(x) = 4^x \ln 4 - 2 = 4^x \cdot 2 \ln 2 - 2$.

$$\text{Có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = \log_4 \frac{1}{\ln 2}.$$

Bảng biến thiên của hàm $g(x)$ như sau

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$g(x_0)$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình (2) có nghiệm

$$\Leftrightarrow -m \geq g(x_0) \Leftrightarrow m \leq -g(x_0) = -g\left(\log_4 \frac{1}{\ln 2}\right) \approx -0,914.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in (-27; 27)$ nên ta được $m \in \{-26; -25; \dots; -1\}$.

Vậy có 26 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 88. Cho phương trình $5^x + m + \log_{\frac{1}{5}}(x-m) = 0$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-20; 20)$ để phương trình đã cho có nghiệm thực?

A. 20.

B. 21.

C. 18.

D. 19.

Lời giải

Ta có: $5^x + m + \log_{\frac{1}{5}}(x-m) = 0 \Leftrightarrow 5^x = \log_5(x-m) - m = 0 \quad (1).$

ĐKXD: $x > m$.

Đặt $t = \log_5(x-m)$, ta có $x-m = 5^t$.

Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} x-m=5^t \\ t-m=5^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-m=5^t \quad (*) \\ 5^x+x=5^t+t \quad (2) \end{cases}$.

Xét hàm số $f(u) = 5^u + u$, $u \in \mathbb{R}$.

+ $f'(u) = 5^u \ln 5 + 1 > 0, \forall u$ suy ra hàm số $f(u) = 5^u + u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(2) \Leftrightarrow f(x) = f(t) \Leftrightarrow x = t$.

Thay vào phương trình $(*)$ ta có $m = x - 5^x \quad (3)$.

Ta có $x-m = 5^x > 0$, do đó phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (3) có nghiệm $x \in \mathbb{R}$.

Xét hàm số $g(x) = x - 5^x$, $x \in \mathbb{R}$, có $g'(x) = 1 - 5^x \ln 5$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right)$.

+ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 5^x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 5^x) = -\infty$.

BBT

x	$-\infty$	$\log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right)$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	$\log_5\left(\frac{1}{e \ln 5}\right)$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \leq \log_5\left(\frac{1}{e \ln 5}\right) \approx -0,91$.

Vì $m \in (-20; 20)$ và là số nguyên, suy ra $m \in \{-20; -19; \dots; -1\}$

Vậy có 19 giá trị của m .

Câu 89. Cho phương trình $2^x + m = \log_2(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-18; 18)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 9

B. 19

C. 17

D. 18

Lời giải**Chọn C**

ĐK: $x > m$

Đặt $t = \log_2(x-m)$ ta có $\begin{cases} 2^x + m = t \\ 2^t + m = x \end{cases} \Rightarrow 2^x + x = 2^t + t \quad (1)$

Do hàm số $f(u) = 2^u + u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên ta có $(1) \Leftrightarrow t = x$. Khi đó:

$$2^x + m = x \Leftrightarrow m = x - 2^x.$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = x - 2^x \Rightarrow g'(x) = 1 - 2^x \ln 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\log_2(\ln 2).$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\log_2(\ln 2)$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	$g(-\log_2(\ln 2))$	$-\infty$

Từ đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \leq g(-\log_2(\ln 2)) \approx -0,914$ (các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện vì $x - m = 2^x > 0$)

Do m nguyên thuộc khoảng $(-18; 18)$, nên $m \in \{-17; -16; \dots; -1\}$.

Câu 90. Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x - m)$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên trong khoảng $(-20; 20)$ để phương trình trên có nghiệm?

A. 15.

B. 19.

C. 14.

D. 17.

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình $5^x + m = \log_5(x - m)$ (1) với điều kiện $x - m > 0$.

Đặt $\log_5(x - m) = t \Leftrightarrow x - m = 5^t$ (*) thay vào phương trình (1) ta có $5^x + m = t$

$\Leftrightarrow t - m = 5^x$ (**). Từ (*) và (**) ta có hệ phương trình $\begin{cases} x - m = 5^t \\ t - m = 5^x \end{cases}$. Từ hệ phương trình ta

suy ra $x - t = 5^t - 5^x \Leftrightarrow x + 5^x = t + 5^t$.

Xét hàm số $f(x) = x + 5^x$ trên $\mathbb{R}$, ta có $f'(x) = 1 + 5^x \ln 5 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số

$f(x) = x + 5^x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó ta có $x + 5^x = t + 5^t \Leftrightarrow f(x) = f(t) \Leftrightarrow x = t$ thay vào phương trình (**) ta có $x - m = 5^x \Leftrightarrow x - 5^x = m$. Đặt $g(x) = x - 5^x$ ta có

$g'(x) = 1 - 5^x \ln 5$. Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 5^x \ln 5 = 0 \Leftrightarrow 5^x = \frac{1}{\ln 5} \Leftrightarrow x = \log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right)$.

Ta có BBT với $g\left(\log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right)\right) = \log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right) - \frac{1}{\ln 5} = \alpha$.

x	$-\infty$	$\log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right)$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	α	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình $x - 5^x = m$ có nghiệm khi $m \leq \alpha$ hay $m \leq \log_5 \left(\frac{1}{\ln 5} \right) - \frac{1}{\ln 5}$. Ta suy ra có 19 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 91. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2020; 2020)$ để phương trình $e^x = \ln(x + 2m) + 2m$ có nghiệm?

A. 2019.

B. 2020.

C. 2021.

D. 4039.

Lời giải

Chọn A

Ta có $e^x = \ln(x + 2m) + 2m \Leftrightarrow e^x + x = \ln(x + 2m) + x + 2m \Leftrightarrow e^x + x = e^{\ln(x + 2m)} + \ln(x + 2m)$ (*).

Xét hàm số $f(t) = e^t + t$ với $t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t) = e^t + 1 > 0, \forall t$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó (*) $\Leftrightarrow f(x) = f(\ln(x + 2m)) \Leftrightarrow x = \ln(x + 2m) \Leftrightarrow x + 2m = e^x \Leftrightarrow 2m = e^x - x$.

Xét hàm số $g(x) = e^x - x \Rightarrow g'(x) = e^x - 1 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	0
$g(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $2m \geq 1 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$.

Mà $m \in \mathbb{Z}, m \in (-2020; 2020)$ nên $m \in \{1; 2; 3; \dots; 2019\}$.

Vậy có 2019 giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2020; 2020)$ để phương trình $e^x = \ln(x + 2m) + 2m$ có nghiệm.

Câu 92. Cho phương trình $\ln(x + m) - e^x + m = 0$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-2021; 2021]$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 2022.

B. 4042.

C. 2019.

D. 2021.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x + m > 0$.

Đặt $t = \ln(x + m) \Leftrightarrow x + m = e^t$, ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x + m = e^t \\ t + m = e^x \end{cases}$$

Suy ra $x - t = e^t - e^x \Leftrightarrow e^x + x = e^t + t$ (*).

Xét hàm số $f(x) = e^x + x$, có $f'(x) = e^x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Ta thấy (*) có dạng $f(x) = f(t) \Leftrightarrow x = t$.

Khi đó ta có phương trình $x + m = e^x \Leftrightarrow m = e^x - x$

Xét hàm số $g(x) = e^x - x$, có $g'(x) = e^x - 1; g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình đã cho có nghiệm khi $m \geq 1$.

Mà $\begin{cases} m \in [-2021; 2021] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$ nên ta có $m \in \{1; 2; \dots; 2020; 2021\}$. Tức là có 2021 số nguyên m thỏa mãn đề bài.

Câu 93. Có bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $e^x - 1 = m \ln(mx + 1)$ có hai nghiệm phân biệt trên đoạn $[-10; 10]$?

A. 2201.

B. 2020.

C. 2021.

D. 2202.

Lời giải

Chọn A

♦ Điều kiện $mx + 1 > 0$.

♦ Ta có $e^x - 1 = m \ln(mx + 1)$

$$\Leftrightarrow e^x + mx = mx + 1 + m \ln(mx + 1)$$

$$\Leftrightarrow e^x + mx = e^{\ln(mx+1)} + m \ln(mx + 1) \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = e^t + mt, t \in \mathbb{R}$.

Có $f'(t) = e^t + m > 0, \forall t \in \mathbb{R}, m > 0$. Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ (1) ta được $f(x) = f(\ln(mx + 1)) \Leftrightarrow x = \ln(mx + 1) \Leftrightarrow e^x = mx + 1 \quad (2)$.

♦ Ta thấy (2) luôn có một nghiệm $x = 0 \in [-10; 10]$. Do đó ta cần tìm các giá trị của m để (2) có đúng một nghiệm $x \neq 0, x \in [-10; 10]$.

$$\text{Với } x \neq 0 \text{ thì } (2) \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{x} = m.$$

$$\text{Xét hàm } g(x) = \frac{e^x - 1}{x}, x \in [-10; 10] \setminus \{0\}.$$

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}.$$

$$\text{Đặt } h(x) = xe^x - e^x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Có } h'(x) = xe^x, h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\text{Ta thấy } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 1, h(0) = 0.$$

Bảng biến thiên của hàm $h(x)$ như sau

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$H(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	1	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $h(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g(x) > 0, \forall x \neq 0$.

♦ Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 1$.

Bảng biến thiên của hàm $y = g(x)$ với $x \in [-10; 10] \setminus \{0\}$ như sau

x	-10	0	10
y'	$+$		$+$
y	$\frac{1-e^{-10}}{10}$	1	$\frac{e^{10}-1}{10}$

Từ bảng biến thiên suy ra (2) có đúng một nghiệm $x \neq 0, x \in [-10; 10]$

$$\Leftrightarrow m \in \left[\frac{1-e^{-10}}{10}, \frac{e^{10}-1}{10} \right] \setminus \{1\}.$$

♦ Do m nguyên dương nên $m \in \{2, 3, 4, \dots, 2202\}$. Vậy có 2201 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 94. Có bao nhiêu số nguyên dương m nhỏ hơn 20 thỏa mãn phương trình $\log(mx + \log m^m) = 10^x$ có đúng hai nghiệm thực x phân biệt.

A. 13.

B. 12.

C. 10.

D. 11.

Lời giải

Chọn A

♦ Điều kiện: $\begin{cases} m^m > 0 \\ mx + \log m^m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ x + \log m > 0 \end{cases}$.

Đặt $t = 10^x > 0 \Rightarrow x = \log t$.

Ta có:

$$\log(mx + \log m^m) = 10^x \Leftrightarrow \log(m \log t + m \log m) = t \Leftrightarrow m \log t + m \log m = 10^t$$

$$\Leftrightarrow \log t + \log m = \frac{10^t}{m} \Leftrightarrow \log t + \log m = \frac{10^t}{10^{\log m}} \Leftrightarrow \log t + \log m = 10^{t-\log m}$$

$$\Leftrightarrow 10^{\log t} + \log t = 10^{t-\log m} + t - \log m \quad (*).$$

♦ Xét hàm số $f(t) = 10^{\log t} + t$ với $t > 0$.

Ta có: $f'(t) = 10^t \ln 10 + 1 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số $f(t) = 10^{\log t} + t$ đồng biến với $t > 0$.

Vậy $(*) \Leftrightarrow \log t = t - \log m$ hay $x = 10^x - \log m \Leftrightarrow \log m = 10^x - x$.

♦ Xét hàm số $g(x) = 10^x - x$.

Ta có: $g'(x) = 10^x \ln 10 - 1$.

Khi đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 10^x \ln 10 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\log(\ln 10)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\log(\ln 10)$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$g(-\log(\ln 10))$	$+\infty$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $\Leftrightarrow \log m > g(-\log(\ln 10)) \Leftrightarrow m > 10^{g(-\log(\ln 10))} \approx 6,3$.

Do $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m < 20 \end{cases} \Rightarrow m \in \{7; 8; 9; \dots; 19\}$. Suy ra có 13 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 95. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2021; 2021)$ để phương trình $10^x = \log(x+3m) + 3m$ có nghiệm?

A. 2021.

B. 2020.

C. 2010.

D. 4040.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $10^x = \log(x+3m) + 3m$

$$\Leftrightarrow 10^x + x = \log(x+3m) + x + 3m$$

$$\Leftrightarrow 10^x + x = \log(x+3m) + 10^{\log(x+3m)} \quad (1)$$

Xét hàm số: $f(t) = 10^t + t; \forall t \in \mathbb{R}$.

$f'(t) = 10^t \ln 10 + 1 > 0; \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình (1) $\Leftrightarrow x = \log(x+3m) \Leftrightarrow x+3m = 10^x \Leftrightarrow 10^x - x = 3m$ (2).

Đặt $g(x) = 10^x - x \Rightarrow g'(x) = 10^x \ln 10 - 1; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log\left(\frac{1}{\ln 10}\right)$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\log\left(\frac{1}{\ln 10}\right)$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$\frac{1}{\ln 10} - \log\left(\frac{1}{\ln 10}\right) \approx 0,8$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy: để phương trình (2) có nghiệm thì:

$$3m \geq \frac{1}{\ln 10} - \log\left(\frac{1}{\ln 10}\right) \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\ln 10} - \log\left(\frac{1}{\ln 10}\right) \right) \approx 0,3.$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \cap (-2021; 2021)$ nên $m \in \{1; 2; 3; \dots; 2020\}$.

Vậy có 2020 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu đề.

Câu 96. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-20; 20)$ để phương trình:

$$3\log_2\left(\frac{8x-2^x-12m}{3}\right) - 2^x - x = 3m \text{ có đúng hai nghiệm thực phân biệt.}$$

A. 19.

B. 18.

C. 20.

D. 21.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$3\log_2\left(\frac{8x-2^x-12m}{3}\right) - 2^x - x = 3m \Leftrightarrow 3\log_2\left(\frac{8x-2^x-12m}{3}\right) = \frac{2^x + x + 3m}{3} = y \text{ (đặt)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8x - 2^x - 12m = 3 \cdot 2^y & (1) \\ x + 2^x + 3m = 3y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8x - 2^x - 12m = 3 \cdot 2^y \\ 4x + 4 \cdot 2^x + 12m = 12y \end{cases}$$

$$\Rightarrow 12x + 3 \cdot 2^x = 3 \cdot 2^y + 12y$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(y),$$

Với $f(t) = 12t + 3 \cdot 2^t$ là hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow x = y$

Khi đó:

$$(1) \Rightarrow 8x - 2^x - 12m = 3 \cdot 2^x$$

$$\Leftrightarrow 8x - 4 \cdot 2^x = 12m$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2 \cdot 2^x = 3m$$

$$f(x) = 2x - 2 \cdot 2^x$$

$$\text{Xét hàm số: } \Rightarrow f(x) = 2 - 2^x \cdot \ln 2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_2\left(\frac{2}{\ln 2}\right)$$

Khi đó lập BBT và được:

$$\begin{cases} m < 0,17 \\ m \in \mathbb{Z} \\ m \in (-20; 20) \end{cases} \Rightarrow m \in \{-19; -18; \dots; 0\}$$

Câu 97. Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn phương trình sau

$$2021^{x^3 - a^{3\log(x+1)}} (x^3 + 2020) = a^{3\log(x+1)} + 2020$$

A. 9.

B. 5.

C. 8.

D. 12.

Lời giải

Chọn AĐK: $x \geq -1$.

Phương trình

$$2021^{x^3 - a^{3\log(x+1)}} (x^3 + 2020) = a^{3\log(x+1)} + 2020$$

$$\Leftrightarrow 2021^{x^3} (x^3 + 2020) = 2021^{a^{3\log(x+1)}} [a^{3\log(x+1)} + 2020] \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = 2021^t (t + 2020), t > -1$.

$$f'(t) = (t + 2020) 2021^t \ln 2021 + 2021^t > 0, \forall t > -1.$$

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(-1; +\infty)$, nên từ $(1) \Rightarrow x^3 = a^{3\log(x+1)}$. (*)

TH1: $-1 < x \leq 0$ không tồn tại a thỏa mãn (*).

TH2: $x > 0$ (*) $\Leftrightarrow \log_a x = \log(x+1) \Leftrightarrow \log a = \frac{\log x}{\log(x+1)} < 1 \Leftrightarrow a < 10$

Vì a nguyên dương $\Rightarrow a \in \{1; 2; 3; \dots; 9\}$.

Câu 98. Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2^{x^2+4x+5-m^2} = \log_{x^2+4x+6}(m^2+1)$ có đúng 1 nghiệm là

A. -2.

B. 1.

C. 4.

D. 0.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = x^2 + 4x + 5$, khi đó $t \geq 1$.

Thế vào phương trình đã cho ta được phương trình sau

$$2^t \ln(t+1) = 2^{m^2} \ln(m^2+1) \Leftrightarrow t = m^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 5 = m^2$$

(Do hàm đặc trưng $f(u) = 2^u \ln(u+1)$ có

$$f'(u) = \frac{2^u}{u+1} + 2^u \ln(u+1) \cdot \ln 2 \geq 0, \forall u \geq 0 \Rightarrow f(u) \text{ đồng biến trên } [0; +\infty))$$

Vậy $2^{x^2+4x+5-m^2} = \log_{x^2+4x+6}(m^2+1)$ có đúng 1 nghiệm

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 5 - m^2 = 0 \text{ có đúng 1 nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \pm 1 \Rightarrow \text{Tổng tất cả các giá trị } m \text{ bằng } 0.$$

Câu 99. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tồn tại cặp số (x, y) thỏa mãn $e^{2x+3y} - e^{y+1} = 1 - 2x - 2y$ đồng thời thỏa mãn $\log_3^2(5x+2y-1) - (m+2)\log_3 x + m^2 + 1 \leq 0$?

A. 1.

B. 0.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } e^{2x+3y} - e^{y+1} = 1 - 2x - 2y \Leftrightarrow e^{2x+3y} + 2x + 3y = e^{y+1} + y + 1 (*).$$

Xét hàm số $f(t) = e^t + t$ trên $\mathbb{R}$.

$$f'(t) = e^t + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

$$\text{Từ đó } (*) \Leftrightarrow f(2x+3y) = f(y+1) \Leftrightarrow 2x+3y = y+1 \Leftrightarrow 2y = 1-2x.$$

Thay vào bất phương trình $\log_3^2(5x+2y-1) - (m+2)\log_3 x + m^2 + 1 \leq 0$ ta được:

$$\log_3^2(3x) - (m+2)\log_3 x + m^2 + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x - m\log_3 x + m^2 + 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\log_3 x - \frac{m}{2}\right)^2 + \frac{3m^2}{4} + 2 \leq 0 \text{ (Vô lý)}.$$

Vậy không có giá trị nào của tham số m để tồn tại cặp (x, y) thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 100. Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3^{x^2-2x+1-2|x-m|} = \log_{x^2-2x+3}(2|x-m|+2)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là:

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Phương trình tương đương } 3^{x^2-2x+3-(2|x-m|+2)} = \frac{\ln(2|x-m|+2)}{\ln(x^2-2x+3)}$$

$$\Leftrightarrow 3^{x^2-2x+3} \cdot \ln(x^2-2x+3) = 3^{2|x-m|+2} \cdot \ln(2|x-m|+2) \quad (*)$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = 3^t \cdot \ln t, t \geq 2$ là hàm số đồng biến nên từ phương trình (*) suy ra

$$\Leftrightarrow x^2-2x+3 = 2|x-m|+2 \Leftrightarrow g(x) = x^2-2x-2|x-m|+1 = 0.$$

$$\text{Có } g(x) = \begin{cases} x^2-4x+2m+1 & \text{khi } x \geq m \\ x^2-2m+1 & \text{khi } x \leq m \end{cases} \Rightarrow g'(x) = \begin{cases} 2x-4 & \text{khi } x \geq m \\ 2x & \text{khi } x \leq m \end{cases}$$

$$\text{và } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 & \text{khi } x \geq m \\ x = 0 & \text{khi } x \leq m \end{cases}$$

Xét các trường hợp sau:

TH1: $m \leq 0$ ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	m	0	2	$+\infty$
$g'(x)$		-	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$				$+\infty$

Phương trình chỉ có tối đa 2 nghiệm nên không có m thỏa mãn.

TH2: $m \geq 2$ tương tự.

TH3: $0 < m < 2$, bảng biến thiên $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	m	2	$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$				$+\infty$

$$\text{Phương trình có 3 nghiệm khi } \begin{cases} (m-1)^2 = 0 \\ -2m+1 = 0 > 2m-3 \\ -2m+1 < 0 = 2m-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{1}{2} \\ m = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Cả 3 giá trị trên đều thỏa mãn, nên tổng của chúng bằng 3.

Câu 101. Có bao nhiêu số nguyên dương a để phương trình sau đây có ít nhất một nghiệm thực.

$$(a^{\log x} + 1)^{\log a} + a^{\log x} = 2x - 2$$

A. 8

B. 1

C. 0

D. 9

Lời giải

Điều kiện $x > 0$.

$$\text{Vì } a^{\log x} = x^{\log a} \text{ nên đặt } x^{\log a} + 1 = t \text{ ta có } \begin{cases} x^{\log a} + 1 = t \\ t^{\log a} + t = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow x^{\log a} + 2x = t^{\log a} + 2t.$$

Vì $a \geq 1 \Rightarrow \log a \geq 0 \Rightarrow f(x) = x^{\log a} + 2x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Vì vậy $f(x) = f(t) \Rightarrow x = t$.

Hay $x^{\log a} = x - 1$.

Nếu $a = 1$ thay lại vào phương trình ta có $x^0 = x - 1 \Leftrightarrow x = 2$. Vậy $a = 1$ thỏa mãn.

Nếu $a > 1 \Rightarrow x = t = x^{\log a} + 1 > 2$. Vậy $\log a = \frac{\ln(x-1)}{\ln x} < \frac{\ln x}{\ln x} = 1$.

Do vậy $a \in (0; 10)$. Mà a nguyên dương và lớn hơn 1 nên $a \in \{2, 3, 4, \dots, 9\}$

Vậy có 9 giá trị của a thỏa mãn điều kiện đầu bài.

- Câu 102.** Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3^{x^2+2x+1-2|x-m|} = \log_{x^2+2x+3}(2|x-m|+2)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là
- A. 3. B. -2. C. -3. D. 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$3^{x^2+2x+1-2|x-m|} = \log_{x^2+2x+3}(2|x-m|+2) \Leftrightarrow \frac{3^{x^2+2x+3}}{3^{2|x-m|+2}} = \frac{\ln(2|x-m|+2)}{\ln(x^2+2x+3)}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2+2x+3) \cdot 3^{x^2+2x+3} = \ln(2|x-m|+2) \cdot 3^{2|x-m|+2}$$

$$\text{Xét } f(t) = \ln(t) \cdot 3^t, t \geq 2; f'(t) = \frac{1}{t} 3^t + \ln(t) 3^t \ln(3) > 0, \forall t \geq 2$$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến.

$$f(x^2+2x+3) = f(2|x-m|+2) \Leftrightarrow x^2+2x+3 = 2|x-m|+2$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1 = 2|x-m| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -1-2m(1) \\ x^2+4x = -1+2m(2) \end{cases}$$

Điều kiện cần để phương trình có 3 nghiệm là:

$$\text{Th1: (1) có nghiệm kép} \Rightarrow m = \frac{-1}{2} \text{ thử lại ta thấy thỏa mãn}$$

$$\text{Th2: (2) có nghiệm kép} \Rightarrow m = \frac{-3}{2} \text{ thử lại ta thấy thỏa mãn}$$

$$\text{Th3: (1) và (2) có nghiệm chung} \Rightarrow x = m. \text{ Thế (1) vào ta có } m = -1$$

$$\text{Ta có } \frac{-1}{2} + \frac{-3}{2} + (-1) = -3$$

Bình luận: Bài toán là sự giao thoa giữa phương pháp sử dụng tính đơn điệu hàm số với biện luận nghiệm.

- Câu 103.** Tìm các giá trị m để phương trình $3^{\sin x + \sqrt{5} \cos x - |m|+5} = \log_{\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10}(|m|+5)$ có nghiệm.
- A. $\sqrt{6} \leq m \leq \sqrt{6}$. B. $-5 \leq m \leq 5$. C. $5 - \sqrt{6} \leq m \leq 5 + \sqrt{6}$. D. $-\sqrt{6} \leq m \leq 5$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$\begin{aligned}
3^{\sin x + \sqrt{5}\cos x - |m| + 5} &= \log_{\sin x + \sqrt{5}\cos x + 10}(|m| + 5) \\
\Leftrightarrow \frac{3^{\sin x + \sqrt{5}\cos x + 10}}{3^{|m| + 5}} &= \frac{\ln(|m| + 5)}{\ln(\sin x + \sqrt{5}\cos x + 10)} \\
\Leftrightarrow 3^{\sin x + \sqrt{5}\cos x + 10} \cdot \ln(\sin x + \sqrt{5}\cos x + 10) &= 3^{|m| + 5} \cdot \ln(|m| + 5)
\end{aligned}$$

Xét $f(t) = \ln(t) \cdot 3^t, t \geq 5; f'(t) = \frac{1}{t}3^t + \ln(t)3^t \ln(3) > 0, \forall t \geq 5$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến.

$$f(\sin x + \sqrt{5}\cos x + 10) = f(|m| + 5) \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{5}\cos x + 10 = |m| + 5$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \sqrt{5}\cos x + 5 = |m|$$

$$\text{Mà } -\sqrt{6} \leq \sin x + \sqrt{5}\cos x \leq \sqrt{6}$$

$$\text{Vậy để phương trình có nghiệm ta phải có } 5 - \sqrt{6} \leq m \leq 5 + \sqrt{6}$$

Câu 104. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-100; 100)$ để phương trình $e^x - m = \ln(x + m)$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 100.

B. 99.

C. 98.

D. 97.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } e^x - m = \ln(x + m) \quad (1)$$

$$\text{Đặt : } t = \ln(x + m) \Leftrightarrow x + m = e^t \Leftrightarrow m = e^t - x \quad (*)$$

$$(1) \Leftrightarrow e^x - (e^t - x) = t \Leftrightarrow e^x + x = e^t + t \quad (2)$$

$$\text{Xét hàm số } f(u) = e^u + u.$$

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f'(u) = e^u + 1 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y = f(u) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R} \quad (3)$$

$$(2) \Leftrightarrow f(x) = f(t) \quad (4)$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow x = t$. Thay vào (*) ta được:

$$e^x - x = m$$

$$\text{Xét hàm số: } g(x) = e^x - x, D = \mathbb{R}$$

$$g'(x) = e^x - 1, g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$- \quad 0 \quad +$	
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

Yêu cầu bài toán được thỏa khi và chỉ khi đường thẳng $\Delta: y = m$ cắt đồ thị $(C): y = e^x - x$ tại 2 điểm phân biệt. Dựa vào BBT $\Rightarrow m > 1$.

Do $m \in (-100; 100)$, $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{2; 3; \dots; 99\}$

Vậy số giá trị nguyên của tham số m là: $99 - 2 + 1 = 98$.

Câu 105. Số giá trị nguyên của m để phương trình $\ln\left(e^{m+x+2} + e^{m+x}\right) + \frac{1}{e} = (m+1)(x+1) + e^{mx+e}$ có

nghiệm nằm trong đoạn $\left[\frac{1}{5}; \frac{1}{2}\right]$

A. 3.

B. 5.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Phương trình tương đương

$$\ln\left[e^{m+x+1}\left(e + \frac{1}{e}\right)\right] + \frac{1}{e} = (m+1)(x+1) + e^{mx+e}$$

$$\Leftrightarrow m + x + 1 + \ln\left(e + \frac{1}{e}\right) + \frac{1}{e} = mx + m + x + 1 + e^{mx+e}$$

$$\Leftrightarrow \left(e + \frac{1}{e}\right) + \ln\left(e + \frac{1}{e}\right) = (mx + e) + e^{mx+e}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e + \frac{1}{e}\right) + e^{\ln e + \frac{1}{e}} = (mx + e) + e^{mx+e}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\ln\left(e + \frac{1}{e}\right)\right) = f(mx + e) \text{ với } f(t) = e^t + t \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e + \frac{1}{e}\right) = mx + e \Leftrightarrow m = \frac{\ln\left(e + \frac{1}{e}\right) - e}{x} = g(x) \text{ với } x \in \left[\frac{1}{5}; \frac{1}{2}\right]$$

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{e - \ln\left(e + \frac{1}{e}\right)}{x^2} > 0, \forall x \in \left[\frac{1}{5}; \frac{1}{2}\right] \Rightarrow g(x) \text{ đồng biến trên } \left[\frac{1}{5}; \frac{1}{2}\right]$$

Ta có BBT:

x	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$\frac{\ln\left(e + \frac{1}{e}\right) - e}{\frac{1}{5}} \approx -7,96$	$\frac{\ln\left(e + \frac{1}{e}\right) - e}{\frac{1}{2}} \approx -3,18$

Do đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi: $g\left(\frac{1}{5}\right) \leq m \leq g\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow -7,96 \leq m \leq -3,18$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-7; -6; -5; -4\}$.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
g'	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	16	-16	$+\infty$	

Phương trình $g(x) = m$ có nghiệm duy nhất $x > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq g(1) \\ m = g(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -11 \\ m = -16 \end{cases}$.

Mà $m \in [-2022; 2022]$ nên $m \in \{-16; -11; -10; -9; \dots; 2022\}$.

Vậy có 2035 giá trị nguyên của $m \in [-2022; 2022]$.

Câu 108. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a , tồn tại ít nhất số thực b thỏa mãn $a^{\log_5 8} + 2^{\log_5(5a)} = (b + \sqrt{4-b^2})(6 + 2b\sqrt{4-b^2})$?

A. 11.

B. 10.

C. 9.

D. 2002.

Lời giải

Chọn A

PT đã cho tương đương với

$$8^{\log_5 a} + 2.2^{\log_5 a} = (b + \sqrt{4-b^2})(4 + 2b\sqrt{4-b^2} + 2)$$

$$\Leftrightarrow (2^{\log_5 a})^3 + 2.2^{\log_5 a} = (b + \sqrt{4-b^2})[(b + \sqrt{4-b^2})^2 + 2]$$

$$\Leftrightarrow (2^{\log_5 a})^3 + 2.2^{\log_5 a} = (b + \sqrt{4-b^2})^3 + 2(b + \sqrt{4-b^2}).$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó PT đã cho tương đương với: $2^{\log_5 a} = b + \sqrt{4-b^2}$ (1).

Xét hàm số $g(b) = b + \sqrt{4-b^2}, b \in [-2; 2] \Rightarrow g'(b) = 1 - \frac{b}{\sqrt{4-b^2}} \Rightarrow g'(b) = 1 - \frac{b}{\sqrt{4-b^2}} = 0$

$\Leftrightarrow b = \sqrt{2}$.

Ta có bảng biến thiên như sau:

x	-2	$\sqrt{2}$	2
$g'(b)$	$+$	0	$-$
$g(b)$	-2	$2\sqrt{2}$	2

PT (1) có nghiệm b khi và chỉ khi $-2 \leq 2^{\log_5 a} \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2^{\log_5 a} \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \log_5 a \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow a \leq 5^{\frac{3}{2}}$.

Mà a là số nguyên dương nên $a \in \{1; 2; \dots; 11\}$.

Câu 109. Tìm số giá trị nguyên của tham số thực m để tồn tại các số thực x, y thỏa mãn $e^{x^2+y^2-m} + e^{x+y+xy-m} = x^2 + y^2 + x + y + xy - 2m + 2$.

A. 6.

B. 9.

C. 8.

D. 7.

Lời giải

Xét hàm số $f(t) = e^t - t - 1, \forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = e^t - 1$ và $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Ta thấy $f'(t)$ đổi dấu từ "-" sang "+" khi qua $t = 0$ nên $f(t) \geq f(0) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó: $\begin{cases} e^{x^2+y^2-m} - (x^2 + y^2 - m) - 1 \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R} \\ e^{x+y+xy-m} - (x + y + xy - m) - 1 \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ x + y + xy = m \end{cases}$$

$$\text{Hay } e^{x^2+y^2-m} + e^{x+y+xy-m} = x^2 + y^2 + x + y + xy - 2m + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ x + y + xy = m \end{cases}$$

$$\text{Đặt } S = x + y, P = xy, \text{ ta có: } \begin{cases} S^2 - 2P = m \\ S + P = m \end{cases} \Rightarrow S^2 - S - 3P = 0. \text{ Vì } S^2 \geq 4P \Rightarrow S \in [0; 4]$$

Lấy (1)+2.(2) về theo về ta được: $S^2 + 2S = 3m$ (3).

Xét hàm số $f(S) = S^2 + 2S, S \in [0; 4]$, có $f'(S) = 2S + 2 > 0, \forall S \in [0; 4]$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm

$\Leftrightarrow f(0) \leq 3m \leq f(4) \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 8$. Vậy, có 9 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 110. Có bao nhiêu giá trị nguyên y sao cho tồn tại số (THPT Lê Thánh Tông - HCM-2022) Có tất cả bao nhiêu số b nguyên dương sao cho tồn tại đúng hai số thực a thỏa mãn đẳng thức $b.2^{a^2-6a-1} + b^2.2^{2a^2-12a-1} - 3 = 7 \log_2(a^2 - 6a + \log_2 b)$?

A. 1024.

B. 1023.

C. 2047.

D. 2048.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = a^2 - 6a \\ y = \log_2 b \geq 0 \Rightarrow b = 2^y \\ x + y > 0 \end{cases}$$

Ta được $2^y.2^{x-1} + 2^{2y}.2^{2x-1} - 3 = 7 \log_2(x + y) \Leftrightarrow 2^{x+y} + 2^{2(x+y)} - 14 \log_2(x + y) - 6 = 0$.

Xét hàm số $f(t) = 2^{2t} + 2^t - 14 \log_2 t - 6, t > 0$.

$$f'(t) = 4^t \ln 4 + 2^t \ln 2 - \frac{14}{t \ln 2} \Rightarrow f''(t) = 4^t \ln^2 4 + 2^t \ln^2 2 + \frac{14}{t^2 \ln 2} > 0 \quad \forall t > 0$$

$\Rightarrow f(t) = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm dương. Ta thấy $f(1) = f(2) = 0$.

$$\text{Do vậy, ta được } f(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 b = 1 + 6a - a^2 \\ \log_2 b = 2 + 6a - a^2 \end{cases}$$

Câu 111. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_2(m - x) + 2m = 2^x + 3x - 1$ có nghiệm thuộc $[0; 3]$?

A. 2.

B. 5.

C. 7.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $m - x > 0$

Ta có $\log_2(m - x) + 2m = 2^x + 3x - 1$

$$\Leftrightarrow \log_2(2m - 2x) + 2m - 2x = 2^x + x$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2m-2x) + 2m-2x = \log_2 2^x + 2^x (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có: $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 2} > 0, \forall t > 0$.

Suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow f(2m-2x) = f(2^x) \Leftrightarrow 2m-2x = 2^x \Leftrightarrow 2m = 2^x + 2x.$$

$$\text{Đặt } g(x) = 2^x + 2x.$$

Vì $g'(x) = 2^x \ln 2 + 2 > 0, \forall x \in [0; 3]$ nên ta có BBT

x	0				3
$g'(x)$			+		
$g(x)$	1				14

$$\text{Do đó } ycbt \Leftrightarrow 1 \leq 2m \leq 14 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq m \leq 7.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Vậy có 7 giá trị m cần tìm.

Câu 112. Số giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-2019; 2020)$ để phương trình

$$\log_3(3^x + 3^{-x} + 3^m) = (3 - 3^m) \cdot 3^x - 9^x \text{ có đúng hai nghiệm là}$$

A. 2018.

B. 4036.

C. 2019.

D. 2020.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \log_3(3^x + 3^{-x} + 3^m) = (3 - 3^m) \cdot 3^x - 9^x \Leftrightarrow \log_3 \left[\frac{3^x(3^x + 3^m) + 1}{3^x} \right] = 3 \cdot 3^x - 3^x(3^x + 3^m).$$

$$\Leftrightarrow \log_3 [3^x(3^x + 3^m) + 1] - x = 3 \cdot 3^x - 3^x(3^x + 3^m)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 [3^x(3^x + 3^m) + 1] + 3^x(3^x + 3^m) + 1 = 3 \cdot 3^x + x + 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3 [3^x(3^x + 3^m) + 1] + 3^x(3^x + 3^m) + 1 = \log_3 3^{x+1} + 3^{x+1}(1).$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ trên $(0; +\infty)$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0 \forall t > 0$ nên hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Do

đó

$$(1) \Leftrightarrow f[3^x(3^x + 3^m) + 1] = f(3^{x+1}) \Leftrightarrow 3^x(3^x + 3^m) + 1 = 3^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2x} + (3^m - 3) \cdot 3^x + 1 = 0.$$

$$\text{Đặt } t = 3^x, t > 0. \text{ Phương trình trên trở thành } t^2 + (3^m - 3)t + 1 = 0 (2).$$

Phương trình ban đầu có hai nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa

$$\text{mãn } 0 < t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 t_2 > 0 \end{cases}$$

$$+) \Delta > 0 \Leftrightarrow (3^m - 3)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^m > 5 \\ 3^m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \log_3 5 \\ m < 0 \end{cases} (*)$$

$$+) \text{ Khi đó theo định lý Viet ta có } \begin{cases} t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 3^m > 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 1 (**)$$

Kết hợp (*) và (**) ta được: $m < 0$.

Do m nguyên thuộc khoảng $(-2019; 2020)$ nên $m \in \{-2018; -2017; \dots; -1\}$.

Vậy có 2018 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 113. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tồn tại cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $e^{3x+5y} - e^{x+3y+1} = 1 - 2x - 2y$, đồng thời thỏa mãn $\log_3^2(3x+2y-1) - (m+6)\log_3 x + m^2 + 9 = 0$?

A. 6.

B. 5.

C. 8.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } e^{3x+5y} - e^{x+3y+1} = 1 - 2x - 2y \Leftrightarrow e^{3x+5y} + (3x+5y) = e^{x+3y+1} + (x+3y+1) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = e^t + t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = e^t + 1 > 0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow f(3x+5y) = f(x+3y+1) \Leftrightarrow 3x+5y = x+3y+1 \Leftrightarrow 2y = 1-2x.$$

$$\text{Thế vào phương trình còn lại ta được } \log_3^2 x - (m+6)\log_3 x + m^2 + 9 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Đặt } t = \log_3 x. \text{ Số nghiệm của phương trình (2) chính là số nghiệm của phương trình } t^2 - (m+6)t + m^2 + 9 = 0 \quad (3)$$

$$\text{Phương trình (3) có nghiệm khi } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 12m \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4.$$

Do đó có 5 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 114. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tồn tại cặp số $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $3^{5x+7y} - 3^{3x+5y+2} + 2(x+y-1) = 0$, đồng thời thỏa mãn

$$\ln^2(4x+3y-3) - (m+2)\ln x + m^2 - 1 = 0 \text{ có nghiệm?}$$

A. 2019.

B. 6.

C. 2020.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

$$3^{5x+7y} - 3^{3x+5y+2} + 2(x+y-1) = 0 \Leftrightarrow 3^{5x+7y} + 5x+7y = 3^{3x+5y+2} + 3x+5y+2$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = 3^t + t$$

$$f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}. \text{ Suy ra hàm số } f(t) = 3^t + t \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

$$\text{Nên } f(5x+7y) = f(3x+5y+2) \Leftrightarrow 5x+7y = 3x+5y+2 \Leftrightarrow y = 1-x \quad (1)$$

$$\text{Thế (1) vào phương trình } \ln^2(4x+3y-3) - (m+2)\ln x + m^2 - 1 = 0 \text{ ta được}$$

$$\ln^2 x - (m+2)\ln x + m^2 - 1 = 0.$$

$$\text{Đặt } t = \ln x, \text{ phương trình có dạng: } t^2 - (m+2)t + m^2 - 1 = 0.$$

$$\text{Để phương trình có nghiệm thì } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 4m + 8 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -1,09 \approx \frac{2-2\sqrt{7}}{3} \leq m \leq \frac{2+2\sqrt{7}}{3} \approx 2,43.$$

$$\text{Vì } m \in \mathbb{Z} \text{ nên } m = \{-1; 0; 1; 2\}$$

Do đó có 4 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 115. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tồn tại các số thực x, y thỏa mãn đồng thời $e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = 1 - 2x - 2y$ và $\log_5^2(3x+2y+4) - (m+6)\log_5(x+5) + m^2 + 9 = 0$?

A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn CTheo bài $e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = 1 - 2x - 2y$

$$\Leftrightarrow e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = (x+3y-9) - (3x+5y-10)$$

$$\Leftrightarrow e^{3x+5y-10} + 3x + 5y - 10 = e^{x+3y-9} + x + 3y - 9$$

Xét hàm số $f(t) = e^t + t, t \in \mathbb{R}$.Ta có: $f'(t) = e^t + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.Khi đó phương trình $f(t) = 0$ có nghiệm là duy nhất. Tức là:

$$3x + 5y - 10 = x + 3y - 9 \Leftrightarrow 2y = 1 - 2x.$$

Thay vào phương trình thứ 2, ta được:

$$\log_5^2(3x+2y+4) - (m+6)\log_5(x+5) + m^2 + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_5^2(x+5) - (m+6)\log_5(x+5) + m^2 + 9 = 0(1).$$

Đặt $\log_5(x+5) = t (t \in \mathbb{R}, x > -5)$. Khi đó phương trình trở thành

$$t^2 - (m+6)t + m^2 + 9 = 0 (*).$$

Tồn tại x, y thỏa mãn yêu cầu bài toán khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm, tức là:

$$\Delta = (m+6)^2 - 4(m^2 + 9) \geq 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 12m \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4.$$

Vậy có 4 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 116. Tìm các giá trị m để phương trình $3^{\sin x + \sqrt{5}\cos x - |m|+5} = \log_{\sin x + \sqrt{5}\cos x + 10}(|m|+5)$ có nghiệm.

A. $\sqrt{6} \leq m \leq \sqrt{6}$.B. $-5 \leq m \leq 5$.C. $5 - \sqrt{6} \leq |m| \leq 5 + \sqrt{6}$.

D.

$$-\sqrt{6} \leq m \leq 5.$$

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$3^{\sin x + \sqrt{5}\cos x - |m|+5} = \log_{\sin x + \sqrt{5}\cos x + 10}(|m|+5)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^{\sin x + \sqrt{5}\cos x + 10}}{3^{|m|+5}} = \frac{\ln(|m|+5)}{\ln(\sin x + \sqrt{5}\cos x + 10)}$$

$$\Leftrightarrow 3^{\sin x + \sqrt{5}\cos x + 10} \cdot \ln(\sin x + \sqrt{5}\cos x + 10) = 3^{|m|+5} \cdot \ln(|m|+5) \quad (1)$$

Xét $f(t) = \ln(t) \cdot 3^t, \forall t \geq 5$, vì $f'(t) = \frac{1}{t}3^t + \ln(t)3^t \ln(3) > 0, \forall t \geq 5$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(5; +\infty)$.

Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow f(\sin x + \sqrt{5}\cos x + 10) = f(|m|+5)$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \sqrt{5}\cos x + 10 = |m|+5$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \sqrt{5}\cos x + 5 = |m|$$

Mà $-\sqrt{6} \leq \sin x + \sqrt{5}\cos x \leq \sqrt{6}$ nên để phương trình có nghiệm ta phải có $5 - \sqrt{6} \leq |m| \leq 5 + \sqrt{6}$.

Câu 117. Cho phương trình $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \log_2(2|x-m| + 2)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên đoạn $[-2019; 2019]$ để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt.

A. 4036.

B. 4034.

C. 4038.

D. 4040.

Lời giải

Chọn CĐiều kiện: $x \in \mathbb{R}$.

$$2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \log_2(2|x-m| + 2)$$

$$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2} \cdot \log_2[(x-1)^2 + 2] = 2^{2|x-m|} \log_2(2|x-m| + 2) \quad (1)$$

Xét hàm số $y = 2^t \cdot \log_2(t+2)$ với $t \geq 0$.Hàm số $y = 2^t \cdot \log_2(t+2)$ xác định và liên tục trên $[0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } y' = 2^t \cdot \log_2(t+2) \cdot \ln 2 + \frac{2^t}{(t+2)\ln 2} > 0, \forall t \geq 0.$$

Vậy hàm số $y = 2^t \cdot \log_2(t+2)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

$$\text{Từ (1)} \Leftrightarrow f((x-1)^2) = f(2|x-m|) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-m| \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 2(x-m) \\ -(x-1)^2 = 2(x-m) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m = -x^2 + 4x - 1 \quad (1) \\ 2m = x^2 + 1 \quad (2) \end{cases} \quad (*)$$

□ Xét phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x) = -x^2 + 4x - 1$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	3	$-\infty$

Phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$ có 2 nghiệm phân biệt khi $2m < 3 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$.

Phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$ có 1 nghiệm khi $2m = 3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$.

Phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$ vô nghiệm khi $2m > 3 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$.

□ Xét phương trình $2m = x^2 + 1$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x) = x^2 + 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

Phương trình $2m = x^2 + 1$ có 2 nghiệm phân biệt khi $2m > 1 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$.

Phương trình $2m = x^2 + 1$ có 1 nghiệm khi $2m = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Phương trình $2m = x^2 + 1$ vô nghiệm khi $2m < 1 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$.

□ Khi $m = \frac{3}{2}$: phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$ có nghiệm $x = 2$, phương trình $2m = x^2 + 1$ có 2 nghiệm phân biệt $x = \pm\sqrt{2}$. Vậy (*) có 3 nghiệm phân biệt, suy ra loại $m = \frac{3}{2}$.

□ Khi $m = \frac{1}{2}$: phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$ có 2 nghiệm phân biệt $x = 2 \pm \sqrt{2}$, phương trình $2m = x^2 + 1$ có nghiệm $x = 0$. Vậy (*) có 3 nghiệm phân biệt, suy ra loại $m = \frac{1}{2}$.

□ Xét phương trình $-x^2 + 4x - 1 = x^2 + 1 \Leftrightarrow -2x^2 + 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ suy ra không tồn tại m để phương trình (1) và (2) có cùng tập nghiệm gồm 2 phần tử. Vậy không tồn tại m để (*) có 2 nghiệm phân biệt.

□ Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (*) có 2 nghiệm phân biệt.

TH1: (1) có 2 nghiệm phân biệt và (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ m < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$.

TH2: (2) có 2 nghiệm phân biệt và (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m > \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$.

TH3: (1) có nghiệm $x = 2$ và (2) có nghiệm $x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$.

Kết hợp với điều kiện m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ ta có $m \in \left[-2019; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 2019\right]$.

Vì m nguyên nên ta có 4038 giá trị của m .

Câu 118. Cho phương trình $3^{(x+1)^2} \log_3(x^2 + 2x + 3) - 9^{|x-m|} \log_3(2|x-m| + 2) = 0$ (1)

Gọi S là tập tất cả các giá trị m để phương trình (1) có đúng 3 nghiệm thực phân biệt. Khi đó tổng các phân tử của S bằng

A. -3.

B. -2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

$$3^{(x+1)^2} \log_3(x^2 + 2x + 3) - 9^{|x-m|} \log_3(2|x-m| + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3^{(x+1)^2} \log_3[(x+1)^2 + 2] = 3^{2|x-m|} \log_3(2|x-m| + 2) \quad (2)$$

Xét hàm: $f(t) = 3^t \cdot \log_3(t+2)$ trên khoảng $[0; +\infty)$

$$f'(t) = 3^t \cdot \ln 3 \cdot \log_3(t+2) + \frac{1}{(t+2) \ln 3} \cdot 3^t$$

$$= 3^t \cdot \ln(t+2) + \frac{1}{(t+2) \ln 3} \cdot 3^t > 0, \forall t \in [0; +\infty)$$

$\Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến trên $[0; +\infty)$

$$(2) \Leftrightarrow f[(x+1)^2] = f(2|x-m|) \Leftrightarrow (x+1)^2 = 2|x-m|$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^4 = 4(x-m)^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2m + 1)(x^2 + 4x + 1 - 2m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2m + 1 = 0 \quad (3) \\ x^2 + 4x + 1 - 2m = 0 \quad (4) \end{cases}$$

Phương trình (1) có đúng 3 nghiệm thực phân biệt, ta xét các trường hợp sau:

TH1. Phương trình (3) có nghiệm kép $\Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$

$$\text{Thay } m = -\frac{1}{2} \text{ vào (4) ta được } x^2 + 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + \sqrt{2} \\ x = -2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow m = -\frac{1}{2}$ là một giá trị cần tìm.

TH2. Phương trình (4) có nghiệm kép $\Leftrightarrow 4 - (1 - 2m) = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$

Thay $m = -\frac{3}{2}$ vào (3) ta được $x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$\Rightarrow m = -\frac{3}{2}$ là một giá trị cần tìm.

TH3. Phương trình (3) và phương trình (4) mỗi phương trình có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm chung

Gọi a là nghiệm chung. Khi đó ta có

$$a^2 + 2m + 1 = 0 \quad (*)$$

$$a^2 + 4a + 1 - 2m = 0$$

$\Rightarrow a = m$ thế vào (*) ta được $m = -1$

Thay $m = -1$ vào (3) ta được $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$$\text{Thay } m = -1 \text{ vào (4) ta được } x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Vậy $m = -1$ là một giá trị cần tìm

Do đó tổng các phân tử của S là $\left(\frac{-1}{2}\right) + \left(\frac{-3}{2}\right) + (-1) = -3$.

Câu 119.

Cho phương trình $4^{-|x-m|} \cdot \log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{2x-x^2} \cdot \log_{\frac{1}{2}}(2|x-m|+2) = 0$ với m là tham số.

Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt là

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải**Chọn D**

Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$2^{-2|x-m|+1} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) - 2^{2x-x^2} \cdot \log_2(2|x-m|+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^{-2|x-m|+1} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 2^{2x-x^2} \cdot \log_2(2|x-m|+2)$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2-2x} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 2^{2|x-m|-1} \cdot \log_2(2|x-m|+2).$$

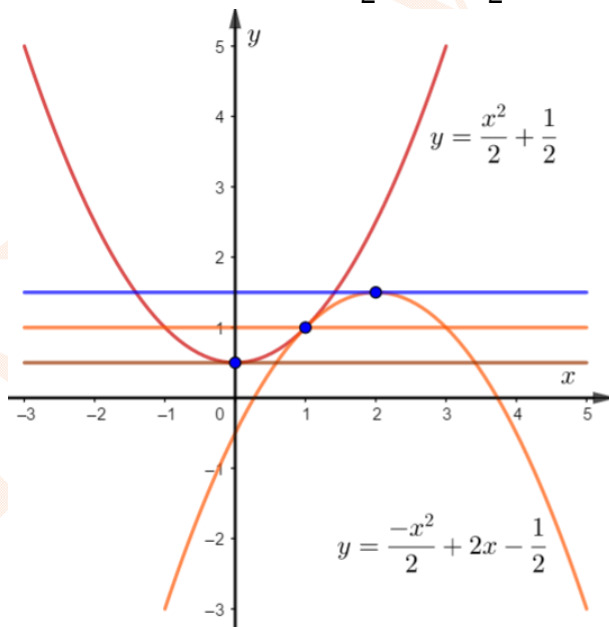
Xét hàm số $f(t) = 2^{t-3} \cdot \log_2 t$ với $t \geq 2$. Do $t \geq 2$ suy ra $\log_2 t \geq 1$.

$$f(t) = 2^{t-3} \cdot \frac{1}{t \cdot \ln 2} + 2^{t-3} \cdot \ln 2 \cdot \log_2 t > 0.$$

Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $[2; +\infty)$ mà $f(x^2 - 2x + 3) = f(2|x-m|+2)$ suy ra

$$x^2 - 2x + 3 = 2|x-m| + 2 \Leftrightarrow |x-m| = \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2} \\ m = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \end{cases} (*).$$

Vẽ đồ thị các hàm số $y = \frac{-x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2}$ và $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$ trên cùng một hệ trục tọa độ.



Đồ thị hai hàm số tiếp xúc với nhau tại điểm $(1; 1)$. Điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$

là $\left(0; \frac{1}{2}\right)$, điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{-x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2}$ là $\left(2; \frac{3}{2}\right)$.

Dựa vào đồ thị, đề (*) có ba nghiệm phân biệt thì $m \in \left\{ \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2} \right\}$.

Tổng tất cả các giá trị của tham số m thỏa mãn là $\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 3$.

Câu 120. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số a để phương trình

$$4^{-|x-a|} \log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-x^2+2x} \log_{\frac{1}{2}}(2|x-a|+2) = 0 \text{ có 3 nghiệm thực phân biệt?}$$

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

PT đã cho tương đương với $\frac{1}{2^{2|x-a|}} \log_{\frac{1}{2^2}}(x^2 - 2x + 3) + \frac{1}{2^{x^2-2x}} \log_{2^{-1}}(2|x-a|+2) = 0$.

$$\Leftrightarrow \frac{2}{2^{2|x-a|}} \log_2(x^2 - 2x + 3) = \frac{1}{2^{x^2-2x}} \log_2(2|x-a|+2)$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2-2x+1} \log_2(x^2 - 2x + 3) = 2^{2|x-a|} \log_2(2|x-a|+2)$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2-2x+3} \log_2(x^2 - 2x + 3) = 2^{2|x-a|+2} \log_2(2|x-a|+2) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t \cdot \log_2 t, \forall t \geq 2$; Ta có: $f'(t) = 2^t \ln t + \frac{2^t}{t \ln 2} > 0, \forall t \geq 2 \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Từ (1) suy ra $f(x^2 - 2x + 3) = f(2|x-a|+2) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 2|x-a|+2$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2|x-a| \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 2(x-a) \\ x^2 - 2x + 1 = -2(x-a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 2a + 1 = 0 \quad (2) \\ x^2 = 2a - 1 \quad (3) \end{cases}$$

Phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt nếu xảy ra một trong các trường hợp sau:

* TH1: (2) có hai nghiệm phân biệt và (3) có nghiệm kép khác hai nghiệm của (2):

$$\begin{cases} \Delta'_{(2)} > 0 \\ \Delta'_{(3)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2a > 0 \\ 2a - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{3}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

* TH2: (3) có hai nghiệm phân biệt và (2) có nghiệm kép khác hai nghiệm của (3):

$$\begin{cases} \Delta'_{(2)} = 0 \\ \Delta'_{(3)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2a = 0 \\ 2a - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ a > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

* TH3: (2) và (3) đều có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm chung:

Điều này xảy ra khi hệ $\begin{cases} x^2 - 4x + 2a + 1 = 0 \\ x^2 = 2a - 1 \end{cases}$ có nghiệm

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 2a + 1 = 0 \\ x^2 = 2a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

□ Khi $a = 1$ ta có: (2) trở thành $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

$$(3) \text{ trở thành } x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

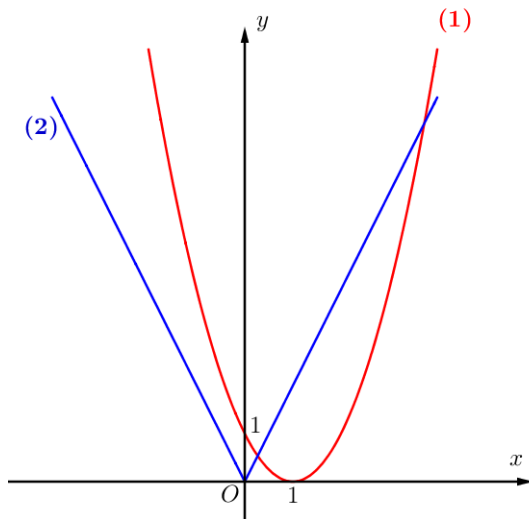
Khi đó: PT đã cho có 3 nghiệm.

$$\text{Vậy } a \in \left\{ \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2} \right\}.$$

BỔ SUNG CÁCH 2:

Xét phương trình $x^2 - 2x + 1 = 2|x - a|$ (*)

Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x + 1$ (1); $y = 2|x - a|$ (2) trên cùng một hệ trục tọa độ ta được:



Nhận xét (*) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{nh, nh b'ântr, icĩa (2) tiỗpxóc v'ii (1)} \\ \text{nh, nh b'ânph'icĩa (2) tiỗpxóc v'ii (1)} \\ \text{(1) v'ũ (2) c'ũg tr'ĩng c'ũc tr'ũp t'ũil} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 2(a - x) \text{ c'ũg ghiỗmkĐp} \\ x^2 - 2x + 1 = 2(x - a) \text{ c'ũg ghiỗmkĐp} \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ a = \frac{3}{2} \\ a = 1 \end{cases}$$

Vậy có 3 giá trị của a thỏa mãn bài toán.

Câu 121. Cho phương trình

$$2^{-\|m^3-3m^2+1\|} \cdot \log_{81} \left(\|x^3-3x^2+1\| + 2 \right) + 2^{-\|x^3-3x^2+1\|-2} \cdot \log_3 \left(\frac{1}{\|m^3-3m^2+1\|+2} \right) = 0$$

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị m nguyên để phương trình đã cho có số nghiệm thuộc đoạn $[6; 8]$. Tính tổng bình phương tất cả các phân tử của tập S .

A. 20.

B. 28.

C. 14.

D. 10.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } 2^{-\|m^3-3m^2+1\|} \cdot \log_{81} \left(\|x^3-3x^2+1\| + 2 \right) + 2^{-\|x^3-3x^2+1\|-2} \cdot \log_3 \left(\frac{1}{\|m^3-3m^2+1\|+2} \right) = 0$$

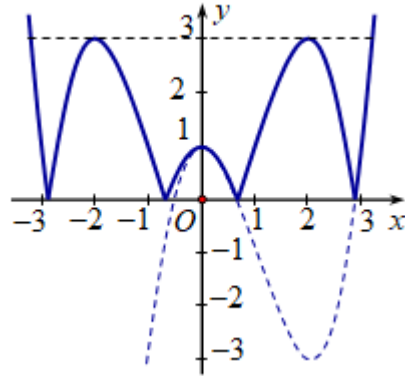
$$\Leftrightarrow 2^{\left||x^3|-3x^2+1\right|+2} \cdot \log_3 \left(\left||x^3|-3x^2+1\right|+2\right) = 2^{\left||m^3|-3m^2+1\right|+2} \cdot \log_3 \left(\left||m^3|-3m^2+1\right|+2\right).$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t \cdot \log_3 t$ với $t \geq 2$; Ta có $f'(t) = 2^t \ln 2 \cdot \log_3 t + 2^t \cdot \frac{1}{t \ln 3} > 0 \forall t \geq 2$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Do đó phương trình tương đương với $\left||m^3|-3m^2+1\right| = \left||x^3|-3x^2+1\right| (1)$.

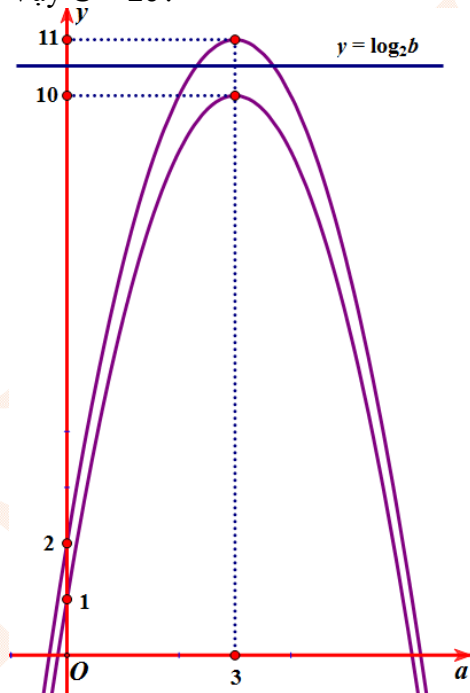
Vẽ đồ thị hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ từ đó suy ra đồ thị $|g(x)|$ và đồ thị của $|g(|x|)|$ như hình vẽ.



Từ đồ thị suy ra (1) có 6, 7, 8 nghiệm $\Leftrightarrow 0 < |g(|m|)| < 3$.

Từ đồ thị suy ra các giá trị nguyên của m là $-3, -1, 0, 1, 3$.

Vậy $S = 20$.



Từ đồ thị, ta có: $10 < \log_2 b < 11 \Leftrightarrow 2^{10} < b < 2^{11}$

Vậy có 1023 số nguyên dương b thỏa mãn.

Câu 122. Có bao nhiêu số nguyên a ($a \geq 3$) sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn

$$\left(a^{\log_{2021} x} + 3\right)^{\log_{2021} a} = x - 3?$$

A. 2019.

B. 2018.

C. 2020.

D. 2003.

Lời giải

Chọn B

ĐK có nghiệm là $x > 3$.

$$\text{Ta có: } (a^{\log_{2021} x} + 3)^{\log_{2021} a} = x - 3 \Leftrightarrow (x^{\log_{2021} a} + 3)^{\log_{2021} a} + (x^{\log_{2021} a} + 3) = x^{\log_{2021} a} + x \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^{\log_{2021} a} + t$ trên $(0; +\infty)$

$$f'(t) = t^{\log_{2021} a - 1} \cdot \log_{2021} a + 1 > 0 \quad \forall t > 0 \text{ và } a \geq 3 \Rightarrow \text{Hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên } (0; +\infty)$$

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow f(x^{\log_{2021} a} + 3) = f(x) \Leftrightarrow x^{\log_{2021} a} + 3 = x \Leftrightarrow x^{\log_{2021} a} = x - 3$$

$$\Leftrightarrow \log_{2021} x^{\log_{2021} a} = \log_{2021} (x - 3) \Leftrightarrow \log_{2021} a \log_{2021} x = \log_{2021} (x - 3)$$

$$\Leftrightarrow \log_{2021} a = \frac{\log_{2021} (x - 3)}{\log_{2021} x}$$

$$\text{Mà } \log_{2021} (x - 3) < \log_{2021} x \quad \forall x > 3 \text{ và } \log_{2021} x > 0 \quad \forall x > 3 \text{ nên } \frac{\log_{2021} (x - 3)}{\log_{2021} x} < 1 \quad \forall x > 3$$

$$\text{Lại có: Hàm số } g(x) = \frac{\log_{2021} (x - 3)}{\log_{2021} x} \text{ liên tục trên } (3; +\infty)$$

$$\text{và } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1; \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = -\infty$$

$$\text{Do đó tập giá trị của hàm số } g(x) = \frac{\log_{2021} (x - 3)}{\log_{2021} x} \text{ là } (-\infty; 1)$$

$$\text{Khi đó phương trình đã cho có nghiệm thì } \log_{2021} a < 1 \Leftrightarrow a < 2021$$

$$\text{Lại có } a \text{ nguyên và } a \geq 3 \text{ nên } a \in \{3; 4; \dots; 2020\}.$$

Vậy có 2018 số nguyên a ($a \geq 3$) thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 123. Có bao nhiêu số nguyên a ($a \geq 2$) sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn

$$\ln(a^{\log x^4} + 4a^{\log x^2} + 4) = \frac{\ln(x-2)}{\log a}?$$

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 9.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$\ln(a^{\log x^4} + 4a^{\log x^2} + 4) = \frac{\ln(x-2)}{\log a} \Leftrightarrow \ln(a^{4\log x} + 4a^{2\log x} + 4) = \frac{\ln(x-2)}{\log a}$$

$$\Leftrightarrow 2\ln(a^{2\log x} + 2) = \frac{\ln(x-2)}{\log a}$$

$$\text{Đặt } a^{2\log x} + 2 = t \Rightarrow \log a \cdot 2\log x = \log(t-2) \Rightarrow \log a = \frac{\log(t-2)}{2\log x}$$

$$\Rightarrow \ln t \cdot \ln(t-2) = \ln x \cdot \ln(x-2)$$

$$\text{Xét hàm } f(u) = \ln u \cdot \ln(u-2)$$

$$\Rightarrow f'(u) = \frac{\ln(u-2)}{u} + \frac{\ln u}{u-2} > 0$$

Do

$$t-2 = a^{2\log x} \geq 2^{2\log 2} > 1$$

$$\Rightarrow u = x \Rightarrow a^{2\log x} = x-2 \Leftrightarrow x - x^{2\log a} = 2 \Rightarrow x > x^{2\log a} \Leftrightarrow 2\log a < 1.$$

$$\Leftrightarrow \log a < \frac{1}{2} \Leftrightarrow a < \sqrt{10} \Rightarrow a \in \{2; 3\}$$

Câu 124. Có bao nhiêu số nguyên a ($a \geq 2$) sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn: $(a^{\log x} + 2)^{\log a} = x - 2$?

A. 8.

B. 9.

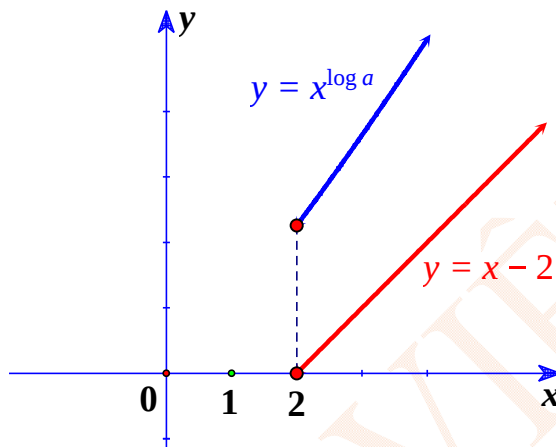
C. 1.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn A

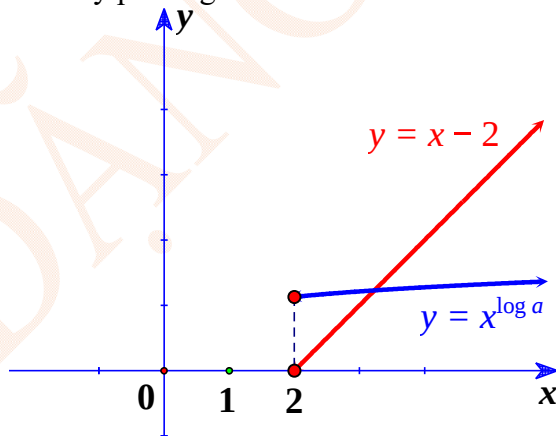
- ♦ Xét phương trình $(a^{\log x} + 2)^{\log a} = x - 2 \Leftrightarrow (x^{\log a} + 2)^{\log a} = x - 2$.
- ♦ Vì $(x^{\log a} + 2)^{\log a} > 0$ nên suy ra $x > 2$.
- ♦ Ta có: $(x^{\log a} + 2)^{\log a} = x - 2 \Leftrightarrow (x^{\log a} + 2)^{\log a} + (x^{\log a} + 2) = x^{\log a} + x$.
- ♦ Xét hàm số $f(t) = t^{\log a} + t$ có $f'(t) = \log a \cdot t^{\log a - 1} + 1 > 0, \forall t > 2$. Do đó $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.
- ♦ Mà $f(x^{\log a} + 2) = f(x) \Rightarrow x^{\log a} + 2 = x \Rightarrow x^{\log a} = x - 2$.
- ♦ Trường hợp 1: $\log a \geq 1 \Leftrightarrow a \geq 10$.



Dễ thấy hai đồ thị của hai hàm số $y = x^{\log a}$ và $y = x - 2$ không có điểm chung, vậy $a \geq 10$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- ♦ Trường hợp 1: $\log a < 1 \Leftrightarrow a < 10$.

Dễ thấy phương trình $x^{\log a} = x - 2$ luôn có nghiệm duy nhất.



- ♦ Vậy $a \in \{2; 3; \dots; 9\} \Rightarrow$ có 8 giá trị của a thỏa mãn.

Câu 125. Có bao nhiêu số tự nhiên a sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn: $2021^{x^3 - a^{3\log(x+1)}} (x^3 + 2020) = a^{3\log(x+1)} + 2020$

A. 9.

B. 8.

C. 5.

D. 12

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình: $2021^{x^3 - a^{3\log(x+1)}} = \frac{a^{3\log(x+1)} + 2020}{x^3 + 2020}$, điều kiện: $x > -1$,

$$\Leftrightarrow x^3 - a^{3\log(x+1)} = \log_{2021}(a^{3\log(x+1)} + 2020) - \log_{2021}(x^3 + 2020)$$

$$\Leftrightarrow x^3 + \log_{2021}(x^3 + 2020) = a^{3\log(x+1)} + \log_{2021}(a^{3\log(x+1)} + 2020) (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + \log_{2021}(t^3 + 2020)$, trên $(0; +\infty)$

$$f'(t) = 3t^2 + \frac{3t^2}{(t^3 + 2020)\ln 2021} > 0, \forall t > 0 \text{ nên hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên } (0; +\infty)$$

Do đó (*) trở thành: $x = a^{\log(x+1)} \Leftrightarrow x = (x+1)^{\log a} \Leftrightarrow \log x = \log a \cdot \log(x+1)$

$$\Leftrightarrow \log a = \frac{\log x}{\log(x+1)} < 1, \forall x > -1 \text{ nên } a < 10 \Rightarrow a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$