

ĐỀ CƯƠNG ÔN THI HỌC KỲ 1 TOÁN 11**Năm học: 2017-2018****PHẦN I. ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH****CHƯƠNG 1: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC, PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC****I. Tóm tắt một số dạng toán thường gặp và phương pháp giải****Dạng 1: Tìm tập xác định của hàm số lượng giác.****1. Phương pháp:**Để tìm TXĐ của hàm số $y=f(x)$ ta thực hiện theo các bước:**B1:** Tìm điều kiện của x để $f(x)$ có nghĩa.**B2:** Kết luận TXĐ dưới dạng tập hợp.**Chú ý:** Với các hàm lượng giác cơ bản ta có:- Hàm số $y=\sin x$ và $y=\cos x$ xác định với $\forall x \in R$.- Hàm số $y=\tan x$ xác định khi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$ - Hàm số $y=\cot x$ xác định khi $x \neq k\pi, k \in Z$ **2. Ví dụ****Câu 1:** Tìm tập xác định của các hàm số sau :

$$a. y = \tan \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad c. y = \frac{2x}{\sin x + \cos x} \quad b. y = \cot \left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \quad d. y = \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}$$

Dạng 2: Tìm GTLN, GTNN của các hàm số lượng giác:**1. Phương pháp:**

+) Sử dụng miền giá trị của hàm số lượng giác.

$$-1 \leq \sin x \leq 1; -1 \leq \cos x \leq 1; 0 \leq \cos^2 x \leq 1; 0 \leq \sin^2 x \leq 1;$$

$$0 \leq |\sin x| \leq 1; 0 \leq |\cos x| \leq 1; 0 \leq \sqrt{\cos x} \leq 1; 0 \leq \sqrt{\sin x} \leq 1, \text{ khi } \sin x \geq 0, \cos x \geq 0.$$

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin x + b \cos x \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

+) Sử dụng tính chất của bất đẳng thức : cộng các vế của bất đẳng thức với cùng 1 số, nhân các vế của bất đẳng thức với cùng 1 số,.....

2. Ví dụ**Câu 2:** Tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất của các hàm số sau :

$$a. y = \sqrt{3\sin 6x + 5} + 2 \quad d. y = \sqrt{\sin^2 x + 3} - 1 \quad b. y = 2\cos^2 x + 3$$

$$e. y = \sin x - \cos x \quad c. y = 3\sin 2x + 4\cos 2x - 1 \quad f. y = 3\cos x - 5$$

Dạng 3: Xét tính chẵn lẻ của các hàm số**1. Phương pháp giải:**Để xét tính chẵn, lẻ của hàm số $y = f(x)$ ta thực hiện theo các bước sau:**B1:** Tìm tập xác định D của hàm số, khi đó:+) Nếu D là tập đối xứng (*tức là* : $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$), ta thực hiện tiếp bước 2.+) Nếu D không phải là tập đối xứng (tức là $\exists x \in D$ mà $-x \notin D$), ta kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ.**B2:** Xác định $f(-x)$, khi đó:. Nếu $f(-x) = f(x)$ với $\forall x \in D$ thì $y = f(x)$ là hàm số chẵn. Nếu $f(-x) = -f(x)$ với $\forall x \in D$ thì $y = f(x)$ là hàm số lẻ.

. Ngoài ra kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ.

Chú ý:

$$1. \cos(-\alpha) = \cos \alpha; \sin(-\alpha) = -\sin \alpha; \tan(-\alpha) = -\tan \alpha; \cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

2. Với các hàm số lượng giác cơ bản, ta có:

Các hàm số $y = \sin x, y = \tan x, y = \cot x$ là các hàm số lẻ; Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

3. Đồ thị hàm số lẻ có tâm đối xứng; Đồ thị hàm số chẵn có trục đối xứng.

2. Ví dụ**Câu3:** Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau :

a. $y = \sin^2 x - \cos^2 x$ c. $y = \cos x - \sin^2 x$

b. $y = \sin x \cos 3x$ d. $y = \sin x - \cos x$

Dạng 4 : Giải phương trình lượng giác :**1. Phương pháp chung:****Biến đổi đưa về phương trình lượng giác cơ bản rồi tìm nghiệm.***) **Chú ý:** Pt $\sin x = a$; $\cos x = a$ có nghiệm nếu $-1 \leq a \leq 1$; pt $\tan x = a$; $\cot x = a$ luôn có nghiệm với mọi a .*) **Các công thức lượng giác:****Công thức lượng giác cơ bản:**

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1; \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \quad \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

1. Công thức cộng:

$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$ $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$ $\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$ $\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$	$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$
2. Công thức nhân đôi: $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$ $\sin 2a = 2\sin a \cdot \cos a$ $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$	3. Công thức nhân ba: $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

4. Công thức biểu diễn $\sin a$, $\cos a$, $\tan a$ theo $t = \tan \frac{a}{2}$

$$\sin a = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \tan a = \frac{2t}{1-t^2}.$$

5. Công thức hạ bậc: $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}; \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$ **6. Công thức biến đổi tích thành tổng.**

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)]$$

7. Công thức biến đổi tổng thành tích.

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$$

$$\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}$$

$$\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin a - \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\begin{aligned}\cos a + \cos b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \cos a - \cos b &= -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \\ \sin a + \sin b &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \sin a - \sin b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}\end{aligned}$$

*) Công thức nghiệm của ptlg cơ bản:

$$\begin{aligned}1. \sin x &= \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}); \\ 2. \cos x &= \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 3. \tan x &= \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}); \\ 4. \cot x &= \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})\end{aligned}$$

2. Ví dụ

Câu 4: Giải các phương trình lượng giác sau :

$$\begin{aligned}a. 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 &= 0 & b. \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x &= -2 & c. 3\tan x - 4\cot x + 1 &= 0 \\ d. 3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 5\sin^2 x &= 2 & e. \sqrt{3}\sin 7x - \cos 7x &= \sqrt{2} \\ f. 6\cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 3\sin x \cos x - \cos^2 x &= 1 & g. 2 - 5\sin x + \cos 2x &= 0 \\ h. \sin^2 3x - \cos^2 4x &= \sin^2 5x - \cos^2 6x & i. 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x &= 0 \\ k. 4\sin^2 2x + 8\cos^2 x - 9 &= 0 & l. 1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + 2\cos 2x &= 0 \\ m. 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 &= 0 & n. 5\cos x - 2 &= \frac{3(1 - \cos x)\cos^2 x}{\sin^2 x}\end{aligned}$$

II. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Phương trình $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$ có tất cả các nghiệm là

$$A. x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad B. x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$C. x = k2\pi, x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad D. x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 2: Giải phương trình $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 1$ ta được tất cả các nghiệm là

$$A. x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad B. x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$C. x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad D. x = \pi + k2\pi, x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 3: Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ?

$$A. y = \sin 2x. \quad B. y = \cos 2x. \quad C. y = \cos x. \quad D. y = \sin x + 1.$$

Câu 4: Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng

$$A. \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right). \quad B. (0; \pi). \quad C. \left(0; \frac{\pi}{2}\right). \quad D. \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right).$$

Câu 5: Phương trình $2\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} = 0$ có tất cả các nghiệm là

- A. $x = -\frac{\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3}$ và $x = -\frac{5\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = -\frac{13\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3}$ và $x = \frac{7\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \frac{\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3}$ và $x = -\frac{5\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = \frac{\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3}$ và $x = \frac{5\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 6: Giải phương trình $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ được tất cả các nghiệm là

- A. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, x = -\frac{5\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, x = -\frac{5\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 7: Phương trình $\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$ có tất cả các nghiệm là

- A. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = k2\pi, x = \pm \arccos 2 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 8: Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sin x + 1}$ là

- A. $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. B. $\mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
 C. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 9: Trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, phương trình $\sin^2 4x + 3\sin 4x \cos 4x - 4\cos^2 4x = 0$ có

- A. 1 nghiệm. B. 2 nghiệm. C. 3 nghiệm. D. 4 nghiệm.

Câu 10: Phương trình $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$ tương đương với phương trình

- A. $\cos x \cdot \sin 5x \cdot \sin 2x = 0$. B. $\cos x \cdot \cos 5x \cdot \cos 2x = 0$.
 C. $\cos x \cdot \sin 4x \cdot \sin 2x = 0$. D. $\sin x \cdot \sin 5x \cdot \sin 2x = 0$.

Câu 11: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2$ lần lượt là

- A. 1 và -5. B. -3 và 1. C. 1 và 5. D. -1 và 5.

Câu 12: Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2x$ là

- A. $[-2; 2]$. B. $[-1; 1]$. C. $(-1; 1)$. D. $[-1; 2]$.

Câu 13: Tìm tập xác định của hàm số $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{7} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
 C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{5} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Câu 14: Cho hàm số: $y = \cos\sqrt{x-1} + 2x$, TXĐ của hàm số là:

- A. $[1; +\infty)$ B. $(1; +\infty)$ C. $(-\infty; 1)$ D. $\mathbb{R}$

Câu 15: Cho hàm số: $y = 2\sin\sqrt{1-x^2} + 3\cos x$, TXĐ của hàm số là:

- A. $[1; +\infty)$ B. $(-\infty; 1)$ C. $[-1; 1]$ D. $\mathbb{R}$

Câu 16: Cho hàm số: $y = \frac{3\cos x}{2\sin x - 1}$, TXĐ của hàm số là:

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
 C. $D = \mathbb{R}$ D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{6} + k2\pi; \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Câu 17: Hàm số nào sau đây không phải là hàm số lẻ?

- (A) $y = \sin x$. (B) $y = \cos x$. (C) $y = \tan x$ (D) $y = \cot x$.

Câu 18: Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số sau $y = 3 - 4\cos^2 2x$

- A. $\min y = -1, \max y = 4$ B. $\min y = -1, \max y = 7$
 C. $\min y = -1, \max y = 3$ D. $\min y = -2, \max y = 7$

Câu 19: $y = \tan 5x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì:

- A. $T = \pi$ B. $T = \frac{2\pi}{5}$ C. $T = \frac{\pi}{5}$ D. $T = 2\pi$

Câu 20: Tìm tập xác định của hàm số sau $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$ B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{5} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$
 C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$ D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{5} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

Câu 21: Hàm số có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng ?

- (A) $y = \sin x \cos x$. (B) $y = \cos 2x$ (C) $y = \frac{1}{\sin x}$ (D) $y = \sin^3 x$

Câu 22: Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 2\sin^2 x + \cos^2 2x$

- A. $\max y = 4, \min y = \frac{3}{4}$ B. $\max y = 3, \min y = 2$
 C. $\max y = 4, \min y = 2$ D. $\max y = 3, \min y = \frac{3}{4}$

Câu 23: Nghiệm của phương trình $5 - 5\sin x - 2\cos^2 x = 0$ là:

- A. $k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 24: Nghiệm dương bé nhất của phương trình $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$ là

- A. $3\sin x - 3 = 0$ B. $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$
 C. $\tan x + 2 = 0$ D. $2\sin x + 3 = 0$

Câu 25: Một họ nghiệm của phương trình $2\cos 2x + 3\sin x - 1 = 0$ là

- A. $\pi + \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k2\pi$ B. $\pi - \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k2\pi$
 C. $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi$ D. $\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi$

CHƯƠNG II: TỔ HỢP – XÁC SUẤT**I. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN****VẤN ĐỀ 1: QUY TẮC ĐẾM.****1) Quy tắc cộng**

Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai phương án. Nếu phương án một có m cách thực hiện, phương án hai có n cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của phương án thứ nhất thì công việc đó có $m + n$ cách thực hiện.

Chú ý: Có thể mở rộng quy tắc cộng như sau :

Một công việc được hoàn thành bởi một trong k phương án $A_1, A_2, \dots, A_k$. phương án A_1 có n_1 cách thực hiện, phương án A_2 có n_2 cách thực hiện, ..., phương án A_k có n_k cách thực hiện. Tất cả các phương án này không trùng nhau. Khi đó số cách hoàn thành công việc là : $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$ cách.

2) Quy tắc nhân :

Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì có $m.n$ cách hoàn thành công việc đó.

Chú ý : Có thể mở rộng quy tắc nhân như sau :

Một công việc được hoàn thành bởi một trong k hành động $A_1, A_2, \dots, A_k$ liên tiếp nhau. Hành động A_1 có n_1 cách thực hiện, hành động A_2 có n_2 cách thực hiện, ..., hành động A_k có n_k cách thực hiện. Khi đó số cách hoàn thành công việc là : $n_1 n_2 \dots n_k$ cách.

VẤN ĐỀ 2: HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP – TỔ HỢP.**1. Hoán vị****a. Định nghĩa**

Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi kết quả của việc sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.

Nhận xét: Hai hoán vị của n phần tử chỉ khác nhau ở thứ tự sắp xếp.

b. Số các hoán vị

Kí hiệu P_n là số các hoán vị của n phần tử. Ta có :

$$P_n = n! = n.(n-1).(n-2) \dots 2.1$$

Quy ước: $0! = 1, 1! = 1$.

2. Chỉnh hợp**a. Định nghĩa**

Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho.

b. Số các chỉnh hợp

Kí hiệu A_n^k số các chỉnh hợp chập k của n phần tử ($0 \leq k \leq n$). Khi đó ta có :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Chú ý : Một chỉnh hợp chập n của n phần tử là một hoán vị của n phần tử. Như vậy : $A_n^n = P_n = n!$

3. Tổ hợp

a. Định nghĩa

Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi tập con có k phần tử của tập A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử .

b. Số các tổ hợp

Kí hiệu C_n^k là số các tổ hợp chập k của n phần tử ($0 \leq k \leq n$). Khi đó ta có :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

c. Các tính chất của tổ hợp

Ta có : a) $C_n^k = C_n^{n-k}$

b) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

VẤN ĐỀ 3: NHỊ THỨC NIU-TƠN.

Nhị thức Newton dùng để khai triển biểu thức dạng : $(a+b)^n$, $n \in \mathbb{N}$

Công thức nhị thức Newton :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

Hoặc :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k, \quad 0 \leq k \leq n$$

Số hạng tổng quát trong khai triển triển là: $T_k = C_n^k a^{n-k} b^k$, $0 \leq k \leq n$

VẤN ĐỀ 5: PHÉP THỬ VÀ BIẾN CỐ

1. Phép thử

Phép thử ngẫu nhiên (hay phép thử) là một thí nghiệm hay một hành động mà

- Ta không đoán trước được kết quả xảy ra
- Tuy nhiên ta có thể liệt kê được tất cả các trường hợp có thể xảy ra của phép thử đó .

2. Không gian mẫu

Tập tất cả các kết quả có thể xảy ra của một phép thử được gọi là không gian mẫu .

Kí hiệu : Ω

3. Biến cố

Biến cố là một tập con của không gian mẫu .

- Biến cố không thể : là biến cố không bao giờ xảy ra.

4. Tính chất của biến cố

a. Biến cố đối

Gọi A là biến cố của một phép thử . Khi đó tập $\Omega \setminus A$ được gọi là biến cố đối của biến cố A.

Kí hiệu : $\bar{A}$. Vậy $\bar{A} = \Omega \setminus A$

b. Biến cố xung khắc

Gọi A và B là 2 biến cố của một phép thử nào đó . A và B được gọi là 2 biến cố xung khắc nếu A và B không đồng thời xảy ra hay $A \cap B = \emptyset$.

5. Xác suất của biến cố

a. Định nghĩa cổ điển của xác suất

Gọi A là biến cố của một phép thử . Khi đó tỉ số $\frac{n(A)}{n(\Omega)}$ được gọi là xác suất của biến cố A.

$$\text{Kí hiệu : } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

b. Các tính chất của biến cố

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A$
4. $\forall A$ ta có : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

c. Các quy tắc tính xác suất.

Qui tắc cộng: Nếu $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Qui tắc nhân: Nếu A, B độc lập thì $P(A.B) = P(A).P(B)$

II. TÓM TẮT MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

VẤN ĐỀ 1: QUY TẮC ĐẾM.

Dạng toán 1: Sử dụng quy tắc đếm để thực hiện bài toán đếm số phương án

Để sử dụng quy tắc cộng trong bài toán đếm, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Phân tích các phương án thành k nhóm độc lập với nhau.

Bước 2. Nếu nhóm 1 có n_1 cách chọn khác nhau

Nhóm 2 có n_2 cách chọn khác nhau

...

Nhóm k có n_k cách chọn khác nhau

Bước 3. Khi đó, ta có tất cả $n_1+n_2+...+n_k$ phương án.

• Để sử dụng quy tắc nhân trong bài toán đếm, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Phân tích một hành động H thành k công việc nhỏ liên tiếp

Bước 2. Nếu công việc 1 có n_1 cách thực hiện khác nhau

Công việc 2 có n_2 cách thực hiện khác nhau

...

Công việc k có n_k cách thực hiện khác nhau

Bước 3. Khi đó, ta có tất cả $n_1.n_2...n_k$ cách thực hiện.

Dạng toán 2 :Sử dụng các quy tắc đếm để thực hiện bài toán đếm các số hình thành từ 1 tập hợp số cho trước nào đó

+ Sử dụng quy tắc nhân để thực hiện bài toán đếm số các số gồm k chữ số hình thành từ tập A, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Số cần tìm có dạng: $\overline{a_1a_2...a_k}, a_i \in A, i = 1, 2, ..., k, a_1 \neq 0.$

Bước 2. Đếm số cách chọn a_i (không nhất thiết phải theo thứ tự) giả sử có n_i cách.

Bước 3. Khi đó, ta có tất cả $n_1.n_2...n_k$ số.

+ Sử dụng quy tắc cộng và quy tắc nhân để thực hiện bài toán đếm số các số gồm k chữ số hình thành từ tập A, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Chia các số cần đếm thành các tập con $H_1, H_2, \dots$ độc lập với nhau.

Bước 2. Sử dụng quy tắc nhân để đếm số phần tử của các tập $H_1, H_2, \dots$, giả sử bằng $k_1, k_2, \dots$

Bước 3. Khi đó, ta có tất cả $k_1+ k_2 + \dots$ số.

VẤN ĐỀ 2: HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP – TỔ HỢP.

Dạng toán 1:Sử dụng hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp để thực hiện bài toán đếm.

Phương pháp:

1. Để nhận dạng một bài toán đếm có sử dụng hoán vị của n phần tử, chúng ta thường dựa trên các dấu hiệu sau:

- Tất cả n phần tử đều có mặt
- Mỗi phần tử chỉ xuất hiện một lần.
- Có phân biệt thứ tự giữa các phần tử.

2. Để nhận dạng một bài toán đếm có sử dụng chỉnh hợp chập k của n phần tử, chúng ta thường dựa trên các dấu hiệu sau:

- Phải chọn k phần tử từ n phần tử cho trước.
- Có phân biệt thứ tự giữa k phần tử được chọn.

3. Để nhận dạng một bài toán đếm có sử dụng tổ hợp chập k của n phần tử, chúng ta thường dựa trên các dấu hiệu sau:

- Phải chọn k phần tử từ n phần tử cho trước.
- Không phân biệt thứ tự giữa k phần tử được chọn.

Dạng toán 2: Các bài toán: rút gọn biểu thức, tính giá trị biểu thức, chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức, giải phương trình, bất phương trình trong đó có chứa các toán tử hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp.

Phương pháp:

- Sử dụng thành thạo các công thức P_n, A_n^k, C_n^k .
- Nắm được các tính chất của P_n, A_n^k, C_n^k chẳng hạn:

$$n! = (n-1)!n = (n-2)!(n-1)n = \dots$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}, C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$$

Ta thường sử dụng một trong các cách sau:

- Cách 1. Sử dụng các phép biến đổi.
- Cách 2. Sử dụng các đánh giá về bất đẳng thức.
- Cách 3. Sử dụng phương pháp chứng minh qui nạp
- Cách 4. Sử dụng phương pháp đếm.

VẤN ĐỀ 3: NHỊ THỨC NIU-TON.

Dạng toán 1: Khai triển nhị thức Niu-ton

Phương pháp giải: Sử dụng công thức

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k}b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

$$(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + (-1)^k C_n^k a^{n-k}b^k + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} a b^{n-1} + (-1)^n C_n^n b^n$$

- Trong khai triển nhị thức cần chú ý:

+Số mũ của a giảm dần từ n về 0, số mũ của b tăng dần từ 0 đến n, tổng số mũ của a và b luôn bằng n.

+Có n+1 số hạng trong khai triển.

Dạng toán 2: Tìm hệ số, số hạng trong khai triển.

Phương pháp giải: Với yêu cầu về hệ số trong nhị thức Niu-ton, ta cần làm theo các bước:

Bước 1. Viết số hạng tổng quát.

Bước 2. Dùng công thức lũy thừa rút gọn số hạng tổng quát.

Bước 3. Dựa vào đề bài, giải phương trình hai số mũ bằng nhau.

Chú ý:

- Số hạng không chứa x tức là số hạng chứa x^0 .
- Phải phân biệt được yêu cầu đề hỏi là số hạng hay hệ số mà trả lời cho chính xác.
- Các công thức lũy thừa cần nhớ:

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n; a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}; (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Dạng toán 3: Tính tổng

Phương pháp giải: Sử dụng nhị thức Niu-tơn, kết hợp với việc:

- Lựa chọn giá trị thực phù hợp.
- Sử dụng các phép biến đổi đại số.

VẤN ĐỀ 5: PHÉP THỬ VÀ BIẾN CỐ

Dạng 1. Mô tả không gian mẫu. Tìm số phần tử của không gian mẫu

Phương pháp giải: Yêu cầu được chuyển thành đếm số phần tử của tập hợp, từ đó mô tả tập hợp này bằng phương pháp liệt kê.

- + Dựa vào định nghĩa về không gian mẫu.
- + Nhớ chắc các kiến thức về hoán vị – chỉnh hợp – tổ hợp để áp dụng tính số phần tử của không gian mẫu.

Dạng 2. Xác định tập hợp các kết quả thuận lợi cho một biến cố. Tính số phần tử của tập hợp này

Phương pháp giải:

- + Nhớ được khái niệm về biến cố liên quan đến phép thử T.
- + Sử dụng định nghĩa một kết quả thuận lợi cho biến cố A. Tập hợp tất cả các kết quả thuận lợi của A.
- + Vận dụng kiến thức về đại số tổ hợp để tính số phần tử của không gian mẫu Ω_A .

Dạng 3. Tính xác suất của một biến cố

- + Xác định được số phần tử của không gian mẫu và của biến cố.
- + Áp dụng định nghĩa cổ điển của xác suất và các quy tắc tính xác suất.

III. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Tìm số hạng thứ năm trong khai triển biểu thức : $(x + \frac{2}{x})^{10}$

Bài 2: Trong khai triển $(x^2 - \frac{1}{2})^{20}$ thành đa thức, tính tổng các hệ số của đa thức nhận được.

Bài 3: Tìm hệ số của x^{26} trong khai triển $(\frac{1}{x^4} + x^7)^n$ biết rằng

$$C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1, \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Bài 4: Tìm hệ số của x^3 trong khai triển $(1 + 2x + 3x^2)^{10}$ theo lũy thừa của x .

Bài 5: Tính các tổng sau:

$$S_1 = 3^{16} C_{16}^0 - 3^{15} C_{16}^1 + 3^{14} C_{16}^2 + \dots + C_{16}^{16}$$

$$S_2 = C_{2017}^0 + 3^2 C_{2017}^2 + 3^4 C_{2017}^4 + \dots + 3^{2016} C_{2017}^{2016}$$

$$S_3 = C_{2019}^0 3^{2019} - C_{2019}^1 3^{2018} 4^1 + C_{2019}^2 3^{2017} 4^2 - \dots - C_{2019}^{2018} 3^1 4^{2018} + 4^{2019}$$

Bài 6: Một bình đựng 5 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ chỉ khác nhau về màu. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi. Tính xác suất để được ít nhất 3 viên bi xanh.

Bài 7: Một hộp đựng 12 viên bi, trong đó có 7 viên bi màu đỏ, 5 viên bi màu xanh. Lấy ngẫu nhiên một lần 3 viên bi. Tính xác suất trong các trường hợp sau:

- Lấy được 3 viên bi màu xanh.
- Lấy được ít nhất 2 viên bi màu xanh.
- Lấy được 3 bi cùng màu.
- Lấy được 3 bi khác màu.

Bài 8: Một lớp học có 15 học sinh nam và 10 học sinh nữ giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ.

Bài 9: Hai xạ thủ A và B cùng nhắm bắn một con thỏ. Xác suất để xạ thủ A bắn trúng là $\frac{2}{7}$; xác

suất để xạ thủ B bắn trúng là $\frac{1}{8}$. Tính xác suất để:

- Cả hai xạ thủ đều bắn trúng.
- Chỉ một trong 2 xạ thủ bắn trúng.
- Ít nhất một trong 2 xạ thủ bắn trúng.
- Cả hai đều bắn trượt.

Bài 10: Một thầy giáo có 12 quyển sách đôi một khác nhau trong đó có 5 quyển sách Toán, 4 quyển sách Vật lý, và 3 quyển sách Hóa học. Ông muốn lấy ra 6 quyển đem tặng cho 6 học sinh A, B, C, D, E, F mỗi em một quyển. Tính xác suất để sau khi tặng sách xong mỗi một trong ba loại Toán, Vật lý, Hóa học đều còn lại ít nhất một quyển.

IV. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Có bao nhiêu cách sắp xếp 4 người vào 4 ghế ngồi được bố trí quanh một bàn tròn?

- A. 12 B. 24 C. 4 D. 6

Câu 2: Số tự nhiên n thỏa mãn $A_n^2 - C_{n+1}^{n-1} = 5$ là:

A. $n = 3$

B. $n = 5$

C. $n = 4$

D. $n = 6$

Câu 3: Sắp xếp 6 nam sinh và 4 nữ sinh vào một dãy ghế hàng ngang có 10 chỗ ngồi. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho các nữ sinh luôn ngồi cạnh nhau và các nam sinh luôn ngồi cạnh nhau?

A. 207360

B. 120096

C. 120960

D. 34560

Câu 4: Có 12 học sinh giỏi gồm 3 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 6 học sinh sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh?

A. 85

B. 58

C. 508

D. 805

Câu 5: Một lớp có 15 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách chọn 5 bạn học sinh sao cho có đúng 3 học sinh nữ.

A. 110790

B. 119700

C. 117900

D. 110970

Câu 6: Cho 10 điểm phân biệt $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ trong đó có 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4 thẳng hàng, ngoài ra không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh được lấy trong 10 điểm trên?

A. 96 tam giác

B. 60 tam giác

C. 116 tam giác

D. 80 tam giác

Câu 7: Một hộp đựng 5 viên bi màu xanh, 7 viên bi màu vàng. Có bao nhiêu cách lấy ra 6 viên bi sao cho có ít nhất 1 viên bi màu xanh?

A. 105

B. 924

C. 917

D. 665280

Câu 8: Có 120 cách sắp xếp n người vào một bàn tròn. Khi đó giá trị của n là:

A. $n = 10$

B. $n = 7$

C. $n = 5$

D. $n = 6$

Câu 9: Tính tích các nghiệm của phương trình $\frac{P_x - P_{x-1}}{P_{x+1}} = \frac{1}{6}$.

A. 6.

B. 12.

C. 5.

D. 3.

Câu 10: Một tổ công nhân có 12 người. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một tổ công tác gồm 3 người sao cho có 1 người làm tổ trưởng, 1 người làm tổ phó và 1 người làm thư kí. Biết rằng không có ai kiêm nhiệm và ai cũng có thể được chọn. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

A. $3!A_{12}^3$

B. $12!$

C. C_{12}^3

D. A_{12}^3

Câu 11: Hệ số của x^8 trong khai triển $(x^2 + 2)^{10}$ là:

A. $C_{10}^6 2^4$

B. C_{10}^6

C. C_{10}^4

D. $C_{10}^6 2^6$

Câu 12: Số hạng của x^{31} trong khai triển $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40}$ là:

A. $-C_{40}^{37} x^{31}$

B. $C_{40}^3 x^{31}$

C. $C_{40}^2 x^{31}$

D. $C_{40}^4 x^{31}$

Câu 13: Tìm hệ số của $x^3 y^3$ trong khai triển của $(x + 2y)^6$.

A. 8.

B. 120.

C. 20.

D. 160.

Câu 14: Số số hạng trong khai triển $x(1+x)^{2017}$ là:

A. 2017

B. 2018

C. 1

D. 4034

Câu 15: Tính $S = C_{2017}^1 + C_{2017}^2 + C_{2017}^3 + \dots + C_{2017}^{2017}$.

A. $S = 2^{2017}$.B. $2^{2017} + 1$.C. $2^{2017} - 1$.D. 2^{2016} .

Câu 16: Với hai số thực a, b bất kì, khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2b^2 + 4b^3 + b^4$.B. $(a+b)^4 = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$.C. $(a+b)^4 = a^4 + b^4$.D. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Câu 17: Mệnh đề nào sai trong các mệnh đề sau đây?

A. $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$ B. $0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n$ C. $1 = C_n^0 - 2C_n^1 + 4C_n^2 - \dots + (-2)^n C_n^n$ D. $3^n = C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n$

Câu 18: Tính giá trị của biểu thức $S = C_{2018}^0 + \frac{1}{4}C_{2018}^2 + \frac{1}{16}C_{2018}^4 + \dots + \frac{1}{2^{2018}}C_{2018}^{2018}$.

A. $S = \frac{3^{2018} + 1}{2^{2019}}$.B. $S = \frac{3^{2018} - 1}{2^{2018}}$.C. $S = \frac{3^{2018} - 1}{2^{2019}}$.D. $S = \frac{3^{2018} + 1}{2^{2018}}$.

Câu 19: Tổng $A = C_{2017}^1 + 2^2 C_{2017}^2 + 3^2 C_{2017}^3 + \dots + 2016^2 C_{2017}^{2016} + 2017^2 C_{2017}^{2017}$ bằng

A. $2016 \cdot 2017 \cdot 2^{2016}$.B. $2017 \cdot 2018 \cdot 2^{2015}$.C. $2016 \cdot 2017 \cdot 2^{2015}$.D. $2016 \cdot 2017 \cdot 2^{2017}$.

Câu 20: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển biểu thức $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^n$, biết $C_n^2 - C_n^1 = 44$?

A. 525

B. 238

C. 165

D. 485

Câu 21: Gieo ngẫu nhiên một đồng xu cân đối và đồng chất liên tiếp bốn lần. Tính xác suất của biến cố A : “Cả bốn lần đều xuất hiện mặt ngửa”.

A. $P(A) = \frac{3}{8}$.B. $P(A) = \frac{3}{16}$.C. $P(A) = \frac{1}{8}$.D. $P(A) = \frac{1}{16}$.

Câu 22: Bài kiểm tra một tiết này có 20 câu hỏi trắc nghiệm, mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời (A, B, C, D) và chỉ có một phương án đúng. Tính xác suất để tất cả các đáp án đều là phương án C.

A. $\frac{1}{4}$.B. $\frac{1}{4^{20}}$.C. $\frac{1}{20^4}$.D. $\frac{1}{80}$.

Câu 23: Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần. Tính xác suất để mặt sáu chấm xuất hiện ít nhất một lần.

A. $\frac{11}{36}$.B. $\frac{1}{3}$.C. $\frac{1}{36}$.D. $\frac{1}{9}$.

Câu 24: Hai người độc lập nhau ném bóng vào rổ. Mỗi người ném vào rổ của mình 1 quả bóng. Biết rằng xác suất ném bóng trúng vào rổ của mỗi người tương ứng là $\frac{1}{5}$ và $\frac{2}{7}$. Xác suất để cả hai người cùng ném bóng vào rổ là:

- A. $\frac{12}{35}$ B. $\frac{1}{25}$ C. $\frac{4}{49}$ D. $\frac{2}{35}$

Câu 25: Gieo ngẫu nhiên 2 con xúc sắc cân đối đồng chất. Tìm xác suất của biến cố A: "Tổng số chấm xuất hiện là 7".

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{2}{9}$ C. $\frac{5}{18}$ D. $\frac{1}{9}$

Câu 26: Một tổ học sinh gồm có 6 nam và 4. Chọn ngẫu nhiên 3 em. Tính xác suất 3 em được chọn có ít nhất 1 nữ.

- A. $\frac{5}{6}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{30}$ D. $\frac{1}{2}$

Câu 27: Trên giá sách có 4 quyển sách toán, 3 quyển sách lý, 2 quyển sách hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất để 3 quyển được lấy ra thuộc 3 môn khác nhau.

- A. $\frac{2}{7}$ B. $\frac{1}{21}$ C. $\frac{37}{42}$ D. $\frac{5}{42}$

Câu 28: Trên giá sách có 4 quyển sách toán, 3 quyển sách lý, 2 quyển sách hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất để 3 quyển được lấy ra đều là môn toán.

- A. $\frac{2}{7}$ B. $\frac{1}{21}$ C. $\frac{37}{42}$ D. $\frac{5}{42}$

Câu 29: Trên giá sách có 4 quyển sách toán, 3 quyển sách lý, 2 quyển sách hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất để 3 quyển được lấy ra có ít nhất một quyển là toán.

- A. $\frac{2}{7}$ B. $\frac{1}{21}$ C. $\frac{37}{42}$ D. $\frac{5}{42}$

Câu 30: Gieo một đồng tiền liên tiếp 3 lần. Tính xác suất của biến cố A: "ít nhất một lần xuất hiện mặt sấp"

- A. $P(A) = \frac{1}{2}$ B. $P(A) = \frac{3}{8}$ C. $P(A) = \frac{7}{8}$ D. $P(A) = \frac{1}{4}$

CHƯƠNG III: DÃY SỐ - CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN**I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT CƠ BẢN****Vấn đề 1. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC**

1.1. **Khái niệm :** Để chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ là một mệnh đề đúng với mọi giá trị nguyên dương n , ta thực hiện như sau:

- **Bước 1:** Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = 1$.
- **Bước 2:** Giả thiết mệnh đề đúng với số nguyên dương $n = k$ tùy ý ($k \geq 1$), chứng minh rằng mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

1.2. **Chú ý:** Nếu phải chứng minh mệnh đề $A(n)$ là đúng với mọi số nguyên dương $n \geq p$ thì :

- Ở bước 1, ta phải kiểm tra mệnh đề đúng với $n = p$
- Ở bước 2, ta giả thiết mệnh đề đúng với số nguyên dương bất kì $n = k \geq p$ và phải chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

Vấn đề 2. DÃY SỐ

2.1. **Định nghĩa :** Dãy số là hàm số với đối số là số tự nhiên $u: N^* \rightarrow R$
 $n \mapsto u(n)$

2.2. Dãy số tăng, dãy số giảm

- (u_n) là dãy số tăng $\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \in N^*$
 $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in N^*$
 $\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1, (u_n > 0, \forall n \in N^*)$
- (u_n) là dãy số giảm $\Leftrightarrow u_{n+1} < u_n, \forall n \in N^*$
 $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in N^*$
 $\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, (u_n > 0, \forall n \in N^*)$

2.3. Dãy số bị chặn

- (u_n) là dãy số bị chặn trên $\Leftrightarrow \exists M \in R: u_n \leq M, \forall n \in N^*$.
- (u_n) là dãy số bị chặn dưới $\Leftrightarrow \exists m \in R: u_n > m, \forall n \in N^*$.
- (u_n) là dãy số bị chặn $\Leftrightarrow \exists m, M \in R: m \leq u_n \leq M, \forall n \in N^*$.

Vấn đề 3. CẤP SỐ CỘNG

+ **Định nghĩa :** Dãy số (u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + d, \forall n \in N^*$

d là số không đổi, gọi là công sai của cấp số cộng.

+ **Số hạng tổng quát** : $u_n = u_1 + (n-1)d$, $(\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$.

+ **Tính chất** : $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$, $(\forall k \geq 2, k \in \mathbb{N}^*)$.

+ **Tổng n số hạng đầu tiên** :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$$

Vấn đề 4. CẤP SỐ NHÂN

+ **Định nghĩa** :Dãy số (u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n \cdot q$, $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

q là số không đổi , gọi là công bội của cấp số nhân .

+ **Số hạng tổng quát** : $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$, $(\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$.

+ **Tính chất** : $u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}$, $(\forall k \geq 2, k \in \mathbb{N}^*)$.

+ **Tổng n số hạng đầu tiên** :

$$\begin{cases} S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = nu_1 & \text{khi } q = 1 \\ S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} & \text{khi } q \neq 1 \end{cases}$$

II. TÓM TẮT MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Chứng minh các mệnh đề bằng quy nạp

Phương pháp : Ta thực hiện đúng theo 2 bước :

- **Bước 1** : (bước cơ sở) Chứng minh đẳng thức đúng khi $n=1$ (hoặc $n=p$) .
- **Bước 2** : (bước quy nạp) Giả sử đẳng thức đúng khi $n=k$ với $k \geq 1$ (hay $k \geq p$) ,ta phải chứng minh đẳng thức đó cũng đúng khi $n=k+1$.

2. Tìm các số hạng của dãy số và tìm số hạng tổng quát của dãy số khi cho bằng hệ thức truy hồi .

Phương pháp :

- Dựa theo cách cho của dãy số để tìm ra các số hạng cần tìm , nếu dãy số cho dưới dạng tổng quát thì muốn tìm số hạng thứ k ta chỉ việc thay $n=k$ vào công thức tổng quát . Nếu dãy số cho dưới dạng truy hồi thì ta phải tính các số hạng truy hồi dần lên đến số hạng cần tìm .
- Để tìm số hạng tổng quát của một dãy số khi nó được cho dưới dạng truy hồi ta có rất nhiều cách nhưng thông thường ta nên viết một số số hạng đầu , rồi dự đoán công thức và chứng minh lại bằng quy nạp .

3. Xét tính tăng , giảm và tính bị chặn của dãy số .

Phương pháp : Dựa theo định nghĩa :

- o (u_n) là dãy số tăng $\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1, (u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*)$$
- o (u_n) là dãy số giảm $\Leftrightarrow u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, (u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*)$$
- o (u_n) là dãy số bị chặn $\Leftrightarrow \exists m, M \in \mathbb{R}: m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

4. Chứng minh các dãy số là cấp số

Phương pháp: Dựa theo định nghĩa của cấp số cộng và cấp số nhân để chứng minh

- $CSC(u_n) \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + d \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = d, \forall n \in \mathbb{N}^*, (d : \text{không đổi})$.
- $CSN(u_n) \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n \cdot q \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = q, \forall n \in \mathbb{N}^*, (q : \text{không đổi})$.

5. Tìm u_1, d, q, S_n của cấp số

Phương pháp: Dựa vào các công thức về số hạng tổng quát, tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng hoặc cấp số nhân để suy ra kết quả.

+ Nếu (u_n) là cấp số cộng thì :

- $u_n = u_1 + (n-1)d, \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$
- $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$.

+ Nếu (u_n) là cấp số nhân thì :

- $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}, \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$.
- $$\begin{cases} S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = nu_1 & \text{khi } q = 1 \\ S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} & \text{khi } q \neq 1 \end{cases}$$

6. Các bài toán ứng dụng tính chất của cấp số

Phương pháp: Dựa vào các công thức về tính chất các số hạng của cấp số cộng hoặc cấp số nhân :

- Nếu (u_n) là cấp số cộng thì : $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}, (\forall k \geq 2, k \in \mathbb{N}^*)$
- Nếu (u_n) là cấp số nhân thì : $u_k^2 = u_{k-1} u_{k+1}, (\forall k \geq 2, k \in \mathbb{N}^*)$.

III. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) $2^{n-3} > 3n-1, \forall n \geq 8$

b) $u_n = n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

c) Chứng minh các đẳng thức sau đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1.2 + 2.3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Bài 2: Xét tính tăng, giảm của các dãy số (u_n) biết:

a) $u_n = \frac{2n+1}{3n-2}$ b) $u_n = \frac{2-n}{\sqrt{n}}$ c) $u_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$

Bài 3: Xét tính bị chặn của các dãy số (u_n) biết:

a) $u_n = \frac{n^2+2n}{n^2+n+1}$ b) $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+2n+n}}$ c) $u_n = \frac{4n^2+2n}{2n^2+n+1}$

Bài 4: Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) biết:

a) $(u_n): \begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$ b) $(u_n): \begin{cases} u_1 = \frac{5}{4} \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2} \end{cases};$

Bài 5. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết:

a) $\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_2 + u_5 = 7 \end{cases}$; b) $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$; c) $\begin{cases} u_2 + u_4 = 5 \\ u_1^2 + u_5^2 = 25 \end{cases}$

Bài 6. Chứng minh rằng nếu 3 số a, b, c lập thành một cấp số cộng thì:

$$3(a^2 + b^2 + c^2) - 6(a-b)^2 = (a+b+c)^2.$$

Bài 7. Tìm các giá trị của m để phương trình: $x^4 - 2(m+2)x^2 + 2m+3 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

Bài 8. Cho dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 3n - 2, (\forall n \geq 1) \end{cases}$

Xét dãy số (v_n) biết: $v_n = u_{n+1} - u_n, (\forall n \geq 1)$

a) Chứng minh dãy số (v_n) là cấp số cộng, tìm số hạng đầu và công sai của nó.

b) Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

Bài 9. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

a) $\begin{cases} u_1 + u_3 = 10 \\ u_1^2 + u_3^2 = 50 \end{cases}$; b) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 21 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} = \frac{7}{12}, (q > 0) \end{cases}$

Bài 10. Cho dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}, (\forall n \geq 2) \end{cases}$

Xét dãy số (v_n) biết: $v_n = u_{n+1} - u_n, (\forall n \geq 1)$

- a) Chứng minh dãy số (v_n) là cấp số nhân.
 b) Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2^n \cdot u_n \end{cases}$ với $\forall n \geq 1$. Ta có u_5 bằng:

- A. 10 B. 1024 C. 2048 D. 4096

Câu 2: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_n = u_{n-1} + 2n \end{cases}$ với mọi $n \geq 2$. Khi đó u_{50} bằng:

- A. 1274,5 B. 2548,5 C. 5096,5 D. 2550,5

Câu 3: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_n = 2n \cdot u_{n-1} \end{cases}$ với mọi $n \geq 2$. Khi đó u_{11} bằng:

- A. $2^{10} \cdot 11!$ B. $-2^{10} \cdot 11!$ C. $2^{10} \cdot 11^{10}$ D. $-2^{10} \cdot 11^{10}$

Câu 4: Dãy số $u_n = \frac{3n-1}{3n+1}$ là dãy số bị chặn trên bởi?

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. 1 D. Tất cả đều sai

Câu 5: Trong các dãy số (u_n) sau đây, hãy chọn dãy số giảm:

- A. $u_n = \sin n$ B. $u_n = \frac{n^2 + 1}{n}$ C. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ D. $u_n = (-1)^n (2^n + 1)$

Câu 6: Trong các dãy số (u_n) sau đây, hãy chọn dãy số bị chặn

- A. $u_n = \sqrt{n^2 + 1}$ B. $u_n = n + \frac{1}{n}$
 C. $u_n = 2^n + 1$ D. $u_n = \frac{n}{n+1}$

Câu 7: Cho dãy số (u_n) với $u_n = 3^n$. Hãy chọn hệ thức đúng:

- A. $\frac{u_1 + u_9}{2} = u_5$ B. $\frac{u_2 u_4}{2} = u_3$
 C. $1 + u_1 + u_2 + \dots + u_{100} = \frac{u_{100} - 1}{2}$ D. $u_1 u_2 \dots u_{100} = u_{5050}$

Câu 8: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = 3^n$. Số hạng u_{2n-1} bằng:

- A. $3^2 \cdot 3^n - 1$ B. $3^n \cdot 3^{n-1}$ C. $3^{2n} - 1$ D. $3^{2(n-1)}$

Câu 9: Cho dãy số $u_n = \frac{2n}{n^2+1}$. Số $\frac{9}{41}$ là số hạng thứ bao nhiêu?

- A. 10 B. 9 C. 8 D. 11

Câu 10: Cho dãy số $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n} \end{cases}$ Số hạng tổng quát của dãy số trên là?

- A. $u_n = 1 + n$ B. $u_n = 1 - n$ C. $u_n = 1 + (-1)^{2n}$ D. $u_n = n$

Câu 11: Cho dãy số $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = -2 - \frac{1}{u_n} \end{cases}$. Số hạng tổng quát của dãy số trên là?

- A. $u_n = \frac{-n+1}{n}$ B. $u_n = \frac{n+1}{n}$ C. $u_n = -\frac{n+1}{n}$ D. $u_n = -\frac{n}{n+1}$

Câu 12: Cho dãy số $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát của dãy số trên là?

- A. $u_n = 1 + \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$ B. $u_n = 1 + \frac{(n-1)n(2n+2)}{6}$

- C. $u_n = 1 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$ D. Tất cả đều sai

Câu 13: Dãy số nào sau đây là dãy tăng:

- A. $u_n = (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi}{n}$ B. $u_n = \frac{2n+3}{3n+2}$ C. $u_n = \frac{1}{n + \sqrt{n+1}}$ D.

$$u_n = (-1)^{2n} (3^n + 1)$$

Câu 14: Cho dãy số $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Số hạng tổng quát của dãy số trên là?

- A. $u_n = \frac{(n-1)n}{2}$ B. $u_n = 5 + \frac{(n-1)n}{2}$

- C. $u_n = 5 + \frac{n(n+1)}{2}$ D. $u_n = 5 + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Câu 15: Tính tổng $S(n) = 1.1! + 2.2! + \dots + 2007.2007!$. Khi đó công thức của $S(n)$ là:

- A. $2007!$ B. $2008!$ C. $2008! - 1$ D. $2007! - 1$

Câu 16: Cho dãy số xác định bởi công thức truy hồi: $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*$ Tìm công thức tính số

hạng tổng quát u_n của dãy số

A. $u_n = \frac{3}{2^n}$

B. $u_n = \frac{3}{2^{n-1}}$

C. $u_n = \frac{3}{2^n - 1}$

D. $u_n = \frac{3}{2^n + 1}$

Câu 17: Cho CSC có $d=-2$ và $s_8 = 72$, khi đó số hạng đầu tiên là bao nhiêu?

A. $u_1 = 16$

B. $u_1 = -16$

C. $u_1 = \frac{1}{16}$

D. $u_1 = -\frac{1}{16}$

Câu 18: Cho CSC có $u_1 = -1, d = 2, s_n = 483$. Hỏi số các số hạng của CSC?

A. $n=20$

B. $n=21$

C. $n=22$

D. $n=23$

Câu 19: Xác định a để 3 số $1 + 3a, a^2 + 5, 1 - a$ lập thành CSC.

A. $a = 0$

B. $a = \pm 1$

C. $a = \pm\sqrt{2}$

D. Tất cả đều sai.

Câu 20: Cho a, b, c lập thành CSC. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $a^2 + c^2 = 2ab + 2bc$

B. $a^2 + c^2 = 2ab - 2bc$

C. $a^2 - c^2 = 2ab - 2bc$

D. $a^2 - c^2 = ab - bc$

Câu 21: Cho CSC có $u_4 = -12, u_{14} = 18$. Khi đó số hạng đầu tiên và công sai là

A. $u_1 = -20, d = -3$

B. $u_1 = -22, d = 3$

C. $u_1 = -21, d = 3$

D. $u_1 = -21, d = -3$

Câu 22: Cho CSC có $u_4 = -12, u_{14} = 18$. Khi đó tổng của 16 số hạng đầu tiên CSC là?

A. 24

B. -24

C. 26

D. -26

Câu 23: Cho CSC có $u_5 = -15, u_{20} = 60$. Tổng của 20 số hạng đầu tiên của CSC là?

A. 200

B. -200

C. 250

D. -25

Câu 24: Trong các dãy số sau đây dãy số nào là CSC?

A. $u_1 = 3^n$

B. $u_1 = (-3)^{n+1}$

C. $u_n = 3n + 1$

D. Tất cả đều là CSC

Câu 25: Trong các dãy số sau đây dãy số nào là CSC?

A. $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$

C. $u_n = n^2$

D. $u_n = (n+1)^3$

Câu 26: Cho CSN có $u_2 = \frac{1}{4}; u_5 = 16$. Tìm q và số hạng đầu tiên của CSN?

A. $q = \frac{1}{2}; u_1 = \frac{1}{2}$

B. $q = -\frac{1}{2}; u_1 = -\frac{1}{2}$

C. $q = 4; u_1 = \frac{1}{16}$

D. $q = -4; u_1 = -\frac{1}{16}$

Câu 27: Cho CSN có $u_1 = -1, u_6 = 0,00001$. Khi đó q và số hạng tổng quát là?

A. $q = \frac{1}{10}, u_n = \frac{-1}{10^{n-1}}$

B. $q = \frac{-1}{10}, u_n = -10^{n-1}$

C. $q = \frac{-1}{10}, u_n = \frac{1}{10^{n-1}}$

D. $q = \frac{-1}{10}, u_n = \frac{(-1)^n}{10^{n-1}}$

Câu 28: Cho CSN có $u_1 = -1; q = \frac{-1}{10}$. Số $\frac{1}{10^{103}}$ là số hạng thứ bao nhiêu?

A. số hạng thứ 103

B. số hạng thứ 104

C. số hạng thứ 105

D. Đáp án khác

Câu 29: Cho dãy số $\frac{-1}{\sqrt{2}}; \sqrt{b}, \sqrt{2}$. Chọn b để ba số trên lập thành CSN

A. $b = -1$

B. $b = 1$

C. $b = 2$

D. Đáp án khác

Câu 30: Trong các dãy số sau, dãy số nào là CSN.

A. $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$

B. $u_{n+1} = mu_n$

C. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = -5u_n \end{cases}$

D. $u_{n+1} = u_{n+1} - 3$

PHẦN II. HÌNH HỌC**CHƯƠNG 1: PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG****I - TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CỦA CHƯƠNG.****BÀI 1. PHÉP TỊNH TIẾN**

1. Định nghĩa : Trong mặt phẳng, cho véc tơ $\vec{v}(a;b)$. Phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v}(a;b)$ là phép biến hình, biến một điểm M thành một điểm M' sao cho $\overline{MM'} = \vec{v}$. Ký hiệu : $T_{\vec{v}}$.

2. Các tính chất của phép tịnh tiến :

a/ Tính chất 1:

***Định lý 1:** Nếu phép tịnh tiến biến hai điểm M,N thành hai điểm M',N' thì $MN=M'N'$.

b/ Tính chất 2:

*** Định lý 2:** Phép tịnh tiến biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.

HỆ QUẢ :

Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng, biến một tia thành một tia, biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng bằng nó, biến một tam giác thành một tam giác bằng nó, biến một đường tròn thành một đường tròn có cùng bán kính, biến một góc thành một góc bằng nó.

3. Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến

- Giả sử cho $\vec{v}(a;b)$ và một điểm M(x;y). Phép tịnh tiến theo véc tơ v biến điểm M thành điểm M'

thì M' có tọa độ là :
$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

BÀI 2. PHÉP QUAY**1. Định nghĩa**

Cho điểm O và góc lượng giác α . PBH biến điểm O thành chính nó, biến mỗi điểm $M \neq O$ thành điểm M' sao cho $OM' = OM$ và góc $(OM; OM') = \alpha$ đgl **phép quay tâm O góc α** .

Điểm O: tâm quay.

Góc α : góc quay.

Kí hiệu: $Q_{(O,\alpha)}$.

Nhận xét:

- Chiều quay dương là chiều dương của đường tròn lượng giác.
- Với $k \in \mathbb{Z}$,
 - $Q_{(O,2k\pi)}$ là phép đồng nhất.
 - $Q_{(O,(2k+1)\pi)}$ là phép đối xứng tâm O.

2. Tính chất

Tính chất 1: Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa 2 điểm bất kì.

Tính chất 2: Phép quay biến đường thẳng $\rightarrow$ đường thẳng, đoạn thẳng $\rightarrow$ đoạn thẳng bằng nó, tam giác $\rightarrow$ tam giác bằng nó, đường tròn $\rightarrow$ đường tròn có cùng bán kính.

• **Nhận xét:**

Giả sử $Q_{O,\alpha}(d) = d'$. Khi đó:

$$\widehat{(d, d')} = \begin{cases} \alpha & \text{nếu } 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - \alpha & \text{nếu } \frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi \end{cases}$$

3. Biểu thức tọa độ của phép quay có tâm $I(a;b)$ điểm $M(x;y)$, điểm $M'(x';y')$ và góc quay là α :

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $Q(I, \alpha)$, với $I(a; b)$. Khi đó $Q(I, \alpha)$ biến điểm $M(x; y)$ thành $M'(x'; y')$ xác định bởi:

$$\begin{cases} x' = a + (x - a)\cos\alpha - (y - b)\sin\alpha \\ y' = b + (x - a)\sin\alpha + (y - b)\cos\alpha \end{cases}$$

BÀI 3. PHÉP DỜI HÌNH

1. Định nghĩa: Phép dời hình là PBH bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Nhận xét:

- Các phép $T_{\vec{v}}$, Đ_d , Đ_O , $Q_{(O,\alpha)}$ đều là những phép dời hình.
- PBH có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép dời hình là một phép dời hình.

2. Tính chất

Phép dời hình:

- 1) Biến 3 điểm thẳng hàng $\rightarrow$ 3 điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm.
- 2) Biến đường thẳng $\rightarrow$ đường thẳng, tia $\rightarrow$ tia, đoạn thẳng $\rightarrow$ đoạn thẳng bằng nó.
- 3) Biến tam giác $\rightarrow$ tam giác bằng nó, góc $\rightarrow$ góc bằng nó.
- 4) Biến đường tròn $\rightarrow$ đường tròn có cùng bán kính.

Chú ý:

a) Nếu PDH biến $\Delta ABC \rightarrow \Delta A'B'C'$ thì nó cũng biến trọng tâm, trục tâm, tâm các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp của ΔABC tương ứng thành trọng tâm, trục tâm, tâm các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp của $\Delta A'B'C'$.

b) Phép dời hình biến đa giác n cạnh $\rightarrow$ đa giác n cạnh, đỉnh $\rightarrow$ đỉnh, cạnh $\rightarrow$ cạnh.

BÀI 4. PHÉP VỊ TỰ

1. Định nghĩa

• Cho điểm O và số $k \neq 0$. PBH biến mỗi điểm M thành điểm M' : $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ đgl **phép vị tự tâm O , tỉ số k** .

Kí hiệu: $V_{(O,k)}$.

O : tâm vị tự, k : tỉ số vị tự.

Nhận xét:

- 1) $V_{(O,k)}: O \mapsto O$
- 2) Khi $k=1$ thì $V_{(O,1)}$ là phép đồng nhất.
- 3) Khi $k=-1$ thì $V_{(O,-1)} = \text{Đ}_O$

$$4) V_{(O,k)}(M) = M' \Leftrightarrow V_{\left(O, \frac{1}{k}\right)}(M') = M$$

2. Tính chất

$$\text{Tính chất 1: } \left| \begin{array}{l} V_{(O,k)} : M \mapsto M' \\ N \mapsto N' \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN} \\ |M'N'| = |k|MN \end{array} \right|$$

Tính chất 2: Phép $V_{(O,k)}$:

- a) Biến 3 điểm thẳng hàng $\rightarrow$ 3 điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm.
- b) Biến đt $\rightarrow$ đt song song hoặc trùng với nó, tia $\rightarrow$ tia, đoạn thẳng $\rightarrow$ đoạn thẳng.
- c) Biến tam giác $\rightarrow$ tam giác đồng dạng với nó, biến góc $\rightarrow$ góc bằng nó.
- d) Biến đường tròn bán kính R $\rightarrow$ đường tròn bán kính $|k|R$

3. Biểu thức tọa độ của phép vị tự

Sử dụng định nghĩa và các tính chất của phép vị tự. Từ định nghĩa nếu tâm vị tự là $I(a;b)$, điểm $M(x;y)$ điểm $M'(x';y')$ thì ta có:

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - a = k(x - a) \\ y' - b = k(y - b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = k(x - a) + a \\ y' = k(y - b) + b \end{cases} (*)$$

Chính là biểu thức tọa độ của phép vị tự tâm I tỉ số vị tự là k.

BÀI 5. PHÉP ĐỒNG DẠNG

1. Định nghĩa

PBH F đgl phép đồng dạng tỉ số k ($k > 0$) nếu với hai điểm M, N bất kì có ảnh M', N' thì $M'N' = kMN$.

Nhận xét:

- 1) PDD là PDD tỉ số 1.
- 2) Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $|k|$.
- 3) Nếu thực hiện liên tiếp PDD tỉ số k và PDD tỉ số p ta được PDD tỉ số pk.

2. Tính chất

Phép đồng dạng tỉ số k:

- a) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm.
- b) Biến đt $\rightarrow$ đt, tia $\rightarrow$ tia, đoạn thẳng $\rightarrow$ đoạn thẳng.
- c) Biến tam giác $\rightarrow$ tam giác đồng dạng với nó, góc $\rightarrow$ góc bằng nó.
- d) Biến đường tròn bán kính R $\rightarrow$ đường tròn bán kính kR.

Chú ý:

- a) Nếu một PDD biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$ thì cũng biến trọng tâm, trực tâm, tâm các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của ΔABC tương ứng thành trọng tâm, trực tâm, tâm các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của $\Delta A'B'C'$.
- b) PDD biến đa giác n cạnh $\rightarrow$ đa giác n cạnh, biến đỉnh $\rightarrow$ đỉnh, cạnh $\rightarrow$ cạnh.

3. Hình đồng dạng

Hai hình đgl đồng dạng với nhau nếu có một PĐD biến hình này thành hình kia.

II - DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Xác định ảnh của điểm, đường thẳng, đường tròn,.... qua phép tịnh tiến, phép quay, phép dời hình, phép vị tự, phép đồng dạng.

***) Phương pháp giải:**

- Sử dụng định nghĩa, tính chất.

- Sử dụng biểu thức tọa độ.

III - BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy cho điểm A(- 6; - 3), B(4; - 5) và điểm C thay đổi trên đường tròn (T) : $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$. Đường thẳng d đi qua 2 điểm A và B.

1) Viết phương trình đường thẳng d' và phương trình đường tròn (T_1) là ảnh của đường thẳng d và đường tròn (T) qua

a) Phép tịnh tiến theo vec tơ $\vec{v} = (-2; 5)$.

b) Phép quay tâm O, góc quay 90° .

c) Phép vị tự tâm I(-1; -4), tỉ số $k = \frac{1}{3}$.

2) Tìm phép tịnh tiến biến (T) thành (T'): $(x - 10)^2 + (y + 5)^2 = 16$.

3) Tìm quỹ tích trọng tâm G của $\triangle ABC$.

Bài 2. Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng (d): $x + 2y - 3 = 0$ và đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$. Tìm ảnh của d, (C) qua:

1. Phép tịnh tiến theo vec tơ $\vec{v} = (2; 3)$

2. Phép quay tâm O, góc quay 90° .

3. Phép vị tự tâm O, tỉ số $k = \frac{1}{2}$.

4. Phép vị tự tâm I(2; -1), tỉ số $k = -3$

Bài 3. Trong mặt phẳng, hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta : x + 2y + 5 = 0$. Tìm ảnh của đường thẳng Δ qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k = \frac{1}{2}$

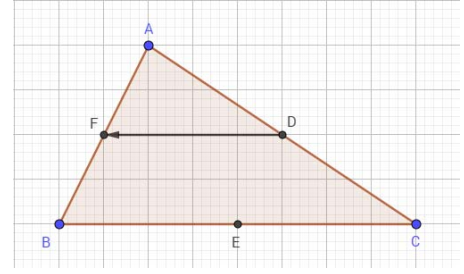
và phép quay tâm O góc quay $\frac{\pi}{2}$.

Bài 4. Trong mặt phẳng, hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC, biết $A(2; 2)$ và M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{3CM} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$; N là điểm thuộc cạnh AC sao cho $NC = 2AN$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN có phương trình $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$. Hãy viết phương trình đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

IV - CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho tam giác ABC có D, E, F lần lượt là trung điểm AC, CB, BA . Khi đó phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{DF}$ biến điểm E thành điểm:

- A. B . B. C .
C. D . D. F .



Câu 2: Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho vectơ $\vec{v} = (2; 1)$ và điểm $M(3; 2)$. Tìm tọa độ ảnh của điểm M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$?

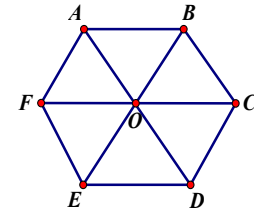
- A. $(-5; -3)$. B. $(5; -3)$. C. $(5; 3)$. D. $(-5; 3)$.

Câu 3: Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho vectơ $\vec{v} = (2; 3)$ và điểm $M'(4; 2)$. Tìm tọa độ điểm M biết M' là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$?

- A. $(2; 1)$. B. $(-2; 1)$. C. $(6; 5)$. D. $(2; -1)$.

Câu 4: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O (như hình vẽ). Tìm ảnh của tam giác AOF qua phép quay tâm O góc quay 120° ?

- A. Tam giác AOB .
B. Tam giác EOD .
C. Tam giác BOC .
D. Tam giác DOC .



Câu 5: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O , phép quay $Q_{(O; -180^\circ)}$ biến đường thẳng AD thành đường thẳng:

- A. CD . B. AC . C. BA . D. BC .

Câu 6: Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho điểm $M(x; y)$, $M'(x'; y')$ và $M' = Q_{\left(O; \frac{\pi}{2}\right)}(M)$. Khi đó biểu

thức nào sau đây đúng?

- A. $\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$; B. $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$; C. $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$; D. $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$;

Câu 7: Cho $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $V_{(A; -3)}(C) = B$. B. $V_{(A; 3)}(B) = C$. C. $V_{(A; -3)}(B) = C$. D. $V_{(A; 3)}(C) = B$.

Câu 8: Cho $AB = 2017$ và $A' = V_{(I; 2)}(A)$; $B' = V_{(I; 2)}(B)$. Khi đó độ dài $A'B'$ bằng

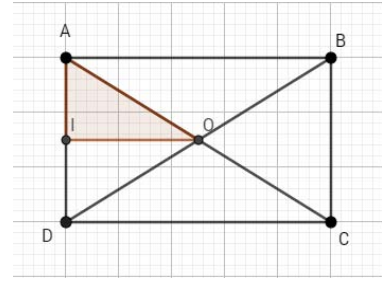
- A. 2017. B. $\frac{2017}{2}$. C. 4034. D. $2017\sqrt{2}$.

Câu 9: Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho điểm $M(4; -2)$. Tìm tọa độ ảnh của điểm M qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$?

- A. $(-4; -8)$. B. $(-8; 4)$. C. $(4; 8)$. D. $(4; -8)$.

Câu 10: Cho hình chữ nhật $ABCD$, tâm O ; I là trung điểm AD . Khi đó phép vị tự tâm A , tỉ số $k = 2$ biến tam giác AOI thành tam giác

- A. $\triangle ACD$.
B. $\triangle ACB$.
C. $\triangle ODC$.
D. $\triangle OID$.



Câu 11: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A(2; 5)$. Phép tịnh tiến theo vector $\vec{v} = (1; 2)$ biến A thành điểm có tọa độ là:

- A. $(3; 1)$ B. $(1; 6)$ C. $(3; 7)$ D. $(4; 7)$

Câu 12: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A(2; 5)$. Hỏi A là ảnh của điểm nào trong các điểm sau qua phép tịnh tiến theo vector $\vec{v} = (1; 2)$?

- A. $(3; 1)$ B. $(1; 6)$ C. $(4; 7)$ D. $(2; 4)$

Câu 13: Cho P, Q cố định. Phép tịnh tiến T biến điểm M bất kỳ thành M_2 sao cho $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{PQ}$.

- A. T chính là phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{PQ}$. B. T chính là phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{MM_2}$.
C. T chính là phép tịnh tiến theo vector $2\overrightarrow{PQ}$. D. T chính là phép tịnh tiến theo vector $\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$.

Câu 14: Cho phép tịnh tiến T_u biến điểm M thành M_1 và phép tịnh tiến T_v biến M_1 thành M_2 .

- A. Phép tịnh tiến T_{u+v} biến M_1 thành M_2 .
B. Một phép đối xứng trục biến M thành M_2
C. Không thể khẳng định được có hay không một phép dời hình biến M thành M_2
D. Phép tịnh tiến T_{u+v} biến M thành M_2 .

Câu 15: Cho phép tịnh tiến vector $\vec{v}$ biến A thành A' và M thành M' . Khi đó:

- A. $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{A'M'}$ B. $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{A'M'}$ C. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$ D. $3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{A'M'}$

Câu 16: Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{v} = (a; b)$. Giả sử phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ biến điểm $M(x; y)$ thành $M'(x'; y')$. Ta có biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến theo vector $\vec{v}$ là:

- A. $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$ C. $\begin{cases} x' - b = x - a \\ y' - a = y - b \end{cases}$ D. $\begin{cases} x' + b = x + a \\ y' + a = y + b \end{cases}$

Câu 17: Trong mặt phẳng Oxy, ảnh của đường tròn: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$ qua phép tịnh tiến theo vector $\vec{v} = (1; 3)$ là đường tròn có phương trình:

- A. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$ B. $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$
C. $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 16$ D. $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 16$

Câu 18: Cho phép tịnh tiến theo $\vec{v} = \vec{0}$, phép tịnh tiến $T_{\vec{0}}$ biến hai điểm M và N thành 2 điểm M' và N' khi đó:

- A. Điểm M trùng với điểm N B. Vector $\overrightarrow{MN}$ là vector $\vec{0}$
C. Vector $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{0}$ D. $\overrightarrow{MM'} = \vec{0}$

Câu 19: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy. Cho phép tịnh tiến theo $\vec{v}(1; 1)$, phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ biến $\Delta: x - 1 = 0$ thành đường thẳng Δ' . Khi đó phương trình của Δ' là:

- A. $x - 1 = 0$ B. $x - 2 = 0$ C. $x - y - 2 = 0$ D. $y - 2 = 0$

Câu 20: Phép quay $Q_{(O; \varphi)}$ biến điểm M thành M'. Khi đó:

- A. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}$ và $(OM, OM') = \varphi$ B. $OM = OM'$ và $(OM, OM') = \varphi$
C. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}$ và $\widehat{MOM'} = \varphi$ D. $OM = OM'$ và $\widehat{MOM'} = \varphi$

Câu 21: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm A(3;0). Tìm tọa độ ảnh A' của điểm A qua phép quay $Q_{(O; \frac{\pi}{2})}$

- A. A'(0; -3); B. A'(0; 3); C. A'(-3; 0); D. A'(2√3; 2√3).

Câu 22: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm A(3;0). Tìm tọa độ ảnh A' của điểm A qua phép quay $Q_{(O; -\frac{\pi}{2})}$

- A. A'(-3; 0); B. A'(3; 0);
C. A'(0; -3); D. A'(-2√3; 2√3).

Câu 23: Cho tam giác đều ABC hãy xác định góc quay của phép quay tâm A biến B thành điểm C:

- A. $\varphi = 30^\circ$ B. $\varphi = 90^\circ$
C. $\varphi = -120^\circ$ D. $\varphi = -60^\circ$ hoặc $\varphi = 60^\circ$

Câu 24: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm M(-2; 4). Phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$ biến điểm M thành điểm nào trong các điểm sau?

- A. (-3; 4) B. (-4; -8) C. (4; -8) D. (4; 8)

Câu 25: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $2x + y - 3 = 0$. Phép vị tự tâm O tỉ số $k = 2$ biến d thành đường thẳng nào trong các đường thẳng có phương trình sau?

- A. $2x + y + 3 = 0$ B. $2x + y - 6 = 0$ C. $4x - 2y - 3 = 0$ D. $4x + 2y - 5 = 0$

Câu 26: Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$. Phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$ biến (C) thành đường tròn nào trong các đường tròn có phương trình sau?

- A. $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$ B. $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 4$
C. $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$ D. $(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 16$

Câu 27: Phép vị tự tâm O tỉ số k ($k \neq 0$) biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho:

- A. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{k} \overrightarrow{OM'}$ B. $\overrightarrow{OM} = k \overrightarrow{OM'}$ C. $\overrightarrow{OM} = -k \overrightarrow{OM'}$ D. $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$

Câu 28: Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M, N lần lượt thành hai điểm M' và N' thì:

- A. $\overrightarrow{M'N'} = k \overrightarrow{MN}$ và $M'N' = -kMN$ B. $\overrightarrow{M'N'} = k \overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k|MN$
C. $\overrightarrow{M'N'} = |k| \overrightarrow{MN}$ và $M'N' = kMN$ D. $\overrightarrow{M'N'} // \overrightarrow{MN}$ và $M'N' = \frac{1}{2} MN$

Câu 29: Cho tam giác ABC với trọng tâm G. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AC, AB của tam giác ABC. Khi đó phép vị tự nào biến tam giác A'B'C' thành tam giác ABC?

- A. Phép vị tự tâm G, tỉ số 2. B. Phép vị tự tâm G, tỉ số -2.
C. Phép vị tự tâm G, tỉ số -3. D. Phép vị tự tâm G, tỉ số 3.

Câu 30: Cho hình thang ABCD, với $\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi V là phép vị tự biến $\overrightarrow{AB}$ thành $\overrightarrow{CD}$. Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào đúng:

A. V là phép vị tự tâm I tỉ số $k = -\frac{1}{2}$

B. V là phép vị tự tâm I tỉ số $k = \frac{1}{2}$

C. V là phép vị tự tâm I tỉ số $k = -2$

D. V là phép vị tự tâm I tỉ số $k = 2$

Câu 31: Cho tam giác ABC, với G là trọng tâm tam giác, D là trung điểm của BC. Gọi V là phép vị tự tâm G biến điểm A thành điểm D. Khi đó V có tỉ số k là:

A. $k = \frac{3}{2}$

B. $k = -\frac{3}{2}$

C. $k = \frac{1}{2}$

D. $k = -\frac{1}{2}$

Câu 32: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy. Cho hai điểm M(4; 6) và M'(-3; 5). Phép vị tự tâm I tỉ số $k = \frac{1}{2}$ biến điểm M thành M'. Khi đó tọa độ điểm I là:

A. I(-4; 10)

B. I(11; 1)

C. I(1; 11)

D. I(-10; 4)

Câu 33: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy. Cho hai điểm A(1;2), B(-3; 4) và I(1; 1). Phép vị tự tâm I tỉ số $k = -\frac{1}{3}$ biến điểm A thành A', biến điểm B thành B'. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng:

A. $\overrightarrow{A'B'} = \left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$

B. $\overrightarrow{A'B'} = \left(-\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$

C. $|\overrightarrow{A'B'}| = \sqrt{203}$

D. $A'\left(1; -\frac{2}{3}\right), B'\left(\frac{7}{3}; 0\right)$

Câu 34: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy. Cho hai đường tròn (C) và (C'), trong đó (C') có phương trình: $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 9$. Gọi V là phép vị tự tâm I(1; 0) tỉ số $k = 3$ biến đường tròn (C) thành (C'). Khi đó phương trình của (C) là:

A. $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = 1$

B. $x^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = 9$

C. $x^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = 1$

D. $x^2 + y^2 = 1$

Câu 35: Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$. Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k = \frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc 90° sẽ biến (C) thành đường tròn nào trong các đường tròn sau?

A. $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$

B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

C. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$

D. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$

Câu 36: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho A(-2; -3), B(4; 1). phép đồng dạng tỉ số $k = \frac{1}{2}$ biến điểm A thành A', biến điểm B thành B'. Khi đó độ dài A'B' là:

A. $\frac{\sqrt{52}}{2}$

B. $\sqrt{52}$

C. $\frac{\sqrt{50}}{2}$

D. $\sqrt{50}$

Câu 37: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) tâm I(3; 2), bán kính R = 2. Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép đồng dạng tỉ số $k = 3$. khi đó trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai:

A. (C') có phương trình $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 36$

B. (C') có phương trình $x^2 + y^2 - 2y - 35 = 0$

C. (C') có phương trình $x^2 + y^2 + 2x - 36 = 0$

D. (C') có bán kính bằng 6.

CHƯƠNG 2: ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG.

I - TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CỦA CHƯƠNG.

§1: ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

1. Mở đầu về hình học không gian

2. Các tính chất thừa nhận của hình học không gian:

Một số qui tắc vẽ hình biểu diễn của hình không gian

- Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.
- Hình biểu diễn của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song, của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng cắt nhau.
- Hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng.
- Đường nhìn thấy vẽ nét liền, đường bị che khuất vẽ nét đứt.

3. Điều kiện xác định mặt phẳng:

- Ba điểm không thẳng hàng thuộc mặt phẳng. ($mp(ABC), (ABC)$)
- Một điểm và một đường thẳng không đi qua điểm đó thuộc mặt phẳng. ($mp(A, d)$)
- Hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng. ($mp(a, b)$)

4. Hình chóp và hình tứ diện

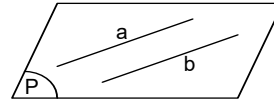
§2: HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

1. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng phân biệt

2. Hai đường thẳng song song

a. Định nghĩa

$$a // b \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \subset (P) \\ a \cap b = \emptyset \end{cases}$$



b. Tính chất

- Nếu ba mặt phẳng phân biệt cắt nhau từng đôi một theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng qui hoặc đôi một song song.
- Nếu hai mặt phẳng cắt nhau lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.
- Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

§3: ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẪNG

1. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng:

2. Định nghĩa: $d // (P) \Leftrightarrow d \cap (P) = \emptyset$

3. Tính chất

- Nếu đường thẳng d không nằm trên mặt phẳng (P) và d song song với đường thẳng d' nằm trong (P) thì d song song với (P) .
- Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) thì mọi mặt phẳng (Q) chứa d mà cắt (P) thì cắt theo giao tuyến song song với d .
- Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng cũng song song với đường thẳng đó.
- Nếu hai đường thẳng a và b chéo nhau thì có duy nhất một mặt phẳng chứa a và song song với b .

§4: HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

1. Định nghĩa

$$(P) // (Q) \Leftrightarrow (P) \cap (Q) = \emptyset$$

2. Tính chất

- Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q) .
- Nếu đường thẳng d song song với $mp(P)$ thì có duy nhất một $mp(Q)$ chứa d và song song với (P) .

- Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.
- Cho một điểm $A \notin (P)$. khi đó mọi đường thẳng đi qua A và song song với (P) đều nằm trong một mp(Q) đi qua A và song song với (P) .
- Nếu một mặt phẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì cũng cắt mặt phẳng kia và các giao tuyến của chúng song song với nhau.
- Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.
- **Định lí Thales:** Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.
- **Định lí Thales đảo:** Giả sử trên hai đường thẳng d và d' lần lượt lấy các điểm A, B, C và A', B', C' sao cho:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

Khi đó, ba đường thẳng AA', BB', CC' lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song, tức là chúng cùng song với một mặt phẳng.

II - TÓM TẮT MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng

Phương pháp giải: • Tìm hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng
• Đường thẳng đi qua hai điểm chung ấy là giao tuyến cần tìm

Dạng 2: Xác định giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng (α)

Phương pháp giải: • Tìm đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (α)
• Giao điểm của a và b là giao điểm của a và mặt phẳng (α)

Chú ý : Đường thẳng b thường là giao tuyến của mp (α) và mp $(\beta) \supset a$

Cần chọn mp (β) chứa đường thẳng a sao cho giao tuyến của

mp (α) và mp (β) dễ xác định và giao tuyến không song song với đường thẳng a

Dạng 3: Chứng minh ba điểm thẳng hàng

Phương pháp : • Chứng minh ba điểm đó cùng thuộc hai mp phân biệt
• Khi đó ba điểm thuộc đường thẳng giao tuyến của hai mp

Dạng 4: Chứng minh 3 đường thẳng đồng quy

Phương pháp:

- Cách 1: Chứng minh 3 đường thẳng này không đồng phẳng và cắt nhau đôi một
- Cách 2: Chứng minh hai trong 3 đường thẳng này cắt nhau và giao điểm của chúng thuộc đường thẳng thứ 3.

Dạng 5: Thiết diện của hình chop cắt bởi mặt phẳng

Phương pháp :

- Cách 1: Xác định thiết diện bằng cách kéo dài các giao tuyến
- Cách 2: Xác định thiết diện bằng cách vẽ giao tuyến phụ

Dạng 6 : Chứng minh hai đường thẳng a và b song song :

Sử dụng một trong các cách sau :

- Chứng minh a và b đồng phẳng và không có điểm chung
- Chứng minh a và b phân biệt và cùng song song với đường thẳng thứ ba
- Chứng minh a và b đồng phẳng và áp dụng các tính chất của hình học phẳng (cạnh đối của hình bình hành, định lý talet ...)

• Sử dụng các định lý

• Chứng minh bằng phản chứng

Dạng 7 : Chứng minh đường thẳng a song song mặt phẳng (P) :

$$\text{Phương pháp : Chứng minh } \begin{cases} d \not\subset \alpha \\ d // a \\ a \subset \alpha \end{cases} \Rightarrow d // \alpha$$

Dạng 8 : Chứng minh $(\alpha) // (\beta)$: Sử dụng các cách sau :

$$- \begin{cases} a \subset (\alpha), b \subset (\alpha) \\ a \cap b = M \\ a // (\beta), b // (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$$

$$- \begin{cases} a \subset (\alpha), b \subset (\alpha) \\ a \cap b = M \\ c \subset (\beta), d \subset (\beta) \\ c \cap d = N \\ a // c, b // d \end{cases} \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$$

$$- \begin{cases} (\alpha) // (\gamma) \\ (\beta) // (\gamma) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$$

III - BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Cho hình chóp S.ABCD. Điểm M và N lần lượt thuộc các cạnh BC và SD.

a/ Tìm $I = BN \cap (SAC)$.

b/ Tìm $J = MN \cap (SAC)$.

c/ Chứng minh I, J, C thẳng hàng

d/ Xác định thiết diện của hình chóp với (BCN)

Bài 2: Cho tứ diện ABCD. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AD và CD và G trên đoạn AB sao cho $GA = 2GB$.

a/ Tìm $M = GE \cap mp(BCD)$,

b/ Tìm $H = BC \cap (EFG)$. Suy ra thiết diện của (EFG) với tứ diện ABCD. Thiết diện là hình gì ?

c/ Tìm $(DGH) \cap (ABC)$.

Bài 3: Cho hình chóp SABCD. Gọi $O = AC \cap BD$. Một mp(α) cắt SA, SB, SC, SD tại A', B', C', D'. Giả sử $AB \cap C'D = E$, $A'B' \cap C'D' = E'$.

a/ Chứng minh: S, E, E' thẳng hàng

b/ Chứng minh A'C', B'D', SO đồng qui

Bài 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành.

a/ Tìm $(SAC) \cap (SBD)$; $(SAB) \cap (SCD)$, $(SBC) \cap (SAD)$.

b/ Một mp(α) qua CD, cắt SA và SB tại E và F. Tứ giác CDEF là hình gì? Chứng tỏ giao điểm của DE và CF luôn luôn ở trên 1 đường thẳng cố định.

c/ Gọi M, N là trung điểm SD và BC. K là điểm trên đoạn SA sao cho $KS = 2KA$. Hãy tìm thiết diện của hình chóp SABCD về mp (MNK)

Bài 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang ($AB \parallel CD$; $AB > CD$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB.

a/ Chứng minh: $MN \parallel CD$

b/ Tìm $P = SC \cap (ADN)$

c/ Kéo dài AN và DP cắt nhau ở I. Chứng minh: $SI \parallel AB \parallel CD$. Tứ giác SABI là hình gì?

Bài 6: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD.

a/ Chứng minh rằng $MN \parallel (ABD)$

b/ Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm $\triangle ABC$ và $\triangle ACD$. Chứng minh rằng $GG' \parallel (BCD)$

Bài 7: Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình thang ABCD với $AB \parallel CD$, và $AB = 2CD$

a/ Tìm $(SAD) \cap (SCD)$.

b/ M là trung điểm SA, tìm $(MBC) \cap (SAD)$ và (SCD)

c/ Một mặt phẳng (α) đi động qua AB, cắt SC và SD tại H và K. Tứ giác A BHK là hình gì?

d/ Chứng minh giao điểm của BK và AH luôn nằm trên 1 đường thẳng cố định.

Bài 8: Cho hình chóp SABCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SD, BD

a/ Chứng minh $AD \parallel (MNP)$

b/ $NP \parallel (SBC)$

c/ Tìm thiết diện của (MNP) với hình chóp. Thiết diện là hình gì?

Bài 9: Cho hình bình hành ABCD và ABEF nằm trên hai nửa mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Các điểm I, J, K theo thứ tự là trọng tâm các tam giác ADF, ADC, BCE. Chứng minh: $(IJK) \parallel (CDEF)$

Bài 10: Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi I, K, G lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, A'B'C' và ACC'. Chứng minh rằng: $(IKG) \parallel (BB'C'C)$ và $(A'GK) \parallel (AIB)$.

Bài 11: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một tứ giác lồi. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Mặt phẳng (α) qua M và song song với (SBD). Mặt phẳng (β) qua N và song song với (SBD).

a/ Xác định thiết diện của hình chóp lần lượt cắt bởi 2 mặt phẳng (α) và (β) .

b/ Gọi I và J lần lượt là giao điểm của AC với hai mặt phẳng nói trên. Chứng minh: $AC = 2IJ$.

Bài 12: Cho lăng trụ tam giác

a/ Chứng minh: $B'C \parallel (AHC')$

b/ Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'BC)$. Chứng minh: $d \parallel (BB'C'C)$.

c/ Xác định thiết diện của lăng trụ cắt bởi mặt phẳng (H; d)

Bài 13: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Lấy hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AD và CC'

sao cho $\frac{AM}{AD} = \frac{CN}{CC'}$.

a/ Chứng minh: $MN \parallel (AB'C')$

b/ Xác định thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng (α) qua MN và song song với $(AB'C')$.

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho $mp(\alpha)$ và đường thẳng $d \not\subset (\alpha)$. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

- A. Nếu $d \parallel (\alpha)$ thì trong (α) tồn tại đường thẳng a sao cho $a \parallel d$
- B. Nếu $d \parallel (\alpha)$ và $b \subset (\alpha)$ thì $d \parallel b$
- C. Nếu $d \parallel c \subset (\alpha)$ thì $d \parallel (\alpha)$
- D. Nếu $d \cap (\alpha) = A$ và $d' \subset (\alpha)$ thì d và d' hoặc cắt nhau hoặc chéo nhau.

Câu 2. Cho đường thẳng $a \subset mp(\alpha)$ và đường thẳng $b \subset mp(\beta)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow a \parallel b$
- B. $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow a \parallel (\beta)$
- C. $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow b \parallel (\alpha)$
- D. a và b hoặc song song hoặc chéo nhau.

Câu 3. Cho tứ diện $ABCD$ và M là điểm ở trên cạnh AC . $mp(\alpha)$ qua M và song song với AB . Thiết diện của tứ diện cắt bởi $mp(\alpha)$ là:

- A. Hình bình hành
- B. Hình chữ nhật
- C. Hình thang
- D. Hình thoi

Câu 4. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Hai đường thẳng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng phân biệt thì chéo nhau
- B. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau
- C. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung
- D. Hai đường thẳng phân biệt không song song thì chéo nhau

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Thiết diện của $mp(\alpha)$ tùy ý với hình chóp không thể là:

- A. Lục giác
- B. Ngũ giác
- C. Tứ giác
- D. Tam giác

Câu 6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $AB'C'D$ và $BCD'A'$ là hai hình bình hành có chung một đường trung bình
- B. BD' và $B'C'$ chéo nhau
- C. $A'C$ và DD' chéo nhau
- D. DC' và AB' chéo nhau

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và điểm M ở trên cạnh SB . $mp(ADM)$ cắt hình chóp theo thiết diện là hình:

- A. Tam giác
- B. Hình thang
- C. Hình bình hành
- D. Hình chữ nhật

Câu 8. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M ở trên cạnh BC . $mp(\alpha)$ qua M song song với AB và CD . Thiết diện của (α) với tứ diện là :

- A. Hình thang
- B. Hình bình hành
- C. Hình chữ nhật
- D. Tứ giác lồi

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$. M là trung điểm SA . $mp(MBC)$ cắt hình chóp theo thiết diện là:

- A. Tam giác MBC B. Hình bình hành C. Hình thang vuông D. Hình chữ nhật
- Câu 10.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O . M là trung điểm của OC , $mp(\alpha)$ qua M song song với SA và BD . Thiết diện của hình chóp với $mp(\alpha)$ là:
A. Hình tam giác B. Hình bình hành C. Hình chữ nhật D. Hình ngũ giác
- Câu 11.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$. $mp(\alpha)$ qua trung điểm của AC và song song với AB, CD cắt $ABCD$ theo thiết diện là:
A. Hình tam giác B. Hình vuông C. Hình thoi D. Hình chữ nhật
- Câu 12.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. $mp(AB'D')$ song song với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây?
A. (BCA') B. $(BC'D)$ C. $(A'C'C)$ D. (BDA')
- Câu 13.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của AB . $mp(MA'C')$ cắt hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ theo thiết diện là hình gì?
A. Hình bình hành B. Hình chữ nhật C. Hình thoi D. Hình thang
- Câu 14.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , I là trung điểm cạnh SC . Khẳng định nào sau đây **sai**?
A. $IO \parallel mp(SAB)$
B. $IO \parallel mp(SAD)$
C. $mp(IBC)$ cắt $S.ABCD$ theo thiết diện là một tứ giác
D. $(IBC) \cap (SAC) = IO$
- Câu 15.** Cho tứ diện $ABCD$. O là một điểm bên trong tam giác BCD . M là một điểm trên AO . I, J là hai điểm trên BC, BD . IJ cắt CD tại K , BO cắt IJ tại E và cắt CD tại H , ME cắt AH tại F . Giao tuyến của hai mặt phẳng (MIJ) và (ACD) là:
A. KM B. AK C. MF D. KF
- Câu 16.** Cho đường thẳng a nằm trên $mp(\alpha)$ và đường thẳng b nằm trên $mp(\beta)$. Biết $(\alpha) \parallel (\beta)$. Tìm câu **sai**:
A. $a \parallel (\beta)$ B. $b \parallel (\alpha)$
C. $a \parallel b$ D. Nếu có một $mp(\gamma)$ chứa a và b thì $a \parallel b$.
- Câu 17.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD và ACD . Chọn câu **sai** :
A. $G_1G_2 \parallel (ABD)$ B. $G_1G_2 \parallel (ABC)$
C. BG_1, AG_2 và CD đồng qui D. $G_1G_2 = \frac{2}{3}AB$
- Câu 18.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Lấy điểm I trên đoạn SO sao cho $\frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}$, BI cắt SD tại M và DI cắt SB tại N . $MNBD$ là hình gì ?
A. Hình thang B. Hình bình hành
C. Hình chữ nhật D. Tứ diện vì MN và BD chéo nhau.
- Câu 19.** Cho tứ diện $ABCD$. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AC, BC, BD, AD . Tìm điều kiện để $MNPQ$ là hình thoi:
A. $AB = BC$ B. $BC = AD$ C. $AC = BD$ D. $AB = CD$

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mp (α) qua BD và song song với SA , mp (α) cắt SC tại K . Chọn khẳng định đúng :

- A. $SK = 2 KC$ B. $SK = 3 KC$ C. $SK = KC$ D. $SK = \frac{1}{2} KC$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn là AB . Điểm M là trung điểm CD . Mp (α) qua M và song song với BC và SA , mp (α) cắt AB tại N và cắt SB tại P . Nói gì về thiết diện của mp (α) và $S.ABCD$?

- A. là một hình bình hành B. là một hình thang có đáy lớn là MN
C. là tam giác MNP D. là một hình thang có đáy nhỏ là NP

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$, $AC \cap BD = M$, $AB \cap CD = N$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là đường thẳng :

- A. SN B. SC C. SB D. SM .

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$, $AC \cap BD = M$, $AB \cap CD = N$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng :

- A. SN B. SA C. MN D. SM .

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi A' , B' , C' , D' lần lượt là trung điểm của SA , SB , SC , SD . Trong các đường thẳng nào sau đây đường thẳng nào không song song với $A'B'$?

- A. AB B. CD C. $C'D'$ D. SC .

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành. Gọi M , N , P lần lượt là trung điểm các cạnh AB , AD , SC . Thiết diện của hình chóp với mp (MNP) là một đa giác có bao nhiêu cạnh ?

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$. Điểm C' nằm trên cạnh SC . Thiết diện của hình chóp với mp (ABC') là một đa giác có bao nhiêu cạnh ?

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

Câu 27. Cho tứ diện $ABCD$ với M , N lần lượt là trọng tâm các tam giác ABD , ACD . Xét các khẳng định sau :

- (I) $MN \parallel mp(ABC)$ (II) $MN \parallel mp(BCD)$
(III) $MN \parallel mp(ACD)$ (IV) $MN \parallel mp(ABD)$

Các mệnh đề nào đúng ?

- A. I, II B. II, III C. III, IV D. I, IV.

Câu 28. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M , N , P , Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB , AD , CD , BC . Mệnh đề nào sau đây sai ?

- A. $MN \parallel BD$ và $MN = \frac{1}{2} BD$ B. $MN \parallel PQ$ và $MN = PQ$
C. $MNPQ$ là hình bình hành D. MP và NQ chéo nhau.

Câu 29. Cho hình bình hành $ABCD$ và một điểm S không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là một đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây ?

- A. AB B. AC C. BC D. SA

Câu 30. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là điểm nằm trong tam giác ABC , (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với các đường thẳng AB và CD . Thiết diện của tứ diện và mp (α) là hình gì ?

- A. Hình bình hành B. Hình tứ diện C. Hình vuông D. Hình thang.

