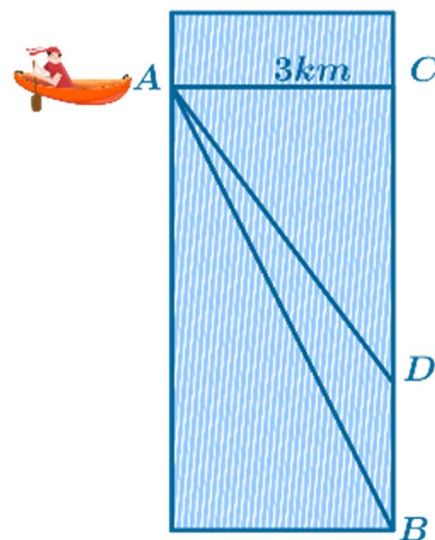


Câu 1. (3,0 điểm) Giải phương trình: $\log_7 \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} \right) + 4x^2 + 1 = 6x$

Câu 2. (3,0 điểm) Một người vay tiền ở một ngân hàng theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,7% / tháng với tổng số tiền vay là 1 tỉ đồng. Mỗi tháng người đó đều trả cho ngân hàng một số tiền như nhau để trừ vào tiền gốc và lãi. Biết rằng đúng 25 tháng thì người đó trả hết gốc và lãi cho ngân hàng. Hỏi số tiền của người đó trả cho ngân hàng ở mỗi tháng là bao nhiêu?

Câu 3. (3,0 điểm) Một người đàn ông muốn chèo thuyền từ vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện càng nhanh càng tốt trên một bờ sông thẳng rộng 3km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B , hay có thể chèo trực tiếp đến B , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa B và C và sau đó chạy đến B . Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6km/h, chạy bộ 8km/h và quãng đường $BC=8$ km. Biết tốc độ dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tính khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: giờ) để người đàn ông đến B .

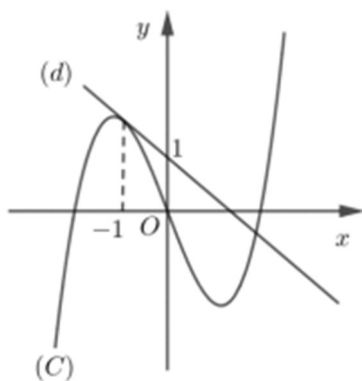


Câu 4. (3,0 điểm) Cho hàm số $y = \frac{-2x+3}{x+1}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) , biết tiếp tuyến này cắt hai trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A, B khác O và $5OA = 4OB$.

Câu 5. (2,0 điểm) Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = 4, AC = 2$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$, SA vuông góc với mặt đáy. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC . Góc giữa mặt phẳng (ABC) và (AMN) bằng 60° . Thể tích của khối chóp đã cho bằng bao nhiêu?

Câu 6. (3,0 điểm) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$. Mặt phẳng qua AB và trung điểm M của SC cắt hình chóp theo thiết diện có chu vi bằng $7a$. Tính thể tích của khối nón có đỉnh là S và đường tròn đáy ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.

Câu 7. (3,0 điểm) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Đường thẳng $d: y = g(x)$ là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = -1$. Hỏi phương trình $\frac{f(x)-1}{g(x)-1} - \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ có bao nhiêu nghiệm?



----- HẾT -----

Học sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

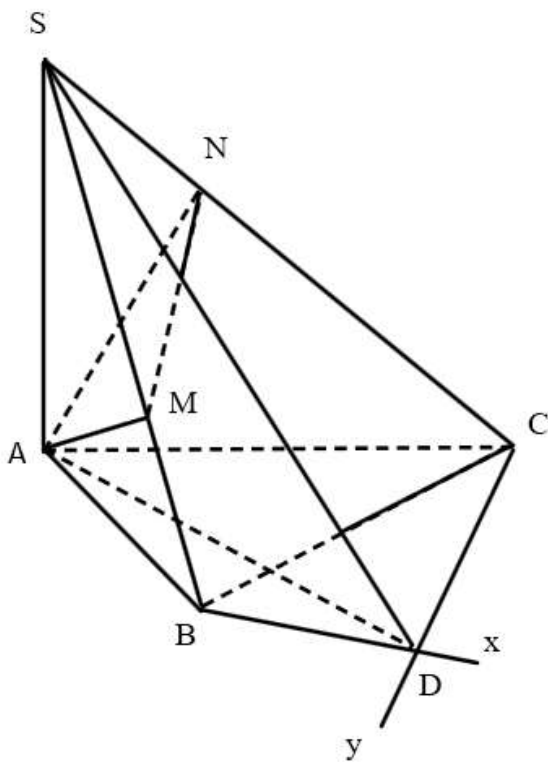
Họ tên thí sinh:Số báo danh:.....

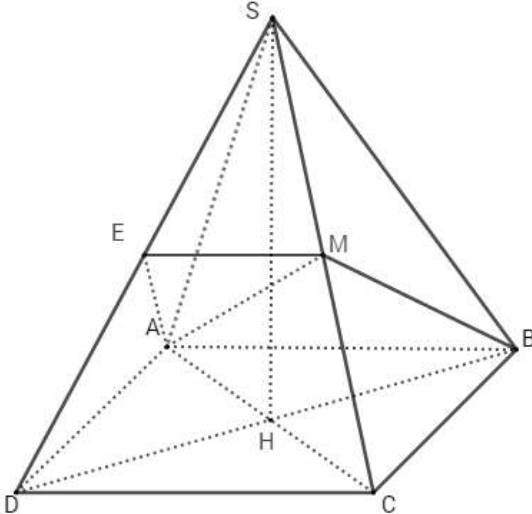
Chữ kí của giám thị 1:Chữ kí của giám thị 2:.....

ĐÁP ÁN ĐỀ HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG KHỐI 12

Câu	Đáp án	Điểm
1	Điều kiện: $x > 0, x \neq \frac{1}{2}$. Ta có: $\log_7 \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} \right) + 4x^2 + 1 = 6x \Leftrightarrow \log_7 (4x^2 - 4x + 1) + 4x^2 - 4x + 1 = \log_7 2x + 2x$. Xét hàm số $f(t) = \log_7 t + t$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 7} + 1 > 0 \forall t > 0$ nên là hàm số đồng biến trên $0; +\infty$. Do đó ta có $4x^2 - 4x + 1 = 2x \Leftrightarrow 4x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}$.	3,0 điểm (1,0X3)
2	Gọi M là số tiền vay ban đầu. Gọi A là số tiền mà hàng tháng người đó trả cho ngân hàng. Sau tháng 1 dư nợ còn lại là: $M.1,007 - A$ Sau tháng 2 dư nợ còn lại là: $(M.1,007 - A).1,007 - A = M.1,007^2 - A.1,007 - A$ Sau tháng 3 dư nợ còn lại là: $(M.1,007^2 - A.1,007 - A).1,007 - A = M.1,007^3 - A[(1,007)^2 + 1,007 + 1].$ Sau tháng thứ n dư nợ còn lại là: $M.1,007^n - A[(1,007)^{n-1} + 1,007^{n-2} + \dots + 1,007 + 1]$ Vì đúng 25 tháng thì trả hết nợ nên: $1.1,007^{25} - A[(1,007)^{24} + 1,007^{23} + \dots + 1,007 + 1] = 0$ $\Leftrightarrow 1,007^{25} = A[(1,007)^{24} + 1,007^{23} + \dots + 1,007 + 1] \Leftrightarrow 1,007^{25} = A \frac{1,007^{25} - 1}{0,007}.$ $\Leftrightarrow A = \frac{1,007^{25} \cdot 0,007}{1,007^{25} - 1} \approx 0,04374151341 \text{ tỉ đồng} \approx 43.741.513 \text{ đồng}$ $\approx 43.740.000 \text{ đồng}$	3,0 điểm

3	Gọi $CD = x$ Thời gian đi ADB: $\frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{8-x}{8}$ $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{8-x}{8} \quad (0 \leq x \leq 8)$ Xét hàm số $f'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{7}}$ $f(0) = \frac{3}{2}, f(8) = \frac{73}{6}, f\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$ Vậy thời gian ngắn nhất là $1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$	3,0 điểm
4 (3,0 điểm)	Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $y' = \frac{-5}{(x+1)^2} < 0, \forall x \neq -1$.	1
	Suy ra mọi tiếp tuyến của (C) có hệ số góc âm.	
	Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của (C) và tiếp tuyến Δ thỏa đề. Hệ số góc tiếp tuyến Δ là: $k = y'(x_0) = \frac{-5}{(x_0+1)^2}$.	
	Từ giả thiết suy ra Δ có hệ số góc $k = -\tan OAB = -\frac{OB}{OA} = -\frac{5}{4}$.	1
	Do đó: $y'(x_0) = -\frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{-5}{(x_0+1)^2} = -\frac{5}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = -3 \end{cases}$	
	+ Với $x_0 = 1$ thì $y_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ PTTT Δ là: $y = -\frac{5}{4}(x-1) + \frac{1}{2}$ hay $y = -\frac{5}{4}x + \frac{7}{4}$.	0,5
	+ Với $x_0 = -3$ thì $y_0 = -\frac{9}{2} \Rightarrow$ PTTT Δ là: $y = -\frac{5}{4}(x+3) - \frac{9}{2}$ hay $y = -\frac{5}{4}x - \frac{33}{4}$.	0,5
	Cách khác: + Gọi Δ là tiếp tuyến thỏa đề. Phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị (C) tại $M(x_0; y_0)$ có dạng: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = \frac{-5}{(x_0+1)^2}(x - x_0) + \frac{-2x_0+3}{x_0+1} \quad (d).$	1
	+ $\Delta \cap Ox = A \Rightarrow A\left(\frac{-2x_0^2+6x_0+3}{5}; 0\right)$	1

	$+\Delta \cap Oy = B \Rightarrow B \left(0; \frac{-2x_0^2 + 6x_0 + 3}{(x_0 + 1)^2} \right)$	
	$+ 5OA = 4OB \Leftrightarrow 25 \left(\frac{-2x_0^2 + 6x_0 + 3}{5} \right)^2 = 16 \cdot \frac{(-2x_0^2 + 6x_0 + 3)^2}{(x_0 + 1)^4} (*)$	
	$+ \text{vì } A \text{ và } B \text{ không trùng với } O \text{ nên } -2x_0^2 + 6x_0 + 3 \neq 0$	
	$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow (x_0 + 1)^4 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = -3 \end{cases}$	
	$+ \text{Với } x_0 = 1 \text{ thì } y_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{PTTT } (\Delta) \text{ là: } y = -\frac{5}{4}(x-1) + \frac{1}{2} \text{ hay } y = -\frac{5}{4}x + \frac{7}{4}.$	0,5
	$+ \text{Với } x_0 = -3 \text{ thì } y_0 = -\frac{9}{2} \Rightarrow \text{PTTT } (\Delta) \text{ là: } y = -\frac{5}{4}(x+3) - \frac{9}{2} \text{ hay } y = -\frac{5}{4}x - \frac{33}{4}.$ * Nếu học sinh giải ra 4 tiếp tuyến thì trừ <u>0,25</u> điểm.	0,5
5 (2,0 điểm)	Đáp án 	0,5
	Trong (ABC) gọi D là điểm thỏa mãn $ABD = ACD = 90^\circ$.	0,5

	Xét ΔABC có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos A$ Với AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABDC hay là đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Theo định lý sin trong ΔABC ta có: $AD = \frac{BC}{\sin 120^\circ} = \frac{2\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{21}}{3}$. Ta có: $BD \perp (SAB) \Rightarrow BD \perp AM \Rightarrow AM \perp (SBD) \Rightarrow AM \perp SD$. Tương tự: $AN \perp SD \Rightarrow SD \perp (AMN)$. Mặt khác: $SA \perp (ABC)$. Do đó góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (ABC) là góc giữa hai đường thẳng SA và AD. $\Rightarrow$ Góc giữa SA và AD là $(SA, SD) = ASD = 60^\circ$. Trong ΔSAD: $SA = \frac{AD}{\tan ASD} = \frac{4\sqrt{21}}{3} : \tan 60^\circ = \frac{4\sqrt{7}}{3}$. Ta có: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}.4.2.\sin 120^\circ = 2\sqrt{3}$. Vậy thể tích của khối chóp S.ABC là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{4\sqrt{7}}{3}.2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{21}}{9}$.	
		0,5
		0,5
Câu	Đáp án	Điểm
6 3,0 điểm		0,5

	Gọi E là trung điểm $SD \Rightarrow ME // AB$ suy ra (ABM) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình thang $ABME$.	1
	Gọi độ dài cạnh bên của hình chóp là x . Do chóp $S.ABCD$ là chóp đều nên $\Delta SAD = \Delta SBC \Rightarrow AE = BM$.	
	Áp dụng hệ thức trung tuyến ta có: $BM^2 = \frac{SB^2 + BC^2}{2} - \frac{SC^2}{4} = \frac{x^2 + 8a^2}{4}$.	
	Suy ra $AE = BM = \sqrt{\frac{x^2 + 8a^2}{4}}$	
	Mặt khác dễ thấy $EM = a, AB = 2a$ mà chu vi thiết diện bằng $7a$ nên ta có: $a + 2a + 2\sqrt{\frac{x^2 + 8a^2}{4}} = 7a \Rightarrow x = 2a\sqrt{2}$.	1
	Suy ra chiều cao của hình chóp: $SH^2 = SA^2 - \frac{AC^2}{4} = 6a^2 \Rightarrow SH = a\sqrt{6}$.	0,5
	Khối nón có đỉnh là S và đường tròn đáy ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ chiều cao là $SH = a\sqrt{6}$ và bán kính đường tròn đáy là $\frac{AC}{2} = a\sqrt{2}$ nên thể tích khối nón là:	
	$V = \frac{1}{3}\pi(a\sqrt{2})^2 a\sqrt{6} = \frac{2\pi a^3 \sqrt{6}}{3}$.	
7	Đáp án	Điểm
(3 điểm)	Xét phương trình $\frac{f(x)-1}{g(x)-1} - \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ ($f(x) \neq 0; g(x) \neq 1$)	1,0
	$\Leftrightarrow f^2(x) - f(x) = g^2(x) - g(x)$	
	$\Leftrightarrow f^2(x) - g^2(x) = f(x) - g(x)$	
	$\Leftrightarrow [f(x) - g(x)][f(x) + g(x)] = f(x) - g(x)$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) & (1) \\ f(x) = 1 - g(x) & (2) \end{cases}$	0,5
	- Xét phương trình (1): Từ đồ thị suy ra (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt $\begin{cases} x = -1 \\ x = \alpha > 0. \end{cases}$	
	- Xét phương trình (2): Xét hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) như hình vẽ và hàm số $y = -g(x) + 1$ có đồ thị là đường thẳng d' được xác định như sau:	
	+ Lấy đối xứng phần đồ thị đường thẳng d qua trục Ox .	
	+ Sau đó tịnh tiến đường thẳng trên theo phương Oy lên trên 1 đơn vị.	

	Khi đó số nghiệm của (2) bằng số giao điểm của (C) với d' . Từ đồ thị suy ra có 3 giao điểm, trong đó 1 giao điểm là gốc tọa độ O.	0,5
	Do đó (2) có 3 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $x = 0$ (loại). Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm	0,5