SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI
LIÊN CỤM TRƯỜNG THPT

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI OLYMPIC DÀNH CHO HỌC SINH LỚP 10, LỚP 11
NĂM HỌC 2023 – 2024
Môn thi: **TOÁN 10**
Ngày thi: 09/3/2024
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I (*4,0 điểm*)

Cho hàm số $y=x^2-2mx+2m-1$ có đồ thị (P) (m là tham số).

1) Chứng minh với mọi $m\neq 1$, đồ thị (P) luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

2) Gọi A,B là hai giao điểm phân biệt của đồ thị (P) với trục hoành, C là giao điểm của đồ thị (P) với trục tung và G là trọng tâm của tam giác ABC. Tìm tập hợp trọng tâm G của tam giác ABC khi m thay đổi.

Câu II *(5,0 điểm)*

1) Giải phương trình $2x^2-11x+23=4\sqrt{x+1}$.

2) Một nông trại dự định trồng cà rốt và khoai tây trên khu đất có diện tích 5 *ha*. Để chăm bón các loại cây này, nông trại phải dùng phân vi sinh. Nếu trồng cà rốt trên 1 *ha* cần dùng 3 tấn phân vi sinh và thu được 50 triệu đồng tiền lãi. Nếu trồng khoai tây trên 1 *ha* cần dùng 5 tấn phân vi sinh và thu được 75 triệu đồng tiền lãi. Hỏi nông trại cần trồng mỗi loại cây trên diện tích là bao nhiêu để thu được tổng số tiền lãi cao nhất? Biết rằng số phân vi sinh cần dùng không được vượt quá 18 tấn.

Câu III *(4,0 điểm)*

Cho tập hợp $A=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

1) Từ tập A lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau?

2) Từ tập A lập được bao nhiêu số tự nhiên có 8 chữ số, trong đó có hai chữ số lẻ khác nhau và ba chữ số chẵn khác nhau, mà mỗi chữ số chẵn có mặt đúng hai lần?

Câu IV *(4,0 điểm)*

Cho điểm A di động trên nửa đường tròn tâm O, đường kính $BC=3\,cm$ (A không trùng B,C).

1) Gọi E là điểm thuộc đoạn thẳng AB sao cho $AB=3AE$. Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AO};\ \overrightarrow{CE}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Chứng minh AO vuông góc với CE khi và chỉ khi $AB^2=3AC^2$.

2) Với $AC=x;\ AB=y$ và M là một điểm bất kì, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=-18MA^2+x^2MB^2+y^2MC^2$.

Câu V *(3,0 điểm)* Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2BC$. Điểm $M(1;2)$ là trung điểm của đoạn AB và $N(2;-1)$ là điểm thuộc đoạn CD thỏa mãn $CN=3ND$.

1) Tính độ dài $BC,\ AN$.

2) Viết phương trình tổng quát đường thẳng AD.

----------HẾT----------

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

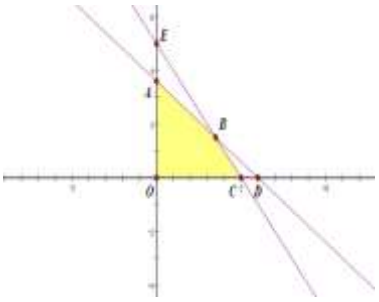
Họ tên thí sinh:……Số báo danh:……..
Họ tên và chữ kí của cán bộ coi thi số 1: Họ tên và chữ kí của cán bộ coi thi số 2:

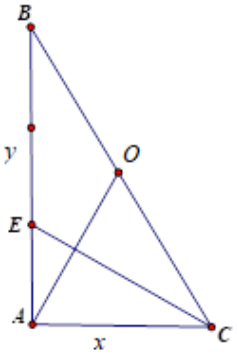
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI
LIÊN CỤM TRƯỜNG THPT

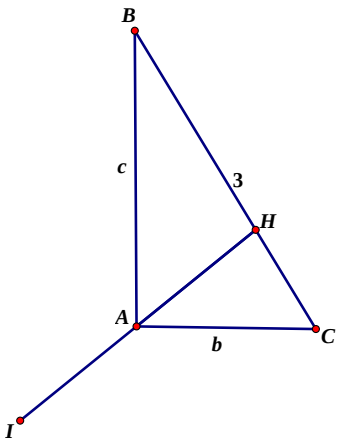
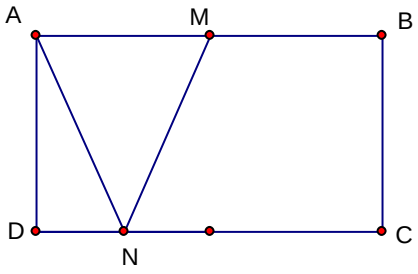
KỲ THI OLYMPIC DÀNH CHO HỌC SINH LỚP 10
NĂM HỌC 2023 – 2024
Môn thi: Toán
Ngày thi: 09/3/2024

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Nội dung	Điểm
Câu I.1 2,0đ	Cho hàm số $y=x^2-2mx+2m-1$ có đồ thị (P) (m là tham số). 1) Chứng minh với mọi $m\neq 1$, đồ thị (P) luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.	
	Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (P) và trục hoành là $x^2-2mx+2m-1=0\ (1)$	0,5
	Để đồ thị (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A và B điều kiện cần và đủ là phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt	0,5
	$\Leftrightarrow \Delta' = m^2-(2m-1)>0 \Leftrightarrow (m-1)^2>0 \Leftrightarrow m\neq 1.$	0,5
	Vậy, với $m\neq 1$ thì đồ thị (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.	0,5
Câu I.2 2,0 đ	2) Gọi A, B là hai giao điểm phân biệt của đồ thị (P) với trục hoành, C là giao điểm của đồ thị (P) với trục tung ,…	
	Gọi C là giao điểm của đồ thị (P) với trục tung, suy ra $C(0;2m-1)$. Gọi $A(x_A;0)$, $B(x_B;0)$. Ta có $x_A+x_B=2m$.	0,5
	Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là $\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{2m+0}{3}=\dfrac{2m}{3} \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\dfrac{0+0+2m-1}{3}=\dfrac{2m-1}{3} \end{cases}$;	0,5
	Từ đó suy ra $x_G-y_G=\dfrac{1}{3}$ hay $3x_G-3y_G-1=0$. Do $m\neq 1$ nên $x_G\neq\dfrac{2}{3}$, $y_G\neq\dfrac{1}{3}$.	0,5
	Vậy, tập hợp trọng tâm G của tam giác ABC khi m thay đổi là đường thẳng $\Delta: 3x-3y-1=0$ bỏ đi điểm $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.	0,5
CâuII.1 2,0 đ	Giải phương trình: $2x^2-11x+23=4\sqrt{x+1}.$	
	ĐK: $x\geq -1$. $(1)\Leftrightarrow 2(x^2-6x+9)+(x+1-4\sqrt{x+1}+4)=0$	0,5

	$2(x-3)^2+(\sqrt{x+1}-2)^2=0$ (*)	0,5
	Do $a^2\geq 0(\forall a)$ nên pt(*) $\Leftrightarrow\begin{cases}x-3=0\\ \sqrt{x+1}-2=0\end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow x=3$. Vậy pt đã cho có 1 nghiệm x=3.	0,5
CâuII.2 3,0 đ	Một nông trại dự định trồng cà rốt và khoai tây trên khu đất có diện tích 5 *ha*. …	
	Giả sử trồng x(*ha*) cà rốt và y(*ha*) khoai tây. Điều kiện : $x\geq 0, y\geq 0$ và $x+y\leq 5$ Số phân vi sinh cần dùng là : $3x+5y$ (tấn) Ta có $3x+5y\leq 18$ Số tiền thu được là $T=50x+75y$ (triệu đồng).	0,5
	Ta cần tìm x, y thoả mãn: $\begin{cases}x\geq 0, y\geq 0\\ x+y\leq 5\\ 3x+5y\leq 18\end{cases}$ (I) sao cho $T=50x+75y$ đạt giá trị lớn nhất.	0,5
	Trên mặt phẳng tọa độ Oxy vẽ các đường thẳng $d_1: x+y=5;\quad d_2: 3x+5y=18$ Đường thẳng d_1 cắt trục hoành tại điểm $C(5;0)$, cắt trục tung tại điểm $E(0;5)$. Đường thẳng d_2 cắt trục hoành tại điểm $D(6;0)$, cắt trục tung tại điểm $A\left(0;\frac{18}{5}\right)$.	0,5
	Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình (I) là miền đa giác $OABC$. 	0,5
	$\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\Rightarrow T=0;\ \begin{cases}x=5\\ y=0\end{cases}\Rightarrow T=250;\ \begin{cases}x=0\\ y=\frac{18}{5}\end{cases}\Rightarrow T=270;\ \begin{cases}x=\frac{7}{2}\\ y=\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow T=287,5$	0,5
	Vậy để thu được tổng số tiền lãi cao nhất thì nông trại trồng $3,5$ *ha* cà rốt và $1,5$ *ha* khoai tây.	0,5
Câu III.1 2,0 đ	Cho tập hợp $A=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$	

	1) Từ tập A lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau?	
	Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}, a \neq 0$. • Chọn a có 9 cách.	1,0
	• Chọn b,c,d,e từ 9 chữ số còn lại có $A_9^4 = 3024$ cách. Vậy có $9 \times 3024 = 27216$.	1,0
Câu III.2 2,0 đ	2) Từ tập A lập được bao nhiêu số tự nhiên có 8 chữ số, trong đó có hai chữ số lẻ khác nhau và ba chữ số chẵn khác nhau, mà mỗi chữ số chẵn có mặt đúng hai lần?	
	Trường hợp 1: Xét các số có 8 chữ số, trong đó có hai chữ số lẻ khác nhau và ba chữ số chẵn khác nhau mà mỗi chữ số chẵn có mặt đúng hai lần, **bao gồm cả chữ số 0 có thể đứng đầu.** + Chọn 2 chữ số lẻ khác nhau và 3 chữ số chẵn khác nhau có $C_5^2 C_5^3$ (cách). + Với mỗi cách chọn trên ta có: số có 8 chữ số, trong đó có hai chữ số lẻ khác nhau và ba chữ số chẵn khác nhau mà mỗi chữ số chẵn có mặt đúng hai lần là: $\frac{8!}{2!2!2!}$ (số). Trường hợp này có: $C_5^2.C_5^3.\frac{8!}{2!2!2!} = 504000$ (số).	0,5 0,5
	Trường hợp 2: Xét các số có 8 chữ số, trong đó có hai chữ số lẻ khác nhau và ba chữ số chẵn khác nhau mà mỗi chữ số chẵn có mặt đúng hai lần, **mà chữ số 0 đứng đầu.** + Chọn 2 chữ số lẻ khác nhau và 2 chữ số chẵn khác nhau có $C_5^2 C_4^2$ (cách). + Với mỗi cách chọn trên ta có: số có 8 chữ số, trong đó có hai chữ số lẻ khác nhau và hai chữ số chẵn khác nhau mà mỗi chữ số chẵn có mặt đúng hai lần là: $\frac{7!}{2!2!}$ (số). Trường hợp này có: $C_5^2.C_4^2.\frac{7!}{2!2!} = 75600$ (số). Vậy có: $504000 - 75600 = 428400$ (số).	0,5 0,5
Câu IV.1 2,5 đ	Cho điểm A di động trên nửa đường tròn tâm O đường kính $BC = 3\,cm$, (A không trùng B,C). 1) Gọi E là điểm thuộc đoạn thẳng AB sao cho $AB = 3AE$. Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{CE}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.	
	$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$; $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.  	1,0
	$*AO \perp CE \Leftrightarrow \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{CE} = 0$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) = 0$ $\Leftrightarrow \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2 = 0$ $\Leftrightarrow AB^2 = 3AC^2$.	0,5 0,5 0,5

Câu IV.2 1,5 đ	2) Với $AC=x;\ AB=y$ và M là một điểm bất kì, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=-18MA^2+x^2MB^2+y^2MC^2$.	
	Gọi AH là đường cao của tam giác ABC. Ta xác định I thỏa mãn $-18\overrightarrow{IA}+x^2\overrightarrow{IB}+y^2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ $\Leftrightarrow -18\overrightarrow{IA}+\left(9-y^2\right)\overrightarrow{IB}+y^2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ $\Leftrightarrow -18\overrightarrow{IA}+9\overrightarrow{IB}+y^2\overrightarrow{BC}=\vec{0}$ $\Leftrightarrow -18\overrightarrow{IA}+9\overrightarrow{IB}+9\overrightarrow{BH}=\vec{0}\Leftrightarrow -18\overrightarrow{IA}+9\overrightarrow{IH}=\vec{0}$ $\Leftrightarrow I$ đối xứng với H qua A. 	0,5
	$P=-18\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+x^2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+y^2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$ $P=\left(-18+x^2+y^2\right)MI^2+2\overrightarrow{MI}.\left(-18\overrightarrow{IA}+x^2\overrightarrow{IB}+y^2\overrightarrow{IC}\right)-18IA^2+x^2IB^2+y^2IC^2$ $P=\left(-18+x^2+y^2\right)MI^2-18IA^2+x^2IB^2+y^2IC^2$ $P=-9MI^2-18AH^2+x^2\left(4AH^2+HB^2\right)+y^2\left(4AH^2+HC^2\right)$ $P=-9MI^2-18AH^2+x^2\left(y^2+3AH^2\right)+y^2\left(x^2+3AH^2\right)$ $P=-9MI^2+9AH^2+2x^2y^2$ $P=-9MI^2+3x^2y^2$	0,5
	$P\le 3x^2y^2\le 3\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^2=\dfrac{243}{4}$. Vậy GTLN của P là $\dfrac{243}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\\M\equiv I\end{cases}$	0,5
Câu V 3,0 đ	Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2BC$. Điểm $M(1;2)$ là trung điểm của đoạn AB và $N(2;-1)$ là điểm thuộc đoạn CD thỏa mãn $CN=3ND$. 1) Tính độ dài $BC,\ AN$. 2) Viết phương trình tổng quát đường thẳng AD.	
	Đặt $BC=a>0$, ta có $MN^2=a^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=\dfrac{5a^2}{4}\Leftrightarrow 10=\dfrac{5a^2}{4}$ $\Leftrightarrow a^2=8\Leftrightarrow a=2\sqrt{2}$. Mặt khác tam giác AMN cân tại N nên $AN=MN=\sqrt{10}$. 	1,0
	Gọi $A(x,y)$. Khi đó $\begin{cases}AM=2\sqrt{2}\\AN=\sqrt{10}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1-x)^2+(2-y)^2=8\\(2-x)^2+(-1-y)^2=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-2x-4y=3\\x^2+y^2-4x+2y=5\end{cases}$	0,5

	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 1 \\ x^2 + y^2 - 4x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 1 \\ (3y-1)^2 + y^2 - 4(3y-1) + 2y = 5 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 1 \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \frac{8}{5} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, y = 0 \\ x = \frac{19}{5}, y = \frac{8}{5} \end{array}\right.$	0,5
	+) Nếu $A(-1,0)$. Đường thẳng AD đi qua A và vuông góc với đường thẳng AM nên phương trình đường thẳng AD là $x + y + 1 = 0.$	0,5
	+) Nếu $A(\frac{19}{5}, \frac{8}{5})$. Đường thẳng AD đi qua A và vuông góc với đường thẳng AM nên phương trình đường thẳng AD là $7x - y - 25 = 0.$	0,5

Lưu ý: *Học sinh làm theo cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.*