



**ĐỀ ÔN LUYỆN CÁC NHÓM CÂU HỎI  
VẬN DỤNG CAO TRONG ĐỀ THI THPT QUỐC GIA**

*Đề thi gồm 40 câu trắc nghiệm*

*Thời gian làm bài 180 phút*

**Good Luck!**

**Câu 1:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa hai đường trung tuyến  $BD$  và  $CK$ . Giá trị nhỏ nhất của  $\cos \alpha$  bằng?

A.  $\frac{4}{5}$

B.  $\frac{5}{4}$

C.  $\frac{4}{3}$

D.  $\frac{3}{4}$

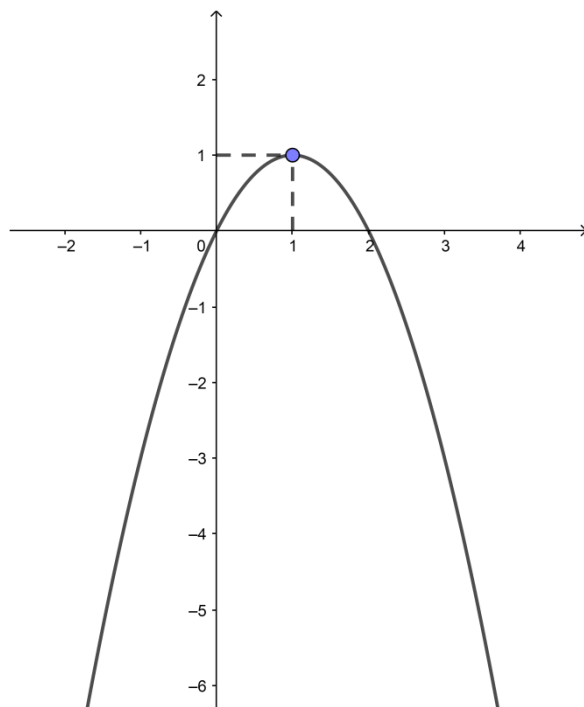
**Câu 2:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị  $m$  nguyên để phương trình sau có 8 nghiệm phân biệt:  $\sqrt{m+4\sqrt{m+16}|f(x)|} - 4|f(x)| = 0$

A. 3

B. 2

C. 4

D. 0



**Câu 3:** Cho hàm số  $y = 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{3}\sin x + a^2$  (với  $a$  là tham số). Gọi  $m, M$  lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn  $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $a$  để  $m^2 - M \leq \frac{321}{4}$ ?

A. 3.

B. 4.

C. 6.

D. 7.

**Câu 4:** Cho dãy số  $(u_n)$  như sau:  $u_n = \frac{n}{1+n^2+n^4}, \forall n = 1, 2, \dots$ . Tính giới hạn của tổng  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_1 + u_2 + \dots + u_n)$ .

- A.  $\frac{1}{4}$                       B. 1.                      C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{1}{3}$

**Câu 5:** Cho hàm số  $f(x) = ax^4 - (2a - b - 1)x^2 - 8a - 4b$  có  $\max_{(-\infty;0)} f(x) = f(-3)$ . Giá trị lớn của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$  là?

- A. 4                      B. 5                      C.  $4 - 25a$                       D.  $5 - 25a$

**Câu 6:** Cho tứ diện vuông O.ABC, gọi R và r lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp của tứ diện. Biết rằng  $R = \frac{3}{2}r(1 + \sqrt{3})$  và  $2OC + \sqrt{3OA^2 + 6OB^2} = 10$ . Tính  $V_{OABC}$ ?

- A.  $\frac{2}{3}$                       B.  $\frac{4}{3}$                       C.  $\frac{5}{3}$                       D.  $\frac{1}{3}$

**Câu 7:** Cho 4 số thực  $a, b, c, d$  sao cho  $c + d < 0$  đồng thời thỏa mãn

$$\begin{cases} \log(1 + a^2 + b^2) = 1 + \log(a + b) \\ 2^{-c} \cdot 2^{-d} \cdot 2^{\frac{-4}{c+d}} + \ln(c^2 + d^2 + 2cd + 4c + 4d + 5) = 16 \end{cases}$$

Gọi M và m lần lượt là GTNN và GTLN của biểu thức  $P = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$ . Tính giá trị của  $S = M + m$ ?

- A.  $6\sqrt{2}$                       B.  $8\sqrt{2}$                       C.  $10\sqrt{2}$                       D.  $12\sqrt{2}$

**Câu 8:** Gọi  $(a; b]$  là tập hợp các giá trị của m để phương trình  $\frac{4\sqrt{1-|x|}}{|x|} + \frac{\sqrt{2|x|-1}}{1-|x|} \geq m$ . Với giá trị nào của m thì bất phương trình luôn đúng?

- A.  $m \leq 3\sqrt{3}$                       B.  $m \leq 2\sqrt{5}$                       C.  $m \leq 5$                       D.  $m \leq 4$

**Câu 9:** Cho tam giác ABC đều cạnh  $a$ , trên đường thẳng  $d$  vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A lấy điểm M bất kỳ khác A. Gọi H là trực tâm tam giác MBC, biết rằng đường thẳng ( $\Delta$ ) vuông góc với mặt phẳng MBC tại H luôn cắt đường thẳng  $d$  tại N. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích toàn phần tứ diện MNBC.

- A.  $\frac{a^2(2\sqrt{2} + \sqrt{5})}{2}$                       B.  $\frac{a^2(2\sqrt{5} + \sqrt{2})}{2}$                       C.  $\frac{a^2(2 + \sqrt{5})}{2}$                       D.  $\frac{a^2(5 + \sqrt{2})}{2}$

**Câu 10:** Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn  $\begin{cases} abc = 1 \\ (a+1)(b+1)(c+1) = 15 \end{cases}$ . Gọi M, N lần lượt

là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của  $P = ab + bc + ca$ . Tính giá trị biểu thức:  $Q = MN$

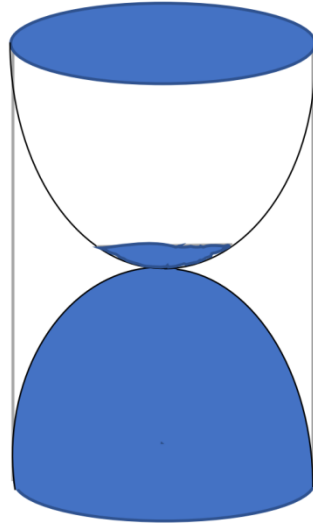
- A. 1.                      B. 41.                      C. 15.                      D. 65.

**Câu 11:** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} x - 10 & \text{khi } x > 2018 \\ f(f(x + 11)) & \text{khi } x \leq 2018 \end{cases}$ . Tính giá trị  $f(1) + f(2018)$ .

- A. 1999                      B. 2009                      C. 4018                      D. 4036

**Câu 12:** Một chiếc đồng hồ cát có thiết diện qua trục là 2 parabol đối xứng qua mặt nằm ngang. Khi để thẳng đứng và cát không chảy thì nó như hình vẽ (phần màu xanh là cát),

và mực cát của parapol ở trên là  $\frac{1}{5}$  chiều cao của parapol ở trên. Khi lật ngược đồng hồ cát thì lưu lượng cát chảy từ trên xuống dưới không đổi là  $3\text{cm}^3/\text{phút}$ . Khi chiều cao ở trên là 6cm thì bề mặt trên tạo thành 1 đường tròn có diện tích  $9\text{cm}^2$ . Biết sau 900s thì cát không còn chảy nữa. Hỏi khi lượng cát chảy xuống dưới bằng chiều cao của parapol thì thể tích cát của phần parapol ở trên là bao nhiêu (coi lượng cát đang chảy không đáng kể).



A. 14

B. 13,05

C. 12,75

D. 13,6

**Câu 13:** Tìm số hạng tổng quát của dãy số  $(u_n)$  biết 
$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} - 1 \\ u_{n+1} = \frac{\sqrt{3}u_n + 1}{\sqrt{3} - u_n} \end{cases}$$

A.  $u_n = \tan\left(\frac{\pi}{8} + (n-1)\frac{\pi}{6}\right)$

B.  $u_n = \tan\left(\frac{\pi}{3} + (n-1)\frac{\pi}{6}\right)$

C.  $u_n = \tan\left(\frac{\pi}{2} + (n-1)\frac{\pi}{3}\right)$

D.  $u_n = \tan\left(\frac{\pi}{4} + (n-1)\frac{\pi}{7}\right)$

**Câu 14:** Cho hai hàm số  $f(x)$  và  $g(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0;2]$ , thỏa mãn

$f'(0).f'(2) \neq 0$  và  $g(x).f'(x) = x(x-2)e^x$ . Tính tích phân  $I = \int_0^2 f(x).g'(x)dx$ .

A.  $I = -4$ .

B.  $I = 4$ .

C.  $I = e - 2$ .

D.  $I = 2 - e$ .

**Câu 15:** Cho hàm số  $f(x)$  xác định và liên tục trên  $[0;1]$ , thỏa mãn  $f'(x) = f'(1-x)$  với

mọi  $x \in [0;1]$ . Biết rằng  $f(0) = 1, f(1) = 41$ . Tính tích phân  $I = \int_0^1 f(x)dx$ .

A.  $I = \sqrt{41}$ .

B.  $I = 21$ .

C.  $I = 41$ .

D.  $I = 42$ .

**Câu 16:** Với  $n$  là số nguyên dương và  $x \neq 0$ , xét khai triển Newton  $\left(x^8 + x^3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^7}\right)^n$ . Hỏi có bao nhiêu số  $n \leq 2018$  sao cho khai triển của biểu thức trên có số hạng tự do là 0?

A. 1009

B. 403

C. 1615

D. 625

**Câu 17:** Có bao nhiêu số nguyên dương  $m$  trong đoạn  $[-2018; 2018]$  sao cho bất phương trình sau đúng với mọi  $x \in (1; 100)$ :  $(10x)^{m + \frac{\log x}{10}} \geq 10^{\frac{11}{10} \log x}$ .

A. 2018

B. 4026

C. 2013

D. 4036

**Câu 18:** Một số tự nhiên được gọi là số thú vị nếu số này có 8 chữ số đôi một khác nhau được lập thành tự tập  $\{1; 2; \dots; 8\}$  và số đó chia hết cho 1111. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên thú vị như thế?

A. 384

B. 385

C. 386

D. 387

**Câu 19:** Cho hàm số  $|x^3 + ax^2 + b|$ , gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn  $[-3; 2]$ .

Khi M đạt giá trị nhỏ nhất thì  $T = \log_{a-1} |b|$  có giá trị là ?

A. 0

B. 4026

C. 2

D.  $\frac{1}{2}$

**Câu 20 :** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh  $AB = a$  và diện tích tứ giác  $A_1B_1CD$  là  $2a^2$ . Mặt phẳng  $A_1B_1CD$  tạo với mặt phẳng đáy 1 góc  $60^\circ$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AA_1$  và  $CD$  là P. Khi P max, tìm thể tích của khối hộp biết hình chiếu của đỉnh  $A_1$  thuộc miền giữa hai đường thẳng AB và CD

A.  $4\sqrt{3}a^3$

B.  $6\sqrt{7}a^3$

C.  $2\sqrt{7}a^3$

D.  $3\sqrt{7}a^3$

**Câu 21:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình:

$$\sin x (2 - \cos 2x) - 2(2 \cos^3 x + m + 1) \sqrt{2 \cos^3 x + m + 2} = 3 \sqrt{2 \cos^3 x + m + 2}$$

Có đúng một nghiệm thuộc  $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$ ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

**Câu 22:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 3$ ,  $AC = 4$ . Phân giác trong  $\angle A$  của góc  $BAC$  cắt trung tuyến  $BM$  tại  $I$ . Tính tỉ số  $\frac{AD}{AI}$ .

A.  $\frac{13}{8}$

B.  $\frac{11}{6}$

C.  $\frac{10}{7}$

D.  $\frac{10}{5}$

**Câu 23:** Cho bất phương trình sau

$$\left(1 + \sqrt{3-x}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x-2}}\right)^2 + \left(1 + \sqrt{x-2}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3-x}}\right)^2 \geq m.$$

Biết rằng với  $m \in (-\infty; a + \sqrt{b}]$  ( $a, b > 0$ ) thì bất phương trình trên luôn đúng với mọi  $x$ . Khi đó tổng  $S = a + b$  có giá trị bằng bao nhiêu?

A. 301

B. 302

C. 304

D. 305

**Câu 24:** Xét các số thực  $a, b, c$  sao cho phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  có hai nghiệm thuộc  $[0; 1]$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $T = \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}$  là

- A.  $T_{\max} = 3$ .      B.  $T_{\max} = \frac{3}{2}$ .      C.  $T_{\max} = \frac{35}{8}$ .      D.  $T_{\max} = \frac{8}{3}$

**Câu 25:** Gọi  $A$  là tập hợp tất cả các số tự nhiên có tám chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc  $A$ , tính xác suất để số tự nhiên được chọn chia hết cho 45.

- A.  $\frac{53}{2268}$       B.  $\frac{54}{2267}$       C.  $\frac{56}{2263}$       D.  $\frac{1}{41}$

**Câu 26:** Cho các số thực  $x, y$  thỏa mãn  $\log_2^2 x + \log_2^2 y + \log_2^2 xy - 6\log_2 xy + 4 = 0$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là max và min của biểu thức  $P = \log_{\frac{32}{xy}} \frac{8x}{y}$ . Tính  $M \cdot n$ ?

- A.  $\frac{15}{23}$       B.  $\frac{14}{23}$       C.  $\frac{16}{23}$       D.  $\frac{17}{23}$

**Câu 27:** Cho 2 số thực  $x \geq 1, y \geq 0$  thỏa mãn điều kiện  $\max\{|x^2 + 1|; |2x - y + 1|\} = \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2}$ .

Hỏi biểu thức  $P = 3(x+1)(x^2 + 2y + 1)$  có tất cả bao nhiêu ước số nguyên dương?

- A. 5      B. 6      C. 7      D. 8

**Câu 28:** Cho các số  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 > 0$  lập thành cấp số cộng với công sai  $d$  và  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 > 0$  lập thành cấp số nhân với công bội  $q$ . Biết rằng  $a_1 = b_1$  và  $a_5 = b_5$ . Hỏi có bao nhiêu khẳng định luôn đúng trong các khẳng định sau?

- i)  $a_2 \geq b_2$       ii)  $a_3 \geq b_3$       iii)  $a_4 \geq b_4$       iv)  $d \geq q$

- A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

**Câu 29:** Cho hai hình cầu đồng tâm  $O(0,0,0)$ , bán kính  $R_1 = 2, R_2 = \sqrt{10}$ . Tứ diện  $ABCD$  có  $A, B \in (O, R_1); C, D \in (O, R_2)$ . Tìm giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện  $ABCD$ .

- A.  $6\sqrt{3}$       B.  $6\sqrt{2}$       C.  $4\sqrt{2}$       D.  $4\sqrt{3}$

**Câu 30:** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có cạnh bên bằng 1, các mặt bên là các tam giác có góc ở đỉnh  $S$  bằng  $45^\circ$ . Cho  $A'$  là trung điểm  $SA$ ,  $C'$  thuộc cạnh  $SC$  sao cho  $\frac{SC}{SC'} = \frac{3}{2}$ . Mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $A', C'$  cắt các cạnh  $SB, SD$  lần lượt tại  $B', D'$ . Số nào gần với giá trị nhỏ nhất của chu vi tứ giác  $A'B'C'D'$ .

- A. 1.79      B. 3.3      C. 2.05      D. 1.3

**Câu 31:** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị  $(C)$ . Biết rằng  $(C)$  cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ  $x_1 > x_2 > x_3 > 0$  và trung điểm nối 2 điểm cực trị của  $(C)$  có hoành độ  $x_0 = \frac{1}{3}$ . Biết rằng  $(3x_1 + 4x_2 + 5x_3)^2 = 44(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$ . Hãy tính tổng  $S = x_1 + x_2^2 + x_3^3$ ?

A.  $\frac{137}{216}$

B.  $\frac{45}{157}$

C.  $\frac{133}{216}$

D. 1

**Câu 32:** Cho các Parabol  $(P_1): y = f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x$ ,  $(P_2): y = g(x) = ax^2 - 4ax + b$  ( $a > 0$ ) có các đỉnh lần lượt là  $I_1, I_2$ . Gọi  $A, B$  là giao điểm của  $(P_1)$  và  $Ox$ . Biết rằng 4 điểm  $A, B, I_1, I_2$  tạo thành tứ giác lồi có diện tích bằng 10. Tính diện tích  $S$  của tam giác  $IAB$  với  $I$  là đỉnh của Parabol  $(P): y = h(x) = f(x) + g(x)$ .

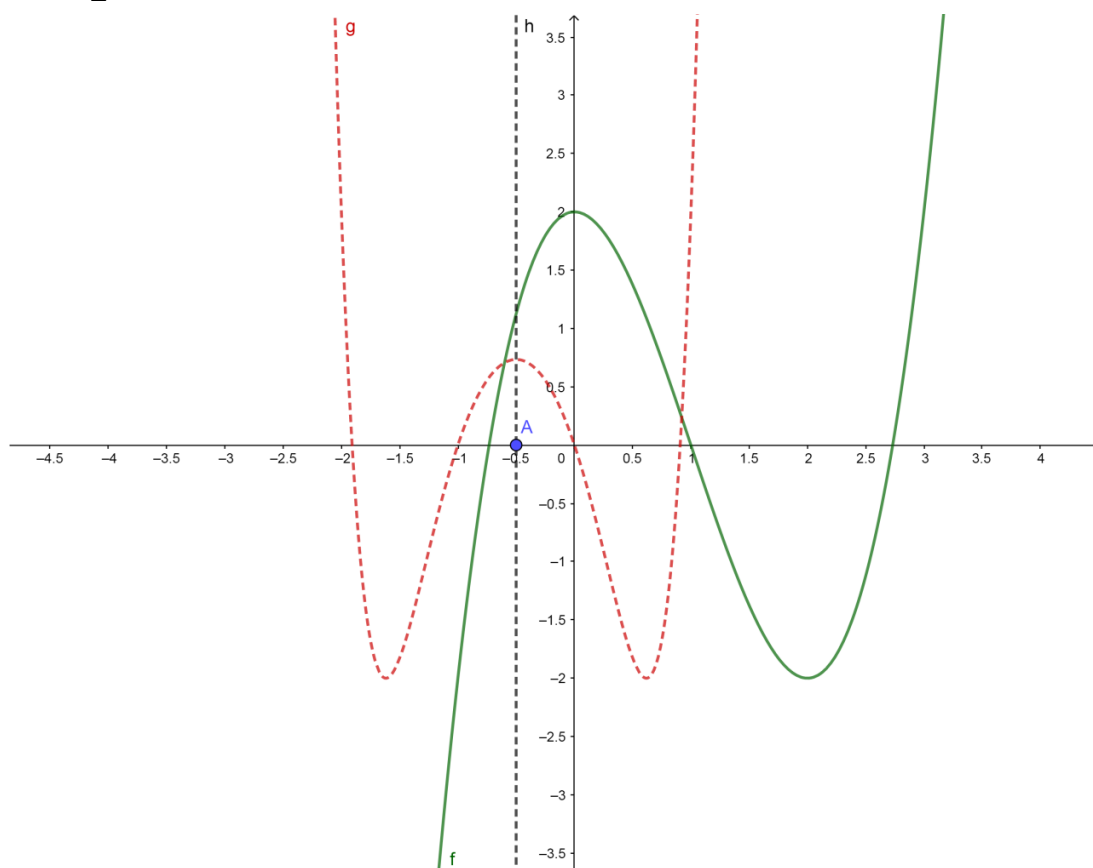
A.  $S = 4$

B.  $S = 6$

C.  $S = 7$

D.  $S = 9$

**Câu 33:** Cho hàm số bậc ba  $f(x)$  và  $g(x) = f(mx^2 + nx + p)$  ( $m, n, p \in \mathbb{Q}$ ) có đồ thị như hình dưới, trong đó đường nét liền là đồ thị hàm  $f(x)$ , đồ thị hàm nét đứt là đồ thị hàm  $g(x)$ , đường  $x = -\frac{1}{2}$  là trục đối xứng hàm  $g(x)$ .



Giá trị của biểu thức  $P = (n+m)(m+p)(p+2n)$  bằng bao nhiêu?

A. 6

B. 24

C. 12

D. 16

**Câu 34:** Có bao nhiêu số nguyên  $m \in [-2018; 2018]$  để phương trình  $|2^{|x|+1} - 8| = \frac{3}{2}x^2 + m$  có đúng 2 nghiệm thực phân biệt?

A. 2013

B. 2012

C. 4024

D. 2014

**Câu 35:** Với  $x \neq -1$  ta có khai triển sau:

$$\left(\frac{x^2+2x+2}{x+1}\right)^{2018} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2018}x^{2018} + \frac{b_1}{x+1} + \frac{b_2}{(x+1)^2} + \frac{b_3}{(x+1)^3} + \dots + \frac{b_{2018}}{(x+1)^{2018}}$$

Tính tổng  $S = \sum_{k=1}^{2018} b_k$  ?

- A.  $S = 2^{2017} - \frac{1}{2}C_{2018}^{1009}$ .    B.  $S = 2^{2018} - \frac{1}{2}C_{2018}^{1009}$ .    C.  $S = 2^{2018} - C_{2018}^{1009}$ .    D.  $S = 2^{2018} - 2C_{2018}^{1009}$ .

**Câu 36:** Có bao nhiêu hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $[0;1]$  thỏa mãn điều kiện

$$\int_0^1 (f(x))^{2018} dx = \int_0^1 (f(x))^{2019} dx = \int_0^1 (f(x))^{2020} dx$$

- A. 1                                      B. 2                                      C. 3                                      D. 4

**Câu 37:** Cho các hàm số  $f(x)$ ,  $g(x)$  liên tục trên  $[0;1]$ , thỏa  $m.f(x) + n.f(1-x) = g(x)$

với  $m, n$  là số thực khác 0 và  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx = 1$ . Tính  $m+n$ .

- A.  $m+n=0$ .                      B.  $m+n=\frac{1}{2}$ .                      C.  $m+n=1$ .                      D.  $m+n=2$ .

**Câu 38:** Có bao nhiêu số tự nhiên có 2018 chữ số sao cho trong mỗi số tổng các chữ số bằng 5 ?

- A.  $1 + 4C_{2017}^1 + 2(C_{2017}^2 + A_{2017}^2) + (C_{2017}^3 + A_{2016}^2 + C_{2016}^2) + C_{2017}^4$   
 B.  $1 + 4C_{2017}^1 + 3(C_{2017}^2 + A_{2017}^2) + (C_{2017}^3 + A_{2016}^2 + C_{2016}^2) + C_{2017}^4$   
 C.  $1 + 4C_{2017}^1 + 2(C_{2017}^2 + A_{2017}^2) + 4(C_{2017}^3 + A_{2016}^2 + C_{2016}^2) + C_{2017}^4$   
 D.  $1 + 4C_{2017}^1 + 2(C_{2017}^2 + A_{2017}^2) + 4(C_{2017}^3 + A_{2016}^2 + C_{2016}^2) + 2C_{2017}^4$

**Câu 39:** Cho 2 số thực  $x, y > 1$  thỏa mãn điều kiện:

$$1 + \log_2 3y + 2\log_2 3y(3 - \log_2 3xy) = \frac{9}{2} \log_x 2.$$

Đặt  $P = x^2 + xy + y^2$ . Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $P \in [11;12]$                       B.  $P \in [12;13]$                       C.  $P \in [10;11]$                       D.  $\min P = 10$

**Câu 40:** Cho tứ diện đều  $ABCD$  có cạnh bằng 1. Gọi  $M, N$  là hai điểm thay đổi lần lượt thuộc cạnh  $BC, BD$  sao cho  $(AMN)$  luôn vuông góc với mặt phẳng  $(BCD)$ . Gọi  $V_1, V_2$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện  $ABMN$ . Tính  $V_1 + V_2$ .

- A.  $\frac{17\sqrt{2}}{216}$                       B.  $\frac{17\sqrt{2}}{72}$                       C.  $\frac{17\sqrt{2}}{144}$                       D.  $\frac{\sqrt{2}}{12}$

**LỜI GIẢI CHI TIẾT ĐỀ VẬN DỤNG CAO  
LỜI GIẢI ĐƯỢC THỰC HIỆN BỞI  
NHÓM CHÍNH PHỤC OLYMPIC TOÁN**

**Câu 1.**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cos \alpha &= \frac{|\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CK}|}{BD \cdot CK} = \frac{\left| \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \right|}{BD \cdot CK} \\ &= \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CB}|}{4 \cdot BD \cdot CK} = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA}) - \overrightarrow{BC}^2|}{4 \cdot BD \cdot CK} = \frac{|-2\overrightarrow{BC}^2|}{4 \cdot BD \cdot CK} = \frac{BC^2}{2 \cdot BD \cdot CK} \end{aligned}$$

Vì tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  nên  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác } 2 \cdot BD \cdot CK &\stackrel{AM-GM}{\leq} BD^2 + CK^2 = \left( \frac{AB^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} \right) + \left( \frac{AC^2 + BC^2}{2} - \frac{AB^2}{4} \right) \\ &= BC^2 + \frac{AB^2 + AC^2}{4} = BC^2 + \frac{BC^2}{4} = \frac{5BC^2}{4} \Rightarrow \cos \alpha \geq \frac{BC^2}{\frac{5BC^2}{4}} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $BD = CK$  hay  $\triangle ABC$  vuông cân tại  $A$

**Câu 2.**

Đặt  $t = |f(x)|, t \geq 0$

Dựa vào đồ thị ta thấy, với  $0 < t < 1$  cho ta 4 giá trị của  $x$ .

Phương trình trở thành:  $\sqrt{m+4}\sqrt{m+16t} = 4t \Leftrightarrow m+4\sqrt{m+16t} = 16t^2$

Đặt  $u = \sqrt{m+16t}, u \geq 0$ , ta có hệ phương trình: 
$$\begin{cases} m+4u = 16t^2 & (1) \\ m+16t = u^2 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra:  $(u-4t)(4+u+4t) = 0 \Leftrightarrow u = 4t$  (do  $4+u+4t > 0$ ). Khi đó:

$$4t = \sqrt{m+16t} \Leftrightarrow 16t^2 - 16t = m(*) (t \geq 0)$$

Xét hàm số  $f(t) = 16t^2 - 16t$  trên  $[0; +\infty)$

Để phương trình đã cho có 8 nghiệm phân biệt thì phương trình (\*) phải có 2 nghiệm  $t_1, t_2$  thỏa mãn:  $0 < t_1 < t_2 < 1 \Leftrightarrow -4 < m < 0$ . Do  $m$  là số nguyên nên  $m \in \{-3; -2; -1\}$ .

**Câu 3.**

$$\text{Ta có } 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{3}\sin x = \cos x - \sqrt{3}\sin x + 1 = 1 - 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

Do đó  $y = 2 \sin^2 \left( x - \frac{\pi}{6} \right) - 2 \sin \left( x - \frac{\pi}{6} \right) + a^2 + 1$ . Đặt  $t = \sin \left( x - \frac{\pi}{6} \right)$ , vì  $x \in \left[ \frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3} \right] \Rightarrow t \in [0; 1]$

Hàm số trở thành  $y = 2t^2 - 2t + a^2 + 1 = 2 \left( t - \frac{1}{2} \right)^2 + a^2 + \frac{1}{2}$ .

Vì  $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq t - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq \left( t - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{4}$ . Suy ra  $a^2 + \frac{1}{2} \leq 2 \left( t - \frac{1}{2} \right)^2 + a^2 + \frac{1}{2} \leq a^2 + 1$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} m = a^2 + \frac{1}{2} \\ M = a^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow m^2 - M \leq \frac{321}{4} \Leftrightarrow \left( a^2 + \frac{1}{2} \right)^2 - (a^2 + 1) \leq \frac{321}{4} \Leftrightarrow -3 \leq a \leq 3.$$

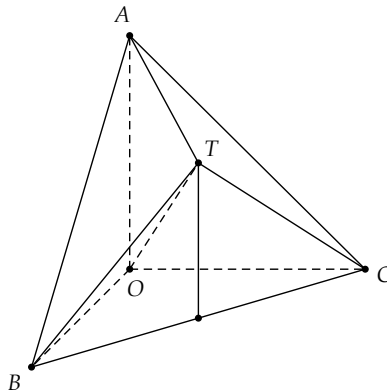
Suy ra có 7 giá trị nguyên của  $a$  thỏa.

#### Câu 4.

$$\text{Ta có } u_n = \frac{n}{(1+n^2)^2 - n^2} = \frac{n}{(n^2+n+1)(n^2-n+1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n^2-n+1} - \frac{1}{n^2+n+1} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } u_1 + u_2 + \dots + u_n &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{n^2-n+1} - \frac{1}{n^2+n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{n^2+n+1} \right) = \frac{1}{2} \frac{n^2+n}{n^2+n+1} \Rightarrow \lim (u_1 + u_2 + \dots + u_n) = \frac{1}{2} \lim \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

#### Câu 6.



Để đơn giản bài toán ta đặt  $OA = a, OB = b, OC = c$ . Ta có công thức quen thuộc để tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện vuông là  $R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ . Công việc còn lại ta sẽ đi

tính bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện này. Gọi  $T$  là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện  $OABC$ , ta

$$\text{có } V_{OABC} = V_{TOAB} + V_{TOAC} + V_{TOBC} + V_{TABC} = \frac{1}{3} r (S_{OAB} + S_{OAC} + S_{OBC} + S_{ABC}) = \frac{1}{3} r \cdot S_{tp} \Rightarrow r = \frac{3V_{OABC}}{S_{tp}}$$

Vậy tóm lại ta có  $R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  và  $r = \frac{3V_{OABC}}{S_{tp}}$ , do đó:

$$\begin{aligned}\frac{2R}{r} &= \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\frac{3V_{OABC}}{S_{tp}}} = \frac{S_{tp} \cdot \sqrt{a^2+b^2+c^2}}{3V_{OABC}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \frac{1}{2}(ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2})}{3 \cdot \frac{abc}{6}} \\ \Rightarrow \frac{2R}{r} &= \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot (ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2})}{abc} \geq \frac{\sqrt{3\sqrt{a^2b^2c^2}}(3\sqrt{a^2b^2c^2}+\sqrt{3\sqrt{a^4b^4c^4}})}{abc} \\ &= \frac{3\sqrt{3}abc+3abc}{abc} = 3(\sqrt{3}+1).\end{aligned}$$

Vậy  $\frac{2R}{r} \geq 3(1+\sqrt{3})$ . Dấu "=" xảy ra khi  $a=b=c$

Thay vào giả thiết thứ 2 ta tìm được  $a=b=c=2 \Rightarrow V_{OABC} = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \frac{4}{3}$ .

### Câu 7.

Biến đổi giả thiết đầu tiên ta có

$$\log(1+a^2+b^2) = 1 + \log(a+b) \Leftrightarrow a^2+b^2+1 = 10(a+b) \Leftrightarrow (a-5)^2 + (b-5)^2 = 49$$

Giả thiết 2 tương đương

$$2^{-c} \cdot 2^{-d} \cdot 2^{\frac{4}{c+d}} + \ln(c^2+d^2+2cd+4c+4d+5) = 16 \Leftrightarrow 2^{-c-d-\frac{4}{c+d}} + \ln((c+d+2)^2+1) = 16$$

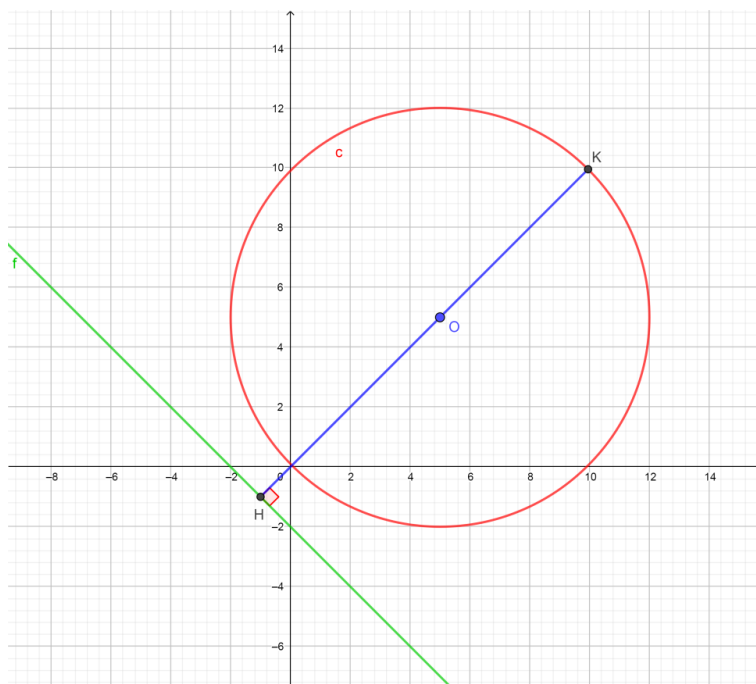
Theo bất đẳng thức AM - GM ta có  $2^{-c-d-\frac{4}{c+d}} \geq 2^{2\sqrt{4}} = 2^4 = 16$

Mặt khác  $\ln((c+d+2)^2+1) \geq 0 \Rightarrow VT \geq 16$ . Dấu "=" xảy ra khi  $c+d=-2$

Ta sẽ sử dụng phương pháp hình học cho bài này.

Xét đường tròn tâm  $I(5;5)$  bán kính  $R=7$ , và đường thẳng  $(\Delta): x+y+2=0$ . Gọi điểm

$A(a;b), B(c;d)$ . Ta có hình vẽ dưới đây.



**Câu 8.**

Ta có:

Vậy  $m \leq 3\sqrt{3}$

**Câu 9.**



Vì  $AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ ;  $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  do tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ .

Rõ ràng  $MN \perp AB$ ;  $MI \perp BC$ ;  $NI \perp AC$  nên

$$S_p = \frac{1}{2}(MN \cdot AB + MI \cdot BC + NI \cdot AC) = \frac{1}{2}a(2MN + MI + NI) \text{ vì } ABC \text{ đều cạnh } a.$$

Ta có  $MI = \sqrt{AM^2 + AI^2} = \sqrt{AM^2 + \frac{3a^2}{4}}$ . Nên theo ta có  $MI \geq \frac{AM \cdot \sqrt{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

Tương tự ta cũng có  $NI \geq \frac{AN \cdot \sqrt{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ . Do đó  $S_p \geq \frac{1}{2}a \left( 2MN + MN \sqrt{\frac{2}{5} + \frac{3a}{\sqrt{5}}} \right)$

Mà  $MN \geq a\sqrt{2}$  nên  $S_p \geq \frac{a^2(2\sqrt{2} + \sqrt{5})}{2}$ . Dấu bằng xảy ra khi  $AM = AN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

### **Câu 10.**

Từ giả thiết suy ra:  $ab + bc + ca + a + b + c = 13$ .

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$15 = (a+1)(b+1)(c+1) \geq (a+1)(\sqrt{bc}+1)^2 = \frac{a+1}{a} \cdot (\sqrt{a}+1)^2$$

$$\Leftrightarrow (a + \sqrt{a} + 1)^2 \leq 16a \Leftrightarrow a + \sqrt{a} + 1 \leq 4\sqrt{a} \Leftrightarrow a - 3\sqrt{a} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(3 - \sqrt{5})^2}{4} \leq a \leq \frac{(3 + \sqrt{5})^2}{4}$$

Đặt  $k = \frac{(3 + \sqrt{5})^2}{4}$ ;  $i = \frac{(3 - \sqrt{5})^2}{4}$ . Chứng minh tương tự thì ta cũng thu được  $i \leq b; c \leq k$

Từ đó suy ra:

$$(a-k)(b-k)(c-k) \leq 0 \Leftrightarrow 1 - k^3 + k^2(a+b+c) \leq k(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow 1 - k^3 + k^2(a+b+c+ab+bc+ca) \leq (k+k^2)(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow (ab+bc+ca)(k+k^2) \geq 1 - k^3 + 13k^2 \Leftrightarrow ab+bc+ca \geq \frac{1 - k^3 + 13k^2}{k+k^2} = \frac{13 - \sqrt{5}}{2}.$$

Hoàn toàn tương tự với  $i$ :  $(a-i)(b-i)(c-i) \geq 0 \Rightarrow ab+bc+ca \leq \frac{13 + \sqrt{5}}{2}$ .

$$\text{Vậy } \begin{cases} M = \frac{13 - \sqrt{5}}{2} \\ N = \frac{13 + \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow Q = MN = 41.$$

### **Câu 11.**

Ta có

$$\begin{aligned}
 f(2018) &= f(f(2018+11)) = f(f(2029)) = 2019 - 10 = 2009 \\
 f(2017) &= f(f(2017+11)) = f(f(2028)) = f(2018) = 2009 \\
 &\dots \\
 f(2009) &= f(f(2009+11)) = f(f(2020)) = f(2010) = 2009 \\
 f(2008) &= f(f(2008+11)) = f(f(2019)) = f(2009) = 2009 \\
 f(2007) &= f(f(2007+11)) = f(f(2018)) = f(2009) = 2009 \\
 f(2006) &= f(f(2006+11)) = f(f(2017)) = f(2009) = 2009 \\
 &\dots \\
 f(1) &= f(f(1+11)) = f(f(12)) = 2009
 \end{aligned}$$

Do đó ta có  $f(2018) = f(2018) = \dots = f(1) = 2009 \Rightarrow f(1) + f(2018) = 4018$

### Câu 12.

Gọi chiều cao 1 parapol là  $h$ . Ta có  $S = 9\pi cm^2 \Rightarrow R = 3$ . Xét thiết diện qua trục thẳng đứng thì ta thấy parapol đi qua các điểm  $(0;0), (3;6), (-3;6)$

Nên  $y = \frac{2x^2}{3} \Rightarrow$  Diện tích hình tròn qua thiết diện nằm ngang là  $\frac{3\pi}{2}y$

Thể tích phần phía dưới của đồng hồ cát là  $\pi \int_0^h \frac{3}{2}y dy = 45 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{60}{\pi}}$

Thể tích phần cát cần tìm  $V_C = \pi \int_0^{\frac{h}{5}} \frac{3}{2}y dy = 1,8(cm^3)$

### Câu 13.

Ta có  $u_1 = \tan \frac{\pi}{8}$  và  $u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}u_n} = \frac{u_n + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan \frac{\pi}{6}u_n}$  (1). Đặt  $u_n = \tan v_n$  khi đó (1) trở thành:

$$\tan v_{n+1} = \frac{\tan v_n + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan \frac{\pi}{6} \tan v_n} = \tan \left( v_n + \frac{\pi}{6} \right) \Rightarrow v_{n+1} = v_n + \frac{\pi}{6}$$

Mà  $u_1 = \tan v_1 = \sqrt{2} - 1 = \tan \frac{\pi}{8} \Rightarrow v_1 = \frac{\pi}{8}$ .

Từ đó ta có  $v_{n+1} = v_1 + n.d = \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow v_n = \frac{\pi}{8} + (n-1)\frac{\pi}{6}$

Hay  $u_n = \tan \left( \frac{\pi}{8} + (n-1)\frac{\pi}{6} \right)$

### Câu 14.

Từ giả thiết  $f'(0).f'(2) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} f'(0) \neq 0 \\ f'(2) \neq 0 \end{cases}$

$$\text{Do đó từ } g(x) \cdot f'(x) = x(x-2)e^x \Rightarrow \begin{cases} g(2) = \frac{2(2-2)e^x}{f'(2)} = 0 \\ g(0) = \frac{0(0-2)e^x}{f'(0)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Tích phân từng phần ta được } I &= \left[ f(x) \cdot g(x) \right]_0^2 - \int_0^2 g(x) \cdot f'(x) dx \\ &= f(2) \cdot g(2) - f(0) \cdot g(0) - \int_0^2 x(x-2)e^x dx = - \int_0^2 x(x-2)e^x dx = 4. \end{aligned}$$

**Câu 15.**

$$\text{Ta có } f'(x) = f'(1-x) \Rightarrow f(x) = -f(1-x) + C \Rightarrow f(0) = -f(1) + C \Rightarrow C = 42$$

$$\Rightarrow f(x) = -f(1-x) + 42 \Rightarrow f(x) + f(1-x) = 42 \Rightarrow \int_0^1 [f(x) + f(1-x)] dx = \int_0^1 42 dx = 42 \quad (1)$$

$$\text{Vì } f'(x) = f'(1-x) \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(1-x) dx. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), suy ra } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(1-x) dx = 21.$$

**Câu 16.**

$$\text{Ta có } \left( x^8 + x^3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^7} \right)^n = (1+x^5)^n \left( x^3 + \frac{1}{x^7} \right)^n \text{ nên số hạng tổng quát của khai triển trên là}$$

$$T = C_n^k x^{5k} \cdot C_n^h x^{3n-10h} = C_n^k C_n^h x^{3n+5k-10h}.$$

$$\text{Số hạng này là số hạng tự do khi } 3n + 5k - 10h = 0 \Leftrightarrow 3n = 5(2h - k).$$

Nếu  $n$  không chia hết cho 5 thì khai triển sẽ không chứa số hạng tự do, tức là số hạng tự do là 0. Còn khi  $n$  chia hết cho 5 thì khi  $h = \frac{2n}{5}, k = \frac{n}{5}$ , số hạng tự do sẽ là  $C_n^k C_n^h \neq 0$ , không thỏa.

**Câu 17.**

Biến đổi giả thiết tương đương

$$\begin{aligned} \left( m + \frac{\log x}{10} \right) (\log x + 1) &\geq \frac{11}{10} \log x \Leftrightarrow (\log x + 10m)(\log x + 1) - 11 \log x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 10m(\log x + 1) + \log^2 x - 10 \log x \geq 0. \end{aligned}$$

$$\text{Do } x \in (1; 100) \Rightarrow \log x \in (0; 2). \text{ Do đó ta có}$$

$$10m(\log x + 1) + \log^2 x - 10 \log x \geq 0 \Leftrightarrow 10m \geq \frac{10 \log x - \log^2 x}{\log x + 1}$$

$$\text{Đặt } t = \log x, t \in (0; 2), \text{ xét hàm số } f(t) = \frac{10t - t^2}{t + 1}$$

Ta có:  $f'(t) = \frac{10-2t-t^2}{(t+1)^2} > 0 \forall t \in (0;2)$ . Do đó  $f(0) < f(t) < f(2) \Leftrightarrow 0 < f(t) < \frac{16}{3}$

Để  $10m \geq \frac{10\log x - \log^2 x}{\log x + 1}$  đúng với mọi  $x \in (1;100)$  thì  $10m \geq \frac{16}{3} \Rightarrow m \geq \frac{8}{15}$

Do đó  $m \in \left[ \frac{8}{15}; 2018 \right]$  hay có 2018 số thỏa mãn.

### Câu 18.

Số cần tìm có dạng  $i = \overline{a_1a_2a_3a_4b_1b_2b_3b_4}$ . Ta có tổng các chữ số của số cần tìm là tổng các chữ số từ 1 đến 8 bằng 36 chia hết cho 9 nên số cần tìm chia hết cho 9. Do 9 và 1111 có ước chung lớn nhất là 1 nên theo giả thiết thì  $i$  chia hết cho 9999.

Đặt  $x = \overline{a_1a_2a_3a_4}, y = \overline{b_1b_2b_3b_4}$ . Ta có  $i = x \cdot 10^4 + y = 9999x + x + y$  chia hết cho 9999 từ đó suy ra  $(x+y)$  chia hết cho 9999.

Mặt khác  $0 < x+y < 2 \cdot 9999 \Rightarrow x+y = 9999$ . Do đó  $a_1+b_1 = a_2+b_2 = a_3+b_3 = a_4+b_4 = 9$

Từ các chữ số 1,2,3,4,5,6,7,8 có 4 cặp (1;8), (2;7), (3;6), (4;5) nên có 8 cách chọn  $a_1$ ; 6 cách chọn  $a_2$ ; 4 cách chọn  $a_3$  và 2 cách chọn  $a_4$  tức chọn  $a_k$  có luôn  $b_k$ .

Vậy số các số thú vị là  $8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 384$  số

### Câu 19.

Xét hàm số  $h(x) = x^3 + ax^2 + b$

Gọi  $m, n$  lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của  $h(x)$  trên đoạn  $[-3;2]$ .

Suy ra  $\begin{cases} m = |4a+b+8| \\ n = |9a+b-27| \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} m = |9a+b-27| \\ n = |4a+b+8| \end{cases}$

$$y_{\max} = \max\{|m|; |n|\} = \frac{|m| + |n| + ||m| - |n||}{2}$$

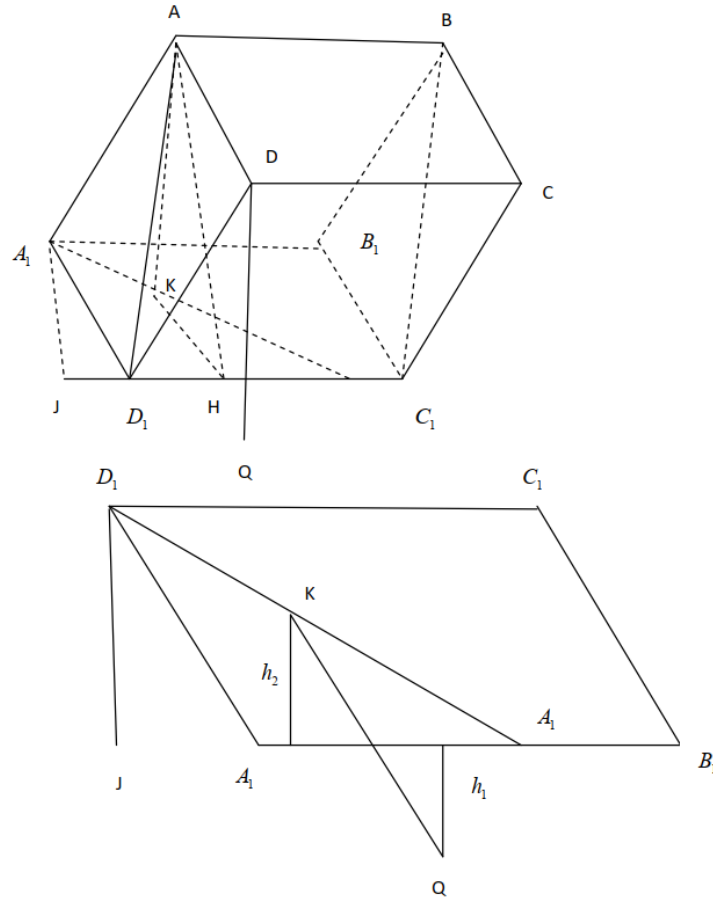
$$y_{\max} = \frac{|4a+b+8| + |9a+b-27| + ||4a+b+8| - |9a+b-27||}{2}$$

Vì  $|4a+b+8| + |9a+b-27| \geq 0$ ;  $||4a+b+8| - |9a+b-27|| \geq 0$

Vậy  $y_{\max} \geq 0$ . Dấu "=" xảy ra khi  $\begin{cases} m = n \\ m = 0 \\ n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = -36 \end{cases} \Rightarrow T = \log_{a-1}|b| = \log_6 36 = 2$ .

### Câu 20.

Ta có  $AB = a \Rightarrow A_1B_1 = a$ . Gọi DK là đường cao của hình hộp



DH là đường cao của  $A_1B_1CD \Rightarrow DH = \frac{2a^2}{a} = 2a$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AA_1$  và  $CD$  bằng khoảng cách từ  $D_1$  đến  $(ABB_1A_1)$ . Từ A để đường cao AQ đến  $(A_1B_1C_1D_1)$ , tách hình ra ta có  $h_1$  và  $h_2$  là hình chiếu từ K và Q đến  $A_1B_1$ , suy ra  $h_1 + h_2 = D_1J = x$ . Đặt khoảng cách từ Q đến  $(ABB_1A_1)$  là h.

Từ góc giữa  $(A_1B_1CD)$  và  $(A_1B_1C_1D_1) = 60^\circ \Rightarrow KH = \frac{1}{2}DH = a; DK = AQ = \sqrt{3}a$ .

$$\text{Ta có: } \frac{1}{h^2} = \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{AQ^2} = \frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{3a^2} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}a(x-a)}{\sqrt{3a^2 + (x-a)^2}}.$$

$$d(K; (ABB_1A_1)) = h \cdot \frac{a}{x-a} = \frac{\sqrt{3}a^2}{\sqrt{3a^2 + (x-a)^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{d(D_1; (ABB_1A_1))}{d(K; (ABB_1A_1))} &= \frac{D_1J}{h_2} = \frac{x}{a} \Rightarrow d(D_1; (ABB_1A_1)) = \frac{\sqrt{3}ax}{\sqrt{3a^2 + (x-a)^2}} = \frac{\sqrt{3}ax}{\sqrt{4a^2 - 2ax + x^2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{\frac{4a^2}{x^2} - \frac{2a}{x} + 1}} = \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{\left(\frac{2a}{x} - \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{3}{4}}} = \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = 2a \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng "=" xảy ra } \Leftrightarrow \frac{2ax}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 4a \Rightarrow V = DK \cdot D_1J \cdot A_1B_1 = \sqrt{3}a \cdot 4a \cdot a = 4\sqrt{3}a^3.$$

**Câu 21.**

Phương trình tương đương với

$$2 \sin^3 x + \sin x = 2(2 \cos^3 x + m + 2) \sqrt{2 \cos^3 x + m + 2} + \sqrt{2 \cos^3 x + m + 2}.$$

Xét hàm  $f(t) = 2t^3 + t$  với  $t \geq 0$ . Ta có  $f'(t) = 6t^2 + 1 > 0 \Rightarrow f(t)$  đồng biến.

Mà  $f(\sin x) = f(\sqrt{2 \cos^3 x + m + 2})$ , suy ra

$$\sin x = \sqrt{2 \cos^3 x + m + 2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \sin^2 x = 2 \cos^3 x + m + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = 2 \cos^3 x + m + 2 \text{ vì } \sin x \geq 0, \forall x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos^2 x = 2 \cos^3 x + m + 2 \Leftrightarrow m = -2 \cos^3 x - \cos^2 x - 1.$$

Đặt  $u = \cos x$ , vì  $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow u \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ . Khi đó phương trình trở thành

$$m = -2u^3 - u^2 - 1.$$

$$\text{Xét } g(u) = -2u^3 - u^2 - 1, \text{ có } g'(u) = -6u^2 - 2u; g'(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right] \\ u = -\frac{1}{3} \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right] \end{cases}.$$

Lập bảng biến thiên suy ra phương trình có 1 nghiệm khi  $-4 \leq m < -\frac{28}{27} \Rightarrow m \in \{-4; -3; -2\}$ .

**Câu 22.**

Theo tính chất đường phân giác ta có  $\frac{IB}{IM} = \frac{AB}{AM} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2\vec{IB} + 3\vec{IM} = \vec{0}$

$$\text{Và } \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4\vec{DB} + 3\vec{DC} = \vec{0}$$

$$\text{Vậy ta có } \begin{cases} 2\vec{IB} + 3\vec{IM} = \vec{0} \\ 4\vec{DB} + 3\vec{DC} = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\vec{AB} + 3\vec{AM} = 5\vec{AI} \\ 4\vec{AB} + 3\vec{AC} = 7\vec{AD} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\vec{AB} + 6\vec{AM} = 10\vec{AI} \\ 4\vec{AB} + 3\vec{AC} = 7\vec{AD} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } 3\vec{AC} - 6\vec{AM} = 7\vec{AD} - 10\vec{AI} \Leftrightarrow 7\vec{AD} - 10\vec{AI} = \vec{0} \Rightarrow \frac{AD}{AI} = \frac{10}{7}.$$

**Câu 23.**

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \sqrt{3-x} \\ b = \sqrt{x-2} \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = 1, \text{ ta đi chứng minh } \frac{1}{2} \left[ (1+a) \left[ 1 + \frac{1}{b} \right] + (1+b) \left[ 1 + \frac{1}{a} \right] \right]^2 \geq VP$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ (1+a) \left[ 1 + \frac{1}{b} \right] + (1+b) \left[ 1 + \frac{1}{a} \right] \right]^2 \\
 &= \left[ 2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right]^2 = \left[ \frac{a \left[ b^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] + b \left[ a^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right]}{ab} + \left[ \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right] + 2 \right]^2 \\
 & \stackrel{\text{AM-GM}}{\geq} \left[ \frac{3a^3 \sqrt{\frac{b^2}{4}} + 3b^3 \sqrt{\frac{a^2}{4}}}{ab} + \left[ \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right] + 2 \right]^2 \\
 & \stackrel{\text{AM-GM}}{\geq} \left[ \frac{6 \sqrt{ab^3 \frac{a^2}{4} \cdot \frac{b^2}{4}}}{ab} + 4 \right]^2 = \left[ \frac{6}{\sqrt[6]{16} \sqrt[6]{ab}} + 2 \right]^2 \geq \left[ \frac{6}{\sqrt[6]{16} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}} + 2 \right]^2 = 2(17 + 12\sqrt{2})
 \end{aligned}$$

**Câu 24.**

Với các số thực  $a, b, c$  làm cho phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  có hai nghiệm thuộc  $[0; 1]$ .

Suy ra  $a \neq 0$ . Gọi hai nghiệm đó là  $x_1, x_2$ , theo định lí Viet ta được

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } T &= \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)} = \frac{\frac{(a-b)(2a-b)}{a^2}}{\frac{a-b+c}{a}} = \frac{\left(1 - \frac{b}{a}\right) \left(2 - \frac{b}{a}\right)}{1 - \frac{b}{a} + \frac{c}{a}} = \frac{(1+x_1+x_2)(2+x_1+x_2)}{1+x_1+x_2+x_1x_2} \\
 &= \frac{2(1+x_1+x_2+x_1x_2) + x_1+x_2+x_1^2+x_2^2}{1+x_1+x_2+x_1x_2} = 2 + \frac{x_1+x_2+x_1^2+x_2^2}{1+x_1+x_2+x_1x_2}.
 \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$ ,

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x_1^2 \leq x_1x_2 \\ x_2^2 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow 1+x_1+x_2+x_1x_2 \geq 1+x_1+x_2+x_1^2 \geq x_1+x_2+x_1^2+x_2^2$$

$$\text{Suy ra } \frac{x_1+x_2+x_1^2+x_2^2}{1+x_1+x_2+x_1x_2} \leq \frac{x_1+x_2+x_1^2+x_2^2}{1+x_1+x_2+x_1^2} \leq \frac{x_1+x_2+x_1^2+x_2^2}{x_1+x_2+x_1^2+x_2^2} = 1.$$

Suy ra  $T \leq 2 + 1 = 3$ . Vậy  $T_{\max} = 3$ , dấu "=" xảy ra khi  $x_1 = x_2 = 1$ .

Nếu hàm số  $y = f(x)$  là hàm số lẻ trên đoạn  $[-a; a]$ , ( $a > 0$ ) và có giá trị lớn nhất và giá trị

$$\text{nhỏ nhất thì } \left| \max_{[-a; a]} f(x) \right| = \left| \max_{[0; a]} f(x) \right| = \left| \min_{[-a; a]} f(x) \right|$$

**Câu 25.**

Ta có  $n(\Omega) = A_{10}^8 - A_9^7$ .

Gọi  $A$  là tập hợp các số  $a$  có 8 chữ số khác nhau chia hết cho 45.

Khi đó  $a$  chia hết cho 5 và 9 (tổng các chữ số chia hết cho 9 và số hàng đơn vị bằng 0 hoặc 5).

- Trường hợp 1:  $a$  có hàng đơn vị bằng 0; 7 chữ số còn lại có chữ số 9 và 3 trong 4 bộ số  $\{1;8\}, \{2;7\}, \{3;6\}, \{4;5\}$ , có  $4.7!$  số.
- Trường hợp 2:  $a$  có hàng đơn vị bằng 5; 7 chữ số còn lại có chữ số 4 và 3 trong 4 bộ số  $\{0;9\}, \{1;8\}, \{2;7\}, \{3;6\}$ .

Không có bộ  $\{0;9\}$ , có  $7!$  số.

Có bộ  $\{0;9\}$ , có  $C_3^2(7! - 6!)$  số

$$\Rightarrow n(A) = 4.7! + C_3^2(7! - 6!) \text{ số} \Rightarrow P(A) = \frac{4.7! + C_3^2(7! - 6!)}{A_{10}^8 - A_9^7} = \frac{53}{2268}.$$

### Câu 26.

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \log_2 x \\ b = \log_2 y \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2xy - 6x - 6y + 4 = 0$$

Yêu cầu của bài toán trở thành

$$P = \frac{\log_2 \frac{8x}{y}}{\log_2 \frac{32}{xy}} = \frac{3+a-b}{4-a-b} \Rightarrow P(5-a-b) = 3+a-b \Rightarrow a(P+1) + b(P-1) = 5P-3$$

Đến đây thế  $a$  theo  $b$  và  $P$  thay vào phương trình trên ta được một phương trình bậc 2, sử dụng điều kiện có nghiệm ta sẽ suy ra kết quả của bài toán!

$$\text{Ta được } \min P = \frac{27-8\sqrt{6}}{23}, \max P = \frac{27+8\sqrt{6}}{23}.$$

### Câu 27.

Ta có một tính chất cơ bản của hàm trị tuyệt đối  $\left| \frac{a+b}{2} \right| + \left| \frac{a-b}{2} \right| = \max\{|a|; |b|\}$

$$\text{Áp dụng ta có } \max\{|x^2+1|; |2x-y+1|\} = \left| \frac{x^2+2x-y+2}{2} \right| + \left| \frac{x^2-2x+y}{2} \right|$$

Sử dụng bất đẳng thức trị tuyệt đối ta có

$$\left| \frac{x^2+2x-y+2}{2} \right| + \left| \frac{x^2-2x+y}{2} \right| \geq \left| \frac{2x^2+2}{2} \right| = \frac{2x^2+2}{2} \geq 2 (x \geq 1)$$

$$\text{Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có } \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} \leq \frac{\left( \sqrt{2(x^2+y^2)} \right)^2}{x^2+y^2} = 2$$

Vậy  $VT \geq 2 \geq VP$ . Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = 1$ .

Khi đó  $P = 24$  có tất cả 8 ước số nguyên dương.

**Câu 28.**

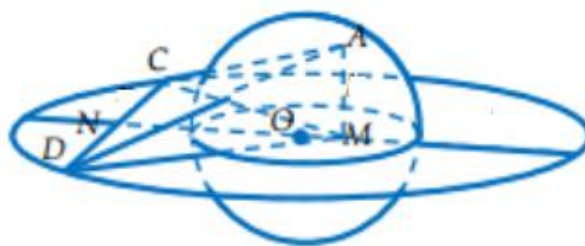
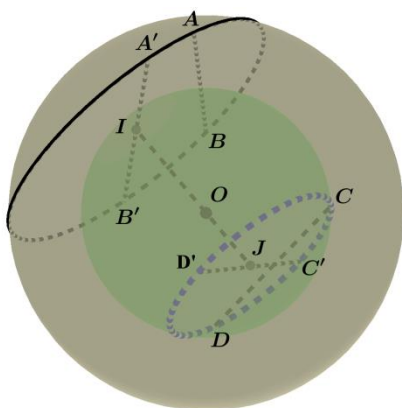
Đặt  $a_1 = b_1 = x, a_5 = b_5 = y$ , mà  $a_5 = a_1 + 4d$  và  $a_2 = a_1 + d$  nên  $a_2 = \frac{a_4 + 3a_1}{4} = \frac{3x + y}{4}$ . Tương tự ta tính được  $a_3 = \frac{x + y}{2}$  và  $a_4 = \frac{x + 3y}{4}$ .

Lập luận tương tự với CSN, ta cũng có  $b_2 = \sqrt[4]{x^3y}, b_3 = \sqrt{xy}, b_4 = \sqrt[4]{xy^3}$ . Theo bất đẳng thức Cô-si thì

$$a_3 = \frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy} = b_3, a_2 = \frac{3x + y}{4} \geq \sqrt[4]{x^3y} = b_2, a_4 = \frac{x + 3y}{4} \geq \sqrt[4]{xy^3} = b_4.$$

Do đó, cả i), ii) và iii) đều đúng. Tuy nhiên, điều kiện iv) không luôn đúng, chẳng hạn khi  $x = y$  thì  $d = 0$  nhưng  $q = 1$ .

**Câu 29.**



+ Dụng mặt phẳng  $(P)$  chứa  $AB$  và song song  $CD$  cắt  $(O, R_1)$  theo giao tuyến là đường tròn tâm  $I$ .

+ Dụng mặt phẳng  $(Q)$  chứa  $CD$  và song song  $AB$  cắt  $(O, R_2)$  theo giao tuyến là đường tròn tâm  $J$ .

+ Lần lượt dựng 2 đường kính  $A'B', C'D'$  vuông góc nhau.

Khi đó,  $IJ = d(AB, CD) = d(A'B', C'D')$

Ta có:  $V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d(AB, CD) \cdot \sin(AB, CD) \leq \frac{1}{6} A'B' \cdot C'D' \cdot IJ = V_{A'B'C'D'}$ . Do đó chỉ cần xét các tứ diện dạng  $A'B'C'D'$ .

Vậy điều kiện cần để  $V_{ABCD}$  lớn nhất là  $AB \perp CD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ .

Đặt  $AM = x, CN = y$ .  $(x \in (0, \sqrt{10}], y \in (0, 2])$

$$\Rightarrow ON = \sqrt{10 - x^2}; OM = \sqrt{4 - y^2}; d(AB, CD) = MN = OM + ON = \sqrt{10 - x^2} + \sqrt{4 - y^2}.$$

$$\text{Khi đó: } V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d(AB, CD) = \frac{1}{6} \cdot 2x \cdot 2y (\sqrt{10 - x^2} + \sqrt{4 - y^2}) = \frac{2}{3} xy (\sqrt{10 - x^2} + \sqrt{4 - y^2})$$

Ta có:  $V_{ABCD} = \frac{2}{3}xy \left( \sqrt{2}\sqrt{\frac{10-x^2}{2}} + \sqrt{1}\sqrt{4-y^2} \right) \leq \frac{2}{3}xy \sqrt{(2+1)\left(\frac{10-x^2}{2} + 4 - y^2\right)}$

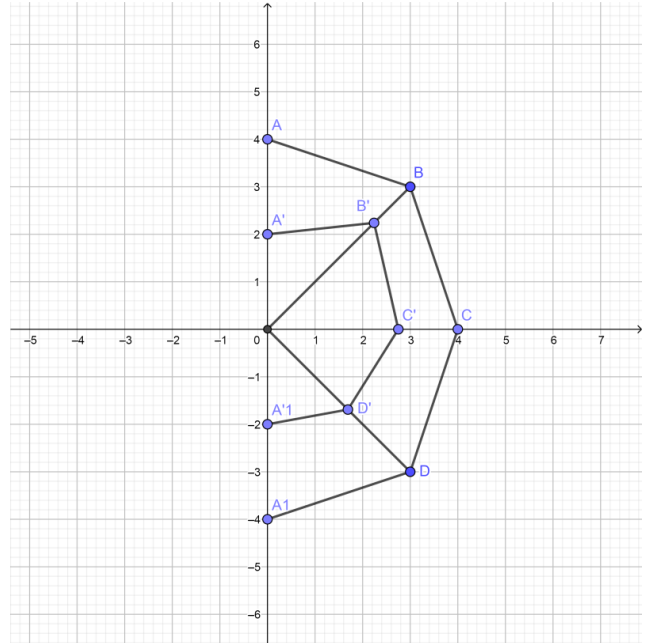
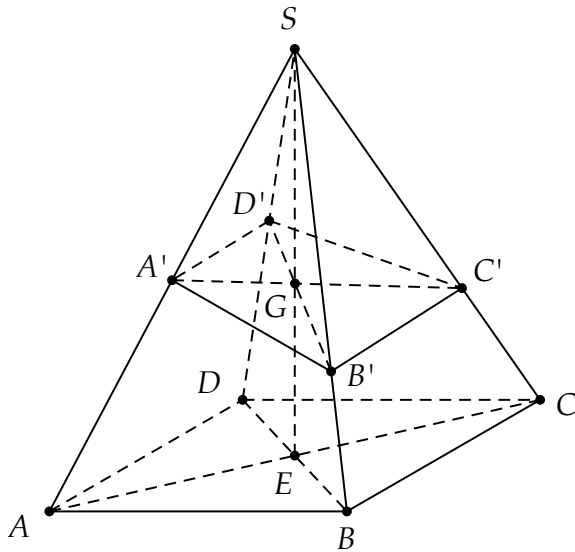
$$\Rightarrow V_{ABCD} \leq \frac{2}{3}xy \sqrt{\frac{3}{2}(18 - (x^2 + 2y^2))} \leq \frac{2}{3}xy \sqrt{\frac{3}{2}(18 - 2\sqrt{2}xy)} = \frac{2}{3}xy \sqrt{3(9 - \sqrt{2}xy)}$$

$$\Rightarrow V_{ABCD}^2 \leq \frac{4}{9}(xy)^2 (3(9 - \sqrt{2}xy)) = \frac{8}{3} \cdot \frac{xy}{\sqrt{2}} \cdot \frac{xy}{\sqrt{2}} (9 - \sqrt{2}xy) \leq \frac{8}{3} \left( \frac{\frac{xy}{\sqrt{2}} + \frac{xy}{\sqrt{2}} + 9 - \sqrt{2}xy}{3} \right)^3$$

$$\Rightarrow V_{ABCD}^2 \leq \frac{8}{3} \left( \frac{9}{3} \right)^3 = 72 \Rightarrow V_{ABCD} \leq 6\sqrt{2}. \text{ Vậy } V_{\max} = 6\sqrt{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi: 
$$\begin{cases} \frac{\sqrt{\frac{10-x^2}{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4-y^2}}{1} \\ \frac{xy}{\sqrt{2}} = 9 - \sqrt{2}xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{6} \\ y = \sqrt{3} \end{cases}.$$

**Câu 30.**



Từ giả thiết của bài toán ta có:  $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} \Rightarrow \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{7}{2} \quad (1)$

Trải phẳng 4 mặt bên của hình chóp và ghép lại sao cho thu được một nửa lục giác đều với cạnh SA tách thành SA và SA' và đặt vào hệ Oxy (hình vẽ)

Khi đó ta có:  $S(0;0); A(0;1); A'(0;-1); A'\left(0;\frac{1}{2}\right); A_1'\left(0;-\frac{1}{2}\right); C'\left(\frac{2}{3};0\right)$ ; và

$$B'(a;a); D'(b;-b); a; b \in \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right). (1) \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{7}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{7}{\sqrt{2}} \geq \frac{4}{a+b} \Rightarrow a+b \geq \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

Chu vi cần  $A'B'C'D'$  là  $c = A'B' + B'C' + C'D' + D'A_1'$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow c &= \sqrt{a^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(a - \frac{2}{3}\right)^2 + a^2} + \sqrt{b^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(b - \frac{2}{3}\right)^2 + b^2} \\ \Leftrightarrow c &= \left[ \sqrt{a^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{b^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2} \right] + \left[ \sqrt{\left(a - \frac{2}{3}\right)^2 + a^2} + \sqrt{\left(b - \frac{2}{3}\right)^2 + b^2} \right] \\ \Rightarrow c &\geq \sqrt{(a+b)^2 + (a+b-1)^2} + \sqrt{(a+b)^2 + \left(a+b - \frac{4}{3}\right)^2} \geq \min(c) \approx 1.79 \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi  $a=b=\frac{2\sqrt{2}}{7} \Rightarrow B'D' // BD$ .

**Câu 31.**

Trung điểm đoạn nối 2 điểm cực trị là điểm uốn của đồ thị hàm số, có tọa độ

$$\left(-\frac{b}{3a}; y\left(-\frac{b}{3a}\right)\right). \text{ Theo Viet ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a} \\ x_0 = -\frac{b}{3a} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Thế  $x_3 = 1 - x_1 - x_2$  vào giả thiết thứ 2 ta được

$$\begin{aligned} (3x_1 + 4x_2 + 5 - 5x_1 - 5x_2)^2 &= 44x_1x_2 + 44(x_1 + x_2)(1 - x_1 - x_2) \\ \Leftrightarrow 48x_1^2 + 16x_1(3x_2 - 4) + 45x_2^2 - 54x_2 + 25 &= 0 \end{aligned}$$

Ta có  $\Delta_{x_1} = -176(3x_2 - 1)^2 \leq 0$  vậy  $VT \geq VP$ . Dấu "=" xảy ra khi  $x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = \frac{1}{3}; x_3 = \frac{1}{6}$

**Câu 32.**

Dễ dàng tìm được  $A(0;0), B(4;0), I_1(2;-1), I_2(2;b-4a)$  với  $b-4a > 0$  (vì tứ giác  $I_1AI_2B$  lồi). Khi đó tứ giác  $I_1AI_2B$  có hai đường chéo vuông góc nên

$$S_{I_1AI_2B} = \frac{1}{2} AB \cdot I_1I_2 = \frac{1}{2} 4 \cdot (1+b-4a) = 2(1+b-4a) = 10 \Leftrightarrow b = 4a + 4.$$

Ta có  $h(x) = f(x) + g(x) = \left(a + \frac{1}{4}\right)x^2 - (4a+1)x + 4a+4$  nên tọa độ đỉnh  $I$  là

$$\begin{cases} x_I = \frac{4a+1}{2\left(a+\frac{1}{4}\right)} = 2 \\ y_I = h(2) = 4a+1-8a-2+4a+4 = 3 \end{cases} \Rightarrow I(2;3) \Rightarrow S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6.$$

**Câu 33.**

Ta có  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ . Hàm số đạt cực trị tại  $x = 0; x = 2$  và đồ thị đi qua điểm  $(1; 0), (0; 2)$  nên ta có

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(2) = 0 \\ f(1) = 0 \\ f(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

Ta có  $g(x) = (mx^2 + nx + p)^3 - 3(mx^2 + nx + p)^2 + 2$ . Hệ số tự do bằng  $p^3 - 3p^2 + 2$ . Đồ thị hàm số  $g(x)$  đi qua điểm  $(0; 0)$  nên  $p^3 - 3p^2 + 2 = 0 \Rightarrow p = 1$ . Đồ thị hàm số

$g(x) = f(mx^2 + nx + p)$  có trục đối xứng  $x = -\frac{1}{2}$  nên đồ thị hàm số  $y = mx^2 + nx + p$  cũng có trục đối xứng  $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{n}{2m} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m = n$ .

Đồ thị hàm số  $g(x)$  đi qua điểm  $(-2; 2)$  nên

$$g(-2) = 0 \Rightarrow g(x) = (2m+1)^3 - 3(2m+1)^2 + 2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} m = n = 1 \\ m = n = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Do đồ thị có hướng quay lên trên nên ta suy ra  $m > 0 \Rightarrow m = n = p = 1$

#### Câu 34.

Phương trình tương đương với  $m = \left| 2^{|x|+1} - 8 \right| - \frac{3}{2}x^2$ . Hàm số  $f(x) = \left| 2^{|x|+1} - 8 \right| - \frac{3}{2}x^2$  là một hàm số chẵn do đó ta chỉ cần xét trên nửa khoảng  $[0; +\infty)$  để suy ra bảng biến thiên của hàm số  $f(x)$  trên cả tập số thực.

Xét hàm số

$$f(x) = \left| 2^{|x|+1} - 8 \right| - \frac{3}{2}x^2 = \begin{cases} 2^{x+1} - 8 - \frac{3x^2}{2} & (x \geq 2) \\ -2^{x+1} + 8 - \frac{3x^2}{2} & (0 \leq x < 2) \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} g(x) = 2^{x+1} \ln 2 - 3x & (x > 2) \\ -2^{x+1} \ln 2 - 3x < 0 & (0 < x < 2) \end{cases}$$

Ta có  $g'(x) = 2^{x+1} \ln^2 x - 3 > 8 \ln^2 2 - 3 > 0, \forall x > 2, g(2) = 8 \ln 2 - 6 < 0, g(3) = 16 \ln 2 - 9 > 0$  nên phương trình  $g(x) = 0$  có nghiệm  $x_0 \in (2; 3)$ .

Vẽ bảng biến thiên cho hàm số  $f(x)$  ta suy ra được phương trình có đúng 2 nghiệm thực

$$\text{khi và chỉ khi } \begin{cases} m > 6 \\ m = f(x_0) = 2^{x_0+1} - 8 - \frac{3x_0^2}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{7, 8, \dots, 2018\}$$

#### Câu 35.

Đặt  $f(x) = \left( \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} \right)^{2018}$ , ta có  $f(0) = a_0 + b_1 + \dots + b_{2018} = 2^{2018}$ .

Suy ra  $a_0 + S = 2^{2018} \quad (1)$

$$\begin{aligned} \text{Lại có } f(x) &= \left( x + 1 + \frac{1}{x+1} \right)^{2018} = \sum_{k=0}^{2018} C_{2018}^k (x+1)^{2k-2018} \\ &= \sum_{k=0}^{1008} \frac{C_{2018}^k}{(x+1)^{2018-2k}} + \sum_{k=1009}^{2018} C_{2018}^k (x+1)^{2k-2018}. \end{aligned}$$

Suy ra

- $b_1 = b_3 = \dots = b_{2017} = 0 \Rightarrow S = b_2 + b_4 + \dots + b_{2018} = C_{2018}^0 + C_{2018}^1 + \dots + C_{2018}^{1007} + C_{2018}^{1008}$
- $a_0 = C_{2018}^{1009} + C_{2018}^{1010} + \dots + C_{2018}^{2017} + C_{2018}^{2018} = C_{2018}^{1009} + S \quad (\text{vì } C_n^k = C_n^{n-k}). \quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra  $S = 2^{2017} - \frac{1}{2} C_{2018}^{1009}$ .

### **Câu 36.**

Từ điều kiện ta suy ra  $\int_0^1 (f(x))^{2018} (f(x)-1)^2 dx = 0 \Rightarrow (f(x))^{2018} (f(x)-1)^2 = 0$

Mà  $f(x)$  liên tục trên  $[0;1]$  nên  $\begin{cases} f(x)=1 \\ f(x)=0 \end{cases}$ . Vậy có 2 hàm thỏa mãn yêu cầu đề bài.

### **Câu 37.**

Từ giả thiết  $m.f(x) + n.f(1-x) = g(x)$ , lấy tích phân hai vế ta được :

$$\text{Do } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 [m.f(x) + n.f(1-x)] dx = \int_0^1 g(x) dx$$

$$\Rightarrow m + n \int_0^1 f(1-x) dx = 1 \quad (1)$$

Xét tích phân  $\int_0^1 f(1-x) dx$ . Đặt  $t = 1-x$ , suy ra  $dt = -dx$ . Đổi cận:  $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=0 \end{cases}$

$$\text{Khi đó } \int_0^1 f(1-x) dx = -\int_1^0 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx = 1. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra  $m+n=1$ .

### **Câu 38.**

Vì  $5 = 4+1 = 3+2 = 2+2+1 = 3+1+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1$  nên ta có các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Số tự nhiên có một chữ số 5 đứng đầu và 2017 số 0 đứng sau: Có 1 số.
- Trường hợp 2: Số tự nhiên có một chữ số 4, một chữ số 1 và 2016 số 0.

+ Khả năng 1: Nếu số 4 đứng đầu thì số 1 đứng ở một trong 2017 vị trí còn lại nên ta có  $C_{2017}^1$  số.

+ Khả năng 2: Nếu số 1 đứng đầu thì số 4 đứng ở một trong 2017 vị trí còn lại nên ta có

$C_{2017}^1$  số.

- Trường hợp 3: Số tự nhiên có một chữ số 3, một chữ số 2 và 2016 số 0

+ Khả năng 1: Nếu số 3 đứng đầu thì số 2 đứng ở một trong 2017 vị trí còn lại nên ta có  $C_{2017}^1$  số.

+ Khả năng 2: Nếu số 2 đứng đầu thì số 3 đứng ở một trong 2017 vị trí còn lại nên ta có  $C_{2017}^1$  số.

- Trường hợp 4: Số tự nhiên có hai chữ số 2, một chữ số 1 và 2015 số 0

+ Khả năng 1: Nếu số 2 đứng đầu thì số 1 và số 2 còn lại đứng ở hai trong 2017 vị trí còn lại nên ta có  $A_{2017}^2$  số.

+ Khả năng 2: Nếu số 1 đứng đầu thì hai chữ số 2 đứng ở hai trong 2017 vị trí còn lại nên ta có  $C_{2017}^2$  số.

- Trường hợp 5: Số tự nhiên có 2 chữ số 1, một chữ số 3 thì tương tự như trường hợp 4 ta có  $A_{2017}^2 + C_{2017}^2$  số.

- Trường hợp 6: Số tự nhiên có một chữ số 2, ba chữ số 1 và 2014 số 0.

+ Khả năng 1: Nếu số 2 đứng đầu thì ba chữ số 1 đứng ở ba trong 2017 vị trí còn lại nên ta có  $C_{2017}^3$  số.

+ Khả năng 2: Nếu số 1 đứng đầu và số 2 đứng ở vị trí mà không có số 1 nào khác đứng trước nó thì hai số 1 còn lại đứng ở trong 2016 vị trí còn lại nên ta có  $C_{2016}^2$  số.

+ Khả năng 3: Nếu số 1 đứng đầu và số 2 đứng ở vị trí mà đứng trước nó có hai số 1 thì hai số 1 và 2 còn lại đứng ở trong 2016 vị trí còn lại nên ta có  $A_{2016}^2$  số.

- Trường hợp 7: Số tự nhiên có năm chữ số 1 và 2013 số 0, vì chữ số 1 đứng đầu nên bốn chữ số 1 còn lại đứng ở bốn trong 2017 vị trí còn lại nên ta có  $C_{2017}^4$  số.

Áp dụng quy tắc cộng ta có  $1 + 4C_{2017}^1 + 2(C_{2017}^2 + A_{2017}^2) + (C_{2017}^3 + A_{2016}^2 + C_{2016}^2) + C_{2017}^4$  số cần tìm.

**Câu 39.** Biến đổi giả thiết ta được:

$$1 + \log_2 3y + 2\log_2 3y(3 - \log_2 3xy) = \frac{9}{2} \log_x 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x + \log_2 x \log_2 3y + 2\log_2 3y \log_2 x \log_2 \frac{8}{3xy} = \frac{9}{2}$$

Ta nhận thấy rằng  $\log_2 x + \log_2 3y + \log_2 \frac{8}{3xy} = 3$ .

$$\text{Để đơn giản ta đặt } \begin{cases} \log_2 x = a \\ \log_2 3y = b \\ \log_2 \frac{8}{3xy} = c \end{cases} \quad \text{Lúc này ta có 2 giả thiết } \begin{cases} a + b + c = 3 \\ a + ab + 2abc = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Thế  $b = 3 - a - c$  vào giả thiết dưới ta được:

$$(2c+1)a^2 + (2c^2 - 5c - 4)a + \frac{9}{2} = 0$$

Coi vế trái là tam thức bậc 2 theo biến  $a$  với  $c$  là tham số ta có:

$$\Delta = (2c^2 - 5c - 4)^2 - 18(2c+1) = (2c-1)^2(c^2 - 4c - 2)$$

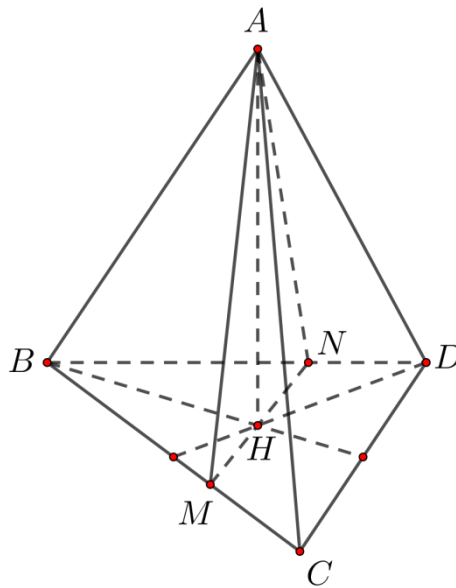
Chú ý với điều kiện  $x, y > 1$  ta sẽ có  $a, b, c > 0$ . Mặt khác  $a + b + c = 3 \Rightarrow c < 3$

Suy ra  $\Delta \leq 0$ , điều này đồng nghĩa  $VT \geq 0$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi 
$$\begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = 1 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x = \frac{3}{2} \\ \log_2 3y = 1 \\ \log_2 \frac{8}{3xy} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Từ đây suy ra  $P = \frac{76 + 12\sqrt{2}}{9}$ .

**Câu 40.**



Gọi  $H$  là tâm tam giác  $BCD$ , ta có  $AH \perp (BCD)$ , mà  $(AMN) \perp (BCD)$  nên  $AH \subset (AMN)$  hay  $MN$  luôn đi qua  $H$ .

Ta có  $BH = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ .

Thể tích khối chóp  $ABMN$  là  $V = \frac{1}{3} \cdot AH \cdot S_{BMN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{2} BM \cdot BN \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{2}}{12} BM \cdot BN$ .

Do  $MN$  luôn đi qua  $H$  và  $M$  chạy trên  $BC$  nên  $BM \cdot BN$  lớn nhất khi  $M \equiv C$  hoặc  $N \equiv D$  khi đó  $V_1 = \frac{\sqrt{2}}{24}$ .

$BM \cdot BN$  nhỏ nhất khi  $MN \parallel CD$  khi  $BM = BN = \frac{2}{3} \Rightarrow V_2 = \frac{\sqrt{2}}{27}$ . Vậy  $V_1 + V_2 = \frac{17\sqrt{2}}{216}$ .