SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 THPT CẤP TỈNH**
THỪA THIÊN HUẾ	**NĂM HỌC 2024-2025**
ĐỀ CHÍNH THỨC	**MÔN: TOÁN (CHUYÊN)**
	Thời gian làm bài: *180 phút, không kể thời gian phát đề*

Họ, tên thí sinh: ....

Số báo danh: ....

Câu 1. (*4,0 điểm*) Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 1,\ u_2 = 2$ và

$$u_{n+2} = \frac{\left(u_{n+1}^2 + 1\right)u_n}{u_n^2 + 1},\ \forall n \geq 1.$$

a) Chứng minh $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n},\ \forall n \geq 1$ và dãy số (u_n) không bị chặn.

b) Tính $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{u_n}{n}\right)$.

Câu 2. (*4,0 điểm*) Cho đa thức $P(x) = a_{24}x^{24} + a_{23}x^{23} + \cdots + a_1x + a_0$ với hệ số thực và $P(x)$ có 24 nghiệm thực (không nhất thiết phân biệt).

a) Biết $P(1) = P\left(3^{25}\right) = 0$, chứng minh đa thức $H(x) = b_{24}x^{24} + b_{23}x^{23} + \cdots + b_1x + b_0$ với $b_i = (3^i - 1)a_i\ (i = 0, 1, \cdots, 24)$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0; 3^{25}\right)$.

b) Chứng minh nếu $a_2 = a_1 = 0$ thì $a_0 = 0$.

c) Giả sử tồn tại số nguyên dương $k \leq 23$ sao cho $a_k = a_{k-1} = 0$. Chứng minh tồn tại đa thức $Q(x)$ với hệ số thực sao cho $P(x) = x^{k+1}.Q(x)$.

Câu 3. (*4,0 điểm*) Cho *p* là số nguyên tố lớn hơn 5. Đặt $N = 2^{2p} + 1$.

a) Chứng minh N không chia hết cho 25.

b) Chứng minh N có ít nhất hai ước nguyên tố lớn hơn 5.

c) Với $q > 5$ là ước nguyên tố của *N*, chứng minh $m = 4p$ là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $2^m - 1$ chia hết cho q.

Câu 4. (*4,0 điểm*) Cho đường tròn (*O*) và dây *BC* cố định không đi qua *O*. Gọi *A* là điểm thay đổi trên (*O*) sao cho *ABC* là tam giác nhọn. Đường phân giác trong góc *BAC* cắt *BC* và (*O*) lần lượt tại *D* và *M* (*M* khác *A*). Gọi *E* là điểm trên cạnh *AC* sao cho $\widehat{AOE} = \widehat{ABM}$.

a) Chứng minh khi *A* thay đổi trên (*O*) thì bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác *AOE* không đổi.

b) Gọi *K* là hình chiếu vuông góc của *D* trên *BM*, *H* là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác *ACD* với *CK*; *N* là giao điểm của *AH* và *EM*. Chứng minh khi *A* thay đổi trên (*O*) thì điểm *N* luôn thuộc một đường tròn cố định.

Câu 5. (*4,0 điểm*) Cho tập hợp *S* gồm 12 số nguyên dương. Với số nguyên dương $n \geq 2$, ta gọi n là "*số phù hợp*" nếu tồn tại n tập con $T_1, T_2, \cdots, T_n$ của S thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) Mỗi tập hợp $T_k\ (k \in \{1, 2, \cdots, n\})$ chứa đúng 6 phần tử.

ii) Giao của hai tập hợp $T_i, T_j\ (1 \leq i < j \leq n)$ tùy ý chứa không quá 2 phần tử.

a) Chứng minh 4 là một "*số phù hợp*".

b) Tìm giá trị lớn nhất của *n* sao cho n là "*số phù hợp*".

---------- **HẾT** ----------

Thí sinh ***KHÔNG*** *được sử dụng tài liệu.*

Giám thị ***KHÔNG*** *được giải thích gì thêm.*