

BÀI 1: NGUYÊN HÀM

DẠNG TOÁN 1: TÍNH NGUYÊN HÀM BẰNG BẢNG NGUYÊN HÀM

☞ Bài toán 1. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ (giả sử điều kiện được xác định)

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C} \xrightarrow{\text{Mô hình}} \boxed{\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C}$$

Một số công thức thường sử dụng:

$$\int k dx = kx + C.$$

$$\int kf(x) dx = k \cdot \int f(x) dx.$$

$$\int |f(x) \pm g(x)| dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

a) Tìm họ nguyên hàm của $f(x) = 4x^3 + x + 5$

Lời giải

Ta có: $F(x) = \int f(x) dx = \int (4x^3 + x + 5) dx = x^4 + \frac{x^2}{2} + 5x + C.$

b) Tìm họ nguyên hàm của $f(x) = 3x^2 - 2x$

Lời giải

Ta có: $F(x) = \int f(x) dx = \int (3x^2 - 2x) dx = x^3 - x^2 + C.$

c) Tìm họ nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x^5} + x^2$

Lời giải

Ta có: $F(x) = \int f(x) dx = \int (x^{-5} + x^2) dx = -\frac{x^{-4}}{4} + \frac{x^3}{3} + C.$

d) Tìm họ nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x^3} + x^2 - 1$

Lời giải

Ta có: $F(x) = \int f(x) dx = \int (x^{-3} + x^2 - 1) dx = -\frac{x^{-2}}{2} + \frac{x^3}{3} - x.$

e) Tính $I = \int (x^2 - 3x)(x+1) dx$

Lời giải

Phân phối được: $I = \int (x^3 - 2x^2 - 3x) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C$

f) Tính $I = \int (x-1)(x^2+2) dx$



Lời giải

Phân phối được: $I = \int (x^3 - x^2 + 2x - 2)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - 2x + C$

g) Tính $I = \int (2x+1)^5 dx$ (công thức mở rộng)

Lời giải

$$I = \int (2x+1)^5 dx = \frac{1}{2} \frac{(2x+1)^6}{6} + C$$

h) Tính $I = \int (2x-10)^{2020} dx$

Lời giải

$$I = \int (2x-10)^{2020} dx = \frac{1}{2} \frac{(2x-10)^{2021}}{2021} + C$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 4x^3 - 4x + 5$ thỏa mãn $F(1) = 3$

A. $F(x) = x^4 - 2x^2 + 5x - 1$.

B. $F(x) = x^4 - 4x^2 + 5x + 1$.

C. $F(x) = x^4 - 2x^2 + 5x + 3$.

D. $F(x) = x^4 - 2x^2 - 5x + \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $F(x) = \int f(x)dx = \int (4x^3 - 4x + 5)dx = x^4 - 2x^2 + 5x + C$

Theo đề bài, ta có: $F(1) = 3 \Leftrightarrow 1^4 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + C = 3 \Leftrightarrow C = -1$

Do đó: $F(x) = x^4 - 2x^2 + 5x - 1$

Lưu ý. Nếu đề bài yêu cầu tìm $F(a)$ ta chỉ cần thế $x = a$ vào $F(x)$ sẽ tìm được $F(a)$.

Chẳng hạn, tính $F(2)$, ta thế $x = 2$ vào $F(x)$, nghĩa là $F(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 1 = 17$.

Câu 2: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ thỏa mãn $F(1) = 4$.

A. $F(x) = x^3 - x^2 + 5x - 3$.

B. $F(x) = x^3 + x^2 + 5x - 3$.

C. $F(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$.

D. $F(x) = x^3 + x^2 + 5x + 3$.

Lời giải

Chọn B

$$\int f(x)dx = \int (3x^2 + 2x + 5)dx = x^3 + x^2 + 5x + C$$



$$F(1) = 4 \Rightarrow 7 + C = 4 \Leftrightarrow C = -3.$$

$$\text{Vậy } F(x) = x^3 + x^2 + 5x - 3.$$

Câu 3: Hàm số $f(x) = -5x^4 + 4x^2 - 6$ có một nguyên hàm $F(x)$ thỏa $F(3) = 1$. Tính $F(-3)$.

- A.** $F(-3) = 226$. **B.** $F(-3) = -225$. **C.** $F(-3) = 451$. **D.** $F(-3) = 225$.

Lời giải

Chọn C

$$\int f(x) dx = \int (-5x^4 + 4x^2 - 6) dx = -x^5 + \frac{4}{3}x^3 - 6x + C.$$

$$F(3) = 1 \Rightarrow -225 + C = 1 \Leftrightarrow C = 226 \Rightarrow F(x) = -x^5 + \frac{4}{3}x^3 - 6x + 226.$$

$$\text{Do đó } F(-3) = 451.$$

Câu 4: Hàm số $f(x) = x^3 + 3x + 2$ có một nguyên hàm $F(x)$ thỏa $F(2) = 14$. Tính $F(-2)$.

- A.** $F(-2) = 6$. **B.** $F(-2) = -14$. **C.** $F(-2) = -6$. **D.** $F(-2) = 14$.

Lời giải

Chọn A

$$\int f(x) dx = \int (x^3 + 3x + 2) dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C.$$

$$F(2) = 14 \Rightarrow 14 + C = 14 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 2x.$$

$$\text{Do đó } F(-2) = 6.$$

Câu 5: Hàm số $f(x) = (2x+1)^3$ có một nguyên hàm $F(x)$ thỏa $F\left(\frac{1}{2}\right) = 4$. Tính $P = F\left(\frac{3}{2}\right)$.

- A.** $P = 32$. **B.** $P = 34$. **C.** $P = 18$. **D.** $P = 30$.

Lời giải

Chọn B

$$\int (2x+1)^3 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^4}{4} + C = \frac{(2x+1)^4}{8} + C.$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \Rightarrow 2 + C = 4 \Leftrightarrow C = 2 \Rightarrow F(x) = \frac{(2x+1)^4}{8} + 2.$$

$$\text{Do đó } F\left(\frac{3}{2}\right) = 34.$$



Câu 6: Hàm số $f(x) = (1-2x)^5$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thỏa $F\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$. Tính $F(1)$.

- A. $F(1) = -10$. B. $F(1) = -5$. C. $F(1) = \frac{59}{12}$. D. $F(1) = \frac{71}{12}$.

Lời giải

Chọn D

$$F(x) = \int (1-2x)^5 dx = -\frac{1}{2} \int (1-2x)^5 d(1-2x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-2x)^6}{6} + C.$$

$$\text{Ta có } F\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \cdot \frac{(1+1)^6}{6} + C = \frac{2}{3} \Leftrightarrow C = 6.$$

$$\text{Do đó } F(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-2x)^6}{6} + 6 \text{ nên } F(1) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + 6 = \frac{71}{12}.$$

Câu 7: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x-3)^2$ thỏa $F(0) = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $T = \log_2 [3F(1) - 2F(2)]$.

- A. $T = 2$. B. $T = 4$. C. $T = 10$. D. $T = -4$.

Lời giải

Chọn A

$$F(x) = \int (2x-3)^2 dx = \frac{1}{2} \int (2x-3)^2 d(2x-3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-3)^3}{3} + C.$$

$$\text{Ta có } F(0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{(0-3)^3}{3} + C = \frac{1}{3} \Leftrightarrow C = \frac{29}{6}.$$

$$\text{Do đó } F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-3)^3}{3} + \frac{29}{6} \text{ nên } F(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{3} + \frac{29}{6} = \frac{14}{3}; F(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{29}{6} = 5.$$

$$\Rightarrow T = \log_2 [3F(1) - 2F(2)] = \log_2 \left(3 \cdot \frac{14}{3} - 2 \cdot 5 \right) = \log_2 4 = 2.$$

Câu 8: Hàm số $f(x) = x^3 + 3x - 2$ có một nguyên hàm $F(x)$. Biết đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $M(2; 10)$. Giá trị của $F(-2)$ bằng

- A. 18. B. 6. C. -8. D. 20.

Lời giải

Chọn B

$$F(x) = \int (x^3 + 3x - 2) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - 2x + C.$$



Hàm số đi qua $M(2;10)$ do đó $\frac{2^4}{4} + \frac{3 \cdot 2^2}{2} - 2 \cdot 2 + C = 10 \Leftrightarrow C = 4$.

Do đó $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - 2x + 4 \Rightarrow F(-2) = \frac{(-2)^4}{4} + \frac{3 \cdot (-2)^2}{2} - 2(-2) + 4 = 6$.

Bài toán 2. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ (mục đích cho học sinh rèn luyện công thức).

Làm quen nhóm công thức có mẫu số cơ bản

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \xrightarrow{\text{Môđ roãng}} \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C.$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C \xrightarrow{\text{Môđ roãng}} \int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C.$$

a) Tìm $I = \int \left(3x^2 + \frac{1}{x} - 2 \right) dx$.

Lời giải

Ta có: $I = \int \left(3x^2 + \frac{1}{x} - 2 \right) dx = x^3 + \ln|x| - 2x + C.$

b) Tìm $I = \int \left(3x^2 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$.

Lời giải

Ta có: $I = \int \left(3x^2 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = x^3 - 2\ln|x| + \frac{1}{x} + C.$

c) Tìm $I = \int \frac{x^2 - 3x + 1}{x} dx$.

Lời giải

Ta có: $I = \int \frac{x^2 - 3x + 1}{x} dx = \int \left(x - 3 + \frac{1}{x} \right) dx = x^2 - 3x + \ln|x| + C.$

d) Tìm $I = \int \frac{2x^2 - 6x + 3}{x} dx$.

Lời giải

Ta có: $I = \int \frac{2x^2 - 6x + 3}{x} dx = \int \left(2x - 6 + \frac{3}{x} \right) dx = x^2 - 6x + 3\ln|x| + C.$

e) Tìm $I = \int \frac{1}{2x-1} dx$.

Lời giải



Ta có: $I = \int \frac{1}{2x-1} dx = \frac{1}{2} \ln|2x-1| + C.$

f) Tìm $I = \int \frac{2}{3-4x} dx.$

Lời giải

Ta có: $I = \int \frac{2}{3-4x} dx = 2 \cdot \frac{1}{-4} \cdot \ln|3-4x| + C = -\frac{1}{2} \ln|3-4x| + C.$

g) Tìm $I = \int \frac{1}{(2x-1)^2} dx.$

Lời giải

$$I = \int \frac{1}{(2x-1)^2} dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x-1} + C = \frac{-1}{4x-2} + C.$$

h) Tìm $I = \int \left[\frac{12}{(x-1)^2} + \frac{2}{2x-3} \right] dx$

Lời giải

$$I = \int \left[\frac{12}{(x-1)^2} + \frac{2}{2x-3} \right] dx = -\frac{12}{1} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{2}{2} \ln|2x-3| + C = \frac{-12}{x-1} + \ln|2x-3| + C.$$

i) Tìm $I = \int \frac{1}{4x^2 + 4x + 1} dx$

Lời giải

$$I = \int \frac{1}{4x^2 + 4x + 1} dx = \int \frac{1}{(2x+1)^2} dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x+1} + C = \frac{-1}{4x+2} + C.$$

j) Tìm $I = \int \frac{4}{x^2 + 6x + 9} dx$

Lời giải

$$I = \int \frac{4}{x^2 + 6x + 9} dx = \int \frac{4}{(x+3)^2} dx = -\frac{4}{1} \cdot \frac{1}{x+3} + C = \frac{-4}{x+3} + C.$$

k) Tìm $I = \int \frac{2x-1}{(x+1)^2} dx$

Lời giải

$$I = \int \frac{2x+2-3}{(x+1)^2} dx = \int \left[\frac{2(x+1)}{(x+1)^2} - \frac{3}{(x+1)^2} \right] dx = \int \frac{2}{x+1} dx - \int \frac{3}{(x+1)^2} dx$$



$$I = 2\ln|x+1| - \frac{-3}{x+1} + C = 2\ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + C.$$

l) Tìm $I = \int \frac{2x-2}{4x^2+4x+1} dx$

Lời giải

$$I = \int \frac{2x-2}{(2x+1)^2} dx = \int \left[\frac{2x+1}{(2x+1)^2} - \frac{3}{(2x+1)^2} \right] dx$$

$$I = \int \frac{1}{2x+1} dx - \int \frac{3}{(2x+1)^2} dx$$

$$I = \frac{1}{2} \ln|2x+1| - \frac{-3}{2(2x+1)} + C$$

$$I = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + \frac{3}{2(2x+1)} + C$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 9: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$. Giá trị $F(3)$ bằng

- A. $\frac{7}{4}$. B. $\ln 2 + 1$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\ln 2 - 1$.

Lời giải

Chọn B

$$F(x) = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + c.$$

$$F(2) = 1 \Leftrightarrow 1 = c \Rightarrow F(x) = \ln|x-1| + 1 \Rightarrow F(3) = \ln 2 + 1.$$

Câu 10: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ và $F(-1) = 5$. Giá trị của $F(-4)$ bằng

- A. $\frac{1}{2} \ln 7 - 5$. B. $2 \ln 7 + 5$. C. $\ln 7 + 5$. D. $\frac{1}{2} \ln 7 + 5$.

Lời giải

Chọn D

$$F(x) = \int \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + c.$$

$$F(-1) = 5 \Leftrightarrow 5 = c \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + 5 \Rightarrow F(-4) = \frac{1}{2} \ln 7 + 5.$$

Câu 11: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3}{2x-1}$ thỏa $F(1) = 0$. Giá trị của $F(2)$ bằng



A. $4\ln 2$.

B. $3\ln 2$.

C. $\frac{3}{2}\ln 3$.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

$$F(x) = \int \frac{3}{2x-1} dx = \frac{3}{2} \ln|2x-1| + c.$$

$$F(1) = 0 \Leftrightarrow 0 = c \Rightarrow F(x) = \frac{3}{2} \ln|2x-1| \Rightarrow F(2) = \frac{3}{2} \ln 3.$$

Câu 12. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ biết $F\left(\frac{e-1}{2}\right) = \frac{3}{2}$ là

A. $F(x) = 2\ln|2x+1| - 0,5$.

B. $F(x) = 2\ln|2x+1| + 1$.

C. $F(x) = \frac{1}{2}\ln|2x+1| + 1$.

D. $F(x) = 0,5\ln|2x+1| + 0,5$.

Lời giải

Chọn C

$$F(x) = \int \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + c.$$

$$F\left(\frac{e-1}{2}\right) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \ln e + c \Rightarrow c = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + 1.$$

Câu 13. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = ax + \frac{b}{x^2}$ ($a, b \in \mathbb{R}, x \neq 0$) biết $F(-1) = 1$,

$$F(1) = 4 \text{ và } f(1) = 0.$$

A. $F(x) = \frac{3x^2}{4} + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}$.

B. $F(x) = \frac{3x^2}{4} - \frac{3}{2x} - \frac{7}{4}$.

C. $F(x) = \frac{3x^2}{2} + \frac{3}{4x} - \frac{7}{4}$.

D. $F(x) = \frac{3x^2}{2} - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$F(x) = \int \left(ax + \frac{b}{x^2}\right) dx = \frac{a}{2} x^2 - \frac{b}{x} + c.$$



Lại có:
$$\begin{cases} F(-1) = 1 \\ F(1) = 4 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} + b + c = 1 \\ \frac{a}{2} - b + c = 4 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = \frac{7}{4} \end{cases}. \text{ Nên } F(x) = \frac{3x^2}{4} + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}.$$

🔖 **Bài toán 3.** Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ (giả sử điều kiện được xác định):.

Làm quen nhóm công thức nguyên hàm của hàm lượng giác

• $\boxed{\int \sin x dx = -\cos x + C} \longrightarrow \boxed{\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C}.$

• $\boxed{\int \cos x dx = \sin x + C} \longrightarrow \boxed{\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C}.$

🔖 **Cần nhớ:** $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$.

a) Tìm $I = \int (\sin x - \cos x) dx$.

Lời giải

$$I = \int (\sin x - \cos x) dx = -\cos x - \sin x + C.$$

b) Tìm $I = \int (3 \cos x - 2 \sin x) dx$.

Lời giải

$$I = \int (3 \cos x - 2 \sin x) dx = 3 \sin x + 2 \cos x + C$$

c) Tìm $I = \int (2 \sin 2x - 3 \cos 6x) dx$.

Lời giải

$$I = \int (2 \sin 2x - 3 \cos 6x) dx = -\cos 2x - \frac{1}{2} \sin 6x + C.$$

d) Tìm $I = \int \sin x \cos x dx$.

Lời giải

$$I = \int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

e) Tìm $I = \int \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) dx$.

Lời giải

$$I = \int \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) dx = 2 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + C.$$

f) Tìm $I = \int \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{3}\right) dx$.

Lời giải

$$I = \int \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{3}\right) dx = 3 \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{3}\right) + C.$$

g) Tìm $I = \int (\sin x - \cos x)^2 dx$.

Lời giải

$$I = \int (\sin x - \cos x)^2 dx = \int (\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x) dx = \int (1 - \sin 2x) dx = x + \frac{1}{2} \cos 2x + C$$

h) Tìm $I = \int (\cos x + \sin x)^2 dx$.

Lời giải

$$I = \int (\sin x + \cos x)^2 dx = \int (\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x) dx = \int (1 + \sin 2x) dx = x - \frac{1}{2} \cos 2x + C$$

i) Tìm $I = \int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$.

Lời giải

$$I = \int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C.$$

j) Tìm $I = \int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx$.

Lời giải

$$\begin{aligned} I &= \int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx = \int (\cos^2 x - \sin^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) dx \\ &= \int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C \end{aligned}$$

Nhóm áp dụng công thức:

$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + C$	$\longrightarrow \int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C.$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$	$\longrightarrow \int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C.$

k) Tìm $I = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$.



Lời giải

$$I = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \tan x + \cot x + C.$$

l) Tìm $I = \int \frac{6}{\cos^2 3x} dx.$

Lời giải

$$I = \int \frac{6}{\cos^2 3x} dx = 6 \cdot \frac{1}{3} \tan 3x + C = 2 \tan 3x + C.$$

m) Tìm $I = \int \tan^2 x dx.$

Lời giải

$$I = \int \tan^2 x dx = \int (\tan^2 x + 1 - 1) dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x + C.$$

n) Tìm $I = \int (\tan x + \cot x)^2 dx.$

Lời giải

$$I = \int (\tan x + \cot x)^2 dx = \int (\tan^2 x + 2 + \cot^2 x) dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \tan x - \cot x + C.$$

☞ Bậc chẵn $\xrightarrow{PP}$ Hạ bậc và lấy công thức nguyên hàm.

Công thức hạ bậc: $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$ và $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x.$

(Cần nhớ: Mỗi lần hạ bậc xuất hiện hai số $\frac{1}{2}$; sin là trừ, cos là cộng, cung góc tăng gấp đôi)

o) Tìm $I = \int \sin^2 x dx.$

Lời giải

$$\text{Ta có } I = \int \sin^2 x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

p) Tìm $I = \int \cos^2 x dx.$

Lời giải

$$\text{Ta có } I = \int \cos^2 x dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$



q) Tìm $I = \int \sin^2 2x dx$.

Lời giải

Ta có $I = \int \sin^2 2x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} \sin 4x + C$.

r) Tìm $I = \int \cos^2 2x dx$.

Lời giải

Ta có $I = \int \cos^2 2x dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} \sin 4x + C$.

s) Tìm $I = \int (2 + \sin 3x)^2 dx$.

Lời giải

Ta có $I = \int (2 + \sin 3x)^2 dx = \int (4 + 4 \sin 3x + \sin^2 3x) dx = \int \left(4 + 4 \sin 3x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 6x \right) dx$
 $= \frac{9}{2}x - \frac{4}{3} \cos 3x - \frac{1}{12} \sin 6x + C$.

t) Tìm $I = \int (2 - \cos 2x)^2 dx$.

Lời giải

Ta có $I = \int (2 - \cos 2x)^2 dx = \int (4 - 4 \cos 2x + \cos^2 2x) dx = \int \left(4 - 4 \cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx$
 $= \frac{9}{2}x - 2 \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x + C$.

☞ Tích bậc nhất của sin và cos $\xrightarrow{PP}$ Áp dụng công thức tích thành tổng.

- $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$.
- $\sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$.
- $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$.

u) Tìm $I = \int \sin 3x \cos x dx$.

Lời giải

Ta có $I = \int \sin 3x \cos x dx = \int \frac{1}{2} (\sin 4x + \sin 2x) dx = -\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{4} \cos 2x + C$.



v) Tìm $I = \int \sin 4x \cos x dx$.Lời giải

$$\text{Ta có } I = \int \sin 4x \cos x dx = \int \frac{1}{2} (\sin 5x + \sin 3x) dx = -\frac{1}{10} \cos 5x - \frac{1}{6} \cos 3x + C.$$

w) Tìm $I = \int \sin 3x \sin x dx$.Lời giải

$$\text{Ta có } I = \int \sin 3x \sin x dx = \int -\frac{1}{2} (\cos 4x + \cos 2x) dx = -\frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

x) Tìm $I = \int \sin 2x \sin 4x dx$.Lời giải

$$\text{Ta có } I = \int \sin 2x \sin 4x dx = \int -\frac{1}{2} (\cos 6x + \cos 2x) dx = -\frac{1}{12} \sin 6x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

y) Tìm $I = \int \cos 7x \cos x dx$.Lời giải

$$\text{Ta có } I = \int \cos 7x \cos x dx = \int \frac{1}{2} (\cos 8x + \cos 6x) dx = \frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{12} \sin 6x + C.$$

z) Tìm $I = \int \cos 9x \cos x dx$.Lời giải

$$\text{Ta có } I = \int \cos 9x \cos x dx = \int \frac{1}{2} (\cos 10x + \cos 8x) dx = \frac{1}{20} \sin 10x + \frac{1}{16} \sin 8x + C.$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 14: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Tính $P = F\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

A. $P = \frac{5}{4}$.

B. $P = 0$.

C. $P = \frac{1}{2}$.

D. $P = \frac{3}{4}$.

Lời giải**Chọn D**

$$\square \text{ Ta có: } F(x) = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C.$$

$$\square F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + C = 1 \Leftrightarrow C = 1.$$

$$\square \text{ Suy ra } F(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + 1 \Rightarrow P = F\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + 1 = \frac{3}{4}.$$



Câu 15: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x + \sin x + 2 \cos x$ thỏa mãn $F(0) = 1$.

A. $F(x) = x^2 + \cos x + 2 \sin x - 2$.

B. $F(x) = x^2 - \cos x + 2 \sin x$.

C. $F(x) = 2 + \cos x + 2 \sin x$.

D. $F(x) = x^2 - \cos x + 2 \sin x + 2$.

Lời giải

Chọn D

□ Ta có: $F(x) = \int (2x + \sin x + 2 \cos x) dx = x^2 - \cos x + 2 \sin x + C$.

□ $F(0) = 1 \Leftrightarrow 0^2 - \cos 0 + 2 \sin 0 + C = 1 \Leftrightarrow C = 2$.

□ Suy ra $F(x) = x^2 - \cos x + 2 \sin x + 2$.

Câu 16: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

A. $F(x) = -\cos x + \tan x + C$.

B. $F(x) = -\cos x + \tan x - \sqrt{2} + 1$.

C. $F(x) = \cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1$.

D. $F(x) = -\cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1$.

Lời giải

Chọn D

□ Ta có: $F(x) = \int \left(\sin x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -\cos x + \tan x + C$.

□ $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow -\cos \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{4} + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow C = \sqrt{2} - 1$.

□ Suy ra $F(x) = -\cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1$.

Câu 17: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 4 \cos^2 x - 5$ thỏa mãn $F(\pi) = 0$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = -3x + \sin 2x + 3\pi$.

B. $F(x) = \frac{4}{3} \sin^3 x - 5x + 5\pi$.

C. $F(x) = \frac{4}{3} \cos^3 x - 5x + \frac{4}{3} + 5\pi$.

D. $F(x) = -3x - \sin 2x + 3\pi$.

Lời giải

Chọn A

□ Ta có: $F(x) = \int (4 \cos^2 x - 5) dx = \int (2 \cos 2x - 3) dx = \sin 2x - 3x + C$.

□ $F(\pi) = 0 \Leftrightarrow \sin 2\pi - 3\pi + C = 0 \Leftrightarrow C = 3\pi$.

□ Suy ra $F(x) = -3x + \sin 2x + 3\pi$.

Câu 18: Biết rằng $F(x) = \int \cos^2 x dx = ax + b \sin 2x + C$. Giá trị của $a^2 + b^2$ bằng



A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{5}{16}$.

C. 2.

D. $\frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $F(x) = \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$.

Suy ra $a = \frac{1}{2}; b = \frac{1}{4} \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{5}{16}$.

Câu 19: Biết $\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 \, dx = x + \frac{a}{b} \cos 4x + C$, với a, b là các số nguyên dương, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $C \in \mathbb{R}$. Giá trị của $a + b$ bằng

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 \, dx = \int (1 - \sin 4x) \, dx = x + \frac{1}{4} \cos 4x + C$.

Suy ra $a = 1; b = 4 \Rightarrow a + b = 5$.

Bài toán 4. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ (giả sử điều kiện được xác định):.

Làm quen nhóm công thức mũ

$$\boxed{\int e^x \, dx = e^x + C} \longrightarrow \boxed{\int e^{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C}.$$

$$\boxed{\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C} \longrightarrow \boxed{\int a^{\alpha x + \beta} \, dx = \frac{1}{\alpha} \frac{a^{\alpha x + \beta}}{\ln a} + C}.$$

aa) Tìm $I = \int e^{2x} \, dx$.

Lời giải

$$I = \int e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C.$$

bb) Tìm $I = \int e^{1-2x} \, dx$.

Lời giải

$$I = \int e^{1-2x} \, dx = -\frac{1}{2} e^{1-2x} + C.$$

cc) Tìm $I = \int (2x - e^{-x}) \, dx$.

Lời giải



$$I = \int (2x - e^{-x}) dx = x^2 + e^{-x} + C$$

dd) $I = \int e^x (1 - 3e^{-2x}) dx.$

Lời giải

$$I = \int e^x (1 - 3e^{-2x}) dx = \int (e^x - 3e^{-x}) dx = e^x + 3e^{-x} + C.$$

ee) Tìm $I = \int (3 - e^x)^2 dx.$

Lời giải

$$\begin{aligned} I &= \int (3 - e^x)^2 dx = \int (9 - 6e^x + e^{2x}) dx \\ &= 9x - 6e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + C. \end{aligned}$$

ff) Tìm $I = \int (2 + e^{3x})^2 dx$

Lời giải

$$I = \int (2 + e^{3x})^2 dx = \int (4 + 4e^{3x} + e^{6x}) dx = 4x + \frac{4}{3}e^{3x} + \frac{1}{6}e^{6x} + C.$$

gg) Tìm $I = \int 2^{2x+1} dx$

Lời giải

$$I = \int 2^{2x+1} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{2x+1}}{\ln 2} + C.$$

hh) Tìm $I = \int 4^{1-2x} dx.$

Lời giải

$$I = \int 4^{1-2x} dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4^{1-2x}}{\ln 4} + C.$$

ii) Tìm $I = \int 3^x \cdot 5^x dx.$

Lời giải

$$I = \int 3^x \cdot 5^x dx = \int 15^x dx = \frac{15^x}{\ln 5}.$$

jj) Tìm $I = \int 4^x \cdot 3^{x-1} dx.$

Lời giải



$$I = \int 4^x \cdot 3^{x-1} dx = \int \frac{12^x}{3} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{12^x}{\ln 12} + C.$$

kk) Tìm $I = \int \frac{dx}{e^{2-5x}}.$

Lời giải

$$I = \int \frac{dx}{e^{2-5x}} = \int e^{5x-2} dx = \frac{1}{5} e^{5x-2} + C.$$

ll) Tìm $I = \int \frac{dx}{2^{3-2x}}.$

Lời giải

$$I = \int \frac{dx}{2^{3-2x}} = \int 2^{2x-3} dx = \frac{1}{2} 2^{2x-3} + C.$$

mm) Tìm $I = \int \frac{4^{x+1} \cdot 3^{x-1}}{2^x} dx.$

Lời giải

$$I = \int \frac{4^{x+1} \cdot 3^{x-1}}{2^x} dx = \frac{4}{3} \int \frac{12^x}{2^x} dx = \frac{4}{3} \int 6^x dx = \frac{4}{3} \frac{6^x}{\ln 6} + C.$$

nn) Tìm $I = \int \frac{4^{2x-1} \cdot 6^{x-1}}{3^x} dx.$

Lời giải

$$I = \int \frac{4^{2x-1} \cdot 6^{x-1}}{3^x} dx = \frac{1}{24} \int \frac{96^x}{3^x} dx = \frac{1}{24} \cdot \frac{32^x}{\ln 32} + C.$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 20. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ thỏa $F(0) = \frac{3}{2}$. Giá trị của $F\left(\frac{1}{2}\right)$ bằng

A. $\frac{1}{2}e + 2.$

B. $\frac{1}{2}e + 1.$

C. $2e + 1.$

D. $\frac{1}{2}e + \frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int f(x) dx = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$

* $F(0) = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot e^{2 \cdot 0} + C = \frac{3}{2} \Leftrightarrow C = 1$



Vậy $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 1 \Rightarrow F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e + 1.$

Câu 21: Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2e^x - 3x^2$ thỏa $F(0) = \frac{9}{2}$ là

- A. $2e^x + x^3 - \frac{3}{2}.$ B. $2e^x - x^3 + \frac{5}{2}.$ C. $e^x - x^3 + \frac{7}{2}.$ D. $2e^x - x^3 + \frac{9}{2}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int f(x)dx = \int (2e^x - 3x^2)dx = 2e^x - x^3 + C$

* $F(0) = \frac{9}{2} \Rightarrow 2.e^0 - 0^3 + C = \frac{9}{2} \Leftrightarrow C = \frac{5}{2}$

Vậy $F(x) = 2e^x - x^3 + \frac{5}{2}.$

Câu 22: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4^x$ thỏa $F(1) = \frac{3}{\ln 2}$. Giá trị của $F(2)$ bằng

- A. $F(2) = \frac{9}{\ln 2}.$ B. $F(2) = \frac{3}{\ln 2}.$ C. $F(2) = \frac{8}{\ln 2}.$ D. $F(2) = \frac{7}{\ln 2}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int f(x)dx = \int 4^x dx = \frac{4^x}{\ln 4} + C = \frac{4^x}{2\ln 2} + C$

* $F(1) = \frac{3}{\ln 2} \Rightarrow \frac{4}{2\ln 2} + C = \frac{3}{\ln 2} \Leftrightarrow C = \frac{1}{\ln 2}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{4^x + 2}{2\ln 2} \Rightarrow F(2) = \frac{4^2 + 2}{2\ln 2} = \frac{9}{\ln 2}$

Câu 23: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^{2x} \cdot 3^x \cdot 7^x$ là

- A. $\frac{84^x}{\ln 84} + C.$ B. $\frac{2^{2x} \cdot 3^x \cdot 7^x}{\ln 4 \cdot \ln 3 \cdot \ln 7} + C.$ C. $84^x + C.$ D. $84^x \cdot \ln 84 + C.$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int f(x)dx = \int (2^{2x} \cdot 3^x \cdot 7^x)dx = \int (4 \cdot 3 \cdot 7)^x dx = \int 84^x dx = \frac{84^x}{\ln 84} + C$

Câu 24: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x+1}$ thỏa mãn $F(0) = \frac{e}{3}$. Tính $\ln^3[3F(1)]$.

- A. $\ln^3[3F(1)] = 64.$ B. $\ln^3[3F(1)] = -8.$ C. $\ln^3[3F(1)] = 81.$ D. $\ln^3[3F(1)] = 27.$



Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int f(x)dx = \int e^{3x+1}dx = \frac{e^{3x+1}}{3} + C$

* $F(0) = \frac{e}{3} \Rightarrow \frac{e^{3 \cdot 0 + 1}}{3} + C = \frac{e}{3} \Leftrightarrow C = 0$

$\Rightarrow F(x) = \frac{e^{3x+1}}{3} \Rightarrow F(1) = \frac{e^4}{3} \Rightarrow \ln^3[3F(1)] = \ln^3(e^4) = (\ln e^4)^3 = 4^3 = 64$

Câu 25: Biết một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 4^x \cdot 2^{2x+3}$ thỏa mãn $F(0) = \frac{2}{\ln 2}$. Tính giá trị của

biểu thức $A = \frac{[\ln 2 \cdot F(1)]^3}{2^{10}}$.

A. $A = 1$.

B. $A = 8$.

C. $A = 16$.

D. $A = 32$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int f(x)dx = \int 4^x \cdot 2^{2x+3}dx = \int 2^{4x+3}dx = \frac{2^{4x+3}}{4 \ln 2} + C$

* $F(0) = \frac{2}{\ln 2} \Rightarrow \frac{2^{4 \cdot 0 + 3}}{4 \ln 2} + C = \frac{2}{\ln 2} \Leftrightarrow C = 0$

$\Rightarrow F(x) = \frac{2^{4x+3}}{4 \ln 2} \Rightarrow F(1) = \frac{2^5}{\ln 2} \Rightarrow A = \frac{[\ln 2 \cdot F(1)]^3}{2^{10}} = \frac{\left[\ln 2 \cdot \frac{2^5}{\ln 2}\right]^3}{2^{10}} = \frac{2^{15}}{2^{10}} = 2^5 = 32$



Bài toán 5. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ (giả sử điều kiện được xác định):

a) Tìm $I = \int \frac{3x-1}{x+1} dx$.

Lời giải

Ta có $I = \int \frac{3(x+1)-4}{x+1} dx = \int \left(3 - \frac{4}{x+1} \right) dx = 3x - 4 \ln|x+1| + C$.

b) Tìm $I = \int \frac{2x+1}{x-1} dx$.

Lời giải

Ta có $I = \int \frac{2(x-1)+3}{x-1} dx = \int \left(2 + \frac{3}{x-1} \right) dx = 2x + 3 \ln|x-1| + C$.

c) Tìm $I = \int \frac{3x+1}{x-2} dx$.

Lời giải

Ta có $I = \int \frac{3(x-2)+7}{x-2} dx = \int \left(3 + \frac{7}{x-2} \right) dx = 3x + 7 \ln|x-2| + C$.

d) Tìm $I = \int \frac{4x+3}{2x-1} dx$.

Lời giải

Ta có $I = \int \frac{2(2x-1)+5}{2x-1} dx = \int \left(2 + \frac{5}{2x-1} \right) dx = 2x + \frac{5}{2} \ln|2x-1| + C$.

e) Tìm $I = \int \frac{x^2}{x-1} dx$.

Lời giải

Ta có: $I = \int \frac{(x^2-1^2)+1}{x-1} dx = \int \frac{(x-1)(x+1)+1}{x-1} dx = \int \left(x+1 + \frac{1}{x-1} \right) dx$

$= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + C$.

f) Tìm $I = \int \frac{x^2}{x+1} dx$.

Lời giải



Ta có:
$$I = \int \frac{(x^2 - 1^2) + 1}{x+1} dx = \int \frac{(x-1)(x+1) + 1}{x+1} dx = \int \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C.$$

g) Tìm $I = \int \frac{x^3}{x+1} dx.$

Lời giải

Ta có:
$$I = \int \frac{(x^3 + 1^3) - 1}{x+1} dx = \int \frac{(x+1)(x^2 - x + 1) - 1}{x+1} dx = \int \left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln|x+1| + C.$$

h) Tìm $I = \int \frac{x^3}{x-2} dx.$

Lời giải

Ta có:

$$I = \int \frac{(x^3 - 2^3) + 8}{x-2} dx = \int \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4) + 8}{x-2} dx = \int \left(x^2 + 2x + 4 + \frac{8}{x-2} \right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + 8 \ln|x-2| + C.$$

i) Tìm $I = \int \frac{x^2 + x + 1}{x+2} dx.$

Lời giải

Ta có:
$$I = \int \left(x - 1 + \frac{3}{x+2} \right) dx = \frac{x^2}{2} - x + 3 \ln|x+2| + C.$$

j) Tìm $I = \int \frac{2x^2 + 4x + 3}{x-1} dx.$

Lời giải

Ta có:
$$I = \int \left(2x + 6 + \frac{9}{x-1} \right) dx = x^2 + 6x + 9 \ln|x-1| + C.$$

k) Tìm $I = \int \frac{4x^2 + 6x + 1}{2x+1} dx.$

Lời giải



Ta có: $I = \int \left(2x + 2 - \frac{1}{2x+1} \right) dx = x^2 + 2x - \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C.$

l) Tìm $I = \int \frac{3x^2 + 2x - 1}{x-1} dx.$

Lời giải

Ta có: $I = \int \left(3x + 5 + \frac{4}{x-1} \right) dx = \frac{3}{2} x^2 + 5x + 4 \ln|x-1| + C.$

Nhớ. $\int \frac{u'}{u} dx = \int \ln|u'| dx = \ln|u| + C$

m) Tìm $I = \int \frac{4x+2}{x^2+x-4} dx.$

Lời giải

Ta có: $I = \int \frac{4x+2}{x^2+x-4} dx = \int \frac{2(2x+1)}{x^2+x-4} dx = \int \frac{2(x^2+x-4)'}{x^2+x-4} dx$

$= \int 2(\ln|x^2+x-4|)' dx = 2\ln|x^2+x-4| + C.$

n) Tìm $I = \int \frac{6x+1}{3x^2+x-4} dx.$

Lời giải

Ta có: $I = \int \frac{6x+1}{3x^2+x-4} dx = \int \frac{(3x^2+x-4)'}{3x^2+x-4} dx = \int (\ln|3x^2+x-4|)' dx = \ln|3x^2+x-4| + C.$

o) Tìm $I = \int \frac{5x+4}{2x^2-x-6} dx.$

Lời giải

Áp dụng $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của $f(x)=0$ ta được:

$$\frac{5x+4}{2x^2-x-6} = \frac{5x+4}{2(x-2)\left(x+\frac{3}{2}\right)} = \frac{5x+4}{(x-2)(2x+3)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{2x+3} \text{ với } \begin{cases} a = \frac{5x+4}{2x+3} \Big|_{x=2} = 2 \\ b = \frac{5x+4}{x-2} \Big|_{x=-\frac{3}{2}} = 1 \end{cases}.$$



Khi đó, ta có *Lời giải* sau: $I = \int \frac{5x+4}{2x^2-x-6} dx = \int \left(\frac{2}{x-2} + \frac{1}{2x+3} \right) dx$
 $= 2\ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln|2x+3| + C.$

p) Tìm $I = \int \frac{1}{(x-1)(x+3)} dx.$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3}$ với $\begin{cases} a = \frac{1}{x+3} \Big|_{x=1} = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{x-1} \Big|_{x=-3} = -\frac{1}{4} \end{cases}.$

Khi đó: $I = \int \frac{1}{(x-1)(x+3)} dx = \int \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} \right) dx = \frac{1}{4} (\ln|x-1| - \ln|x+3|) + C$
 $= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+3} \right| + C.$

q) Tìm $I = \int \frac{1}{(2x-4)(x+5)} dx.$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{(2x-4)(x+5)} = \frac{a}{2x-4} + \frac{b}{x+5}$ với $\begin{cases} a = \frac{1}{x+5} \Big|_{x=2} = \frac{1}{7} \\ b = \frac{1}{2x-4} \Big|_{x=-5} = -\frac{1}{14} \end{cases}.$

Khi đó: $I = \int \frac{1}{(2x-4)(x+5)} dx = \int \frac{1}{14} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+5} \right) dx = \frac{1}{14} (\ln|x-2| - \ln|x+5|) + C$
 $= \frac{1}{14} \ln \left| \frac{x-2}{x+5} \right| + C.$

r) Tìm $I = \int \frac{1}{x^2-4x} dx.$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{x^2-4x} = \frac{1}{x(x-4)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-4}$ với $\begin{cases} a = \frac{1}{x-4} \Big|_{x=0} = -\frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{x} \Big|_{x=4} = \frac{1}{4} \end{cases}.$



Khi đó: $I = \int \frac{1}{x^2 - 4x} dx = \int \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{4} (\ln|x-4| - \ln|x|) + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-4}{x} \right| + C.$

s) Tìm $I = \int \frac{4x-5}{x^2-x-2} dx.$

Lời giải

Ta có: $\frac{4x-5}{x^2-x-2} = \frac{4x-5}{(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}$ với $\begin{cases} a = \frac{4x-5}{x-2} \Big|_{x=-1} = 3 \\ b = \frac{4x-5}{x+1} \Big|_{x=2} = 1 \end{cases}.$

Khi đó: $I = \int \frac{4x-5}{x^2-x-2} dx = \int \left(\frac{3}{x+1} + \frac{1}{x-2} \right) dx = 3\ln|x+1| + \ln|x-2| + C.$

t) Tìm $I = \int \frac{4x+11}{x^2+5x+6} dx.$

Lời giải

Ta có: $\frac{4x+11}{x^2+5x+6} = \frac{4x+11}{(x+2)(x+3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+3}$ với $\begin{cases} a = \frac{4x+11}{x+3} \Big|_{x=-2} = 3 \\ b = \frac{4x+11}{x+2} \Big|_{x=-3} = 1 \end{cases}$

u) Tìm $I = \int \frac{1}{x^2(x-1)} dx.$

Lời giải

Ta có: $I = \int \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-1} \right) dx$

với $a = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x-1} \right) \Big|_{x=0} = -1; b = \left(\frac{1}{x-1} \right) \Big|_{x=0} = -1; c = \frac{1}{x^2} \Big|_{x=1} = 1$

Nên $I = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \ln|x-1| - \ln|x| + \frac{1}{x} + C = \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + \frac{1}{x} + C.$

v) Tìm $I = \int \frac{2}{(x+2)^2(x-1)} dx.$

Lời giải



Ta có: $I = \int \frac{2}{(x+2)^2(x-1)} dx = \int 2 \left(\frac{1}{(x+2)^2(x-1)} \right) dx = \int 2 \left(\frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{c}{x-1} \right) dx.$

với $a = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x-1} \right) \Big|_{x=-2} = -\frac{1}{9}; b = \left(\frac{1}{x-1} \right) \Big|_{x=-2} = -\frac{1}{3}; c = \left(\frac{1}{(x+2)^2} \right) \Big|_{x=1} = \frac{1}{9}.$

Khi đó: $I = \int \frac{2}{(x+2)^2(x-1)} dx = \int 2 \left(\frac{1}{9(x-1)} - \frac{1}{9(x+2)} - \frac{1}{3(x+2)^2} \right) dx$
 $= \frac{2}{9} \ln|x-1| - \frac{2}{9} \ln|x+2| + \frac{1}{3(x+2)} + C = \frac{2}{9} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + \frac{1}{3(x+2)} + C.$

DẠNG TOÁN 3: NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

☞ **Định lý:** Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm và liên tục trên K thì

$$I = \int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx \text{ hay } I = \int u dv = uv - \int v du.$$

☞ **Vận dụng giải toán:**

Nhận dạng: Tích hai hàm nhân khác nhau, ví dụ: $\int e^x \sin x dx, \int x \ln x dx, \dots$

+ Đặt $\begin{cases} u = \dots\dots\dots \\ dv = \dots\dots\dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dots\dots\dots dx \\ v = \dots\dots\dots \end{cases}$. Suy ra $I = \int u dv = uv - \int v du.$

+ Thứ tự ưu tiên chọn u : log – đa – lượng – mũ và $dv =$ phần còn lại.

+ Lưu ý: Bậc của đa thức và bậc của ln tương ứng với số lần lấy nguyên hàm.

+ Dạng mũ nhân lượng giác là dạng nguyên hàm từng phần luân hồi.

Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ (giả sử điều kiện được xác định):

☞ **Bài toán 6.** Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ (giả sử điều kiện được xác định):

a) Tìm $I = \int (x+1) \sin x dx.$

Lời giải

Chọn $\begin{cases} u = x+1 & \xrightarrow{v/p} du = dx \\ dv = \sin x dx & \xrightarrow{n/h} v = -\cos x \end{cases}.$

Suy ra $I = -(x+1)\cos x + \int \cos x dx = -(x+1)\cos x + \sin x + C.$

b) Tìm $I = \int x \ln x dx.$

Lời giải

Chọn $\begin{cases} u = \ln x & \xrightarrow{v/p} du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx & \xrightarrow{n/h} v = \frac{1}{2} x^2 \end{cases}.$



Suy ra $I = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$.

c) Tìm $I = \int xe^x dx$.

Lời giải

Chọn $\begin{cases} u = x & \xrightarrow{v/p} du = dx \\ dv = e^x dx & \xrightarrow{n/h} v = e^x \end{cases}$.

Suy ra $I = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$.

d) Tìm $I = \int xe^{-x} dx$.

Lời giải

Chọn $\begin{cases} u = x & \xrightarrow{v/p} du = dx \\ dv = e^{-x} dx & \xrightarrow{n/h} v = -e^{-x} \end{cases}$.

Suy ra $I = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+1) + C$.

e) Tìm $I = \int \frac{x}{\sin^2 x} dx$.

Lời giải

Chọn $\begin{cases} u = x & \xrightarrow{v/p} du = dx \\ dv = \frac{1}{\sin^2 x} dx & \xrightarrow{n/h} v = -\cot x \end{cases}$.

Suy ra $I = -x \cot x + \int \cot x dx = -x \cot x + \int \frac{1}{\sin x} d(\sin x) = -x \cot x + \ln|\sin x| + C$.

f) Tìm $I = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx$.

Lời giải

Chọn $\begin{cases} u = x & \xrightarrow{v/p} du = dx \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx & \xrightarrow{n/h} v = \tan x \end{cases}$.

Suy ra $I = x \tan x + \int \tan x dx = x \tan x - \int \frac{1}{\cos x} d(\cos x) = x \tan x - \ln|\cos x| + C$.

Cần nhớ: 1) $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$. 2) $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$.

g) Tìm $I = \int \ln x dx$

Lời giải



Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases} \Rightarrow I = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C.$

h) Tìm $I = \int (2x+1) \ln x dx$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = (2x+1) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x^2 + x \end{cases}$

$\Rightarrow I = (x^2 + x) \ln x - \int (x^2 + x) \cdot \frac{1}{x} dx = (x^2 + x) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C.$

i) Tìm $I = \int x \sin x \cos x dx$

Lời giải

Ta có $I = \frac{1}{2} \int x \sin 2x dx$. Khi đó, đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}.$

Suy ra $I = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} x \cos 2x + \int \frac{1}{2} \cos 2x dx \right) = -\frac{1}{4} x \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x + C.$

j) Tìm $I = \int x(2 \cos^2 x - 1) dx$

Lời giải

Ta có: $I = \int x(1 + \cos 2x + x) dx = \int (x^2 + x) dx + \int x \cos 2x dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases} \Rightarrow I = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \sin 2x - \int \frac{1}{2} \sin 2x dx$

$\Rightarrow I = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$

k) Tìm $I = \int e^x \sin x dx$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = -\cos x \end{cases} \Rightarrow I = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + I_1.$

Đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \sin x \end{cases} \Rightarrow I_1 = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - I.$



Suy ra: $I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I \Rightarrow I = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$

l) Tìm $I = \int e^x \cos x dx$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \sin x \end{cases} \Rightarrow I = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - I_1.$

Đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = -\cos x \end{cases} \Rightarrow I_1 = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + I.$

Suy ra: $I = e^x \cos x + e^x \sin x - I \Rightarrow I = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C.$

m) Tìm $I = \int \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \ln(x + \sqrt{x} + 1) dx$

Lời giải

Đặt $t = x + \sqrt{x} \Rightarrow dt = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx \Rightarrow I = \int \ln(1+t) dt.$

Đặt $\begin{cases} u = \ln(1+t) \\ dv = dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{1+t} dt \\ v = t \end{cases} \Rightarrow I = t \ln(1+t) - \int \frac{t}{1+t} dt = t \ln(1+t) - t + \ln(1+t) + C$

$\Rightarrow I = (x + \sqrt{x}) \ln(x + \sqrt{x} + 1) - (x + \sqrt{x}) + \ln(x + \sqrt{x} + 1) + C.$

n) Tìm $I = \int \frac{\ln(4x^2 + 8x + 3)}{(x+1)^3} dx$

Lời giải

Đặt

$t = (x+1)^2 \Rightarrow dt = 2(x+1) dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2(x+1)} \Rightarrow I = \int \frac{\ln(4(x+1)^2 - 1)}{(x+1)^3} dx = \int \frac{\ln(4t-1)}{2t^2} dt.$

Đặt $\begin{cases} u = \ln(4t-1) \\ dv = \frac{1}{2t^2} dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{4}{4t-1} dt \\ v = -\frac{1}{2t} \end{cases} \Rightarrow I = -\frac{\ln(4t-1)}{2t} + \int \frac{2}{t(4t-1)} dt$

$\Rightarrow I = -\frac{\ln(4t-1)}{2t} + 8 \int \left(\frac{1}{4t-1} - \frac{1}{4t}\right) dt = -\frac{\ln(4t-1)}{2t} + 8 \ln \frac{4t-1}{4t} + C$



$$\Rightarrow I = -\frac{\ln(4x^2 + 8x + 3)}{2(x+1)^2} + 8\ln \frac{4x^2 + 8x + 3}{4(x+1)^2} + C.$$

o) Cho $F(x) = \ln x$ là một nguyên hàm của $\frac{f(x)}{x^3}$. Tìm nguyên hàm của $f'(x)\ln x$.

Lời giải

Áp dụng định nghĩa $F'(x) = f(x)$, Ta có: $(\ln x)' = \frac{f(x)}{x^3} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{f(x)}{x^3} \Rightarrow f(x) = x^2$

Ta tìm $I = \int f'(x)\ln x dx$.

Chọn $\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = f'(x) dx \Rightarrow v = f(x) = x^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = x^2 \cdot \ln x - \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = x^2 \ln x - \int x dx = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + C$$

Vậy $\int f'(x)\ln x dx = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + C$

p) Cho $F(x) = \ln x$ là một nguyên hàm của $\frac{f(x)}{x^2}$. Tìm nguyên hàm của $f'(x)\ln x$.

Lời giải

Áp dụng định nghĩa $F'(x) = f(x)$, Ta có: $(\ln x)' = \frac{f(x)}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{f(x)}{x^2} \Rightarrow f(x) = x$

Ta tìm $I = \int f'(x)\ln x dx$.

Chọn $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = f(x) = x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

Vậy $\int f'(x)\ln x dx = x \ln x - x + C$

q) Cho $F(x) = \frac{1}{x^3}$ là một nguyên hàm của $\frac{f(x)}{x^2}$. Tìm nguyên hàm của $f'(x)\ln x$.

Lời giải

Áp dụng định nghĩa $F'(x) = f(x)$, Ta có: $\left(\frac{1}{x^3}\right)' = \frac{f(x)}{x^2} \Rightarrow -\frac{3}{x^4} = \frac{f(x)}{x^2} \Rightarrow f(x) = -\frac{3}{x^2}$



Ta tìm $I = \int f'(x) \ln x dx$.

Chọn $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = f(x) = \frac{-3}{x^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \frac{-3}{x^2} \ln x + \int \frac{3}{x^2} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{3}{x^2} \ln x + 3 \int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{3}{x^2} \ln x - \frac{3}{2x^2} + C.$$

Vậy $\int f'(x) \ln x dx = -\frac{3}{x^2} \ln x - \frac{3}{2x^2} + C$

r) Cho $F(x) = \frac{1}{x^2}$ là một nguyên hàm của $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của $(x^4 - x^3)f'(x)$.

Lời giải

Áp dụng định nghĩa $F'(x) = f(x)$, Ta có: $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow -\frac{2}{x^3} = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow f(x) = -\frac{2}{x^2}$

Ta tìm $I = \int (x^4 - x^3)f'(x) dx$.

Chọn $\begin{cases} u = x^4 - x^3 \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (4x^3 - 3x^2) dx \\ v = f(x) = \frac{-2}{x^2} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= -\frac{2}{x^2} (x^4 - x^3) + \int \frac{2}{x^2} (4x^3 - 3x^2) dx = -2x^2 + 2x + \int (8x - 6) dx = \\ &= -2x^2 + 2x + 4x^2 - 6x + C = 2x^2 - 4x + C \end{aligned}$$

Vậy $\int (x^4 - x^3)f'(x) dx = 2x^2 - 4x + C$

s) Cho $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của $f(x).e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của $e^{2x}.f'(x)$.

Lời giải

Áp dụng định nghĩa $F'(x) = f(x)$, Ta có: $(x^2)' = f(x).e^{2x} \Rightarrow 2x = f(x).e^{2x} \Rightarrow f(x) = 2x.e^{-2x}$

Ta tìm $I = \int e^{2x} f'(x) dx$.

Đặt $\begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2.e^{2x} dx \\ v = f(x) = 2xe^{-2x} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = 2xe^{-2x}.e^{2x} - \int 4x.e^{-2x}.e^{2x} dx = 2x - \int 4x dx = -2x^2 + 2x + C$$

Vậy $\int e^{2x} f'(x) dx = -2x^2 + 2x + C$



t) Cho $F(x) = -x.e^x$ là một nguyên hàm của $f(x).e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của $e^{2x}f'(x)$.

Lời giải

Áp dụng định nghĩa $F'(x) = f(x)$, Ta có: $(-x.e^x)' = f(x).e^{2x} \Rightarrow -(x+1)e^x = f(x).e^{2x}$

$$\Rightarrow f(x) = -(x+1).e^{-x}$$

Ta tìm $I = \int e^{2x} f'(x).dx$

Chọn $\begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = f'(x).dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2e^{2x} dx \\ v = f(x) = -(x+1).e^{-x} \end{cases}$

Suy ra $I = -(x+1)e^x + 2 \int (x+1)e^x dx = -(x+1)e^x + 2I_1$

Tìm $I_1 = \int (x+1)e^x dx$

Chọn $\begin{cases} u_1 = x+1 \\ dv_1 = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = dx \\ v_1 = e^x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = -(x+1)e^x + 2I_1 = -(x+1)e^x + 2 \left[(x+1).e^x - \int e^x dx \right] = (x-1)e^x + C$$

Vậy $\int e^{2x} f'(x).dx = (x-1)e^x + C$

DẠNG TOÁN 4: NGUYÊN HÀM ĐỔI BIẾN SỐ

Định lý: Cho $\int f(u)du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f[u(x)]u'(x)dx = F[u(x)] + C.$$

Có sẵn Tách từ hàm Nhân thêm

Một số dạng đổi biến thường gặp

$$\begin{aligned} I &= \int f(ax+b)^n . x dx \xrightarrow{PP} t = ax+b \Rightarrow dt = a dx \\ \textcircled{1} \quad I &= \int \left(\frac{x^n}{ax^{n+1}+1} \right)^m dx \xrightarrow{PP} t = x^{n+1}+1 \Rightarrow dt = (n+1)x^n dx, \text{ với } m, n \in \mathbb{Z}. \\ I &= \int f(ax^2+b)^n . x dx \xrightarrow{PP} t = ax^2+b \Rightarrow dt = 2ax dx \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad I = \int \sqrt[n]{f(x)} . f'(x) dx \xrightarrow{PP} \text{Đặt } t = \sqrt[n]{f(x)} \Rightarrow t^n = f(x) \Rightarrow nt^{n-1} dt = f'(x) dx.$$

$$\textcircled{3} \quad \begin{cases} I = \int f(\ln x) \frac{1}{x} dx \\ I = \int f(a+b \ln x) \frac{1}{x} dx \end{cases} \xrightarrow{PP} \text{Đặt } \begin{cases} t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx \\ t = a+b \ln x \Rightarrow dt = \frac{b}{x} dx \end{cases}.$$





- ④ $I = \int f(e^x) \cdot e^x dx \xrightarrow{PP} \text{Đặt} \begin{cases} t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx \\ t = a + be^x \Rightarrow dt = be^x dx \end{cases}.$
- ⑤ $I = \int f(\cos x) \cdot \sin x dx \xrightarrow{PP} \text{Đặt} \begin{cases} t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx \\ t = a + b \cos x \Rightarrow dt = -b \sin x dx \end{cases}.$
- ⑥ $I = \int f(\sin x) \cdot \cos x dx \xrightarrow{PP} \text{Đặt} \begin{cases} t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx \\ t = a + b \sin x \Rightarrow dt = b \cos x dx \end{cases}.$
- ⑦ $I = \int f(\tan x) \frac{dx}{\cos^2 x} \xrightarrow{PP} \text{Đặt } t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx = (1 + \tan^2 x) dx.$
- ⑧ $I = \int f(\cot x) \frac{dx}{\sin^2 x} \xrightarrow{PP} \text{Đặt } t = \cot x \Rightarrow dt = -\frac{dx}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x) dx.$
- ⑨ $I = \int f(\sin^2 x; \cos^2 x) \cdot \sin 2x dx \xrightarrow{PP} \text{Đặt} \begin{cases} t = \sin^2 x \Rightarrow dt = \sin 2x dx \\ t = \cos^2 x \Rightarrow dt = -\sin 2x dx \end{cases}.$
- ⑩ $I = \int f(\sin x \pm \cos x) \cdot (\sin x \mp \cos x) dx \xrightarrow{PP} \text{Đặt } t = \sin x \pm \cos x.$

🔑 Lưu ý: Sau khi đổi biến và tính nguyên hàm xong, ta cần trả lại biến cũ ban đầu là x .

🔑 Nhóm 1.

$$\begin{cases} I = \int f(ax+b)^n \cdot x dx \xrightarrow{PP} t = ax+b \Rightarrow dt = adx \\ I = \int \left(\frac{x^n}{ax^{n+1}+1} \right)^m dx \xrightarrow{PP} t = ax^{n+1}+1 \Rightarrow dt = a(n+1)x^n dx, \text{ khi } m, n \in \mathbb{Z} \\ I = \int f(ax^2+b)^n \cdot x dx \xrightarrow{PP} t = ax^2+b \Rightarrow dt = 2ax dx \end{cases}$$

🔑 Bài toán 7. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ (giả sử điều kiện được xác định):

a) Tìm $I = \int x(1-x)^{2018} dx.$

Lời giải

Đặt $t = 1-x \Rightarrow x = 1-t \xrightarrow{v/p} dx = -dt$

Khi đó: $I = -\int (1-t)t^{2018} dt = \int (t-1)t^{2018} dt$

$$= \int (t^{2019} - t^{2018}) dt = \frac{t^{2020}}{2020} - \frac{t^{2019}}{2019} + C$$

Suy ra $I = \frac{(1-x)^{2020}}{2020} - \frac{(1-x)^{2019}}{2019} + C.$

b) Tìm $I = \int x(1+x)^{2019} dx.$



Lời giải

Đặt $t = 1 + x \Rightarrow x = t - 1 \xrightarrow{v/p} dx = dt$

Khi đó: $I = \int (t-1)t^{2019} dt$

$$= \int (t^{2020} - t^{2019}) dt = \frac{t^{2021}}{2021} - \frac{t^{2020}}{2020} + C$$

Suy ra $I = \frac{(1+x)^{2021}}{2021} - \frac{(1+x)^{2020}}{2020} + C.$

c) Tìm $I = \int x(x^2 + 1)^5 dx.$

Lời giải

Đặt $t = 1 + x^2 \xrightarrow{v/p} dt = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{dt}{2}$

Khi đó: $I = \frac{1}{2} \int t^5 dt = \frac{t^6}{12} + C$

Suy ra $I = \frac{(x^2 + 1)^6}{12} + C.$

d) Tìm $I = \int x^2(x-1)^9 dx.$

Lời giải

Đặt $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1 \xrightarrow{v/p} dx = dt$

Khi đó: $I = \int (t+1)^2 t^9 dt = \int (t^{11} + 2t^{10} + t^9) dt$

$$= \frac{t^{12}}{12} + \frac{2t^{11}}{11} + \frac{t^{10}}{10} + C$$

Suy ra $I = \frac{(x-1)^{12}}{12} + \frac{2(x-1)^{11}}{11} + \frac{(x-1)^{10}}{10} + C.$

e) Tìm $I = \int \frac{x dx}{x^2 + 2}$

Lời giải

$$I = \int \frac{x}{x^2 + 2} dx = \int \frac{x}{x^2 + 2} \cdot \frac{d(x^2 + 2)}{2x} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) + C$$



f) Tìm $I = \int \frac{x dx}{(x+1)^5}$

Lời giải

Đặt $t = x+1 \Rightarrow x = t-1 \xrightarrow{v/p} dx = dt$

Khi đó: $I = \int \frac{t-1}{t^5} dt$

$= -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{4t^4} + C$

Suy ra $I = -\frac{1}{3(x+1)^3} + \frac{1}{4(x+1)^4} + C$.

g) Tìm $I = \int \frac{x^5 dx}{x^2+1}$.

Lời giải

Ta có $I = \int \frac{x^5 dx}{x^2+1} = \int \frac{x^4 \cdot x dx}{x^2+1}$

Đặt $t = x^2+1 \Rightarrow x^2 = t-1 \xrightarrow{v/p} x dx = \frac{1}{2} dt$

Khi đó: $I = \frac{1}{2} \int \frac{(t-1)^2}{t} dt = \frac{1}{2} \int \left(t-2+\frac{1}{t} \right) dt$

$= \frac{t^2}{4} - t + \frac{\ln|t|}{2} + C$

Suy ra $I = \frac{(x^2+1)^2}{4} - (x^2+1) + \frac{\ln(x^2+1)}{2} + C$.

h) Tìm $I = \int \frac{x^4 dx}{x^{10}-4}$.

Lời giải

Đặt $t = x^5 \xrightarrow{v/p} x^4 dx = \frac{1}{5} dt$

Khi đó: $I = \frac{1}{5} \int \frac{1}{(t-2)(t+2)} dt = \frac{1}{20} \int \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2} \right) dt$

$= \frac{1}{20} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C$



Suy ra $I = \frac{1}{20} \ln \left| \frac{x^5 - 2}{x^5 + 2} \right| + C.$

i) Tìm $I = \int \frac{x^5 dx}{x^2 + 1}.$

Lời giải

Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = t - 1 \xrightarrow{vp} 2x dx = dt$

$\Rightarrow x dx = \frac{1}{2} dt.$ Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \int (t-1)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \int \left(t - 2 + \frac{1}{t} \right) dt \\ &= \frac{t^2}{4} - t + \frac{1}{2} \ln |t| + C \\ &= \frac{(x^2 + 1)^2}{4} - (x^2 + 1) + \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + C. \end{aligned}$$

j) Tìm $I = \int \frac{x^4 dx}{x^{10} - 4}.$

Lời giải

Đặt $t = x^5 \rightarrow 5x^4 dx = dt \rightarrow x^4 dx = \frac{dt}{5}$

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t^2 - 4} = \frac{1}{20} \int \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2} \right) dt \\ &= \frac{1}{20} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C \\ &= \frac{1}{20} \ln \left| \frac{x^5 - 2}{x^5 + 2} \right| + C. \end{aligned}$$

k) Tìm $I = \int \frac{(x+1)^{2017}}{(2x+3)^{2019}} dx.$

Lời giải

Ta có: $I = \int \left(\frac{x+1}{2x+3} \right)^{2017} \cdot \frac{1}{(2x+3)^2} dx.$

Đặt $t = \frac{x+1}{2x+3} \Rightarrow dt = \frac{1}{(2x+3)^2} dx.$

Khi đó: $I = \int t^{2017} dt = \frac{t^{2018}}{2018} + C$

$$= \frac{1}{2018} \cdot \left(\frac{x+1}{2x+3} \right)^{2018} + C.$$



l) Tìm $I = \int \frac{x^5 dx}{(x+1)^7}$.

Lời giải

Ta có: $I = \int \left(\frac{x}{x+1} \right)^5 \cdot \frac{1}{(x+1)^2} dx$.

Đặt $t = \frac{x}{x+1} \Rightarrow dt = \frac{1}{(x+1)^2} dx$.

Khi đó: $I = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C$

$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{x}{x+1} \right)^6 + C$.

m) Tìm $I = \int \frac{(7x-1)^{99} dx}{(2x+1)^{101}}$.

Lời giải

Ta có: $I = \int \left(\frac{7x-1}{2x+1} \right)^{99} \cdot \frac{1}{(2x+1)^2} dx$.

Đặt $t = \frac{7x-1}{2x+1} \Rightarrow dt = \frac{9}{(2x+1)^2} dx$.

Khi đó: $I = \int t^{99} \frac{dt}{9} = \frac{t^{100}}{900} + C$

$= \frac{1}{900} \cdot \left(\frac{7x-1}{2x+1} \right)^{100} + C$.

n) Tìm $I = \int \frac{x^{2001} dx}{(1+x^2)^{1002}}$.

Lời giải

Ta có: $I = \int \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right)^{1000} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$.

Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x \cdot dx \Rightarrow x \cdot dx = \frac{dt}{2}$

Khi đó: $I = \int \left(\frac{t}{t+1} \right)^{1000} \cdot \frac{1}{(t+1)^2} \frac{dt}{2}$

Đặt $u = \frac{t}{t+1} \Rightarrow du = \frac{1}{(t+1)^2} dt$.



$$\Rightarrow I = \int u^{1000} \cdot \frac{du}{2} = \frac{u^{1001}}{2002} + C$$

$$= \frac{\left(\frac{x^2}{x^2+1} \right)^{1001}}{2002} + C.$$

Nhóm 2.

Hai công thức thường được sử dụng là:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a} \sqrt{ax+b} + C \text{ và } \int \sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{3a} \sqrt{(ax+b)^3} + C.$$

Bài toán 8. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ (giả sử điều kiện được xác định):

a) Tìm $I = \int 4x\sqrt{x^2+3} dx$.

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{x^2+3} \Rightarrow t^2 = x^2+3$.

$\Rightarrow 2tdt = 2xdx$

Lúc đó: $I = \int 4t^2 dt = \frac{4}{3} t^3 + c$.

Vậy $I = \frac{4}{3} (\sqrt{x^2+3})^3 = \frac{4}{3} (x^2+3)\sqrt{x^2+3} + c$.

b) Tìm $I = \int x\sqrt{2020-x} dx$.

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{2020-x} \Rightarrow t^2 = 2020-x$

$\Rightarrow 2tdt = -dx$

Lúc đó: $I = -\int (2020-t^2) \cdot t \cdot 2t dt = \int (2t^4 - 4040t^2) dt = \frac{2t^5}{5} - \frac{4040t^3}{3} + c$

Vậy $I = \frac{2(\sqrt{2020-x})^5}{5} - \frac{4040(\sqrt{2020-x})^3}{3} + c$.

c) Tìm $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$.

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{x^2+4} \Rightarrow t^2 = x^2+4$

$\Rightarrow 2tdt = 2xdx$.

$I = \int \frac{x}{x^2\sqrt{x^2+4}} dx = \int \frac{1}{(t^2-4)t} dt = \int \left(\frac{-1/4}{t} + \frac{1/8}{t-2} + \frac{1/8}{t+2} \right) dt$

$= -\frac{1}{4} \ln|t| + \frac{1}{8} \ln|t-2| + \frac{1}{8} \ln|t+2| + c$.

Vậy $I = -\frac{1}{4} \ln \sqrt{x^2+4} + \frac{1}{8} \ln |\sqrt{x^2+4}-2| + \frac{1}{8} \ln |\sqrt{x^2+4}+2| + c$.



d) Tìm $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$.

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{x^2+9} \Rightarrow t^2 = x^2+9$
 $\Rightarrow 2t dt = 2x dx$.

$$I = \int \frac{x}{x^2\sqrt{x^2+9}} dx = \int \frac{1}{(t^2-9)t} dt = \int \left(\frac{-1/9}{t} + \frac{1/18}{t-3} + \frac{1/18}{t+3} \right) dt$$

$$= -\frac{1}{9} \ln|t| + \frac{1}{18} \ln|t-3| + \frac{1}{18} \ln|t+3| + c.$$

Vậy $I = -\frac{1}{9} \ln \sqrt{x^2+9} + \frac{1}{18} \ln |\sqrt{x^2+9}-3| + \frac{1}{18} \ln |\sqrt{x^2+9}+3| + c.$

e) Tìm $I = \int e^x \sqrt{5-e^x} dx$.

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{5-e^x} \Rightarrow t^2 = 5-e^x$
 $\Rightarrow 2t dt = -e^x dx$

$$I = \int e^x \sqrt{5-e^x} dx = \int t \cdot (-2t) dx = -\int 2t^2 dt = -\frac{2}{3} t^3 + c.$$

Vậy $I = -\frac{2}{3} (\sqrt{5-e^x})^3 + c.$

f) Tìm $I = \int \sin x \sqrt{2018+\cos x} dx$.

Đặt $t = \sqrt{2018+\cos x} \Rightarrow t^2 = 2018+\cos x$
 $\Rightarrow 2t dt = -\sin x dx$

$$I = \int t \cdot (-2t) dx = -\int 2t^2 dt = -\frac{2}{3} t^3 + c.$$

Vậy $I = -\left(\sqrt{2018+\cos x}\right)^3 + c.$

g) Tìm $I = \int \frac{x dx}{x + \sqrt{x^2-1}}$

Lời giải

Ta có: $I = \int \frac{x(x-\sqrt{x^2-1})dx}{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}$

$$= \int \frac{x^2 - x\sqrt{x^2-1}}{x^2 - (x^2-1)} dx$$

$$= \int \frac{x^2 - x\sqrt{x^2-1}}{1} dx$$



$$= \int (x^2 - x\sqrt{x^2 - 1})dx$$

$$= \int x^2 dx - \int x\sqrt{x^2 - 1}dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - A$$

Tính A ?

$$t = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow tdt = xdx$$

$$\text{Ta có } \int x\sqrt{x^2 - 1}dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 - 1)^3} + C.$$

$$\text{Vậy } I = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 - 1)^3} + C.$$

h) Tìm $I = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4 + 1} - x^2}$

Lời giải

$$\text{Đặt } I = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4 + 1} - x^2}$$

$$= \int \frac{x^3(\sqrt{x^4 + 1} + x^2)dx}{(\sqrt{x^4 + 1} + x^2)(\sqrt{x^4 + 1} - x^2)}$$

$$= \int \frac{x^3\sqrt{x^4 + 1} + x^5}{(x^4 + 1) - x^4} dx$$

$$= \int (x^3\sqrt{x^4 + 1} + x^5) dx$$

$$= \int x^5 dx + \int x^3\sqrt{x^4 + 1} dx$$

$$= \frac{x^6}{6} + B$$

Tính B ?

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^4 + 1} \Rightarrow tdt = 2x^3 dx$$

$$\text{Ta có } \int x^3\sqrt{x^4 + 1} dx = \frac{1}{2} \int t^2 dt = \frac{1}{6}t^3 + C = \frac{1}{6}\sqrt{(x^4 + 1)^3} + C.$$

$$\text{Vậy } I = \frac{x^6}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{(x^4 + 1)^3} + C$$

i) Tìm $I = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x} + x\sqrt{x+1}}$



Lời giải

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x} + x\sqrt{x+1}} \\
 &= \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \\
 &= \int \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})dx}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})} \\
 &= \int \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})dx}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}} \\
 &= \int \frac{dx}{\sqrt{x}} - \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}} \\
 &= 2\sqrt{x} - 2\sqrt{x+1} + C.
 \end{aligned}$$

j) Tìm $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x+3} - (x+3)\sqrt{x}}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{dx}{x\sqrt{x+3} - (x+3)\sqrt{x}} \\
 &= \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x+3}(\sqrt{x} - \sqrt{x+3})} \\
 &= \int \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{x+3})dx}{\sqrt{x}\sqrt{x+3}(\sqrt{x} - \sqrt{x+3})(\sqrt{x} + \sqrt{x+3})} \\
 &= \frac{-1}{3} \int \frac{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x})dx}{\sqrt{x}\sqrt{x+3}} \\
 &= \frac{-1}{3} \left[\int \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int \frac{dx}{\sqrt{x+3}} \right] \\
 &= \frac{-1}{3} \left[\int \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int \frac{dx}{\sqrt{x+3}} \right] \\
 &= \frac{-1}{3} [2\sqrt{x} + 2\sqrt{x+3}] + C.
 \end{aligned}$$



+Nếu: $I = \int f(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx$ Đặt: $t = \ln x \rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$

+ Nếu: $I = \int f(a + b \ln x) \cdot \frac{1}{x} dx$ Đặt: $t = a + b \ln x \rightarrow dt = \frac{b}{x} dx$

👉 Bài toán 9. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ (giả sử điều kiện được xác định):

a) Tìm $I = \int \frac{2 + \ln x}{x} dx$.

Lời giải

Đặt: $t = 2 + \ln x \rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$

Khi đó: $I = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}(2 + \ln x)^2 + C$.

b) Tìm $I = \int \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

Lời giải

Đặt $t = \ln x \rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$

Suy ra: $I = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C$.

c) Tìm $I = \int \frac{1 + \ln x}{x} dx$.

Lời giải

Đặt: $t = \ln x \rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$

Suy ra $I = \int (1 + t) dt = t + \frac{t^2}{2} + C = \ln x + \frac{\ln^2 x}{2} + C$.

d) Tìm $I = \int \frac{1 + \ln^4 x}{x} dx$.

Lời giải

Đặt: $t = \ln x \rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$

Khi đó: $I = \int (1 + t^4) dt = t + \frac{t^5}{5} + C = \ln x + \frac{\ln^5 x}{5} + C$.

e) Tìm $I = \int \frac{3 \ln x + 1}{x \ln x} dx$.



Lời giải

Ta có: $I = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x \ln x} \right) dx = 3 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x \ln x} = 3 \int d(\ln x) + \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = 3 \ln|x| + \ln|\ln x| + C.$

f) Tìm $I = \int \frac{\ln x}{x(2 + \ln x)^2} dx.$

Lời giải

Đặt $t = 2 + \ln x \rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$, ta có: $\ln x = t - 2$

Khi đó: $I = \int \frac{t-2}{t^2} dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} \right) dt = \ln|t| + \frac{2}{t} + C = \ln|2 + \ln x| + \frac{2}{2 + \ln x} + C.$

☞ Nhóm 4.

Tìm $I = \int f(e^x) \cdot e^x dx \xrightarrow{PP} \text{Đặt} \begin{cases} t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx \\ t = a + be^x \Rightarrow dt = be^x dx \end{cases}.$

☞ Bài toán 10. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ (giả sử điều kiện được xác định):

a) Tìm $I = \int \frac{dx}{e^x + 3}.$

Lời giải

Đặt $t = e^x + 3 \Leftrightarrow e^x = t - 3 \xrightarrow{v/p} dt = e^x dx.$

Khi đó: $I = \int \frac{dx}{e^x + 3} = \int \frac{e^x dx}{e^x(e^x + 3)}.$

$= \int \frac{dt}{t(t-3)} = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{t-3}{t} \right| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{e^x}{e^x + 3} \right| + C.$

b) Tìm $I = \int \frac{dx}{e^x + 4}.$

Lời giải

Đặt $t = e^x + 4 \Leftrightarrow e^x = t - 4 \xrightarrow{v/p} dt = e^x dx.$

Khi đó: $I = \int \frac{dx}{e^x + 4} = \int \frac{e^x dx}{e^x(e^x + 4)}.$

$= \int \frac{dt}{t(t-4)} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-4}{t} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{e^x}{e^x + 4} \right| + C.$

c) Tìm $I = \int \frac{e^x dx}{e^x - 1}.$



Lời giải

Đặt $t = e^x - 1 \xrightarrow{v/p} dt = e^x dx$.

Khi đó: $I = \int \frac{e^x dx}{e^x - 1}$.

$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|e^x - 1| + C$.

d) Tìm $I = \int \frac{e^x dx}{e^x + 8}$.

Lời giải

Đặt $t = e^x + 8 \xrightarrow{v/p} dt = e^x dx$.

Khi đó: $I = \int \frac{e^x dx}{e^x + 8}$.

$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|e^x + 8| + C$.

e) Tìm $I = \int \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}$.

Lời giải

Ta có $I = \int \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 3e^x + 2} = \int \frac{e^x dx}{(e^x - 1)(e^x - 2)}$.

Đặt $t = e^x \xrightarrow{v/p} dt = e^x dx$.

Khi đó: $I = \int \frac{dt}{(t-1)(t-2)} = \ln\left|\frac{t-2}{t-1}\right| + C = \ln\left|\frac{e^x-2}{e^x-1}\right| + C$.

f) Tìm $I = \int \frac{e^x dx}{e^x + e^{-x}}$.

Lời giải

Ta có $I = \int \frac{e^x dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^{2x} dx}{e^{2x} + 1}$.

Đặt $t = e^{2x} + 1 \xrightarrow{v/p} \frac{dt}{2} = e^{2x} dx$.

Khi đó: $I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln|e^{2x} + 1| + C$.

g) Tìm $I = \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x - 1}}$.



Lời giải

Đặt $t = \sqrt{e^x - 1}$.

$$t^2 = e^x - 1 \xrightarrow{v/p} 2t dt = e^x dx$$

Khi đó: $I = \int \frac{e^x \cdot e^x dx}{\sqrt{e^x - 1}}$.

$$= \int \frac{(t^2 + 1) 2t dt}{t} = 2 \int (t^2 + 1) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} + t \right) + C = 2 \left[\frac{(e^x - 1)\sqrt{e^x - 1}}{3} + \sqrt{e^x - 1} \right] + C.$$

h) Tìm $I = \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{3 + e^x}}$.

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{3 + e^x}$.

$$t^2 = 3 + e^x \xrightarrow{v/p} 2t dt = e^x dx$$

Khi đó: $I = \int \frac{e^x \cdot e^x dx}{\sqrt{3 + e^x}}$.

$$= \int \frac{(t^2 - 3) 2t dt}{t} = 2 \int (t^2 - 3) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - 3t \right) + C = 2 \left[\frac{(3 + e^x)\sqrt{3 + e^x}}{3} - 3\sqrt{3 + e^x} \right] + C.$$

i) Tìm $I = \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x - 1}}$.

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{e^x - 1} \Rightarrow dt = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} dx$; $e^x = t^2 + 1$.

Ta có: $I = \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x - 1}} = \int \frac{e^x \cdot e^x dx}{\sqrt{e^x - 1}} = \int (t^2 + 1) \cdot 2t dt$.

$$\Rightarrow I = \frac{2}{3} t^3 + 2t + C.$$

$$\Rightarrow I = \frac{2}{3} (\sqrt{e^x - 1})^3 + 2\sqrt{e^x - 1} + C.$$

* Đặt $t = \sqrt{e^x - 1} \Leftrightarrow t^2 = e^x - 1$

$$\Rightarrow 2t dt = e^x dx$$



$$\Rightarrow I = \int \frac{e^x \cdot e^x dx}{\sqrt{e^x - 1}} = \int \frac{(t^2 + 1) \cdot 2t dt}{t} = \int (t^2 + 1) \cdot 2 dt$$

j) Tìm $I = \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{3 + e^x}}$.

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{3 + e^x} \Rightarrow dt = \frac{e^x}{2\sqrt{3 + e^x}} dx$; $t^2 - 3 = e^x$.

Ta có: $I = \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{3 + e^x}} = \int \frac{e^x \cdot e^x dx}{\sqrt{3 + e^x}} = \int (t^2 - 3) 2 dt$.

$$\Rightarrow I = \frac{2}{3} t^3 - 6t + C.$$

Vậy $I = \frac{2}{3} (\sqrt{3 + e^x})^3 - 6\sqrt{3 + e^x} + C$.

* Đặt $t = \sqrt{3 + e^x} \Leftrightarrow t^2 = 3 + e^x$

$$\Rightarrow 2t dt = e^x dx$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{e^x \cdot e^x dx}{\sqrt{3 + e^x}} = \int \frac{(t^2 - 3) \cdot 2t dt}{t} = \int (t^2 - 3) \cdot 2 dt$$

$$\Rightarrow I = \frac{2}{3} t^3 - 6t + C$$

$$\Rightarrow I = \frac{2}{3} (\sqrt{3 + e^x})^3 - 6\sqrt{3 + e^x} + C.$$

🔖 Nhóm 5.

Nhóm đổi biến hàm số lượng giác

🔖 Bài toán 11. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ (giả sử điều kiện được xác định):

a) Tìm $I = \int \sin^3 x dx$.

Lời giải

$$I = \int \sin^2 x \cdot \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx.$$

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

Ta có: $I = \int (1 - t^2) (-dt) = -t + \frac{t^3}{3} + C$.

Vậy: $I = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C$.



b) Tìm $I = \int \cos^3 x \, dx$.

Lời giải

$$I = \int \cos^2 x \cdot \cos x \, dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx.$$

$$\text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x \, dx.$$

$$\Rightarrow I = \int (1 - t^2) dt = t - \frac{1}{3} t^3 + C.$$

$$\text{Vậy } I = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$$

c) Tìm $I = \int \cos^{2017} x \sin x \, dx$.

Lời giải

$$\text{Đặt } t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x \, dx$$

$$\Rightarrow I = -\int t^{2017} dt = -\frac{1}{2018} t^{2018} + C.$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2018} \cos^{2018} x + C.$$

d) Tìm $I = \int \sin^{2019} x \cos x \, dx$.

Lời giải

$$\text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x \, dx.$$

$$\Rightarrow I = \int t^{2019} dt = \frac{1}{2020} t^{2020} + C.$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2020} \sin^{2020} x + C.$$

e) Tìm $I = \int (1 + 2 \sin x) \cos x \, dx$.

Lời giải

$$\text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x \, dx.$$

$$\Rightarrow I = \int (1 + 2t) dt = t + t^2 + C$$

$$\Rightarrow I = \sin x + \sin^2 x + C.$$

f) Tìm $I = \int \sin 2x \cos^2 x \, dx$.

Lời giải



Ta có: $I = \int \sin 2x \cos^2 x \, dx = \int 2 \sin x \cos x \cos^2 x \, dx = \int 2 \sin x \cos^3 x \, dx.$

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x \, dx.$

$\Rightarrow I = -\int 2t^3 \, dt = -\frac{1}{2}t^4 + C.$

$\Rightarrow I = -\frac{1}{2}\cos^4 x + C.$

g) Tìm $I = \int \frac{\sin x}{2 + \cos x} \, dx.$

Lời giải

Đặt $t = 2 + \cos x \Rightarrow dt = -\sin x \, dx$

$\Rightarrow I = \int \frac{-dt}{t} = -\ln|t| + C.$

$\Rightarrow I = -\ln|2 + \cos x| + C.$

h) Tìm $I = \int \frac{\cos x}{9 - 2\sin x} \, dx.$

Lời giải

Đặt $t = 9 - 2\sin x \Rightarrow dt = -2\cos x \, dx.$

$\Rightarrow I = \int \frac{-1}{2t} \, dt = -\frac{1}{2}\ln|t| + C.$

$\Rightarrow I = -\frac{1}{2}\ln|9 - 2\sin x| + C.$

i) Tìm $I = \int \frac{\cos x \, dx}{6 - 5\sin x + \sin^2 x}.$

Lời giải

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x \, dx.$

$I = \int \frac{dt}{6 - 5t + t^2}$

$= \int \left(\frac{1}{(t-2)(t-3)} \right) dt$

$= \int \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2} \right) dt$

$= \ln|t-3| - \ln|t-2| + C$

$= \ln|\sin x - 3| - \ln|\sin x - 2| + C$



j) Tìm $I = \int \frac{\sin x dx}{\cos 2x + 3 \cos x + 2}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin x dx}{\cos 2x + 3 \cos x + 2} \\ &= \int \frac{\sin x dx}{2 \cos^2 x - 1 + 3 \cos x + 2} \text{ Đặt } t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx. \\ &= \int \frac{\sin x dx}{2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1} \\ I &= - \int \frac{dt}{2t^2 + 3t + 1} \\ &= - \int \frac{1}{(2t+1)(t+1)} dt \\ &= - \int \left(\frac{2}{2t+1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= - \ln|2t+1| + \ln|t+1| + C \\ &= - \ln|2 \cos x + 1| + \ln|\cos x + 1| + C \end{aligned}$$

k) Tìm $I = \int \frac{dx}{\cos x}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x \cdot dx}{\cos^2 x} \\ \text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt &= \cos x dx. \\ I &= \int \frac{dt}{1-t^2} = \int \frac{1}{(1-t)(1+t)} dt = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} [\ln|1+t| - \ln|1-t|] + C \\ &= \frac{1}{2} [\ln|1+\sin x| - \ln|1-\sin x|] + C. \end{aligned}$$

l) Tìm $I = \int \frac{dx}{\sin x}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} \\ \text{Đặt } t = \cos x \Rightarrow dt &= -\sin x dx. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 I &= -\int \frac{dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{t^2-1} = \int \frac{1}{(t-1)(t+1)} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\
 &= \frac{1}{2} [\ln|t-1| - \ln|t+1|] + C \\
 &= \frac{1}{2} [\ln|\cos-1| - \ln|\cos+1|] + C
 \end{aligned}$$

m) Tìm $I = \int \frac{dx}{\sin x + \sqrt{3} \cos x}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{dx}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x} \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{2 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)} \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)} \cdot \frac{\frac{1}{2} dx}{\cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)} \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)\right)}{\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)} \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) \right| + C.
 \end{aligned}$$

n) Tìm $I = \int \frac{dx}{\cos x - \sqrt{3} \sin x}$.

Lời giải

$$I = -\int \frac{dx}{\sqrt{3} \sin x - \cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x}$$



$$= -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} = -\frac{1}{2} \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) \right| + C$$

o) Tìm $I = \int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$.

Lời giải

$$I = \int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx.$$

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$.

$$I = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\tan^2 x}{2} + C.$$

p) Tìm $I = \int \frac{\cot x}{\sin^2 x} dx$.

Lời giải

$$I = \int \frac{\cot x}{\sin^2 x} dx = \int \cot x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx.$$

Đặt $t = \cot x \Rightarrow dt = -\frac{1}{\sin^2 x} dx$

$$I = -\int t dt = -\frac{t^2}{2} + C = -\frac{\cot^2 x}{2} + C.$$

q) Tìm $I = \int \frac{(1 + \tan x)^2}{\cos^2 x} dx$.

Lời giải

Đặt $t = 1 + \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$

$$\Rightarrow I = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(1 + \tan x)^3}{3} + C$$

r) Tìm $I = \int \frac{(2 - \cot x)^2}{\sin^2 x} dx$.

Lời giải

Đặt $t = 2 - \cot x \Rightarrow dt = \frac{1}{\sin^2 x} dx$



$$\Rightarrow I = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(2 - \cot x)^3}{3} + C$$

s) Tìm $I = \int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx$.

Lời giải

$$I = \int \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{1 + \cos^2 x} dx$$

Đặt $t = 1 + \cos^2 x \Rightarrow dt = 2 \sin x \cdot \cos x \cdot dx$

$$\Rightarrow I = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C = \ln(1 + \cos^2 x) + C$$

t) Tìm $I = \int \frac{\sin 2x}{1 - \sin^2 x} dx$.

Lời giải

$$\Rightarrow I = \int \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{1 - \sin^2 x} dx$$

Đặt $t = 1 - \sin^2 x \Rightarrow dt = -2 \sin x \cdot \cos x \cdot dx$

$$\Rightarrow I = \int -\frac{1}{t} dt = -\ln|t| + C = -\ln(1 - \sin^2 x) + C$$

u) Tìm $I = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x + 2} dx$.

Lời giải

Đặt $t = \sin x + \cos x + 2 \Rightarrow dt = (-\cos x + \sin x) dx$

$$\Rightarrow I = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C$$

$$= \ln(\sin x + \cos x + 2) + C$$

v) Tìm $I = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x + 3} dx$.

Lời giải

Đặt $t = \sin x + \cos x + 3 \Rightarrow dt = (\sin x - \cos x) dx$

$$\Rightarrow I = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C$$

$$= \ln(\sin x + \cos x + 3) + C$$



w) Tìm $I = \int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x + 1} dx$.

Lời giải

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x + 1} dx \\ &= \int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x + 1} dx \end{aligned}$$

Đặt $t = \sin x + \cos x + 1 \Rightarrow \begin{cases} t - 1 = \sin x + \cos x \\ dt = (-\cos x + \sin x) dx \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{-(t-1)}{t} dt = \int \left(-1 + \frac{1}{t} \right) dt \\ &= -t + \ln|t| + C \\ &= -(\sin x + \cos x + 1) + \ln(\sin x + \cos x + 1) + C \end{aligned}$$

x) Tìm $I = \int \frac{\sin x + \cos x}{3 + \sin 2x} dx$.

Lời giải

$$I = \int \frac{\sin x + \cos x}{3 + 2 \sin x \cos x} dx.$$

Đặt $t = \sin x - \cos x \Rightarrow \begin{cases} dt = (\sin x + \cos x) dx \\ t^2 = 1 - 2 \sin x \cos x \rightarrow 2 \sin x \cos x = 1 - t^2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int \frac{dt}{4 - t^2} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t+2} + \frac{1}{2-t} \right) dt \\ &= \frac{1}{4} (\ln|t+2| - \ln|2-t|) + C \\ &= \frac{1}{4} (\ln|\sin x - \cos x + 2| - \ln|2 - \sin x + \cos x|) + C. \end{aligned}$$



DẠNG TOÁN 5: TÍNH CHẤT NGUYÊN HÀM & NGUYÊN HÀM CỦA HÀM ẨN

Nhóm 1. Sử dụng định nghĩa $F'(x) = f(x)$.

Câu 1: (THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội năm 2019) Gọi $F(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x-1)^2 \cdot e^x$. Giá trị của biểu thức $S = a + 2b + c$ bằng.

- A. 3. B. -2. C. 0. D. 4.

Lời giải

Chọn B

Theo định nghĩa $F'(x) = f(x)$, ta có: $f(x) = F'(x) = [(ax^2 + bx + c) \cdot e^x]'$
 $= (2ax + b)e^x + e^x(ax^2 + bx + c) = [ax^2 + (2a + b)x + b + c]e^x = (x^2 - 2x + 1)e^x$.

$$\text{Đồng nhất hệ số: } \begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = -2 \\ b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 5 \end{cases} \Rightarrow S = a + 2b + c = 1 - 8 + 5 = -2.$$

Câu 2: Biết $F(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x^2 - 5x + 2) \cdot e^{-x}$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $f[F(0)]$ bằng.

- A. $-e^{-1}$. B. $9e$. C. $20e^2$. D. $3e$.

Lời giải

Chọn B

Theo định nghĩa $F'(x) = f(x)$, ta có: $f(x) = F'(x) = [(ax^2 + bx + c) \cdot e^{-x}]'$
 $= (2ax + b)e^{-x} - e^{-x}(ax^2 + bx + c) = [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]e^{-x} = (2x^2 - 5x + 2)e^{-x}$.

$$\text{Đồng nhất hệ số: } \begin{cases} -a = 2 \\ 2a - b = -5 \\ b - c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$F(x) = (-2x^2 + x - 1) \cdot e^{-x} \Rightarrow F(0) = -1$$

$$f[F(0)] = f(-1) = 9e$$

Câu 3: Biết $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-3}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 11}{\sqrt{2x-3}}$ trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Giá trị của biểu thức $T = a + b + c$ bằng.

- A. 5. B. 6. C. 7. D. 8.

Lời giải

Chọn C

Theo định nghĩa $F'(x) = f(x)$, ta có:



$$f(x) = F'(x) = \left[(ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-3} \right]' = \frac{5ax^2 + x(3b-6a) + c - 3b}{\sqrt{2x-3}}$$

$$\text{Do đó ta có } \begin{cases} 5a = 20 \\ 3b - 6a = -30 \\ c - 3b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \\ c = 5 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 7$$

Câu 4: Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2019^x(x^2 - 4)(x^2 - 3x + 2)$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $F(x)$ là.

- A. 5. B. 4. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn D

Theo định nghĩa $F'(x) = f(x)$, ta có:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2019^x(x^2 - 4)(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow 2019^x(x-2)^2(x+2)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$x = 2$ là nghiệm bội bậc hai nên $f(x)$ không đổi dấu qua $x = 2$

Vậy hàm số $y = F(x)$ có hai điểm cực trị.

Câu 5: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{x^2}(x^3 - 4x)$. Hàm số $F(x^2 + x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 5. B. 4. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\begin{aligned} (F(x^2 + x))' &= (2x + 1)f(x^2 + x) = (2x + 1)e^{(x^2+x)^2} \left[(x^2 + x)^3 - 4(x^2 + x) \right] \\ &= e^{(x^2+x)^2} (2x + 1)(x^2 + x)(x^2 + x - 2)(x^2 + x + 2) \\ &= e^{(x^2+x)^2} (2x + 1)x(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x^2 + x + 2) \end{aligned}$$

$$(F(x^2 + x))' = 0 \text{ có 5 nghiệm đơn}$$

Vậy hàm số $F(x^2 + x)$ có 5 điểm cực trị



Nhóm 2. Sử dụng định nghĩa giải bài toán nguyên hàm của hàm ẩn

Vận dụng tính chất $\int f'(x)dx = f(x) + C$, $\int f''(x)dx = f'(x) + C, \dots$ vào các dạng sau:

• $\int (u'v + v'u)dx = \int (u.v)'dx = uv + C$. • $\int n.u^{n-1}.u'dx = \int (u^n)'dx = u^n + C$.

• $\int \frac{u'v - v'u}{v^2}dx = \int \left(\frac{u}{v}\right)'dx = \frac{u}{v} + C$. • $\int \frac{u'}{u}dx = \int (\ln|u|)'dx = \ln|u| + C$.

• $\int \frac{u'}{2\sqrt{u}}dx = \int (\sqrt{u})'dx = \sqrt{u} + C$. • $\int -\frac{u'}{u^2}dx = \int \left(\frac{1}{u}\right)'dx = \frac{1}{u} + C$.

Câu 6: (HSG Bắc Ninh năm 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2$. Giá trị của $f(2)$ bằng
A. 5. B. 10. C. 15. D. 20.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2 \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = 2x^3 + 3x^2 = x^2(2x + 3)$

$$\Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 2x + 3 \Leftrightarrow \int \left(\frac{f(x)}{x}\right)'dx = \int (2x + 3)dx \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = x^2 + 3x + C.$$

Do $f(1) = 4 \Rightarrow 4 = 1 + 3 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2 \Rightarrow f(2) = 20$.

Câu 7: (THPT Yên Định Thanh Hóa năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x).f'(x) = 3x^5 + 6x^2$ và $f(0) = 2$. Giá trị của $f^2(2)$ bằng
A. 144. B. 64. C. 100. D. 81.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x).f'(x) = 3x^5 + 6x^2 \Leftrightarrow 2f(x).f'(x) = 6x^5 + 12x^2 \Leftrightarrow \left((f(x))^2\right)' = 6x^5 + 12x^2$

$$\Leftrightarrow \int \left((f(x))^2\right)'dx = \int (6x^5 + 12x^2)dx \Leftrightarrow (f(x))^2 = x^6 + 4x^3 + C$$

Do $f(0) = 2 \Rightarrow 4 = C \Rightarrow C = 4 \Rightarrow f^2(2) = 100$.

Câu 8: (Đề thi THPT QG năm 2018 – Mã đề 102 – Câu 40) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{3}$

và $f'(x) = x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{11}{6}$. B. $-\frac{2}{3}$. C. $-\frac{2}{9}$. D. $-\frac{7}{6}$.



Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } f'(x) = x[f(x)]^2 \xleftrightarrow{f(x) \neq 0} \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = x \Leftrightarrow \left[\frac{1}{f(x)} \right]' = -x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = \int (-x) dx \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = \frac{-x^2}{2} + C$$

$$\text{Do } f(2) = \frac{-1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{f(2)} = -3 \Leftrightarrow \frac{-2^2}{2} + C = -3 \Leftrightarrow C = -1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{\frac{-1}{2} - 1} = \frac{-2}{3}$$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ thỏa $f^2(x) + 2xf(x)f'(x) = 5x^4$ với $f(1) = 0, f(x) > 0$. Hệ số góc tiếp tuyến k của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ bằng

A. $k = 1$.

B. $k = 2$.

C. $k = 4$.

D. $k = 3$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } f^2(x) + 2xf(x)f'(x) = 5x^4 \Leftrightarrow [xf^2(x)]' = 5x^4$$

$$\Leftrightarrow \int [xf^2(x)]' dx = \int (5x^4) dx \Leftrightarrow xf^2(x) = x^5 + C.$$

$$\text{Do } f(1) = 0 \Rightarrow 0 = 1^5 + C \Rightarrow C = -1 \Rightarrow xf^2(x) = x^5 - 1 \Rightarrow$$



ĐỀ RÈN LUYỆN LẦN 1.

Câu 10: (Đề tham khảo – Bộ GD & ĐT năm 2018) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$.

A. $x^3 + C..$

B. $\frac{x^3}{3} + x + C..$

C. $6x + C..$

D. $x^3 + x + C.$

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$

Ta có: $\int f(x) dx = \int (3x^2 + 1) dx = x^3 + x + C.$

Câu 11: (Đề thi THPT Quốc Gia năm 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x-2}$.

A. $\int \frac{1}{5x-2} dx = \frac{1}{5} \ln|5x-2| + C..$

B. $\int \frac{1}{5x-2} dx = -\frac{1}{2} \ln(5x-2) + C..$

C. $\int \frac{1}{5x-2} dx = 5 \ln|5x-2| + C..$

D. $\int \frac{1}{5x-2} dx = \ln|5x-2| + C.$

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức: $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C.$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{5x-2} dx = \frac{1}{5} \ln|5x-2| + C..$$

Câu 12: (Đề thi THPT Quốc Gia năm 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x$.

A. $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C..$

B. $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C..$

C. $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C..$

D. $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C.$

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

$$\Rightarrow \int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C..$$

Câu 13: (Đề thi THPT Quốc Gia năm 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$.

A. $\int \cos 3x dx = 3 \sin 3x + C..$

B. $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C..$



C. $\int \cos 3x dx = \sin 3x + C.$

D. $\int \cos 3x dx = \cos 3x + C.$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C.$

$\Rightarrow \int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C.$

Câu 14: (Đề thi THPT Quốc Gia năm 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin x$.

A. $\int 2 \sin x dx = 2 \cos x + C.$

B. $\int 2 \sin x dx = \sin^2 x + C.$

C. $\int 2 \sin x dx = \sin 2x + C.$

D. $\int 2 \sin x dx = -2 \cos x + C.$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

$\Rightarrow \int 2 \sin x dx = -2 \cos x + C.$

Câu 15: (Đề thi THPT Quốc Gia năm 2017 – Mã đề 104 câu 28) Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số

$f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$

A. $\cos x - \sin x + 3.$ B. $-\cos x + \sin x + 3.$

C. $\sin x - \cos x - 1.$ D. $-\cos x + \sin x + 1.$

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$F(x) = \int f(x) dx = \int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C$

$\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + C = 2.$

$\Leftrightarrow 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1$

Vậy $F(x) = -\cos x + \sin x + 1.$

Câu 16: (Đề thi THPT Quốc Gia năm 2017 – Mã đề 101 câu 27) Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5 \sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x) = 3x + 5 \cos x + 5.$

B. $f(x) = 3x + 5 \cos x + 2.$



C. $f(x) = 3x - 5 \cos x + 2.$

D. $f(x) = 3x - 5 \cos x + 15.$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x) = \int f'(x) dx = \int (3 - 5 \sin x) dx = 3x + 5 \cos x + C$

$f(0) = 10 \Leftrightarrow 5 + C = 10 \Leftrightarrow C = 5$

Vậy $f(x) = 3x + 5 \cos x + 5.$

Câu 17: (Đề thi THPT Quốc Gia năm 2017 – Mã đề 103 câu 13) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm

số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

A. $e^x + x^2 + \frac{3}{2}.$

B. $2e^x + x^2 - \frac{1}{2}.$

C. $e^x + x^2 + \frac{5}{2}.$

D. $e^x + x^2 + \frac{1}{2}.$

Lời giải

Chọn D

$F(x) = \int f(x) dx = \int (e^x + 2x) dx = e^x + x^2 + C$

$F(0) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 1 + C = \frac{3}{2} \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$

vậy $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}.$

Câu 18: (Đề thi minh họa – Bộ GD & ĐT 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

A. $\frac{1}{2} \sqrt{2x-1} + C.$

B. $\frac{1}{3} (2x-1) \sqrt{2x-1} + C.$

C. $-\frac{1}{3} \sqrt{2x-1} + C.$

D. $\frac{2}{3} (2x-1) \sqrt{2x-1} + C.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int \sqrt{2x-1} dx = \int (2x-1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} (2x-1)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} (2x-1) \sqrt{2x-1} + C.$

Câu 19: (Đề thi minh họa – Bộ GD & ĐT 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}.$

A. $\frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C.$

B. $\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C.$



C. $\frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C.$

D. $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int \left(x^2 + \frac{2}{x^2} \right) dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{x} + C.$

Câu 20: (Sở GD & ĐT Tp Hồ Chí Minh Cúm 6 năm 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số

$f(x) = \cos 5x \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$. Tính $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

A. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{12}.$

B. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.$

C. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}.$

D. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int (\cos 5x \cos x) dx = \frac{1}{2} \int (\cos 4x + \cos 6x) dx = \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{12} \sin 6x + C.$

$F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow C = \frac{\sqrt{3}}{16} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{12} \sin 6x + \frac{\sqrt{3}}{16}.$

$F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{8} \sin \frac{4\pi}{6} + \frac{1}{12} \sin \frac{6\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$

Câu 21: (THPT Kim Liên – Hà Nội) Biết $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số

$f(x) = x^2 \cdot e^x$. Tìm a, b, c .

A. $a = 1, b = 2, c = -2.$ B. $a = 2, b = 1, c = -2.$

C. $a = -2, b = 2, c = 1.$ D. $a = 1, b = -2, c = 2.$

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = e^x \end{cases}.$

Lúc đó: $\int f(x) dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$

Đặt $\begin{cases} u_2 = x \\ dv_2 = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_2 = dx \\ v_2 = e^x \end{cases}.$



$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right) \\ &= x^2 e^x - 2 x e^x + 2 e^x = (x^2 - 2x + 2) e^x.\end{aligned}$$

Vậy $a=1, b=-2, c=2$.

Cách 2: Ta có $F'(x) = (2ax+b)e^x + (ax^2+bx+c)e^x = (ax^2+(2a+b)x+b+c)e^x$

Do $F'(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ nên $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (ax^2 + (2a+b)x + b+c)e^x = x^2 e^x \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ 2a+b=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases}.$$

Câu 22: (THPT Lê Lợi – Thanh Hóa) Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$

thỏa mãn điều kiện $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

A. $F(x) = -\cos x + \tan x + C$.

B. $F(x) = -\cos x + \tan x - \sqrt{2} + 1$.

C. $F(x) = \cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1$.

D. $F(x) = -\cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1$.

Lời giải

Chọn D

$$F(x) = \int f(x)dx = \int \left(\sin x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -\cos x + \tan x + c.$$

$$\text{Theo đề: } F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow -\cos \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{4} + c = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow c = \sqrt{2} - 1.$$

$$\text{Vậy } F(x) = -\cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1.$$

Câu 23: (Đề thi THPT Quốc Gia năm 2017 – Mã đề 103 câu 37) Cho $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm

của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$.

A. $\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{5x^5} + C$.

B. $\frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{5x^5} + C$.

C. $\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$.

D. $-\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$.

Lời giải

Chọn C

$$F(x) = -\frac{1}{3x^3} \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{x^4}$$



Theo bài ra $\frac{f(x)}{x} = F'(x) \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x^4} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^3}.$

Xét: $I = \int f'(x) \ln x dx.$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = f(x) \end{cases}.$

Lúc đó: $I = \ln x \cdot f(x) - \int \frac{f(x)}{x} dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C.$

Câu 24: Tìm nguyên hàm của $y = x.e^x$

- A. $x^2.e^x + C.$ B. $x.e^x + C.$ C. $(x+1)e^x + C.$ D. $(x-1)e^x + C.$

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}.$

Khi đó $\int x.e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C.$

Câu 25: Một nguyên hàm của $y = x \ln x$ là

- A. $\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{4} x^2.$ B. $x^2 \ln x - \frac{1}{2} x^2.$ C. $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2.$ D. $x \ln x + \frac{1}{2} x.$

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$

Khi đó $\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C.$

Câu 26: Tìm nguyên hàm của hàm số $y = (x+1) \cos x$

- A. $(x+1) \sin x - \cos x + C.$ B. $(x+1) \sin x + \cos x + C.$
C. $-(x+1) \sin x - \cos x + C.$ D. $-(x+1) \sin x + \cos x + C.$

Lời giải

Chọn B



Đặt $\begin{cases} u = x + 1 \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$.

Khi đó $\int (x+1) \cos x dx = (x+1) \sin x - \int \sin x dx = (x+1) \sin x + \cos x + C$.

Câu 27: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$

A. $-x \cot x - \ln |\cos x| + C$.

B. $x \tan x + \ln |\cos x| + C$.

C. $-x \cot x + \ln |\cos x| + C$.

D. $-x \tan x + \ln |\cos x| + C$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}$.

Khi đó $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x + \ln |\cos x| + C$.

Câu 28: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \ln x$ thỏa mãn điều kiện $F(1) = 3$. Tính giá trị của biểu thức $T = 2^{F(e)} + \log_4 3 \cdot \log_3 [F(e)]$.

A. $T = 2$.

B. $T = 8$.

C. $T = \frac{9}{2}$

D. $T = 17$.

Lời giải

Chọn D

$F(x) = \int f(x) dx = \int \ln x dx$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}$.

$F(x) = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$.

Ta có: $F(1) = 3 \Leftrightarrow 1 \cdot \ln 1 - 1 + C = 3 \Leftrightarrow C = 4$.

Suy ra: $F(x) = x \ln x - x + 4 \Rightarrow F(e) = e \ln e - e + 4 = 4$.

Khi đó: $T = 2^{F(e)} + \log_4 3 \cdot \log_3 [F(e)] = 2^4 + \log_4 3 \cdot \log_3 4 = 16 + 1 = 17$.

Câu 29: Xét $I = \int x^3 (4x^4 - 3)^5 dx$. Bằng cách đặt $u = 4x^4 - 3$, hỏi khẳng định nào đúng?

A. $I = \frac{1}{4} \int u^5 du$.

B. $I = \frac{1}{12} \int u^5 du$.

C. $I = \frac{1}{16} \int u^5 du$

D. $I = \int u^5 du$.

Lời giải

Chọn C



Đặt $u = 4x^4 - 3 \Rightarrow du = 16x^3 dx \Rightarrow x^3 dx = \frac{du}{16}$.

$$I = \int x^3 (4x^4 - 3)^5 dx = \int u^5 \frac{du}{16} = \frac{1}{16} \int u^5 du.$$

Câu 30: Xét $I = \int \frac{x}{\sqrt{4x+1}} dx$, bằng cách đặt $t = \sqrt{4x+1}$ thì I trở thành

- A. $\frac{1}{8} \left(\frac{t^3}{3} + t \right) + C$. B. $\frac{1}{4} \left(\frac{t^3}{3} - t \right) + C$. C. $\frac{1}{8} \left(\frac{t^3}{3} - t \right) + C$ D. $\frac{1}{4} \left(\frac{t^3}{3} + t \right) + C$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sqrt{4x+1} \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{4} \Rightarrow dx = \frac{t}{2} dt$.

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{4x+1}} dx = \int \frac{t^2-1}{4} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{t}{2} dt = \int \frac{t^2-1}{8} dt = \frac{1}{8} \int (t^2-1) dt = \frac{1}{8} \left(\frac{t^3}{3} - t \right) + C.$$

Câu 31: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^2 x \cdot \sin x$.

- A. $\frac{1}{3} \cos^3 x + C$. B. $-\cos^3 x + C$. C. $-\frac{1}{3} \cos^3 x + C$. D. $\frac{1}{3} \sin^3 x + C$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

$$I = \int f(x) dx = \int \cos^2 x \cdot \sin x dx$$

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx \Rightarrow -dt = \sin x dx$

Khi đó $I = \int t^2 (-dt) = -\frac{t^3}{3} + C$.

Dẫn đến $I = -\frac{1}{3} \cos^3 x + C$.

Cách 2:

$$\int f(x) dx = \int \cos^2 x \cdot \sin x dx = -\int \cos^2 x d(\cos x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Câu 32: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$ và $F(0) = \pi$. Tìm $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

- A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$. B. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi - \frac{1}{4}$. C. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \pi$. D. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.

Lời giải

Chọn C



Cách 1

$$I = \int f(x) dx = \int \sin^3 x \cdot \cos x dx$$

$$\text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx.$$

$$\text{Khi đó } I = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C.$$

$$\text{Suy ra } F(x) = I = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

$$F(0) = \pi \Rightarrow \frac{\sin^4 0}{4} + C = \pi \Rightarrow C = \pi.$$

$$\text{Đến đây } F(x) = \frac{\sin^4 x}{4} + \pi.$$

$$\text{Vậy } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \pi.$$

Cách 2

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \sin^3 x \cdot \cos x dx = \int \sin^3 x d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

$$F(0) = \pi \Rightarrow \frac{\sin^4 0}{4} + C = \pi \Rightarrow C = \pi.$$

$$\text{Đến đây } F(x) = \frac{\sin^4 x}{4} + \pi.$$

$$\text{Vậy } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \pi.$$

Cách 3

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot \cos x dx$$

$$\text{Bấm máy về phải, ta được } F\left(\frac{\pi}{2}\right) - \pi = \frac{1}{4}. \text{ Đến đây } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \pi.$$

Câu 33: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ và $F(e) = 3$. Tính $F(e^2)$.

A. $3 + 2 \ln 2$.

B. $3 + \ln 2$.

C. $1 + \ln 3$.

D. $3 - \ln 2$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1

$$I = \int f(x) dx = \int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx.$$

$$\text{Đặt } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx.$$

$$\text{Khi đó } I = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C.$$

$$\text{Suy ra } F(x) = I = \ln|\ln x| + C.$$

$$F(e) = 3 \Rightarrow \ln|\ln e| + C = 3 \Rightarrow C = 3.$$

$$\text{Đến đây } F(x) = I = \ln|\ln x| + 3.$$

$$\text{Vậy } F(e^2) = 3 + \ln 2.$$

Cách 2

$$F(e^2) - F(e) = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$$

Bấm máy về phải, ta được $F(e^2) - 3 = 0,693\dots$. Đến đây $F(e^2) = 3,693\dots$ Bấm máy kiểm tra từng kết quả. Ta chọn được Chọn Câu **B**.

Câu 34: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{(x-2)^{10}}{(x+1)^{12}}$.

A. $\frac{1}{3} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{11} + C.$ **B.** $-\frac{1}{11} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{11} + C.$ **C.** $\frac{1}{11} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{11} + C.$ **D.** $\frac{1}{33} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{11} + C.$

Lời giải

Chọn D

$$I = \int f(x) dx = \int \frac{(x-2)^{10}}{(x+1)^{12}} dx = \int \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{10} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} dx.$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x-2}{x+1} \Rightarrow dt = \frac{3}{(x+1)^2} dx \Rightarrow \frac{1}{3} dt = \frac{1}{(x+1)^2} dx.$$

$$\text{Khi đó } I = \int t^{10} \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{33} t^{11} + C.$$

$$\text{Vậy } I = \frac{1}{33} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{11} + C.$$

Câu 35: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ và $F(0) = 1$. Tính $F(1)$.



A. $\ln 2 + 1$.

B. $\frac{1}{2} \ln 2 + 1$.

C. 0.

D. $\ln 2 + 2$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1

$$I = \int f(x) dx = \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{1}{x^2 + 1} x dx.$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x dx \Rightarrow \frac{1}{2} dt = x dx.$$

$$\text{Khi đó } I = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \ln |t| + C.$$

$$\text{Suy ra } F(x) = I = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + C. \quad F(x) = I = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + C.$$

$$F(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \ln |0^2 + 1| + C = 1 \Rightarrow C = 1.$$

$$\text{Đến đây } F(x) = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + 1.$$

$$\text{Vậy } F(1) = \frac{1}{2} \ln 2 + 1.$$

Cách 2

$$F(1) - F(0) = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

Bấm máy về phải, ta được $F(1) - 1 = 0,346\dots$. Đến đây $F(1) = 1,346\dots$. Bấm máy kiểm tra từng kết quả. Ta chọn được Chọn Câu **B**.

Câu 36: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$.

A. $x^2 \sqrt{1+x^2} + C$. B. $\frac{1}{3} (x^2 \sqrt{1+x^2})^3 + C$.

C. $\frac{1}{3} (\sqrt{1+x^2})^3 + C$. D. $\frac{1}{3} x^2 \sqrt{1+x^2} + C$.

Lời giải

Chọn C

$$I = \int f(x) dx = \int x \sqrt{1+x^2} dx = \int \sqrt{1+x^2} x dx.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow t^2 = 1+x^2 \Rightarrow 2t dt = 2x dx \Rightarrow t dt = x dx.$$



Khi đó $I = \int t.tdt = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C.$

Dẫn đến $I = \frac{1}{3} \left(\sqrt{1+x^2} \right)^3 + C.$

Câu 37: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x} \sqrt{\ln^2 x + 1}$ và $F(1) = \frac{1}{3}$. Tính $[F(e)]^2$.

A. $[F(e)]^2 = \frac{8}{3}$. B. $[F(e)]^2 = \frac{8}{9}$. C. $[F(e)]^2 = \frac{1}{3}$. D. $[F(e)]^2 = \frac{1}{9}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1

$$I = \int f(x) dx = \int \frac{\ln x}{x} \sqrt{\ln^2 x + 1} dx = \int \sqrt{\ln^2 x + 1} \frac{\ln x}{x} dx.$$

Đặt $t = \sqrt{\ln^2 x + 1} \Rightarrow t^2 = \ln^2 x + 1 \Rightarrow 2tdt = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \Rightarrow tdt = \frac{\ln x}{x} dx$

Khi đó $I = \int t.tdt = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C.$

Dẫn đến $F(x) = I = \frac{1}{3} \left(\sqrt{\ln^2 x + 1} \right)^3 + C.$

$F(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} \left(\sqrt{\ln^2 1 + 1} \right)^3 + C = \frac{1}{3} \Rightarrow C = 0.$

Dẫn đến $F(x) = \frac{1}{3} \left(\sqrt{\ln^2 x + 1} \right)^3.$

Ta tính được $F(e) = \frac{1}{3} \left(\sqrt{\ln^2 e + 1} \right)^3 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Suy ra $[F(e)]^2 = \frac{8}{9}$.

Cách 2

$$F(e) - F(1) = \int_1^e \frac{\ln x}{x} \sqrt{\ln^2 x + 1} dx$$

Bấm máy về phải, ta được $F(e) - \frac{1}{3} = 0,609\dots$ Suy ra $F(e) = 0.942\dots$ Dẫn đến $[F(e)]^2 = \frac{8}{9}$.

Câu 38: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{8-x^2}}$ thỏa mãn $F(2) = 0$. Tìm tổng các

ng nghiệm của phương trình $F(x) = x$.

A. $1 + \sqrt{3}$. B. 2. C. 1. D. $1 - \sqrt{3}$.

Lời giải



Chọn D

Ta có $F(x) = \int \frac{x}{\sqrt{8-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{8-x^2}} d(8-x^2) \Leftrightarrow F(x) = -\sqrt{8-x^2} + C.$

Vì $F(2) = 0 \Leftrightarrow -2 + C = 0 \Leftrightarrow C = 2.$ Suy ra $F(x) = -\sqrt{8-x^2} + 2.$

Xét phương trình $F(x) = x \Leftrightarrow -\sqrt{8-x^2} + 2 = x \Leftrightarrow \sqrt{8-x^2} = 2-x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 8-x^2 = (2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2 - 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x = 1 \pm \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{3}.$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình đã cho bằng $1 - \sqrt{3}.$

Câu 39: Hàm số $f(x) = \frac{9x-10}{6x^2-11x+3}$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thỏa mãn $F(1) = \ln 2.$ Gọi x_1, x_2 là

hai nghiệm của phương trình $F(x) = \ln|3x-1| + \frac{1}{2}\ln 3.$ Giá trị của $3^{x_1} + 3^{x_2}$ bằng

- A. 28. B. 4. C. $\frac{730}{27}.$ D. $\frac{82}{27}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x) = \int \frac{9x-10}{6x^2-11x+3} dx \Leftrightarrow F(x) = \int \frac{3(2x-3) + (3x-1)}{(2x-3)(3x-1)} dx$

$$\Leftrightarrow F(x) = \int \left(\frac{3}{3x-1} + \frac{1}{2x-3} \right) dx \Leftrightarrow F(x) = \ln|3x-1| + \frac{1}{2}\ln|2x-3| + C.$$

Vì $F(1) = \ln 2 \Leftrightarrow \ln 2 + C = \ln 2 \Leftrightarrow C = 0.$ Suy ra $F(x) = \ln|3x-1| + \frac{1}{2}\ln|2x-3|.$

Xét phương trình $F(x) = \ln|3x-1| + \frac{1}{2}\ln 3 \Leftrightarrow \ln|2x-3| = \ln 3 \Leftrightarrow |2x-3| = 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3^{x_1} + 3^{x_2} = 3^3 + 3^0 = 28.$$

Vậy $3^{x_1} + 3^{x_2} = 28.$

ĐÁP ÁN ĐỀ RÈN LUYỆN LẦN 1

1.D	2.B	3.C	4.B	5.D	6.D	7.A	8.D	9.B	10.A
11.C	12.D	13.D	14.B	15.D	16.C	17.B	18.B	19.D	20.C
21.C	22.C	23.C	24.B	25.D	26.B	27.C	28.B	29.D	30.A

Câu 40: (Đề thi THPT QG năm 2019 Mã đề 101) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 5$ là

- A.** $x^2 + 5x + C$. **B.** $2x^2 + 5x + C$. **C.** $x^2 + 5x$. **D.** $x^2 + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int f(x)dx = \int (2x + 5)dx = x^2 + 5x + C$.

Câu 41: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4\cos^2 x - 5$ thỏa mãn $F(\pi) = 0$. Tìm $F(x)$

- A.** $F(x) = -3x + \sin 2x + 3\pi$. **B.** $F(x) = -\frac{4}{3}\sin^3 x - 5x + 5\pi$.
C. $F(x) = \frac{4}{3}\cos^3 x - 5x + \frac{4}{3} + 5\pi$. **D.** $F(x) = -3x - \sin 2x + 3\pi$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x) = \int (4\cos^2 x - 5)dx \Leftrightarrow F(x) = \int (2\cos 2x - 3)dx$

$\Leftrightarrow F(x) = \sin 2x - 3x + C$.

Lại có $F(\pi) = 0 \Leftrightarrow -3\pi + C = 0 \Leftrightarrow C = 3\pi$.

Vậy $F(x) = -3x + \sin 2x + 3\pi$.

Câu 42: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x + 3\sqrt{x}$ thỏa mãn $F(1) = 0$.

- A.** $x^2 + 3\sqrt[3]{x^2} - 4$. **B.** $x^2 + 2\sqrt{x^3} - 3$. **C.** $x^2 + 2\sqrt[3]{x^2} - 3$. **D.** $x^2 + 3\sqrt{x^3} - 4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $F(x) = \int (2x + 3\sqrt{x})dx \Leftrightarrow F(x) = \int 2xdx + 6\int (\sqrt{x})^2 d(\sqrt{x})$

$\Leftrightarrow F(x) = x^2 + 2\sqrt{x^3} + C$.

Lại có $F(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + C = 0 \Leftrightarrow C = -3$.

Vậy $F(x) = x^2 + 2\sqrt{x^3} - 3$.

Câu 43: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x - 8\sin x \cos x$ thỏa mãn $F(\pi) = 2$.



A. $F(x) = x^2 + 4 \cos 2x - \pi^2 - 2$.

B. $F(x) = x^2 - 2 \cos 2x - \pi^2 + 4$.

C. $F(x) = x^2 + 2 \cos 2x - \pi^2$.

D. $F(x) = x^2 - 4 \cos 2x - \pi^2 + 6$.

Lời giải

Chọn C

$$\int (2x - 8 \sin x \cos x) dx = \int (2x - 4 \sin 2x) dx = x^2 + 2 \cos 2x + C.$$

$$F(\pi) = 2 \Rightarrow \pi^2 + 2 + C = 2 \Leftrightarrow C = -\pi^2. \text{ Do đó } F(x) = x^2 + 2 \cos 2x - \pi^2.$$

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2^x + 3\sqrt{x}$ và $f(4) = \frac{16}{\ln 2}$. Mệnh đề nào đúng?

A. $f(x) = 2^x + 2\sqrt{x^3} + \frac{16}{\ln 2} - 32$.

B. $f(x) = 2^x \ln 2 + \sqrt{x^3} - 8$.

C. $f(x) = 2^x + \sqrt{x^3} + \frac{16}{\ln 2} - 24$.

D. $f(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + 2\sqrt{x^3} - 16$.

Lời giải

Chọn D

$$f(x) = \int (2^x + 3\sqrt{x}) dx = \int \left(2^x + 3x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + 2x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2^x}{\ln 2} + 2\sqrt{x^3} + C.$$

$$f(4) = \frac{16}{\ln 2} \Leftrightarrow \frac{16}{\ln 2} + 16 + C = \frac{16}{\ln 2} \Leftrightarrow C = -16. \text{ Do đó } f(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + 2\sqrt{x^3} - 16.$$

Câu 45: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^{2x} \cdot 3^x \cdot 7^x$.

A. $\frac{84^x}{\ln 84} + C$.

B. $\frac{2^{2x} \cdot 3^x \cdot 7^x}{\ln 4 \cdot \ln 3 \cdot \ln 7} + C$.

C. $84^x + C$.

D. $84^x \cdot \ln 84 + C$.

Lời giải

Chọn A

$$\int 2^{2x} \cdot 3^x \cdot 7^x dx = \int 84^x dx = \frac{84^x}{\ln 84} + C.$$

Câu 46: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}$.

A. $\frac{1}{2-4x} + C$.

B. $-\frac{1}{(2x-1)^3} + C$.

C. $\frac{1}{4x-2} + C$.

D. $-\frac{1}{2x-1} + C$.

Lời giải

Chọn A



$$\int \frac{1}{(2x-1)^2} dx = \int (2x-1)^{-2} dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x-1} + C = \frac{1}{2-4x} + C.$$

Câu 47: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x}$ là

- A. $\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{4} + C.$ B. $\frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + C.$ C. $\frac{4x}{3\sqrt[3]{x}} + C.$ D. $\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2}} + C.$

Lời giải

Chọn B

$$\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + C = \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + C.$$

Câu 48: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 5x \cos x.$

- A. $-\frac{1}{5} \cos 5x + C.$ B. $-\frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos 6x}{12} + C.$
C. $\frac{1}{5} \cos 5x + C.$ D. $\frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{12} \cos 6x + C.$

Lời giải

Chọn B

$$\int \sin 5x \cos x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 6x + \sin 4x) dx = -\frac{1}{12} \cos 6x - \frac{1}{8} \cos 4x + C.$$

Câu 49: (Đề thi THPT QG năm 2019 Mã đề 101) Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$ là

- A. $2 \ln(x+1) + \frac{2}{x+1} + C.$ B. $2 \ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C.$
C. $2 \ln(x+1) - \frac{2}{x+1} + C.$ D. $2 \ln(x+1) - \frac{3}{x+1} + C.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2} = \frac{2}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2}.$

$$\int f(x) dx = \int \left[\frac{2}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2} \right] dx = 2 \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + C.$$

Câu 50: Hàm số $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x) = (1-x) \ln(x^2+1)$. Hỏi hàm số $F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải



Chọn BTXĐ $D = \mathbb{R}$.Ta có $F'(x) = f(x) = (1-x)\ln(x^2+1)$.

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x)\ln(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=0 \\ \ln(x^2+1)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=0 \end{cases}.$$

Phương trình $F'(x) = 0$ có 1 nghiệm đơn $x=1$ và nghiệm kép $x=0$ nên hàm số $F(x)$ có 1 điểm cực trị.

Câu 51: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 + (a+b)x + ab}$ là (giả sử hàm số xác định).

A. $\ln \left| \frac{x+b}{x+a} \right| + C.$

B. $\frac{1}{b-a} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right| + C.$

C. $\ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right| + C.$

D. $\frac{1}{b-a} \ln \left| \frac{x+b}{x+a} \right| + C.$

*Lời giải***Chọn B**

Ta có $f(x) = \frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{(b-a)(x+a)} - \frac{1}{(b-a)(x+b)}.$

$$\int f(x) dx = \int \left[\frac{1}{(b-a)(x+a)} - \frac{1}{(b-a)(x+b)} \right] dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \int \left[\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b} \right] dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot [\ln|x+a| - \ln|x+b|] + C = \frac{1}{b-a} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right| + C.$$

Câu 52: Hàm số $f(x) = \frac{x^4}{x^2-1}$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thỏa $F(3) = \frac{22}{3} - \frac{1}{2} \ln 2$. Giá trị của $e^{F(2)}$ bằng:

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}.$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}.$

C. $\sqrt{3}.$

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}.$

*Lời giải***Chọn D**

$$F(x) = \int \frac{x^4}{x^2-1} dx = \int \left[x^2 + 1 + \frac{1}{(x-1)(x+1)} \right] dx$$



$$= \frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

Trên khoảng $(1; +\infty)$ $F(x) = \frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + C_1$

Ta có $F(3) = \frac{22}{3} - \frac{1}{2} \ln 2 \Leftrightarrow \frac{3^3}{3} + 3 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + C_1 = \frac{22}{3} - \frac{1}{2} \ln 2 \Rightarrow C_1 = -\frac{14}{3}$.

$$\Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) - \frac{14}{3}, \forall x \in (1; +\infty).$$

$$F(2) = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} = \ln \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow e^{F(2)} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 53: Hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+x-2}$ có 1 nguyên hàm là $F(x)$ thỏa $F(2) = \frac{10 \ln 2}{3}$. Tính $e^{F(3)}$.

A. $\sqrt[3]{2^5 \cdot 5}$.

B. $\ln \sqrt[3]{2}$.

C. $\sqrt[3]{2 \cdot 5^5}$.

D. $\ln \sqrt[3]{4^5}$.

Lời giải

Chọn C

Sử dụng phương pháp đồng nhất thức.

Có $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+x-2} = \frac{2x-1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x + (2A-B)}{(x-1)(x+2)}$.

Suy ra: $\begin{cases} A+B=2 \\ 2A-B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=\frac{5}{3} \end{cases}$.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{x+2} \right) dx = \frac{1}{3} \cdot \ln|x-1| + \frac{5}{3} \cdot \ln|x+2| + C.$$

Trên khoảng $(1; +\infty)$ $F(x) = \frac{1}{3} \cdot \ln(x-1) + \frac{5}{3} \cdot \ln(x+2) + C_1$

Mà: $F(2) = \frac{10 \ln 2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \ln(2-1) + \frac{5}{3} \cdot \ln(2+2) + C_1 = \frac{10 \ln 2}{3} \Leftrightarrow C_1 = 0$.

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{3} \cdot \ln(x-1) + \frac{5}{3} \cdot \ln(x+2), \forall x \in (1; +\infty).$$

Khi đó: $F(3) = \frac{1}{3} \cdot \ln 2 + \frac{5}{3} \cdot \ln 5$.

Vậy: $e^{F(3)} = e^{\frac{1}{3} \cdot \ln 2 + \frac{5}{3} \cdot \ln 5} = e^{\frac{1}{3} \cdot \ln 2} \cdot e^{\frac{5}{3} \cdot \ln 5} = \sqrt[3]{2 \cdot 5^5}$.

Câu 54: Hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2(x+1)}$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thỏa $F(1) + F(-2) = \frac{1}{2}$. Tính

$F(2) + F(-3)$.

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{5}{6} + \ln 2$.

C. $\frac{1}{3} + \ln 2$.

D. $\frac{5}{6}$.

Lời giải



Chọn D

Sử dụng phương pháp đồng nhất thức.

$$\text{Có } f(x) = \frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{(A+C)x^2 + (A+B)x + B}{x^2(x+1)}.$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} A+C=0 \\ A+B=0 \\ B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \\ C=1 \end{cases}.$$

$$F(x) = \int f(x).dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} \right).dx$$

$$\Rightarrow F(x) = -\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x+1| + C = \ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x} + C.$$

$$\text{Khi đó: } F(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x} + C_1, & x \in (0; +\infty) \\ \ln\left(\frac{-x-1}{x}\right) - \frac{1}{x} + C_2, & x \in (-1; 0) \\ \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x} + C_3, & x \in (-\infty; -1) \end{cases}$$

$$\text{Mà: } F(1) + F(-2) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\ln 2 - 1 + C_1) + \left(\ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + C_3 \right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow C_1 + C_3 = 1.$$

$$\text{Vậy: } F(2) + F(-3) = \left(\ln \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + C_1 \right) + \left(\ln \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + C_3 \right) = \frac{5}{6}.$$

Câu 55: (Đề thi THPT QG năm 2017 – Mã đề 110) Cho $F(x) = (x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

- A. $(x-2)e^x + C$. B. $\frac{2-x}{2}e^x + C$. C. $(2-x)e^x + C$. D. $(4-2x)e^x + C$.

Lời giải

Chọn C

Có: $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$ nên:

$$F'(x) = f(x)e^{2x} \Leftrightarrow [(x-1)e^x]' = f(x)e^{2x}.$$

$$\text{Hay: } f(x)e^{2x} = e^x + (x-1)e^x = x.e^x.$$

$$\text{Xét } I = \int f'(x)e^{2x}dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2e^{2x}dx \\ v = f(x) \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } I = f(x)e^{2x} - \int 2f(x)e^{2x}dx = x.e^x - 2.(x-1)e^x + C = (2-x)e^x + C.$$

Câu 56: (THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa lần 2 năm 2017) Cho a, b là các số hữu tỉ thỏa mãn

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = a(x+2)\sqrt{x+2} + b(x+1)\sqrt{x+1} + C. \text{ Tính } S = 3a + b.$$



A. $S = -\frac{2}{3}$.

B. $S = \frac{1}{3}$.

C. $S = \frac{4}{3}$.

D. $S = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Có $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = \int \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}{(x+2) - (x+1)} dx = \int (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}) dx$.

Suy ra: $I = \frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2} - \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + C$.

Hay: $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{-2}{3}$.

Vậy $S = 3a + b = \frac{4}{3}$.

Câu 57: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x \cdot \sin x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2019$.

A. $F(x) = x \sin x + \cos x + 2019$.

B. $F(x) = -x \cos x + \sin x + 2018$.

C. $F(x) = x \sin x - \cos x + 2019$.

D. $F(x) = \sin x + x \cos x + 2018$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

$\int x \sin x dx = -x \cos x - \int -\cos x + C = -x \cos x + \sin x + C$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} + C = 2019 \Rightarrow C = 2018$

Câu 58: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x \cdot e^{-x}$ thỏa mãn $F(0) = 1$.

A. $-(x+1)e^{-x} + 1$.

B. $-(x+1)e^{-x} + 2$.

C. $(x+1)e^{-x} + 1$.

D. $(x+1)e^{-x} + 2$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$

$F(x) = \int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} + C = -x e^{-x} - e^{-x} + C$

$F(0) = -1 - 1 + C = 1 \Rightarrow C = 2$

Câu 59: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$.

A. $e^{\tan x} + C$.

B. $e^{-\tan x} + C$.

C. $\tan x \cdot e^{\tan x} + C$.

D. $-e^{\tan x} + C$.

Lời giải



Chọn A

$$\text{Đặt } t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{\tan x} + C$$

Câu 60: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^4 x \cos x$.

A. $-\frac{1}{5} \sin^5 x + C$. **B.** $\sin^5 x + C$.

C. $\frac{1}{5} \sin^5 x + C$. **D.** $-\sin^5 x + C$.

*Lời giải***Chọn C**

$$\text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$$

$$\int \sin^4 x \cos x dx = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{5} \sin^5 x + C$$

F

Câu 61: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^2 x \sin x$.

A. $\frac{1}{3} \cos^3 x + C$. **B.** $-\frac{1}{3} \cos^3 x + C$.

C. $-\cos^3 x + C$. **D.** $\cos^3 x + C$.

*Lời giải***Chọn B**

$$\text{Đặt } t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$$

$$\int \cos^2 x \sin x dx = \int -t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{1}{3} \cos^3 x + C$$

Câu 62: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}$.

A. $\frac{3}{4}(x+4)\sqrt{x+1} + C$. **B.** $\frac{2}{3}(x+4)\sqrt{x+1} + C$.

C. $\frac{x}{2(x+1)\sqrt{x+1}} + C$. **D.** $\sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} + C$.

*Lời giải***Chọn B**

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow 2t dt = dx$$

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} dx = \int \left(\frac{t^2+1}{t} \right) 2t dt = \int (2t^2 + 2) dt = \frac{2t^3}{3} + 2t + C$$



$$= \frac{2(x+1)\sqrt{x+1}}{3} + 2\sqrt{x+1} + C = \frac{2}{3}(x+4)\sqrt{x+1} + C$$

Câu 63: Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{e^x + 3}$ thỏa mãn $F(0) = -\frac{1}{3}\ln 4$. Tìm tập nghiệm

S của phương trình $3F(x) + \ln(e^x + 3) = 2$.

A. $S = \{2\}$.

B. $S = \{-2; 2\}$.

C. $S = \{2; 1\}$.

D. $S = \{-2; 1\}$.

Lời giải

Chọn A

$$F(x) = \int \frac{1}{e^x + 3} dx = \int \frac{e^x}{e^x(e^x + 3)} dx$$

Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$

$$\int \frac{e^x}{e^x(e^x + 3)} dx = \int \frac{1}{t(t+3)} dt = \int \left(\frac{1}{3t} - \frac{1}{3(t+3)} \right) dt = \frac{\ln|t|}{3} - \frac{\ln|t+3|}{3} + C$$

$$= \frac{\ln(e^x)}{3} - \frac{\ln(e^x + 3)}{3} + C = \frac{x}{3} - \frac{\ln(e^x + 3)}{3} + C$$

$$F(0) = -\frac{1}{3}\ln 4 \Rightarrow -\frac{\ln 4}{3} + C = -\frac{1}{3}\ln 4 \Rightarrow C = 0$$

Ta có: $3F(x) + \ln(e^x + 3) = 2 \Leftrightarrow 3\left(\frac{x}{3} - \frac{\ln(e^x + 3)}{3}\right) + \ln(e^x + 3) = 2 \Leftrightarrow x = 2$.

Câu 64: Đặt $I = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$, $J = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$. Tìm $T = 4J - 2I$

A. $T = x - 3\ln|\sin x + \cos x| + C$.

B. $T = x + 3\ln|\sin x + \cos x| + C$.

C. $T = 3x - \ln|\sin x + \cos x| + C$.

D. $T = 2x - \ln|\sin x + \cos x| + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $I + J = \int 1 dx = x + C_1$; $I - J = \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \ln|\sin x + \cos x| + C_2$

Do đó $I = \frac{x + \ln|\sin x + \cos x|}{2} + \frac{C_1 + C_2}{2}$; $J = \frac{x - \ln|\sin x + \cos x|}{2} + \frac{C_1 - C_2}{2}$

Suy ra: $T = 4J - 2I = x - 3\ln|\sin x + \cos x| + C$

Câu 65: Tìm một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x} \cdot \sqrt{\ln^2 x + 1}$.



A. $\frac{\sqrt{(\ln^2 x + 1)^3}}{3}$

B. $\frac{(\ln^2 x + 1)^3}{3}$

C. $\frac{\sqrt{(\ln x + 1)^3}}{3}$

D. $\frac{(\ln^2 x + 1)\sqrt{(\ln^2 x + 1)^3}}{3}$

Lời giải

Chọn A

$F(x) = \int \frac{\ln x}{x} \sqrt{\ln^2 x + 1} dx$. Đặt $t = \sqrt{\ln^2 x + 1} \Rightarrow t^2 = \ln^2 x + 1 \Rightarrow t dt = \frac{\ln x}{x} dx$

Khi đó $F(x) = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(\sqrt{\ln^2 x + 1})^3}{3} + C$

Câu 66: Tìm hàm số $f(x)$, biết rằng $f'(x) = x\sqrt{1+x^2}$ và $3f(0) = 4$

A. $\frac{(\sqrt{1+x^2})^3}{3} + 1$

B. $\frac{1+x^2}{2} + 1$

C. $\frac{x^2(\sqrt{1+x^2})^2}{3} - 1$

D. $\frac{(\sqrt{1+x^2})^3}{3} - 1$

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) = \int f'(x) dx = \int x\sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int (1+x^2)^{\frac{1}{2}} d(1+x^2) = \frac{(\sqrt{1+x^2})^3}{3} + C$

Mà $3f(0) = 4$ nên $3 \left(\frac{(\sqrt{1+(0)^2})^3}{3} + C \right) = 4 \Leftrightarrow C = 1$

$f(x) = \frac{(\sqrt{1+x^2})^3}{3} + 1$

Câu 67: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{2x}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$

A. $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}$

B. $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}$

C. $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}(x^2 + 1)\sqrt{x^2 - 1}$

D. $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}(x^2 + 1)\sqrt{x^2 - 1}$



Lời giải

Chọn A

$$F(x) = \int \frac{2x}{x + \sqrt{x^2 - 1}} dx = \int 2x \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right) dx = \int 2x^2 dx - \int 2x\sqrt{x^2 - 1} dx$$

$$= \frac{2}{3} x^3 - \int (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} d(x^2 - 1) = \frac{2}{3} x^3 - \frac{2}{3} (x^2 - 1) \sqrt{x^2 - 1} + C$$

Câu 68: Hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thỏa $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$. Giá trị của $e^{F\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. 3

D. 2

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$F(x) = \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} dx = \int \frac{1}{2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} d\left(\tan \frac{x}{2}\right) = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

$$\text{Mà } F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \text{ nên } \ln \left| \tan \frac{\pi}{6} \right| + C = 0 \Leftrightarrow C = -\ln \frac{\sqrt{3}}{3} = \ln \sqrt{3} = \frac{1}{2} \ln 3$$

$$\text{Do đó: } e^{F\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{\ln \left| \tan \frac{\pi}{3} \right| + \frac{1}{2} \ln 3} = e^{\ln 3} = 3$$

Câu 69: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = (x^2 - 1)e^{x^3 - 3x}$, biết rằng đồ thị của hàm số $F(x)$ có điểm cực tiểu nằm trên trục hoành

A. $e^{x^3 - 3x} - e^2$

B. $\frac{e^{x^3 - 3x + 2} - 1}{3e^2}$

C. $\frac{e^{x^3 - 3x} - e^2}{3}$

D. $\frac{e^{x^3 - 3x} - 1}{3}$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } F(x) = \int (x^2 - 1)e^{x^3 - 3x} dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3 - 3x} d(x^3 - 3x) = \frac{1}{3} e^{x^3 - 3x} + C$$

$$\text{Mà: } F'(x) = f(x) = (x^2 - 1)e^{x^3 - 3x} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$F''(x) = 2x \cdot e^{x^3 - 3x} + (x^2 - 1)(3x^2 - 3)e^{x^3 - 3x}; F''(1) > 0; F''(-1) < 0.$$

Do đó hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Mặt khác đồ thị hàm số có cực tiểu nằm trên trục hoành nên ta có điểm cực tiểu là

$$A(1, 0)$$

$$\text{Suy ra } F(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} e^{-2} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{3e^2}$$



Do đó $F(x) = \frac{e^{x^3-3x+2} - 1}{3e^2}$

ĐÁP ÁN ĐỀ RÈN LUYỆN LẦN 2

1.A	2.A	3.B	4.C	5.D	6.A	7.A	8.B	9.B	10.B
11.B	12.B	13.D	14.C	15.D	16.C	17.C	18.B	19.B	20.A
21.C	22.B	23.B	24.A	25.A	26.A	27.A	28.A	29.C	30.B

ĐỀ RÈN LUYỆN LẦN 3 (NHÓM BÀI NÂNG CAO CÓ MẪU VÀ HƯỚNG DẪN)

Câu 70: (Đề tham khảo – Bộ GD & ĐT 2019) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x(1 + \ln x)$ là
A. $2x^2 \ln x + 3x^2$. **B.** $2x^2 \ln x + x^2$. **C.** $2x^2 \ln x + 3x^2 + C$. **D.** $2x^2 \ln x + x^2 + C$.

Hướng dẫn: Nhân phân phối và tách ra hai bài nguyên hàm.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u = 1 + \ln x \\ dv = 4x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = 2x^2 \end{cases}$

Khi đó: $\int f(x) dx = (1 + \ln x)2x^2 - \int 2x dx = (1 + \ln x)2x^2 - x^2 + C = x^2(1 + 2\ln x) + C$

Câu 71: Giả sử $\int \frac{(2x+3)dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = -\frac{1}{g(x)} + C$ với C là hằng số. Tổng các nghiệm của phương trình $g(x) = 0$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -3.

Hướng dẫn: Dựa vào phương trình $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = e$ với $a+b=c+d$, ta sẽ nhóm $[(x+a)(x+d)] \cdot [(x+b)(x+c)] = e$, sau đó sẽ đặt $t = (x+a)(x+d)$. Cụ thể:

$x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = x(x+3)[(x+1)(x+2)] = (x^2+3x)(x^2+3x+2).$

Đặt $t = x^2 + 3x \Rightarrow dt = (2x+3)dx$ là phần còn lại của nguyên hàm.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $I = \int \frac{(2x+3)dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = \int \frac{(2x+3)dx}{(x^2+3x+2)(x^2+3x)+1}$

Đặt $t = x^2 + 3x \Rightarrow dt = (2x+3)dx$

Khi đó:



$$I = \int \frac{dt}{(t+2)t+1} = \int \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{1}{t+1} + C = -\frac{1}{x^2+3x+1} + C \Rightarrow g(x) = x^2 + 3x + 1.$$

Theo định lý Viet ta thấy phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ và $x_1 + x_2 = -3$.

Mẫu 1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa $f'(x) = \frac{2}{x-1}$; $f(0) = 3$ và $f(2) = 4$. Tính giá trị của biểu thức $P = f(-2) + f(5)$.

Giải. Ta có: $f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{2}{x-1}dx = 2\ln|x-1| + C = \begin{cases} 2\ln(x-1) + C_1 & \text{khi } x > 1 \\ 2\ln(1-x) + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

$$\text{Do } \begin{cases} f(0) = 3 \\ f(2) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\ln(1-0) + C_2 = 3 \\ 2\ln(2-1) + C_1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 4 \\ C_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2\ln(x-1) + 4 & \text{khi } x > 1 \\ 2\ln(1-x) + 3 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } P = f(-2) + f(5) = (2\ln[1-(-2)] + 3) + [2\ln(5-1) + 4] = 2\ln 3 + 2\ln 4 + 7.$$

Câu 72. (Đề tham khảo – Bộ GD & ĐT năm 2018 – Câu 37) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$; $f(0) = 1$ và $f(1) = 2$. Tính $P = f(-1) + f(3)$.

A. $P = 4 + \ln 15$. **B.** $P = 2 + \ln 15$. **C.** $P = 3 + \ln 15$. **D.** $P = \ln 15$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{2}{2x-1}dx = \ln|2x-1| + C = \begin{cases} \ln(2x-1) + C_1 & \text{khi } x > \frac{1}{2} \\ \ln(1-2x) + C_2 & \text{khi } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Do } \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(1-0) + C_2 = 1 \\ \ln(2-1) + C_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln(2x-1) + 2 & \text{khi } x > \frac{1}{2} \\ \ln(1-2x) + 1 & \text{khi } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } P = f(-1) + f(3) = (\ln 3 + 1) + (\ln 5 + 2) = \ln 15 + 3.$$

Câu 73. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa $f'(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(0) = 2017$,

$f(2) = 2018$. Giá trị của biểu thức $T = [f(3) - 2018][f(-1) - 2017]$ bằng

A. $1 + \ln^2 2$. **B.** $2\ln 2$. **C.** $\ln^2 2$. **D.** 1 .

Lời giải

Chọn C



Ta có: $f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{1}{x-1}dx = \ln|x-1| + C = \begin{cases} \ln(x-1) + C_1 & \text{khi } x > 1 \\ \ln(1-x) + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

Do $\begin{cases} f(0) = 2017 \\ f(2) = 2018 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(1-0) + C_2 = 2017 \\ \ln(2-1) + C_1 = 2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 2018 \\ C_2 = 2017 \end{cases}$.

Khi đó: $T = [f(3) - 2018][f(-1) - 2017]$
 $= [\ln(3-1) + 2018 - 2018][\ln(1-(-1)) + 2017 - 2017]$
 $= \ln 2 \cdot \ln 2 = \ln^2 2$.

Câu 74: Cho $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{3x-6}$; $f(0) = \frac{4}{3}\ln 6$ và

$f(3) = \frac{4}{3}\ln 3$. Tính $P = f(-7) + f(11)$.

- A.** $P = \ln 162$. **B.** $P = \ln 18$. **C.** $P = 2\ln 3$. **D.** $P = 3 + \ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{1}{3x-6}dx = \frac{1}{3}\ln|x-2| + C = \begin{cases} \frac{1}{3}\ln(x-2) + C_1 & \text{khi } x > 2 \\ \frac{1}{3}\ln(2-x) + C_2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$.

Do $\begin{cases} f(0) = \frac{4}{3}\ln 6 \\ f(3) = \frac{4}{3}\ln 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}\ln(2-0) + C_2 = \frac{4}{3}\ln 6 \\ \frac{1}{3}\ln(3-2) + C_1 = \frac{4}{3}\ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{4}{3}\ln 3 \\ C_2 = \ln 2 + \frac{4}{3}\ln 3 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\ln(x-2) + \frac{4}{3}\ln 3 & \text{khi } x > 2 \\ \frac{1}{3}\ln(2-x) + \ln 2 + \frac{4}{3}\ln 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$.

Khi đó: $P = f(-7) + f(11) = \left(\frac{1}{3}\ln[2-(-7)] + \ln 2 + \frac{4}{3}\ln 3\right) + \left[\frac{1}{3}\ln(11-2) + \frac{4}{3}\ln 3\right]$
 $= 4\ln 3 + \ln 2 = \ln 162$.

Câu 75: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}^*$ thỏa mãn $f''(x) = \frac{1}{x^2}$, $f(-1) = 1$, $f(1) = 0$ và

$f(2) = 0$. Giá trị của biểu thức $f(-2)$ bằng

- A.** $1 - 2\ln 2$. **B.** $2 + \ln 2$. **C.** $3 + \ln 2$. **D.** $\ln 2$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $f'(x) = \int f''(x)dx = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$.

Suy ra $f(x) = \int f'(x)dx = \int \left(\frac{-1}{x} + C \right) dx = -\ln|x| + Cx + C$

$$= \begin{cases} -\ln x + Cx + C_1 & \text{khi } x > 0 \\ -\ln(-x) + Cx + C_2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

Do $\begin{cases} f(-1) = 1 \\ f(1) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\ln 1 + C(-1) + C_2 = 1 \\ -\ln 1 + C \cdot 1 + C_1 = 0 \\ -\ln 2 + C \cdot 2 + C_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -\ln 2 \\ C_2 = 1 + \ln 2 \\ C = \ln 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -\ln x + x \ln 2 - \ln 2 & \text{khi } x > 0 \\ -\ln(-x) + x \ln 2 + 1 + \ln 2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

Khi đó: $f(-2) = -\ln 2 - 2\ln 2 + 1 + \ln 2 = 1 - 2\ln 2$.

Câu 76: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ thỏa $f'(x) = |2x - 4|$, $f(1) = 1$ và $f(3) = -2$.

Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(4)$ bằng bao nhiêu?

A. -6.

B. 2.

C. -14.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int |2x - 4|dx = \begin{cases} \int (2x - 4)dx & \text{khi } x > 2 \\ \int (4 - 2x)dx & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 - 4x + C_1 & \text{khi } x > 2 \\ 4x - x^2 + C_2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$

Do $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(3) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 \cdot 1 - 1^2 + C_2 = 1 \\ 3^2 - 4 \cdot 3 + C_1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = -2 \\ C_1 = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 1 & \text{khi } x > 2 \\ 4x - x^2 - 2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$

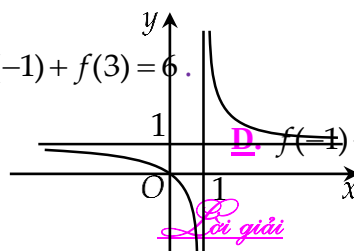
Khi đó: $f(-1) + f(4) = [4 \cdot (-1) - (-1)^2 - 2] + (4^2 - 4 \cdot 4 + 1) = -6$.

Câu 77: Xét hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, có $f(0) = 2$ và $f(2) = 1$. Biết rằng hàm số

$f'(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ. Tính giá trị của $f(-1) + f(3)$.

A. $f(-1) + f(3) = 2\ln 2$. **B.** $f(-1) + f(3) = 6$.

C. $f(-1) + f(3) = 6 + 2\ln 2$.



D. $f(-1) + f(3) = 3 + 2\ln 2$.

Lời giải



Chọn D

Từ đồ thị hàm số $f'(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ ta thấy: Đồ thị đi qua gốc tọa độ do đó $b=0 \Rightarrow f'(x) = \frac{ax}{x+c}$.

Mà $f'(x) = \frac{ax}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ nên $a \neq 0$, suy ra

đồ thị có đường tiệm cận đứng của đồ thị là $x=-c$ và đường tiệm cận ngang là $y=a$. Từ đồ thị ta thấy đồ thị có đường tiệm cận đứng $x=1$; đường tiệm cận ngang $y=1$

Suy ra $a=1$ và $c=-1$. Vậy $f'(x) = \frac{x}{x-1}$.

Ta có: $f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{x}{x-1}dx = \int \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)dx = x + \ln|x-1| + C$

$= \begin{cases} x + \ln(x-1) + C_1 & \text{khi } x > 1 \\ x + \ln(1-x) + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

Do $\begin{cases} f(0)=2 \\ f(2)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + \ln(1-0) + C_2 = 2 \\ 2 + \ln(2-1) + C_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x + \ln(x-1) - 1 & \text{khi } x > 1 \\ x + \ln(1-x) + 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

Khi đó $f(-1) + f(3) = [-1 + \ln(1-(-1)) + 2] + [3 + \ln(3-1) - 1] = 3 + 2\ln 2$.

Mẫu 2. Hàm số $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & \text{khi } x \geq 0 \\ 5\cos x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Biết

rằng $F\left(-\frac{\pi}{2}\right) + F(1) = 3$. Giá trị của biểu thức $T = F(2) - 2F\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $F(x) = \int f(x)dx = \begin{cases} x^3 + 5x + C_1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 5\sin x + C_2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

Theo đề $F\left(-\frac{\pi}{2}\right) + F(1) = 2 \Leftrightarrow 5\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + C_2 + 1^3 + 5.1 + C_1 = 3 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 2$ (1)

Vì hàm số $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại điểm $x=0$, tức có:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = F(0) \Rightarrow C_2 = C_1$ nên kết hợp (1) $\Rightarrow C_1 = C_2 = 1$.

Suy ra: $F(x) = \begin{cases} x^3 + 5x + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 5\sin x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

Do đó: $T = F(2) - 2F\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2^3 + 5.2 + 1 - 2\left[5\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 1\right] = 22$.

Câu 78: Biết rằng $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2 & \text{khi } x \geq 2 \\ 4x^3 - 18 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$.

Giá trị của biểu thức $F(-1) - F(3)$ bằng

A. 7.

B. 18.

C. 8.

D. 32.



Lời giải

Chọn B

Ta có: $F(x) = \int f(x)dx = \begin{cases} x^3 + 2x + C_1 & \text{khi } x \geq 2 \\ x^4 - 18x + C_2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$.

Vì hàm số $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại điểm $x = 2$, tức có:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} F(x) = F(2) \Rightarrow 12 + C_1 = -20 + C_2 \Rightarrow C_1 - C_2 = -32$$

Do đó: $F(-1) - F(3) = (1 + 18 + C_2) - (27 + 6 + C_1) = -14 - (C_1 - C_2) = -14 + 32 = 18$.

Câu 79: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 - 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ có một nguyên hàm là hàm số $F(x)$ thỏa mãn $F(0) = 1$

và $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $T = F(-1) + F(2)$ bằng

- A. 7. B. 5. C. 8. D. 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $F(x) = \int f(x)dx = \begin{cases} x^2 + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 - x + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

Theo đề $F(0) = 1 \Leftrightarrow C_2 = 1$ (1)

Vì hàm số $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại điểm $x = 1$, tức có:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = F(1) \Rightarrow 1 + C_1 = C_2 \text{ nên kết hợp (1) } \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 = 0 \end{cases}$$

Suy ra: $F(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 - x + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

Do đó: $T = F(-1) + F(2) = (-1 + 1 + 1) + (2^2) = 5$.

Câu 80: Biết rằng $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin x + x \cos x & \text{khi } x \geq 0 \\ 2(x+1) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ và

$F(\pi) + F(-1) = 1$. Giá trị của biểu thức $F(2\pi) + F(-5)$ bằng

- A. 17. B. $2\pi + 3$. C. 8. D. $\pi - 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $F(x) = \int f(x)dx = \begin{cases} x \sin x + C_1 & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 + 2x + C_2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$.

Theo đề $F(\pi) + F(-1) = 1 \Leftrightarrow (\pi \sin(\pi) + C_1) + (1 - 2 + C_2) = 1 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 2$ (1)

Vì hàm số $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại điểm $x = 0$, tức có:



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = F(0) \Rightarrow C_2 = C_1 \text{ nên kết hợp (1)} \Rightarrow C_1 = C_2 = 1.$$

$$\text{Suy ra: } F(x) = \begin{cases} x \sin x + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó: } T = F(2\pi) + F(-5) = (2\pi \sin(2\pi) + 1) + (25 - 10 + 1) = 17.$$

Câu 81: Biết $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2x+1}} & \text{khi } x \geq 0 \\ (2x+1)^3 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Biết

$$F(4) + F(-1) = 8. \text{ Tính } P = F(-2) + F(12).$$

A. 20.

B. $\frac{281}{16}$.

C. 27.

D. $\frac{121}{8}$.

Lời giải

Chọn A

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2x+1}} & \text{khi } x \geq 0 \\ (2x+1)^3 & \text{khi } x < 0 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} \sqrt{2x+1} + C_1 & \text{khi } x \geq 0 \\ \frac{(2x+1)^4}{8} + C_2 & \text{khi } x < 0 \end{cases} \text{ là nguyên hàm của } f(x).$$

$$\text{Từ đó suy ra: } F(4) + F(-1) = 8 \Leftrightarrow \sqrt{8+1} + C_1 + \frac{(-2+1)^4}{8} + C_2 = 8 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = \frac{39}{8}.$$

$$\text{Ta có: } P = F(-2) + F(12) = \sqrt{2 \cdot 12 + 1} + \frac{(-4+1)^4}{8} + C_1 + C_2 = 20.$$

Câu 82: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $2xf(x) + x^2 f'(x) = 1$ và $f(1) = 0$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại giao điểm với trục hoành là

A. $y = x - 1$.

B. $y = 2x - 2$.

C. $y = x$.

D. $y = -x$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } 2xf(x) + x^2 f'(x) = 1 \Leftrightarrow (x^2)' f(x) + x^2 f'(x) = 1 \Leftrightarrow (x^2 f(x))' = 1.$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được:

$$\int (x^2 f(x))' \cdot dx = \int 1 \cdot dx \Leftrightarrow x^2 f(x) = x + C.$$

$$\text{Lại có: } f(1) = 0 \Rightarrow 1 \cdot f(1) = 1 + C \Leftrightarrow C = -1.$$

$$\text{Từ đó suy ra: } x^2 f(x) = x - 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x-1}{x^2}.$$

$$\text{Xét phương trình hoành độ giao điểm: } \frac{x-1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{2-x}{x^3} \Rightarrow f'(1) = 1; f(1) = 0.$$

Phương trình tiếp tuyến tại giao điểm với trục hoành là:

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow y = x - 1.$$



- Câu 83:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f(x) + xf'(x) = 3x^2$ và $f(2) = 8$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại giao điểm với trục hoành là
- A. $y = x - 1$. B. $y = 2x - 4$. C. $y = 4x$. D. $y = -6x - 12$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(x) + xf'(x) = 3x^2 \Leftrightarrow (x)' f(x) + xf'(x) = 3x^2 \Leftrightarrow (xf(x))' = 3x^2$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta được:

$$\int (xf(x))'.dx = \int 3x^2.dx \Leftrightarrow xf(x) = x^3 + C.$$

$$\text{Lại có: } f(2) = 8 \Rightarrow 2.f(2) = 8 + C \Leftrightarrow 2.8 = C + 8 \Leftrightarrow C = 8.$$

$$\text{Từ đó suy ra: } xf(x) = x^3 + 8 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^3 + 8}{x}.$$

$$\text{Xét phương trình hoành độ giao điểm } \frac{x^3 + 8}{x} = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{2x^3 - 8}{x^2} \Rightarrow f'(-2) = -6; f(-2) = 0.$$

Phương trình tiếp tuyến tại giao điểm với trục hoành là:

$$y = f'(-2)(x + 2) + f(-2) \Leftrightarrow y = -6(x + 2) \Leftrightarrow y = -6x - 12.$$

- Câu 84:** Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x).f^2(x) = x^2$ và $f(2) = 2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $g(x) = f(x) + x^2$ tại điểm có hoành độ bằng 3 là
- A. $y = 7x - 9$. B. $y = x + 2$. C. $y = 4x - 4$. D. $y = x$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } f'(x).f^2(x) = x^2.$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được:

$$\int f'(x).f^2(x).dx = \int x^2.dx \Leftrightarrow \int f^2(x).df(x) = \frac{x^3}{3} + C \Leftrightarrow \frac{f^3(x)}{3} = \frac{x^3}{3} + C.$$

$$f(2) = 2 \Rightarrow \frac{f^3(2)}{3} = \frac{2^3}{3} + C \Leftrightarrow \frac{8}{3} = \frac{8}{3} + C \Leftrightarrow C = 0.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{f^3(x)}{3} = \frac{x^3}{3} \Leftrightarrow f(x) = x.$$

$$\text{Vậy } g(x) = x^2 + x \Rightarrow g'(x) = 2x + 1.$$

$$\text{Ta có: } g'(3) = 7; g(3) = 12.$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ bằng 3 là:

$$y = g'(3)(x - 3) + g(3) \Leftrightarrow y = 7(x - 3) + 12 \Leftrightarrow y = 7x - 9.$$

- Câu 85:** Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) - f(x) = e^x$ và $f(0) = 2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y(x) = f(x)$ tại giao điểm với trục hoành là



A. $y = x + 2$.

B. $y = e^2(x - 4)$.

C. $y = e^{-2}(x + 2)$.

D. $y = -x$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x) - f(x) = e^x$.

Nhân cả 2 vế với e^{-x} ta được: $e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) = 1 \Leftrightarrow (e^{-x}f(x))' = 1$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta được:

$$\int (e^{-x}f(x))' \cdot dx = \int 1 \cdot dx \Leftrightarrow e^{-x}f(x) = x + C.$$

$$f(0) = 2 \Rightarrow f(0) = 0 + C \Leftrightarrow C = 2.$$

$$\text{Suy ra: } e^{-x}f(x) = x + 2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x+2}{e^{-x}} = (x+2)e^x \Rightarrow f'(x) = (x+3)e^x.$$

$$\text{Xét phương trình hoành độ giao điểm } (x+2)e^x = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

$$\text{Ta có: } f'(-2) = (-2+3)e^{-2} = e^{-2}; f(-2) = 0.$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ bằng 3 là:

$$y = e^{-2}(x + 2).$$

Câu 86: THIẾU

Câu 87: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)e^{2x}$ là

A. $(x-2)e^x + e^x + C$. B. $(x+2)e^{2x} + e^x + C$.

C. $(x-1)e^x + C$. D. $(x+1)e^x + C$.

Lời giải

Chọn D

$$f(x) + f'(x) = e^{-x} \Leftrightarrow e^x \cdot f(x) + e^x f'(x) = 1 \Rightarrow (e^x \cdot f(x))' = 1 \Rightarrow e^x \cdot f(x) = x + C$$

$$\text{Mà } f(0) = 2, \text{ suy ra } f(x) = \frac{x+2}{e^x}.$$

$$\int f(x)e^{2x} dx = \int \frac{x+2}{e^x} e^{2x} dx = \int (x+2)e^x dx = \int (x+2)d(e^x) = (x+2)e^x - \int e^x dx$$

$$= (x+2)e^x - e^x + C = (x+1)e^x + C$$

Câu 88: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f^2(x) + 2x \cdot f(x) \cdot f'(x) = 5x^4, f(x) > 0$ và $f(1) = 1$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm M có hoành độ $x = 2$ là

A. $y = 2x - 1$.

B. $y = x - 4$.

C. $y = 4x - 4$.

D. $y = x$.

Lời giải



Chọn C

$$f^2(x) + 2x.f(x).f'(x) = 5x^4 \Leftrightarrow 2f^2(x) + 4x.f(x).f'(x) = 10x^4$$

$$\Rightarrow (2x.f^2(x))' = 10x^4 \Rightarrow 2x.f^2(x) = 2x^5 + C$$

Mà $f(1) = 1 \Rightarrow 2.1 = 2 + C \Leftrightarrow C = 0$, suy ra $f^2(x) = x^4 \Leftrightarrow f(x) = x^2$.

$$f'(x) = 2x, f'(2) = 4.$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm M có hoành độ $x = 2$ là

$$y = 4(x - 2) + f(2) = 4x - 4.$$

Câu 89: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -e^x.f^2(x), \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = \frac{1}{2}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0 = \ln 2$ là

A. $2x + 9y - 2\ln 2 - 3 = 0.$

B. $2x - 9y - 2\ln 2 + 3 = 0.$

C. $2x - 9y + 2\ln 2 - 3 = 0.$

D. $2x + 9y + 2\ln 2 - 3 = 0.$

Lời giải

Chọn A

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0, f'(x) = -e^x.f^2(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -e^x \Rightarrow \frac{-1}{f(x)} = -e^x + C$$

Mà $f(0) = \frac{1}{2}$ suy ra $C = -1$ và $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$.

$$f'(x) = \frac{-e^x}{(e^x + 1)^2} \Rightarrow f'(\ln 2) = \frac{-2}{9}, f(\ln 2) = \frac{1}{3}.$$

Phương trình tiếp tuyến tại hoành độ $x_0 = \ln 2$ là:

$$y = -\frac{2}{9}(x - \ln 2) + \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2x + 9y - 2\ln 2 - 3 = 0$$

Câu 90: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $f(x) = f'(x).\sqrt{3x+1}, \forall x > 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2 < f(5) < 3.$

B. $1 < f(5) < 2.$

C. $4 < f(5) < 5.$

D. $3 < f(5) < 4.$

Lời giải

Chọn D



Vì $f(x) > 0$ và $f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x+1}$ ta suy ra $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \Rightarrow \ln f(x) = \frac{2\sqrt{3x+1}}{3} + C$$

Mà $f(1) = 1$ suy ra $C = \frac{-4}{3}$ và $f(x) = e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1} - \frac{4}{3}}$. $f(5) = e^{\frac{4}{3}} \approx 3,79$.

Câu 91: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; \sqrt{3}]$ thỏa mãn $f(x) > -1, f(0) = 0$, và $\sqrt{x^2+1} \cdot f'(x) = 2x \cdot \sqrt{f(x)+1}$. Giá trị của $f(\sqrt{3})$ bằng

- A. 0. B. 3. C. 7. D. 9.

Lời giải

Chọn B

Vì $f(x) > 0$ và $f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x+1}$ ta suy ra $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \Rightarrow \ln f(x) = \frac{2\sqrt{3x+1}}{3} + C$$

Mà $f(1) = 1$ suy ra $C = \frac{-4}{3}$ và $f(x) = e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1} - \frac{4}{3}}$. $f(5) = e^{\frac{4}{3}} \approx 3,79$.

Câu 92: Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ không âm, có đạo hàm trên đoạn $[1; 4]$ và thỏa các hệ thức $f(1) + g(1) = 4, g(x) = -x \cdot f'(x)$ và $f(x) = -x \cdot g'(x)$. Giá trị của $f(4) + g(4)$ bằng

- A. 1. B. $\ln 2$. C. $\ln 3$. D. $2\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g(x) = -x \cdot f'(x)$ và $f(x) = -x \cdot g'(x)$

Suy ra $f(x) + g(x) = -x \cdot (f'(x) + g'(x)) \Leftrightarrow \frac{f'(x) + g'(x)}{f(x) + g(x)} = \frac{-1}{x}$.

Từ đó suy ra $\int_1^4 \left(\frac{f'(x) + g'(x)}{f(x) + g(x)} \right) dx = \int_1^4 \frac{-1}{x} dx \Leftrightarrow \int_1^4 \frac{d(f(x) + g(x))}{f(x) + g(x)} = -\ln|x|_1^4 = -\ln 4$

$\Leftrightarrow \ln|f(x) + g(x)|_1^4 = -\ln 4 \Leftrightarrow \ln|f(4) + g(4)| - \ln|f(1) + g(1)| = -\ln 4$

$\Leftrightarrow \ln|f(4) + g(4)| = 0 \Leftrightarrow |f(4) + g(4)| = 1 \Leftrightarrow f(4) + g(4) = 1$.

Câu 93: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$, thỏa mãn $x(x+1)f'(x) + f(x) = x^2 + x$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$ và $f(1) = -2\ln 2$. Biết $f(2) = a + b\ln 3$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Giá trị của tổng $a^2 + b^2$ bằng



A. 0,5.

B. 0,75.

C. $\frac{13}{4}$.

D. 4,5.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x(x+1)f'(x) + f(x) = x^2 + x \Leftrightarrow \frac{1}{x(x+1)}f(x) + f'(x) = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)^2}f(x) + \frac{x}{x+1}f'(x) = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \left(f(x)\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{x}{x+1}$$

Suy ra $\int \left(f(x)\frac{x}{x+1}\right)' dx = \int \frac{x}{x+1} dx \Leftrightarrow f(x)\frac{x}{x+1} = x - \ln|x+1| + C$

Mà $f(1) = -2\ln 2 \Rightarrow -2\ln(2) \cdot \frac{1}{2} = 1 - \ln 2 + C \Leftrightarrow C = -1$.

Do đó $f(x) = x + 1 - \frac{x+1}{x} \ln|x+1| - \frac{x+1}{x} = x - \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x} \ln|x+1|$.

Ta có $f(2) = 2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \ln 3 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \ln 3$ suy ra $a = \frac{3}{2}; b = \frac{3}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{9}{2}$.

Câu 94: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $[1; 2]$ thỏa $f(1) = 4$ và $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. 5.

B. 20.

C. 10.

D. 15.

Lời giải

Chọn B

Chọn $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Ta có $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2 \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d = x(3ax^2 + 2bx + c) - 2x^3 - 3x^2$.

Suy ra $\begin{cases} a = 3a - 2 \\ b = 2b - 3 \\ c = c \\ d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$.

Vậy $f(x) = x^3 + 3x^2$ suy ra $f(2) = 20$.

Câu 95: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x) + f(x) = 3x^2\sqrt{x}$. Biết $f(1) = 0,5$. Giá trị của $f(4)$ bằng

A. 24.

B. 14.

C. 4.

D. 16.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2xf'(x) + f(x) = 3x^2\sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2x}f(x) + f'(x) = \frac{3x\sqrt{x}}{2}$



$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} f(x) + \sqrt{x} f'(x) = \frac{3x^2}{2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} f(x) \right)' = \frac{3x^2}{2}$$

$$\text{Suy ra } \int \left(\sqrt{x} f(x) \right)' dx = \int \frac{3x^2}{2} dx \Leftrightarrow \sqrt{x} f(x) = \frac{x^3}{2} + C.$$

$$\text{Mà } f(1) = 0.5 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{2} + C \Leftrightarrow C = 0. \text{ Do đó } f(x) = \frac{x^2 \sqrt{x}}{2}. \text{ Vậy } f(4) = 16.$$

Câu 96: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, $f(-2) > 2$ và thỏa mãn hệ thức $f(x) \cdot f'(x) + 18x^2 = (3x^2 + x)f'(x) + (6x + 1)f(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(-2)$ bằng

A. -4. B. 4. C. -24. D. 24.

Lời giải

Chọn D

$$f(x) \cdot f'(x) + 18x^2 = (3x^2 + x)f'(x) + (6x + 1)f(x)$$

$$\Leftrightarrow 2f(x) \cdot f'(x) + 36x^2 = 2(3x^2 + x)f'(x) + 2(6x + 1)f(x)$$

$$\Leftrightarrow 2f(x) \cdot f'(x) - (2(3x^2 + x)f'(x) + 2(6x + 1)f(x)) = -36x^2$$

$$\left(f^2(x) - 2(3x^2 + x)f(x) \right)' = -36x^2 \Rightarrow \int \left(f^2(x) - 2(3x^2 + x)f(x) \right)' dx = \int -36x^2 dx$$

$$f^2(x) - 2(3x^2 + x)f(x) = -12x^3 + C$$

$$\text{Ta có } f(0) = 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$\text{Vậy } f^2(x) - 2(3x^2 + x)f(x) = -12x^3 \Rightarrow f^2(-2) - 20f(-2) = 96 \Leftrightarrow \begin{cases} f(-2) = 24 \\ f(-2) = -4 \end{cases}.$$

$$\text{Vì } f(-2) > 2 \text{ suy ra } f(-2) = 24.$$

Câu 97: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[0; \pi/2]$ thỏa mãn $f(0) = \sqrt{3}$ và $f(x) \cdot f'(x) = \cos x \cdot \sqrt{1 + f^2(x)}$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right]$.

$$\text{A. } m = \frac{\sqrt{21}}{2}, M = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{B. } m = \frac{5}{2}, M = 3.$$

$$\text{C. } m = \frac{\sqrt{5}}{2}, M = \sqrt{3}. \text{ D. } m = \sqrt{3}, M = 2\sqrt{2}.$$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f(x) \cdot f'(x) = \cos x \cdot \sqrt{1 + f^2(x)} \Leftrightarrow \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{1 + f^2(x)}} = \cos x$$



Suy ra $\int \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} dx = \int \cos x dx \Leftrightarrow \int \left(\sqrt{1+f^2(x)} \right)' dx = \sin x + C$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+f^2(x)} = \sin x + C$. Mà $f(0) = \sqrt{3}$ suy ra $C = 2$.

Do đó ta có $\sqrt{1+f^2(x)} = \sin x + 2 \Leftrightarrow f^2(x) = \sin^2 x + 4 \sin x + 3$. Vì $f(x)$ không âm trên $[0; \pi/2]$ nên ta có $f(x) = \sqrt{\sin^2 x + 4 \sin x + 3}$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{\sin^2 x + 4 \sin x + 3}$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right]$.

Đặt $t = \sin x, t \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right] \Rightarrow f(t) = \sqrt{t^2 + 4t + 3}, t \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right]$.

Có $f'(t) = \frac{t+2}{\sqrt{t^2+4t+3}} > 0, \forall t \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right]$ suy ra hàm số đồng biến trên $\left[\frac{1}{2}; 1 \right]$.

$+ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{21}}{2}; f(1) = 2\sqrt{2} \Rightarrow M = 2\sqrt{2}, m = \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Câu 98: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục, dương trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(0) = 1$ và $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x}{x^2+1}$. Khi đó

hiệu $T = f(2\sqrt{2}) - 2f(1)$ thuộc khoảng

- A. $(2;3)$. B. $(7;9)$. C. $(0;1)$. D. $(9;12)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x}{x^2+1} \Leftrightarrow (\ln f(x))' = \frac{x}{x^2+1} \Leftrightarrow \ln f(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$.

Vì $f(0) = 1$ nên $C = 0 \Rightarrow \ln f(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2+1}$,

Suy ra $T = f(2\sqrt{2}) - 2f(1) = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0,17$.

Câu 99: Hàm $f(x) = \frac{7 \cos x - 4 \sin x}{\cos x + \sin x}$ có một nguyên hàm $F(x)$ thỏa $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{8}$. Giá trị $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

- A. $\frac{3\pi - 11 \ln 2}{4}$. B. $\frac{3\pi}{4}$. C. $\frac{3\pi}{8}$. D. $\frac{3\pi - \ln 2}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $f(x) = \frac{7 \cos x - 4 \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x} + \frac{11}{2} \cdot \frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x}$

Suy ra $F(x) = \int \frac{7 \cos x - 4 \sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int \frac{3}{2} \cdot \frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x} dx + \int \frac{11}{2} \cdot \frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x} dx$
 $= \frac{3}{2}x + \frac{11}{2} \ln |\cos x + \sin x| + C$

Vì $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{8} \Rightarrow \frac{3\pi}{8} + \frac{11}{2} \ln \sqrt{2} + C = \frac{3\pi}{8} \Leftrightarrow C = -\frac{11}{4} \ln 2$.

Vậy $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4} - \frac{11}{4} \ln 2$.

ĐÁP ÁN ĐỀ RÈN LUYỆN LẦN 3

1.D 2.D 3.C 4.C 5.A 6.A 7.A 8.D 9.B 10.B

11.A	12.C	13.A	14.D	15.A	16.C	17.C	18.D	19.C	20.A
21.D	22.B	23.A	24.D	25.B	26.D	27.D	28.A	29.C	30.A

