

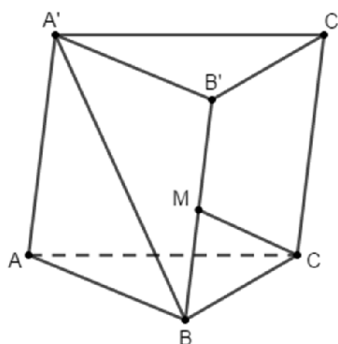
Câu 1. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Hai điểm M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB và AD (M và N không trùng với A) sao cho $2\frac{AB}{AM} + 3\frac{AD}{AN} = 8$. Kí hiệu V, V_1 lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.ABCD$ và $S.MBCDN$. Tìm giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V}$.

- A. $\frac{13}{16}$. B. $\frac{11}{12}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 2. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích là V . Gọi P là trung điểm của SC . Mặt phẳng (α) chứa AP và cắt hai cạnh SD, SB lần lượt tại M và N . Gọi V' là thể tích của khối chóp $S.AMPN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\frac{V'}{V}$.

- A. $\frac{3}{8}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{8}$.

Câu 3. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = 2$, $AC = \sqrt{3}$. Góc $\widehat{CAA'} = 90^\circ$, $\widehat{BAA'} = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh BB' (tham khảo hình vẽ). Biết CM vuông góc với $A'B$, tính thể tích khối lăng trụ đã cho.



- A. $V = \frac{3(1+\sqrt{33})}{8}$. B. $V = \frac{1+\sqrt{33}}{8}$. C. $V = \frac{3(1+\sqrt{33})}{4}$. D. $V = \frac{1+\sqrt{33}}{4}$.

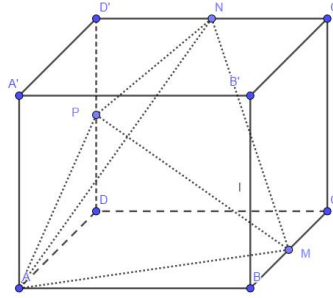
Câu 4. (Chuyên KHTN - 2020) Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C , $AB = 2a$ và góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) bằng 60° . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'C'$ và BC . Mặt phẳng (AMN) chia khối lăng trụ thành hai phần. Thể tích của phần nhỏ bằng

- A. $\frac{7\sqrt{3}a^3}{24}$. B. $\frac{\sqrt{6}a^3}{6}$. C. $\frac{7\sqrt{6}a^3}{24}$. D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 5. (Chuyên KHTN - 2020) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi M, N, P, Q, R, S là tâm các mặt của hình lập phương. Thể tích khối bát diện đều tạo bởi sáu đỉnh M, N, P, Q, R, S bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$ B. $\frac{a^3}{4}$ C. $\frac{a^3}{12}$ D. $\frac{a^3}{6}$

Câu 6. (Chuyên Lam Sơn - 2020) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $BC, C'D', DD'$ (tham khảo hình vẽ). Biết thể tích khối hộp bằng 144, thể tích khối tứ diện $AMNP$ bằng



- A. 15. B. 24. C. 20. D. 18.

Câu 7. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020) Cho khối chóp $S.ABCD$ có chiều cao bằng 9 và đáy là hình bình hành có diện tích bằng 10. Gọi M, N, P và Q lần lượt là trọng tâm của các mặt bên SAB, SBC, SCD và SDA . Thể tích của khối đa diện lồi có đỉnh là các điểm M, N, P, Q, B và D là

- A. 9. B. $\frac{50}{9}$. C. 30. D. $\frac{25}{3}$.

Câu 8. (Chuyên Lương Văn Tỵ - Ninh Bình - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 3, chiều cao bằng 8. Gọi M là trung điểm SB , N là điểm thuộc SD sao cho $\overline{SN} = 2\overline{ND}$. Thể tích của tứ diện $ACMN$ bằng

- A. $V = 9$. B. $V = 6$. C. $V = 18$. D. $V = 3$.

Câu 9. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = 2$, đáy $ABCD$ là hình thoi với ABC là tam giác đều cạnh 4. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $B'C', C'D', DD'$ và Q thuộc cạnh BC sao cho $QC = 3QB$. Tính thể tích tứ diện $MNPQ$.

- A. $3\sqrt{3}$. B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 10. (Chuyên Bắc Ninh - 2020) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA = 2$. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của cạnh SA, SC . Thể tích khối chóp $S.ABC$ biết $BD \perp AE$.

- A. $\frac{4\sqrt{21}}{7}$. B. $\frac{4\sqrt{21}}{3}$. C. $\frac{4\sqrt{21}}{9}$. D. $\frac{4\sqrt{21}}{27}$.

Câu 11. (Chuyên Bắc Ninh - 2020) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là tâm các hình vuông $ABB'A', A'B'C'D', ADD'A'$ và $CDD'C'$. Tính thể tích $MNPR$ với R là trung điểm BQ .

- A. $\frac{\sqrt{3}}{12}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{24}$. C. $\frac{1}{12}$. D. $\frac{1}{24}$.

Câu 12. (Chuyên Bến Tre - 2020) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng $2a$. Biết $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = 120^\circ$. Tính thể tích V của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

- A. $4\sqrt{2}a^3$. B. $2\sqrt{2}a^3$. C. $8a^3$. D. $\sqrt{2}a^3$.

Câu 13. (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$, mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) , cạnh $SB = SC = 1$, $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60^\circ$. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh SA, SB sao cho $SA = xSM$ ($x > 0$), $SB = 2SN$. Giá trị của x bằng bao nhiêu để thể tích khối tứ diện $SCMN$ bằng $\frac{\sqrt{2}}{32}$

A. $\frac{5}{2}$.

B. 2.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Câu 14. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh A , $AB = a\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm của BC , hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IH}$, góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{5}}{2}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{5}}{6}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{15}}{12}$.

Câu 15. (Chuyên Lào Cai - 2020) Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi S là điểm đối xứng của A qua BC' . Thể tích khối đa diện $ABCSB'C'$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

B. $a^3\sqrt{3}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 16. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh bằng a và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi I, J lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A', CDD'C'$. Biết $AI = \frac{a\sqrt{7}}{2}$, $AA' = 2a$ và góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A'), (A'B'C'D')$ bằng 60° . Tính theo a thể tích khối tứ diện $AOIJ$.

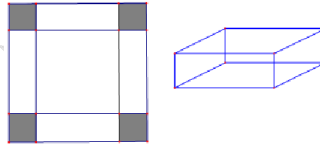
A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{64}$.

B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{48}$.

C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{32}$.

D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{192}$.

Câu 17. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020) Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp (tham khảo hình vẽ bên). Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất (giả thiết bề dày tấm tôn không đáng kể).



A. $x = 2$.

B. $x = 3$.

C. $x = 4$.

D. $x = 6$.

Câu 18. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng 1. Mặt phẳng (Q) thay đổi song song với mặt phẳng (ABC) lần lượt cắt các cạnh SA, SB, SC tại M, N, P . Qua M, N, P kẻ các đường thẳng song song với nhau lần lượt cắt mặt phẳng (ABC) tại M', N', P' . Tính giá trị lớn nhất của thể tích khối lăng trụ $MNP.M'N'P'$

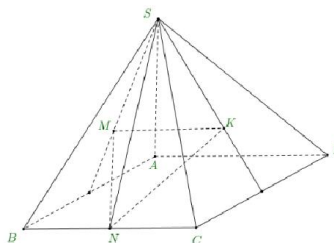
A. $\frac{4}{9}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{8}{27}$.

Câu 19. (Chuyên Quang Trung - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = a$. M, K tương ứng là trọng tâm tam giác SAB, SCD ; N là trung điểm BC . Thể tích khối tứ diện $SMNK$ bằng $\frac{m}{n} \cdot a^3$ với $m, n \in \mathbb{N}, (m, n) = 1$. Giá trị $m + n$ bằng:



A. 28.

B. 12.

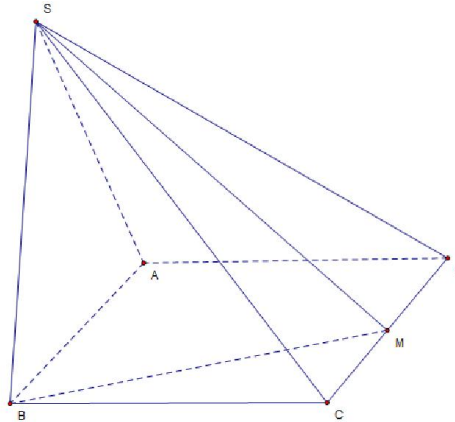
C. 19.

D. 32.

Câu 20. (Chuyên Quang Trung - 2020) Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi có cạnh $4a$, $A'A = 8a$, $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm cạnh $AB', B'C, BD'$. Thể tích khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, K là:

- A. $12\sqrt{3}a^3$ B. $\frac{28\sqrt{3}}{3}a^3$ C. $16\sqrt{3}a^3$ D. $\frac{40\sqrt{3}}{3}a^3$

Câu 21. (Chuyên Quang Trung - 2020) Cho hình chóp tứ giác $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của cạnh CD . Biết khoảng cách từ A đến (SBM) là $2a\sqrt{\frac{3}{19}}$. Thể tích khối chóp $SABCD$ bằng



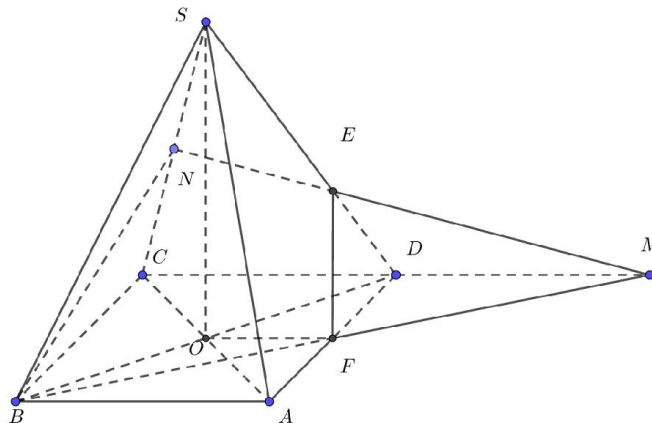
- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$ B. $\sqrt{3}a^3$ C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$ D. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{18}$

Câu 22. (Chuyên Quang Trung - 2020) Cho số $a > 0$. Trong số các tam giác vuông có tổng một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng a , tam giác có diện tích lớn nhất bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}a^2$ B. $\frac{\sqrt{3}}{6}a^2$ C. $\frac{\sqrt{3}}{9}a^2$ D. $\frac{\sqrt{3}}{18}a^2$

Câu 23. (Chuyên Sơn La - 2020) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên hợp với đáy một góc 60° . Gọi M là điểm đối xứng của C qua D , N là trung điểm SC . Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần (như hình vẽ bên). Tỉ số thể tích giữa hai phần

$\frac{V_{SABFEN}}{V_{BFDCNE}}$ bằng



- A. $\frac{7}{5}$ B. $\frac{7}{6}$ C. $\frac{7}{3}$ D. $\frac{7}{4}$

- Câu 24. (Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=3$. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD tại M, N, P . Tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$
- A. $\frac{32\pi}{3}$. B. $\frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$. C. $\frac{108\pi}{3}$. D. $\frac{125\pi}{6}$.
- Câu 25. (Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , cạnh $BC=2a$ và $\widehat{ABC}=60^\circ$. Biết tứ giác $BCC'B'$ là hình thoi có $\widehat{B'BC}$ nhọn. Mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC) và mặt phẳng $(ABB'A')$ tạo với (ABC) góc 45° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng
- A. $\frac{\sqrt{7}a^3}{7}$. B. $\frac{3\sqrt{7}a^3}{7}$. C. $\frac{6\sqrt{7}a^3}{7}$. D. $\frac{\sqrt{7}a^3}{21}$.
- Câu 26. (Chuyên Thái Nguyên - 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh B , $AB=4$, $SA=SB=SC=12$. Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của AC, BC, AB . Trên cạnh SB lấy điểm F sao cho $\frac{BF}{BS}=\frac{2}{3}$. Thể tích khối tứ diện $MNEF$ bằng
- A. $\frac{8\sqrt{34}}{3}$. B. $\frac{4\sqrt{34}}{3}$. C. $\frac{8\sqrt{34}}{9}$. D. $\frac{16\sqrt{34}}{9}$.
- Câu 27. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại A lấy điểm S di động không trùng với A . Hình chiếu vuông góc của A lên SB, SD lần lượt tại H, K . Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ACHK$.
- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{32}$. B. $\frac{a^3}{6}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.
- Câu 28. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy góc 30° và tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 8. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.
- A. $64\sqrt{3}$. B. $2\sqrt{3}$. C. $16\sqrt{3}$. D. $8\sqrt{3}$.
- Câu 29. (Đại Học Hà Tĩnh - 2020)** Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V . Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 là trọng tâm của bốn mặt của tứ diện $ABCD$. Thể tích khối tứ diện $G_1G_2G_3G_4$ là:
- A. $\frac{V}{12}$. B. $\frac{V}{4}$. C. $\frac{V}{27}$. D. $\frac{V}{18}$.
- Câu 30. (ĐHQG Hà Nội - 2020)** Hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có đáy $AB=a$. Trên BB' lấy M sao cho $B'M=2BM$. Cho biết $A'M \perp B'C$. Tìm thể tích của lăng trụ đều.
- A. $\frac{3\sqrt{3}}{16}a^2$. B. $\frac{3\sqrt{3}}{8}a^3$. C. $\frac{3}{8}a^3$. D. $\frac{3}{4}a^3$.
- Câu 31. (Sở Hưng Yên - 2020)** Khối chóp có đáy là hình bình hành, một cạnh đáy bằng a và các cạnh bên đều bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp có giá trị lớn nhất là
- A. $2\sqrt{6}a^3$. B. $8a^3$. C. $\frac{2\sqrt{6}}{3}a^3$. D. $\frac{7a^3}{12}$.
- Câu 32. (Sở Phú Thọ - 2020)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB=a$, $BC=2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh H của cạnh AC . Góc giữa hai mặt phẳng $(BCB'C')$ và (ABC) bằng 60° . Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng:

A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$. B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. C. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Câu 33. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng φ , với $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. B. $a^3\sqrt{2}$. C. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. D. $\frac{2a^3}{3}$.

Câu 34. (Sở Hà Tĩnh - 2020) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V . Gọi M là điểm thuộc cạnh BB' sao cho $BM = 2MB'$. Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AC' cắt các cạnh DD', DC, BC lần lượt tại N, P, Q . Gọi V_1 là thể tích khối đa diện $CPQMNC'$. Tính tỷ số $\frac{V_1}{V}$

A. $\frac{31}{162}$. B. $\frac{35}{162}$. C. $\frac{34}{162}$. D. $\frac{13}{162}$.

Câu 35. (Sở Ninh Bình) Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{6}$, $AD = \sqrt{3}$, $A'C = 3$ và mặt phẳng $(AA'C'C)$ vuông góc với mặt đáy. Biết hai mặt phẳng $(AA'C'C)$, $(AA'B'B)$ tạo với nhau góc α có $\tan \alpha = \frac{3}{4}$. Thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. $V = 12$. B. $V = 6$. C. $V = 8$. D. $V = 10$.

Câu 36. (Sở Bắc Ninh - 2020) Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 18. Gọi A_1 là trọng tâm của tam giác BCD ; (P) là mặt phẳng qua A sao cho góc giữa (P) và mặt phẳng (BCD) bằng 60° . Các đường thẳng qua $B; C; D$ song song với AA_1 cắt (P) lần lượt tại $B_1; C_1; D_1$. Thể tích khối tứ diện $A_1B_1C_1D_1$ bằng?

A. $12\sqrt{3}$ B. 18 C. $9\sqrt{3}$ D. 12

Câu 37. (Sở Bình Phước - 2020) Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Xét điểm M thay đổi trên mặt phẳng (SCD) sao cho tổng $Q = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 + MS^2$ nhỏ nhất. Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và V_2 là thể tích của khối chóp $M.ACD$. Tỷ số $\frac{V_2}{V_1}$ bằng

A. $\frac{11}{140}$. B. $\frac{22}{35}$. C. $\frac{11}{70}$. D. $\frac{11}{35}$.

Câu 38. (Sở Yên Bái - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh $3a$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$, góc giữa (SAB) và (SCB) bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{3\sqrt{2}a^3}{8}$. B. $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}a^3}{24}$. D. $\frac{9\sqrt{2}a^3}{8}$.

Câu 39. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $\widehat{ABC} = 30^\circ$, $BC = a$, hai mặt phẳng (SAB) , (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy, mặt bên (SBC) tạo với đáy góc 45° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{a^3}{64}$. B. $\frac{a^3}{16}$. C. $\frac{a^3}{9}$. D. $\frac{a^3}{32}$.

Câu 40. (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , cạnh $BC = 2a$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Biết tứ giác $BCC'B'$ là hình thoi có $\widehat{B'BC}$ nhọn. Biết $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC) và $(ABB'A')$ tạo với (ABC) góc 45° . Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

- A. $\frac{a^3}{\sqrt{7}}$. B. $\frac{3a^3}{\sqrt{7}}$. C. $\frac{6a^3}{\sqrt{7}}$. D. $\frac{a^3}{3\sqrt{7}}$.

Câu 41. (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên tạo với đường cao một góc 30° , O là trọng tâm tam giác ABC . Một hình chóp đều thứ hai $O.A'B'C'$ có S là tâm của tam giác $A'B'C'$ và cạnh bên của hình chóp $O.A'B'C'$ tạo với đường cao một góc 60° sao cho mỗi cạnh bên SA, SB, SC lần lượt cắt các cạnh bên OA', OB', OC' . Gọi V_1 là phần thể tích phần chung của hai khối chóp $S.ABC$ và $O.A'B'C'$, V_2 là thể tích khối chóp $S.ABC$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:

- A. $\frac{9}{16}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{27}{64}$. D. $\frac{9}{64}$.

Câu 42. (Kim Liên - Hà Nội - 2020) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a , tâm của đáy là O . Gọi M, N tương ứng là trung điểm các cạnh SA, SC . Gọi E là giao điểm của SD và mặt phẳng (BMN) . Tính thể tích V của khối chóp $O.BMEN$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{18}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

Câu 43. (Kim Liên - Hà Nội - 2020) Cho khối tứ diện $ABCD$ có cạnh AC, BD thỏa mãn $AC^2 + BD^2 = 16$ và các cạnh còn lại đều bằng 6. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất bằng

- A. $\frac{32\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{16\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{32\sqrt{3}}{3}$.

Câu 44. (Lê Lai - Thanh Hóa - 2020) Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a . Mặt bên tạo với đáy góc 60° . Mặt phẳng (P) chứa AB và tạo với đáy góc 30° và cắt SC, SD lần lượt tại M và N . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABMN$ theo a .

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $V = \frac{5a^3\sqrt{3}}{48}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Câu 45. (Liên trường Nghệ An - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$, đáy là tam giác ABC có $AB = BC\sqrt{5}$, $AC = 2BC\sqrt{2}$, hình chiếu của S lên (ABC) là trung điểm O của cạnh AC . Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng 2. Mặt phẳng (SBC) hợp với mặt phẳng (ABC) một góc α thay đổi. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{\sqrt{a}}{b}$, trong đó $a, b \in \mathbb{N}^*$, a là số nguyên tố.

Tổng $a + b$ bằng

- A. 8. B. 7. C. 6. D. 5.

Câu 46. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020) Xét khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) , tính $\cos \alpha$ để thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất.

- A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. C. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 47. (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có chiều cao 8 và diện tích đáy bằng 11. Gọi M là trung điểm của AA' , N là điểm trên cạnh BB' sao cho $BN = 3B'N$ và P là

điểm trên cạnh CC' sao cho $6CP = 5C'P$. Mặt phẳng (MNP) cắt cạnh DD' tại Q . Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, D, M, N, P và Q bằng

- A. $\frac{88}{3}$. B. 42. C. 44. D. $\frac{220}{3}$.

- Câu 48. (Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, mặt bên (SAB) là một tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ và có diện tích bằng $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ (đvdt). Một mặt phẳng đi qua trọng tâm tam giác SAB và song song với mặt đáy $(ABCD)$ chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần, tính thể tích V của phần chứa điểm S .
- A. $V = 8$. B. $V = 24$. C. $V = 36$. D. $V = 12$.

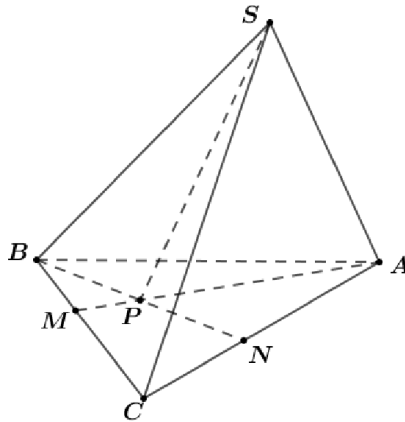
- Câu 49. (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020)** Cho hai hình chóp tam giác đều có cùng chiều cao. Biết đỉnh của hình chóp này trùng với tâm của đáy hình chóp kia, mỗi cạnh bên của hình chóp này đều cắt một cạnh bên của hình chóp kia. Cạnh bên có độ dài bằng a của hình chóp thứ nhất tạo với đường cao một góc 30° , cạnh bên của hình chóp thứ hai tạo với đường cao một góc 45° . Tính thể tích phần chung của hai hình chóp đã cho?

- A. $\frac{3(2-\sqrt{3})a^3}{64}$. B. $\frac{(2-\sqrt{3})a^3}{32}$. C. $\frac{9(2-\sqrt{3})a^3}{64}$. D. $\frac{27(2-\sqrt{3})a^3}{64}$.

- Câu 50. (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = y$ ($y > 0$) và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Trên cạnh AD lấy điểm M và đặt $AM = x$ ($0 < x < a$). Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp $S.ABCM$, biết $x^2 + y^2 = a^2$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{5}$.

- Câu 51. (Hải Hậu - Nam Định - 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ với các điểm M, N thứ tự nằm trên các cạnh BC, AC (khác A, B, C) và P là giao điểm của AM và BN (hình vẽ minh họa).



Biết thể tích các khối chóp $SABP$, $SAPN$, $SCNP$ thứ tự là 30, 20, 10. Thể tích khối chóp $S.ABC$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(72; 75]$. B. $[65; 69]$. C. $(69; 72]$. D. $(75; 78]$.

- Câu 52. (Kim Thành - Hải Dương - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi K là trung điểm SC . Mặt phẳng chứa AK cắt các cạnh SB , SD lần lượt tại M và N . Gọi V_1 , V theo thứ tự là thể tích khối chóp $S.AMKN$ và khối chóp $S.ABCD$. Giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V}$ bằng

- A. $\frac{3}{8}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

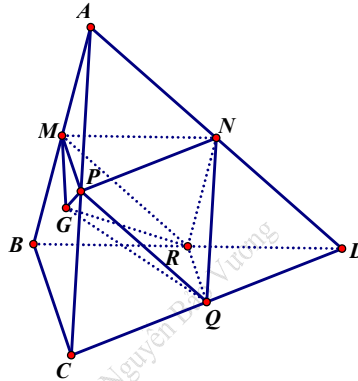
Câu 53. (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có diện tích bằng $12a^2$; khoảng cách từ S tới mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $4a$. Gọi L là trọng tâm tam giác ACD ; gọi T và V lần lượt là trung điểm các cạnh SB và SC . Mặt phẳng (LTV) chia hình chóp thành hai khối đa diện, hãy tính thể tích của khối đa diện chứa đỉnh S .

- A. $\frac{20a^3}{3}$. B. $8a^3$. C. $\frac{28a^3}{3}$. D. $\frac{32a^3}{3}$.

Câu 54. (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có thể tích bằng 1. Gọi M là trung điểm của SA và N là điểm đối xứng của A qua D . Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp thành hai khối đa diện. Gọi (H) là khối đa diện có chứa đỉnh. Thể tích của khối đa diện (H) bằng

- A. $\frac{7}{12}$. B. $\frac{4}{7}$. C. $\frac{5}{12}$. D. $\frac{3}{7}$.

Câu 55. (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020) Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V . Gọi M, N, P, Q, R lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, AC, DC, BD và G là trọng tâm tam giác ABC (như hình vẽ). Tính thể tích khối đa diện lồi $MNPQRG$ theo V .



- A. $\frac{V}{2}$. B. $\frac{V}{6}$. C. $\frac{V}{3}$. D. $\frac{2V}{5}$.

Câu 56. (Trần Phú - Quảng Ninh - 2020) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 6. Gọi M, N và P là các điểm nằm trên cạnh $A'B', B'C'$ và BC sao cho M là trung điểm của $A'B'$, $B'N = \frac{3}{4}B'C'$ và

$BP = \frac{1}{4}BC$. Đường thẳng NP cắt đường thẳng BB' tại E và đường thẳng EM cắt đường thẳng AB tại Q . Thể tích của khối đa diện lồi $AQPCA'MNC'$ bằng

- A. $\frac{23}{3}$. B. $\frac{23}{6}$. C. $\frac{59}{12}$. D. $\frac{19}{6}$.

----- HẾT -----

Câu 1. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Hai điểm M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB và AD (M và N không trùng với A) sao cho $2\frac{AB}{AM} + 3\frac{AD}{AN} = 8$. Kí hiệu V, V_1 lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.ABCD$ và $S.MBCDN$. Tìm giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V}$.

A. $\frac{13}{16}$.

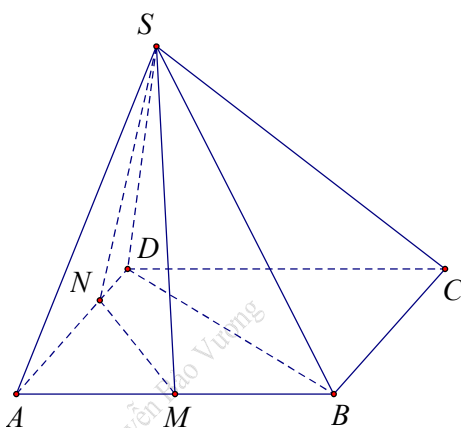
B. $\frac{11}{12}$.

C. $\frac{1}{6}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\frac{V_{SADB}}{V_{SANM}} = \frac{AD}{AN} \cdot \frac{AB}{AM} \Leftrightarrow \frac{2 \cdot V_{SADB}}{V_{SANM}} = 2 \cdot \frac{AD}{AN} \cdot \frac{AB}{AM}$

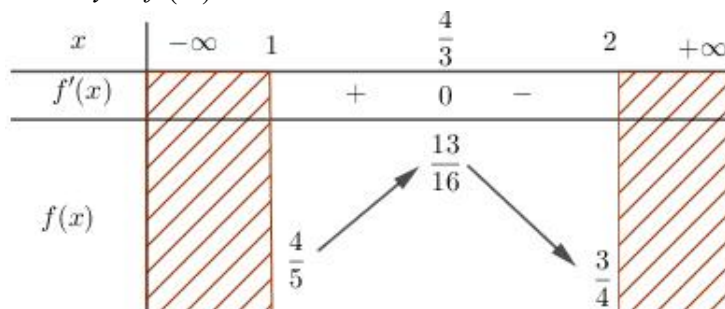
$\Leftrightarrow \frac{V}{V - V_1} = 2 \cdot \frac{AD}{AN} \cdot \frac{AB}{AM} \Leftrightarrow \frac{V - V_1}{V} = \frac{1}{2 \cdot \frac{AD}{AN} \cdot \frac{AB}{AM}} \Leftrightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{2 \cdot \frac{AD}{AN} \cdot \frac{AB}{AM} - 1}{2 \cdot \frac{AD}{AN} \cdot \frac{AB}{AM}}$

Đặt $x = \frac{AD}{AN} \Rightarrow 2 \cdot \frac{AB}{AM} = 8 - 3x, (1 \leq x \leq 2)$. Khi đó $\frac{V_1}{V} = \frac{x(8 - 3x) - 1}{x(8 - 3x)} = 1 + \frac{1}{3x^2 - 8x}$

Đặt $f(x) = 1 + \frac{1}{3x^2 - 8x}, (1 \leq x \leq 2)$

Ta có: $f'(x) = -\frac{6x - 8}{(3x^2 - 8x)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{6x - 8}{(3x^2 - 8x)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \Rightarrow f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{13}{16}$

Bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$



Dựa vào bảng biến thiên ta được hàm số đạt giá trị lớn nhất là $\frac{13}{16}$ tại $x = \frac{4}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V}$ là $\frac{13}{16}$.

Câu 2. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích là V . Gọi P là trung điểm của SC . Mặt phẳng (α) chứa AP và cắt hai cạnh SD , SB lần lượt tại M và N . Gọi V' là thể tích của khối chóp $S.AMPN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\frac{V'}{V}$.

A. $\frac{3}{8}$.

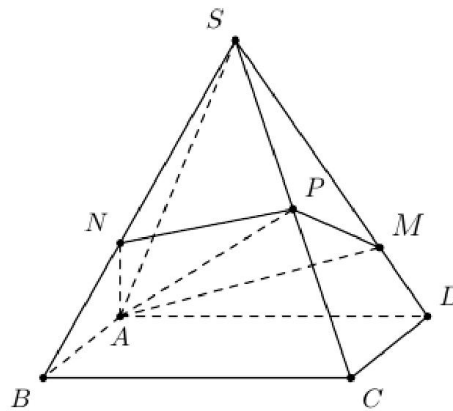
B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Do (α) đi qua A, P, M, N nên bốn điểm này đồng phẳng.

Áp dụng công thức $\frac{V_{S.AMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4.a.b.c.d}$ với $\frac{SA}{SA} = a, \frac{SC}{SP} = c, \frac{SD}{SM} = d, \frac{SB}{SN} = b$ thỏa mãn $a+c=b+d$.

Theo đề bài ta có: $\frac{SA}{SA} = 1, \frac{SC}{SP} = 2$ và đặt $\frac{SD}{SM} = d > 0, \frac{SB}{SN} = b > 0$.

Khi đó: $\frac{V'}{V} = \frac{1+2+b+d}{4.1.2.b.d}$ với $1+2=b+d \Leftrightarrow b+d=3$.

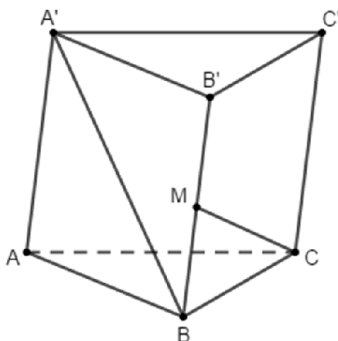
Vậy ta có: $\frac{V'}{V} = \frac{1+2+b+d}{4.1.2.b.d} \Leftrightarrow \frac{V'}{V} = \frac{1+2+3}{4.2.b.d} \Leftrightarrow \frac{V'}{V} = \frac{3}{4bd}$.

Theo bất đẳng thức cơ bản: $bd \leq \frac{(b+d)^2}{4} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{bd} \geq \frac{4}{9}$ suy ra $\frac{V'}{V} = \frac{3}{4bd} \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{3}$.

Dấu “=” xảy ra $b=d \Leftrightarrow b=d=\frac{3}{2}$.

Vậy $\frac{V'}{V}$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{3}$.

Câu 3. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB=2$, $AC=\sqrt{3}$. Góc $\widehat{CAA'}=90^\circ$, $\widehat{BAA'}=120^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh BB' (tham khảo hình vẽ). Biết CM vuông góc với $A'B$, tính thể tích khối lăng trụ đã cho.



A. $V = \frac{3(1+\sqrt{33})}{8}$.

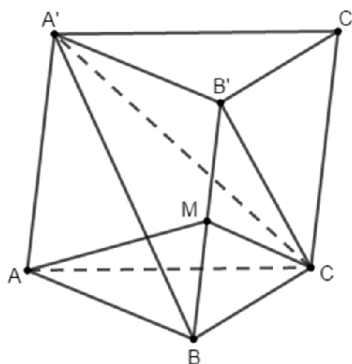
B. $V = \frac{1+\sqrt{33}}{8}$.

C. $V = \frac{3(1+\sqrt{33})}{4}$.

D. $V = \frac{1+\sqrt{33}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Do $AC \perp AB$, $AC \perp AA'$ nên $AC \perp (ABB'A')$. Mà $A'B \subset (ABB'A')$ nên $AC \perp A'B$.

Có $A'B \perp AC$, $A'B \perp CM$ nên $A'B \perp (AMC) \Rightarrow A'B \perp AM$.

Đặt $AA' = x$ ($x > 0$). Ta có $\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{AM} &= (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'}) \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} \right) = AB^2 - \frac{1}{2}AA'^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'} \\ &= AB^2 - \frac{1}{2}AA'^2 - \frac{1}{2}AB \cdot AA' \cdot \cos \widehat{BAA'} = 2^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x \cdot \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 4 \end{aligned}$$

$$\text{Do } A'B \perp AM \text{ nên } \overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{33}}{2}.$$

$$\text{Lại có } S_{ABB'A'} = AB \cdot AA' \cdot \sin \widehat{BAA'} = 2 \cdot \frac{1+\sqrt{33}}{2} \cdot \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{33})}{2} \text{ (đvdt)}.$$

$$\text{Do } AC \perp (ABB'A') \text{ nên } V_{C.ABB'A'} = \frac{1}{3} \cdot AC \cdot S_{ABB'A'} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{33})}{2} = \frac{1+\sqrt{33}}{2} \text{ (đvtt)}.$$

$$\text{Mà } V_{C.A'B'C'} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow V_{C.ABB'A'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{C.A'B'C'} = \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{2} V_{C.ABB'A'} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{33}}{2} = \frac{3(1+\sqrt{33})}{4} \text{ (đvtt)}.$$

Câu 4. (Chuyên KHTN - 2020) Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C , $AB = 2a$ và góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) bằng 60° . Gọi M, N lần

lượt là trung điểm của $A'C'$ và BC . Mặt phẳng (AMN) chia khối lăng trụ thành hai phần. Thể tích của phần nhỏ bằng

A. $\frac{7\sqrt{3}a^3}{24}$.

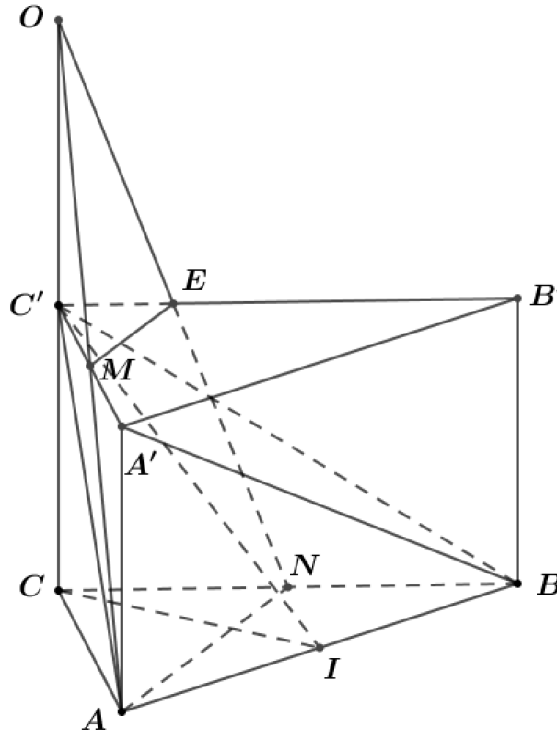
B. $\frac{\sqrt{6}a^3}{6}$.

C. $\frac{7\sqrt{6}a^3}{24}$.

D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm AB , suy ra $AB \perp (CIC')$ nên góc giữa $(C'AB)$ và (ABC) là góc $(CI, C'I)$, suy ra $\widehat{C'IC} = 60^\circ$.

Tam giác $C'IC$ vuông tại C nên $C'C = CI \cdot \tan \widehat{C'IC} = \frac{AB}{2} \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CI = a^2$.

Thể tích khối lăng trụ là $V = CC' \cdot S_{ABC} = a\sqrt{3} \cdot a^2 = a^3\sqrt{3}$.

Trong $(ACC'A')$, kéo dài AM cắt CC' tại O .

Suy ra $C'M$ là đường trung bình của $\triangle OAC$, do đó $OC = 2CC' = 2a\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp $V_{O.ACN} = \frac{1}{3} \cdot S_{ACN} \cdot OC = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot S_{ABC} \cdot 2CC' = \frac{1}{3}V$.

Thể tích khối chóp $V_{O.C'ME} = \frac{1}{3} \cdot S_{C'ME} \cdot OC' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} S_{A'B'C'} \cdot OC' = \frac{1}{24}V$.

Do đó $V_{C'EM.CAN} = V_{O.ACN} - V_{O.C'ME} = \frac{1}{3}V - \frac{1}{24}V = \frac{7}{24}V = \frac{7}{24} \cdot a^3\sqrt{3} = \frac{7\sqrt{3}a^3}{24}$.

Vậy phần thể tích nhỏ hơn là $V_{C'EM.CAN} = \frac{7\sqrt{3}a^3}{24}$.

Câu 5. (Chuyên KHTN - 2020) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi M, N, P, Q, R, S là tâm các mặt của hình lập phương. Thể tích khối bát diện đều tạo bởi sáu đỉnh M, N, P, Q, R, S bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$

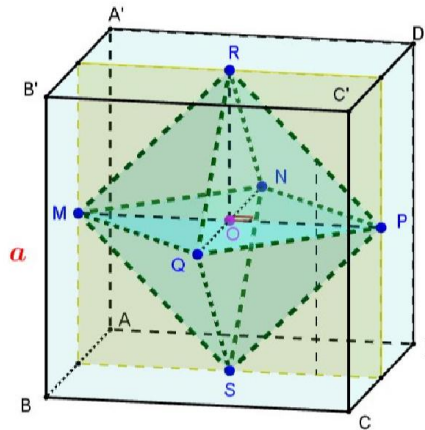
B. $\frac{a^3}{4}$

C. $\frac{a^3}{12}$

D. $\frac{a^3}{6}$

Lời giải

Chọn D



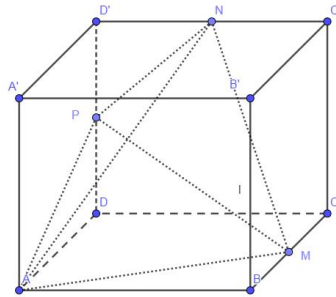
Ta có: dễ thấy $MNPQRS$ là bát giác đều nên $V = V_{R.MNPQ} + V_{S.MNPQ} = 2V_{R.MNPQ}$

Dễ thấy: $RO = \frac{a}{2}$

Lại có hình chóp đều $R.MNPQ$ có tất cả các cạnh bằng nhau nên: $MR = OR\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow 2V_{R.MNPQ} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot MN^2 \cdot OR = \frac{a^3}{6}$$

Câu 6. (Chuyên Lam Sơn - 2020) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $BC, C'D', DD'$ (tham khảo hình vẽ). Biết thể tích khối hộp bằng 144, thể tích khối tứ diện $AMNP$ bằng



A. 15.

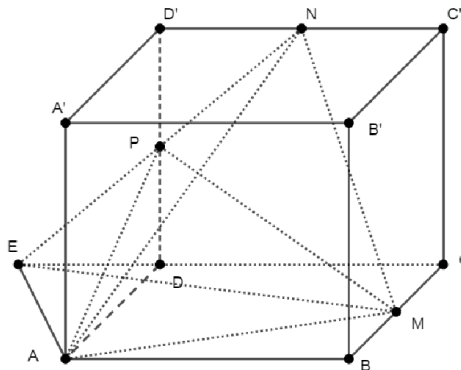
B. 24.

C. 20.

D. 18.

Lời giải

Chọn A



$NP \cap CD = E$. Đặt $DC = 2d$, $BC = 2r$.

$$S_{EMA} = S_{ECBA} - S_{EMC} - S_{ABM} = 5dr - \frac{3}{2}dr - dr = \frac{5}{2}dr.$$

$$V_{NEAM} = \frac{1}{3}S_{EMA} \cdot d(N, (EMA)) = \frac{1}{3}S_{EMA} \cdot CC' = \frac{5}{24} \cdot 4dr \cdot CC' = \frac{5}{24}V_{ABCD.A'B'C'D'} = 30.$$

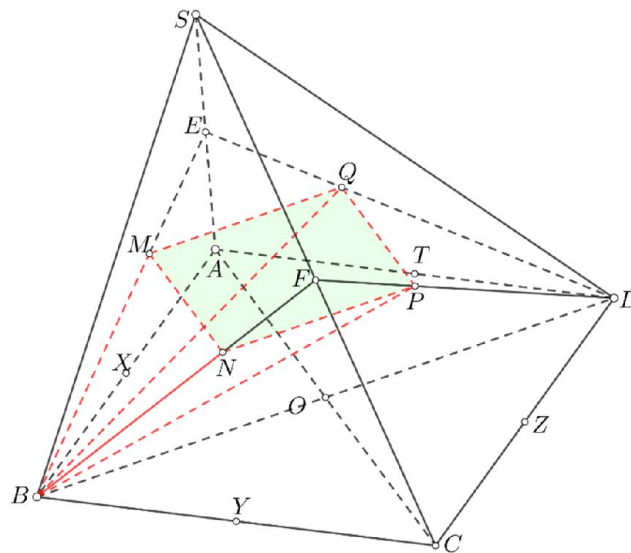
$$V_{NPAM} = \frac{1}{2}V_{NEAM} = 15.$$

Câu 7. (**Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020**) Cho khối chóp $S.ABCD$ có chiều cao bằng 9 và đáy là hình bình hành có diện tích bằng 10. Gọi M, N, P và Q lần lượt là trọng tâm của các mặt bên SAB, SBC, SCD và SDA . Thể tích của khối đa diện lồi có đỉnh là các điểm M, N, P, Q, B và D là

- A. 9. B. $\frac{50}{9}$. C. 30. D. $\frac{25}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Theo tính chất trọng tâm của tam giác, ta có các đường thẳng BM, DQ, SA đồng quy tại trung điểm E của SA . Tương tự, các đường thẳng BN, DP, SC đồng quy tại trung điểm F của SC .

Ta phân chia khối đa diện lồi có đỉnh là các điểm M, N, P, Q, B và D thành khối chóp $B.MNPQ$ và khối tứ diện $BDPQ$.

Cũng theo tính chất trọng tâm, ta có mặt phẳng $(MNPQ)$ song song với mặt phẳng $(ABCD)$

và $S_{MNPQ} = \frac{4}{9}S_{XYZT} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{2}{9}S_{ABCD}$ (trong đó X, Y, Z, T lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA).

Hơn nữa,

$$d[B, (MNPQ)] = d[X, (MNPQ)] = \frac{1}{2}d[S, (MNPQ)] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}d[S, (ABCD)] = \frac{1}{3}d[S, (ABCD)].$$

$$\text{Do đó, } V_{B.MNPQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9}V_{S.ABCD} = \frac{2}{27}V_{S.ABCD} \quad (1).$$

Lại có

$$\begin{aligned}
V_{BDPQ} &= \frac{4}{9} V_{BDEF} \left(\text{do } S_{DPQ} = \frac{4}{9} S_{DEF} \right) \\
&= \frac{4}{9} \cdot 2V_{ODEF} \left(\text{do } d[B, (DEF)] = 2d[O, (DEF)] \right) \\
&= \frac{4}{9} \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} V_{SACD} \left(\text{do } S_{OEF} = \frac{1}{4} S_{SAC} \right) \\
&= \frac{4}{9} \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{1}{9} V_{S.ABCD} \quad (2)
\end{aligned}$$

trong đó, O là tâm của hình bình hành $ABCD$.

Từ (1) và (2), ta được $V_{MNPQBD} = \left(\frac{2}{27} + \frac{1}{9} \right) V_{S.ABCD} = \left(\frac{2}{27} + \frac{1}{9} \right) \cdot \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 10 = \frac{50}{9}$ (đvtt).

Câu 8. (Chuyên Lương Văn Ty - Ninh Bình - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 3, chiều cao bằng 8. Gọi M là trung điểm SB , N là điểm thuộc SD sao cho $\overline{SN} = 2\overline{ND}$. Thể tích của tứ diện $ACMN$ bằng

A. $V = 9$.

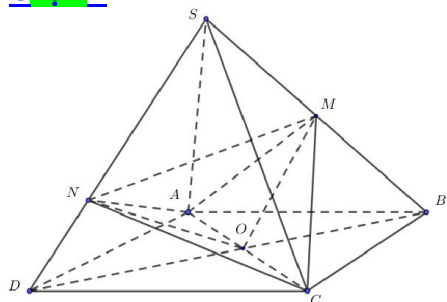
B. $V = 6$.

C. $V = 18$.

D. $V = 3$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $S_{ABCD} = 9 \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 8 = 24$.

$\Rightarrow V_{S.ABD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = 12; V_{S.ABO} = V_{S.ADO} = 6$.

Vì M là trung điểm SB , N là điểm thuộc cạnh SD sao cho $\overline{SN} = 2\overline{ND} \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{1}{2}, \frac{SN}{SD} = \frac{2}{3}$

$+) \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABD}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{1}{3} V_{S.ABD} = 4$

$+) \frac{V_{M.AOB}}{V_{S.AOB}} = \frac{MB}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{M.AOB} = \frac{1}{2} V_{S.AOB} = 3$

$+) \frac{V_{N.AOD}}{V_{S.AOD}} = \frac{ND}{SD} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{N.AOD} = \frac{1}{3} V_{S.AOD} = 2$

Ta có $V_{C.AMN} = 2V_{O.AMN} = 2(V_{S.ABD} - V_{S.AMN} - V_{M.AOB} - V_{N.AOD})$

Vậy $V_{C.AMN} = 2V_{O.AMN} = 2(12 - 4 - 3 - 2) = 6$.

Câu 9. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = 2$, đáy $ABCD$ là hình thoi với ABC là tam giác đều cạnh 4. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $B'C', C'D', DD'$ và Q thuộc cạnh BC sao cho $QC = 3QB$. Tính thể tích tứ diện $MNPQ$.

A. $3\sqrt{3}$.

B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

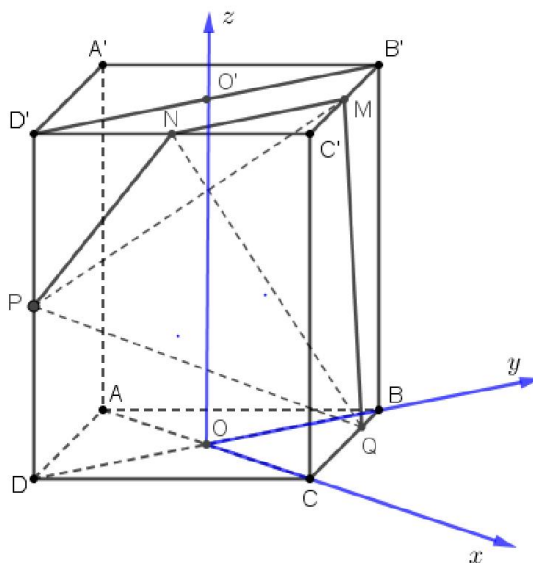
Lời giải

Chọn D

Gọi O và O' lần lượt là tâm đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

$\triangle ABC$ đều cạnh 4, O là trung điểm $BC \Rightarrow OB = 2\sqrt{3}$, $OC = 2$.

Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$, tia Ox trùng tia OC , tia Oy trùng tia OB , tia Oz trùng tia OO' .



Khi đó: $C(2;0;0)$, $B(0;2\sqrt{3};0)$, $B'(0;2\sqrt{3};2)$, $C'(2;0;2)$, $D(0;-2\sqrt{3};0)$, $D'(0;-2\sqrt{3};2)$

M là trung điểm $B'C' \Rightarrow M(1;\sqrt{3};2)$.

N là trung điểm $C'D' \Rightarrow N(1;-\sqrt{3};2)$.

P là trung điểm $DD' \Rightarrow P(0;-2\sqrt{3};1)$.

$$Q \text{ thuộc cạnh } BC \text{ sao cho } QC = 3QB \Rightarrow \overrightarrow{CQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CB} \Rightarrow \begin{cases} x_Q - 2 = \frac{3}{4}(0-2) \\ y_Q - 0 = \frac{3}{4}(2\sqrt{3}-0) \\ z_Q - 0 = \frac{3}{4}(0-0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_Q = \frac{1}{2} \\ y_Q = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ z_Q = 0 \end{cases}$$

Suy ra $Q\left(\frac{1}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}; 0\right)$.

Ta có: $V_{MNPQ} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}] \cdot \overrightarrow{MQ}|$

$$\overrightarrow{MN} = (0; -2\sqrt{3}; 0), \overrightarrow{MP} = (-1; -3\sqrt{3}; -1) \Rightarrow [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}] = (2\sqrt{3}; 0; -2\sqrt{3})$$

$$\overrightarrow{MQ} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; -2\right).$$

$$\Rightarrow V_{MNPQ} = \frac{1}{6} \left| 2\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (-2\sqrt{3}) \cdot (-2) \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 10. (Chuyên Bắc Ninh - 2020) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA = 2$. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của cạnh SA, SC . Thể tích khối chóp $S.ABC$ biết $BD \perp AE$.

A. $\frac{4\sqrt{21}}{7}$.

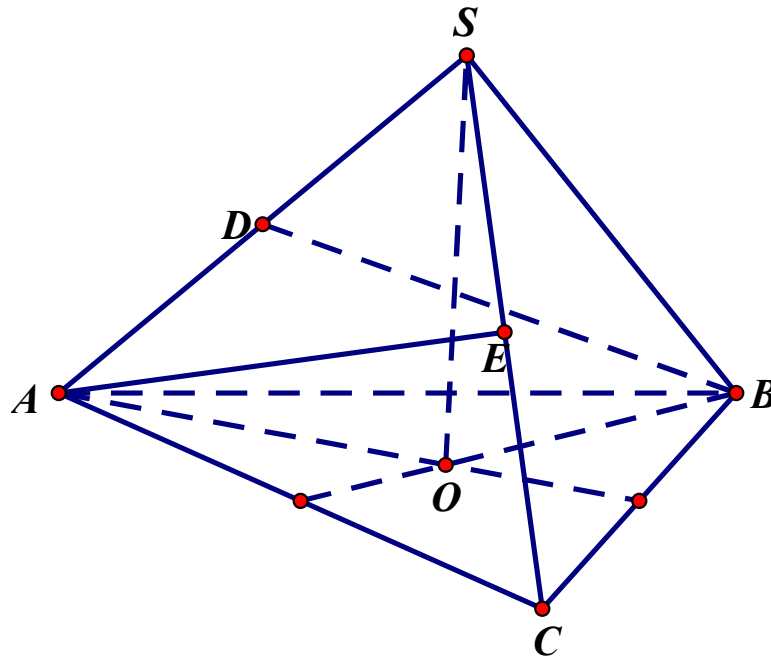
B. $\frac{4\sqrt{21}}{3}$.

C. $\frac{4\sqrt{21}}{9}$.

D. $\frac{4\sqrt{21}}{27}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm tam giác đều ABC . Do $S.ABC$ là hình chóp đều nên ta có $SO \perp (ABC)$.

Ta có $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{SE} - \overrightarrow{SA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}$; $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB}$.

Đặt $\widehat{ASC} = \widehat{BSC} = \widehat{ASB} = \alpha$.

$$BD \perp AE \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} \right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{SA}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha - 2 - 2 \cos \alpha + 4 \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{2}{3}.$$

Áp dụng định lý hàm số cosin trong tam giác SAC , ta có:

$$AC^2 = SA^2 + SC^2 - 2SA \cdot SC \cdot \cos \alpha = \frac{8}{3} \Rightarrow AC = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$$AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}; \quad SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{2\sqrt{7}}{3}.$$

$$\text{Thể tích khối chóp } S.ABC \text{ là } V = \frac{1}{3}SO \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{21}}{27}.$$

Câu 11. (Chuyên Bắc Ninh - 2020) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là tâm các hình vuông $ABB'A', A'B'C'D', ADD'A'$ và $CDD'C'$. Tính thể tích $MNPR$ với R là trung điểm BQ .

A. $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{24}$.

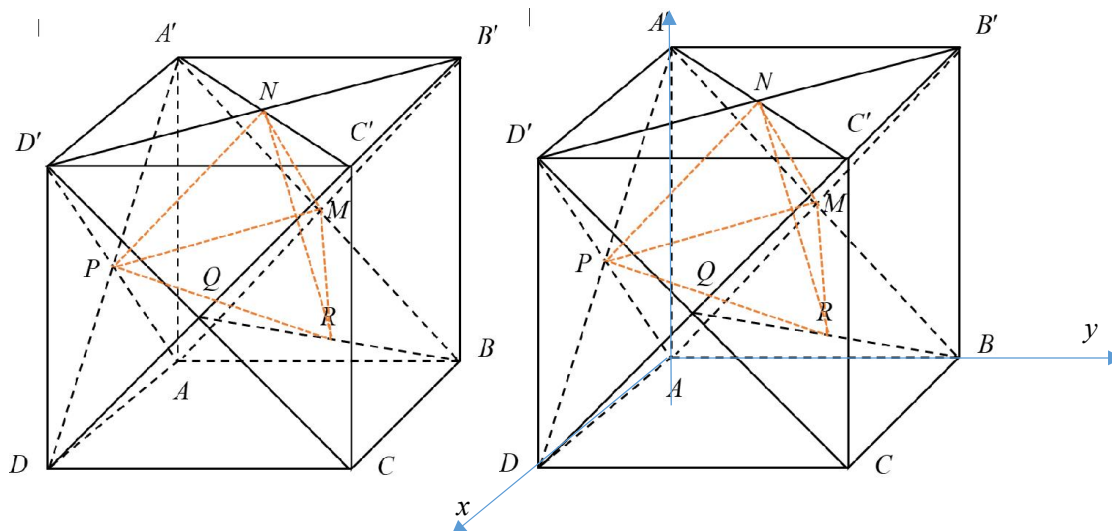
C. $\frac{1}{12}$.

D. $\frac{1}{24}$.

Lời giải

Chọn D

z



Dựng hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ. Tọa độ các điểm trong hình như sau:

$$A(0;0;0); B(0;1;0); C(1;1;0); D(1;0;0)$$

$$A'(0;0;1); B'(0;1;1); C'(1;1;1); D'(1;0;1)$$

$$M\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right); N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right); P\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right); Q\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right); R\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right).$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MN} = \left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right); \overrightarrow{MP} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right); \overrightarrow{MR} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{4}\right).$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}] = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{4}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}] \cdot \overrightarrow{MR} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy } V_{MNP} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}] \cdot \overrightarrow{MR}| = \frac{1}{24}.$$

Câu 12. (Chuyên Bến Tre - 2020) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng $2a$. Biết $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = 120^\circ$. Tính thể tích V của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $4\sqrt{2}a^3$.

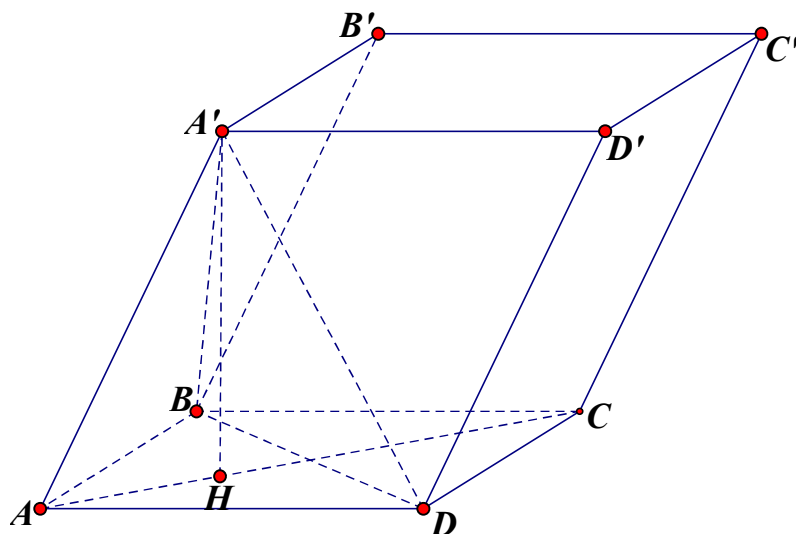
B. $2\sqrt{2}a^3$.

C. $8a^3$.

D. $\sqrt{2}a^3$.

Lời giải

Chọn A



Từ giả thuyết ta có các tam giác $\triangle ABD$, $\triangle A'AD$ và $\triangle A'AB$ là các tam giác đều.

$\Rightarrow A'A = A'B = A'D$ nên hình chiếu H của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABD .

$$\Rightarrow AH = \frac{2}{3} \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$$

$$\Rightarrow A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}a.$$

$$\text{Thể tích của khối hộp } ABCD.A'B'C'D' : V = A'H \cdot S_{ABCD} = \frac{2\sqrt{6}}{3}a \cdot 2 \cdot \frac{4a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{2}a^3.$$

Câu 13. (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$, mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) , cạnh $SB = SC = 1$, $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60^\circ$. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh SA, SB sao cho $SA = xSM$ ($x > 0$), $SB = 2SN$. Giá trị của x bằng bao nhiêu để thể tích khối tứ diện $SCMN$ bằng $\frac{\sqrt{2}}{32}$

A. $\frac{5}{2}$.

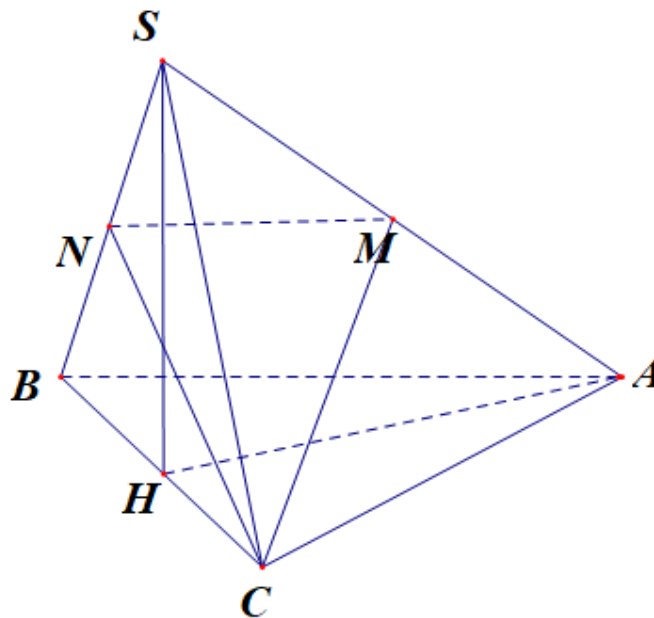
B. 2.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Vì mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) , cạnh $SB = SC = 1$, nên gọi H là trung điểm của BC thì $SH \perp (ABC)$.

Từ giả thiết ta có $\Delta SBA = \Delta SCA \Rightarrow BA = CA \Rightarrow AH \perp BC$.

Đặt $SA = a$, ta có: $SA^2 = SH^2 + HA^2 = SH^2 + (AC^2 - HC^2)$.

Trong tam giác SAC có: $AC^2 = SA^2 + SC^2 - 2 \cdot SA \cdot SC \cdot \cos 60^\circ = a^2 + 1 - a$

Tam giác SBC đều cạnh bằng 1 nên $SH = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Vậy ta có: } a^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + a^2 + 1 - a - \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{3}{2} \Rightarrow HA = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

$$\frac{V_{S.CMN}}{V_{S.CAB}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 2.$$

Câu 14. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh A , $AB = a\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm của BC , hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IH}$, góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{5}}{2}$.

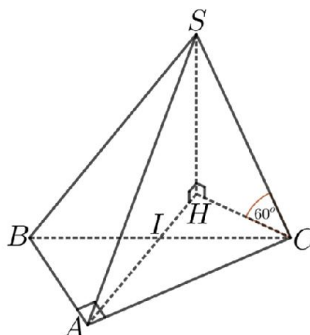
B. $\frac{a^3\sqrt{5}}{6}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{15}}{12}$.

Lời giải

Chọn C



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = a^2.$$

$$BC = 2a, IA = a, IH = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Tam giác } HIC \text{ vuông tại } I \text{ ta có } HC^2 = HI^2 + IC^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow HC = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\tan \widehat{SCH} = \frac{SH}{HC} \Leftrightarrow SH = HC \cdot \tan \widehat{SCH} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}.$$

Câu 15. (Chuyên Lào Cai - 2020) Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi S là điểm đối xứng của A qua BC' . Thể tích khối đa diện $ABCSB'C'$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

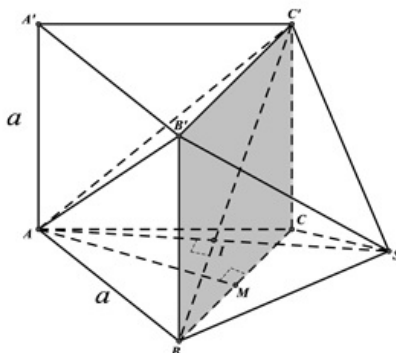
B. $a^3\sqrt{3}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Chia khối đa diện $ABCSB'C'$ thành 2 khối là khối chóp $A.BCC'B'$ và khối chóp $S.BCC'B'$

$$V_{ABCSB'C'} = V_{ABCC'B'} + V_{S.BCC'B'}$$

Gọi M là trung điểm BC .

Ta có: $\left. \begin{array}{l} AM \perp BC \\ AM \perp BB' \end{array} \right\} \Rightarrow AM \perp (BCC'B').$ Tam giác ABC đều $\Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp $A.BCC'B'$ là:

$$V_{A.BCC'B'} = \frac{1}{3} AM \cdot S_{BCC'B'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

Thể tích khối chóp $S.BCC'B'$ là:

$$\begin{aligned} \frac{V_{S.BCC'B'}}{V_{A.BCC'B'}} &= \frac{\frac{1}{3} d(S; (BCC'B')) \cdot S_{BCC'B'}}{\frac{1}{3} d(A; (BCC'B')) \cdot S_{BCC'B'}} \\ &= \frac{d(S; (BCC'B'))}{d(A; (BCC'B'))} = \frac{SI}{AI} = 1. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V_{S.BCC'B'} = V_{A.BCC'B'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6} \Rightarrow V_{ABCSB'C'} = V_{A.BCC'B'} + V_{S.BCC'B'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6} + \frac{a^3\sqrt{3}}{6} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$$

Câu 16. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh bằng a và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi I, J lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A', CDD'C'$. Biết $AI = \frac{a\sqrt{7}}{2}$, $AA' = 2a$ và góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A'), (A'B'C'D')$ bằng 60° . Tính theo a thể tích khối tứ diện $AOIJ$.

A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{64}$.

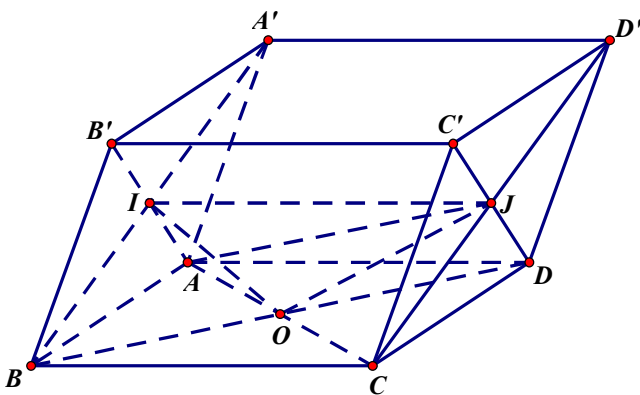
B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{48}$.

C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{32}$.

D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{192}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $AI^2 = \frac{AA'^2 + AB^2}{2} - \frac{A'B^2}{4} \Rightarrow A'B^2 = 2(AA'^2 + AB^2) - 4AI^2 = 3a^2 \Rightarrow A'B = a\sqrt{3}$

Do $A'B^2 + AB^2 = AA'^2$ nên tam giác $A'AB$ vuông tại $B \Rightarrow S_{A'AB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Tam giác ABC đều cạnh a nên $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Theo đề góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A'), (A'B'C'D')$ bằng 60° , nên suy ra

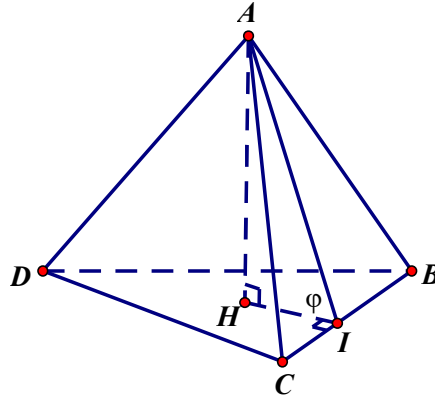
$$V_{A'ABC} = \frac{2S_{A'AB} \cdot S_{ABC} \sin 60^\circ}{3AB} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$$

$$V_{AOLJ} = \frac{1}{3} d(O; (IAJ)) \cdot S_{IAJ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} d(B; (B'AD)) \cdot \frac{1}{2} S_{B'AD} = \frac{1}{4} V_{B'ABD} = \frac{1}{4} V_{A'ABC} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{32}$$

Bổ sung: Công thức tính nhanh thể tích tứ diện theo góc giữa hai mặt phẳng

Cho tứ diện ABCD có diện tích tam giác ABC bằng S_1 , diện tích tam giác BCD là S_2 và góc

giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC) là φ . Khi đó ta có: $V_{ABCD} = \frac{2S_1 S_2 \cdot \sin \varphi}{3BC}$

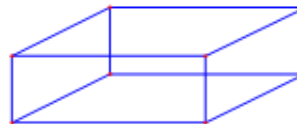
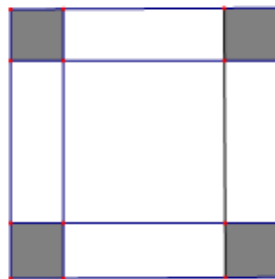


Chứng minh: Gọi H là hình chiếu của A lên (BCD), kẻ $HI \perp BC$ tại I thì $AI \perp BC$ và

$$((ABC); (DBC)) = (AI; HI) = \widehat{AIH} = \varphi; AH = AI \sin \varphi$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} AH \cdot S_{DBC} = \frac{1}{3} AI \sin \varphi \cdot S_2 = \frac{1}{3} \frac{2S_{ABC}}{BC} \cdot \sin \varphi \cdot S_2 = \frac{2S_1 S_2 \sin \varphi}{3BC}$$

- Câu 17. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020)** Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gấp tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp (tham khảo hình vẽ bên). Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất (giả thiết bề dày tấm tôn không đáng kể).



A. $x = 2$.

B. $x = 3$.

C. $x = 4$.

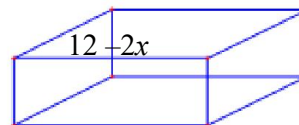
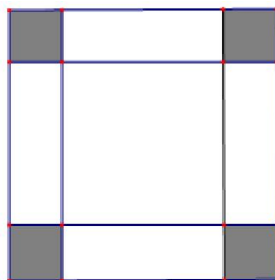
D. $x = 6$.

Lời giải

Chọn A

Hình hộp có đáy của là hình vuông cạnh bằng $12 - 2x$, chiều cao bằng x .

Điều kiện $0 < x < 6$



Thể tích khối hộp là $V = (12 - 2x)^2 \cdot x = 4(6 - x)^2 \cdot x$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương $\sqrt[3]{(6-x)(6-x) \cdot 2x} \leq \frac{(6-x) + (6-x) + 2x}{3}$

$$\Leftrightarrow (6-x)(6-x).2x \leq 4^3 \Leftrightarrow 4(6-x)^2 \cdot x \leq 2.4^3 \Leftrightarrow V \leq 128 \text{ (hằng số).}$$

$$\text{Dấu } = \text{ xảy ra } \Leftrightarrow 6-x=2x \Leftrightarrow x=2.$$

Vậy thể tích khối hộp lớn nhất khi $x=2$.

Câu 18. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng 1. Mặt phẳng (Q) thay đổi song song với mặt phẳng (ABC) lần lượt cắt các cạnh SA, SB, SC tại M, N, P . Qua M, N, P kẻ các đường thẳng song song với nhau lần lượt cắt mặt phẳng (ABC) tại M', N', P' . Tính giá trị lớn nhất của thể tích khối lăng trụ $MNP.M'N'P'$.

A. $\frac{4}{9}$.

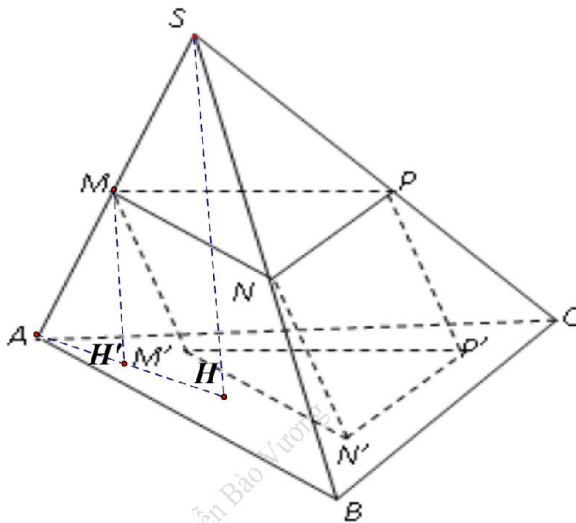
B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{8}{27}$.

Lời giải

Chọn A



$$\text{Gọi } \frac{SM}{SA} = x (0 < x < 1) \Rightarrow \frac{SN}{SB} = x = \frac{SP}{SC}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta MNP}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{2} NM \cdot NP \cdot \sin \widehat{MNP}}{\frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot \sin \widehat{ABC}} = \frac{NM}{BA} \cdot \frac{NP}{BC} = x^2$$

$$\Rightarrow S_{\Delta MNP} = x^2 \cdot S_{\Delta ABC}$$

Gọi chiều cao của hình chóp là SH , chiều cao của lăng trụ là MH' :

$$\Rightarrow \frac{MH'}{SH} = \frac{AM}{AS} = 1-x \Rightarrow MH' = (1-x)SH$$

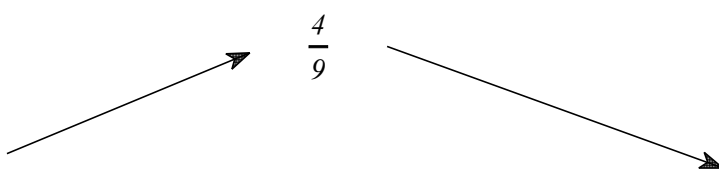
$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\Delta ABC} = 1 \Leftrightarrow SH \cdot S_{\Delta ABC} = 3$$

$$\Rightarrow V_{MNP.M'N'P'} = MH' \cdot S_{\Delta MNP} = (1-x)SH \cdot x^2 \cdot S_{\Delta ABC} = x^2 \cdot (1-x) \cdot SH \cdot S_{\Delta ABC} = x^2 \cdot (1-x) \cdot 3$$

Xét hàm số: $f(x) = 3x^2 - 3x^3$ với $x \in (0;1)$

$$\Rightarrow f'(x) = 6x - 9x^2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{2}{3}$	1
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$			

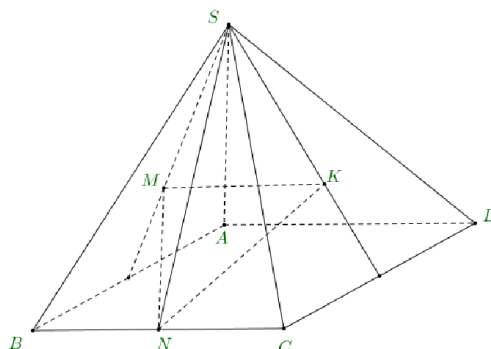
Vậy: $\max V_{MNP.M'N'P'} = \frac{4}{9}$.

Câu 19. (Chuyên Quang Trung - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = a$. M, K tương ứng là trọng tâm tam giác SAB, SCD ; N là trung điểm BC . Thể tích khối tứ diện $SMNK$ bằng $\frac{m}{n} \cdot a^3$ với $m, n \in \mathbb{N}, (m, n) = 1$. Giá trị $m + n$ bằng:

A. 28. **B.** 12.

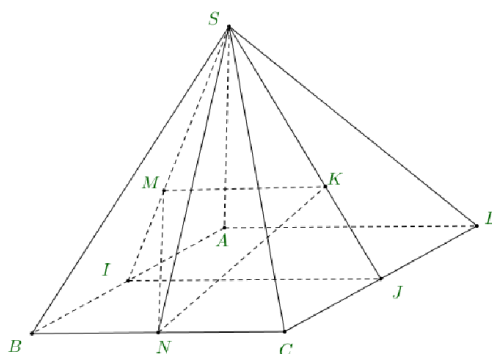
C. 19.

D. 32.



Lời giải

Chọn A



Ta có: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3}{3}$.

Gọi I là trung điểm của AB , J là trung điểm của CD . Ta có: $\triangle SMN$ đồng dạng với $\triangle SIJ$

theo tỉ số $\frac{2}{3}$. Do đó $V_{SMNK} = V_{P.SMN} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 V_{P.SIJ} = \frac{4}{9} V_{P.SIJ}$.

Mặt khác $S_{\Delta PIJ} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$. Do đó $V_{P.SIJ} = V_{S.PIJ} = \frac{1}{4} V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{12}$

$$\text{Nên } V_{SMNK} = \frac{4}{9} \cdot \frac{a^3}{12} = \frac{a^3}{27}.$$

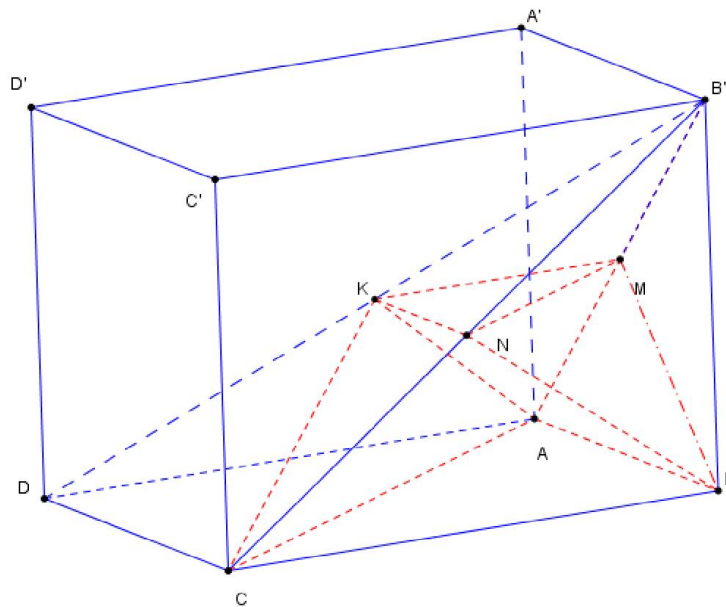
Vậy $m=1, n=27 \Rightarrow m+n=28$.

Câu 20. (Chuyên Quang Trung - 2020) Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi có cạnh $4a$, $A'A=8a$, $\widehat{BAD}=120^\circ$. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm cạnh $AB', B'C, BD'$. Thể tích khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, K là:

- A.** $12\sqrt{3}a^3$ **B.** $\frac{28\sqrt{3}}{3}a^3$ **C.** $16\sqrt{3}a^3$ **D.** $\frac{40\sqrt{3}}{3}a^3$

Lời giải

Chọn A



$MN \parallel AC; MN = \frac{1}{2} AC$, $MNCA$ là hình thang.

$$V_{MNKABC} = V_{K.MNCA} + V_{B.MNCA}$$

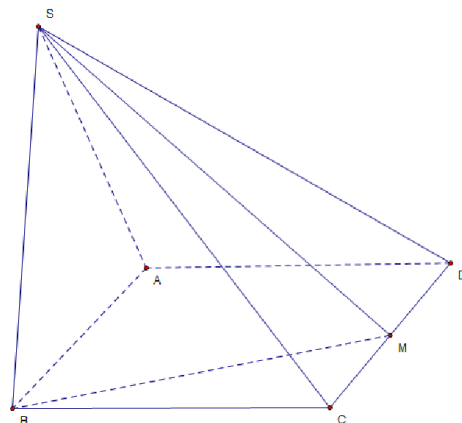
$$DK \text{ cắt } (B'AC) \text{ tại } B', \frac{B'K}{B'D} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{d(K; (MNCA))}{d(D; (MNCA))} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{K.MNCA} = \frac{1}{2} V_{D.MNCA}$$

$$\text{Mà: } V_{B.MNCA} = V_{D.MNCA} \text{ nên ta có: } V_{MNKABC} = \frac{1}{2} V_{B.MNCA} + V_{B.MNCA} = \frac{3}{2} V_{B.MNCA}$$

$$\text{Mặt khác: } S_{MNCA} = \frac{3}{4} S_{B'AC} \Rightarrow V_{B.MNCA} = \frac{3}{4} V_{B.B'AC} = \frac{3}{4} V_{B'.ABC} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} V_{ABCD.A'B'C'D'} = 8\sqrt{3}a^3$$

$$V_{MNKABC} = \frac{3}{2} V_{B.MNCA} = \frac{3}{2} 8\sqrt{3}a^3 = 12\sqrt{3}a^3$$

Câu 21. (Chuyên Quang Trung - 2020) Cho hình chóp tứ giác $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của cạnh CD . Biết khoảng cách từ A đến (SBM) là $2a\sqrt{\frac{3}{19}}$. Thể tích khối chóp $SABCD$ bằng



A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

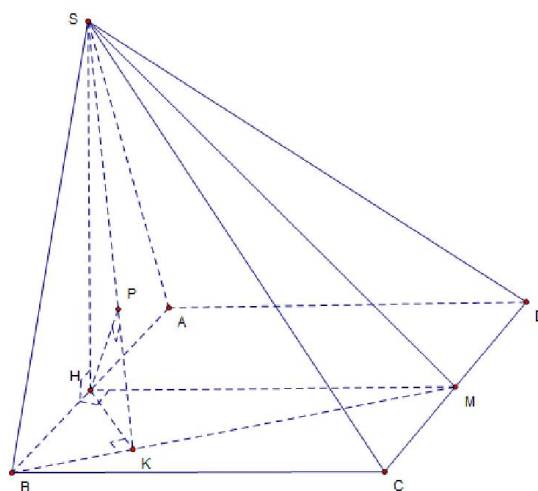
B. $\sqrt{3}a^3$.

C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

D. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{18}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$ (Vì tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy).

Ta có: $AB = 2HB \Rightarrow d(A, (SBM)) = 2d(H, (SBM))$.

Từ H kẻ $HK \perp BM \Rightarrow BM \perp (SHK) \Rightarrow (SHK) \perp (SBM)$ mà $(SHK) \cap (SBM) = SK$

$HP \perp SK \Rightarrow HP \perp (SBM) \Rightarrow d(H, (SBM)) = HP \Rightarrow HP = a\sqrt{\frac{3}{19}}$.

Giả sử hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh là x ($x > 0$).

$\Rightarrow \Delta SAB$ đều cạnh $x \Rightarrow SH = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

$BM = \sqrt{BC^2 + CM^2} = \frac{x\sqrt{5}}{2}$.

Trong ΔBHM vuông tại H có $HK.BM = HB.HM \Rightarrow HK = \frac{HB.HM}{MB} = \frac{x\sqrt{5}}{5}$.

Trong ΔSHK có $\frac{1}{HP^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HK^2} \Rightarrow x = a$.

Vậy $V_{SABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}x^3}{6} = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

Câu 22. (Chuyên Quang Trung - 2020) Cho số $a > 0$. Trong số các tam giác vuông có tổng một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng a , tam giác có diện tích lớn nhất bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}a^2$.

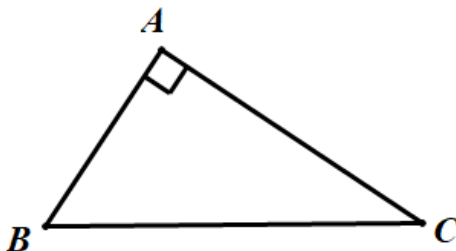
B. $\frac{\sqrt{3}}{6}a^2$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{9}a^2$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{18}a^2$.

Lời giải

Chọn D



Đặt $AB = x$, $0 < x < \frac{a}{2}$.

Theo giả thiết: $AB + BC = a \Rightarrow BC = a - x$.

Tam giác ABC vuông tại A : $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{a^2 - 2ax}$.

Diện tích tam giác ABC : $S_{ABC} = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - 2ax} = \frac{\sqrt{a}}{2}\sqrt{x^2(a - 2x)}$.

Theo BĐT Cô – si ta có:

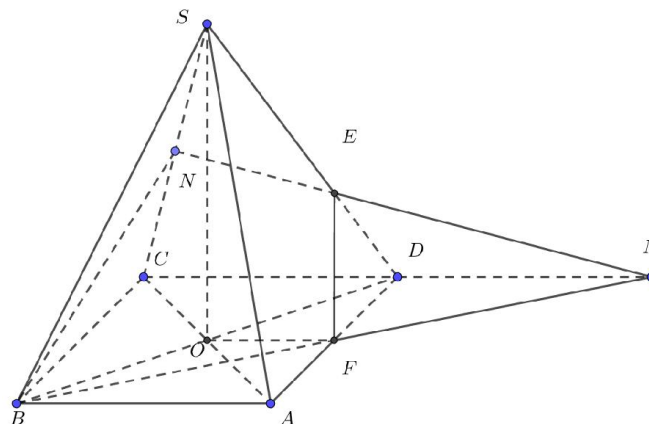
$$\frac{\sqrt{a}}{2}\sqrt{x \cdot x \cdot (a - 2x)} \leq \frac{\sqrt{a}}{2}\sqrt{\left(\frac{x + x + a - 2x}{3}\right)^3} = \frac{\sqrt{3}a^2}{18}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = a - 2x \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}$.

Vậy tam giác có diện tích lớn nhất là $\frac{\sqrt{3}a^2}{18}$.

Câu 23. (Chuyên Sơn La - 2020) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên hợp với đáy một góc 60° . Gọi M là điểm đối xứng của C qua D , N là trung điểm SC . Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần (như hình vẽ bên). Tỉ số thể tích giữa

hai phần $\frac{V_{SABFEN}}{V_{BFDCNE}}$ bằng



A. $\frac{7}{5}$.

B. $\frac{7}{6}$.

C. $\frac{7}{3}$.

D. $\frac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có N là trung điểm của SO , D là trung điểm của CM nên E là trọng tâm tam giác SCM .
Ký hiệu h, S, V tương ứng là chiều cao, diện tích đáy và thể tích khối chóp $S.ABCD$ ta có

$$S_{BCM} = S \Rightarrow V_{N.BCM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} \cdot S = \frac{V}{2}.$$

$$\text{Khi đó } \frac{V_{M.EDF}}{V_{M.NCB}} = \frac{ME}{MN} \cdot \frac{MD}{MC} \cdot \frac{MF}{MB} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow V_{M.EDF} = \frac{V}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{V}{12}.$$

$$\text{Như vậy } V_{BFDCNE} = \frac{V}{2} - \frac{V}{12} = \frac{5V}{12} \Rightarrow V_{SABFEN} = \frac{7V}{12} \Rightarrow \frac{V_{SABFEN}}{V_{BFDCNE}} = \frac{7}{5}.$$

Câu 24. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=3$. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD tại M, N, P . Tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$

A. $\frac{32\pi}{3}$.

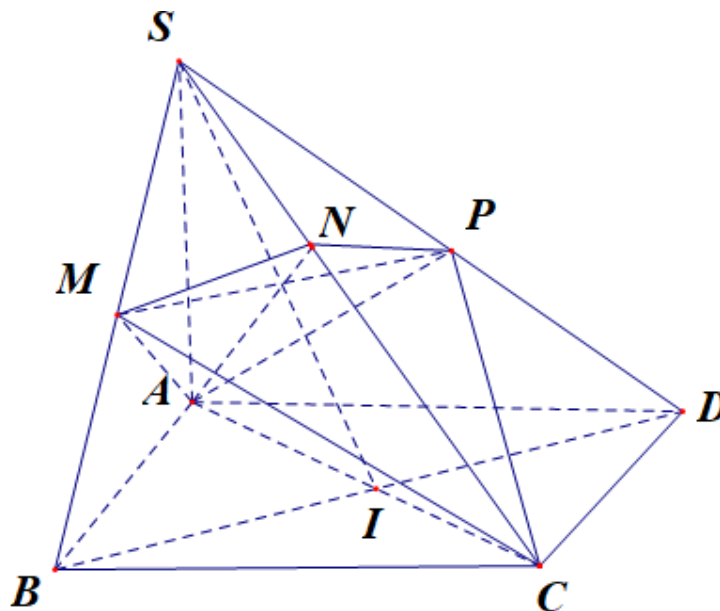
B. $\frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$.

C. $\frac{108\pi}{3}$.

D. $\frac{125\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn A



$$\text{Ta có: } \begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp MA..$$

$$\text{Lại có } MA \perp SC \Rightarrow MA \perp (SBC) \Rightarrow MA \perp MC \quad (1).$$

$$\text{Tương tự: } AP \perp PC \quad (2).$$

$$\text{Mặt khác } AN \perp NC \quad (3).$$

Gọi I là trung điểm của AC , từ (1) (2) (3) ta có $IN = IM = IC = IP (= IA)$. Mặt cầu ngoại tiếp $CMNP$ là mặt cầu tâm I , bán kính IA .

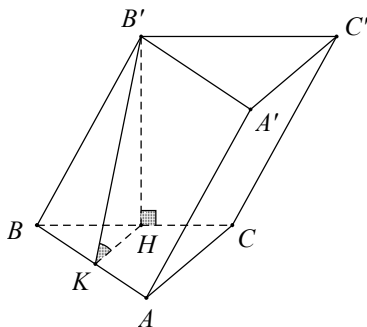
$$IA = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2}}{2} = 2.$$

$$\text{Thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện } CMNP \text{ là: } V = \frac{4}{3} \pi \cdot 2^3 = \frac{32\pi}{3}.$$

- Câu 25. (Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , cạnh $BC = 2a$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Biết tứ giác $BCC'B'$ là hình thoi có $\widehat{B'BC}$ nhọn. Mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC) và mặt phẳng $(ABB'A')$ tạo với (ABC) góc 45° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng
- A. $\frac{\sqrt{7}a^3}{7}$. B. $\frac{3\sqrt{7}a^3}{7}$. C. $\frac{6\sqrt{7}a^3}{7}$. D. $\frac{\sqrt{7}a^3}{21}$.

Lời giải

Chọn B



Có $\begin{cases} (BCC'B') \perp (ABC) \\ (BCC'B') \cap (ABC) = BC \end{cases}$. Do đó trong $(BCC'B')$ kẻ $B'H$ vuông góc với BC tại H

thì $B'H \perp (ABC)$ hay $B'H$ là chiều cao của hình lăng trụ.

Trong (ABC) kẻ HK vuông góc với AB tại K . Khi đó $AB \perp (B'HK)$.

Ta có $\begin{cases} (ABB'A') \cap (ABC) = AB \\ (B'HK) \perp AB \\ (B'HK) \cap (ABB'A') = B'K, (B'HK) \cap (ABC) = KH \end{cases}$

$\Rightarrow$ Góc giữa $(ABB'A')$ và (ABC) chính là góc giữa $B'K$ và KH .

$\Delta B'HK$ vuông tại H nên $\widehat{B'KH}$ là góc nhọn. Do đó $\widehat{B'KH} = 45^\circ$.

$\Delta B'HK$ vuông tại H có $\widehat{B'KH} = 45^\circ \Rightarrow \Delta B'HK$ vuông cân tại $H \Rightarrow B'H = KH$.

Xét hai tam giác vuông $B'BH$ và BKH , ta có

$$\tan \widehat{B'BH} = \frac{B'H}{BH} = \frac{KH}{BH} = \sin \widehat{ABC} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Rightarrow \frac{B'H}{B'B} = \sin \widehat{B'BH} = \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{B'BH}} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\tan^2 \widehat{B'BH} + 1} \right)} = \sqrt{1 - \frac{1}{\frac{3}{4} + 1}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

$$\Rightarrow B'H = B'B \cdot \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{2a\sqrt{21}}{7} \text{ (vì } BCC'B' \text{ là hình thoi có cạnh } BC = 2a \text{)}.$$

$$\text{Ta có } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} (BC \cdot \cos 60^\circ) (BC \cdot \sin 60^\circ) = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = B'H \cdot S_{ABC} = \frac{2a\sqrt{21}}{7} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{7}a^3}{7}.$$

- Câu 26. (Chuyên Thái Nguyên - 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh B , $AB = 4$, $SA = SB = SC = 12$. Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của AC, BC, AB . Trên cạnh SB lấy điểm F sao cho $\frac{BF}{BS} = \frac{2}{3}$. Thể tích khối tứ diện $MNEF$ bằng

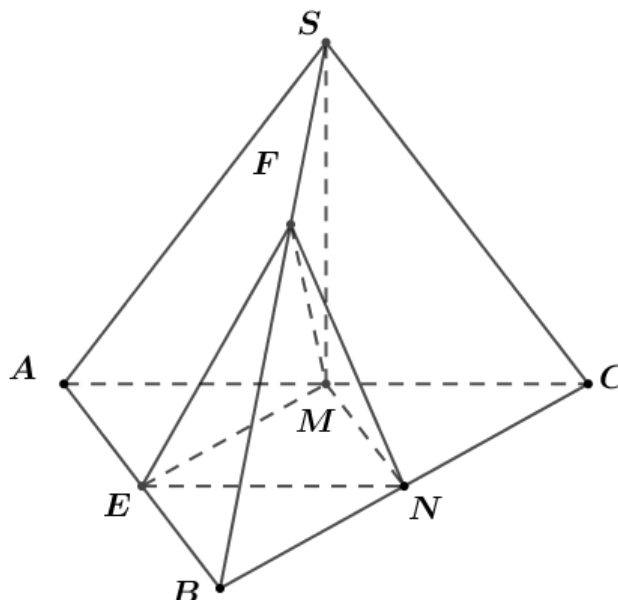
A. $\frac{8\sqrt{34}}{3}$.

B. $\frac{4\sqrt{34}}{3}$.

C. $\frac{8\sqrt{34}}{9}$.

D. $\frac{16\sqrt{34}}{9}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $SA = SB = SC$ nên hình chiếu của S lên (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp ABC , suy ra $SM \perp (ABC)$.

Từ $AB = 4 \Rightarrow AC = 4\sqrt{2}$.

Tam giác SAM vuông tại M nên $SM = \sqrt{SA^2 - AM^2} = \sqrt{12^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{34}$.

Thể tích $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SM = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB^2 \cdot SM = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot 2\sqrt{34} = \frac{16\sqrt{34}}{3}$.

Suy ra thể tích

$$V_{MNEF} = \frac{1}{3} \cdot S_{MNE} \cdot d(F, (MNE)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot S_{ABC} \cdot \frac{2}{3} \cdot SM = \frac{1}{12} \cdot V_{S.ABC} = \frac{1}{12} \cdot \frac{32\sqrt{34}}{3} = \frac{8\sqrt{34}}{9}.$$

Câu 27. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại A lấy điểm S di động không trùng với A . Hình chiếu vuông góc của A lên SB, SD lần lượt tại H, K . Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ACHK$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{32}$.

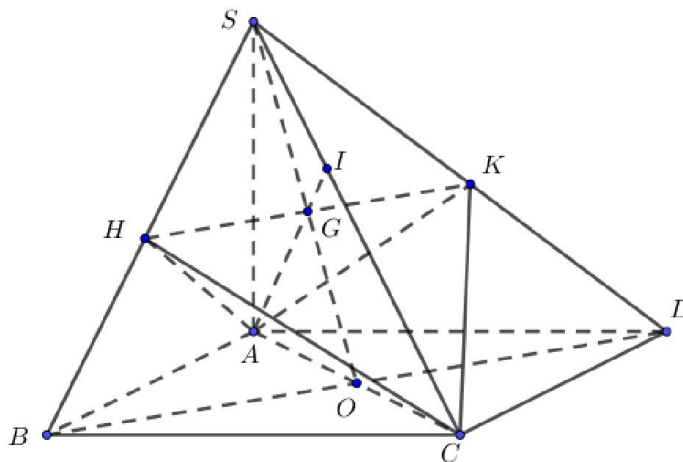
B. $\frac{a^3}{6}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải

Chọn C**Cách 1:**



Ta có $V_{S.ABD} = \frac{1}{3} S_{ABD} \cdot SA = \frac{a^2 x}{6}$.

Lại có $\frac{V_{S.AHK}}{V_{S.ABD}} = \frac{SH}{SB} \cdot \frac{SK}{SD} = \left(\frac{SA}{SB}\right)^2 \cdot \left(\frac{SA}{SD}\right)^2 = \frac{x^4}{(x^2 + a^2)^2}$

$$\Rightarrow V_{S.AHK} = \frac{x^4}{(x^2 + a^2)^2} \cdot V_{S.ABD} = \frac{a^2 x^5}{6(x^2 + a^2)^2}.$$

Gọi $O = AC \cap BD, G = SO \cap HK, I = AG \cap SC$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH, (AH \subset (SAB)).$

Lại có $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC.$

Chứng minh tương tự ta có $AK \perp SC$.

Vì $\begin{cases} SC \perp AK \\ SC \perp AH \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AHK), AI \subset (AHK) \Rightarrow SC \perp AI.$

Xét tam giác SAC vuông tại A , đặt $SA = x > 0$ và có $AC = a\sqrt{2}, AI \perp SC$

$$\Rightarrow \frac{IC}{IS} = \left(\frac{AC}{AS}\right)^2 = \frac{2a^2}{x^2} \Rightarrow CI = \frac{2a^2}{x^2} SI.$$

$$\Rightarrow V_{ACHK} = \frac{1}{3} S_{AHK} \cdot CI = \frac{1}{3} S_{AHK} \cdot \frac{2a^2}{x^2} \cdot SI = \frac{2a^2}{x^2} V_{S.AHK} = \frac{a^4}{3} \cdot \frac{x^3}{(x^2 + a^2)^2}.$$

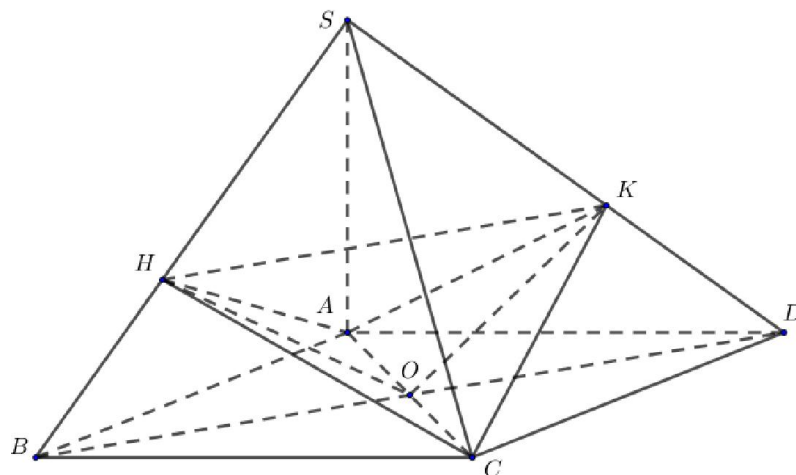
Ta lại có $(x^2 + a^2)^2 = \left(\frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{3} + a^2\right)^2 \stackrel{AM-GM}{\geq} 16 \frac{x^3 a}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{x^3}{(x^2 + a^2)^2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{16a}$ (Dấu “=” xảy ra

khi và chỉ khi $x = a\sqrt{3}$).

$$\text{Suy ra } V_{ACHK} \leq \frac{a^4}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{16a} \Leftrightarrow V_{ACHK} \leq \frac{a^3 \sqrt{3}}{16}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ACHK$ bằng $\frac{a^3 \sqrt{3}}{16}$ khi $x = SA = a\sqrt{3}$.

Cách 2:



$$\text{Đặt } SA = x, x > 0 \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{a^2 x}{3} \Rightarrow V_{S.ABD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{a^2 x}{6}.$$

$$\text{Gọi } O = AC \cap BD \Rightarrow O \text{ là trung điểm của } AC \Rightarrow d(A, (HOK)) = d(C, (HOK)) \\ \Rightarrow V_{AHOK} = V_{CHOK} \Rightarrow V_{ACHK} = 2V_{AHOK}.$$

$$\text{Xét tam giác } SAB \text{ vuông tại } A, \text{ có } AH \perp SB \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{x^2}{x^2 + a^2}.$$

$$\text{Tương tự trong tam giác } SAD \text{ ta cũng có } \frac{SK}{SD} = \frac{x^2}{x^2 + a^2}.$$

$$\text{Lại có } \frac{V_{S.AHK}}{V_{S.ABD}} = \frac{SH}{SB} \cdot \frac{SK}{SD} = \frac{x^4}{(x^2 + a^2)^2} \Rightarrow V_{S.AHK} = \frac{x^4}{(x^2 + a^2)^2} \cdot V_{S.ABD} = \frac{a^2 x^5}{6(x^2 + a^2)^2}.$$

$$\text{Mặt khác } \frac{d(H, (ABCD))}{d(S, (ABCD))} = \frac{BH}{BS} = \frac{a^2}{x^2 + a^2} \Rightarrow d(H, (ABCD)) = \frac{a^2 x}{x^2 + a^2}$$

$$\text{Mà } S_{ABO} = \frac{1}{2} S_{ABD} = \frac{a^2}{4} \Rightarrow V_{H.ABO} = \frac{1}{3} S_{ABO} \cdot d(H, (ABO)) = \frac{1}{12} \cdot \frac{a^4 x}{x^2 + a^2}.$$

$$\text{Tương tự, ta có } V_{K.ADO} = \frac{1}{12} \cdot \frac{a^4 x}{x^2 + a^2}.$$

$$\Rightarrow V_{ACHK} = 2V_{AHOK} = 2(V_{S.ABD} - V_{S.AHK} - V_{H.ABO} - V_{K.ADO}) = 2 \left(\frac{a^2 x}{6} - \frac{a^2 x^5}{6(x^2 + a^2)^2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{a^4 x}{x^2 + a^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow V_{ACHK} = \frac{a^4}{3} \cdot \frac{x^3}{(x^2 + a^2)^2}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{x^3}{(x^2 + a^2)^2} \text{ trên khoảng } (0; +\infty).$$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{x^2(3a^2 - x^2)}{(x^2 + a^2)^3}; f'(x) = 0 \Rightarrow x = a\sqrt{3}$$

Bảng biến thiên

x		0		$a\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$				+	0	-
$f(x)$					$f(a\sqrt{3})$	

Quan sát bảng biến thiên, ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = a\sqrt{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của V_{ACHK} bằng $\frac{a^4}{3} \cdot \frac{(a\sqrt{3})^3}{[(a\sqrt{3})^2 + a^2]^2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$ khi $SA = a\sqrt{3}$.

Câu 28. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020) Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy góc 30° và tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 8. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $64\sqrt{3}$.

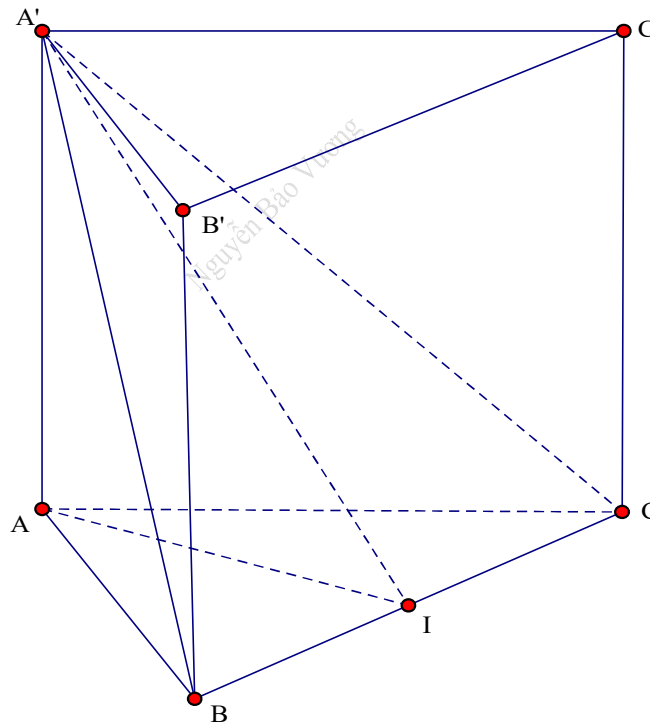
B. $2\sqrt{3}$.

C. $16\sqrt{3}$.

D. $8\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm cạnh BC .

Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều nên $ABC.A'B'C'$ là khối lăng trụ đều.

Do đó ta có: $A'B = A'C$. Suy ra tam giác $A'BC$ cân tại $A' \Rightarrow A'I \perp BC$.

Mặt khác: tam giác ABC đều $\Rightarrow AI \perp BC$.

Suy ra $BC \perp (A'IA)$.

Vậy góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt đáy bằng góc $\widehat{A'IA} = 30^\circ$.

Ta có: tam giác ABC là hình chiếu của tam giác $A'BC$ trên mặt đáy nên

$$S_{ABC} = S_{A'BC} \cdot \cos \alpha = 8 \cdot \cos 30^\circ = 4\sqrt{3}.$$

$$\text{Đặt } AB = x \Rightarrow S_{ABC} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \Rightarrow x = 4.$$

$$\text{Ta có: } AI = \frac{x\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow AA' = AI \cdot \tan \widehat{AIA'} = 2.$$

$$\text{Suy ra: } V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = 2 \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}.$$

Câu 29. (Đại Học Hà Tĩnh - 2020) Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V . Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 là trọng tâm của bốn mặt của tứ diện $ABCD$. Thể tích khối tứ diện $G_1 G_2 G_3 G_4$ là:

A. $\frac{V}{12}.$

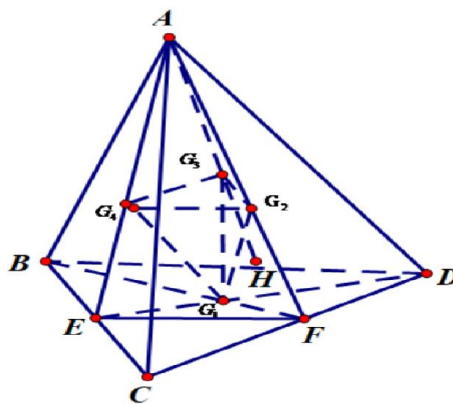
B. $\frac{V}{4}.$

C. $\frac{V}{27}.$

D. $\frac{V}{18}.$

Lời giải

Chọn C



Gọi H, E, F lần lượt là trung điểm BD, BC, CD

$$\text{Ta có } \frac{AG_4}{AE} = \frac{AG_3}{AH} = \frac{2}{3} \Rightarrow G_3 G_4 \parallel HE \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } \frac{AG_3}{AF} = \frac{AG_2}{AH} = \frac{2}{3} \Rightarrow G_2 G_3 \parallel HF \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow (G_4 G_2 G_3) \parallel (DBC)$$

$$\Rightarrow d(G_1; (G_2 G_3 G_4)) = d(G_2; (BCD)) = \frac{1}{3} d(A; (BCD))$$

$$\text{Tam giác } G_2 G_3 G_4 \text{ đồng dạng tam giác } HEF \text{ là } \frac{G_2 G_3}{HF} = \frac{AG_2}{AF} = \frac{2}{3}$$

$$S_{G_2 G_3 G_4} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot S_{HEF} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{4} S_{ABC} = \frac{1}{9} S_{ABC}.$$

Thể tích khối tứ diện $G_1 G_2 G_3 G_4$ là:

$$V = \frac{1}{3} d(G_1; (G_2 G_3 G_4)) \cdot S_{G_2 G_3 G_4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} d(A; (BCD)) \cdot \frac{1}{9} S_{ABC} = \frac{1}{27} V_{ABCD} = \frac{V}{27}.$$

Câu 30. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có đáy $AB = a$. Trên BB' lấy M sao cho $B'M = 2BM$. Cho biết $A'M \perp B'C$. Tìm thể tích của lăng trụ đều.

A. $\frac{3\sqrt{3}}{16} a^2.$

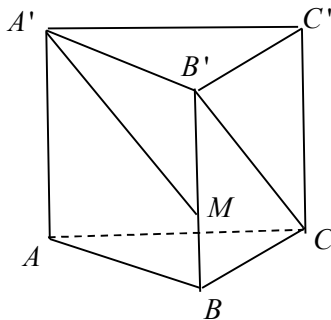
B. $\frac{3\sqrt{3}}{8} a^3.$

C. $\frac{3}{8} a^3.$

D. $\frac{3}{4} a^3.$

Lời giải

Chọn C



Chọn $a = 1$. Gọi $AA' = x$. Ghép hệ trục tọa độ $Oxyz$ vào hình vẽ với $AC = Oy$ suy ra

$$A(0;0;0), A'(0;0;x), B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right); B'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; x\right); C(0;1;0) \Rightarrow M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; \frac{-2x}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; \frac{-2x}{3}\right)\right); \overrightarrow{CB}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{-1}{2}; x\right).$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + x \cdot \left(\frac{-2x}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy thể tích của lăng trụ đều là: } \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{8} a^3.$$

Câu 31. (Sở Hưng Yên - 2020) Khối chóp có đáy là hình bình hành, một cạnh đáy bằng a và các cạnh bên đều bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp có giá trị lớn nhất là

A. $2\sqrt{6}a^3$.

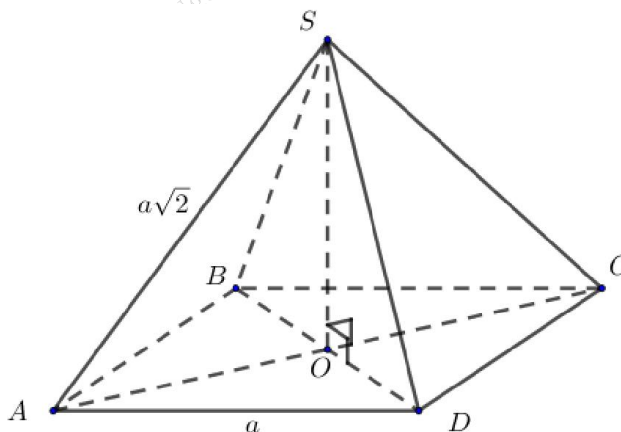
B. $8a^3$.

C. $\frac{2\sqrt{6}}{3}a^3$.

D. $\frac{7a^3}{12}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $AC \cap BD = O$.

$$\text{Ta có } SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD).$$

$\Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp hình bình hành $ABCD$

$\Rightarrow ABCD$ là hình chữ nhật.

$$\text{Không mất tính tổng quát, giả sử } AD = a \text{ và đặt } AB = x, (x > 0) \Rightarrow OA = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + a^2}.$$

$$\text{Xét } \triangle SOA \text{ vuông tại } O, \text{ ta có } SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{x^2 + a^2}{4}} \Leftrightarrow SO = \frac{1}{2}\sqrt{7a^2 - x^2}.$$

Lại có $S_{ABCD} = a.x$ nên $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} . SO = \frac{1}{6} a.x.\sqrt{7a^2 - x^2} \stackrel{AM-GM}{\leq} \frac{a}{6} \cdot \frac{x^2 + (7a^2 - x^2)}{2} = \frac{7a^3}{12}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Vậy thể tích lớn nhất của khối chóp đã cho là $\frac{7a^3}{12}$.

Câu 32. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $BC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh HC của cạnh AC . Góc giữa hai mặt phẳng $(BCB'C')$ và (ABC) bằng 60° . Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng:

A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$.

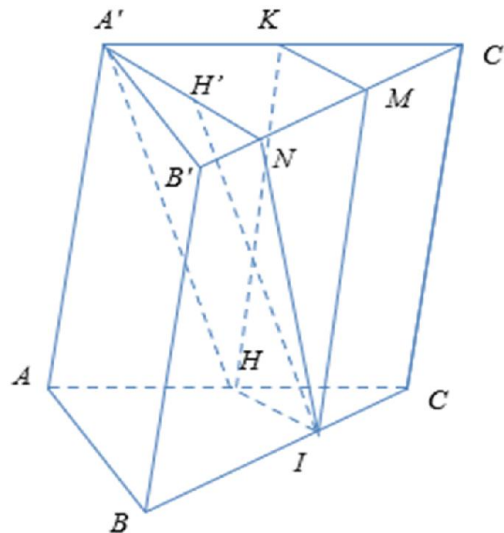
B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$.

C. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $BC = a\sqrt{3}$. Từ H kẻ HI vuông góc với BC .

Ta có $\Delta HIC \sim \Delta BAC$ nên $\frac{HI}{AB} = \frac{HC}{BC} \Rightarrow HI = \frac{AB.HC}{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Gọi K là trung điểm của $A'C'$. từ K kẻ KM vuông góc với $B'C'$.

Tứ giác $KMIH$ là hình bình hành nên $KM = IH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Gọi N là điểm trên $B'C'$ sao cho M là trung điểm của $C'N \Rightarrow A'N = 2KM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do $A'H \perp (ABC)$ nên $(A'NIH) \perp (ABC)$. Mà $A'N > HI$ nên HIN là góc tù. Suy ra

$HIN = 120^\circ \Rightarrow A'NI = 60^\circ$.

Gọi H' là hình chiếu của I lên $A'N$ suy ra H' là trung điểm của $A'N$.

$\Rightarrow A'H = IH' = NH' . \tan 60^\circ = \frac{3a}{4}$.

$\Rightarrow V = A'H . S_{ABC} = \frac{3a}{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Câu 33. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng φ , với $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

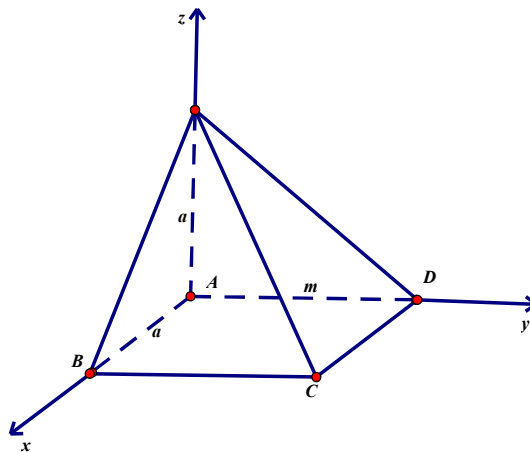
B. $a^3\sqrt{2}$.

C. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

D. $\frac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $AD = m$, $m > 0$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, gốc tọa độ trùng với A , tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AB, AD, AS . Khi đó tọa độ của các điểm là:

$$B(a; 0; 0); D(0; m; 0); C(a; m; 0); S(0; 0; a)$$

$$\overrightarrow{SB} = (a; 0; -a); \overrightarrow{BC} = (0; m; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BC}] = (ma; 0; ma)$$

$$\overrightarrow{SD} = (0; m; -a); \overrightarrow{DC} = (a; 0; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{SD}, \overrightarrow{DC}] = (0; -a; -ma)$$

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBC) là $[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BC}] = (ma; 0; ma)$, của mặt phẳng (SCD) là $[\overrightarrow{SD}, \overrightarrow{DC}] = (0; -a; -ma)$.

$$\text{Theo giả thiết: } \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{m^2 a^2}{a\sqrt{a^2 + m^2} \cdot ma \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3m^2 = 2(a^2 + m^2) \Rightarrow m = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Thể tích khối chóp } S.ABCD \text{ bằng } V = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot a \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 34. (Sở Hà Tĩnh - 2020) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V . Gọi M là điểm thuộc cạnh BB' sao cho $BM = 2MB'$. Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AC' cắt các cạnh DD', DC, BC lần lượt tại N, P, Q . Gọi V_1 là thể tích khối đa diện $CPQMNC'$. Tính tỷ số $\frac{V_1}{V}$

A. $\frac{31}{162}$.

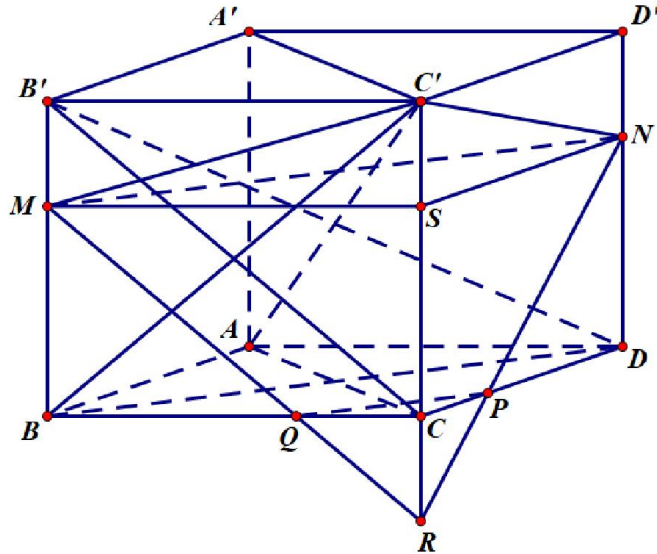
B. $\frac{35}{162}$.

C. $\frac{34}{162}$.

D. $\frac{13}{162}$.

Lời giải

Chọn B



Theo giả thiết $(\alpha) \cap DD' = N, (\alpha) \cap CD = P, (\alpha) \cap BC = Q$. Từ tính chất của hình lập phương ta có $(ACC') \perp BD$ suy ra $BD \perp AC'$ do đó $BD \parallel (\alpha)$, từ đây ta suy ra $MN \parallel BD; PQ \parallel BD$ do vậy ta có $DN = 2ND'$.

Ta xác định vị trí P, Q như sau: Ta có $\begin{cases} AB \perp B'C \\ BC' \perp B'C \end{cases} \Rightarrow B'C \perp (ABC') \Rightarrow B'C \perp AC'$ vì vậy

$(\alpha) \parallel B'C$ do đó $MQ \parallel B'C$, vậy ta được $BQ = 2QC$, và theo trên $PQ \parallel BD$ ta lại có $DP = 2PC$. Vậy các điểm M, N, P, Q hoàn toàn được xác định.

Gọi S là điểm trên cạnh CC' thỏa mãn $CS = 2SC'$ và R là điểm trên đường thẳng CC' thỏa mãn $MB'CR$ là hình bình hành. Khi đó ta có R nằm trên mặt phẳng (α) và $(MNS) \parallel (A'B'C'D')$

Đặt $V_0 = V_{RCPQ}; V_2 = V_{C'MSN}$ khi đó $V_1 = V_{RMNS} + V_{C'MSN} - V_{RCPQ}$

Đặt cạnh của hình lập phương là $AB = 3x$ ta có

$$\begin{cases} V = (3x)^3 = 27x^3 \\ V_{RMNS} = \frac{1}{6} SN \cdot SM \cdot SR = \frac{9}{2} x^3 \\ V_{C'MSN} = \frac{1}{6} SM \cdot SN \cdot SC' = \frac{3x^3}{2} \\ V_{RCPQ} = \frac{1}{6} CP \cdot CQ \cdot CR = \frac{x^3}{6} \end{cases} \text{ do đó } \frac{V_1}{V} = \frac{\frac{9}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{x^3}{6}}{27x^3} = \frac{35}{162}$$

Vậy $\frac{V_1}{V} = \frac{35}{162}$.

Câu 35. (Sở Ninh Bình) Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{6}$, $AD = \sqrt{3}$, $A'C = 3$ và mặt phẳng $(AA'C'C)$ vuông góc với mặt đáy. Biết hai mặt phẳng $(AA'C'C)$, $(AA'B'B)$ tạo với nhau góc α có $\tan \alpha = \frac{3}{4}$. Thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. $V = 12$.

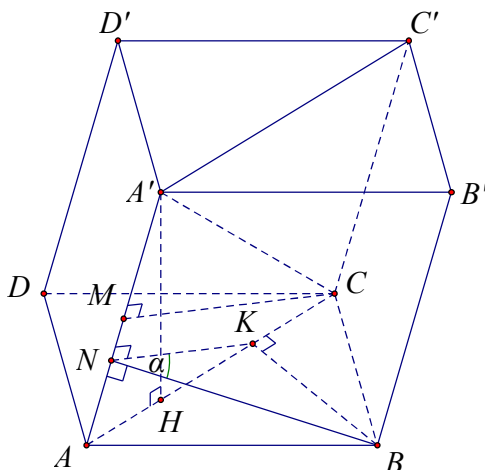
B. $V = 6$.

C. $V = 8$.

D. $V = 10$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của AA' . Kẻ $A'H$ vuông góc với AC tại H , BK vuông góc với AC tại K , KN vuông góc với AA' tại N .

Do $(AA'C'C) \perp (ABCD)$ suy ra $A'H \perp (ABCD)$ và $BK \perp (AA'C'C) \Rightarrow BK \perp AA'$

$$\Rightarrow AA' \perp (BKN) \Rightarrow AA' \perp NB \text{ suy ra } \left(\overline{(AA'C'C)}, \overline{(AA'B'B)} \right) = \widehat{KNB} = \alpha.$$

Ta có: $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{6}$, $AD = \sqrt{3}$ suy ra $BD = 3 = AC$
 Suy ra $\triangle ACA'$ cân tại C . Suy ra $CM \perp AA' \Rightarrow KN \parallel CM$

$$\Rightarrow \frac{AK}{AC} = \frac{AN}{AM} = \frac{NK}{MC} .$$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B có BK là đường cao suy ra $BK = \frac{BA \cdot BC}{AC} = \sqrt{2}$ và

$$AB^2 = AK.AC \Rightarrow AK = \frac{AB^2}{AC} = 2$$

Xét $\triangle NKB$ vuông tại K có $\tan \alpha = \tan \widehat{KNB} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{KB}{KN} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow KN = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Xét $\triangle ANK$ vuông tại N có $KN = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, $AK = 2$ suy ra $AN = \frac{2}{3}$.

$$\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{\frac{2}{3}}{AM} = \frac{\frac{4\sqrt{2}}{3}}{MC} \Rightarrow \begin{cases} AM = 1 \Rightarrow AA' = 2 \\ CM = 2\sqrt{2} \end{cases}.$$

Ta lại có: $A'H.AC = CM.AA' \Rightarrow A'H = \frac{CM.AA'}{AC} = \frac{2\sqrt{2}.2}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

Suy ra thể tích khối lăng trụ cần tìm là: $V = A'H.AB.AD = \frac{4\sqrt{2}}{3}.\sqrt{6}.\sqrt{3} = 8.$

Câu 36. (Sở Bắc Ninh - 2020) Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 18. Gọi A_1 là trọng tâm của tam giác BCD ; (P) là mặt phẳng qua A sao cho góc giữa (P) và mặt phẳng (BCD) bằng 60° . Các đường thẳng qua $B; C; D$ song song với AA_1 cắt (P) lần lượt tại $B_1; C_1; D_1$. Thể tích khối tứ diện $A_1B_1C_1D_1$ bằng?

- A.** $12\sqrt{3}$

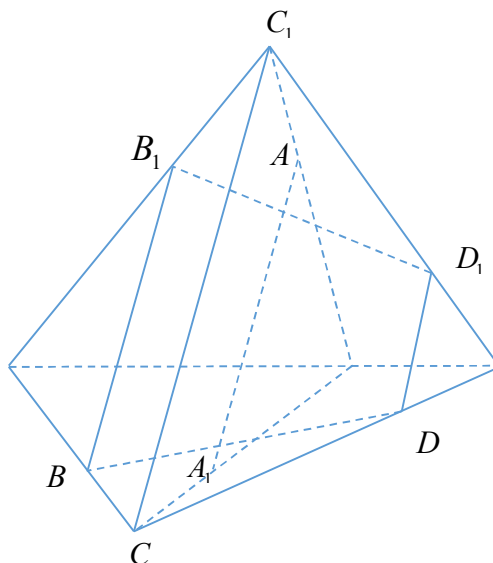
- B. 18**

- C.** $9\sqrt{3}$

- D. 12

Lời giải

Chọn B



Từ giả thiết A_1 là trọng tâm tam giác BCD nên ta suy ra A cũng là trọng tâm tam giác $B_1C_1D_1$.
Do đó $V_{A.BCD} = 3V_{A.A_1BC} = 3V_{B.AA_1C}$ và $V_{A_1.B_1C_1D_1} = 3V_{A_1.AB_1C_1} = 3V_{B_1.AA_1C_1}$.

Mặt khác do quan hệ song song nên $\begin{cases} d_{[B_1; (AA_1CC_1)]} = d_{[B_1; (AA_1CC_1)]} \\ S_{\Delta AA_1C} = S_{\Delta AA_1C_1} \end{cases} \Rightarrow V_{B.AA_1C} = V_{B_1.AA_1C_1}$

Vậy nên $V_{A_1.B_1C_1D_1} = V_{A.BCD} = 18$

Câu 37. (Sở Bình Phước - 2020) Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Xét điểm M thay đổi trên mặt phẳng (SCD) sao cho tổng $Q = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 + MS^2$ nhỏ nhất. Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và V_2 là thể tích của khối chóp $M.ACD$. Tỉ số $\frac{V_2}{V_1}$ bằng

A. $\frac{11}{140}$.

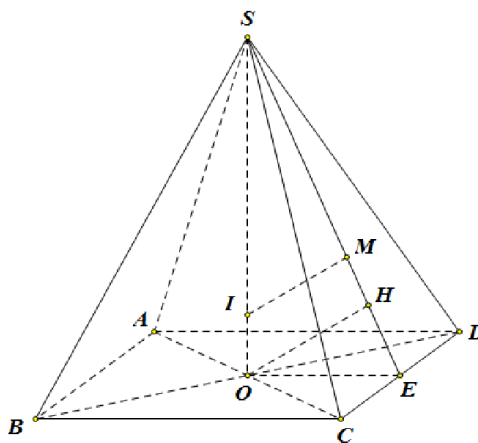
B. $\frac{22}{35}$.

C. $\frac{11}{70}$.

D. $\frac{11}{35}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và I là điểm trên đoạn thẳng SO sao cho $4\vec{IO} + \vec{IS} = \vec{0}$

Ta có: $Q = (\vec{MO} + \vec{OA})^2 + (\vec{MO} + \vec{OB})^2 + (\vec{MO} + \vec{OC})^2 + (\vec{MO} + \vec{OD})^2 + \vec{MS}^2$

$$= 4\vec{MO}^2 + \vec{MS}^2 + 4OA^2 = 4(\vec{MI} + \vec{IO})^2 + (\vec{MI} + \vec{IS})^2 + 4OA^2 = 5MI^2 + 4IO^2 + IS^2 + 4OA^2.$$

Vì $4IO^2 + IS^2 + 4OA^2 = \text{const}$ nên Q nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên (SCD) .

Gọi E là trung điểm CD , H là hình chiếu của O trên $(SCD) \Rightarrow M, H \in SE$.

$$\text{Ta có } SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}, SE = \frac{a\sqrt{7}}{2}, SH = \frac{3a}{\sqrt{7}}.$$

$$\text{Vì } \frac{SM}{SH} = \frac{SI}{SO} = \frac{4}{5} \Rightarrow SM = \frac{12a}{5\sqrt{7}} \Rightarrow ME = SE - SM = \frac{11a}{10\sqrt{7}}.$$

$$\text{Ta có } \frac{d(M, (ABCD))}{d(S, (ABCD))} = \frac{ME}{SE} = \frac{11}{35} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{3}d(M, (ABCD)) \cdot S_{ACD}}{\frac{1}{3}d(S, (ABCD)) \cdot S_{ABCD}} = \frac{11}{35} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{70}.$$

Câu 38. (Sở Yên Bái - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh $3a$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$, góc giữa (SAB) và (SCB) bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{3\sqrt{2}a^3}{8}$.

B. $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

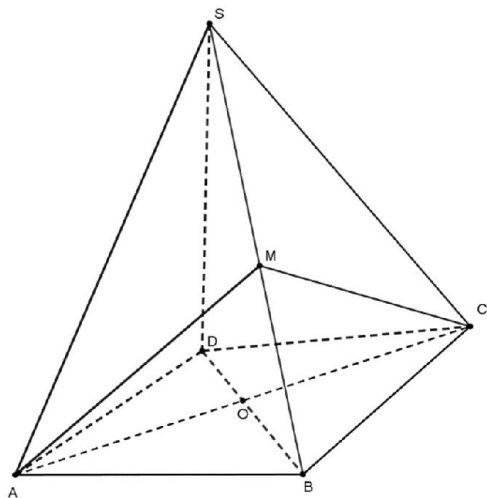
C. $\frac{\sqrt{2}a^3}{24}$.

D. $\frac{9\sqrt{2}a^3}{8}$.

Lời giải

Chọn D

Trong mặt phẳng (ABC) lấy D nằm trên đường trung trực của AC sao cho $SD \perp (ABC)$ và $\widehat{BCD} = \widehat{BAD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$



$$\text{Gọi } O = AC \cap BD \Rightarrow BD = \frac{BC^2}{OB} = 2a\sqrt{3} \Rightarrow CD = a\sqrt{3}$$

$$\text{Dựng } AM \perp SB, \text{ do } \Delta SAB = \Delta SCB \Rightarrow CM \perp SB \Rightarrow ((SAB), (SCB)) = (\widehat{AM}, \widehat{CM})$$

$$+ \text{ Nếu } \widehat{AMC} = 60^\circ \Rightarrow MC = \frac{OC}{\sin 30^\circ} = 3a = BC \text{ vô lí vì tam giác } MBC \text{ vuông tại } M$$

$$+ \text{ Nếu } \widehat{AMC} = 120^\circ \Rightarrow MC = \frac{OC}{\sin 60^\circ} = \sqrt{3} \Rightarrow SC = \frac{3a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SB = \frac{3a\sqrt{6}}{2}$$

$$SD = \sqrt{SB^2 - BD^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SD = \frac{1}{3} \cdot \frac{9a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{9a^3\sqrt{3}}{8}$$

Câu 39. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $\widehat{ABC} = 30^\circ$, $BC = a$, hai mặt phẳng $(SAB), (SAC)$ cùng vuông góc với mặt đáy, mặt bên (SBC) tạo với đáy góc 45° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{a^3}{64}$.

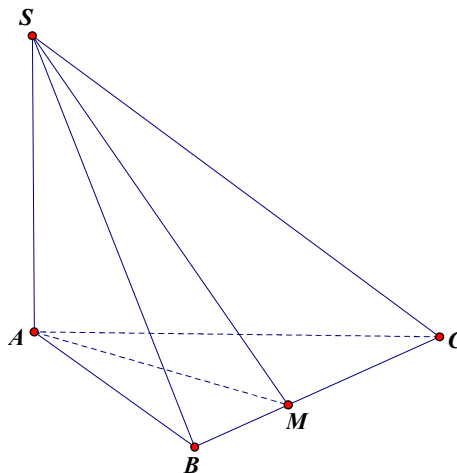
B. $\frac{a^3}{16}$.

C. $\frac{a^3}{9}$.

D. $\frac{a^3}{32}$.

Lời giải

Chọn D



$$\left. \begin{array}{l} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAC) \perp (ABC) \\ (SAB) \cap (SAC) = SA \end{array} \right\} \Rightarrow SA \perp (ABC). \text{ Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\Delta ABC}.$$

Ta có ΔABC là một nửa tam giác đều có cạnh $BC = a$ nên $AC = \frac{a}{2}$, $AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}.$$

Từ A kẻ $AM \perp BC$ tại M ta có $((ABC), (SBC)) = (SM, AM) = \widehat{SMA} \Rightarrow \widehat{SMA} = 45^\circ$.

Suy ra tam giác SAM vuông cân tại A $\Rightarrow SA = AM$.

Trong tam giác ABC vuông tại A đường cao AM ta có

$$AB \cdot AC = AM \cdot BC \Rightarrow AM = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow SA = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{8} = \frac{a^3}{32}.$$

Câu 40. (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $BC = 2a$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Biết tứ giác $BCC'B'$ là hình thoi có $\widehat{B'BC}$ nhọn. Biết $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC) và $(ABB'A')$ tạo với (ABC) góc 45° . Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{a^3}{\sqrt{7}}$.

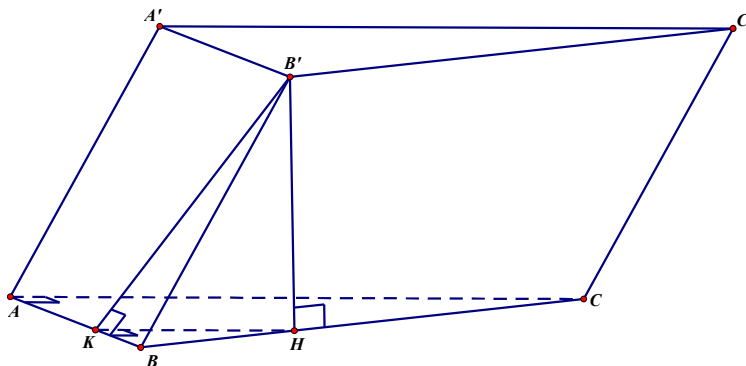
B. $\frac{3a^3}{\sqrt{7}}$.

C. $\frac{6a^3}{\sqrt{7}}$.

D. $\frac{a^3}{3\sqrt{7}}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là chân đường cao hạ từ B' của tam giác $B'BC$. Do góc $\widehat{B'BC}$ là góc nhọn nên H thuộc cạnh BC . $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC) suy ra $B'H$ là đường cao của lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

$BCC'B'$ là hình thoi suy ra $BB' = BC = 2a$. Tam giác ABC vuông tại A , cạnh $BC = 2a$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$ suy ra $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$.

Gọi K là hình chiếu của H lên AB , do tam giác ABC là tam giác vuông tại A nên $HK \parallel AC \Rightarrow \frac{BK}{BA} = \frac{BH}{BC} \Rightarrow BH = 2BK$.

Khi đó mặt phẳng $(B'HK)$ vuông góc với AB nên góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) là góc $\widehat{B'KH}$. Theo giả thiết, $\widehat{B'KH} = 45^\circ \Rightarrow B'K = h\sqrt{2}$, với $B'H = h$.

Xét tam giác vuông $B'BH$ có $B'H^2 + BH^2 = B'B^2$ hay $h^2 + 4BK^2 = 4a^2$ (1).

Xét tam giác vuông $B'BK$: $B'K^2 + BK^2 = B'B^2$ hay $2h^2 + BK^2 = 4a^2$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $h = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{7}}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $V = S_{ABC} \cdot h = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot h = \frac{3a^3}{\sqrt{7}}$.

Câu 41. (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên tạo với đường cao một góc 30° , O là trọng tâm tam giác ABC . Một hình chóp đều thứ hai $O.A'B'C'$ có S là tâm của tam giác $A'B'C'$ và cạnh bên của hình chóp $O.A'B'C'$ tạo với đường cao một góc 60° sao cho mỗi cạnh bên SA, SB, SC lần lượt cắt các cạnh bên OA', OB', OC' . Gọi V_1 là phần thể tích phần chung của hai khối chóp $S.ABC$ và $O.A'B'C'$, V_2

là thể tích khối chóp $S.ABC$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:

A. $\frac{9}{16}$.

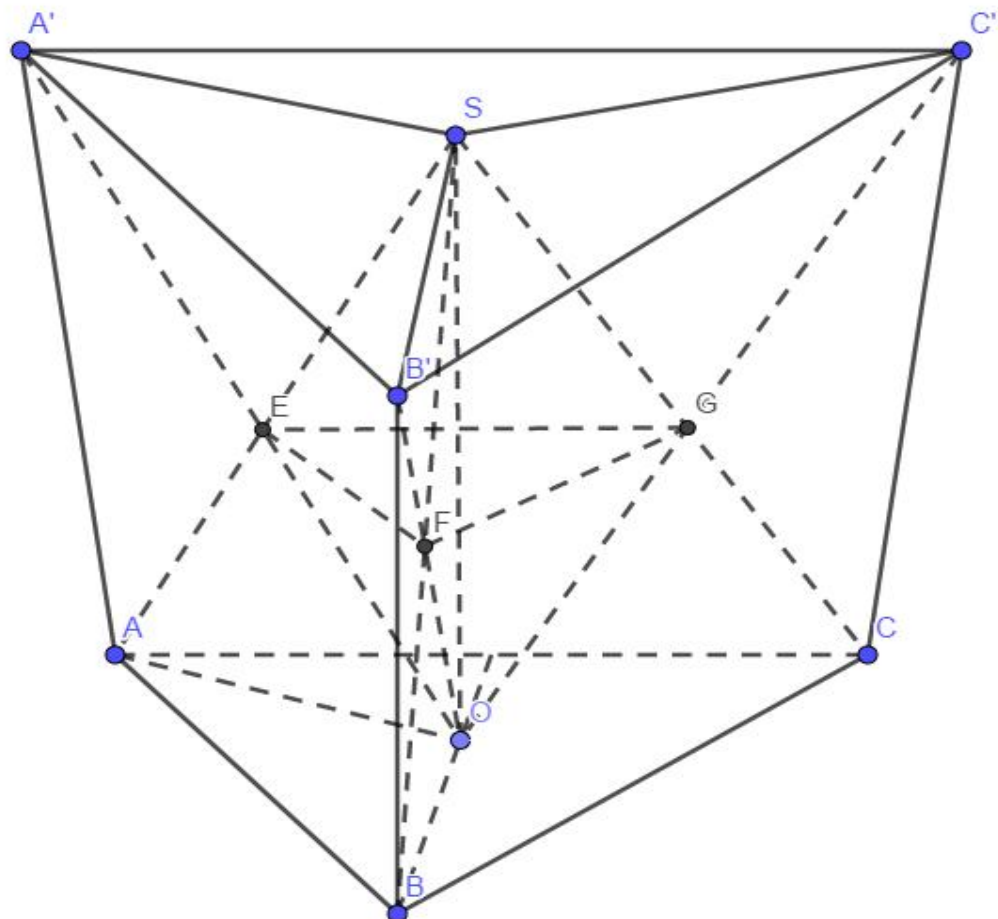
B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{27}{64}$.

D. $\frac{9}{64}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $E = OA' \cap SA$; $F = OB' \cap SB$; $G = OC' \cap SC$

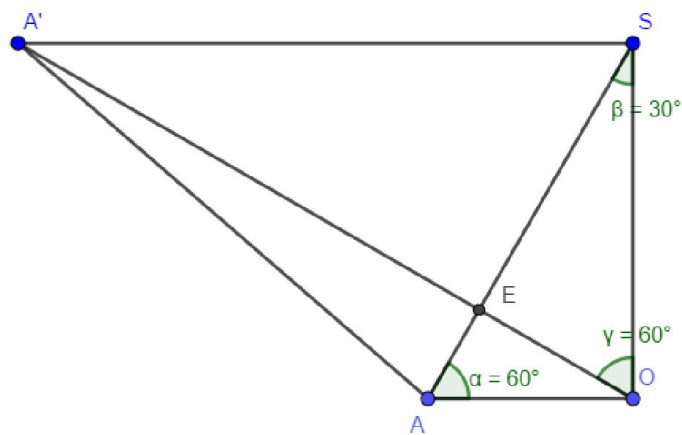
Theo hình vẽ thể tích $V_1 = V_{SEFGO}$; $V_2 = V_{S.ABC}$

Đặt $SO = x$

Do $S.ABC$ là hình chóp đều và O là tâm tam giác ABC nên $SO \perp (ABC)$

Do $O.A'B'C'$ là hình chóp đều và S là tâm tam giác $A'B'C'$ nên $OS \perp (A'B'C')$

Từ đó ta có $(ABC) \parallel (A'B'C') \Rightarrow OA \parallel SA'$ và $SO \perp OA$; $OS \perp SA'$



Ta có theo dữ kiện bài toán ta có $\widehat{ASO} = 30^\circ$; $\widehat{A'OS} = 60^\circ$

Ta có

$$\frac{SE}{SO} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SE = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OE = \frac{x}{2}$$

$$\frac{SO}{SA} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SA = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{SO}{OA'} = \frac{1}{2} \Rightarrow OA' = 2x$$

$$\frac{OA}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow OA = \frac{SA}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{SA'}{SO} = \sqrt{3} \Rightarrow SA' = x\sqrt{3}$$

Ta có:

$$AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = OA \Rightarrow AB = OA \cdot \sqrt{3} = x$$

$$A'B' \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = SA' \Rightarrow A'B' = SA' \cdot \sqrt{3} = 3x$$

Ta có:

$$V_2 = V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot x \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{x^3\sqrt{3}}{12}$$

$$V_{O.A'B'C'} = \frac{1}{3} \cdot x \cdot \frac{(3x)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{x^3 \cdot 3\sqrt{3}}{4}$$

Ta có:

$$\frac{V_{S.EFG}}{V_{S.ABC}} = \frac{SE}{SA} \cdot \frac{SF}{SB} \cdot \frac{SG}{SC} = \left(\frac{SE}{SA}\right)^3 = \left(\frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{2x\sqrt{3}}{3}}\right)^3 = \frac{27}{64} \Rightarrow V_{S.EFG} = \frac{27}{64} \cdot \frac{x^3\sqrt{3}}{12}$$

$$\frac{V_{O.EFG}}{V_{O.A'B'C'}} = \frac{OE}{OA'} \cdot \frac{OF}{OB'} \cdot \frac{OG}{OC'} = \left(\frac{OE}{OA'}\right)^3 = \left(\frac{\frac{x}{2}}{2x}\right)^3 = \frac{1}{64} \Rightarrow V_{O.EFG} = \frac{1}{64} V_{O.A'B'C'} = \frac{1}{64} \cdot \frac{x^3 \cdot 3\sqrt{3}}{4}$$

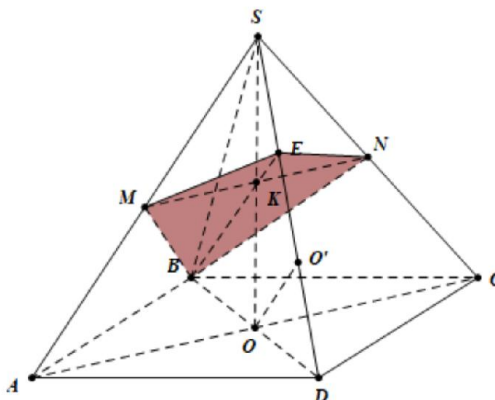
$$V_1 = V_{S.EFG} + V_{O.EFG} = \frac{3\sqrt{3}x^3}{64} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{3\sqrt{3}x^3}{64}}{\frac{x^3\sqrt{3}}{12}} = \frac{9}{16}$$

Câu 42. (Kim Liên - Hà Nội - 2020) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a , tâm của đáy là O . Gọi M, N tương ứng là trung điểm các cạnh SA, SC . Gọi E là giao điểm của SD và mặt phẳng (BMN) . Tính thể tích V của khối chóp $O.BMEN$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{18}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $K = MN \cap SO$, khi đó BK cắt SD tại E . Kẻ $OO' \parallel BE$.

Do MN là đường trung bình của ΔSAC nên K là trung điểm của SO .

Suy ra $V_{O.BMEN} = V_{S.BMEN}$.

$$\text{Ta có: } \frac{V_{S.BME}}{V_{S.BAD}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SE}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SE}{SD} \text{ và } \frac{V_{S.BNE}}{V_{S.BCD}} = \frac{SN}{SC} \cdot \frac{SE}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SE}{SD}.$$

$$\text{Suy ra } V_{S.BMEN} = V_{S.BME} + V_{S.BNE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SE}{SD} \cdot V_{S.ABCD}.$$

Vì $OO' \parallel BE \Rightarrow O'$ là trung điểm của ED .

Mặt khác: $KE \parallel OO' \Rightarrow E$ là trung điểm của SO' .

$$\text{Do đó } SE = EO' = O'D \Rightarrow \frac{SE}{SD} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Suy ra } V_{S.BMEN} = \frac{1}{6} V_{S.ABCD}$$

$$\text{Ta có: } S_{ABCD} = a^2.$$

$$\text{Xét } \Delta SOA \text{ vuông tại } O \text{ có: } SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{BD}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Do đó: } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.BMEN} = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^3 \sqrt{2}}{6} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{36}.$$

Câu 43. (Kim Liên - Hà Nội - 2020) Cho khối tứ diện $ABCD$ có cạnh AC, BD thỏa mãn $AC^2 + BD^2 = 16$ và các cạnh còn lại đều bằng 6. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{32\sqrt{2}}{3}$.

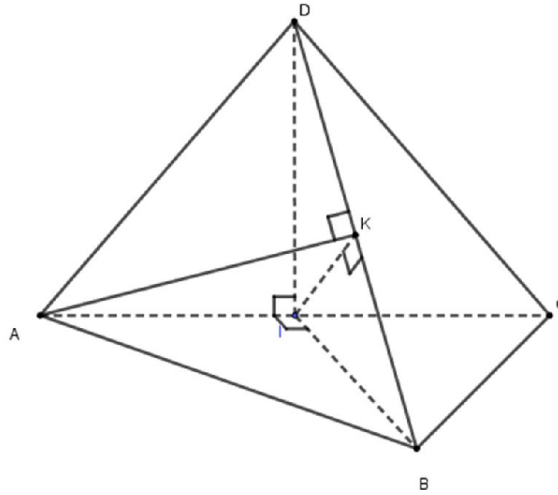
B. $\frac{16\sqrt{2}}{3}$.

C. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{32\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AC, BD .

Ta có: $AC \perp IB, AC \perp ID \Rightarrow AC \perp (BID) \Rightarrow V_{ABCD} = 2.V_{ABID}$

$$V_{ABID} = \frac{1}{3} AI \cdot S_{IBD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AC \cdot \frac{1}{2} IK \cdot BD \text{ (Do } IB = ID \text{ nên tam giác } IBD \text{ cân tại } I)$$

$$BD = \sqrt{16 - AC^2}; 0 < AC < 4$$

$$IK^2 = \frac{IB^2 + ID^2}{2} - \frac{BD^2}{4} = ID^2 - \frac{BD^2}{4} = AD^2 - \frac{AC^2}{4} - \frac{BD^2}{4} = 32 \Rightarrow IK = 4\sqrt{2}$$

$$V_{ABCD} = 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot AC \cdot 4\sqrt{2} \sqrt{16 - AC^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot AC \cdot \sqrt{16 - AC^2}, (0 < AC < 4)$$

Đặt $t = AC, (0 < t < 4)$.

Xét $f(t) = t\sqrt{16 - t^2}, (0 < t < 4)$

Ta có:

t	0	$2\sqrt{2}$	2
f'(t)	+	0	-
f(t)		8	

Vậy thể tích khối tứ diện cần tìm đạt giá trị lớn nhất là $\frac{16\sqrt{2}}{3}$.

Tìm giá trị lớn nhất của thể tích, ta có thể dùng cách khác như sau:

Áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số: AC^2 và $16 - AC^2$

$$\text{Ta có: } AC^2 + 16 - AC^2 \geq 2\sqrt{AC^2(16 - AC^2)} \Leftrightarrow AC \cdot \sqrt{16 - AC^2} \leq 8$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow AC^2 = 16 - AC^2 \Leftrightarrow AC = 2\sqrt{2}$$

Vậy thể tích khối tứ diện cần tìm đạt giá trị lớn nhất là $\frac{16\sqrt{2}}{3}$.

Câu 44. (Lê Lai - Thanh Hóa - 2020) Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a . Mặt bên tạo với đáy góc 60° . Mặt phẳng (P) chứa AB và tạo với đáy góc 30° và cắt SC, SD lần lượt tại M và N . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABMN$ theo a .

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

B. $V = \frac{5a^3\sqrt{3}}{48}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$ (vì $S.ABCD$ là hình chóp đều)

Gọi I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên DC, AB và gọi

$SO \cap (P) = \{E\} \Rightarrow ((SDC), (ABCD)) = SOI = 60^\circ$ và $((P), (ABCD)) = EJO = 30^\circ$.

Khi đó tam giác SIJ đều. Mà $EJO = 30^\circ = \frac{1}{2}SJI \Rightarrow JE$ là

phân giác của góc $SJI \Rightarrow F$ là trung điểm của SI (1) (với $JE \cap SI = \{F\}$). Mặt khác

$CD \parallel AB \Rightarrow CD \parallel (P) \Rightarrow CD \parallel MN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra MN là đường trung bình trong tam giác

$$SBC \Rightarrow \frac{SM}{SC} = \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Khi đó ta có } \begin{cases} \frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SC} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.ABM} = \frac{1}{2}V_{S.ABC} = \frac{1}{4}V_{S.ABCD} \\ \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{1}{4}V_{S.ACD} = \frac{1}{8}V_{S.ABCD} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABMN} = V_{S.ABM} + V_{S.AMN} = \frac{1}{4}V_{S.ABCD} + \frac{1}{8}V_{S.ABCD} = \frac{3}{8}V_{S.ABCD} (*)$$

$$\text{Tam giác } SIJ \text{ đều cạnh } a \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6} (2*)$$

$$\text{Thay } (2*) \text{ vào } (*) \text{ ta được } V_{S.ABMN} = \frac{3}{8} \cdot \frac{a^3\sqrt{3}}{6} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$$

Câu 45. (Liên trường Nghệ An - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$, đáy là tam giác ABC có $AB = BC\sqrt{5}$, $AC = 2BC\sqrt{2}$, hình chiếu của S lên (ABC) là trung điểm O của cạnh AC . Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng 2. Mặt phẳng (SBC) hợp với mặt phẳng (ABC) một góc α thay đổi. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{\sqrt{a}}{b}$, trong đó

$a, b \in \mathbb{N}^*$, a là số nguyên tố. Tổng $a + b$ bằng

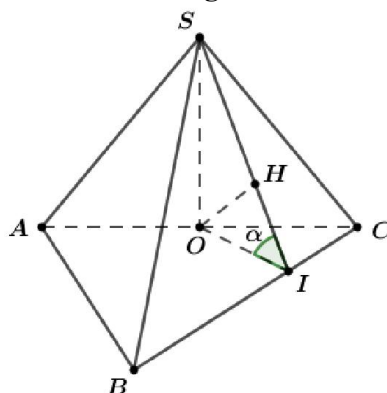
A. 8.

B. 7.

C. 6.

D. 5.

Lời giải



Áp dụng định lý Hê-rông trong tam giác ABC ta được diện tích $S_{ABC} = BC^2$.

Từ O kẻ $OI \perp BC$ tại I , suy ra góc tạo bởi (SBC) và (ABC) là $\widehat{SIO} = \alpha$.

Từ O kẻ $OH \perp SI$ tại H thì $d(A, (SBC)) = 2d(O, (SBC)) = OH \Rightarrow OH = 1$.

Tam giác OHI vuông tại H nên $OI = \frac{OH}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

Tam giác SOI vuông tại O nên $SO = OI \cdot \tan \alpha = \frac{OH}{\sin \alpha} \cdot \tan \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$.

Mà diện tích

$$S_{ABC} = BC^2 \Rightarrow 2OI = d(A, BC) = \frac{2S_{ABC}}{BC} = 2BC \Rightarrow OI = BC \Rightarrow S_{ABC} = OI^2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

$$\text{Thể tích khối chóp là } V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Xét hàm số $f(x) = (1-x^2)x = -x^3 + x$ trên $(0;1)$, $f'(x) = -3x^2 + 1$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1
$f'(x)$		0	
$f(x)$		$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	

Suy ra $f(x) \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}, \forall x \in (0;1)$.

$$\text{Do đó } (1-\cos^2 x)\cos x \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\cos^2 \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $a=3, b=2 \Rightarrow a+b=5$.

Câu 46. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020) Xét khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) , tính $\cos \alpha$ để thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất.

A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

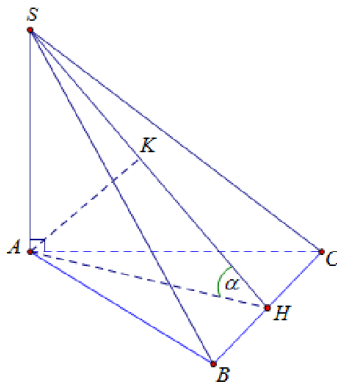
B. $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

C. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow AH \perp BC$ (vì tam giác ABC vuông cân tại A).

$$\text{Ta có } \begin{cases} AH \perp BC \text{ (cmt)} \\ SA \perp BC \text{ (} SA \perp (ABC) \text{)} \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} (ABC) \cap (SBC) = BC \\ AH \perp BC \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow ((ABC), (SBC)) = (AH, SH) = \widehat{SHA} = \alpha.$$

Kẻ $AK \perp SH$, với $K \in SH$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} AK \perp SH \text{ (gt)} \\ AK \perp BC \text{ (} BC \perp (SAH) \text{)} \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AK = 3.$$

$$\text{Tam giác } SHK \text{ vuông tại } K \text{ có } AH = \frac{AK}{\sin \alpha} = \frac{3}{\sin \alpha}.$$

$$\text{Tam giác } SAK \text{ vuông tại } K \text{ có } SA = \frac{AK}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{3}{\cos \alpha}.$$

$$\text{Tam giác } ABC \text{ vuông cân tại } A \text{ có } H \text{ là trung điểm của } BC \Rightarrow BC = 2AH = \frac{6}{\sin \alpha} \text{ và}$$

$$AB = AC = \frac{BC}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2} \sin \alpha}.$$

$$\text{Vậy } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{2} \sin \alpha} \cdot \frac{6}{\sqrt{2} \sin \alpha} = \frac{9}{\sin^2 \alpha}.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{3}{\cos \alpha} = \frac{9}{(1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha}.$$

$$\text{Xét hàm số } y = (1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha \text{ với } \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\text{Đặt } t = \cos \alpha \Rightarrow t \in [0; 1] \Rightarrow y = (1 - t^2)t = t - t^3$$

$$\text{Suy ra } y' = 1 - 3t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\sqrt{3}}{3} \in [0; 1] \\ t = -\frac{\sqrt{3}}{3} \notin [0; 1] \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } y(0) = 0, y(1) = 0, y\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

$$\text{Vậy để thể tích khối chóp nhỏ nhất thì } (1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha \text{ lớn nhất bằng } \frac{2\sqrt{3}}{9} \text{ khi } \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 47. (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có chiều cao 8 và diện tích đáy bằng 11. Gọi M là trung điểm của AA' , N là điểm trên cạnh BB' sao cho $BN = 3B'N$ và P là điểm trên cạnh CC' sao cho $6CP = 5C'P$. Mặt phẳng (MNP) cắt cạnh DD' tại Q . Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, D, M, N, P và Q bằng

A. $\frac{88}{3}$.

B. 42.

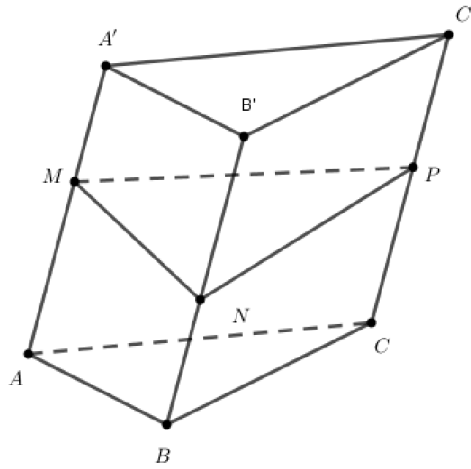
C. 44.

D. $\frac{220}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Trước tiên ta chứng minh bổ đề sau:



Cho hình lăng trụ như hình vẽ, $V_{ABC.MNP} = \frac{1}{3} \left(\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} \right) V_{ABC.A'B'C'}$.

Chứng minh:

$$V_{ABC.MNP} = V_{N.ACB} + V_{N.ACPM}$$

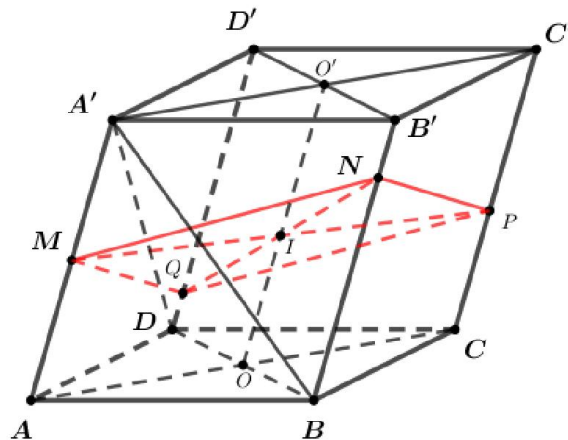
$$V_{N.ACB} = \frac{BN}{BB'} \cdot V_{B'.ACB} = \frac{BN}{BB'} \cdot \frac{1}{3} \cdot V_{ABC.A'B'C'}$$

$$\frac{V_{N.ACPM}}{V_{B'.ACC'A'}} = \frac{S_{ACPM}}{S_{ACC'A'}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (CP + AM)}{AA'} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{CP}{CC'} + \frac{AM}{AA'} \right)$$

$$\Rightarrow V_{N.ACPM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{CP}{CC'} + \frac{AM}{AA'} \right) \cdot \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'}$$

Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh.

Bây giờ ta áp dụng vào giải bài toán.



Ta có: $\begin{cases} (ADD'A') \parallel (BCC'B') \\ MQ \subset (MNP) \cap (ADD'A') \Rightarrow NP \parallel MQ, \text{ tương tự ta cũng có } MN \parallel PQ. \text{ Do đó } MNPQ \\ NP \subset (MNP) \cap (BCC'B') \end{cases}$

là hình bình hành.

Ta có OI là đường trung bình của hai hình thang $AMPC$ và $BNQD$ suy ra

$$2OI = MA + PC = DQ + NB \Rightarrow \frac{MA}{AA'} + \frac{PC}{CC'} = \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'}$$

Dựa vào hình vẽ ta chia khối lăng trụ làm hai phần khi cắt bởi mặt phẳng $(BDD'B')$. Do đó

$$V_{A'D'B'.ADB} = V_{BD'C'.BDC} = 44.$$

$$\begin{aligned}
 V_{ABCD.MNPQ} &= V_{ABD.MNQ} + V_{BCD.NPQ} \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{MA}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'} \right) V_{ABD.A'B'D'} + \frac{1}{3} \left(\frac{CP}{CC'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'} \right) V_{BCD.B'C'D'} \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{MA}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'} + \frac{CP}{CC'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'} \right) \cdot \frac{1}{2} V_{ABC.A'B'C'} \\
 &= \frac{1}{3.2} \left[3 \cdot \left(\frac{MA}{AA'} + \frac{CP}{CC'} \right) \right] V_{ABC.A'B'C'} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{MA}{AA'} + \frac{CP}{CC'} \right) V_{ABC.A'B'C'} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{11} \right) \cdot 88 = 42
 \end{aligned}$$

Câu 48. (Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, mặt bên (SAB) là một tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ và có diện tích bằng $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ (đvdt). Một mặt phẳng đi qua trọng tâm tam giác SAB và song song với mặt đáy $(ABCD)$ chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần, tính thể tích V của phần chứa điểm S .

A. $V = 8$.

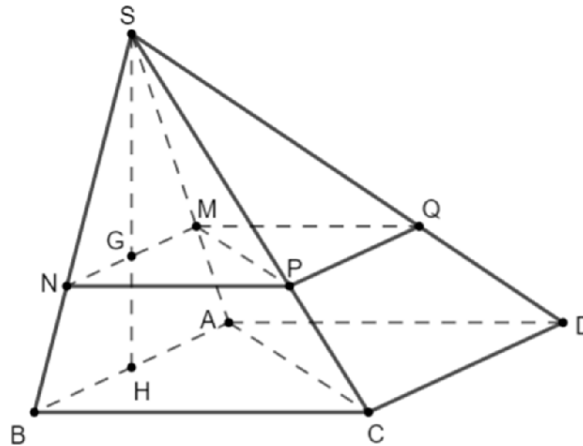
B. $V = 24$.

C. $V = 36$.

D. $V = 12$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm AB . Do $\triangle SAB$ đều và $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.

$$\text{Ta có } S_{\triangle SAB} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{4} \Rightarrow AB = 3\sqrt{3} \Rightarrow SH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot AB^2 \cdot SH = \frac{1}{3} (3\sqrt{3})^2 \cdot \frac{9}{2} = \frac{81}{2} \text{ (đvtt)}.$$

Gọi G là trọng tâm tam giác SAB , qua G kẻ đường thẳng song song với AB , cắt SA và SB lần lượt tại M , N . Qua N kẻ đường thẳng song song với BC cắt SC tại P , qua M kẻ đường thẳng song song với AD cắt SD tại Q . Suy ra $(MNPQ)$ là mặt phẳng đi qua G và song song với $(ABCD)$.

$$\text{Khi đó } \frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = \frac{SQ}{SD} = \frac{SG}{SH} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Có } \frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} = \left(\frac{2}{3} \right)^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow V_{S.MNP} = \frac{8}{27} V_{S.ABC} = \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{4}{27} V_{S.ABCD}.$$

$$\text{Có } \frac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SP}{SC} \cdot \frac{SQ}{SD} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow V_{S.MPQ} = \frac{8}{27} V_{S.ACD} = \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{4}{27} V_{S.ABCD}.$$

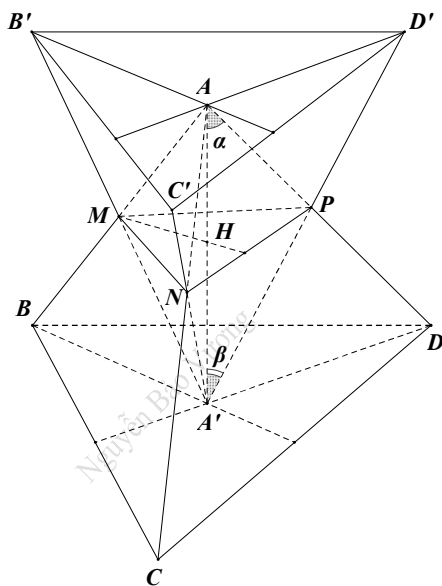
$$\text{Vậy } V_{S.MNPQ} = V_{S.MNP} + V_{S.MPQ} = \frac{4}{27} V_{S.ABCD} + \frac{4}{27} V_{S.ABCD} = \frac{8}{27} V_{S.ABCD} = \frac{8}{27} \cdot \frac{81}{2} = 12 \text{ (đvtt)}.$$

Câu 49. (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020) Cho hai hình chóp tam giác đều có cùng chiều cao. Biết đỉnh của hình chóp này trùng với tâm của đáy hình chóp kia, mỗi cạnh bên của hình chóp này đều cắt một cạnh bên của hình chóp kia. Cạnh bên có độ dài bằng a của hình chóp thứ nhất tạo với đường cao một góc 30° , cạnh bên của hình chóp thứ hai tạo với đường cao một góc 45° . Tính thể tích phần chung của hai hình chóp đã cho?

A. $\frac{3(2-\sqrt{3})a^3}{64}$. B. $\frac{(2-\sqrt{3})a^3}{32}$. C. $\frac{9(2-\sqrt{3})a^3}{64}$. D. $\frac{27(2-\sqrt{3})a^3}{64}$.

Lời giải

Chọn C



Hai hình chóp $A.BCD$ và $A'.B'C'D'$ là hai hình chóp đều, có chung đường cao AA' , A là tâm của tam giác $B'C'D'$ và A' là tâm của tam giác BCD .

Ta có: $(BCD) \parallel (B'C'D')$; $AB = AC = AD = a$; $\widehat{BAA'} = \alpha$; $\widehat{AA'B'} = \beta$.

Do AB cắt $A'B'$ tại M nên $AB' \parallel A'B$.

Gọi N là giao điểm của AC và $A'C'$; P là giao điểm của AD và $A'D'$.

Tương tự ta có: $AC' \parallel A'C$, $AD' \parallel A'D$.

Từ đó suy ra các cạnh của $\triangle BCD$ và $\triangle B'C'D'$ song song với nhau từng đôi một.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \frac{MB}{MA} = \frac{A'B}{AB'} \\ \frac{NC}{NA} = \frac{A'C}{AC'} \\ AB' = AC'; A'B = A'C \end{cases} \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{NC}{NA} \Rightarrow MN \parallel BC.$$

Tương tự ta có: $NP \parallel CD$ và $MP \parallel BD$.

Suy ra: $\triangle MNP$ là tam giác đều. Gọi H là giao điểm của OO' và (MNP) , H là tâm của tam giác MNP .

Trong tam giác $AA'D$ có: $AA' = AD \cdot \cos \alpha = a \cdot \cos \alpha$ (1).

Đặt $x = MH$. Hai tam giác AHM và tam giác $A'HM$ vuông tại H cho:

$$\begin{cases} AH = MH \cdot \cot \alpha = x \cdot \cot \alpha \\ A'H = MH \cdot \cot \beta = x \cdot \cot \beta \end{cases} \Rightarrow AA' = x(\cot \alpha + \cot \beta) \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra: $a \cdot \cos \alpha = x(\cot \alpha + \cot \beta) \Leftrightarrow x = \frac{a \cdot \cos \alpha}{\cot \alpha + \cot \beta}.$

Tam giác MNP đều có cạnh $MN = x\sqrt{3}$ nên:

$$S_{\triangle MNP} = \frac{MN^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a^2 \cos^2 \alpha}{(\cot \alpha + \cot \beta)^2}$$

Phần chung của hai hình chóp $A.BCD$ và $A'.B'C'D'$ là hai hình chóp đỉnh A và A' có chung nhau mặt đáy là tam giác MNP . Do đó thể tích của nó là:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle MNP} \cdot (AH + A'H) = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle MNP} \cdot AA' = \frac{a^3 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos^3 \alpha}{4(\cot \alpha + \cot \beta)^2}$$

Với $\alpha = 30^\circ$ và $\beta = 45^\circ$ thì $V = \frac{9a^3}{32(\sqrt{3}+1)^2} = \frac{9(2-\sqrt{3})a^3}{64}.$

Câu 50. (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = y$ ($y > 0$) và vuông góc với mặt đáy ($ABCD$). Trên cạnh AD lấy điểm M và đặt $AM = x$ ($0 < x < a$). Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp $S.ABCM$, biết $x^2 + y^2 = a^2$.

A. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{9}.$

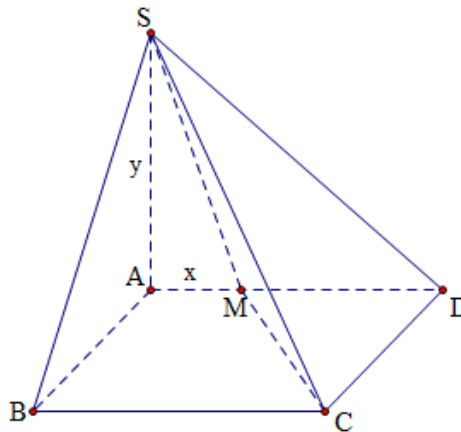
B. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{3}.$

C. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{8}.$

D. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{5}.$

Lời giải

Chọn C



Ta có: $S_{ABCM} = \frac{1}{2}(AM + BC) \cdot AB = \frac{1}{2}(x + a) \cdot a.$

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCM$ là $V = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCM} = \frac{1}{3} y \cdot \frac{1}{2}(ax + a^2) = \frac{a}{6}(xy + ay)$

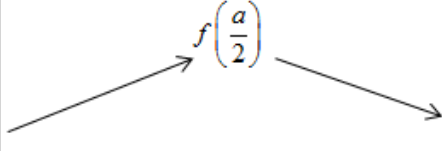
$$\Leftrightarrow V^2 = \frac{a^2}{36} y^2 (x + a)^2 \Leftrightarrow \frac{36}{a^2} V^2 = (a^2 - x^2)(x + a)^2$$

Xét hàm số $f(x) = (a^2 - x^2)(x + a)^2$ trên khoảng $(0; a)$.

Ta có: $f'(x) = -2x(x + a)^2 + 2(a^2 - x^2)(x + a) = 2(x + a)^2(a - 2x)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \quad (\text{Vì } x > 0)$$

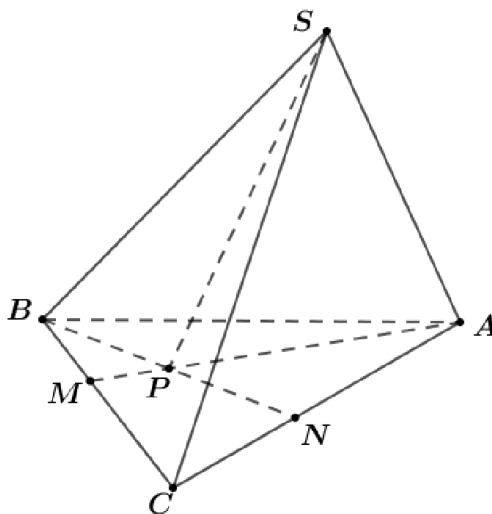
Bảng biến thiên

x	0	$\frac{a}{2}$	a
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Từ bảng biến thiên suy ra: $\max_{(0;a)} f(x) = f\left(\frac{a}{2}\right) = \left(a^2 - \frac{a^2}{4}\right)\left(\frac{a}{2} + a\right)^2 = \frac{27a^4}{16}$

$$\text{Vậy } V_{\max} = \sqrt{\frac{a^2}{36} \cdot \max_{(0;a)} f(x)} = \sqrt{\frac{a^2}{36} \cdot \frac{27a^4}{16}} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{8}.$$

Câu 51. (Hải Hậu - Nam Định - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ với các điểm M, N thứ tự nằm trên các cạnh BC, AC (khác A, B, C) và P là giao điểm của AM và BN (hình vẽ minh họa).



Biết thể tích các khối chóp $SABP$, $SAPN$, $SCNP$ thứ tự là 30, 20, 10. Thể tích khối chóp $S.ABC$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(72; 75]$.

B. $[65; 69]$.

C. $(69; 72]$.

D. $(75; 78]$.

Lời giải

Chọn A

Gọi h là chiều cao của hình chóp.

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.ABP}}{V_{S.APN}} = \frac{30}{20} \Leftrightarrow \frac{S_{ABP}}{S_{APN}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{BP}{PN} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{S_{CBP}}{S_{CPN}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BP \cdot d(C, (BP))}{\frac{1}{2} \cdot PN \cdot d(C, (PN))} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{V_{S.CBP}}{V_{S.CPN}} = \frac{3}{2} \Rightarrow V_{S.CBP} = \frac{3}{2} \cdot V_{S.CPN} = \frac{3}{2} \cdot 10 = 15.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = V_{S.ABP} + V_{S.APN} + V_{S.CNP} + V_{S.CBP} = 30 + 20 + 10 + 15 = 75.$$

Câu 52. (Kim Thành - Hải Dương - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi K là trung điểm SC . Mặt phẳng chứa AK cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M và N . Gọi V_1, V theo thứ tự là thể tích khối chóp $S.AMKN$ và khối chóp $S.ABCD$. Giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V}$ bằng

A. $\frac{3}{8}$.

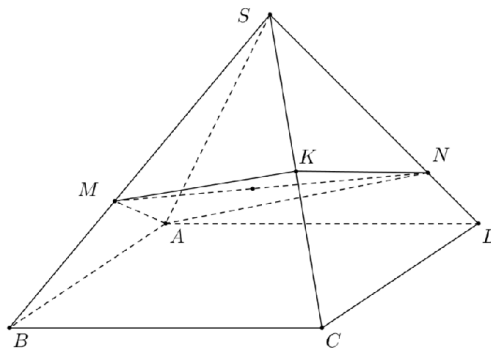
B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Giả sử $x = \frac{SM}{SB}$, $y = \frac{SN}{SD}$.

Ta có $ABCD$ là hình bình hành nên $V_{S.ABC} = V_{S.ACD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{1}{2}V$.

$$V_{S.AMKN} = V_{S.AMK} + V_{S.AKN} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SK}{SC} \cdot V_{S.ABC} + \frac{SK}{SC} \cdot \frac{SN}{SD} \cdot V_{S.ACD} = \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2}V + \frac{1}{2}y \cdot \frac{1}{2}V = \frac{1}{4}V \cdot (x + y)$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{1}{4}(x + y).$$

Mặt khác, $V_{S.AMKN} = V_{S.AMN} + V_{S.KMN} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SD} \cdot V_{S.ABD} + \frac{SK}{SC} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SD} \cdot V_{S.ABC}$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{2}xy \cdot V + \frac{1}{2}xy \cdot \frac{1}{2}V = \frac{3xy}{4}V \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{3xy}{4}.$$

Do đó $\frac{1}{4}(x + y) = \frac{3}{4}xy \Rightarrow x + y = 3xy$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có $3xy = x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow \sqrt{xy} \geq \frac{2}{3} \Rightarrow xy \geq \frac{4}{9}$

Do đó $\frac{V_1}{V} = \frac{3}{4}xy \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{3}$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x + y = 3xy \\ x = y \end{cases} \Rightarrow x = y = \frac{2}{3}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V}$ là $\frac{1}{3}$.

Câu 53. (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có diện tích bằng $12a^2$; khoảng cách từ S tới mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $4a$. Gọi L là trọng tâm tam giác ACD ; gọi T và V lần lượt là trung điểm các cạnh SB và SC . Mặt phẳng (LTV) chia hình chóp thành hai khối đa diện, hãy tính thể tích của khối đa diện chứa đỉnh S .

A. $\frac{20a^3}{3}$.

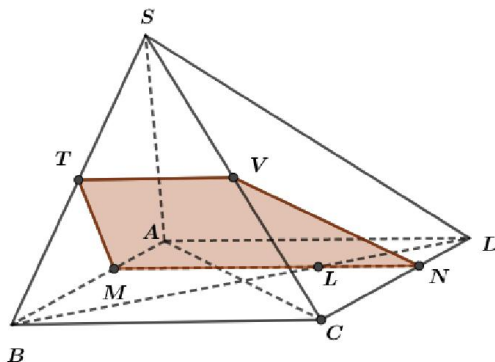
B. $8a^3$.

C. $\frac{28a^3}{3}$.

D. $\frac{32a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



$$V = V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} 12a^2 \cdot 4a = 16a^3.$$

Mặt phẳng (LTV) cắt AB, CD ở M và N sao cho $MN \parallel BC \parallel TV$.

$$\text{Đặt } V' = V_{S.ADNMTV} = V_{S.ABMN} + V_{S.TVMN}$$

$$\text{Ta có: } V_{S.ADNM} = \frac{1}{3} V$$

Xét khối chóp $S.MNCB$ có đáy là hình bình hành:

$$a = \frac{SM}{SM} = 1; b = \frac{SN}{SN} = 1; c = \frac{SB}{ST} = 2; d = \frac{SC}{SV} = 2$$

$$\text{Khi đó } \frac{V_{S.TVMN}}{V_{S.MNBC}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd} = \frac{3}{8} \Rightarrow V_{S.TVMN} = \frac{2}{3} V \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{4} V.$$

$$\text{Do đó } V' = \frac{1}{3} V + \frac{1}{4} V = \frac{7}{12} V = \frac{7}{12} \cdot 16a^3 = \frac{28}{3} a^3.$$

Câu 54. (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có thể tích bằng 1. Gọi M là trung điểm của SA và N là điểm đối xứng của A qua D . Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp thành hai khối đa diện. Gọi (H) là khối đa diện có chứa đỉnh. Thể tích của khối đa diện (H) bằng

A. $\frac{7}{12}$.

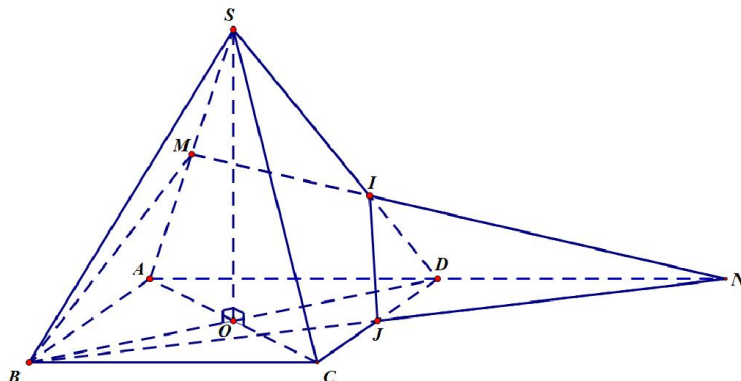
B. $\frac{4}{7}$.

C. $\frac{5}{12}$.

D. $\frac{3}{7}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ ta có SO là chiều cao của hình chóp.

Trong mặt phẳng (SAD) gọi I là giao điểm của MN và SD ta suy ra I là trọng tâm của tam

$$\text{giác } SAN \text{ do đó } \frac{SI}{SD} = \frac{NI}{NM} = \frac{2}{3}.$$

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi J là giao điểm của BN và CD ta suy ra J là trung điểm của CD và BN .

Ta có $S_{\triangle MBN} = S_{\triangle ABCD}$ và $d(M, (ABCD)) = \frac{1}{2}SO$ suy ra $V_{MABN} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD}$ (1)

Từ giả thiết ta có $V_{(H)} = V_{S.ABCD} - V_{ABM.DJI} \cdot (2)$

Xét trong khối chóp $N.ABM$ áp dụng công thức tính tỷ số thể tích ta có

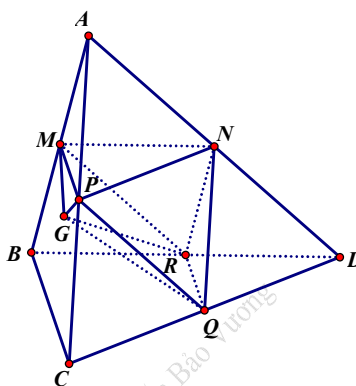
$$\frac{V_{NDJI}}{V_{NABM}} = \frac{NI}{NM} \cdot \frac{ND}{NA} \cdot \frac{NJ}{NB} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow V_{NDJI} = \frac{1}{6}V_{NABM} \text{ do vậy } V_{ABM.DJI} = \frac{5}{6}V_{NABM} = \frac{5}{6}V_{MABN} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có thể tích của (H) là

$$V_{(H)} = V_{S.ABCD} - \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{7}{12}.$$

Vậy thể tích của khối đa diện (H) bằng $\frac{7}{12}$.

Câu 55. (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020) Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V . Gọi M, N, P, Q, R lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, AC, DC, BD và G là trọng tâm tam giác ABC (như hình vẽ). Tính thể tích khối đa diện lồi $MNPQRG$ theo V .



A. $\frac{V}{2}$.

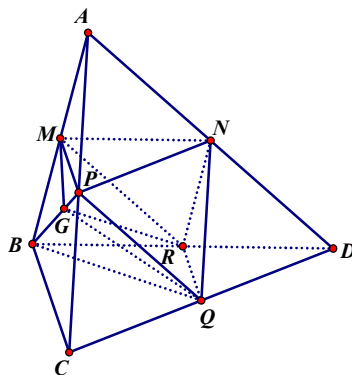
B. $\frac{V}{6}$.

C. $\frac{V}{3}$.

D. $\frac{2V}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $V_{MNPQRG} = V_{G.MPQR} + V_{N.MPQR}$

$$V_{G.MPQR} = \frac{1}{3}V_{B.MPQR} = \frac{2}{3}V_{B.PQR}$$

$$= \frac{2}{3}V_{P.BQR} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}V_{A.BQR}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}V_{A.BCD} = \frac{1}{12}V$$

$$V_{N.MPQR} = 2V_{N.MPR} = 2V_{P.MNR}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} V_{C.MNR} = \frac{1}{4} V_{C.ABD}$$

$$= \frac{1}{4} V.$$

$$\text{Vậy } V_{MNPQGR} = \frac{1}{12} V + \frac{1}{4} V = \frac{V}{3}.$$

Câu 56. (Trần Phú - Quảng Ninh - 2020) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 6. Gọi M, N và P là các điểm nằm trên cạnh $A'B', B'C'$ và BC sao cho M là trung điểm của $A'B'$, $B'N = \frac{3}{4} B'C'$ và $BP = \frac{1}{4} BC$. Đường thẳng NP cắt đường thẳng BB' tại E và đường thẳng EM cắt đường thẳng AB tại Q . Thể tích của khối đa diện lồi $AQPCA'MNC'$ bằng

A. $\frac{23}{3}$.

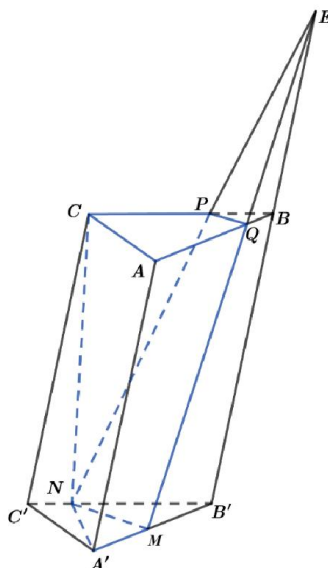
B. $\frac{23}{6}$.

C. $\frac{59}{12}$.

D. $\frac{19}{6}$.

Lời giải

Chọn C



$$\text{Ta có } \frac{EB}{EB'} = \frac{EQ}{EM} = \frac{EP}{EN} = \frac{BP}{B'N} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Suy ra } d(E, (A'B'C')) = \frac{3}{2} d(B, (A'B'C')).$$

$$\text{Mà ta lại có } \frac{S_{B'MN}}{S_{A'B'C'}} = \frac{B'N}{B'C'} \cdot \frac{B'M}{B'A'} = \frac{3}{8}.$$

$$\text{Và } V_{E.MB'N} = \frac{1}{3} d(E, (MB'N)) \cdot S_{MB'N} = \frac{3}{16} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{9}{8}.$$

$$\text{Ta lại có } \frac{V_{E.QPB}}{V_{E.MNB'}} = \frac{EQ}{EM} \cdot \frac{EP}{EN} \cdot \frac{EB}{EB'} = \left(\frac{EB}{EB'} \right)^3 = \frac{1}{27}.$$

$$\text{Suy ra } V_{BQP.B'MN} = V_{E.MB'N} - V_{EBQP} = \frac{26}{27} V_{E.MB'N}.$$

$$\text{Vậy } V_{AQPCA'MNC'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{BQP.B'MN} = 6 - \frac{26}{27} \cdot \frac{9}{8} = \frac{59}{12}.$$

----- HẾT -----