



Câu 1. [HSG-LONG AN 2021-2022] Giải hệ phương trình sau trên tập số thực:

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 1} = y + \sqrt{y^2 - 1} & (1) \\ x^2 + y^2 - xy = 1 & (2). \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện $y^2 \geq 1$.

Ta có: $x + \sqrt{x^2 + 1} = y + \sqrt{y^2 - 1} \Leftrightarrow x - y = \sqrt{y^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1} (*)$

Bình phương hai vế phương trình trên ta được phương trình hệ quả

$$x^2 - 2xy + y^2 = y^2 - 1 + x^2 + 1 - 2\sqrt{x^2 + 1}\sqrt{y^2 - 1} \Leftrightarrow xy = \sqrt{x^2 + 1}\sqrt{y^2 - 1}.$$

Tiếp tục bình phương hai vế ta được $x^2 y^2 = x^2 y^2 - x^2 + y^2 - 1 \Leftrightarrow y^2 - x^2 = 1 (3)$.

Kết hợp (3) với (2) ta có

$$y^2 - x^2 = x^2 + y^2 - xy \Leftrightarrow 2x^2 - xy = 0 \Leftrightarrow x(2x - y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2x \end{cases}.$$

Với $x = 0$ thế vào (2) ta được $y = \pm 1$, thử lại phương trình (*) ta chỉ nhận nghiệm $y = 1$.

Với $y = 2x$ thế vào (2) ta được

$$x^2 + 4x^2 - 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(0; 1); \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right); \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Câu 2. [HSG-LONG AN 2021-2022] a) Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (H) và đường thẳng

(d): $y = (m^2 + 1)x - 2$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (H) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho biểu thức $P = 12(x_1 + x_2) + 11x_1 x_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (H) và đường thẳng (d) là

$$\frac{2x+1}{x-1} = (m^2 + 1)x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 = [(m^2 + 1)x - 2](x-1) \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 + 1)x^2 - (m^2 + 5)x + 1 = 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 + 1)x^2 - (m^2 + 5)x + 1 = 0 (*) \\ -3 \neq 0 \end{cases}.$$

Do vậy, đường thẳng (d) cắt đồ thị (H) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = (m^2 + 5)^2 - 4(m^2 + 1) > 0 \Leftrightarrow m^4 + 6m^2 + 21 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$.

Theo định lý Viét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m^2 + 5}{m^2 + 1} \\ x_1 x_2 = \frac{1}{m^2 + 1} \end{cases}$.

Khi đó $P = \frac{12(m^2+5)}{m^2+1} + \frac{11}{m^2+1} = \frac{12m^2+71}{m^2+1} = 12 + \frac{59}{m^2+1}$.

$$\text{Do } m^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{m^2 + 1} \leq 1. \text{ Suy ra } P = 12 + \frac{59}{m^2 + 1} \leq 71.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m = 0$.

Vậy $m = 0$ thì biểu thức P đạt giá trị lớn nhất bằng 71.

Câu 2. [HSG-LONG AN 2021-2022] b) Cho hàm số $y = 2x - 2 - m\sqrt{x^2 - 4x + 5}$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có cực tiểu?

Lời giải

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Đạo hàm

$$y' = 2 - m \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}} = \frac{2\sqrt{x^2-4x+5} - m(x-2)}{\sqrt{x^2-4x+5}}.$$

Hàm số có cực tiểu khi và chỉ khi $y' = 0$ có nghiệm và đổi dấu từ âm sang dương qua nghiệm đó.

Ta có

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - 4x + 5} - m(x - 2) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}}{x - 2} \text{ vì } x = 2 \text{ không là nghiệm của phương}$$

trình.

Xét hàm số $f(x) = \frac{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}}{x - 2}, x \neq 2$. Ta có

$$f'(x) = 2 \frac{\frac{(x-2)}{\sqrt{x^2-4x+5}}(x-2) - \sqrt{x^2-4x+5}}{(x-2)^2} = -\frac{1}{(x-2)^2 \sqrt{x^2-4x+5}} < 0 \forall x \in \mathbb{R}.$$

Các giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

Bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$	x_1	2	x_2	$+\infty$
$f(x)$					

Ta xét các trường hợp

Với $m \in (-\infty; -2)$ với $x < 2$, phương trình $2\sqrt{x^2 - 4x + 5} - m(x - 2) = 0$ có nghiệm $x = x_1$. Khi đó $\forall x < x_1$ thì

$$m < \frac{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}}{x - 2} \Leftrightarrow m(x - 2) > 2\sqrt{x^2 - 4x + 5} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - 4x + 5} - m(x - 2) < 0.$$

Nếu $\forall x > x_1$ thì

$$m > \frac{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}}{x - 2} \Leftrightarrow m(x - 2) < 2\sqrt{x^2 - 4x + 5} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - 4x + 5} - m(x - 2) > 0.$$

Như vậy $y' = 0$ có nghiệm $x = x_1$ và đổi dấu từ âm sang dương qua nghiệm đó.

Với $m \in (2; +\infty)$ với $x < 2$, phương trình $2\sqrt{x^2 - 4x + 5} - m(x - 2) = 0$ có nghiệm $x = x_2$.

Khi đó $\forall x < x_2$ thì

$$m < \frac{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}}{x - 2} \Leftrightarrow m(x - 2) < 2\sqrt{x^2 - 4x + 5} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - 4x + 5} - m(x - 2) > 0$$

Nếu $\forall x > x_2$ thì

$$m > \frac{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}}{x - 2}, \forall x > x_2 \Leftrightarrow m(x - 2) > 2\sqrt{x^2 - 4x + 5} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - 4x + 5} - m(x - 2) < 0.$$

Vì vậy $y' = 0$ có nghiệm $x = x_2$ và đổi dấu từ dương sang âm qua nghiệm đó nên ta loại trường hợp này.

Vậy $m \in (-\infty; -2)$ là các giá trị cần tìm.

Cách 2.

Xét $y = 2x - 2 - m\sqrt{x^2 - 4x + 5}$ có tập xác định trên miền số thực

$$\Rightarrow y' = 2x - \frac{m(x - 2)}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{m(x - 2)}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}}{x - 2} \quad (*)$$

$$\text{Đặt } g(x) = \frac{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}}{x - 2} \Rightarrow g'(x) = \frac{-2}{(x - 2)^2 \sqrt{x^2 - 4x + 5}} < 0, \forall x \neq 2.$$

Từ đó ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	$-$		$-$
y	-2		2
	$\nearrow$		$\searrow$
		$-\infty$	

Từ bảng biến thiên ta suy ra phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{cases}$.

$$\Rightarrow y'' = -m \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 5} - \frac{(x - 2)^2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}}{x^2 - 4x + 5} = \frac{-m}{(x^2 - 4x + 5)\sqrt{x^2 - 4x + 5}}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Với $m > 2 \Rightarrow y'' < 0$ tức hàm số không có cực tiểu.

Vậy với $m < -2$ thì hàm số ban đầu có cực tiểu.

Câu 3. [HSG-LONG AN 2021-2022] Cho tam giác ABC có các điểm D, E, F lần lượt thuộc các đường

thẳng BC, AC, AB sao cho $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -k^2$ với $k \neq 0$. Chứng minh rằng hai tam giác

ABC, DEF có chung tâm đường tròn ngoại tiếp O khi và chỉ khi hai tam giác này có chung trực tâm H .

Lời giải

Cách 1:

Bổ đề Euler: “Với mọi tam giác ABC có trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác lần lượt là G, H, O ta đều có $\overline{GO} = -2\overline{GH}$ ”.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , theo giả thiết ta có

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -k^2 \Leftrightarrow \overline{GD} = \frac{1}{1+k^2} \overline{GB} + \frac{k^2}{1+k^2} \overline{GC}.$$

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = -k^2 \Leftrightarrow \overline{GE} = \frac{1}{1+k^2} \overline{GC} + \frac{k^2}{1+k^2} \overline{GA}.$$

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -k^2 \Leftrightarrow \overline{GF} = \frac{1}{1+k^2} \overline{GA} + \frac{k^2}{1+k^2} \overline{GB}.$$

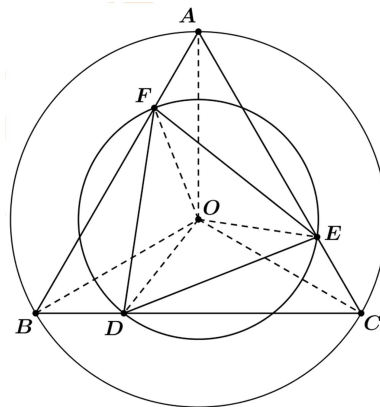
Suy ra $\overline{GD} + \overline{GE} + \overline{GF} = \overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0}$ hay G là trọng tâm tam giác DEF .

Vậy hai tam giác ABC, DEF có chung trọng tâm G .

Theo bổ đề có $\overline{GO} = -2\overline{GH}$ nên hai tam giác ABC, DEF có chung tâm đường tròn ngoại tiếp O khi và chỉ khi chúng có chung trực tâm H (đpcm).

Cách 2: Xài hệ thức Vector

Đầu tiên ta có hình vẽ như sau:



Gọi G là trọng tâm của $\triangle DEF$ khi đó ta có:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \overline{GD} + \overline{GE} + \overline{GF} \\ &= \left(\frac{BD}{BC} \overline{GC} + \frac{CD}{CB} \overline{GB} \right) + \left(\frac{CE}{CA} \overline{GA} + \frac{AE}{AC} \overline{GC} \right) + \left(\frac{AF}{AB} \overline{GB} + \frac{BF}{BA} \overline{GA} \right) \\ &= \left(\frac{BD}{BC} + \frac{AE}{AC} \right) \overline{GC} + \left(\frac{CD}{CB} + \frac{AF}{AB} \right) \overline{GB} + \left(\frac{CE}{CA} + \frac{BF}{BA} \right) \overline{GA} \\ &= \underbrace{\left(\frac{CE}{AC} + \frac{AE}{AC} \right)}_{=1} \overline{GC} + \underbrace{\left(\frac{BF}{BA} + \frac{AF}{AB} \right)}_{=1} \overline{GB} + \underbrace{\left(\frac{AF}{AB} + \frac{BF}{BA} \right)}_{=1} \overline{GA} = \overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC}. \end{aligned}$$

Suy ra $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0}$ tức G cũng chính là trọng tâm của $\triangle ABC$ (1).

Theo tính chất Euler, ta suy ra $OH = 2OG$ mà do hai tam giác ABC, DEF có chung trực tâm H nên suy ra kết hợp với (1) suy ra hai tam giác ABC, DEF có chung tâm đường tròn ngoại tiếp O .

Cách 3:

Giả sử tồn tại H là trực tâm của hai tam giác ABC, DEF .

Khi đó theo định lý Ceva ta luôn có: $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -1 = -k^6$ suy ra $k = 1$.

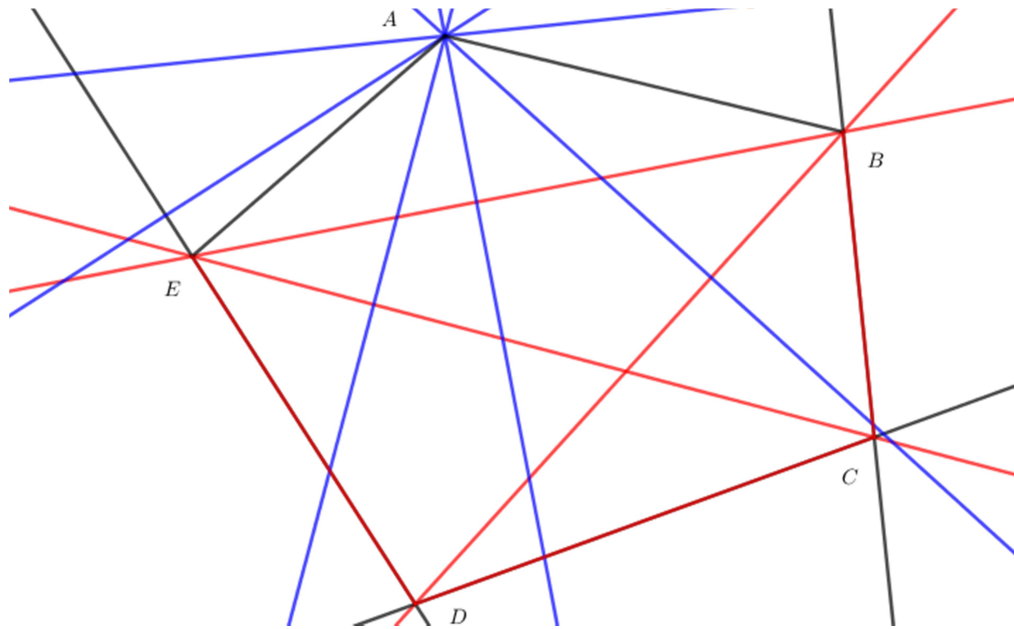
$$\text{Suy ra } \begin{cases} BD = DC \\ EC = EA \\ FA = FB \end{cases} \text{ tức } D, E, F \text{ lần lượt là trung điểm của } BC, CA, AB.$$

Mà do H là trực tâm của $\triangle ABC$ nên suy ra $\triangle ABC$ đều.

Chứng minh tương tự ta cũng suy ra $\triangle DEF$ đều.

Mà do hai tam giác chung trực tâm nên ta suy ra điều phải chứng minh.

Câu 4. [HSG-LONG AN 2021-2022] Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ trên mặt phẳng, biết rằng trong tất cả các đường thẳng qua các cạnh và đường chéo không có hai đường thẳng nào song song, không có hai đường thẳng nào vuông góc. Từ một đỉnh bất kì, kẻ tất cả các đường thẳng vuông góc với những đường thẳng nối hai đỉnh trong tất cả các đỉnh còn lại. Tìm số giao điểm của tất cả các đường thẳng vừa kẻ trên (không kể các đường thẳng qua các cạnh và đường chéo của ngũ giác).

Lời giải

Gọi X là tập hợp các đường thẳng đi qua các cạnh và các đường chéo của ngũ giác. Suy ra $n(X) = C_5^2 = 10$.

Gọi X_A là tập hợp tất cả các đường thẳng đi qua A và vuông góc với những đường thẳng nối hai đỉnh trong tất cả các đỉnh còn lại (khác A).

+ Ta có số đường thẳng được tạo thành từ các đỉnh B, C, D, E là $C_4^2 = 6$.

+ Do đó, $n(X_A) = 6$, đó là các đường màu xanh tương ứng với một đỉnh bất kỳ.

+ Ta có mọi phần tử trong tập hợp X_A đều phân biệt và $X_A \cap X = \emptyset$.

□ Thật vậy, Lấy $a_1 \in X_A \Rightarrow \exists d_1 \in X : a_1 \perp d_1$ và $a_2 \in X_A \Rightarrow \exists d_2 \in X : a_2 \perp d_2$. Giả sử $a_1 \equiv a_2$ thì $d_1 \parallel d_2$ (trái với giả thiết của đề bài). Vậy các đường thẳng trong X_A đều phân biệt.

□ Mặt khác, nếu có $a \in X_A \cap X \Rightarrow \exists d \in X : a \perp d$ (điều này trái giả thiết do a và d cùng thuộc X nên không thể vuông góc nhau được). Do đó, $X_A \cap X = \emptyset$.

Hoàn toàn tương tự cho 4 đỉnh còn lại B, C, D, E nên ta có tổng cộng $6.5 = 30$ đường thẳng thỏa mãn điều kiện: “Từ một đỉnh bất kì, kẻ tất cả các đường thẳng vuông góc với những đường thẳng nối hai đỉnh trong tất cả các đỉnh còn lại”.

Và trong 30 đường thẳng này đều phân biệt và không có 2 đường thẳng nào song song nhau.

□ Thật vậy, giả sử có hai đường thẳng a, b thuộc 30 đường thẳng trên và song song nhau. Khi đó, tồn tại hai đường thẳng phân biệt d, d' thuộc X để $a \perp d, b \perp d'$ mà $a \parallel b$ nên $d \parallel d'$ (trái với giả thiết của bài toán).

Vậy số giao điểm của tất cả các đường thẳng vừa kẻ chính là số giao điểm của 30 cạnh là: $C_{30}^2 = 435$ điểm.

Tuy nhiên, có những trường hợp hai đường song song hoặc các giao điểm trùng nhau.

Cụ thể:

+) Có đường thẳng nối 2 trong 5 điểm ban đầu. Mỗi đường như vậy sẽ có 3 đường vuông góc kẻ từ 3 điểm còn lại. Các đường này song song nhau nên mất 30 điểm, tức là còn lại 405 điểm.

+) Có tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 5 điểm ban đầu. Mỗi tam giác có ba đường vuông góc là ba đường cao, lẽ ra có 3 giao điểm nhưng trùng lại chỉ còn 1 giao điểm. Như vậy, mỗi tam giác mất 2 giao điểm nên 10 tam giác mất 20 giao điểm. Số giao điểm còn lại là 385.

+) Mỗi điểm thì sẽ có 6 đường thẳng vuông góc đi qua. Như vậy, lẽ ra có điểm thì trùng lại còn 1 điểm, mất 14 điểm. Do đó, trường hợp này mất 70 điểm nên tổng số điểm còn lại là 315.*

Theo giả thiết của đề ta dễ nhận thấy các trường hợp là **không trùng lặp nhau** nên kết quả cuối cùng là 315 điểm.

HẾT