

LÝ THUYẾT LUYỆN THI (ÁP DỤNG NHANH LÀM TRẮC NGHIỆM)

CHỦ ĐỀ 1: KHẢO SÁT MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

I. HÀM BẬC BA $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ có đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ **TXĐ:** $D = \mathbb{R}$

1) Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến:

Cách 1: Tính y' , giải pt: $y' = 0$. Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu của y' rồi từ đó suy ra khoảng đồng biến; khoảng nghịch biến. **Chú ý:** Nếu phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có 1 nghiệm kép thì nếu $a > 0$ ta kết luận hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Còn $a < 0$ ta kết luận hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Cách 2: Bấm Mode 7 thử đáp án (Chú ý nếu $(a; b)$ thì **Start** $a + 0,001$; **And** $b - 0,001$; **Step** $\frac{b-a}{29}$.

Cách 3: Shift $\int \rightarrow \frac{d}{dx}(f(x))|_{x=X}$ CALC thử nhiều giá trị. Nếu dương thì đồng biến, âm thì nghịch biến.

2) Tìm điểm cực trị (điểm cực đại, điểm cực tiểu) của hàm số là tìm x_{CD}, x_{CT} : Tính đạo hàm y' , giải phương trình $y' = 0$ tìm x , lập BBT suy ra x_{CD}, x_{CT} . Nếu phương trình: $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có 1 nghiệm kép thì ta kết luận hàm số không có cực trị.

3) Tìm giá trị cực trị (giá trị cực đại, giá trị cực tiểu) của hàm số là tìm y_{CD}, y_{CT} : Tính đạo hàm y' , giải phương trình $y' = 0$ tìm x , rồi suy ra y (y có giá trị lớn là y_{CD} , y có giá trị bé là y_{CT})

4) Tìm điểm cực trị (điểm cực đại, điểm cực tiểu) của đồ thị hàm số là tìm cặp số $(x_{CD}; y_{CD}), (x_{CT}; y_{CT})$: Tính đạo hàm y' , giải phương trình $y' = 0$ tìm x , rồi suy ra y , rồi suy ra cặp số cần tìm.

5) Tìm điểm uốn hay tâm đối xứng: tính y' , tính y'' , giải pt: $y'' = 0 \Rightarrow x = \dots \Rightarrow y = \dots \Rightarrow$ cặp số $(x; y)$

6) Tìm m để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a > 0)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$: Tính y' , tính $\Delta_{y'}$, cho $\Delta_{y'} \leq 0 \Rightarrow m \dots$

7) Tìm m để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a < 0)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$: Tính y' , tính $\Delta_{y'}$, cho $\Delta_{y'} \leq 0 \Rightarrow m \dots$

8) Tìm m để đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ có cực trị (có CĐ, CT): tính $\Delta_{y'}$, cho $\Delta_{y'} > 0 \Rightarrow m \dots$

9) Tìm m để đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ có không có cực trị (không có CĐ, CT):

tính $\Delta_{y'}$, cho $\Delta_{y'} \leq 0 \Rightarrow m \dots$

10) Hàm số đạt cực đại tại $x = x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) < 0 \end{cases} \Rightarrow m = \dots$; Đạt cực tiểu tại $x = x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow m = \dots$

Hàm số đạt cực trị tại $x = x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m = \dots$

11) Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ có tính chất:

a) Luôn cắt trục hoành. **b)** Luôn có tâm đối xứng (điểm uốn). **c)** Không có tiệm cận.

12) Sự tương giao. (số nghiệm là số giao điểm)

a) Giao với trục hoành (Ox): cho $y = 0$, bấm máy giải pt: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \Rightarrow x = \dots$

b) Giao với trục tung (Oy): cho $x = 0 \Rightarrow y = d$

c) Giao với $y = g(x)$: cho $ax^3 + bx^2 + cx + d = g(x) \Rightarrow x = \dots$

13) Tìm m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$

Ta tính y_{CD}, y_{CT} của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$

- Cắt nhau tại 3 điểm phân biệt khi $y_{CT} < m < y_{CD}$
- Cắt nhau tại 1 điểm phân biệt khi $m < y_{CT}$ hoặc $m > y_{CD}$
- Tiếp xúc nhau hay có 2 điểm chung khi $m = y_{CT}$ hoặc $m = y_{CD}$

14) Nhận dạng đồ thị. Nhận dạng đồ thị theo thứ tự dựa vào: hình dạng đồ thị thuộc hàm loại nào $\rightarrow$ dấu của hệ số $a \rightarrow$ Cực trị (nghiệm phương trình y') $\rightarrow$ giao điểm với trục tung Oy $\rightarrow$ giao điểm với trục hoành Ox...

(Đồ thị luôn đi từ trái qua phải. Đi lên thì đồng biến, đi xuống thì nghịch biến.)

Dấu của a Dấu Δ	$a > 0$	$a < 0$
Pt $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.		
Pt $y' = 0$ có nghiệm kép		
Pt $y' = 0$ vô nghiệm		

15) Cho đồ thị hàm số: $y = f(x)$

Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ là phần bên phải của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và phần đối xứng của nó qua trục Oy.

Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ là phần trên trục hoành của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và phần đối xứng của phần dưới trục hoành của đồ thị hàm số $y = f(x)$ qua trục hoành Ox.

II. HÀM BẬC 4 TRÙNG PHƯƠNG $y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

1) Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến: (Bấm máy giống hàm bậc 3)

Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu của y' rồi từ đó suy ra khoảng đồng biến; khoảng nghịch biến.

2) Tìm điểm cực trị (điểm cực đại, điểm cực tiểu) của hàm số là tìm x_{CD}, x_{CT} : Tính đạo hàm y' , giải phương trình $y' = 0$ tìm x , lập Bảng biến thiên rồi suy ra x_{CD}, x_{CT} .

3) Tìm giá trị cực trị (giá trị cực đại, giá trị cực tiểu) của hàm số là tìm y_{CD}, y_{CT} : Tính đạo hàm y' , giải phương trình $y' = 0$ tìm x , rồi suy ra y (y có giá trị lớn là y_{CD} , y có giá trị bé là y_{CT})

4) Tìm điểm cực trị (điểm cực đại, điểm cực tiểu) của đồ thị hàm số là tìm cặp số $(x_{CD}; y_{CD}), (x_{CT}; y_{CT})$:

Tính đạo hàm y' , giải phương trình $y' = 0$ tìm x , rồi suy ra y , rồi suy ra cặp số cần tìm.

5) Tìm điểm uốn: tính y' , tính y'' , giải pt: $y'' = 0 \Rightarrow x = \dots \Rightarrow y = \dots \Rightarrow$ cặp số $(x; y)$

6) Tìm m để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$ có 3 cực trị (có CĐ, CT): cho $a.b < 0 \Rightarrow m \dots$

7) Tìm m để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$ có 1 cực trị: cho $a.b \geq 0 \Rightarrow m \dots$

8) Tìm m để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$ có 1 CĐ, 2 CT): cho $\begin{cases} a.b < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases} \Rightarrow m...$

9) Tìm m để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$ có 3 CT tạo thành 1 Δ **vuông cân** $\Rightarrow 8a + b^3 = 0 \Rightarrow m = ...$

10) Tìm m để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$ có 3 CT tạo thành 1 Δ **đều** $\Rightarrow 24a + b^3 = 0 \Rightarrow m = ...$

11) Tìm m để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$ có 2 CĐ, 1 CT): cho $\begin{cases} a.b < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases} \Rightarrow m...$

12) Tìm m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$ có 2 điểm uốn: cho $a.b < 0 \Rightarrow m...$

13) Tìm m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$ không có điểm uốn: cho $a.b \geq 0 \Rightarrow m...$

14) Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$ có tính chất:

a) Luôn có cực trị. b) Nhận trục tung Oy làm trục đối xứng (*không có tâm đối xứng*). c) Không có tiệm cận.

15) Sự tương giao. (*số nghiệm là số giao điểm*)

a) Giao với trục hoành (Ox): cho $y=0$, bấm máy giải pt: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ xem x^2 là t bấm máy phương trình bậc hai với ẩn t. Chú ý chỉ nhận những $t \geq 0$.

b) Giao với trục tung (Oy): cho $x=0 \Rightarrow y = c$

c) Giao với $y = g(x)$: cho $ax^4 + bx^2 + c = g(x) \Rightarrow x = ...$

16) Tìm m để đường thẳng $y = m$ cắt đths $y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$

Ta tính y_{CD}, y_{CT} của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$

- Cắt nhau tại 4 điểm phân biệt $y_{CT} < m < y_{CD}$

- Cắt nhau tại 2 điểm phân biệt $m < y_{CT}$ nếu $a < 0$; còn $m > y_{CD}$ nếu $a > 0$

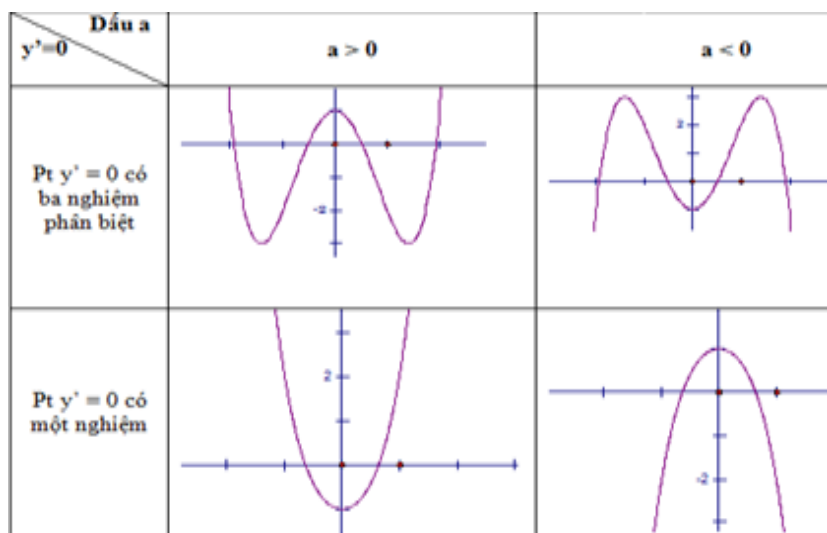
- Tiếp xúc nhau hay có 3 điểm chung khi $m = y_{CT}$ hoặc $m = y_{CD}$

- Đths $y = ax^4 + bx^2 + c (a > 0)$ nằm phía trên trục hoành khi $y_{CT} > 0$ (không cắt trục hoành)

- Đths $y = ax^4 + bx^2 + c (a < 0)$ nằm phía dưới trục hoành khi $y_{CD} < 0$ (không cắt trục hoành)

17) Nhận dạng đồ thị. Nhận dạng đồ thị theo thứ tự dựa vào: hình dạng đồ thị thuộc hàm loại nào $\rightarrow$ dấu của hệ số a $\rightarrow$ nghiệm phương trình y' $\rightarrow$ giao điểm với trục tung Oy $\rightarrow$ giao điểm với trục hoành...

(Đồ thị luôn đi từ trái qua phải. Đi lên thì đồng biến, đi xuống thì nghịch biến.)



III. HÀM NHẤT THỨC $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ **Có đạo hàm** $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ **TXĐ:** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-d}{c} \right\}$

1) Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$: Tính $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

Nếu $ad-bc > 0 \Rightarrow y' > 0$ suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty; \frac{-d}{c}\right); \left(\frac{-d}{c}; +\infty\right)$

Nếu $ad-bc < 0 \Rightarrow y' < 0$ suy ra hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; \frac{-d}{c}\right); \left(\frac{-d}{c}; +\infty\right)$

2) Đồ thị hàm số có các đường tiệm cận khi $ad-bc \neq 0 \Rightarrow m...$

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = \frac{-d}{c}$; đường tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$.

3) Đồ thị hàm số có tâm đối xứng $\left(\frac{-d}{c}; \frac{a}{c}\right)$

4) Tìm m để hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đồng biến trên từng khoảng xác định: Tính $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ cho $ad-bc > 0 \Rightarrow m..$

5) Tìm m để hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định: Tính $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ cho $ad-bc < 0 \Rightarrow m..$

6) Tìm m để hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đồng biến trên khoảng $(x_0; +\infty)$: cho $\begin{cases} ad-bc > 0 \\ x_0 \geq \frac{-d}{c} \end{cases} \Rightarrow m...$

7) Tìm m để hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; x_0)$: cho $\begin{cases} ad-bc > 0 \\ x_0 \leq \frac{-d}{c} \end{cases} \Rightarrow m...$

8) Tìm m để hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ nghịch biến trên khoảng $(x_0; +\infty)$: cho $\begin{cases} ad-bc < 0 \\ x_0 \geq \frac{-d}{c} \end{cases} \Rightarrow m...$

9) Tìm m để hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; x_0)$: cho $\begin{cases} ad-bc < 0 \\ x_0 \leq \frac{-d}{c} \end{cases} \Rightarrow m...$

10) Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có tính chất: a) Không có cực trị. b) Có tâm đối xứng $\left(\frac{-d}{c}; \frac{a}{c}\right)$.

11) Sự tương giao. (số nghiệm là số giao điểm)

a) Giao với trục hoành (Ox): cho $y=0$, bấm máy giải pt: $ax+b=0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a} \rightarrow A\left(\frac{-b}{a}; 0\right)$

b) Giao với trục tung (Oy): cho $x=0 \Rightarrow y = \frac{b}{d} \rightarrow B\left(0; \frac{b}{d}\right)$

c) Giao với $y = g(x)$: cho $\frac{ax+b}{cx+d} = g(x) \Rightarrow ax+b = g(x).(cx+d) \Rightarrow x = ...$

12) Tìm m để đường thẳng $y = m$ cắt đths $y = \frac{ax+b}{cx+d}$: cho $m > \frac{-d}{c}$ hoặc $m < \frac{-d}{c}$; Không cắt thì cho $m = \frac{-d}{c}$

13) Tìm m hoặc n để đường thẳng $y = mx + n$ cắt đths $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ tại 2 điểm phân biệt: Lập pt: $mx + n = \frac{ax+b}{cx+d}$

Đưa về phương trình bậc 2 chứa tham số. Cho $\Delta > 0 \Rightarrow m = \dots$ **Chú ý:** $x = \frac{-d}{c}$ không phải là nghiệm của pt.

14) Nhận dạng đồ thị: Nhận dạng đồ thị theo thứ tự dựa vào: hình dạng đồ thị thuộc hàm loại nào $\rightarrow$ dấu y' (dấu ad-bc) $\rightarrow$ giao điểm với trục tung Oy $\rightarrow$ giao điểm với trục hoành Ox...

❖ XÉT KHOẢNG ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(a; b)$

+ Nếu $f'(x) > 0 \forall x \in (a, b)$ thì $f(x)$ đồng biến trên khoảng đó. Nếu $f'(x) < 0 \forall x \in (a, b)$ thì $f(x)$ nghịch biến trên (a, b) .

+ Nếu $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$ thì $f(x)$ đồng biến trên khoảng đó. Nếu $f'(x) \leq 0 \forall x \in (a, b)$ thì $f(x)$ nghịch biến trên (a, b) .

Chú ý: Dấu bằng chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm.

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG MÁY TÍNH

* Tìm khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = f(x)$ trên TXĐ

Cách 1: Bấm Mode 7 thử đáp án (Chú ý nếu $(a; b)$ thì **start** $a + 0,001$; **and** $b - 0,001$; **step** $\frac{b-a}{29}$).

Nếu $f(x)$ tăng thì đồng biến, $f(x)$ giảm thì đồng biến.

Cách 2: Bấm Shift $\int \rightarrow \frac{d}{dx}(f(x))|_{x=x}$ CALC thử giá trị ở từng khoảng.

Nếu dương thì đồng biến, âm thì nghịch biến. Nên bấm CALC thử nhiều giá trị.

❖ TÌM GTLN – GTNN CỦA HÀM SỐ

✓ Số M được gọi là GTLN của hàm số $y = f(x)$ trên $D \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D: f(x) \leq M \\ \exists x_0 \in D: f(x_0) = M \end{cases}$

✓ Số m được gọi là GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên $D \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D: f(x) \geq m \\ \exists x_0 \in D: f(x_0) = m \end{cases}$

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG MÁY TÍNH

1. Tìm GTLN – GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$

Bấm **MODE** sau đó chọn 7 (TABLE) $\rightarrow$ Nhập biểu thức **f(x)** vào máy $\rightarrow$ “=” nhập **Start** = a; **End** = b;

Step $\frac{b-a}{29} \rightarrow$ Dò kết quả.

2. Tìm GTLN – GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a; b)$

Bấm **MODE** sau đó chọn 7 (TABLE) $\rightarrow$ Nhập biểu thức **f(x)** vào máy $\rightarrow$ “=” nhập **Start** $a + 0,001$;

And $b - 0,001$; **Step** $\frac{b-a}{29} \rightarrow$ Dò kết quả.

❖ TÌM CÁC ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = f(x)$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_1 \Rightarrow y = y_1$ là TCN của đồ thị hàm số $y = f(x)$. (Nhập hàm bấm CALC 10^{10})

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_2 \Rightarrow y = y_2$ là TCN của đồ thị hàm số $y = f(x)$. (Nhập hàm bấm CALC -10^{10})

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = x_0$ là TCD của đồ thị hàm số $y = f(x)$. (Nhập hàm bấm CALC $(x_0 + 0,001)$)

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = x_0$ là TCD của đồ thị hàm số $y = f(x)$. (Nhập hàm bấm CALC $(x_0 - 0,001)$)

(**Chú ý:** Tìm TCD ta thường cho mẫu bằng 0, giải pt đc: $x = x_0$. Thay $x = x_0$ vào tử nếu tử bằng 0 hoặc không xác định thì $x = x_0$ không phải là TCD. Nếu tử xác định khác 0 thì $x = x_0$ là TCD của đồ thị hàm số.)

IV. HÀM SỐ $y = (f(x))^\alpha$ Đạo hàm: $y' = f'(x) \cdot (f(x))^{\alpha-1}$

+ Nếu α nguyên dương: $\rightarrow$ ĐK là: $f(x)$ xác định.

$f(x)$ xác định nghĩa là hàm căn thì biểu thức trong căn ≥ 0 . Hàm phân thức thì mẫu $\neq 0$.

+ Nếu α nguyên âm: $\rightarrow$ ĐK là: $f(x) \neq 0$.

+ Nếu α không nguyên: $\rightarrow$ ĐK là: $f(x) > 0$.

+ Nếu $\alpha < 0$ thì đồ thị hàm số nhận trục Ox làm tiệm cận ngang. Nhận trục Oy làm tiệm cận đứng.

+ $\alpha > 0$ thì hàm số luôn đồng biến. $\alpha < 0$ thì hàm số luôn nghịch biến.

+ Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $(1;1)$.

V. HÀM SỐ $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$)

TXĐ	$(-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$
Tập giá trị	$(0; +\infty)$
Đạo hàm	$y' = a^x \ln a$
Chiều biến thiên	$a > 1$: hàm số luôn đồng biến. $0 < a < 1$: hàm số luôn nghịch biến
Tiệm cận	Nhận trục Ox làm tiệm cận ngang
Đồ thị	Luôn đi qua các điểm $(0;1)$ và $(1;a)$. Đồ thị luôn nằm phía trên trục hoành

VI. HÀM SỐ $y = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$)

TXĐ	$(0; +\infty)$
Tập giá trị	$(-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$
Đạo hàm	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
Chiều biến thiên	$a > 1$: hàm số luôn đồng biến. $0 < a < 1$: hàm số luôn nghịch biến
Tiệm cận	Nhận trục Oy làm tiệm cận đứng
Đồ thị	Luôn đi qua các điểm $(1;0)$ và $(a;1)$. Đồ thị luôn nằm phía bên phải trục tung

+ **Đồ thị hàm số** $y = a^x$ và $y = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$) **đối xứng nhau qua đường thẳng** $y = x$.

+ **ĐK của hàm số** $y = \log_a f(x)$; $y = \ln f(x)$ và $y = \log f(x)$ là: $f(x) > 0$.

+ Công thức đạo hàm: $(u^\alpha)' = u' \cdot \alpha u^{\alpha-1}$; $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$; $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$;

$(e^u)' = u' \cdot e^u$; $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$; $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$; $(\log_a|u|)' = \frac{u'}{u \ln a}$;

$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$; $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$; $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$; $(\cot u)' = \frac{-u'}{\sin^2 u}$

+ Chú ý: $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$; $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty; (a > 1) \\ 0; (0 < a < 1) \end{cases}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0; (a > 1) \\ +\infty; (0 < a < 1) \end{cases}$;

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\log_a x) = \begin{cases} -\infty; (a > 1) \\ +\infty; (0 < a < 1) \end{cases}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log_a x) = \begin{cases} +\infty; (a > 1) \\ 0; (0 < a < 1) \end{cases}$

CHỦ ĐỀ 2: PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

1) Công thức lũy thừa

- Cho $a > 0$, $b > 0$ và $m, n \in \mathbb{R}$. Khi đó

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$; $(ab)^n = a^n \cdot b^n$; $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$;

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$; $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$; $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$

- $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad (a > 0)$
- Nếu $a > 1$ thì $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
- Nếu $0 < a < 1$ thì $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

2) Công thức lôgarit

- Với các điều kiện $0 < a \neq 1; b > 0; m > 0; n > 0$ ta có:

$\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b$ $\log_a 1 = 0$ $\log_a a = 1$ $\log_a a^\alpha = \alpha$

$a^{\log_a b} = b$ $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$ $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$ $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$

$\log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$; $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$; $(0 < a \neq 1; 0 < c \neq 1; b > 0)$ $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$; $(0 < a \neq 1; 0 < b \neq 1)$

- $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ với $0 < a \neq 1$.
- Nếu $a > 1$ thì $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
- Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

3) Phương trình mũ Phương pháp đưa về cùng cơ số: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

4) Phương trình lôgarit Phương pháp đưa về cùng cơ số: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

5) Bất phương trình mũ, bất phương trình lôgarit Sử dụng MÁY TÍNH CASIO

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG MÁY TÍNH

1. Tìm tập xác định của hàm số $y = \log_a f(x)$ Tương tự cho các hàm số: $y = \ln f(x); y = \log f(x)$

- A. $(a; b)$ B. $[a; b)$ C. $(a; +\infty)$ D. $(-\infty; b]$

+ Thử A: Nhập $\log_a f(x)$ rồi ấn **CALC** 1 giá trị lớn hơn a, 1 giá trị bé hơn b, **CALC** 1 giá trị ở giữa a và b.

+ Thử B: Nhập $\log_a f(x)$ rồi ấn **CALC** giá trị a, **CALC** 1 giá trị bé hơn b, và **CALC** 1 giá trị ở giữa a và b.

+ Thử C: Nhập $\log_a f(x)$ rồi ấn **CALC** 1 giá trị lớn hơn a, **CALC** giá trị 1000, và 1 giá trị ở giữa chúng.

+ Thử D: Nhập $\log_a f(x)$ rồi ấn **CALC** giá trị -1000, **CALC** giá trị b, và **CALC** 1 giá trị ở giữa chúng.

CHÚ Ý: *Đáp án nào có chỉ cần có 1 giá trị mà máy không xử lý ra kết quả thì loại.*

2. Giải bất phương trình mũ hoặc logarit dạng: $f(x) \geq g(x)$

B1: Chuyển về về $f(x) - g(x) \geq 0$ (Luôn chuyển để về phải là 0)

B2: Nhập hàm $f(x) - g(x)$ rồi bấm **CALC** thử giống mục **1**.

Chú ý: do BPT ≥ 0 nên chọn đáp án nào mà kết quả bấm CALC ra đều ≥ 0 .

Tương tự: Nếu BPT > 0 thì chọn đáp án nào mà kết quả bấm CALC ra đều > 0 .

Nếu BPT ≤ 0 thì chọn đáp án nào mà kết quả bấm CALC ra đều ≤ 0 .

Nếu BPT < 0 thì chọn đáp án nào mà kết quả bấm CALC ra đều < 0 .

CHỦ ĐỀ 3: NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

I. CÁC VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG

1) Công thức nguyên hàm

Nguyên hàm của hàm số cơ bản	Nguyên hàm mở rộng
$\int dx = x + C$	$\int a \cdot dx = ax + C, a \in \mathbb{R}$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C, x \neq 0$	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \cdot \ln ax+b + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{ax+\beta} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{a^{ax+\beta}}{\ln a} + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax+b) + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cdot \cos(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$

2) Công thức tích phân

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ thì $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

3) Phương pháp đổi biến số

Nhớ: Đổi biến thì phải đổi cận.

A. Dạng 1: Tính $I = \int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$

Đặt $t = \varphi(x) \Rightarrow dt = \varphi'(x).dx$

Đổi cận: $\begin{cases} x = a \Rightarrow t = \varphi(a) \\ x = b \Rightarrow t = \varphi(b) \end{cases} \Rightarrow I = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t).dt = F(t) \Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}$

Ví dụ: Nếu cho $I = \int_a^b f(x)dx$ yêu cầu:

a) Tính $I_1 = \int_{a/k}^{b/k} f(k.x)dx$ thì ta đặt $t = kx \Rightarrow dx = \frac{dt}{k}$ và đổi cận ta sẽ được $I_1 = \frac{1}{k} \int_a^b f(t)dt = \frac{1}{k} \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{k}.I$

b) Tính $I_2 = \int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)dx$ thì ta đặt $t = \frac{x}{k} \Rightarrow dx = k.dt$ và đổi cận ta sẽ được $I_2 = k \int_a^b f(t)dt = k \int_a^b f(x)dx = k.I$

*** Chú ý:** Thông thường các ta đặt t là căn, mũ, mẫu.

4) Phương pháp tích phân từng phần

*** Công thức tính:** $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$

✦ Đặt $\begin{cases} u = \dots \\ dv = \dots dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dots dx & (\text{lấy đạo hàm}) \\ v = \int \dots dx & (\text{lấy nguyên hàm}) \end{cases}$

Ta thường gặp hai loại tích phân từng phần như sau:

(Với $P(x)$ là đa thức bậc n .)

*** Loại 1:**

$$\begin{cases} \int_a^b P(x). \sin(\alpha x + \beta). dx \\ \int_a^b P(x). \cos(\alpha x + \beta). dx \\ \int_a^b P(x). e^{(\alpha x + \beta)}. dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = P(x) \\ dv = \begin{cases} \sin(\alpha x + \beta). dx \\ \cos(\alpha x + \beta). dx \\ e^{(\alpha x + \beta)}. dx \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x)dx \\ v = \int \begin{cases} \sin(\alpha x + \beta). dx = \frac{-1}{\alpha} \cdot \cos(\alpha x + \beta) \\ \cos(\alpha x + \beta). dx = \frac{1}{\alpha} \cdot \sin(\alpha x + \beta) \\ e^{(\alpha x + \beta)}. dx = \frac{1}{\alpha} \cdot e^{(\alpha x + \beta)} \end{cases} \end{cases}$$

*** Loại 2:** $\int_a^b P(x). \ln(\alpha x + \beta). dx \Rightarrow \begin{cases} u = \ln(\alpha x + \beta) \Rightarrow du = \frac{\alpha}{\alpha x + \beta} dx \\ dv = P(x)dx \Rightarrow v = \int P(x)dx = \dots \end{cases}$

Chú ý: $f(x)$ là hàm số chẵn thì $f(-x) = f(x)$;

Còn $f(x)$ là hàm số lẻ thì $f(-x) = -f(x)$

Do đó: $f(x)$ là hàm số chẵn thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$

Còn $f(x)$ là hàm số lẻ thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

5) Tính chất tích phân

Tính chất 1: $\int_a^a f(x)dx = 0$; $\int_a^b k \cdot f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Tính chất 2: $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$, với k là hằng số

Tính chất 3: $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

Tính chất 4: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ ($a < c < b$)

Tính chất 5: $\int_a^b f'(x)dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a)$

Tính chất 6: Nếu $f(x) > 0, \forall x \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x)dx > 0$; Nếu $f(x) > g(x), \forall x \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$

6) Diện tích hình phẳng

Lưu ý: Diện tích là những giá trị dương.

Dạng 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số

$y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ là: $S = \int_a^b |f(x)|dx$ BẮM MÁY

✓ $f(x) = 0$ vô nghiệm trên $(a; b)$ thì $S = \int_a^b |f(x)|dx = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$

✓ $f(x) = 0$ có 1 nghiệm $c \in (a; b)$ thì $S = \int_a^b |f(x)|dx = \left| \int_a^c f(x)dx \right| + \left| \int_c^b f(x)dx \right|$

Dạng 2: Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Khi đó diện tích của hình phẳng giới hạn bởi

đồ thị hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là: $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$ BẮM MÁY

Dạng 3: Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục. Khi đó diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai

hàm số $f(x)$, $g(x)$ là $S = \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)|dx$ BẮM MÁY (với $x_1 < x_2$ là hai nghiệm của pt $f(x) = g(x)$)

7) Thể tích vật thể tròn xoay

Lưu ý: Thể tích là giá trị dương.

Dạng 1: Thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục Ox và hai

đường thẳng $x = a$, $x = b$ quay xung quanh trục Ox là: $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$ BẮM MÁY

Dạng 2: Thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ trục Ox và

hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quay xung quanh trục Ox là: $V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)|dx$ BẮM MÁY

Dạng 3: Thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ quay xung

quanh trục Ox là:

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} |f^2(x) - g^2(x)| dx \quad \text{BẤM MÁY}$$

(với $x_1 < x_2$ là hai nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$)

Dạng 4: Thể tích vật thể của một vật nằm giữa 2 mặt phẳng $x = a$, $x = b$, biết thiết diện của vật bị cắt bởi mp

vuông góc với trục Ox tại điểm $x (a \leq x \leq b)$ có diện tích $S(x)$ là:

$$V = \int_a^b S(x) dx \quad \text{BẤM MÁY}$$

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG MÁY TÍNH

1. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm $x = x_0$ thì đạo hàm tại $x = x_0$ sẽ bằng 0

Bấm Shift $\int \rightarrow \frac{d}{dx}(f(x))|_{x=x_0} = 0$; Muốn biết điểm $x = x_0$ là CĐ hay CT ta bấm Shift $\int \rightarrow \frac{d}{dx}(f(x))|_{x=x_0}$

CALC x_0 nếu bằng 0 thì $x = x_0$ có khả năng là cực trị, khác 0 thì loại. Rồi bấm tiếp CALC $x_0 + 0,001$ và $x_0 - 0,001$ nếu lần lượt được + và - thì $x = x_0$ là cực đại. Còn lần lượt được - và + thì $x = x_0$ là cực tiểu.

2. Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = x_0$

Bấm Shift $\int \rightarrow \frac{d}{dx}(f(x))|_{x=x_0} - A$ (Trừ đi kết quả ở đáp án A nếu thử đáp án A) rồi ấn “=”

3. Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ A. $f_1(x)$ B. $f_2(x)$ C. $f_3(x)$ D. $f_4(x)$

Bấm Shift $\int \rightarrow \frac{d}{dx}(f(x))|_{x=x} - f_1(x)$ (Đề bài trừ đáp án)

(Trừ đi kết quả ở đáp án A nếu thử đáp án A) rồi ấn **CALC** 1 giá trị rồi Ấn “=” (CALC thử 2 đến 3 giá trị).

Đáp án nào ra kết quả = 0 hoặc gần bằng 0 ($\dots \times 10^{(\text{mũ âm})}$) thì chọn đáp án đó.

4. Tìm nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$ hay $\int f(x) dx$

A. $F_1(x) + C$ B. $F_2(x) + C$ C. $F_3(x) + C$ D. $F_4(x) + C$

Cách 1: Bấm Shift $\int \rightarrow \frac{d}{dx}(F_1(x))|_{x=x} - f(x)$ (Đáp án trừ đề bài)

(Nhập biểu thức ở đáp án A nếu thử A) rồi ấn **CALC** 1 giá trị rồi Ấn “=” (chú ý CALC thử 2 đến 3 giá trị)

Đáp án nào ra kết quả = 0 hoặc gần bằng 0 ($\dots \times 10^{(\text{mũ âm})}$) thì chọn đáp án đó.

Cách 2: Ấn $\int_a^b f(x) dx - [F_1(b) - F_2(a)] =$ Với a, b là hai số bất kì gần nhau thỏa mãn $f(x)$ liên tục.

Đáp án nào ra kết quả = 0 thì chọn đáp án đó.

5. Tính tích phân $I = \int_a^b f(x) dx$ Bấm $\int_a^b f(x) dx - A =$ (Nhập kết quả ở đáp án A nếu thử đáp án A)

6. Tìm x_0 để tích phân $I = \int_a^{x_0} f(x) dx = M$ A. b_1 B. b_2 C. b_3 D. b_4

Bấm $\int_a^x f(x)dx - M$ (CALC thử tung đáp án ra = 0 đúng, khác 0 thì sai).

Tương tự cho dạng toán tìm x_0 để tích phân $I = \int_{x_0}^b f(x)dx = M$

📌 CHỦ ĐỀ 4: CÁC VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN SỐ PHỨC

- ✓ Số phức: $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}; i^2 = -1$
- ✓ Phần thực của z là **a**; phần ảo của z là **b**. (chú ý là b chứ không phải là bi)
- ✓ Nếu $b = 0$ thì $z = a$ gọi là số thực. Nếu $a = 0; b \neq 0$ thì $z = bi$ gọi là số ảo hoặc số thuần ảo.

- ✓ Số phức liên hợp: $\bar{z} = a - bi$. Số phức nghịch đảo là $z^{-1} = \frac{1}{z}$

- ✓ Môđun của số phức: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Môđun của số phức là một số thực không âm (≥ 0)

$$\text{Tính chất: } \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}; |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|; |z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

- ✓ Điểm biểu diễn của số phức $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ là điểm $M(a; b)$
- ✓ Hai số phức bằng nhau $x + yi = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ (phần thực = phần thực; phần ảo = phần ảo)

- ✓ Phép toán trên tập số phức:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}$$

- ✓ Căn bậc hai của số thực **a** âm là: $\pm i\sqrt{|a|}$

- ✓ Phương trình bậc hai trên tập số phức $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$):

* Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có một nghiệm kép (thực) $x = -\frac{b}{2a}$

* Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm thực $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

* Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình có hai nghiệm phức $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

Chú ý: + Nếu quỹ tích của số phức z là **đường tròn** $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ tâm $I(a; b)$ và bán kính là R thì:

$$|z|_{\max} = OI + R = \sqrt{a^2 + b^2} + R \quad \text{còn} \quad |z|_{\min} = |OI - R| = \left| \sqrt{a^2 + b^2} - R \right|$$

+ Nếu tập hợp số phức z thỏa mãn $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2$ thì quỹ tích là **hình tròn** tâm $I(a; b)$ và bán kính là R .

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG MÁY TÍNH

SỐ PHỨC: Bấm mode 2 màn hình hiện CMPLX

Cộng trừ nhân chia nhập tính bình thường

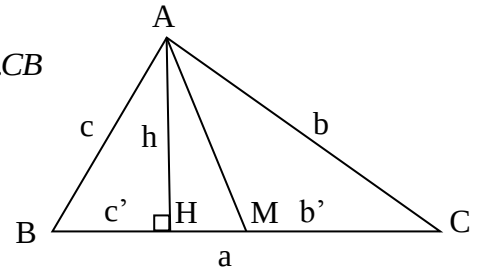
Tính môđun nhập shift hyp;

Số phức liên hợp bấm shift 2 2 (xuất hiện conjg(...))

CHỦ ĐỀ 5: THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông: Cho $\triangle ABC$ vuông ở A ta có:

- Định lý Pitago : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ • $BA^2 = BH.BC$; $CA^2 = CH.CB$
- $AB.AC = BC.AH$ • $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$
- $AH^2 = BH.CH$ • $BC = 2AM$
- $\sin B = \frac{b}{a}$, $\cos B = \frac{c}{a}$, $\tan B = \frac{b}{c}$, $\cot B = \frac{c}{b}$
- $b = a. \sin B = a. \cos C$, • $c = a. \sin C = a. \cos B$, • $a = \frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\cos C}$ • $b = c. \tan B = c. \cot C$



* Định lý hàm số Côsin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

2. Các công thức tính diện tích - thể tích.

a/ Công thức tính diện tích tam giác: $S = \frac{1}{2} a.h_a = \frac{1}{2} a.b.\sin C = \frac{a.b.c}{4R} = pr$

Hoặc $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p = \frac{a+b+c}{2}$ với a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác

Đặc biệt : * $\triangle ABC$ vuông ở A: $S = \frac{1}{2} AB.AC$

* $\triangle ABC$ đều cạnh a : $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

b/ Diện tích hình vuông: $S = \text{cạnh} \times \text{cạnh}$

c/ Diện tích hình chữ nhật: $S = \text{dài} \times \text{rộng}$

d/ Diện tích hình thoi: $S = \frac{1}{2}$ (chéo dài $\times$ chéo ngắn)

e/ Diện tích hbhành: $S = \text{đáy} \times \text{chiều cao}$

f/ Diện tích hình thang: $\frac{1}{2} .(\text{đáy lớn} + \text{đáy nhỏ}) \times \text{chiều cao}$

g/ Diện tích hình tròn: $S = \pi r^2$

Chu vi đường tròn: $C = 2\pi r$

h/ **Thể tích khối tứ diện đều cạnh a :** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

k/ **Thể tích khối chóp tam giác đều cạnh đáy a :** $V = \frac{a^3}{12} .\tan \alpha$ (α là góc giữa cạnh bên và mặt đáy)

i/ **Thể tích khối chóp tam giác đều cạnh đáy a :** $V = \frac{a^3}{24} .\tan \beta$ (β là góc giữa mặt bên và mặt đáy)

j/ **Thể tích khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a :** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

m/ **Thể tích khối chóp tứ giác đều cạnh đáy a :** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} .\tan \alpha$ (α là góc giữa mặt bên và mặt đáy)

n/ **Thể tích khối chóp tứ giác đều cạnh đáy a :** $V = \frac{a^3}{6} .\tan \beta$ (β là góc giữa mặt bên và mặt đáy)

l/ **Thể tích khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a :** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Chú ý:

1/ Đường chéo của hình vuông cạnh a là: $a\sqrt{2}$

Tam giác vuông cân thì hai cạnh góc vuông bằng nhau và bằng cạnh huyền chia $\sqrt{2}$.

Đường chéo của hình lập phương cạnh a là: $a\sqrt{3}$

Đường chéo của hình hộp chữ nhật có 3 kích thước a, b, c là: $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

2/ Đường cao của tam giác đều cạnh a là: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

3/ Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau và tạo với mp đáy 1 góc bằng nhau, các mặt bên là các tam giác đều và tạo với mp đáy 1 góc bằng nhau, hình chiếu của đỉnh xuống mp đáy trùng với tâm của đáy. (h/c tam giác đều thì đáy là tam giác đều, h/c tứ giác đều thì đáy là hv)

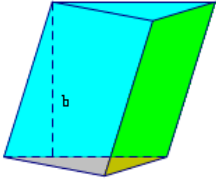
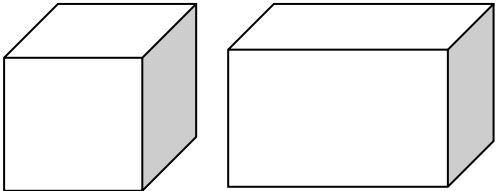
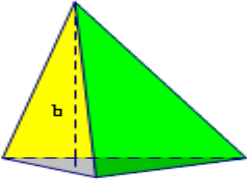
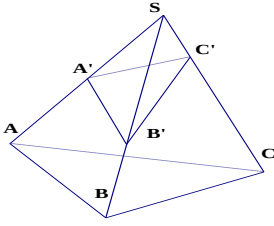
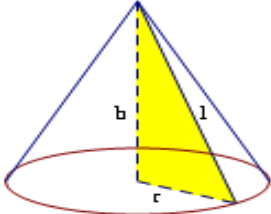
4/ Lăng trụ đứng là lăng trụ có các mặt bên là các hình chữ nhật

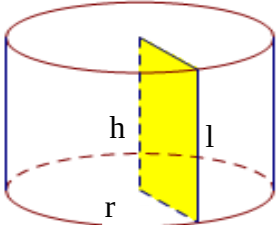
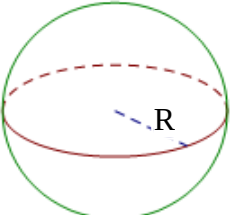
5/ Lăng trụ đều là lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều. Lăng trụ tam giác đều là lăng trụ đứng.

6/ Góc giữa **cạnh bên** và **mặt đáy** là góc hợp bởi 3 điểm: (**Đỉnh, Điểm chung; Chân đường cao**)

7/ Góc giữa **mặt bên** và **mặt đáy** là góc hợp bởi 3 điểm: (**Đỉnh, Điểm M; Chân đường cao**). Với M là giao điểm của đường thẳng kẻ từ *chân đường cao vuông góc với giao tuyến của mặt bên và mặt đáy*.

❖ CÁC CÔNG THỨC THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN

1. THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ	$V = S_{\text{đáy}} \cdot h$ (h: chiều cao)	
a) Thể tích khối hộp chữ nhật: Đường chéo $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ b) Thể tích khối lập phương Đường chéo $d = a\sqrt{3}$	$V = a \cdot b \cdot c$ (a, b, c là ba kích thước) $V = a^3$ (a là độ dài cạnh)	
2. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP	$V = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}} \cdot h$ (h: chiều cao)	
3. TỈ SỐ THỂ TÍCH TỨ DIỆN	$\frac{V_{SABC}}{V_{SA'B'C'}} = \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'}$	
4. KHỐI NÓN	$V = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ $S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + S_{\text{đáy}} = \pi r l + \pi r^2$ Liên hệ ($l^2 = h^2 + r^2$)	

5. KHỐI TRỤ	$V = S_{\text{đáy}} \cdot h = \pi r^2 h$ $S_{\text{xq}} = 2\pi r l = 2\pi r h$ $S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + S_{\text{đáy}} = \pi r l + \pi r^2$ Liên hệ ($h = l$)	
6. KHỐI CẦU	$V = \frac{4}{3} \pi R^3$ $S = 4\pi R^2$	

CHỦ ĐỀ 6: HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

I. CÁC VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

1) Một số phép toán vector

$$1. \vec{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \Rightarrow M(x; y; z)$$

$$2. \vec{v} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \Rightarrow \vec{v} = (x; y; z)$$

$$3. \vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

$$4. AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$5. \vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \Rightarrow \vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3)$$

$$6. k \cdot \vec{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$$

$$7. |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$8. \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

$$9. \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

$$10. \vec{a} \text{ cp } \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

$$11. \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0$$

$$12. [\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

(**Tính tích có hướng**: Bấm **MODE 8**, bấm **1** chọn (vecto A), bấm **1** chọn 1:3, sau đó **nhập tọa độ vecto A** vào, rồi bấm **SHIFT 5 2 2** chọn (vecto B), bấm **1** chọn 1:3, sau đó **nhập tọa độ vecto B** vào, bấm **AC**, rồi bấm **shift 5**, bấm **3** chọn (vecto A), bấm dấu nhân **x**, bấm **shift 5**, bấm **4** chọn (vecto B), bấm dấu bằng **=**, ta được kết quả)

$$13. M \text{ là trung điểm } A \Rightarrow M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

$$14. G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \Rightarrow G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

$$15. G' \text{ là trọng tâm tứ diện } ABCD \Rightarrow G'\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}, \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}, \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$$

16. Các tính chất và ứng dụng của tích có hướng:

$$* \begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \vec{b} & \vec{a} \end{bmatrix}$$

$$\left| \begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{bmatrix} \right| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$$

$$* \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{bmatrix} = 0;$$

$$\vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ không cùng phương} \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{bmatrix} \neq 0.$$

$$* \vec{a}; \vec{b} \text{ và } \vec{c} \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{bmatrix} \cdot \vec{c} = 0;$$

$$\vec{a}; \vec{b} \text{ và } \vec{c} \text{ không đồng phẳng} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{bmatrix} \cdot \vec{c} \neq 0$$

$$* S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{bmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \end{bmatrix} \right|.$$

$$S_{h\text{b}hABCD} = \left| \begin{bmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \end{bmatrix} \right| \text{ (ABCD là hình bình hành)}$$

$$V_{k\text{t}ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{bmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{AA'} \right|.$$

$$V_{k\text{t}dABCD} = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{bmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{AD} \right|.$$

$$V_{k\text{h}ABCD.A'B'C'D'} = \left| \begin{bmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{AA'} \right|. \text{ (Với: } \mathbf{klt} \text{ là khối lăng trụ; } \mathbf{ktd} \text{ là khối tứ diện; } \mathbf{kh} \text{ là khối hộp)}$$

2) Phương trình mặt phẳng

*) Phương trình mp(α) qua M(x_0 ; y_0 ; z_0) có vtpt $\vec{n} = (A; B; C)$ là: $\boxed{\mathbf{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}}$

Nếu mp(α) có phương trình: $\mathbf{Ax + By + Cz + D = 0}$ thì ta có vtpt $\vec{n} = (\mathbf{A; B; C})$

*) Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn đi qua A($a,0,0$) B($0,b,0$); C($0,0,c$) là: $\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$

Chú ý: Muốn viết phương trình mặt phẳng ta cần xác định tọa độ điểm đi qua và 1 vectơ pháp tuyến.

*) Vị trí tương đối của hai mp (α_1) và (α_2):

$$\circ (\alpha) \text{ cắt } (\beta) \Leftrightarrow A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$$

$$\circ (\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$$

$$\circ (\alpha) \equiv (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

$$\circ (\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

*) Khoảng cách từ M(x_0, y_0, z_0) đến (α): $\mathbf{Ax + By + Cz + D = 0}$ là: $\boxed{d(M, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$

Chú ý: mp Oxy có pt: $z = 0$; mp Oxz có pt: $y = 0$; mp Oyz có pt: $x = 0$.

*) Góc giữa hai mặt phẳng: $\boxed{\cos((\alpha), (\beta)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}}$

3) Phương trình đường thẳng

*) Phương trình tham số của đường thẳng d qua M(x_0 ; y_0 ; z_0) có vtcp $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ là: $\boxed{d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})}$

*) Phương trình chính tắc của d: $\boxed{d: \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}}$

Chú ý: Trục Ox, Oy, Oz đi qua O và lần lượt có vectơ chỉ phương: $\vec{i} = (1; 0; 0)$; $\vec{j} = (0; 1; 0)$; $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

*) Góc giữa 2 đường thẳng: Gọi φ là góc giữa d và d' là: $\boxed{\cos \varphi = \frac{|\vec{a}_d \cdot \vec{a}_{d'}|}{|\vec{a}_d| \cdot |\vec{a}_{d'}|} \quad (0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ)}$

*) Vị trí tương đối của 2 đường thẳng d, d': Ta thực hiện hai bước

+ Tìm quan hệ giữa 2 vtcp $\vec{a}_d, \vec{a}_{d'}$

+ Tìm điểm chung của d, d' bằng cách xét hệ:
$$\begin{cases} x_0 + a_1 t = x'_0 + a'_1 t' \\ y_0 + a_2 t = y'_0 + a'_2 t' \\ z_0 + a_3 t = z'_0 + a'_3 t' \end{cases} \quad (I)$$

Hệ (I)	Quan hệ giữa $\vec{a}_d; \vec{a}_{d'}$	Vị trí giữa d, d'
Vô số nghiệm	Cùng phương	$d \equiv d'$
Vô nghiệm		$d \parallel d'$
Có 1 nghiệm	Không cùng	d cắt d'
Vô nghiệm	phương	d, d' chéo nhau

4) Một số dạng toán thường gặp

***Dạng 1:** Chứng minh A,B,C là ba đỉnh tam giác

A,B,C là ba đỉnh tam giác $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}$ không cùng phương $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \neq 0$.

***Dạng 2:** Tìm D sao cho ABCD là hình bình hành: $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

***Dạng 3:** Chứng minh ABCD là một tứ diện:

+ Viết phương trình (BCD)

+ Thay tọa độ A vào phương trình mp(BCD) và chứng minh $A \notin (BCD)$.

***Dạng 4:** Tìm hình chiếu của điểm M.

a. H là hình chiếu của M trên mp(α)

- Viết phương trình đường thẳng d qua M và vuông góc (α): ta có $\vec{a}_d = \vec{n}_{(\alpha)}$
- Gọi $H = d \cap (\alpha) \Rightarrow H$ (theo t) $\in d$. mà $H \in (\alpha) \Rightarrow t = ? \Rightarrow$ tọa độ H

b. H là hình chiếu của M trên đường thẳng d

- d có vtcp $\vec{a}_d = ?$
- Gọi H (theo t) $\in d$, Tính $\overrightarrow{MH}$. Ta có: $\overrightarrow{MH} \perp \vec{a}_d \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \vec{a}_d = 0 \Rightarrow t = ? \Rightarrow$ tọa độ H

***Dạng 5:** Điểm đối xứng.

a. Điểm M' đối xứng với M qua mp(α)

- Tìm hình chiếu H của M trên mp(α) (dạng 4.a)
- M' đối xứng với M qua (α) $\Leftrightarrow H$ là trung điểm của $MM' \Rightarrow \begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M \\ y_{M'} = 2y_H - y_M \\ z_{M'} = 2z_H - z_M \end{cases}$

b. Điểm M' đối xứng với M qua đường thẳng d:

- Tìm hình chiếu H của M trên d (dạng 4.b)
- M' đối xứng với M qua d $\Leftrightarrow H$ là trung điểm của $MM' \Rightarrow \begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M \\ y_{M'} = 2y_H - y_M \\ z_{M'} = 2z_H - z_M \end{cases}$

*** Dạng 6: Khoảng cách**

a) *Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ:*

- + Viết phương trình mp(α) chứa A và $\perp \Delta$.
- + Tìm giao điểm H của Δ và (α).
- + Tính $d(A, \Delta) = AH$

Chú ý: Có thể sử dụng công thức: $d(A; (\Delta)) = \frac{|\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{u_\Delta}|}{|\overrightarrow{u_\Delta}|}$ Với $M \in (\Delta)$.

b) *Khoảng cách giữa đường thẳng Δ và (α) với $\Delta \parallel (\alpha)$:*

- + Lấy M trên Δ
- + $d(\Delta, (\alpha)) = d(M, (\alpha))$

c) *Khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau Δ, Δ':*

- + Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa Δ' và $\parallel \Delta$
- + Lấy M trên Δ
- + $d(\Delta, \Delta') = d(M, (\alpha))$

Chú ý: Có thể sử dụng công thức: $d((\Delta); (\Delta')) = \frac{|\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{u_{\Delta'}}| \cdot |\overrightarrow{MM'}|}{|\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{u_{\Delta'}}|}$ Với $M \in (\Delta); M' \in (\Delta')$.

5) Phương trình mặt cầu

a. Phương trình mặt cầu tâm I(a; b; c), bán kính R: $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

Nếu mặt cầu có phương trình $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $(a^2 + b^2 + c^2 - d > 0)$

Ta có: Tâm I(a; b; c) và $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

b. Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu

Cho $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ và $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

Gọi $d = d(I, (\alpha))$: khoảng cách từ tâm mặt cầu (S) đến mp(α).

- **d > R:** $(S) \cap (\alpha) = \emptyset$
- **d = R:** (α) tiếp xúc (S) tại H (H: tiếp điểm, (α): tiếp diện)

*** Tìm tiếp điểm H (là hình chiếu vuông góc của tâm I trên mp(α))**

+ Viết phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc mp(α): ta có $\overrightarrow{a_d} = \overrightarrow{n_{(\alpha)}}$

+ $H = d \cap (\alpha)$. Gọi H (theo t) $\in d$. Ta có $H \in (\alpha) \Rightarrow t = ? \Rightarrow$ tọa độ H

- **d < R:** (α) cắt (S) theo đường tròn (C): $\begin{cases} (S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \\ (\alpha): Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$

*** Tìm bán kính r và tâm H của đường tròn giao tuyến:**

- + Bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (\alpha))}$
- + Tìm tâm H (là hình chiếu vuông góc của tâm I trên mp(α))