

Họ tên thí sinh:.....

Số báo danh:.....

Câu I. (2 điểm)

- 1) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 5$ trên đoạn $[-1; 2]$.
- 2) Cho hàm số $y = \frac{-4x+12}{x+1}$ có đồ thị là (C) , đường thẳng $d: y = 2x + m$. Chứng minh rằng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của tham số m .

Câu II. (2 điểm)

- 1) Tìm số phức z thỏa mãn $z - 2\bar{z} = 2 + 15i$.
- 2) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x+2}{x^2+3x+2}$.

Câu III. (2 điểm)

- 1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $I(1; 2)$ và đường thẳng $d: 3x - 4y + 10 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I và tiếp xúc với đường thẳng d .
- 2) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-2}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z - 6 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d sao cho giao tuyến của (P) và (S) là đường tròn có bán kính nhỏ nhất.

Câu IV. (2 điểm)

- 1) Cho tập hợp $A = \{1, 2, \dots, 20\}$ gồm 20 số nguyên dương đầu tiên. Lấy ngẫu nhiên hai số phân biệt từ tập A . Tìm xác suất để tích hai số được chọn là một số chia hết cho 6.
- 2) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $AB = AC = a$. Tam giác SAB vuông tại B , tam giác SAC vuông tại C , góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 60° . Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng (ABC) . Chứng minh rằng HB vuông góc AB và tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a .

Câu V. (2 điểm)

1) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \sin x}{x \sin x + \cos x} dx$.

2) Cho các số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn: $\log_2(x+y) + \frac{x}{y} = \log_2 \frac{x^2 y}{2} + x^2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$.

-----HẾT-----

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

ĐỀ THAM KHẢO ĐÁNH GIÁ TUYỂN SINH ĐẠI HỌC CAND NĂM 2023

GIÁO VIÊN: TRƯƠNG VĂN TÂM

Câu I. (2 điểm)

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 5$ trên đoạn $[-1; 2]$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 12x$.

$$\text{Khi đó } y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 2] \\ x = 4 \notin [-1; 2] \end{cases}.$$

Hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[-1; 2]$ và $y(-1) = -2$, $y(0) = 5$, $y(2) = -11$ nên suy ra $\min_{[-1; 2]} y = y(2) = -11$.

2. Cho hàm số $y = \frac{-4x+12}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = 2x + m$. Chứng minh rằng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của tham số m .

Lời giải

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm của } d \text{ và } (C) \text{ là } \frac{-4x+12}{x+1} = 2x + m. \quad (x \neq -1) \quad (1)$$

$$\Rightarrow -4x + 12 = (2x + m)(x + 1) \Leftrightarrow 2x^2 + (m + 6)x + m - 12 = 0. \quad (2)$$

Xét phương trình (2) ta có

$$\Delta = (m + 6)^2 - 4.2.(m - 12) = m^2 + 4m + 132 = (m + 2)^2 + 128 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

Suy ra phương trình (2) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Lại có $2(-1)^2 + (m + 6)(-1) + m - 12 = -16 \neq 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt, khác -1 với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Do đó phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m , tức là đường thẳng d luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Câu II. (2 điểm)

1. Tìm số phức z thỏa mãn $z - 2\bar{z} = 2 + 15i$.

Lời giải

Giả sử số phức cần tìm là $z = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Suy ra $\bar{z} = a - bi$.

$$\text{Theo đề ta có } z - 2\bar{z} = 2 + 15i \Leftrightarrow a + bi - 2(a - bi) = 2 + 15i \Leftrightarrow -a + 3bi = 2 + 15i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a=2 \\ 3b=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=5 \end{cases}.$$

Vậy số phức cần tìm là $z = -2 + 5i$.

2. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x+2}{x^2+3x+2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{3x+2}{(x+1)(x+2)} = \frac{4(x+1)-(x+2)}{(x+1)(x+2)} = \frac{4}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

$$\text{Suy ra } \int f(x) dx = \int \left(\frac{4}{x+2} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \int \frac{4}{x+2} dx - \int \frac{1}{x+1} dx = 4 \ln|x+2| - \ln|x+1| + C.$$

Lưu ý: Ta có thể dùng “**đồng nhất thức**” như sau:

$$\text{Giả sử } f(x) = \frac{3x+2}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{(A+B)x+(2A+B)}{(x+1)(x+2)}$$

$$\text{Khi đó ta có } \begin{cases} A+B=3 \\ 2A+B=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=4 \end{cases}. \text{ Suy ra } f(x) = \frac{-1}{x+1} + \frac{4}{x+2}.$$

Câu III. (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $I(1;2)$ và đường thẳng $d: 3x-4y+10=0$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I và tiếp xúc với đường thẳng d .

Lời giải

$$\text{Khoảng cách từ điểm } I \text{ đến đường thẳng } d \text{ là } d(I, d) = \frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 10|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 1.$$

Đường tròn (C) tâm I và tiếp xúc với đường thẳng d có bán kính $R = d(I, d) = 1$ nên có phương trình là $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$.

2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-2}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z - 6 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d sao cho giao tuyến của (P) và (S) là đường tròn có bán kính nhỏ nhất.

Lời giải

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 16$, suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-3)$ và bán kính $R = \sqrt{16} = 4$.

Đường thẳng d đi qua điểm $A(0;1;3)$ và nhận $\vec{u}_d = (1;1;-2)$ làm vector chỉ phương nên có

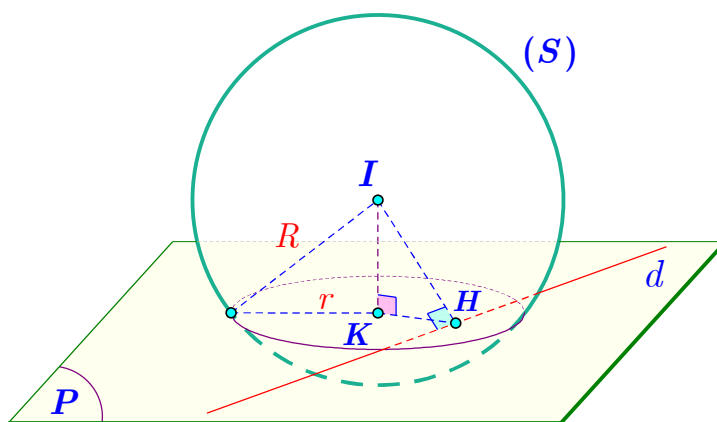
$$\text{phương trình tham số là } \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases}.$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng $d \Rightarrow H \in d \Rightarrow H(t; 1+t; 3-2t)$

$$\Rightarrow \vec{IH} = (t-1; 1+t; 6-2t).$$

Ta có $\vec{IH} \perp \vec{u}_d \Leftrightarrow \vec{IH} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 1(t-1) + 1(1+t) - 2(6-2t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$. Suy ra $H(2;3;-1)$.

Ta tính được $IH = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14} < R$ nên H nằm trong mặt cầu (S) . Do đó d cắt (S) tại hai điểm phân biệt (xem hình vẽ minh họa).



Gọi K là hình chiếu vuông góc của I lên (P) . Khi đó ta có $IK \leq IH = \sqrt{14}$.

Do đó, bán kính đường tròn giao tuyến của (P) và (S) là

$$r = \sqrt{R^2 - IK^2} = \sqrt{4^2 - IK^2} \geq \sqrt{4^2 - IH^2} = \sqrt{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow K \equiv H$.

Khi đó, mặt phẳng (P) đi qua điểm $H(2;3;-1)$ và nhận $\vec{IH} = (1;3;2)$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình là $1(x-2) + 3(y-3) + 2(z+1) = 0 \Leftrightarrow x + 3y + 2z - 9 = 0$.

Câu IV. (2 điểm)

1. Cho tập hợp $A = \{1;2;3;\dots;20\}$ gồm 20 số nguyên dương đầu tiên. Lấy ngẫu nhiên hai số phân biệt từ tập hợp A . Tính xác suất để tích 2 số được chọn là một số chia hết cho 6.

Lời giải

Chọn hai số phân biệt từ tập hợp A có $C_{20}^2 = 190$ cách.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 190$.

Gọi X là biến cố: "Tích 2 số được chọn là một số chia hết cho 6".

Nhận thấy rằng trong tập hợp A có

+ 3 số chia hết cho 6 là 6 ; 12; 18 và 17 số không chia hết cho 6 là các số còn lại.

+ 7 số chia hết cho 2 và không chia hết cho 6 là 2;4;8;10;14;16;20.

+ 3 số chia hết cho 3 và không chia hết cho 6 là 3;9;15.

TH1: Chọn cả hai số đều chia hết cho 6 có $C_3^2 = 3$ cách.

TH2: Chọn một số chia hết cho 6 và một số không chia hết cho 6 có $C_3^1.C_{17}^1 = 51$ cách.

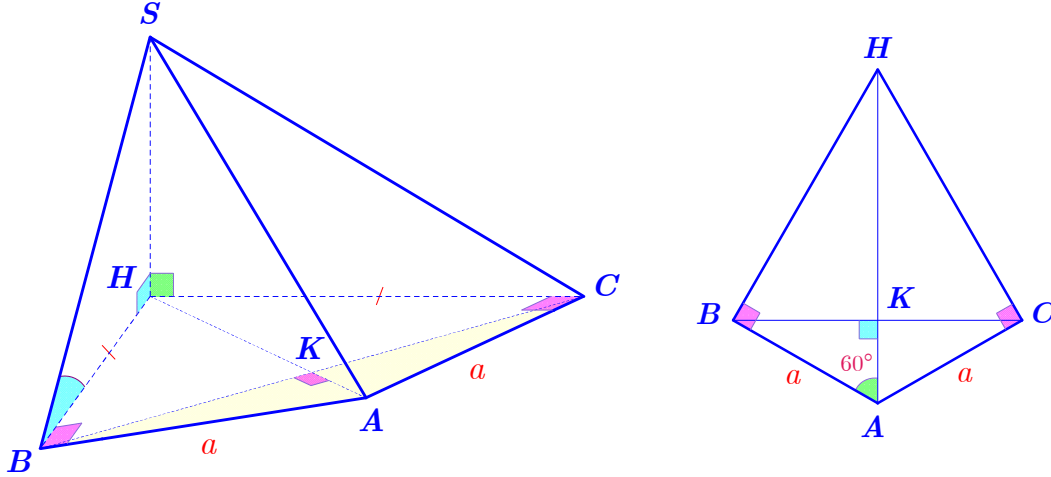
TH3: Chọn hai số không chia hết cho 6, trong đó có một số chia hết cho 2 và một số chia hết cho 3 có $C_7^1.C_3^1 = 21$.

Suy ra $n(A) = 3 + 51 + 21 = 75$.

Vậy ta có $P(A) = \frac{75}{190} = \frac{15}{38}$.

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , $\widehat{BAC} = 120^\circ$ và $AB = AC = a$. Tam giác SAB vuông tại B , tam giác SAC vuông tại C , góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 60° . Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm S lên (ABC) . Chứng minh rằng HB vuông góc với AB và tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a .

Lời giải



Ta có H là hình chiếu của S lên (ABC) nên $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp AB$.

Lúc đó ta có $\begin{cases} AB \perp SB \text{ (gt)} \\ AB \perp SH \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHB)$, mà $HB \subset (SHB)$ nên $AB \perp HB$. (đpcm)

Chứng minh tương tự ta có $AC \perp HC$. (xem hình vẽ minh họa)

Ta có $\begin{cases} (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ (SHB) \perp AB \\ (SHB) \cap (SAB) = SB \\ (SHB) \cap (ABC) = HB \end{cases} \Rightarrow \widehat{((SAB), (ABCD))} = \widehat{(SB, HB)} = \widehat{SBH} = 60^\circ$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

Xét tam giác ABH vuông tại B ta có $BH = AB \cdot \tan \widehat{BAH} = a \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SHB vuông tại H ta có $SH = BH \cdot \tan \widehat{SBH} = a\sqrt{3} \cdot \tan 60^\circ = 3a$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 3a = \frac{\sqrt{3} a^3}{4}$.

Câu V. (2 điểm)

1. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \sin x}{x \sin x + \cos x} dx$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \sin x}{x \sin x + \cos x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \sin x + x \cos x - x \cos x}{x \sin x + \cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x(x \sin x + \cos x) - x \cos x}{x \sin x + \cos x} dx = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx}_I - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x}{x \sin x + \cos x} dx}_J. \end{aligned}$$

Trong đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$.

$$\begin{aligned} \text{Xét tích phân } J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x}{x \sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(x \sin x + \cos x)}{x \sin x + \cos x} = \ln |x \sin x + \cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \ln \left| \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \right| - \ln |0 \sin 0 + \cos 0| = \ln \frac{\pi}{2} - \ln 1 = \ln \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Vậy ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \sin x}{x \sin x + \cos x} dx = I - J = \frac{\pi^2}{8} - \ln \frac{\pi}{2}$.

Lưu ý: Ta có $(x \sin x + \cos x)' = x' \cdot \sin x + x \cdot (\sin x)' + (\cos x)' = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$.

2. Cho hai số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn $\log_2(x+y) + \frac{x}{y} = \log_2 \frac{x^2 y}{2} + x^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức $P = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$.

Lời giải

Ta có $\log_2(x+y) + \frac{x}{y} = \log_2 \frac{x^2 y}{2} + x^2 \Leftrightarrow \log_2(x+y) + \frac{x}{y} = \log_2 x^2 + \log_2 y - \log_2 2 + x^2$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+y) - \log_2 y + \frac{x}{y} + 1 = \log_2 x^2 + x^2 \Leftrightarrow \log_2 \frac{x+y}{y} + \frac{x+y}{y} = \log_2 x^2 + x^2. \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t + \log_2 t$, ta có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 2} > 0$ với mọi $t > 0$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x+y}{y} = x^2 \Leftrightarrow x+y = x^2 y \Leftrightarrow y(x^2-1) = x \Leftrightarrow y = \frac{x}{x^2-1}$.

Lúc đó ta có $P = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{(x^2-1)^2}{x^2} = x^2 + \frac{2}{x^2} - 2 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{2}{x^2}} - 2 = 2\sqrt{2} - 2$.

Dấu "=" xảy ra khi $x^2 = \frac{2}{x^2} \Leftrightarrow x^4 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{2}$ (do $x > 0$) $\Rightarrow y = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}-1}$.

CHÚC CÁC EM ÔN TẬP VÀ THI TỐT !