

BÀI 6. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

A. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN NẮM

I. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

1. Bất phương trình mũ cơ bản

2. Cách giải bất phương trình mũ đơn giản

a) Đưa về cùng cơ số

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

b) Đặt ẩn phụ

$$\alpha a^{2f(x)} + \beta a^{f(x)} + \lambda = 0. \text{ Đặt } t = a^{f(x)}, (t > 0)$$

c) Phương pháp logarit hóa

$$a^{f(x)} > b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < \log_a b \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > \log_a b \end{cases}$$

$$a^{f(x)} > b^{g(x)} \Rightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) \cdot \log_a b \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x) \cdot \log_a b \end{cases}$$

II. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

1. Bất phương pháp logarit cơ bản

2. Cách giải một số bất phương trình logarit đơn giản

a) Đưa về cùng cơ số

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

b) Phương pháp mũ hóa

$$\log_a f(x) > b \Rightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > a^b \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) < a^b \end{cases}$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Phương pháp biến đổi tương đương đưa về cùng cơ số

1. Phương pháp

a. Bất phương trình mũ cơ bản

$$\bullet \text{ Bất phương trình } a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \quad \text{(hoặc } \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)[f(x)-g(x)] \leq 0 \end{cases}).$$

$$\bullet \text{ Bất phương trình } a^{f(x)} < b \text{ (với } b > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) \leq \log_a b \\ 0 < a < 1 \\ f(x) \geq \log_a b \end{cases}.$$

$$\bullet \text{ Bất phương trình } a^{f(x)} > b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \leq 0 \\ f(x) \text{ có nghĩa} \\ a > 1 \\ b > 0 \\ f(x) > \log_a b \\ 0 < a < 1 \\ b > 0 \\ f(x) < \log_a b \end{cases}.$$

b. Bất phương trình logarit cơ bản

$$\bullet \text{ Bất phương trình } \log_a f(x) \leq \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ 0 < f(x) \leq g(x) \\ 0 < a < 1 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} \quad \text{(hoặc } \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ (a-1)[f(x)-g(x)] \leq 0 \end{cases}).$$

$$\bullet \text{ Bất phương trình } \log_a f(x) \leq b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ 0 < f(x) \leq a^b \\ 0 < a < 1 \\ f(x) \geq a^b \end{cases}.$$

$$\bullet \text{ Bất phương trình } \log_a f(x) \geq b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > a^b \\ 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) \leq a^b \end{cases}.$$

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho bất phương trình $\log_7(x^2 + 2x + 2) + 1 > \log_7(x^2 + 6x + 5 + m)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình trên có tập nghiệm chứa khoảng $(1; 3)$?

A. 35.

B. 36.

C. 34.

D. 33.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{bpt} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6x + 5 + m > 0 \\ \log_7[7(x^2 + 2x + 2)] > \log_7(x^2 + 6x + 5 + m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -x^2 - 6x - 5 \\ 6x^2 + 8x + 9 > m \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m > \max_{(1;3)} f(x) \\ m < \min_{(1;3)} g(x) \end{cases}, \text{ với } f(x) = -x^2 - 6x - 5; g(x) = 6x^2 + 8x + 9 \end{aligned}$$

Xét sự biến thiên của hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$

○ $f'(x) = -2x - 6 < 0, \forall x \in (1; 3) \Rightarrow f(x)$ luôn nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$

$$\Rightarrow \max_{(1;3)} f(x) = f(1) = -12$$

○ $g'(x) = 12x + 8 > 0, \forall x \in (1; 3) \Rightarrow g(x)$ luôn đồng biến trên khoảng $(1; 3)$

$$\Rightarrow \min_{(1;3)} g(x) = g(1) = 23$$

Khi đó $-12 < m < 23$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-11; -10; \dots; 22\}$

Vậy có tất cả 34 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 2. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\log_2(7x^2 + 7) \geq \log_2(mx^2 + 4x + m)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$. Tổng các phần tử của S là

A. 10.

B. 11.

C. 12.

D. 13.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{BPT có tập nghiệm } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + 4x + m > 0 \\ 7x^2 + 7 \geq mx^2 + 4x + m \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + 4x + m > 0 \quad (1) \\ (7-m)x^2 - 4x + 7 - m \geq 0 \quad (2) \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} a = m > 0 \\ \Delta'_1 = 4 - m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2.$$

$$\text{Ta có: } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 - m > 0 \\ \Delta'_2 = 4 - (7 - m)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 7 - m \geq 2 \Leftrightarrow m \leq 5.$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} m > 2 \\ m \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 5, \text{ mà } m \in \mathbb{Z} \text{ nên } m = \{3; 4; 5\}.$$

Vậy $S = 3 + 4 + 5 = 12$.

Bài tập 3. Bất phương trình $\log_2 \frac{x^2 - 6x + 8}{4x - 1} \geq 0$ có tập nghiệm là $T = \left(\frac{1}{4}; a\right] \cup [b; +\infty)$. Hỏi $M = a + b$ bằng

A. $M = 12$.

B. $M = 8$.

C. $M = 9$.

D. $M = 10$.

Lời giải**Chọn D**

$$\text{Ta có } \log_2 \frac{x^2 - 6x + 8}{4x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 6x + 8}{4x - 1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 10x + 9}{4x - 1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 10x + 9 \geq 0 \\ 4x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} < x \leq 1 \\ x \geq 9 \end{cases}$$

$$\text{Nên } T = \left(\frac{1}{4}; 1\right] \cup [9; +\infty) \Rightarrow M = a + b = 1 + 9 = 10.$$

Bài tập 4. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2(x^2 - 1)) \leq -1$ là:

A. $S = [1; \sqrt{5}]$.

B. $S = (-\infty; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; +\infty)$.

C. $S = [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$.

D. $S = [-\sqrt{5}; -1) \cup (1; \sqrt{5}]$.

Lời giải**Chọn B**

$$* \text{ ĐKXD: } \begin{cases} \log_2(x^2 - 1) > 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - 1 > 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty).$$

$$\text{Bất phương trình } \log_{\frac{1}{2}}(\log_2(x^2 - 1)) \leq -1 \Leftrightarrow \log_2(x^2 - 1) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2 \Leftrightarrow (x^2 - 1) \geq 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 \geq 5 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; +\infty).$$

$$* \text{ Kết hợp điều kiện ta được: } x \in (-\infty; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; +\infty).$$

Bài tập 5. Bất phương trình $\ln(2x^2 + 3) > \ln(x^2 + ax + 1)$ nghiệm đúng với mọi số thực x khi:

A. $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$.

B. $0 < a < 2\sqrt{2}$.

C. $0 < a < 2$.

D. $-2 < a < 2$.

Lời giải**Chọn D**

$$\ln(2x^2 + 3) > \ln(x^2 + ax + 1) \text{ nghiệm đúng với mọi số thực } x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax + 1 > 0 \\ 2x^2 + 3 > x^2 + ax + 1 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax + 1 > 0 \\ x^2 - ax + 2 > 0 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4 < 0 \\ a^2 - 8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < a < 2.$$

Bài tập 6. Bất phương trình $(3^x - 1)(x^2 + 3x - 4) > 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên nhỏ hơn 6?

A. 9.

B. 5.

C. 7.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn C

$$(3^x - 1)(x^2 + 3x - 4) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x - 1 > 0 \\ x^2 + 3x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -4 \vee x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ -4 < x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3^x - 1 < 0 \\ x^2 + 3x - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ -4 < x < 1 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện nghiệm nguyên nhỏ hơn 6 ta thấy các giá trị thỏa là $\{-3; -2; -1; 2; 3; 4; 5\}$.

Bài tập 7. nghiệm của bất phương trình $\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{2x^2+x+1} \leq \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{1-x}$ là

A. $\left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

B. $\left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

C. $(-1; 0)$.

D. $\left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Do } x^2 + \frac{1}{2} > 0 \forall x \text{ nên } \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{2x^2+x+1} \leq \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{1}{2} = 1 \\ x^2 + \frac{1}{2} > 1 \\ 2x^2 + x + 1 \leq 1 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right) \\ x \in [-1; 0] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x \in \left[-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ x \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ x \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Bài tập 8. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-3x-10}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$ là

A. 1.

B. 0.

C. 9.

D. 11.

Lời giải

Chọn C

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-3x-10}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x-10} < x-2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-10 \geq 0 \\ x-2 > 0 \\ x^2-3x-10 < (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 5 \\ x > 2 \\ x < 14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 5 \leq x < 14$$

Vậy tập tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho là $\{5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13\}$.

Bài tập 9. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_m(2x^2+x+3) \leq \log_m(3x^2-x)$ với m là tham số thực dương khác 1, biết $x=1$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

A. $S = (-2; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right]$.

B. $S = [-1; 0] \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right]$.

C. $S = (-1; 0) \cup (1; 3]$.

D. $S = [-1; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right]$.

Lời giải

Chọn D

Do $x=1$ là nghiệm nên ta có $\log_m 6 \leq \log_m 2 \Rightarrow 0 < m < 1$.

$$\text{Bất phương trình tương đương với } \begin{cases} 2x^2+x+3 \geq 3x^2-x \\ 3x^2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-3 \leq 0 \\ 3x^2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ x < 0; x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{3} < x \leq 3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = [-1; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right].$$

Bài tập 10. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình: $1 + \log_5(x^2+1) \geq \log_5(mx^2+4x+m)$ thỏa mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $-1 < m \leq 0$.

B. $-1 < m < 0$.

C. $2 < m \leq 3$.

D. $2 < m < 3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$1 + \log_5(x^2+1) \geq \log_5(mx^2+4x+m) \Leftrightarrow \log_5(5x^2+5) \geq \log_5(mx^2+4x+m)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2+4x+m > 0 \\ 5x^2+5 \geq mx^2+4x+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx^2+4x+m > 0 \quad (1) \\ (m-5)x^2+4x+(m-5) \leq 0 \quad (2) \end{cases}$$

Để bất phương trình đã cho thỏa mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$ điều kiện là cả (1) và (2) đều thỏa mãn

$$\text{với mọi } x \in \mathbb{R}. \text{ Điều kiện là } \begin{cases} 0 < m < 5 \\ 4 - m^2 < 0 \\ 4 - (m - 5)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 3.$$

Bài tập 11. Bất phương trình $\ln(2x^2 + 3) > \ln(x^2 + ax + 1)$ nghiệm đúng với mọi số thực x khi:

- A. $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$. B. $0 < a < 2\sqrt{2}$. C. $0 < a < 2$. D. $-2 < a < 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\ln(2x^2 + 3) > \ln(x^2 + ax + 1)$ nghiệm đúng với mọi số thực x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax + 1 > 0 \\ 2x^2 + 3 > x^2 + ax + 1 \end{cases} \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax + 1 > 0 \\ x^2 - ax + 2 > 0 \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4 < 0 \\ a^2 - 8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < a < 2.$$

Bài tập 12. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên không dương của m để phương trình $\log_{\frac{1}{5}}(x + m) + \log_5(2 - x) = 0$ có nghiệm. Tập S có bao nhiêu tập con?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$\log_{\frac{1}{5}}(x + m) + \log_5(2 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x > 0 \\ x + m > 0 \\ \log_5(2 - x) = \log_5(x + m) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > -m \\ 2 - x = x + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > -m \\ x = \frac{2 - m}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Do đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi } \begin{cases} \frac{2 - m}{2} < 2 \\ \frac{2 - m}{2} > -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2.$$

Mà m là số nguyên không dương nên $m \in \{-1; 0\}$. Suy ra $S = \{-1; 0\}$.

Vậy số tập con của S bằng $2^2 = 4$.

Chú ý:

- Các tập con của S là: $\emptyset, \{-1\}, \{0\}, S$.
- Một tập hợp có n phần tử thì số tập con của nó là 2^n .

Bài tập 13. Tìm các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_{0,02}(\log_2(3^x + 1)) > \log_{0,02} m$ có nghiệm với mọi $x \in (-\infty; 0)$.

A. $m > 9$.

B. $m < 2$.

C. $0 < m < 1$.

D. $m \geq 1$.

Lời giải

Chọn D

$$\log_{0,02}(\log_2(3^x + 1)) > \log_{0,02} m$$

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

ĐK tham số $m : m > 0$

$$\text{Ta có: } \log_{0,02}(\log_2(3^x + 1)) > \log_{0,02} m \Leftrightarrow \log_2(3^x + 1) < m$$

Xét hàm số $f(x) = \log_2(3^x + 1)$, $\forall x \in (-\infty; 0)$ có $f' = \frac{3^x \cdot \ln 3}{(3^x + 1) \ln 2} > 0$, $\forall x \in (-\infty; 0)$

Bảng biến thiên $f(x)$:

x	$-\infty$	0
f'		+
f	0	1

Khi đó với yêu cầu bài toán thì $m \geq 1$.

Bài tập 14. Nghiệm của bất phương trình $\log_2(\sqrt{3x+1} + 6) - 1 \geq \log_2(7 - \sqrt{10-x})$ là

A. $1 \leq x \leq \frac{369}{49}$.

B. $x \geq \frac{369}{49}$.

C. $x \leq 1$.

D. $x \leq \frac{369}{49}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $-\frac{1}{3} \leq x \leq 10$. (*)

$$\text{Ta có } \log_2(\sqrt{3x+1} + 6) - 1 \geq \log_2(7 - \sqrt{10-x}) \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} + 6 \geq 14 - 2\sqrt{10-x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1} \geq 8 - 2\sqrt{10-x} \Leftrightarrow 3x+1 \geq 64 - 32\sqrt{10-x} + 4(10-x) \text{ (Do (*))}$$

$$\Leftrightarrow 32\sqrt{10-x} \geq 103 - 7x \Leftrightarrow 1024(10-x) \geq 10609 + 49x^2 - 1442x$$

$$\Leftrightarrow 49x^2 - 418x + 369 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{369}{49}.$$

Bài tập 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R} : 1 + \log_6(x^2 + 1) \geq \log_6(mx^2 + 2x + m)$.

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $mx^2 + 2x + m > 0$.

$$\text{Ta có } 1 + \log_6(x^2 + 1) \geq \log_6(mx^2 + 2x + m) \Leftrightarrow \log_6[6(x^2 + 1)] \geq \log_6(mx^2 + 2x + m)$$

$$\Leftrightarrow 6(x^2 + 1) \geq mx^2 + 2x + m \Leftrightarrow (m-6)x^2 + 2x + m - 6 \leq 0.$$

$$\text{Điều kiện bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + 2x + m > 0, \forall x \in \mathbb{R} & (1) \\ (m-6)x^2 + 2x + m - 6 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} & (2) \end{cases}$$

♦ Giải (1): Do $m = 0$ không thỏa (1) nên $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta' = 1 - m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$

♦ Giải (2): Do $m = 6$ không thỏa (2) nên:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} m < 6 \\ \Delta' = 1 - (m-6)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 6 \\ -m^2 + 12m - 35 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 6 \\ m \leq 5 \Leftrightarrow m \leq 5. \\ m \geq 7 \end{cases}$$

Suy ra $1 < m \leq 5.$

Vậy có 4 giá trị nguyên của m .

Dạng 2: Phương pháp đặt ẩn phụ

1. Phương pháp

a. Bất phương trình mũ

$$\text{Tổng quát: } f[a^{g(x)}] = 0 \quad (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{g(x)} > 0 \\ f(t) = 0 \end{cases}.$$

Ta thường gặp các dạng:

- $m.a^{2f(x)} + n.a^{f(x)} + p = 0$
- $m.a^{f(x)} + n.b^{f(x)} + p = 0$, trong đó $a.b = 1$. Đặt $t = a^{f(x)}$, $t > 0$, suy ra $b^{f(x)} = \frac{1}{t}$.
- $m.a^{2f(x)} + n.(a.b)^{f(x)} + p.b^{2f(x)} = 0$. Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = t > 0$.

b. Bất phương logarit

$$\text{Tổng quát: } f[\log_a f(x)] = 0 \quad (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_a f(x) \\ f(t) = 0 \end{cases}.$$

2. Bài tập

Bài tập 1. Tìm số các nghiệm nguyên của bất phương trình $4.3^{\log(100x^2)} + 9.4^{\log(10x)} < 13.6^{1+\log x}$.

A. 10.

B. 9.

C. 8.

D. 11

Lời giải

Chọn C

ĐK: $x > 0$.

$$\text{PT} \Leftrightarrow 4.3^{2.\log(10x)} + 9.2^{2.\log(10x)} < 13.6^{\log(10x)} \Leftrightarrow 4.\left(\frac{3}{2}\right)^{2\log(10x)} - 13.\left(\frac{3}{2}\right)^{\log(10x)} + 9 < 0$$

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{\log(10x)} > 0$ thì phương trình trở thành:

$$4t^2 - 13t + 9 < 0 \Leftrightarrow 1 < t < \frac{9}{4}.$$

$$\text{Do đó } 1 < \left(\frac{3}{2}\right)^{\log(10x)} < \frac{9}{4} \Leftrightarrow 1 < \log(10x) < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 10$$

Số các nghiệm nguyên của bất phương trình là 8.

Bài tập 2. Xét bất phương trình $\log_2^2 2x - 2(m+1)\log_2 x - 2 < 0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(\sqrt{2}; +\infty)$.

A. $m \in (0; +\infty)$. **B.** $m \in \left(-\frac{3}{4}; 0\right)$. **C.** $m \in \left(-\frac{3}{4}; +\infty\right)$. **D.** $m \in (-\infty; 0)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > 0$

$$\log_2^2 2x - 2(m+1)\log_2 x - 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + \log_2 x)^2 - 2(m+1)\log_2 x - 2 < 0 \quad (1)$$

Đặt $t = \log_2 x$. Vì $x > \sqrt{2}$ nên $\log_2 x > \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$. Do đó $t \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

$$(1) \text{ thành } (1+t)^2 - 2(m+1)t - 2 < 0 \Leftrightarrow t^2 - 2mt - 1 < 0 \quad (2)$$

Cách 1: Yêu cầu bài toán tương đương tìm m để bpt (2) có nghiệm thuộc $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Xét bất phương trình (2) có: $\Delta' = m^2 + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

$f(t) = t^2 - 2mt - 1 = 0$ có $ac < 0$ nên (2) luôn có 2 nghiệm phân biệt $t_1 < 0 < t_2$.

$$\text{Khi đó cần } \frac{1}{2} < t_2 \Leftrightarrow m + \sqrt{m^2 + 1} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow m > -\frac{3}{4}.$$

$$\textbf{Cách 2: } t^2 - 2mt - 1 < 0 \Leftrightarrow f(t) = \frac{t^2 - 1}{2t} < m \left(t > \frac{1}{2}\right)$$

Khảo sát hàm số $f(t)$ trong $(0; +\infty)$ ta được $m \in \left(-\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

Bài tập 3. Cho bất phương trình: $9^x + (m-1).3^x + m > 0$ (1). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình (1) nghiệm đúng $\forall x > 1$.

A. $m \geq -\frac{3}{2}$. **B.** $m > -\frac{3}{2}$. **C.** $m > 3 + 2\sqrt{2}$. **D.** $m \geq 3 + 2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 3^x$

Vì $x > 1 \Rightarrow t > 3$ Bất phương trình đã cho thành: $t^2 + (m-1)t + m > 0$ nghiệm đúng $\forall t \geq 3$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2 - t}{t+1} > -m \text{ nghiệm đúng } \forall t > 3.$$

Xét hàm số $g(t) = t - 2 + \frac{2}{t+1}, \forall t > 3, g'(t) = 1 - \frac{2}{(t+1)^2} > 0, \forall t > 3$. Hàm số đồng biến trên

$$[3; +\infty) \text{ và } g(3) = \frac{3}{2}. \text{ Yêu cầu bài toán tương đương } -m \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow m \geq -\frac{3}{2}.$$

Bài tập 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [0; 10]$ để tập nghiệm của bất phương trình

$$\sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 7} < m(\log_4 x^2 - 7) \text{ chứa khoảng } (256; +\infty).$$

A. 7.

B. 10.

C. 8.

D. 9.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ \log_2^2 x + 3 \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 7 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2^2 x - 6 \log_2 x - 7 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x < -1 \\ \log_2 x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq \frac{1}{2} \\ x \geq 128 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ x \geq 128 \end{cases}$$

Với điều kiện trên bất phương trình trở thành $\sqrt{\log_2^2 x - 6 \log_2 x - 7} < m(\log_2 x - 7)$ (*)

Đặt $t = \log_2 x$ thì $t > 8$ vì $x \in (256; +\infty)$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(t+1)(t-7)} < m(t-7) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{t+1}{t-7}} < m, \forall t > 8. \text{ Đặt } f(t) = \sqrt{\frac{t+1}{t-7}}.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \geq \max_{(8; +\infty)} f(t)$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{\frac{t+1}{t-7}}$ trên khoảng $(8; +\infty)$

Ta có $f'(t) = \frac{-4}{(t-7)^2} \cdot \sqrt{\frac{t-7}{t+1}} < 0, \forall t > 8 \Rightarrow f(t)$ luôn nghịch biến trên khoảng $(8; +\infty)$

Do đó $\max_{(8; +\infty)} f(t) = f(8) = 3 \Rightarrow m \geq 3.$

Mà $m \in [0; 10]$ nên $m \in \{3; 4; \dots; 10\}.$

Vậy có 8 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2(5^x - 1) \cdot \log_2(2.5^x - 2) \geq m$ có nghiệm với mọi $x \geq 1.$

A. $m \geq 6.$

B. $m > 6.$

C. $m \leq 6.$

D. $m < 6.$

Lời giải

Chọn C.

Điều kiện của bất phương trình: $x > 0.$

Ta có $\log_2(5^x - 1) \cdot \log_2(2.5^x - 2) \geq m \Leftrightarrow \log_2(5^x - 1) \cdot [1 + \log_2(5^x - 1)] \geq m$ (1).

Đặt $t = \log_2(5^x - 1)$, với $x \geq 1$ ta có $t \geq 2.$ Khi đó (1) trở thành $m \leq t^2 + t$ (2).

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$ trên $[2; +\infty)$ ta có $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in [2; +\infty).$

Do đó để bất phương trình đã cho có nghiệm với mọi $t \geq 2$ thì $m \leq \min_{[2; +\infty)} f(t)$ hay $m \leq 6.$

Bài tập 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $9^{\sqrt{x^2 - 3x + m}} + 2.3^{\sqrt{x^2 - 3x + m} - 2 + x} < 3^{2x - 3}$ có nghiệm?

A. 6 .

B. 4 .

C. 9 .

D. 1 .

Lời giải**Chọn D.**Điều kiện $x^2 - 3x + m \geq 0$ (*)

$$9^{\sqrt{x^2-3x+m}} + 2.3^{\sqrt{x^2-3x+m}-2+x} < 3^{2x-3} \Leftrightarrow 3^{2(\sqrt{x^2-3x+m}-x)} + \frac{2}{9}.3^{\sqrt{x^2-3x+m}-x} - \frac{1}{27} < 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < 3^{\sqrt{x^2-3x+m}-x} < 3^{-2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+m} - x < -2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+m} < x-2.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + m \geq 0 \\ x - 2 > 0 \\ x^2 - 3x + m < x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + m \geq 0 \\ x > 2 \\ x < 4 - m \end{cases} \Rightarrow 4 - m > 2 \Leftrightarrow m < 2.$$

Do m nguyên dương nên $m = 1$ thỏa mãn (*).

Bài tập 7. Bất phương trình $\frac{\log_2 \frac{x}{2}}{\log_2 x} - \frac{\log_2 x^2}{\log_2 x - 1} \leq 1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 10.

A. 7 .

B. 8 .

C. 9 .

D. 6 .

Lời giải**Chọn A**

Điều kiện của bất phương trình là $x > 0$. Khi đó $\frac{\log_2 \frac{x}{2}}{\log_2 x} - \frac{\log_2 x^2}{\log_2 x - 1} \leq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2 x - 1}{\log_2 x} - \frac{2 \log_2 x}{\log_2 x - 1} \leq 1$$

Đặt $t = \log_2 x$. Ta có $\frac{t-1}{t} - \frac{2t}{t-1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2 - 2t^2}{t(t-1)} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2 - 2t^2}{t(t-1)} - 1 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-2t^2 - t + 1}{t(t-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -1 \\ 0 < t \leq \frac{1}{2} \\ t > 1 \end{cases}$$

Trả lại ẩn ta có $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \leq -1 \\ 0 < \log_2 x \leq \frac{1}{2} \\ \log_2 x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ 1 < x \leq \sqrt{2} \\ x > 2 \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện $x > 0$ ta có $0 < x \leq \frac{1}{2}$ hoặc $1 < x \leq \sqrt{2}$ hoặc $x > 2$.

Khi đó bất phương trình có 7 nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 10.

Bài tập 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $m.4^x + (m-1).2^{x+2} + m-1 > 0$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$?

A. $m \leq 3$.B. $m \geq 1$.C. $-1 \leq m \leq 4$.D. $m \geq 0$.**Lời giải****Chọn B.**

Bất phương trình $\Leftrightarrow m.4^x + 4(m-1).2^x + m - 1 > 0 \Leftrightarrow m(4^x + 4.2^x + 1) > 1 + 4.2^x$

$$\Leftrightarrow m > \frac{1 + 4.2^x}{4^x + 4.2^x + 1}$$

Đặt $2^x = t$ (Điều kiện $t > 0$). Khi đó $m > \frac{4t+1}{t^2+4t+1}$. Để bất phương trình ban đầu nghiệm đúng

$\forall x \in \mathbb{R}$ thì bất phương trình $m > \frac{4t+1}{t^2+4t+1}$ nghiệm đúng $\forall t > 0$.

$$\text{Đặt } f(t) = \frac{4t+1}{t^2+4t+1} \Rightarrow f'(t) = -\frac{4t^2+2t}{(t^2+4t+1)^2} < 0, \forall t > 0.$$

Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$. Khi đó $m > \frac{4t+1}{t^2+4t+1} \forall t > 0$ khi và chỉ khi $m \geq f(0) = 1$

Bài tập 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số m bất phương trình $4^{x-1} - m(2^x + 1) > 0$ có nghiệm $\forall x \in \mathbb{R}$.

A. $m \in (-\infty; 0]$.

B. $m \in (0; +\infty)$.

C. $m \in (0; 1)$.

D. $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } 4^{x-1} - m(2^x + 1) > 0 \Leftrightarrow m < \frac{4^{x-1}}{2^x + 1} \Leftrightarrow m < \frac{4^x}{4(2^x + 1)}.$$

Đặt $t = 2^x, t > 0$. Yêu cầu bài toán tương đương với $m < \frac{t^2}{4(t+1)}, \forall t \in (0; +\infty)$.

$$\text{Đặt } f(t) = \frac{t^2}{4(t+1)}, t > 0, f'(t) = \frac{1}{4} \left(\frac{2t(t+1) - t^2}{(t+1)^2} \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{t^2 + 2t}{(t+1)^2}.$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên (Bổ sung các dấu mũi tên trong bbt là $\pm\infty$ vào nhé)

t	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$			
$f'(t)$		$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên có $m \leq 0$.

Bài tập 10. Xét bất phương trình $\log_2^2 2x - 2(m+1)\log_2 x - 2 < 0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(\sqrt{2}; +\infty)$.

A. $m \in (0; +\infty)$.

B. $m \in \left(-\frac{3}{4}; 0\right)$.

C. $m \in \left(-\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

D. $m \in (-\infty; 0)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > 0$

$$\log_2^2 2x - 2(m+1)\log_2 x - 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + \log_2 x)^2 - 2(m+1)\log_2 x - 2 < 0 \quad (1)$$

Đặt $t = \log_2 x$. Vì $x > \sqrt{2}$ nên $\log_2 x > \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$. Do đó $t \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

$$(1) \text{ thành } (1+t)^2 - 2(m+1)t - 2 < 0 \Leftrightarrow t^2 - 2mt - 1 < 0 \quad (2)$$

Cách 1: Yêu cầu bài toán tương đương tìm m để bpt (2) có nghiệm thuộc $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Xét bất phương trình (2) có: $\Delta' = m^2 + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

$f(t) = t^2 - 2mt - 1 = 0$ có $ac < 0$ nên (2) luôn có 2 nghiệm phân biệt $t_1 < 0 < t_2$.

$$\text{Khi đó cần } \frac{1}{2} < t_2 \Leftrightarrow m + \sqrt{m^2 + 1} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow m > -\frac{3}{4}.$$

$$\textbf{Cách 2: } t^2 - 2mt - 1 < 0 \Leftrightarrow f(t) = \frac{t^2 - 1}{2t} < m \left(t > \frac{1}{2}\right)$$

Khảo sát hàm số $f(t)$ trong $(0; +\infty)$ ta được $m \in \left(-\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

Bài tập 11. Tìm giá trị gần đúng tổng các nghiệm của bất phương trình sau:

$$\left(\sqrt{2\log_x^2 \frac{22}{3} - 2\log_x \frac{22}{3} + 5} - \sqrt{13} + \sqrt{\frac{2}{\log_{\frac{22}{3}} x} - \frac{4}{\log_{\frac{22}{3}} x} + 4} \right) (24x^6 - 2x^5 + 27x^4 - 2x^3 + 1997x^2 + 2016) \leq 0$$

A. 12,3.

B. 12.

C. 12,1.

D. 12,2.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $0 < x \neq 1$.

Ta có $24x^6 - 2x^5 + 27x^4 - 2x^3 + 1997x^2 + 2016$

$$= (x^3 - x^2)^2 + (x^3 - 1)^2 + 22x^6 + 26x^4 + 1997x^2 + 2015 > 0, \forall x.$$

Do đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\sqrt{2\log_x^2 \frac{22}{3} - 2\log_x \frac{22}{3} + 5} - \sqrt{13} + \sqrt{\frac{2}{\log_{\frac{22}{3}} x} - \frac{4}{\log_{\frac{22}{3}} x} + 4} \right) \leq 0.$$

Đặt $t = \log_x \frac{22}{3}$, ta có bất phương trình

$$\sqrt{2t^2 - 2t + 5} + \sqrt{2t^2 - 4t + 4} \leq \sqrt{13}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} + \sqrt{(1-t)^2 + 1^2} \leq \sqrt{\frac{13}{2}}.$$

Đặt $\vec{u} = \left(t - \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ và $\vec{v} = (1-t; 1)$. Ta có $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{\frac{13}{2}}.$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{t-\frac{1}{2}}{1-t} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2t-1=3-3t \Leftrightarrow t=\frac{4}{5} \Rightarrow x=\left(\frac{22}{3}\right)^{\frac{5}{4}}=12,06$.

Bài tập 12. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để bất phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 3 - 2m \leq 0$ có nghiệm thực.

A. $m \geq 2$.

B. $m \leq 3$.

C. $m \leq 5$.

D. $m \geq 1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 3 - 2m \leq 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2m \cdot 2^x + 3 - 2m \leq 0$

Đặt $2^x = t$ ($t > 0$).

Ta có bất phương trình tương đương với $t^2 - 2mt + 3 - 2m \leq 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 + 3}{2t + 2} \leq m$

Xét $f(t) = \frac{t^2 + 3}{2t + 2}$ trên $(0; +\infty)$.

$$f'(t) = \frac{2t^2 + 4t - 6}{(2t + 2)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$\frac{3}{2}$	1	$+\infty$

Vậy để bất phương trình có nghiệm thực thì $m \geq 1$.

Bài tập 13. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $4(\log_2 \sqrt{x})^2 + \log_2 x + m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi giá trị $x \in (1; 64)$.

A. $m \leq 0$.

B. $m \geq 0$.

C. $m < 0$.

D. $m > 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $4(\log_2 \sqrt{x})^2 + \log_2 x + m \geq 0 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 + \log_2 x + m \geq 0$.

Đặt $\log_2 x = t$, khi $x \in (1; 64)$ thì $t \in (0; 6)$.

Khi đó, ta có $t^2 + t + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -t^2 - t$ (*).

Xét hàm số $f(t) = -t^2 - t$ với $t \in (0; 6)$.

Ta có $f'(t) = -2t - 1 < 0, \forall t \in (0; 6)$.

Ta có bảng biến thiên:

t	0	6
$f'(t)$		-
$f(t)$	0	42

Bất phương trình đã cho đúng với mọi $x \in (1; 64)$ khi và chỉ khi bất phương trình (*) đúng với mọi $t \in (0; 6) \Leftrightarrow m \geq 0$.

Bài tập 14. Có bao nhiêu giá trị dương của tham số thực m để bất phương trình

$$\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} \geq m^2 (\log_4 x^2 - 3) \text{ có nghiệm duy nhất thuộc } [32; +\infty)?$$

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} x > 0 \\ \log_2^2 x - 2 \log_2 x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ x \geq 8 \end{cases}.$$

Hàm số xác định trên $[32; +\infty)$.

$$\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} \geq m^2 (\log_4 x^2 - 3) \Leftrightarrow \sqrt{\log_2^2 x - 2 \log_2 x - 3} \geq m^2 (\log_2 x - 3).$$

Đặt $t = \log_2 x$. Khi $x \geq 32$, ta có miền giá trị của t là $[5; +\infty)$.

$$\text{Bất phương trình có dạng: } \sqrt{t^2 - 2t - 3} \geq m^2 (t - 3) \Leftrightarrow m^2 \leq \frac{\sqrt{t^2 - 2t - 3}}{t - 3} \Leftrightarrow m^2 \leq \sqrt{\frac{t+1}{t-3}}.$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t+1}{t-3}$ trên $[5; +\infty)$ có $f'(t) = \frac{-4}{(t-3)^2}$ nên hàm số nghịch biến trên $[5; +\infty)$.

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(t) = 1$ và $f(5) = 3$ nên ta có $1 < f(t) \leq 3$.

Do với mỗi t có duy nhất một giá trị x nên để bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất thuộc $[32; +\infty)$ khi và chỉ bất phương trình $m^2 \leq \sqrt{f(t)}$ có nghiệm duy nhất trên $[5; +\infty)$.

Khi đó: $m^2 = \sqrt{3} \Leftrightarrow m = \sqrt[4]{3}$. Do đó không có số nguyên dương m thỏa mãn.

Bài tập 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình

$$9^{\sqrt{x^2-3x+m}} + 2 \cdot 3^{\sqrt{x^2-3x+m}-2+x} < 3^{2x-3} \text{ có nghiệm?}$$

A. 6.

B. 4.

C. 9.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x^2 - 3x + m \geq 0$ (*)

$$9^{\sqrt{x^2-3x+m}} + 2 \cdot 3^{\sqrt{x^2-3x+m}-2+x} < 3^{2x-3} \Leftrightarrow 3^{2(\sqrt{x^2-3x+m}-x)} + \frac{2}{9} \cdot 3^{\sqrt{x^2-3x+m}-x} - \frac{1}{27} < 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < 3^{\sqrt{x^2-3x+m}-x} < 3^{-2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+m} - x < -2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+m} < x - 2.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + m \geq 0 \\ x - 2 > 0 \\ x^2 - 3x + m < x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + m \geq 0 \\ x > 2 \\ x < 4 - m \end{cases} \Rightarrow 4 - m > 2 \Leftrightarrow m < 2.$$

Do m nguyên dương nên $m = 1$ thỏa mãn (*).

Bài tập 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2(5^x - 1) \cdot \log_2(2 \cdot 5^x - 2) \geq m$ có nghiệm với mọi $x \geq 1$.

A. $m \geq 6$.

B. $m > 6$.

C. $m \leq 6$.

D. $m < 6$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện của bất phương trình: $x > 0$.

Ta có $\log_2(5^x - 1) \cdot \log_2(2 \cdot 5^x - 2) \geq m \Leftrightarrow \log_2(5^x - 1) \cdot [1 + \log_2(5^x - 1)] \geq m$ (1).

Đặt $t = \log_2(5^x - 1)$, với $x \geq 1$ ta có $t \geq 2$. Khi đó (1) trở thành $m \leq t^2 + t$ (2).

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$ trên $[2; +\infty)$ ta có $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in [2; +\infty)$.

Do đó để bất phương trình đã cho có nghiệm với mọi $t \geq 2$ thì $m \leq \min_{[2; +\infty)} f(t)$ hay $m \leq 6$.

Bài tập 17. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $m \cdot 4^x + (m - 1) \cdot 2^{x+2} + m - 1 > 0$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$?

A. $m \leq 3$.

B. $m \geq 1$.

C. $-1 \leq m \leq 4$.

D. $m \geq 0$.

Lời giải

Chọn B

Bất phương trình $\Leftrightarrow m \cdot 4^x + 4(m - 1) \cdot 2^x + m - 1 > 0 \Leftrightarrow m(4^x + 4 \cdot 2^x + 1) > 1 + 4 \cdot 2^x$

$$\Leftrightarrow m > \frac{1 + 4 \cdot 2^x}{4^x + 4 \cdot 2^x + 1}$$

Đặt $2^x = t$ (Điều kiện $t > 0$). Khi đó $m > \frac{4t + 1}{t^2 + 4t + 1}$. Để bất phương trình ban đầu nghiệm đúng

$\forall x \in \mathbb{R}$ thì bất phương trình $m > \frac{4t + 1}{t^2 + 4t + 1}$ nghiệm đúng $\forall t > 0$.

$$\text{Đặt } f(t) = \frac{4t + 1}{t^2 + 4t + 1} \Rightarrow f'(t) = -\frac{4t^2 + 2t}{(t^2 + 4t + 1)^2} < 0, \forall t > 0.$$

Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$. Khi đó $m > \frac{4t + 1}{t^2 + 4t + 1} \forall t > 0$ khi và chỉ khi $m \geq f(0) = 1$

Bài tập 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số m bất phương trình $4^{x-1} - m(2^x + 1) > 0$ có nghiệm $\forall x \in \mathbb{R}$.

A. $m \in (-\infty; 0]$.

B. $m \in (0; +\infty)$.

C. $m \in (0; 1)$.

D. $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $4^{x-1} - m(2^x + 1) > 0 \Leftrightarrow m < \frac{4^{x-1}}{2^x + 1} \Leftrightarrow m < \frac{4^x}{4(2^x + 1)}$.

Đặt $t = 2^x, t > 0$. Yêu cầu bài toán tương đương với $m < \frac{t^2}{4(t+1)}, \forall t \in (0; +\infty)$.

Đặt $f(t) = \frac{t^2}{4(t+1)}, t > 0, f'(t) = \frac{1}{4} \left(\frac{2t(t+1) - t^2}{(t+1)^2} \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{t^2 + 2t}{(t+1)^2}$.

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên (Bổ sung các dấu mũi tên trong bbt là $\pm\infty$ vào nhé)

t	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$		
$f'(t)$		$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(t)$						0	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên có $m \leq 0$.

Dạng 3: Phương pháp logarit hóa

1. Phương pháp

Với bất phương trình $a^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) \cdot \log_a b \\ 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x) \cdot \log_a b \end{cases}$

2. Bài tập

Bài tập 1. Nghiệm của bất phương trình $8^{\frac{x}{x+2}} > 36 \cdot 3^{2-x}$ là

A. $\begin{cases} -3 < x < 2 \\ x > 4 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} -\log_2 6 < x < -2 \\ x > 4 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} -4 < x < -2 \\ x > 1 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} -\log_3 18 < x < -2 \\ x > 4 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $8^{\frac{x}{x+2}} > 36 \cdot 3^{2-x} \Leftrightarrow 2^{\frac{x-4}{x+2}} > 3^{4-x} \Leftrightarrow \log_3 2^{\frac{x-4}{x+2}} > \log_3 3^{4-x}$

$\Leftrightarrow \frac{x-4}{x+2} \log_3 2 > 4-x \Leftrightarrow (x-4) \left(\frac{\log_3 2}{x+2} + 1 \right) > 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4 > 0 \\ \log_3 2 \\ \frac{\log_3 2}{x+2} + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < 4 \\ \frac{\log_3 2 + 2 + x}{x+2} < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < 4 \\ \frac{\log_3 18 + x}{x+2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < 4 \\ -\log_3 18 < x < -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ -\log_3 18 < x < -2 \end{cases}$$

Bài tập 2. Bất phương trình $2^x \cdot 5^{\frac{2x}{x+1}} < 10$ có tập nghiệm là $(-\infty; -b) \cup (-a; a)$. Khi đó $b - a$ bằng

A. $\log_2 5$.

B. $-\log_5^2$.

C. 1.

D. $2 + \log_2 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } 2^x \cdot 5^{\frac{2x}{x+1}} < 10 \Leftrightarrow \frac{2^x \cdot 5^{\frac{2x}{x+1}}}{2 \cdot 5} < 1 \Leftrightarrow 2^{x-1} \cdot 5^{\frac{x-1}{x+1}} < 1 \Leftrightarrow \log_5 \left(2^{x-1} \cdot 5^{\frac{x-1}{x+1}} \right) < \log_5 1$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \cdot \log_5 2 + \frac{x-1}{x+1} < 0 \Leftrightarrow (x-1) \cdot \left(\log_5 2 + \frac{1}{x+1} \right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1) \cdot (x \cdot \log_5 2 + \log_5 2 + 1)}{x+1} < 0.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\log_2 10$	-1	1	$+\infty$
VT	$-$	$+$	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu ta có $\frac{(x-1) \cdot (x \cdot \log_5 2 + \log_5 2 + 1)}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ -\infty < x < -\log_2 10 \end{cases}$.

Do đó $\begin{cases} a = 1 \\ b = \log_2 10 \end{cases} \Rightarrow b - a = \log_2 5$.

Bài tập 3. Có bao nhiêu số nguyên dương m trong đoạn $[-2018; 2018]$ sao cho bất phương trình sau đúng

với mọi $x \in (1; 100)$: $(10x)^{m + \frac{\log x}{10}} \geq 10^{\frac{11}{10} \log x}$.

A. 2018.

B. 4026.

C. 2013.

D. 4036.

Lời giải

Chọn A

$$(10x)^{m + \frac{\log x}{10}} \geq 10^{\frac{11}{10} \log x} \Leftrightarrow \left(m + \frac{\log x}{10}\right)(\log x + 1) \geq \frac{11}{10} \log x \Leftrightarrow (\log x + 10m)(\log x + 1) - 11 \log x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 10m(\log x + 1) + \log^2 x - 10 \log x \geq 0.$$

Do $x \in (1; 100) \Rightarrow \log x \in (0; 2)$. Do đó

$$10m(\log x + 1) + \log^2 x - 10 \log x \geq 0 \Leftrightarrow 10m \geq \frac{10 \log x - \log^2 x}{\log x + 1}.$$

Đặt $t = \log x$, $t \in (0; 2)$, xét hàm số $f(t) = \frac{10t - t^2}{t + 1}$. Ta có: $f'(t) = \frac{10 - 2t - t^2}{(t + 1)^2} > 0 \forall t \in (0; 2)$.

$$\text{Do đó } f(0) < f(t) < f(2) \Leftrightarrow 0 < f(t) < \frac{16}{3}.$$

$$\text{Để } 10m \geq \frac{10 \log x - \log^2 x}{\log x + 1} \text{ đúng với mọi } x \in (1; 100) \text{ thì } 10m \geq \frac{16}{3} \Rightarrow m \geq \frac{8}{15}.$$

Do đó $m \in \left[\frac{8}{15}; 2018\right]$ hay có 2018 số thỏa mãn.

Dạng 4: Phương pháp sử dụng tính đơn điệu

1. Phương pháp

Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến trên D thì $f(u) > f(v) \Leftrightarrow u > v$, $\forall u, v \in D$.

Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn nghịch biến trên D thì $f(u) > f(v) \Leftrightarrow u < v$, $\forall u, v \in D$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{2x^2 - 15x + 100} - 2^{x^2 + 10x - 50} + x^2 - 25x + 150 < 0$

A. 6.

B. 4.

C. 5.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Đặt $a = 2x^2 - 15x + 100$; $b = x^2 + 10x - 50$ ta có bất phương trình:

$$2^a - 2^b + a - b < 0 \Leftrightarrow 2^a + a < 2^b + b \Leftrightarrow a < b$$

(do hàm số $y = 2^x + x$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$)

$$\text{Với } a < b \Leftrightarrow 2x^2 - 15x + 100 < x^2 + 10x - 50 \Leftrightarrow x^2 - 25x + 150 < 0$$

$\Leftrightarrow x \in (10; 15)$. Vậy bất phương trình có 4 nghiệm nguyên.

Bài tập 2. Tìm số nguyên m nhỏ nhất để bất phương trình $\log_3(x^2 + x + 1) + 2x^3 \leq 3x^2 + \log_3 x + m - 1$ (ẩn x) có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

A. $m = 3$.

B. $m = 2$.

C. $m = 1$.

D. $m = -1$.

Lời giải

Chọn B

$$\log_3(x^2 + x + 1) + 2x^3 \leq 3x^2 + \log_3 x + m - 1 \quad (1)$$

Điều kiện $x > 0$.

$$(1) \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{x^2 + x + 1}{x}\right) + 2x^3 - 3x^2 \leq m - 1 \Leftrightarrow \log_3\left(1 + x + \frac{1}{x}\right) + 2x^3 - 3x^2 \leq m - 1.$$

Xét $f(x) = \log_3\left(1 + x + \frac{1}{x}\right) + 2x^3 - 3x^2$, với $x > 0$.

$$f'(x) = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\left(1 + x + \frac{1}{x}\right) \ln 3} + 6x^2 - 6x; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Với $x \in (0; 1) \Rightarrow f'(x) < 0$; với $x \in (1; +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Vậy bất phương trình có ít nhất hai nghiệm $\Leftrightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$. Vậy $m = 2$.

Bài tập 3. Gọi a là số thực lớn nhất để bất phương trình $x^2 - x + 2 + a \ln(x^2 - x + 1) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $a \in (2; 3]$.

B. $a \in (8; +\infty)$.

C. $a \in (6; 7]$.

D. $a \in (-6; -5]$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \text{ suy ra } t \geq \frac{3}{4}$$

$$\text{Bất phương trình } x^2 - x + 2 + a \ln(x^2 - x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow t + a \ln t + 1 \geq 0 \Leftrightarrow a \ln t \geq -t - 1$$

Trường hợp 1: $t = 1$ khi đó $a \ln t \geq -t - 1$ luôn đúng với mọi a .

Trường hợp 2: $\frac{3}{4} \leq t < 1$

$$\text{Ta có } a \ln t \geq -t - 1, \forall t \in \left[\frac{3}{4}; 1\right) \Leftrightarrow a \leq \frac{-t - 1}{\ln t}, \forall t \in \left[\frac{3}{4}; 1\right)$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{-t-1}{\ln t} \Rightarrow f'(t) = -\frac{\ln t - 1 - \frac{1}{t}}{\ln^2 t} \geq 0, \forall t \in \left[\frac{3}{4}; 1\right)$ do đó

$$a \leq \frac{-t-1}{\ln t}, \forall t \in \left[\frac{3}{4}; 1\right) \Leftrightarrow a \leq \frac{-7}{4 \ln \frac{3}{4}}$$

Trường hợp 3: $t > 1$

Ta có $a \ln t \geq -t-1, \forall t \in (1; +\infty) \Leftrightarrow a \geq \frac{-t-1}{\ln t}, \forall t \in (1; +\infty)$

Xét hàm số $f(t) = \frac{-t-1}{\ln t} \Rightarrow f'(t) = -\frac{\ln t - 1 - \frac{1}{t}}{\ln^2 t}, \forall t \in (1; +\infty)$.

Xét hàm số $g(t) = \ln t - 1 - \frac{1}{t} \Leftrightarrow g'(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} > 0$

Vậy $g(t) = 0$ có tối đa một nghiệm.

Vì $g(1) = -2; \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = +\infty$ vậy $g(t) = 0$ có duy nhất một nghiệm trên $(1; +\infty)$

Do đó $f'(t) = 0$ có duy nhất một nghiệm là t_0 . Khi đó $\ln t_0 = \frac{t_0 + 1}{t_0}$ suy ra $f(t_0) = -t_0$

Bảng biến thiên

t	1	t_0	$+\infty$
f'		+	0
f		$-\infty$	$-\infty$

Vậy $a \geq \frac{-t-1}{\ln t}, \forall t \in (1; +\infty) \Leftrightarrow a \geq -t_0$.

Vậy $-t_0 \leq a \leq \frac{-7}{4 \ln \frac{3}{4}}$.

Vậy số thực a thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $a \in (6; 7]$.

Bài tập 4. Biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $4^{\sin^2 x} + 5^{\cos^2 x} \leq m \cdot 7^{\cos^2 x}$ có nghiệm

là $m \in \left[\frac{a}{b}; +\infty\right)$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tổng $S = a + b$ là:

A. $S = 13$.

B. $S = 15$.

C. $S = 9$.

D. $S = 11$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $4^{\sin^2 x} + 5^{\cos^2 x} \leq m \cdot 7^{\cos^2 x} \Leftrightarrow 4 \cdot \left(\frac{1}{28}\right)^{\cos^2 x} + \left(\frac{5}{7}\right)^{\cos^2 x} \leq m$.

Xét $f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{28}\right)^{\cos^2 x} + \left(\frac{5}{7}\right)^{\cos^2 x}$ với $x \in \mathbb{R}$. Do $\begin{cases} \left(\frac{1}{28}\right)^{\cos^2 x} \geq \frac{1}{28} \\ \left(\frac{5}{7}\right)^{\cos^2 x} \geq \frac{5}{7} \end{cases}$ nên $f(x) \geq \frac{4}{28} + \frac{5}{7}$ hay

$f(x) \geq \frac{6}{7}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$.

Vậy $\min_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{6}{7}$. Bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq \min_{\mathbb{R}} f(x) \Leftrightarrow m \geq \frac{6}{7}$ hay

$m \in \left[\frac{6}{7}; +\infty\right) \Rightarrow S = 13$.

Bài tập 5. Với giá trị nào của tham số m thì bất phương trình $2^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} \geq m \cdot 3^{\sin^2 x}$ có nghiệm?

A. $m \leq 4$.

B. $m \geq 4$.

C. $m \leq 1$.

D. $m \geq 1$.

Lời giải

Chọn A

Chia hai vế của bất phương trình cho $3^{\sin^2 x} > 0$, ta được

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\sin^2 x} + 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{\sin^2 x} \geq m$$

Xét hàm số $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{\sin^2 x} + 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{\sin^2 x}$ là hàm số nghịch biến.

Ta có: $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ nên $1 \leq y \leq 4$

Vậy bất phương trình có nghiệm khi $m \leq 4$. Chọn đáp án A

Bài tập 6. Tìm số nguyên m nhỏ nhất để bất phương trình $\log_3(x^2 + x + 1) + 2x^3 \leq 3x^2 + \log_3 x + m - 1$ (ẩn x) có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

A. $m = 3$.

B. $m = 2$.

C. $m = 1$.

D. $m = -1$.

Lời giải

Chọn B

$$\log_3(x^2 + x + 1) + 2x^3 \leq 3x^2 + \log_3 x + m - 1 \quad (1)$$

Điều kiện $x > 0$.

$$(1) \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{x^2 + x + 1}{x}\right) + 2x^3 - 3x^2 \leq m - 1 \Leftrightarrow \log_3\left(1 + x + \frac{1}{x}\right) + 2x^3 - 3x^2 \leq m - 1.$$

Xét $f(x) = \log_3\left(1 + x + \frac{1}{x}\right) + 2x^3 - 3x^2$, với $x > 0$.

$$f'(x) = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\left(1 + x + \frac{1}{x}\right) \ln 3} + 6x^2 - 6x; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Với $x \in (0; 1) \Rightarrow f'(x) < 0$; với $x \in (1; +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Vậy bất phương trình có ít nhất hai nghiệm $\Leftrightarrow m-1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$. Vậy $m = 2$.

Bài tập 7. Biết tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(\sqrt{x^2-x+4}+1) + 2\log_5(x^2-x+5) < 3$ là $(a; b)$.

Khi đó tổng $a+2b$ bằng

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = \log_3(\sqrt{x^2-x+4}+1) + 2\log_5(x^2-x+5)$.

$$\Rightarrow f'(x) = (2x-1) \left(\frac{1}{2(\sqrt{x^2-x+4}+1)\sqrt{x^2-x+4}\ln 3} + \frac{2}{(x^2-x+5)\ln 5} \right)$$

$$\text{Dễ đánh giá } g(x) = \frac{1}{2(\sqrt{x^2-x+4}+1)\sqrt{x^2-x+4}\ln 3} + \frac{2}{(x^2-x+5)\ln 5} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	—	0	+
y	2		5

Có $f(0) = f(1) = 3$ và dựa vào bảng biến thiên ta có $f(x) < 3 \Leftrightarrow x \in (0; 1)$

Vậy $a = 0; b = 1$; suy ra $a + 2b = 2$

Bài tập 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a ($a > 0$) thỏa mãn $\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^{2017} \leq \left(2^{2017} + \frac{1}{2^{2017}}\right)^a$.

A. $0 < a < 1$.

B. $1 < a < 2017$.

C. $a \geq 2017$.

D. $0 < a \leq 2017$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^{2017} \leq \left(2^{2017} + \frac{1}{2^{2017}}\right)^a$$

$$\Rightarrow 2017 \log_2 \left(2^a + \frac{1}{2^a}\right) \leq a \log_2 \left(2^{2017} + \frac{1}{2^{2017}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\log_2 \left(2^a + \frac{1}{2^a} \right)}{a} \leq \frac{\log_2 \left(2^{2017} + \frac{1}{2^{2017}} \right)}{2017}.$$

Xét hàm số $y = f(x) = \frac{\log_2 \left(2^x + \frac{1}{2^x} \right)}{x} = \frac{\log_2(4^x + 1) - x}{x} = \frac{\log_2(4^x + 1)}{x} - 1.$

Ta có
$$y' = \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{\left(\frac{4^x + 1}{x^2} \right)' \cdot x - \ln(4^x + 1)}{x^2} \right] = \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{4^x \cdot \ln 4 \cdot x - (4^x + 1) \ln(4^x + 1)}{x^2 (4^x + 1)} \right] < 0$$

$$y' = \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{4^x \cdot \ln 4^x - (4^x + 1) \ln(4^x + 1)}{x^2 (4^x + 1)} \right] < 0, \forall x > 0.$$

Nên $y = f(x)$ là hàm giảm trên $(0; +\infty)$.

Do đó $f(a) \leq f(2017), (a > 0)$ khi $0 < a \leq 2017$.

Bài tập 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $4(\log_2 \sqrt{x})^2 + \log_2 x + m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi giá trị $x \in (1; 64)$.

A. $m \leq 0$.

B. $m \geq 0$.

C. $m < 0$.

D. $m > 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $4(\log_2 \sqrt{x})^2 + \log_2 x + m \geq 0 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 + \log_2 x + m \geq 0$.

Đặt $\log_2 x = t$, khi $x \in (1; 64)$ thì $t \in (0; 6)$.

Khi đó, ta có $t^2 + t + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -t^2 - t$ (*).

Xét hàm số $f(t) = -t^2 - t$ với $t \in (0; 6)$.

Ta có $f'(t) = -2t - 1 < 0, \forall t \in (0; 6)$.

Ta có bảng biến thiên:

t	0	6
$f'(t)$	-	
$f(t)$	0	-42

Bất phương trình đã cho đúng với mọi $x \in (1; 64)$ khi và chỉ khi bất phương trình (*) đúng với mọi $t \in (0; 6) \Leftrightarrow m \geq 0$.

Bài tập 10. Giả sử $S = (a, b]$ là tập nghiệm của bất phương trình

$5x + \sqrt{6x^2 + x^3 - x^4} \log_2 x > (x^2 - x) \log_2 x + 5 + 5\sqrt{6 + x - x^2}$. Khi đó $b - a$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{7}{2}$.

C. $\frac{5}{2}$.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 6+x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -2 \leq x \leq 3 \end{cases} \cdot D = (0; 3]$.

$$\begin{aligned} 5x + \sqrt{6x^2 + x^3 - x^4} \log_2 x &> (x^2 - x) \log_2 x + 5 + 5\sqrt{6+x-x^2} \\ \Leftrightarrow 5x + x\sqrt{6+x-x^2} \log_2 x &> x(x-1) \log_2 x + 5 + 5\sqrt{6+x-x^2} \\ \Leftrightarrow (x-1)(5-x \log_2 x) + \sqrt{6+x-x^2} (x \log_2 x - 5) &> 0 \\ \Leftrightarrow (5-x \log_2 x) (x-1-\sqrt{6+x-x^2}) &> 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 5-x \log_2 x > 0 \\ x-1-\sqrt{6+x-x^2} > 0 \end{cases} (I) \\ \begin{cases} 5-x \log_2 x < 0 \\ x-1-\sqrt{6+x-x^2} < 0 \end{cases} (II) \end{cases}.$$

□ Giải hệ (I).

$$\begin{cases} 5-x \log_2 x > 0 (1) \\ x-1-\sqrt{6+x-x^2} > 0 (2) \end{cases}$$

Giải (1) $5-x \log_2 x > 0$.

Xét hàm số $f(x) = x \left(\frac{5}{x} - \log_2 x \right) = xg(x)$ với $x \in (0; 3]$

Ta có $g'(x) = -\frac{5}{x^2} - \frac{1}{x \ln 2} < 0 \forall x \in (0; 3]$.

Lập bảng biến thiên

x	0	3
$g'(x)$	-	
$g(x)$	 $\frac{5}{3} - \log_2 3 \approx 0,08$	

Vậy $f(x) = x \left(\frac{5}{x} - \log_2 x \right) > 0 \forall x \in (0; 3]$.

Xét bất phương trình (2): $\sqrt{6+x-x^2} < x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 6+x-x^2 < (x-1)^2 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-3x-5 > 0 \\ x > 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < -1 \\ x > \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{5}{2} \\ x > 1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ (I) là $D = \left(\frac{5}{2}; 3\right]$.

□ Hệ (II) vô nghiệm.

Vậy $S = \left(\frac{5}{2}, 3\right]$.

$$b - a = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}.$$

Bài tập 11. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-9; 9)$ của tham số m để bất phương trình

$3\log x \leq 2\log\left(m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x}\right)$ có nghiệm thực?

A. 6.

B. 7.

C. 10.

D. 11.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 0 < x < 1 \\ m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ m\sqrt{x} - (1-x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ m > \frac{(1-x)}{\sqrt{x}} > 0 \end{cases}.$$

Bất phương trình đã cho tương đương

$$\log x^3 \leq \log\left(m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^3 \leq \left(m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x} \leq \left(m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow m \geq \frac{x\sqrt{x} + (1-x)\sqrt{1-x}}{\sqrt{x-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{x}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức cô si ta có

$$\left(\frac{x}{\sqrt{1-x}} + \sqrt{1-x}\right) + \left(\frac{1-x}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right) \geq 2\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x}.$$

Vì vậy $m \geq \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$.

Khảo sát hàm số $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ trên $(0; 1)$ ta được $f(x) \geq \sqrt{2} \approx 1,414$.

Vậy m có thể nhận được các giá trị 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.