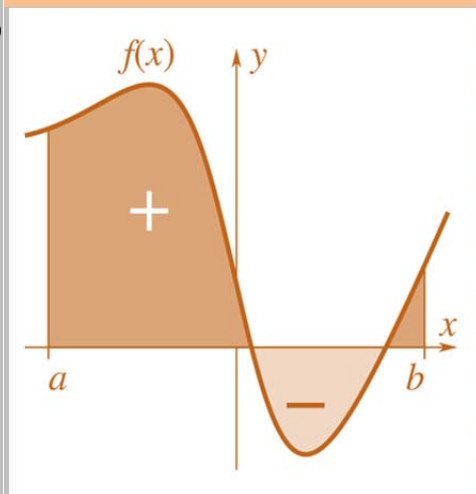


CÁC
KỸ
THUẬT
XỬ
LÝ
TÍCH
PHÂN

LỚP TOÁN
THẦY CƯ- TP
HUẾ
SĐT: 0834
332133



TOÁN

12
BINH PHÁP LƯU HÀNH
NỘI BỘ

$$\frac{d(x^3)}{dx} = 3x^2$$

Differentiation
Integration
$$\int 3x^2 dx = x^3 + c$$



CÁC KỸ THUẬT XỬ LÝ TÍCH PHÂN

BÀI 2. TÍCH PHÂN	2
A. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN NẮM	2
B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN TRẮC NGHIỆM	3
Dạng 1: Tích phân hữu tỉ.....	3
1. Phương pháp	3
2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng	4
3. Bài tập rèn luyện tốc độ.....	7
Dạng 2: Tích phân có chứa căn thức	10
1. Phương pháp	10
2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng	11
3. Bài tập rèn luyện tốc độ.....	14
Dạng 3: Tích phân lượng giác	18
1. Phương pháp	18
2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng	20
3. Bài tập rèn luyện tốc độ.....	24
Dạng 4: Tích phân từng phần.....	27
1. Phương pháp	27
2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng	27
3. Bài tập rèn luyện tốc độ.....	32
Dạng 5: Tích phân chứa dấu giá trị tuyệt đối	38
1. Phương pháp	38
2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng	39
3. Bài tập rèn luyện tốc độ.....	42
Dạng 6: Tích phân siêu việt	44
1. Phương pháp	44
2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng	44
3. Bài tập rèn luyện tốc độ.....	48
Dạng 7: Tích phân hàm ẩn	54
1. Phương pháp	54
2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng	56
3. Bài tập rèn luyện tốc độ.....	61
Dạng 8: Bất đẳng thức tích phân.....	67
1. Phương pháp	67
2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng	68
3. Bài tập rèn luyện tốc độ.....	70

BÀI 2. TÍCH PHÂN**A. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN NẮM****I. KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN****1. Định nghĩa tích phân**

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$.

Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a, b]$) của hàm số

$f(x)$, kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$.

Ta còn dùng kí hiệu $F(x)\Big|_a^b$ để chỉ hiệu $F(b) - F(a)$.

Vậy

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Ta gọi $\int_a^b$ là dấu tích phân, a là cận dưới, b là cận trên, $f(x)dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân và $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.

Chú ý:

Trong trường hợp $a = b$ hoặc $a > b$, ta quy ước

$$\int_a^a f(x)dx = 0; \quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Nhận xét

□ Tích phân của hàm số f từ a đến b có thể kí hiệu bởi $\int_a^b f(x)dx$ hoặc $\int_a^b f(u)du$ hoặc $\int_a^b f(t)dt$. Tích phân

chỉ phụ thuộc vào hàm số f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào biến số x hay t .

□ **Ý nghĩa hình học của tích phân:** Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a, b]$, thì tích

phân $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của $f(x)$, trục Ox và hai đường

thẳng $x = a, x = b$. Vậy $S = \int_a^b f(x)dx$.

II. TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

Tính chất 1: $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx. \quad (k: \text{const})$

Tính chất 2: $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$

Tính chất 3: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \quad (a < c < b)$

III. PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN**1. Phương pháp đổi biến số**

Định lý 1 (Đổi biến loại 1): Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$. Giả sử hàm số $x = \varphi(t)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[\alpha, \beta]$ sao cho $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ và $a \leq \varphi(t) \leq b$ với mọi $t \in [\alpha, \beta]$. Khi đó:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

Định lý 2 (Đổi biến loại 2): Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$. Giả sử hàm số $u(x)$ có đạo hàm liên tục và $u(x) \in [\alpha, \beta]$. Giả sử ta có thể viết $f(x) = g(u(x)) \cdot u'(x), x \in [a, b]$ với $g(x)$ liên tục trên đoạn $[\alpha, \beta]$. Khi đó ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du.$$

2. Phương pháp tích phân từng phần

Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì $\int_a^b uvdx = uv \Big|_a^b - \int_a^b vdu$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Tích phân hữu tỉ

1. Phương pháp

1.1 Một số dạng cần nhớ

$$1) \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C, a \neq 0.$$

$$2) \int \frac{dx}{(ax+b)^n} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(-n+1)} \cdot \frac{1}{(ax+b)^{n-1}} + C, a \neq 0.$$

$$3) \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln|u(x)| + C$$

$$4) \int_a^b \frac{dx}{x^2 + \alpha^2} \text{ thì đặt } x = \alpha \tan t.$$

$$1.2 \text{ Dạng tổng quát } I = \int \frac{P(x)}{(x-\alpha)^m \cdot (x-\beta)^n \cdot (ax^2 + bx + c)} dx \quad (m, n \in \mathbb{N}, b^2 - 4ac < 0, a \neq 0)$$

+) Trường hợp 1: Nếu bậc của đa thức $P(x) \geq m + n + 2$ ta chia tử cho mẫu để đưa về trường hợp 2

+) Trường hợp 2: Nếu bậc của đa thức $P(x) < m + n + 2$ ta sử dụng “phương pháp hệ số bất định”

$$\text{Bước 1: Phân tích: } \frac{P(x)}{(x-\alpha)^m \cdot (x-\beta)^n \cdot (ax^2 + bx + c)} = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{(x-\alpha)^i} + \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{(x-\beta)^k} + \frac{M(2ax+b) + N}{ax^2 + bx + c}$$

Bước 2: Quy đồng mẫu số và đồng nhất 2 vế để tìm các hệ số A_i, B_k, M, N

Bước 3: Thực hiện các dạng cơ bản.

Chú ý: + Đôi khi ta dùng phương pháp thêm - bớt - tách sẽ gọn hơn.

+ Một số trường hợp ta đổi biến số nhằm giảm bớt bậc để đưa về tích phân hàm hữu tỉ đơn giản hơn.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho $\int_2^5 \frac{dx}{x} = \ln a$. Tìm a .

A. $\frac{5}{2}$.

B. 2.

C. 5

D. $\frac{2}{5}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có: $\int_2^5 \frac{dx}{x} = \ln a \Leftrightarrow \ln |x| \Big|_2^5 = \ln a \Leftrightarrow \ln 5 - \ln 2 = \ln a \Leftrightarrow \ln \frac{5}{2} = \ln a \Leftrightarrow a = \frac{5}{2}$.

Ví dụ 2: Cho $\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3} dx = a \ln 5 + b \ln 3, (a, b \in \mathbb{Z})$. Giá trị của $3a + 2b$ là

A. 0.

B. 1.

C. 8.

D. 10.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Khi thấy những bài tích phân có dạng $I = \int_m^n \frac{ax+b}{(x+c)(x+d)} dx$ thì ta sẽ biến đổi

$$\frac{ax+b}{(x+c)(x+d)} = \frac{A}{x+c} + \frac{B}{x+d} \Rightarrow ax+b = (A+B)x + Ad + Bc$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=a \\ Ad+Bc=b \end{cases} \Rightarrow \text{ta sẽ tìm được } A \text{ và } B.$$

Khi đó: $I = (A \ln |x+c| + B \ln |x+d|) \Big|_m^n$

Áp dụng vào bài, ta có: $f(x) = \frac{x-1}{x^2+4x+3} = \frac{x-1}{(x+3)(x+1)} = \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x+1}$

$$I = (2 \ln |x+3| - \ln |x+1|) \Big|_0^2 = 2 \ln 5 - 3 \ln 3.$$

$$VT = VP \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}.$$

Ví dụ 3: Tìm tất cả các số thực m dương thỏa mãn $\int_0^m \frac{x^2 dx}{x+1} = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

A. $m=3$.

B. $m=2$.

C. $m=1$.

D. $m>3$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có: $\int_0^m \frac{x^2 dx}{x+1} = \int_0^m \left(x-1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left(\frac{1}{2} x^2 - x + \ln |x+1| \right) \Big|_0^m = \frac{1}{2} m^2 - m + \ln |m+1|$

Suy ra: $\frac{1}{2} m^2 - m + \ln |m+1| = \ln 2 - \frac{1}{2} \quad (*)$

Ta thấy chỉ có $m=1$ thỏa mãn (*).

Ví dụ 4: Biết $I = \int_{-1}^0 \frac{3x^2 + 5x - 1}{x - 2} dx = a \ln \frac{2}{3} + b, (a, b \in \mathbb{Q})$. Tính giá trị của $a + 4b$.

A. 50.

B. 60.

C. 59.

D. 40.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^0 \frac{3x^2 + 5x - 1}{x - 2} dx = \int_{-1}^0 \left(3x + 11 + \frac{21}{x - 2} \right) dx \\ &= \left(\frac{3x^2}{2} + 11x + 21 \ln |x - 2| \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{19}{2} + 21 \ln \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Khi đó, $a = 21, b = \frac{19}{2} \Rightarrow a + 4b = 59$.

Ví dụ 5: Biết $\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)} dx = \frac{1}{2} + \ln \frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a + b$ bằng

A. 7.

B. 5.

C. 9.

D. 4.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)} dx &= \int_1^2 \frac{x^2 + 1 - x^2}{x^2(x+1)} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \left(\ln |x+1| - \ln |x| - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 \\ &= \left(\ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} + \ln \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Suy ra $a = 4, b = 3$. Vậy $a + b = 7$.

Ví dụ 6: Cho $\int_0^1 \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx = a(\ln b - 1)$. Khi đó $6a + 5b$ bằng

A. 2.

B. 3.

C. 13.

D. $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có: $x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x+1)(x^2 + 2x - 3)$.

Đặt $t = x^2 + 2x + 3 \Rightarrow \frac{1}{2} dt = (x+1) dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 3; x = 1 \Rightarrow t = 6$.

$$\text{Khi đó: } I = \frac{1}{2} \int_3^6 \frac{t-6}{t^2} dt = \frac{1}{2} \int_3^6 \left(\frac{1}{t} - \frac{6}{t^2} \right) dx - \frac{1}{2} \left(\ln t + \frac{6}{t} \right) \Big|_3^6 = \frac{1}{2} (\ln 2 - 1)$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = 2 \Rightarrow 6a + 5b = 13.$$

Ví dụ 7: Cho $I_1 = \int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 3x^2 + 2} dx = \ln a + b \ln c, (a, b, c \in \mathbb{Q})$. Khẳng định đúng là

A. $a > b > c$.B. $b > c > a$.C. $c > a > b$.D. $a > c > b$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$ hay $x dx = \frac{dt}{2}$.

Và $x: 0 \rightarrow 1$ thì: $t: 0 \rightarrow 1$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_1 &= \int_0^1 \frac{x^2 \cdot x dx}{x^4 + 3x^2 + 2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t dt}{t^2 + 3t + 2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2(t+1) - (t+2)}{(t+1)(t+2)} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{2}{t+2} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \left(\ln|t+2| - \frac{1}{2} \ln|t+1| \right) \Big|_0^1 = \ln 3 - \frac{3}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow a = 3; b = -\frac{3}{2}; c = 2$.

Ví dụ 8: Cho $\int_1^2 \frac{1}{x^3(1+x^2)} dx = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \ln \frac{5}{8}, (a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+); \frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Giá trị của

$S = a + 2b + 3c + 4d$ bằng

A. 16.

B. 87.

C. 34.

D. 30.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{(1+x^2) - x^2}{x^3(1+x^2)} dx = \int_1^2 \left[\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x(1+x^2)} \right] dx = \int_1^2 \left[\frac{1}{x^3} - \frac{(1+x^2) - x^2}{x(1+x^2)} \right] dx \\ &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} \right) dx + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} \\ &= \left[-\frac{1}{2x^2} - \ln x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right] \Big|_1^2 = \frac{3}{8} - \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \ln \frac{5}{8} \end{aligned}$$

$\Rightarrow a = 3, b = 8, c = 1, d = 2$.

Ví dụ 9: Cho $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 3x^2 + 2} dx = \ln 3 + b \ln 2 + c$. Chọn đáp án đúng.

A. $b + c = \frac{3}{2}$

B. $2b = c$.

C. $abc = 0$.

D. b, c là các số nguyên.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có: $I = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2 \cdot 2x dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$.

Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$.

Với $x = 0 \Rightarrow t = 0$, với $x = 1 \Rightarrow t = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } I &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t dt}{(t+1)(t+2)} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{2}{t+2} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \left(\ln|t+2| - \frac{1}{2} \ln|t+1| \right) \Big|_0^1 \\ &= \ln 3 - \frac{3}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

$$a = 3, b = -\frac{3}{2}, c = 0.$$

3. Bài tập rèn luyện tốc độ

Câu 1: Biết $\int_3^4 \frac{dx}{x^2 + x} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $S = a + b + c$ bằng

- A. 6. B. 2. C. -2. D. 0.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$$I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2 + x} = \int_3^4 \frac{dx}{x(x+1)} = \int_3^4 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| \Big|_3^4 = \ln \frac{16}{15} = 4 \ln 2 - \ln 3 - \ln 5.$$

Do đó: $S = 4 - 1 - 1 = 2$.

Câu 2: Biết rằng $I = \int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \ln a$. Giá trị a là

- A. 3. B. 9. C. 8. D. 81.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$$\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2} \ln |2x-1| \Big|_1^5 = \ln 3 = \ln a \Rightarrow a = 3.$$

Câu 3: Biết $I = \int_0^1 \frac{2x+3}{2-x} dx = a \ln 2 + b$, ($a, b \in \mathbb{Q}$). Khi đó giá trị $a + 2b$ bằng

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 7.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$\text{Ta có: } I = \int_0^1 \frac{2x+3}{2-x} dx = \int_0^1 \left(-2 + \frac{7}{2-x} \right) dx = \left(-2x - 7 \ln |2-x| \right) \Big|_0^1 = -2 + 7 \ln 2$$

Nên $a = 7$ và $b = -2$. Do đó: $a + 2b = 3$.

Câu 4: Giả sử $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \ln K$. Giá trị của K là

- A. 9. B. 3. C. 81. D. 8.

Hướng dẫn giải

Đáp án B

$$\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2} \ln |2x-1| \Big|_1^5 = \ln 3.$$

Câu 5: Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)^2} dx = \ln a + b$, ($a, b \in \mathbb{Q}$). Giá trị $a + b$ bằng

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{7}{6}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{6}{11}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)^2} dx = \int_1^2 \frac{x+1-x}{x(x+1)^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx - \int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2} dx.$$

Suy ra

$$I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx - \int_1^2 (x+1)^{-2} d(x+1) = \ln \left| \frac{x}{x+1} \right|_1^2 + (x+1)^{-1} \Big|_1^2 = \ln \frac{4}{3} - \frac{1}{6}.$$

$$\Rightarrow a = \frac{4}{3}, b = -\frac{1}{6}.$$

Câu 6: Cho $I = \int_0^1 \frac{x dx}{x+1} = a + b \ln c$. Biết $b + c = 1$, với $b, c < 3$. Khi đó $P = abc$ bằng

- A.** 0. **B.** -1. **C.** -2. **D.** $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$I = \int_0^1 \frac{(x+1)-1}{x+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = \left[x - \ln(x+1) \right]_0^1 = 1 - \ln 2$$

$$\Rightarrow a = 1; b = -1; c = 2 \Rightarrow P = -2.$$

Câu 7: Cho $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^4 dx}{x^2 - 1} = a - \frac{1}{2} \ln b$. Khi đó $S = 24a + \frac{b}{3} + 11$ bằng

- A.** 0. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 25.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^4 dx}{x^2 - 1} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^4 - 1 + 1}{x^2 - 1} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2 - 1} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + x + \ln |x^2 - 1| \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{13}{24} - \frac{1}{2} \ln 3.$$

$$\Rightarrow a = \frac{13}{24}, b = 3 \Rightarrow S = 25.$$

Câu 8: Cho $\int_1^2 \frac{x^2 + x + 1}{x+1} dx = a + \ln b$. Chọn mệnh đề đúng:

- A.** $a > b$. **B.** $2a + b + b^2 = 0$.
C. $a = b$. **D.** $a < b$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$\int_1^2 \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} dx = \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x + 1} \right) dx = \int_1^2 x dx + \int_1^2 \frac{1}{x + 1} dx = \left(\frac{x^2}{2} + \ln|x + 1| \right) \Big|_1^2$$

$$= 2 + \ln 3 - \frac{1}{2} - \ln 2 = \frac{3}{2} + \ln \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{2}, b = \frac{3}{2} \Rightarrow a = b.$$

Câu 9: $I = \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2+1} dx = a + \ln b, (a, b \in \mathbb{Z}^+)$. Khi đó $S = \frac{a+b}{a-b}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. 3

D. -3.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$I_4 = \int_0^1 \frac{x^2 + 1 + 2x}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{2x}{x^2 + 1} \right) dx = \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{2x dx}{x^2 + 1}$$

$$= \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{1 d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \left(x + \ln(x^2 + 1) \right) \Big|_0^1 = 1 + \ln 2.$$

$$\Rightarrow a = 1, b = 2 \Rightarrow S = -3.$$

Câu 10: Cho $I = \int_0^1 \frac{x^3 - 3}{x^2 - 2x - 3} dx = a + (b + 5) \ln b - c \ln \frac{c}{2}, (a, b, c \in \mathbb{Q})$. Khi đó $P = \frac{abc}{a + b + c}$ bằng

A. $\frac{22}{7}$.

B. $\frac{20}{7}$.

C. $\frac{24}{7}$.

D. -26.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$$I = \int_0^1 \frac{x^3 - 3}{x^2 - 2x - 3} dx = \int_0^1 \left(x + 2 + \frac{7x - 3}{x^2 - 2x - 3} \right) dx = \int_0^1 \left(x + 2 + \frac{6(x+1) + x - 3}{(x+1)(x-3)} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x + 2 + \frac{6}{x-3} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 6 \ln|x-3| + \ln|x+1| \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{5}{2} + 7 \ln 2 - 6 \ln 3.$$

$$\Rightarrow a = \frac{5}{2}, b = 2, c = 6 \Rightarrow P = \frac{20}{7}.$$

Câu 11: Cho $I = \int_0^2 \frac{2x+3}{x^2+4x+3} dx = \int_0^2 \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} \right) dx$. Giá trị $I.(2A+4B)$ bằng

A. $2 + \ln \frac{125}{3}$.

B. $2 \ln \frac{125}{3}$.

C. $\frac{7}{2} \ln \frac{125}{9}$.

D. $\frac{1}{2} \ln \frac{125}{9}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$\text{Ta có: } \frac{2x+3}{x^2+4x+3} = \frac{2x+3}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}.$$

$$\text{Từ đó } 2x+3 \equiv (A+B)x + 3A+B \quad (x \neq -1, x \neq -3).$$

Cân bằng các hệ số của các lũy thừa cùng bậc của x ta được: $\begin{cases} A+B=2 \\ 3A+B=3 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{2}; B=\frac{3}{2}.$

Suy ra:

$$I = \int_0^2 \frac{2x+3}{x^2+4x+3} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{dx}{x+1} + \frac{3}{2} \int_0^2 \frac{dx}{x+3} = \frac{1}{2} (\ln|x+1| + 3\ln|x+3|) \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \ln \frac{125}{9}$$

$$\Rightarrow I.(A+B) = \frac{7}{2} \ln \frac{125}{9}.$$

Câu 12: Cho $\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^4+2x^3-x^2+2x+1} dx = \frac{a}{b} \ln \frac{c.d}{e}$ biết $a, b, c, d, e \in \mathbb{N}; UCLN(a; b) = 1$ và c, d, e là các số nguyên tố. Giá trị của $T = a + b + c + d + e$ bằng

A. 32.

B. 24.

C. 25.

D. 31.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$\int \frac{x^2-1}{x^4+2x^3-x^2+2x+1} dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+2x-1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} dx$$

$$= \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3} dx$$

$$\text{Đặt } t = x + \frac{1}{x} \text{ ta có: } \int \frac{x^2-1}{x^4+2x^3-x^2+2x+1} dx = \int \frac{dt}{t^2+2t-3} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{t+3} \right| + C$$

Dạng 2: Tích phân có chứa căn thức

1. Phương pháp

Lớp bài toán 1: $\int x^p \sqrt[n]{(ax^k+b)^m} dx$; $\int \frac{x^p}{\sqrt[n]{(ax^k+b)^m}} dx$ thỏa $(p+1):k$, khi đó ta đặt $t = \sqrt[n]{(ax^k+b)^m}$

Lớp bài toán 2: Đổi biến dạng lượng giác

Ta chú ý các nhận biết một số dấu hiệu và cách đổi biến tương ứng sau

Dấu hiệu	Cách đổi biến	Chú ý
1. $\sqrt{x^2+a^2}$	Đặt $x = a \tan t$	$t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
2. $\sqrt{a^2-x^2}$	Đặt $x = a \sin t$	$t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
3. $\sqrt{x^2-a^2}$	Đặt $x = \frac{a}{\sin t}$	$t \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right) \text{ or } \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$

4. $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ or $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$	Đặt $x = a \cos 2t$	$t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
---	---------------------	---------------------------------------

Lớp bài toán 3: $\int R\left(x; \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$

Hướng 1: theo dạng 2

Hướng 2: Hữu tỉ hoá. Sử dụng các phép biến đổi Euler

- Với $a > 0$, đặt $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{ax}$

- Với $c > 0$, đặt $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$

- Nếu $ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì đặt $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1)$ hoặc đặt $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_2)$

Chú ý:

1) $I = \int \frac{mx + n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ ta biến đổi về dạng $I = \frac{m}{2a} \int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx + \left(n - \frac{mb}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

2) $K = \int \frac{dx}{(mx + n)\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ngoài cách giải chung bằng phép thế lượng giác ta còn có thể giải bằng

phép thế đại số. Đặt $t = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ hoặc $\frac{1}{t} = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ hoặc $t = mx + n$ hoặc $\frac{1}{t} = mx + n$

3) Với dạng $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ta thường nhóm biểu thức dưới dấu căn thành hằng đẳng thức rồi đưa về

dạng: $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ hoặc $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + C$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Trong các tích phân sau, tích phân nào **không** cùng giá trị với $I = \int_1^2 x^3 \sqrt{x^2 - 1} dx$.

A. $\frac{1}{2} \int_1^2 t \sqrt{t-1} dt.$

B. $\frac{1}{2} \int_1^4 t \sqrt{t-1} dt.$

C. $\int_0^{\sqrt{3}} (t^2 + 1) t dt.$

D. $\int_0^{\sqrt{3}} (x^2 + 1) x^2 dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Đặt $x^2 = t \Rightarrow x dx = \frac{dt}{2}.$

Đổi cận $x = 1$ thì $t = 1$; $x = 2$ thì $t = 4$.

$I = \int_1^2 x^3 \sqrt{x^2 - 1} dx = \int_1^2 x^2 \sqrt{x^2 - 1} \cdot x dx = \frac{1}{2} \int_1^2 t \sqrt{t-1} dt.$

Ví dụ 2: Tính tích phân $I = \int_0^3 x\sqrt{x+1}dx$ ta được $I = \frac{a}{b}, (a, b \in \mathbb{Z}^+), \frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $S = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ bằng

A. $\frac{131}{1740}$

B. $\frac{16}{15}$.

C. $\frac{116}{5}$.

D. $\frac{16}{3}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Đặt $u = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = u^2 - 1; du = (\sqrt{1+x})' dx = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} dx \Rightarrow dx = 2udu$

Đổi biến: $u(0) = 1; u(3) = 2$

Khi đó ta có: $\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx = 2 \int_1^2 (u^2 - 1)u^2 du = 2 \int_1^2 (u^4 - u^2) du = 2 \left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{116}{15}$.

Do đó: $a = 116, b = 15$. Suy ra: $S = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{131}{1740}$.

Ví dụ 3: Kết quả của tích phân $I = \int_0^2 x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx = \frac{a}{b}, (a, b \in \mathbb{N}^*), \frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị

$P = a^2 + b^2$ bằng

A. 2786.

B. 2785.

C. 2685.

D. 2885.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Đặt $t = \sqrt{x^3 + 1} \Rightarrow t^2 = x^3 + 1 \Rightarrow 2t dt = 3x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{2t}{3} dt$.

Với $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 2 \Rightarrow t = 3$

Vậy $I = \int_1^3 \frac{2}{3} t^2 dt = \left[\frac{2t^3}{9} \right]_1^3 = 6 - \frac{2}{9} = \frac{52}{9}$.

Suy ra: $a = 52, b = 9$. Do đó: $S = 2785$.

Ví dụ 4: Tính tích phân: $I = \int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$ được kết quả $I = a \ln 3 + b \ln 5, (a, b \in \mathbb{Z})$. Tổng $a + b$ là

A. 2.

B. 3.

C. -1.

D. 1.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Đặt $u = \sqrt{3x+1} \rightarrow x = \frac{u^2 - 1}{3} \rightarrow dx = \frac{1}{3} 2udu$

Đổi cận: $x = 1 \rightarrow u = 2; x = 5 \rightarrow u = 4$

Vậy $I = \int_2^4 \frac{2}{u^2 - 1} du = \int_2^4 \frac{u+1 - (u-1)}{(u+1)(u-1)} du = \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right|_2^4 = \ln \frac{3}{5} - \ln \frac{1}{3} = 2 \ln 3 - \ln 5$

Do đó $a = 2; b = -1$. Suy ra: $a + b = 1$.

Ví dụ 5: Giả sử tích phân $I = \int_1^5 \frac{1}{1 + \sqrt{3x+1}} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5, (a, b, c \in \mathbb{Q})$. Giá trị $a + b + c$ bằng

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{5}{3}$.

C. $\frac{7}{3}$.

D. $\frac{8}{3}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$$\text{Đặt } 1 + \sqrt{3x+1} = t \Rightarrow 3x+1 = (t-1)^2 \Rightarrow dx = \frac{2}{3}(t-1)dt.$$

$$\text{Đổi cận } x=1 \Rightarrow t=3; x=5 \Rightarrow t=5.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_3^5 \frac{2}{3} \frac{t-1}{t} dt = \frac{2}{3} \int_3^5 \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt = \frac{2}{3} \left(t - \ln|t|\right) \Big|_3^5 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \ln 3 - \frac{2}{3} \ln 5.$$

$$\text{Do đó } a = \frac{4}{3}; b = \frac{2}{3}; c = -\frac{2}{3} \text{ Vậy } a+b+c = \frac{4}{3}.$$

Ví dụ 6: Tập hợp các nghiệm của bất phương trình $\int_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dx > 0$, với x là ẩn là

A. $(-\infty; 0)$.

B. $(-\infty; +\infty)$.

C. $(-\infty; +\infty) \setminus \{0\}$.

D. $(0; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$\int_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{d(t^2+1)}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{t^2+1} \Big|_0^x = \sqrt{x^2+1} - 1.$$

$$\int_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} - 1 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; +\infty) \setminus \{0\}.$$

Ví dụ 7: Cho $I = \int_0^1 f\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}}\right) dx = 10$. Khi đó $J = \int_0^1 f\left(\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}}\right) dx$ bằng

A. 10.

B. -10.

C. -9.

D. 9.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$$\text{Đặt } t = 1 - x \text{ ta có: } dt = -dx$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=0 \end{cases} \text{ khi đó } J = \int_1^0 f\left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1-t} + \sqrt{t}}\right) (-dt) = \int_0^1 f\left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t} + \sqrt{1-t}}\right) dt$$

$$J = \int_0^1 f\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}}\right) dx = I = 10.$$

Ví dụ 8: Tính theo m tích phân $I = \int_0^m x\sqrt{x^2+1} dx$ là

A. $\frac{(m^2+1)\sqrt{m^2+1}+1}{3}$.

B. $\frac{(m^2+1)^{\frac{3}{2}}+1}{3}$.

C. $\frac{(m^2+1)\sqrt{m^2+1}-1}{3}$.

D. m^2+1 .

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow t^2 = x^2+1 \Leftrightarrow tdt = xdx \text{ và đổi cận } \begin{cases} x=m \rightarrow t=\sqrt{m^2+1} \\ x=0 \rightarrow t=1 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } I = \int_0^m x\sqrt{x^2+1}dx = \int_1^{\sqrt{m^2+1}} t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_1^{\sqrt{m^2+1}} \Rightarrow I = \frac{(m^2+1)\sqrt{m^2+1}-1}{3}.$$

Ví dụ 9: Kết quả của $I = \int_0^3 \frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{a}{b}, (a, b \in \mathbb{Z}^+), \frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $S = a + b$ bằng

A. 36.

B. 45.

C. 27.

D. 59.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$I = \int_0^3 \frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x+1} = t \Rightarrow x = t^2 - 1 \Rightarrow dx = 2tdt$$

$$\Rightarrow I = \int_1^2 \frac{2(t^2-1)^2 + (t^2-1) - 1}{t} 2tdt = 2 \int_1^2 (2t^4 - 3t^2) dt = \left(\frac{4t^5}{5} - 2t^3 \right) \Big|_1^2 = \frac{54}{5}.$$

Suy ra: $a = 54, b = 5$. Do đó: $S = a + b = 59$.

Ví dụ 10: Cho tích phân $I = \int_0^1 x(ax + b\sqrt{3x^2+1}) dx = 3$, biết $a + b = 1$. Giá trị $S = a^3 + b^3 + \sqrt{-5a} + b$ bằng

A. -15.

B. 20.

C. 102.

D. 15.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$\text{Ta có: } I = \int_0^1 ax^2 dx + \int_0^1 bx\sqrt{3x^2+1} dx = \frac{ax^3}{3} \Big|_0^1 + \int_0^1 bx\sqrt{3x^2+1} dx$$

$$+ \text{ Xét } A = \int_0^1 bx\sqrt{3x^2+1} dx$$

$$\text{Đặt } \sqrt{3x^2+1} = t \Rightarrow 3x^2+1 = t^2 \Leftrightarrow xdx = \frac{1}{3} tdt.$$

$$\text{Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=2 \Rightarrow A = \int_1^2 \frac{bt^2}{3} dt = b \cdot \frac{t^3}{9} \Big|_1^2 = \frac{8b}{9} - \frac{b}{9} = \frac{7b}{9}.$$

$$\text{Vậy } I = \frac{ax^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{7b}{9} = \frac{a}{3} + \frac{7b}{9}.$$

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} \frac{a}{3} + \frac{7b}{9} = 3 \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 6 \end{cases} \Rightarrow S = 102.$$

3. Bài tập rèn luyện tốc độ

Câu 1: Kết quả của tích phân $\int_1^4 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})} = a \ln \frac{b}{c}, (a, b, c \in \mathbb{Z}^+), \frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Giá trị

$$S = a^2 + b^2 + c^2 \text{ bằng}$$

A. 42.

B. 29.

C. 17.

D. 27.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Đổi biến thành $\int_2^3 \frac{2}{t(t-1)} dt = 2 \ln \left| \frac{t-1}{t} \right| \Big|_2^3 = 2 \ln \frac{4}{3}$.

Suy ra: $a=2, b=4, c=3$. Do đó: $S=29$.

Câu 2: Cho tích phân $I = \int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{x+1}} dx$ nếu đặt $t = \sqrt{x+1}$ thì $I = \int_1^2 f(t) dt$ trong đó

- A. $f(t) = t^2 + t$. B. $f(t) = 2t^2 + 2t$. C. $f(t) = t^2 - t$. D. $f(t) = 2t^2 - 2t$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow t^2 = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} dx = 2t dt \\ x = t^2 - 1 \end{cases}$ và đổi cận $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 1 \\ x = 3 \rightarrow t = 2 \end{cases}$

Khi đó $I = \int_1^2 2t \cdot \left(\frac{t^2 - 1}{t+1} \right) dt = \int_1^2 2t \cdot (t-1) dt = \int_1^2 (2t^2 - 2t) dt \Rightarrow f(t) = 2t^2 - 2t$.

Câu 3: Đặt $I = \int_0^a \frac{x^3 + x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$. Ta có:

- A. $I = (a^2 + 1)\sqrt{a^2 + 1} - 1$. B. $I = \frac{1}{3}[(a^2 + 1)\sqrt{a^2 + 1} + 1]$.
C. $I = (a^2 + 1)\sqrt{a^2 + 1} + 1$. D. $I = \frac{1}{3}[(a^2 + 1)\sqrt{a^2 + 1} - 1]$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có: $I = \int_0^a \frac{x^3 + x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int_0^a \frac{(x^2 + 1) \cdot x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int_0^a \sqrt{x^2 + 1} \cdot x dx$

$t = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow t^2 = x^2 + 1 \Rightarrow t \cdot dt = x \cdot dx$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = a \Rightarrow t = \sqrt{a^2 + 1}$

Khi đó: $I = \int_1^{\sqrt{a^2 + 1}} t \cdot t dt = \frac{1}{3} (t^3) \Big|_1^{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{1}{3} [(a^2 + 1)\sqrt{a^2 + 1} - 1]$.

Câu 4: Biết $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^6+x^3}} dx = \frac{\pi^3}{a} + \frac{\sqrt{3}\pi^2}{b} + c\pi + d\sqrt{3}$ với a, b, c, d là các số nguyên. Giá trị

$a+b+c+d$ bằng

- A. 28. B. 16. C. 14. D. 22.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^6+x^3}} dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sqrt{1+x^6}-x^3)\sin x}{1+x^6-x^6} dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\sqrt{1+x^6}-x^3)\sin x dx.$$

Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$. Đổi cận $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$.

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{1+t^6} + t^3 \right) \sin(-t)(-dt)$$

$$= - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{1+t^6} + t^3 \right) \sin t dt = - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{1+x^6} + x^3 \right) \sin x dx$$

$$\text{Suy ra } 2I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (-2x^3 \sin x) dx \Leftrightarrow I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x^3 \sin x dx = \frac{\pi^3}{27} - \frac{\sqrt{3}\pi^2}{3} - 2\pi + 6\sqrt{3}.$$

Suy ra: $a = 27, b = -3, c = -2, d = 6$. Vậy $a + b + c + d = 28$.

Câu 5: Cho $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx = a + \ln b - \ln \sqrt{3}$. Giá trị $\frac{11}{2}(a + b - 3)$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Đặt $t = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow t^2 = 1+x^2 \Rightarrow t dt = x dx$ và $x: 1 \rightarrow \sqrt{3}$ thì $t: \sqrt{2} \rightarrow 2$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } I &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} x dx = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{t}{t^2-1} t dt = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{t^2-1+1}{t^2-1} dt = \int_{\sqrt{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{t^2-1} \right) dt \\ &= \int_{\sqrt{2}}^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) \right] dt = \left(t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) \Big|_{\sqrt{2}}^2 = 2 - \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1) - \frac{1}{2} \ln 3 \\ &\Rightarrow a = 2 - \sqrt{2}; b = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow \frac{11}{2}(a + b - 3) = 0. \end{aligned}$$

Câu 6: Cho $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}} = 2 \ln \left(\frac{2+\sqrt{a}}{1+\sqrt{b}} \right), (a, b \in \mathbb{Z}^+)$. Giá trị $A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ bằng

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{5}{6}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+3}$

$$\Rightarrow dt = \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x+3}} \right) dx = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3}}{2\sqrt{(x+1)(x+3)}} dx = t \cdot \frac{dx}{2\sqrt{(x+1)(x+3)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+3)}} = \frac{2dt}{t}.$$

Và $x: 0 \rightarrow 1$ thì $t: 1+\sqrt{3} \rightarrow 2+\sqrt{2}$.

$$\text{Khi đó: } I_4 = 2 \int_{1+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{2}} \frac{dt}{t} = 2 \ln |t| \Big|_{1+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{2}} = 2 \ln \left(\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} \right) \Rightarrow a = 2; b = 3.$$

$$\text{Suy ra: } A = \frac{5}{6}.$$

Câu 7: Cho tích phân $I = \int_a^2 \left(4 + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} \right) dx = \frac{28}{3}$. Giá trị a (biết a có giá trị nguyên) là

- A. 0. B. 1. C. -1. D. 3.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $I = \int_a^2 4dx + \int_a^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx$.

Tính $B = \int_a^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx$. Đặt $\sqrt{1+x^3} = t \Rightarrow 1+x^3 = t^2 \Rightarrow x^2 dx = \frac{2}{3} t dt$.

Khi đó $B = \int_a^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{1+x^3} \Big|_a^2 = 2 - \frac{2}{3} \sqrt{1+a^3}$.

Ta có: $I = 4x + \frac{2}{3} \sqrt{1+x^3} \Big|_a^2 = 10 - \left(4a + \frac{2}{3} \sqrt{1+a^3} \right)$

$\Leftrightarrow \frac{28}{3} = 10 - \left(4a + \frac{2}{3} \sqrt{1+a^3} \right) \Rightarrow 4a + \frac{2}{3} \sqrt{1+a^3} = \frac{2}{3} \Rightarrow 6a + \sqrt{1+a^3} = 1$.

Giải được $a=0$ (sử dụng máy tính Casio, lệnh SHIFT – SOLVE).

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $\int_A^2 \left(4 + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} \right) dx - \frac{28}{3}$ Ấn **□** **CALC** và thử các đáp án. Ta thấy chỉ đáp án A đúng (kết quả cho bằng 0)

Câu 8: Cho tích phân: $I = \int_1^6 \frac{\sqrt{x+3}+1}{x+2} dx = \sqrt{a} + 2 \ln a, (a \in \mathbb{Z}^+)$. Giá trị $S = 4\sqrt[3]{4a}$ là

- A. 10. B. 5. C. 15. D. 8.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Đặt $t = \sqrt{x+3} \Rightarrow x = t^2 - 3 \Rightarrow dx = 2t dt$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=6 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=2 \end{cases}$

Suy ra:

$I = 2 \int_2^3 \frac{t^2+t}{t^2-1} dt = 2 \int_2^3 \frac{t}{t-1} dt = 2 \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = 2 \left(t + \ln|t-1| \right) \Big|_2^3 = 2 + \ln 2 \Rightarrow a = 2$. Vậy $S = 8$.

Câu 9: Cho tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^2 + \sqrt{x^4+1}} = \frac{\sqrt{a}-1}{3}, (a \in \mathbb{N})$. Giá trị của a bằng

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $I = \int_0^1 x^3 \sqrt{x^4 + 1} dx - \int_0^1 x^5 dx.$

$$\int_0^1 x^5 dx = \left[\frac{x^6}{6} \right]_1^0 = \frac{1}{6}.$$

Đặt $t = \sqrt{x^4 + 1} \Rightarrow t^2 = x^4 + 1 \Rightarrow t dt = 2x^3 dx.$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2}.$

Suy ra: $I = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt = \frac{1}{2} \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{6}.$

Vậy $I = \frac{\sqrt{2} - 1}{3} \Rightarrow a = 2.$

Câu 10: Giá trị tích phân $I = \int_a^b \frac{x dx}{\sqrt[3]{2x+2}}$ ($b > 2$) bằng bao nhiêu nếu biết $z = a + bi$ là căn bậc hai của số phức $-\frac{35}{4} - 3i$.

A. $\frac{12}{5}.$

B. $\frac{7}{5}.$

C. $\frac{6}{5}.$

D. $\frac{11}{5}.$

Hướng dẫn giải**ĐÁP ÁN A**

Theo đề: $(a + bi)^2 = \frac{-35}{4} - 3i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{-35}{4} \\ 2ab = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 3 \end{cases} (b > 0)$

Đặt $t = \sqrt[3]{2x+2} \Rightarrow x = \frac{t^3 - 2}{2} \Rightarrow dx = \frac{3t^2}{2} dt.$

Đổi cận: $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow t = 1; x = 3 \Rightarrow t = 2.$

$$I = \int_1^2 \frac{\frac{t^3 - 2}{2} \cdot \frac{3t^2}{2}}{t} dt = \frac{3}{4} \int_1^2 (t^4 - 2t) dt = \frac{3}{4} \left(\frac{t^5}{5} - t^2 \right) \Big|_1^2 = \frac{12}{5}.$$

Dạng 3: Tích phân lượng giác**1. Phương pháp****1.1 Nguyên hàm cơ bản cần nhớ với mọi số thực $k \neq 0$**

$$\int \cos kx dx = \frac{1}{k} \sin kx + C$$

$$\int \sin kx dx = -\frac{1}{k} \cos kx + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 kx} dx = \frac{1}{k} \tan kx + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 kx} dx = -\frac{1}{k} \cot kx + C$$

1.2 Một số lớp bài toán thường gặp

Lớp bài toán 1: Đưa về một hàm số lượng giác

$$I = \int f(\sin x) \cos x dx = \int f(t) dt$$

$$I = \int f(\cos x) \sin x dx = -\int f(t) dt$$

$$I = \int f(\tan x) \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int f(t) dt$$

$$I = \int f(\cot x) \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\int f(t) dt$$

Lớp bài toán 2: Dùng công thức biến đổi tích thành tổng

$$\int \sin ax \cdot \sin bxdx \qquad \int \cos ax \cdot \cos bxdx \qquad ; \qquad \int \sin ax \cdot \cos bxdx$$

Cách giải: Dùng công thức biến đổi tích thành tổng:

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

Lớp bài toán 3: $\int \sin^n x dx$; $\int \cos^n x dx$ ($n \in \mathbb{N}; n \geq 2$)

Cách giải:

Nếu n chẵn thì dùng công thức hạ bậc để hạ đến hết bậc:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \qquad ; \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Nếu n lẻ thì tách ra lấy một thừa số và sử dụng các công thức:

$$\cos x dx = d(\sin x) \quad ; \quad \sin x dx = -d(\cos x)$$

Lớp bài toán 4: $I = \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$

Cách giải:

$$\text{Đặt } t = \tan \frac{x}{2}$$

Lớp bài toán 5: $I = \int \frac{a \sin x + b \cos x + c}{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1} dx$

Cách giải

Biến đổi: Tử = A(mẫu) + B(đạo hàm mẫu) + C rồi ta đưa về dạng 4 nếu $C \neq 0$.

Chú ý: Trên đây chỉ là một vài trường hợp thường gặp. Trong thực tế có thể gặp nhiều dạng khác nữa, đòi hỏi phải linh hoạt vận dụng các kiến thức về lượng giác và các phương pháp tính nguyên hàm tích phân.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Cho tích phân $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 3x dx = a + b$. Giá trị $A = a^3 + b^3 + 1$.

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \cos 3x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} [\cos 4x + \cos 2x] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x dx + \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = \left[\frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0 \Rightarrow a + b = 0. \end{aligned}$$

$$A = a^3 + b^3 + 1 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) + 1 = 1.$$

Ví dụ 2: Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x dx = a\pi + b, (a, b \in \mathbb{Q})$. Giá trị $A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ bằng

A. 11.

B. $\frac{20}{3}$.

C. 4.

D. 7.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$$\begin{aligned} \sin^4 x &= (\sin^2 x)^2 = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \left(\frac{1 + \cos 4x}{2} \right) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x. \\ I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \right) dx = \left(\frac{3}{8}x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{32} (3\pi - 8) \\ \Rightarrow a &= \frac{3}{32}; b = -\frac{1}{4} \Rightarrow A = \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = a + b\pi$. Giá trị $A = 4a + 8b$ bằng

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. -1.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x + 1 - 1) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx$$

$$= (\tan x - x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

$$\Rightarrow a = 1; b = -\frac{1}{4} \Rightarrow A = 2.$$

Ví dụ 4: Cho tích phân $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{4}{\cos^2 x} - 3 \sin x \right) dx = 8 \sin 2a$. Giá trị $A = \sin^6 a + \cos^6 a$ bằng

A. $\frac{1}{4}$.B. $\frac{1}{2}$.

C. 1.

D. $\frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{4}{\cos^2 x} - 3 \sin x \right) dx = (4 \tan x + 3 \cos x) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 4 + \frac{3\sqrt{2}}{2} + 4 - \frac{3\sqrt{2}}{2} = 8.$$

$$\Rightarrow \sin 2a = 1. \text{ Suy ra: } A = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2a = \frac{1}{4}.$$

Ví dụ 5: Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos^5 x) dx = a\pi + b, (a, b \in \mathbb{Q})$. Giá trị $A = 6a + 15b$ bằng

A. 11.

B. 4.

C. 7.

D. 3.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$$\text{Ta có } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos^5 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx.$$

$$\text{Trong đó: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Xét } K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \cdot \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)^2 \cdot \cos x dx.$$

Đặt $t = \sin x$ suy ra $dt = \cos x dx, x = 0 \Rightarrow t = 0, x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$. Khi đó:

$$K = \int_0^1 (1 - t^2)^2 dt = \int_0^1 (1 - 2t^2 + t^4) dt = \left(t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{t^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{15}.$$

$$\text{Vậy } I = \frac{\pi}{2} + \frac{8}{15} \Rightarrow a = \frac{1}{2}; b = \frac{8}{15} \Rightarrow A = 11.$$

Ví dụ 6: Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^3 x} = a \ln 3 + b$. Giá trị $A = 4a + 3b$ bằng

A. 2.

B. 5.

C. 4.

D. 7.

Hướng dẫn giải**ĐÁP ÁN A**

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\cos^4 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d(\sin x)}{(1 - \sin^2 x)^2}$

Đặt $t = \sin x$, với $x = 0$ thì $t = 0$, với $x = \frac{\pi}{6}$ thì $t = \frac{1}{2}$.

Khi đó $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(1-t^2)^2} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(t-1)^2(t+1)^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(t+1) - (t-1)}{(t-1)^2(t+1)^2}$

$$I = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(t+1)(t-1)^2} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(t+1)^2(t-1)} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{[(t+1) - (t-1)] dt}{(t+1)(t-1)^2} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{[(t+1) - (t-1)] dt}{(t+1)^2(t-1)} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(t-1)^2} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(t+1)(t-1)} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(t+1)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d(t-1)}{(t-1)^2} - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d(t+1)}{(t+1)^2}.$$

Đáp số: $I = \frac{1}{4} \ln 3 + \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{4}; b = \frac{1}{3} \Rightarrow A = 2$.

Ví dụ 7: Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cos x}{1 + \cos x} dx = a + b \ln 2$. Giá trị $A = -a + b$ bằng

A. 4.

B. 1.

C. 5.

D. 3.

Hướng dẫn giải**ĐÁP ÁN D**

Ta có: $I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 + \cos x} \sin x dx$

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$ và $x: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ thì $t: 1 \rightarrow 0$.

$$\Rightarrow I = 2 \int_1^0 \frac{t^2}{1+t} (-dt) = 2 \int_0^1 \left(t - 1 + \frac{1}{1+t} \right) dt = 2 \left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|1+t| \right) \Big|_0^1 = -1 + 2 \ln 2$$

$\Rightarrow a = -1; b = 2 \Rightarrow A = 3$.

Ví dụ 8: Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x + 2 \cos x}{2 + 3 \sin x - \cos 2x} dx = a \ln 8 + b, (a, b \in \mathbb{Z})$. Giá trị $A = a + b + 5$ bằng

A. -3.

B. -2.

C. 2.

D. 4.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$\text{Ta có: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(4 \cos^2 x - 1) \cos x}{2 + 3 \sin x - (1 - 2 \sin^2 x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 - 4 \sin^2 x}{2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1} d(\sin x).$$

Đặt $t = \sin x$. Khi $x = 0$ thì $t = 0$, khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 1$. Suy ra:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{3 - 4t^2}{2t^2 + 3t + 1} dt = \int_0^1 \left(-2 + \frac{6t + 5}{(2t + 1)(t + 1)} \right) dt = \int_0^1 \left(-2 + \frac{(4t + 4) + (2t + 1)}{(2t + 1)(t + 1)} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(-2 + \frac{4}{2t + 1} + \frac{1}{t + 1} \right) dt = \left(-2t + 2 \ln(2t + 1) + \ln(t + 1) \right) \Big|_0^1 \\ &= -2 + 2 \ln 3 + \ln 2 = \ln 18 - 2. \\ &\Rightarrow a = 1; b = -2 \Rightarrow A = 4. \end{aligned}$$

Ví dụ 9: Cho $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x \sqrt{1 + \cos x}} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln|a + 4\sqrt{3}| + \ln|b + 2\sqrt{2}| \right) + 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$. Giá trị $A = a^3 + b^3 + 2ab$ bằng

A. 301.

B. 240.

C. 360.

D. 412.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Đặt $t = \sqrt{1 + \cos x} \Rightarrow t^2 = 1 + \cos x \Rightarrow 2t dt = -\sin x dx$.

$$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{3}{2}}; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x \sqrt{1 + \cos x}} dx &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin^2 x \sqrt{1 + \cos x}} dx \\ &= \int_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^1 \frac{-2t dt}{\frac{3}{2} t \left[1 - (t^2 - 1)^2 \right]} = \int_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^1 \frac{2}{t^2 (t^2 - 2)} dt = 2 \left[\int_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^1 \left(\frac{1}{t^2 - 2} - \frac{1}{t^2} \right) dt \right] \\ &= 2 \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln \left| \frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} \right| + \frac{1}{t} \right) \right] \Big|_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{(2 + \sqrt{3})(\sqrt{2} - 1)}{(2 - \sqrt{3})(\sqrt{2} + 1)} \right| + 1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\ln(7 + 4\sqrt{3}) + \ln(3 - 2\sqrt{2}) \right] + 1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow a = 7; b = 3. \end{aligned}$$

Suy ra: $A = 412$.

3. Bài tập rèn luyện tốc độ

Câu 1: Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2} \right) dx = a + b$ và $a^3 + b^3 = -7$. Giá trị của a và b lần lượt là

- A. $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$. C. $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \vee \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2} \right) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} \right) \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ &= -\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -1. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=-1 \\ a^3+b^3=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b-1 \\ (-b-1)^3+b^3+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos^2 x (1 - \tan^2 x)} dx.$$

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$ và $x: 0 \rightarrow \frac{\pi}{6}$ thì $t: 0 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{t^4}{1-t^2} dt = - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(t^2 + 1 + \frac{1}{t^2-1} \right) dt = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left[t^2 + 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) \right] dt \\ &= - \left(\frac{t^3}{3} + t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{10\sqrt{3}}{27} + \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Tìm được $a = 3$.

Câu 2: Cho tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin^3 x}{\sin x - \cos x} dx = a\pi + b$. Giá trị $A = 5(a + b + 1)$ bằng

- A. 0. B. -1. C. 5.. D. 3.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Đặt $x = \frac{3\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$. Đổi cận: $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \pi$; $x = \pi \Rightarrow t = \frac{3\pi}{2}$.

$$\text{Suy ra: } I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin^3 \left(\frac{3\pi}{2} - t \right)}{\pi \sin \left(\frac{3\pi}{2} - t \right) - \cos \left(\frac{3\pi}{2} - t \right)} (-dt) = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos^3 t}{\sin t - \cos t} dt$$

$$\text{Vậy: } 2I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(1 + \frac{1}{2} \sin 2x \right) dx$$

$$2I = \left(x - \frac{1}{4} \cos 2x \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi-1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{4}; b = -\frac{1}{4} \Rightarrow A = 5.$$

Câu 3: Cho tích phân $I = \int_0^2 (x + \cos^5 x) dx = F(x) + C$. Giá trị $F(\pi)$ bằng

- A. $\frac{\pi^2}{4}$. B. $\frac{\pi^2}{2}$. C. $-\frac{\pi^2}{2}$. D. $-\frac{\pi^2}{4}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$$\begin{aligned} I &= \int (x + \cos^5 x) dx = \int x dx + \int \cos^5 x dx = \int x dx + \int \cos^4 x d(\sin x) \\ &= \int x dx + \int (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) = \underbrace{\left(\frac{x^2}{2} + \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2\sin^3 x}{3} + \sin x \right)}_{F(x)} + C \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F(\pi) = \frac{\pi^2}{2}.$$

Câu 4: Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2+3\tan x}}{1+\cos 2x} dx = a\sqrt{5} + b\sqrt{2}, (a, b \in \mathbb{Q})$. Giá trị $A = 9(a+2b)$ bằng

- A. 1. B. 5. C. 4. D. 7.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2+3\tan x}}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2+3\tan x)^{\frac{1}{2}} d(2+3\tan x)$$

$$\text{Đặt } 2+3\tan x = t \Rightarrow I = \frac{1}{6} \int_2^5 \sqrt{t} dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_2^5 = \frac{1}{9} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow a = \frac{5}{9}; b = -\frac{2}{9} \Rightarrow A = 1.$$

Câu 5: Cho $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x - 1) \cos^2 x dx = a + b\pi, (a, b \in \mathbb{Q})$. Giá trị $A = 9a - b$ bằng

- A. $\frac{29}{64}$. B. $\frac{31}{20}$. C. $\frac{101}{20}$. D. $\frac{53}{60}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$\text{Ta có: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = A - B.$$

$$\text{+) Tính } B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

+) Tính $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$.

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$ và $x: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ thì $t: 0 \rightarrow 1$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx = \int_0^1 (1 - t^2)^2 dt \\ &= \int_0^1 (t^4 - 2t^2 + 1) dt = \left(\frac{t^5}{5} - \frac{2}{3}t^3 + t \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = \frac{8}{15}; b = -\frac{1}{4} \Rightarrow A = \frac{101}{20}.$$

Câu 6: Cho $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin 2x}{(2 + \sin x)^2} dx = a \ln 2 + b, (a, b \in \mathbb{Z})$. Tính $A = a^2 + b^3$.

A. -1.

B. -4.

C. 1.

D. 2.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin 2x}{(2 + \sin x)^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{2 \sin x \cos x}{(2 + \sin x)^2} dx$$

Đặt $t = 2 + \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$ và $x: -\frac{\pi}{2} \rightarrow 0$ thì $t: 1 \rightarrow 2$.

$$\text{Khi đó } I = \int_1^2 \frac{2(t-2)}{t^2} dt = \int_1^2 \left(\frac{2}{t} - \frac{4}{t^2} \right) dt = \left(2 \ln |t| + \frac{4}{t} \right) \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - 2 \Rightarrow a = 2; b = -2.$$

$$A = -4.$$

Câu 7: Cho tích phân $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = a + \frac{b}{c} \ln 2, (a \in \mathbb{N}; b, c \in \mathbb{Z}^+), \frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Giá trị

$$A = a + 2b + c \text{ bằng}$$

A. 4.

B. 5.

C. 1.

D. 7.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = -\ln |\sin x + \cos x| \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\ln 1 + \ln \sqrt{2} = \ln \sqrt{2} \Rightarrow a = 0, b = 1, c = 2 \Rightarrow A = 4.$$

Câu 8: Cho tích phân $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = a - b\sqrt{3}$. Giá trị $A = 5a + 3b$ bằng

A. 14.

B. -2.

C. 6.

D. 3.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$= \left[-\cot x - \tan x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3} (6 - 4\sqrt{3}) \Rightarrow a = 2; b = \frac{4}{3} \Rightarrow A = 14.$$

Câu 9: Xét tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1 + \cos x}}$. Nếu đặt $t = \sqrt{1 + \cos x}$, ta được:

A. $I = 4 \int_1^{\sqrt{2}} (x^2 - 1) dx$. **B.** $I = 4 \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{4t^3 - 4t}{t} dt$. **C.** $I = 4 \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{-4t^3 + 4t}{t} dx$. **D.** $I = 4 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) dt$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$t = \sqrt{1 + \cos x} \Leftrightarrow t^2 = 1 + \cos x \Leftrightarrow 2t dt = -\sin x dx$$

Khi $x = 0$ thì $t = \sqrt{2}$, khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 1$.

$$\text{Do đó: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos x dx}{\sqrt{1 + \cos x}} = \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{-4t(t^2 - 1)}{t} dt = \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{-4t^3 + 4t}{t} dt$$

Dạng 4: Tích phân từng phần

1. Phương pháp

Cho $u = u(x)$, $v = v(x)$ là các hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ ta có

$$\int u dv = uv - \int v du \qquad \int_a^b u dv = (uv) \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Chú ý: Cho dãy “ưu tiên” các loại hàm như sau LOGARIT $\rightarrow$ ĐA THỨC $\rightarrow$ MŨ, LƯỢNG GIÁC và $P(x), Q(x)$ là 2 trong các loại hàm số đó. Khi cần tính $\int P(x)Q(x)dx$ ta chọn từng phần theo nguyên tắc sau

+) Chọn u = Hàm được ưu tiên hơn

+) dv = phần còn lại

Ví dụ $\int (2x + 1) \ln(x - 1) dx$ ta chọn $\begin{cases} u = \ln(x - 1) \\ dv = (2x + 1) dx \end{cases}$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Kết quả tích phân $\int_0^2 (2x + \ln(x + 1)) dx = 3 \ln 3 + b, (b \in \mathbb{Z})$. Giá trị $3 + b$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$I = \int_0^2 (2x + \ln(x+1)) dx = A + B$$

Tính $A = \int_0^2 2x dx = x^2 \Big|_0^2 = 4$

Tính $B = \int_0^2 (\ln(x+1)) dx$

Xem: $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x+1} \\ v = x+1 \end{cases}$

Dùng công thức tích phân từng phần

$$B = \int_0^2 (\ln(x+1)) dx = (x+1) \cdot \ln(x+1) \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{x+1}{x+1} dx = 3 \ln 3 - x \Big|_0^2 = 3 \ln 3 - 2.$$

Vậy: $I = \int_0^2 (2x + \ln(x+1)) dx = 3 \ln 3 + 2.$

Ví dụ 2: Biết rằng tích phân $\int_0^1 (2x+1)e^x dx = a + be, (a, b \in \mathbb{Z}^+)$. Giá trị ab bằng

- A.** 1. **B.** -1. **C.** -15. **D.** 20.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Đặt $u = (2x+1) \Rightarrow du = 2dx$

$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

$$\int_0^1 (2x+1)e^x dx = \left((2x+1)e^x \right) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 e^x dx = (2x+1)e^x \Big|_0^1 - 2e^x \Big|_0^1 = e + 1.$$

Ví dụ 3: Tìm số thực $m > 1$ thỏa mãn $\int_1^m (\ln x + 1) dx = m.$

- A.** $m = 2e.$ **B.** $m = e.$ **C.** $m = e^2.$ **D.** $m = e + 1.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$$A = \int_1^m (\ln x + 1) dx = \int_1^m \ln x dx + \int_1^m dx$$

$$I = \int_1^m \ln x dx$$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = x \ln x \Big|_1^m - \int_1^m dx$$

$$A = x \ln x \Big|_1^m = m \ln m = m \Rightarrow \begin{cases} m = e \\ m = 0 \end{cases}.$$

Ví dụ 4: Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{e^x}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ và $I = \int_1^3 \frac{e^{3x}}{x} dx.$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $I = F(3) - F(1)$.

B. $I = F(6) - F(3)$.

C. $I = F(9) - F(3)$.

D. $I = F(4) - F(2)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Xét $I = \int_1^3 \frac{e^{3x}}{x} dx$

Đặt $t = 3x \Rightarrow dt = 3dx$. Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 3$, $x = 3 \Rightarrow t = 9$.

Suy ra $I = \int_3^9 \frac{3e^t}{t} \cdot \frac{1}{3} dt = \int_3^9 \frac{e^t}{t} dt = F(t) \Big|_3^9 = F(9) - F(3)$.

Ví dụ 5: Đặt $I_k = \int_1^e \ln \frac{k}{x} dx$, k nguyên dương. Ta có $I_k < e - 2$ khi:

A. $k \in \{1; 2\}$.

B. $k \in \{2; 3\}$.

C. $k \in \{4; 1\}$.

D. $k \in \{3; 4\}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Đặt $\begin{cases} u = \ln \frac{k}{x} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases} \Rightarrow I_k = \left(x \ln \frac{k}{x} \right) \Big|_1^e + \int_1^e dx = (e-1) \ln k - 1 \Rightarrow I_k < e - 2$

$$\Leftrightarrow (e-1) \ln k - 1 < e - 2 \Leftrightarrow \ln k < \frac{e-3}{e-1} \Leftrightarrow \ln k < 1 - \frac{2}{e-1}$$

Do k nguyên dương nên $k \in \{1; 2\}$.Ví dụ 6: Cho tích phân $I = \int_1^2 \frac{1-x}{x^2} e^x dx = ae^2 + be$. Giá trị $A = 8a + b$ bằng

A. -3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$$I = \int_1^2 \frac{1-x}{x^2} e^x dx = \int_1^2 \frac{e^x}{x^2} dx - \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx.$$

* Tính $I_1 = \int_1^2 \frac{e^x}{x^2} dx$.

Đặt $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$; $dv = \frac{dx}{x^2}$, chọn $v = -\frac{1}{x}$.

$$\Rightarrow I_1 = \int_1^2 \frac{e^x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} e^x \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx.$$

Vậy $I = \int_1^2 \frac{1-x}{x^2} e^x dx = -\frac{1}{x} e^x \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx - \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx = -\frac{1}{x} e^x \Big|_1^2 = \frac{e}{2} (2 - e)$.

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{2}; b = 1 \Rightarrow A = -3.$$

Ví dụ 7: Cho tích phân $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx = a\pi + b \ln \frac{3}{2}$. Giá trị $A = (9 + 4\sqrt{3})a + 6b$ bằng

A. $\frac{47}{12}$.

B. $\frac{5}{12}$.

C. $\frac{11}{4}$.

D. $\frac{21}{14}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$; $dv = \frac{dx}{\sin^2 x}$, chọn $v = -\cot x$.

$$\text{Vậy } I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx = -x \cos x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x dx = -x \cos x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$= \left[-x \cot x + \ln(\sin x) \right] \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

$$\Rightarrow a = \frac{9-4\sqrt{3}}{36}; b = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{47}{12}.$$

Ví dụ 8: Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^2 x dx = a\pi^2 + b\pi + c \ln 2, (a, b, c \in \mathbb{Q})$.

Giá trị $A = 32a + 4b + 2c$ bằng

A. -3 .

B. 2 .

C. -1 .

D. 1 .

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\tan^2 x + 1) dx$

Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$; $dv = (\tan^2 x + 1) dx$, chọn $v = \tan x$.

$$\text{Vậy } \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\tan^2 x + 1) dx = x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$= x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \ln(\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}.$$

$$\text{Do đó: } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^2 x dx = \left[x \tan x - \ln(\cos x) - \frac{x^2}{2} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi^2}{32}$$

$$= -\frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{32}; b = \frac{1}{4}; c = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = -1.$$

Ví dụ 9: Cho tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} dx = a \ln \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}} \right) - b\pi$. Giá trị $A = \log_3 a + \log_6 b$ bằng

A. $-\frac{3}{2}$.

B. 2 .

C. $-\frac{1}{2}$.

D. 1 .

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Đặt $u = \ln(\sin x) \Rightarrow du = \frac{\cos x}{\sin x} dx$; $dv = \frac{dx}{\cos^2 x}$, chọn $v = \tan x$.

$$\begin{aligned} \text{Vậy } I &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} dx = \left[\tan x \ln(\sin x) \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dx \\ &= \sqrt{3} \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \frac{1}{2} - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\pi}{6}. \\ \Rightarrow a &= \sqrt{3}; b = \frac{1}{6} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ví dụ 10: Cho tích phân $I = \int_1^2 \cos(\ln x) dx = \sin a + \cos b - \frac{1}{2}$. Giá trị $A = e^{5a} - e^{2b}$ bằng

A. 28.

B. 35.

C. 27.

D. 32.

Hướng dẫn giải**ĐÁP ÁN A**

Đặt $u = \cos(\ln x) \Rightarrow du = \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$; $dv = dx$, chọn $v = x$.

$$\text{Vậy } I = \int_1^2 \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) \Big|_1^2 + \int_1^2 \sin(\ln x) dx.$$

$$* \text{ Tính } I_1 = \int_1^2 \sin(\ln x) dx$$

Đặt $u = \sin(\ln x) \Rightarrow du = \cos(\ln x) \frac{dx}{x}$; $dv = dx$, chọn $v = x$.

$$\Rightarrow I_1 = \int_1^2 \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) \Big|_1^2 - \int_1^2 \cos(\ln x) dx.$$

$$\text{Vậy } I = \int_1^2 \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) \Big|_1^2 + x \sin(\ln x) \Big|_1^2 - \int_1^2 \cos(\ln x) dx$$

$$\Rightarrow 2I = 2 \int_1^2 \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) \Big|_1^2 + x \sin(\ln x) \Big|_1^2.$$

$$\text{Vậy } I = \int_1^2 \cos(\ln x) dx = \sin(\ln 2) + \cos(\ln 2) - \frac{1}{2} \Rightarrow a = b = \ln 2 \Rightarrow A = 28.$$

Ví dụ 11: Cho tích phân $I = \int_1^e \ln x dx = \alpha$ và $K = \int_1^a \frac{\ln x + 1}{x \ln x + 1} dx = \beta$.

Giá trị $A = \alpha + \beta - 1$ bằng

A. $\ln|a \ln a - 1|$.B. $\ln|a \ln a + 1|$.C. $\ln|\ln a + 1|$.D. $\ln|\ln a - 1|$.**Hướng dẫn giải****ĐÁP ÁN B**

$$\int_1^e \ln x dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x dx \ln x = e - \int_1^e dx = 1 = \alpha.$$

$$\int_1^e \frac{\ln x + 1}{x \ln x + 1} dx = \int_1^e \frac{d(x \ln x + 1)}{x \ln x + 1} = \ln |x \ln x + 1| \Big|_1^e = \ln |a \ln a + 1| = \beta.$$

$$A = 1 + \ln |a \ln a + 1| - 1 = \ln |a \ln a + 1|.$$

Ví dụ 12: Giá trị tích phân $I = \int_1^e \frac{a(x^2 + 1) \ln x}{x} dx$, $a \neq 0$ bằng

- A. $\frac{-e^2 + 1 + 2a}{4}$. B. $\frac{e^2 + 1 - 2a}{4}$. C. $\frac{e^2 + 1 + 2a}{4}$. D. $\frac{e^2 - 1 + 2a}{4}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$\text{Ta có: } I = \int_1^e \frac{a(x^2 + 1) \ln x}{x} dx = \int_1^e x \ln x dx + \int_1^e \frac{a \ln x}{x} dx.$$

$$\text{Xét } A = \int_1^e \frac{a \ln x}{x} dx = \int_1^e a \ln x d(\ln x) = \left(\frac{a(\ln x)^2}{2} \right) \Big|_1^e = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Xét } B = \int_1^e x \ln x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = \left(\frac{x^2}{2} \ln x \right) \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} dx = \left(\frac{x^2}{2} \ln x \right) \Big|_1^e - \frac{x^3}{6} \Big|_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy } I = \frac{e^2 + 1 + 2a}{4}.$$

3. Bài tập rèn luyện tốc độ

Câu 1: Biết $\int_0^2 e^x (2x + e^x) dx = a.e^4 + b.e^2 + c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị $S = a + b + c$ bằng

- A. $S = 2$. B. $S = -4$. C. $S = -2$. D. $S = 4$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$\text{Ta có } I = \int_0^2 e^x (2x + e^x) dx = \int_0^2 e^{2x} dx + \int_0^2 2x.e^x dx = \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^2 + 2 \int_0^2 x e^x dx = \frac{e^x}{2} - \frac{1}{2} + 2 \int_0^2 x e^x dx.$$

Đặt

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow I = \frac{e^4}{2} - \frac{1}{2} + (2x.e^x) \Big|_0^2 - 2 \int_0^2 e^x dx \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}; c = \frac{3}{2} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow S = a + b + c = 4.$$

$$= \frac{e^4}{2} - \frac{1}{2} + (2x.e^2) \Big|_0^2 - (2e^x) \Big|_0^2 = \frac{e^4}{2} + 2e^2 + \frac{3}{2}$$

Câu 2: Tìm a sao cho $I = \int_0^a x.e^{\frac{x}{2}} dx = 4$. Chọn đáp án đúng.

A. 1.

B. 0.

C. 4.

D. 2.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có: $I = \int_0^a x \cdot e^{\frac{x}{2}} dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{\frac{x}{2}} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = 2 \cdot e^{\frac{x}{2}} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = 2x \cdot e^{\frac{x}{2}} \Big|_0^a - 2 \int_0^a e^{\frac{x}{2}} dx = 2ae^{\frac{a}{2}} - 4 \cdot e^{\frac{x}{2}} \Big|_0^a = 2(a-2)e^{\frac{a}{2}} + 4$$

Theo đề ra ta có: $I = 4 \Leftrightarrow 2(a-2)e^{\frac{a}{2}} + 4 = 4 \Leftrightarrow a = 2$.

Câu 3: Tìm m để $\int_0^1 e^x (x+m) dx = e$.

A. $m = 0$.B. $m = e$.C. $m = 1$.D. $m = \sqrt{e}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Đặt

$$\begin{cases} u = x + m \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 e^x (x+m) dx = e^x (x+m) \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e^x (x+m-1) \Big|_0^1 = me - m + 1$$

Mặt khác: $I = e \Rightarrow me - m + 1 = e \Leftrightarrow m(e-1) = e-1 \Leftrightarrow m = 1$.

Câu 4: Cho $\int_1^2 x(1+\ln x) dx = a \ln b + c, (a, b, c \in \mathbb{Q})$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $a = b > c$.B. $a > b = c$.C. $a > b > c$.D. $a = b = c$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Đặt

$$\begin{cases} u = 1 + \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 x(1+\ln x) dx = \frac{x^2}{2} (1+\ln x) \Big|_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x dx = \frac{x^2}{2} (1+\ln x) \Big|_1^2 - \frac{x^2}{4} \Big|_1^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} (1+\ln x) \Big|_1^2 - \frac{x^2}{4} \Big|_1^2 = 2 \ln 2 + \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = 2, b = 2 \\ c = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Câu 5: Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x-1) \sin 2x dx$. Đẳng thức đúng là

A. $I = -(x-1)\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx}$.

B. $I = -(x-1)\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx}$.

C. $I = -\frac{1}{2}(x-1)\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx}$.

D. $I = -\frac{1}{2}(x-1)\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Đặt $\begin{cases} u = x-1 \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{cases} \Rightarrow I = -\frac{1}{2}(x-1)\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx}$

Câu 6: Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x} dx = a\pi + b \ln 2$, với a, b là các số thực. Giá trị $16a - 8b$.

A. 4.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{1+\cos 2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}\tan x \end{cases}$. Ta có

$$I = \frac{1}{2}x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2 \Rightarrow a = \frac{1}{8}, b = -\frac{1}{4}.$$

Do đó, $16a - 8b = 4$.

Câu 7: Kết quả tích phân $I = \int_0^1 (2x+3)e^x dx$ được viết dưới dạng $I = ae + b$ với a, b là các số hữu tỉ.

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a = b$.

B. $a > b$

C. $a < b$.

D. $a = b > 0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

• Đặt $\begin{cases} u = 2x+3 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 dx \\ v = e^x \end{cases}$.

Tích phân $I = (2x+3)e^x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 e^x dx = 5e - 3 - 2(e-1) = 3e - 1$

• Vậy $a = 3$ và $b = -1$.

Câu 8: Xét tích phân $I = \int_0^1 (2x^2 - 4)e^{2x} dx$. Nếu đặt $u = 2x^2 - 4$, $v' = e^{2x}$, ta được tích phân

$$I = \phi(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 2xe^{2x} dx, \text{ trong đó:}$$

A. $\phi(x) = (2x^2 - 4)e^{2x}$.

B. $\phi(x) = (x^2 - 2)e^{2x}$.

C. $\phi(x) = (x^2 - 2)e^x$.

D. $\phi(x) = \frac{1}{2}(2x^2 - 4)e^x$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Đặt $\begin{cases} u = 2x^2 - 4 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 4x dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$. Khi đó $I = \int_0^1 (2x^2 - 4)e^{2x} dx = (x^2 - 2)e^{2x} \Big|_0^1 - \int_0^1 2xe^{2x} dx$.

Câu 9: Giả sử tích phân $\int_0^1 x \ln(2x+1)^{2017} dx = a + \frac{b}{c} \ln 3$. Với phân số $\frac{b}{c}$ tối giản. Giá trị $b+c$ bằng

A. 6057.

B. 6059.

C. 6058.

D. 6056.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có $I = \int_0^1 x \ln(2x+1)^{2017} dx = 2017 \int_0^1 x \ln(2x+1) dx$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(2x+1) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2}{2x+1} dx \\ v = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{8} \end{cases}$

Do đó $\int_0^1 x \ln(2x+1) dx = (\ln(2x+1)) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{8} \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{8} \right) \frac{2}{2x+1} \right) dx$

$$= \frac{3}{8} \ln 3 - \left(\frac{x^2 - x}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{8} \ln 3$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 x \ln(2x+1)^{2017} dx = 2017 \left(\frac{3}{8} \ln 3 \right) = \frac{6051}{8} \ln 3.$$

Khi đó $b+c = 6059$.

Câu 10: Tìm m để $\int_0^1 e^x (x+m) dx = e$.

A. $m = 0$.

B. $m = e$.

C. $m = 1$.

D. $m = \sqrt{e}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$I = \int_0^1 e^x (x+m) dx = \int_0^1 (x+m) d(e^x) = (x+m)e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

$$= (x+m)e^x \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 = me - m + 1$$

$$I = e \Leftrightarrow me - m + 1 = e \Leftrightarrow m = 1.$$

Câu 11: Biết kết quả của tích phân $I = \int_1^2 (x^2 - 1) \ln x dx$ được viết dưới dạng $\frac{a \ln 4 + b}{c}$ (a, b, c là các số nguyên). Khi đó a+b+c bằng

A. 17.

B. 10.

C. 13.

D. 28.

hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Đặt

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = (x^2 - 1) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^3}{3} - x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} - x \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \ln x \Big|_1^2 - \left(\frac{x^3}{9} - x \right) \Big|_1^2$$

$$I = \frac{3 \ln 4 + 2}{9} = \frac{6 \ln 4 + 4}{18} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 4 \\ c = 18 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 28.$$

Câu 12: Cho tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [2 \sin 2x + \cos x \ln(1 + \sin x)] dx = a \ln 2 + b \quad (a, b \in \mathbb{Q}). \text{ Giá trị } S = \frac{1}{3}(a^3 + b^3) \text{ bằng}$$

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln(1 + \sin x) dx = (1 + \sin x) \ln(1 + \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \dots = 2 \ln 2 - 1.$$

$$\text{Vậy } I = 2 \ln 2 + 1 \Rightarrow a = 2; b = 1 \Rightarrow S = \frac{1}{3}(a^3 + b^3) = 3.$$

Câu 13: Biết tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(x^\alpha + \sin x) dx}{\cos^2 x} = \left(\frac{1}{\cos x} + x \tan x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \alpha x^{\alpha-1} \tan x dx$. Giá trị α là

A. 0.

B. 1.

C. -1.

D. 2.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(x^\alpha + \sin x) dx}{\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{x^\alpha}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) dx = I_1 + I_2$$

$$I_2 = - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x} d \cos x = \frac{1}{\cos x} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x^\alpha = u \\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} dx = du \\ v = \tan x \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I_1 = x^\alpha \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \alpha x^{\alpha-1} \tan x dx$$

$$\Rightarrow x^\alpha = x \Rightarrow \alpha = 1.$$

Câu 14: Biết tích phân sau $I = \int_0^{\pi} x \left(\frac{a}{x^2+1} + b \sin x \right) dx = \ln(\pi^2+1) + 3\pi$. Giá trị $S = a^5 + b^5$ bằng

A. 300.

B. 200.

C. 275.

D. 135.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$I = \int_0^{\pi} x \left(\frac{a}{x^2+1} + b \sin x \right) dx = \int_0^{\pi} \frac{ax}{x^2+1} dx + \int_0^{\pi} bx \sin x dx.$$

$$\text{Tính } I_1 = \int_0^{\pi} \frac{ax}{x^2+1} dx = \frac{a}{2} \int_0^{\pi} \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{a}{2} \ln|x^2+1| \Big|_0^{\pi} = \frac{a}{2} \ln(\pi^2+1).$$

$$\text{Tính } I_2 = \int_0^{\pi} bx \sin x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = u \\ b \sin x dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -b \cos x \end{cases}$$

$$I_2 = -bx \cos x \Big|_0^{\pi} + b \int_0^{\pi} \cos x dx = b\pi + 3 \sin x \Big|_0^{\pi} = b\pi.$$

$$\text{Vậy } I = \frac{a}{2} \ln(\pi^2+1) + b\pi = \ln(\pi^2+1) + 3\pi \Rightarrow a = 2; b = 3.$$

$$\text{Suy ra: } S = 275.$$

Câu 15: Giá trị tích phân $I = \int_0^1 x \left(e^x + \frac{\alpha}{x+1} \right) dx$ bằng

A. $1 + \alpha - \alpha \ln 2$.

B. $1 + \alpha - \alpha \ln 2^\alpha$.

C. $2 + \alpha - \alpha \ln 2$.

D. $2 + \alpha - \alpha \ln 2^\alpha$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$$\text{Ta có } I = \int_0^1 x e^x dx + \int_0^1 \frac{\alpha x}{x+1} dx.$$

$$\int_0^1 x e^x dx = \int_0^1 x d e^x = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x \Big|_0^1 = 1.$$

$$\int_0^1 \frac{\alpha x}{x+1} dx = \int_0^1 \left(\alpha - \frac{\alpha}{x+1} \right) dx = \left(\alpha x - \alpha \ln|x+1| \right) \Big|_0^1 = \alpha - \alpha \ln 2.$$

Do đó $I = 1 + \alpha - \alpha \ln 2$.

Dạng 5: Tích phân chứa dấu giá trị tuyệt đối
1. Phương pháp

Bài toán: Tính tích phân $I = \int_a^b g(x) dx$

(với $g(x)$ là biểu thức chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối)

PP chung:

Xét dấu của biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối trên $[a; b]$

Dựa vào dấu để tách tích phân trên mỗi đoạn tương ứng (sử dụng tính chất 3 để tách)

Tính mỗi tích phân thành phần.

Đặc biệt: Tính tích phân $I = \int_a^b |f(x)| dx$

Cách giải
Cách 1:

+) Cho $f(x) = 0$ tìm nghiệm trên $[a; b]$

+) Xét dấu của $f(x)$ trên $[a; b]$, dựa vào dấu của $f(x)$ để tách tích phân trên mỗi đoạn tương ứng (sử dụng tính chất 3 để tách)

+) Tính mỗi tích phân thành phần.

Cách 2:

+) Cho $f(x) = 0$ tìm nghiệm trên $[a; b]$ giả sử các nghiệm đó là $x_1; x_2; \dots; x_n$

(với $x_1 < x_2 < \dots < x_n$).

$$\text{Khi đó } I = \int_a^{x_1} |f(x)| dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx + \int_{x_2}^{x_3} |f(x)| dx + \dots + \int_{x_n}^b |f(x)| dx$$

$$\Rightarrow I = \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b f(x) dx \right|$$

+) Tính mỗi tích phân thành phần

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: $S = \int_{-1}^2 |x^2 - x - 2| dx = \frac{a}{b}$, ($a, b \in \mathbb{Z}^+$), $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $a + b$ bằng

- A. 11. B. 25. C. 100. D. 50.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 |x^2 - x - 2| dx = -\int_{-1}^2 (x^2 - x - 2) dx = -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_{-1}^2 \\ &= -\left[\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right)\right] = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Ví dụ 2: $I = \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx = a\sqrt{a}$, ($a \in \mathbb{N}^*$). Hỏi a^3 là bao nhiêu?

- A. 27. B. 64. C. 125. D. 8.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$\text{Ta có: } \sqrt{1 - \sin 2x} = \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} = |\sin x - \cos x| = \sqrt{2} \left| \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right|.$$

$$\text{Với } x \in [0; \pi] \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right].$$

$$+ \text{ Với } x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right] \text{ thì } \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 0$$

$$+ \text{ Với } x - \frac{\pi}{4} \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right] \text{ thì } \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

$$\Rightarrow I = -\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx + \sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx = 2\sqrt{2}.$$

Ví dụ 3: Biết $I = \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx = 4 + a \ln 2 + b \ln 5$, với a, b là các số nguyên. Giá trị $S = a - b$ bằng

- A. 9. B. 11. C. 5. D. -3.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } I &= \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx = \int_1^2 \frac{2|x-2|+1}{x} dx + \int_2^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx \\ &= \int_1^2 \frac{2(2-x)+1}{x} dx + \int_2^5 \frac{2(x-2)+1}{x} dx = \int_1^2 \frac{5-2x}{x} dx + \int_2^5 \frac{2x-3}{x} dx \\ &= \int_1^2 \left(\frac{5}{x} - x\right) dx + \int_2^5 \left(2 - \frac{3}{x}\right) dx = (5 \ln |x| - x^2)\Big|_1^2 + (2x - 3 \ln |x|)\Big|_2^5 \\ &= 8 \ln 2 - 3 \ln 5 + 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow a - b = 11. \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Cho tích phân $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx = ab$ và $a + b = 2 + 2\sqrt{2}$. Giá trị của a và b lần lượt là

A. $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2\sqrt{2} \end{cases}$

B. $\begin{cases} a = 2\sqrt{2} \\ b = 2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a = 2\sqrt{2} \\ b = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 2 \\ b = 2\sqrt{2} \end{cases}$

D. $\begin{cases} a = 2\sqrt{2} \\ b = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 2 \\ b = 2\sqrt{2} \end{cases}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \sqrt{2} \int_0^{\pi} \sin x dx - \sqrt{2} \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \\ &= -\sqrt{2} \cos x \Big|_0^{\pi} + \sqrt{2} \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ab = 4\sqrt{2} \\ a + b = 2 + 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow X^2 - (2 + 2\sqrt{2})X + 4\sqrt{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{2} \\ b = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 2 \\ b = 2\sqrt{2} \end{cases}.$$

Ví dụ 5: Tính tích phân $I = \int_0^1 x|x-a| dx, a > 0$ ta được kết quả $I = f(a)$. Khi đó tổng $f(8) + f\left(\frac{1}{2}\right)$ có giá trị bằng:

A. $\frac{24}{91}$.

B. $\frac{91}{24}$.

C. $\frac{17}{2}$.

D. $\frac{2}{17}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

TH1: Nếu $a \geq 1$ khi đó $I = -\int_0^1 x(x-a) dx = \left(\frac{-x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{a}{2} - \frac{1}{3} \Rightarrow f(8) = \frac{8}{2} - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$

TH 2: Nếu $0 < a < 1$ khi đó $I = -\int_0^a x(x-a) dx + \int_a^1 x(x-a) dx$

$$= \left(\frac{-x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} \right) \Big|_0^a + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \right) \Big|_a^1 = \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{8}$$

Khi đó $f(8) + f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{3} + \frac{1}{8} = \frac{91}{24}$.

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 f(2x) dx = 2$ và $\int_0^2 f(6x) dx = 14$. Giá trị

$\int_{-2}^2 f(5|x|+2) dx$ bằng

A. 30.

B. 32.

C. 34.

D. 36.

Lời giải

ĐÁP ÁN B

+ Xét $\int_0^1 f(2x) dx = 2$.

Đặt $u = 2x \Rightarrow du = 2dx$; $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = 1 \Rightarrow u = 2$.

Nên $2 = \int_0^1 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(u) du \Rightarrow \int_0^2 f(u) du = 4$.

+ Xét $\int_0^2 f(6x) dx = 14$.

Đặt $v = 6x \Rightarrow dv = 6dx$; $x = 0 \Rightarrow v = 0$; $x = 2 \Rightarrow v = 12$.

Nên $14 = \int_0^2 f(6x) dx = \frac{1}{6} \int_0^{12} f(v) dv \Rightarrow \int_0^{12} f(v) dv = 84$.

+ Xét $\int_{-2}^2 f(5|x|+2) dx = \int_{-2}^0 f(5|x|+2) dx + \int_0^2 f(5|x|+2) dx$.

□ Tính $I_1 = \int_{-2}^0 f(5|x|+2) dx$.

Đặt $t = 5|x|+2$.

Khi $-2 < x < 0$, $t = -5x + 2 \Rightarrow dt = -5dx$; $x = -2 \Rightarrow t = 12$; $x = 0 \Rightarrow t = 2$.

$I_1 = \frac{-1}{5} \int_{12}^2 f(t) dt = \frac{1}{5} \left[\int_0^{12} f(t) dt - \int_0^2 f(t) dt \right] = \frac{1}{5} (84 - 4) = 16$.

□ Tính $I_1 = \int_0^2 f(5|x|+2) dx$.

Đặt $t = 5|x|+2$.

Khi $0 < x < 2$, $t = 5x + 2 \Rightarrow dt = 5dx$; $x = 2 \Rightarrow t = 12$; $x = 0 \Rightarrow t = 2$.

$I_2 = \frac{1}{5} \int_2^{12} f(t) dt = \frac{1}{5} \left[\int_0^{12} f(t) dt - \int_0^2 f(t) dt \right] = \frac{1}{5} (84 - 4) = 16$.

Vậy $\int_{-2}^2 f(5|x|+2) dx = 32$.

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0; 4]$ và $\int_0^2 f(x) dx = 1$; $\int_0^4 f(x) dx = 3$. Giá trị $\int_{-1}^1 f(|3x-1|) dx$ bằng

A. 4.

B. 2.

C. $\frac{4}{3}$.

D. 1.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(|3x-1|)dx &= \int_{-1}^{1/3} f(1-3x)dx + \int_{1/3}^1 f(3x-1)dx \\ &= -\frac{1}{3} \int_{-1}^{1/3} f(1-3x)d(1-3x) + \frac{1}{3} \int_{1/3}^1 f(3x-1)d(3x-1) \\ &= -\frac{1}{3} \int_4^0 f(t)dt + \frac{1}{3} \int_0^2 f(t)dt = -\frac{1}{3}(-3) + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

3. Bài tập rèn luyện tốc độ

Câu 1: $S = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |y^4 - 4y^2 + 3| dy = \frac{a - 24\sqrt{3}}{b}$. Giá trị $A + 2B$ bằng

A. 80.

B. 83.

C. 142.

D. 79.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$|y^4 - 4y^2 + 3| = |(y^2 - 1)(y^2 - 3)|$$

Xét dấu $(y^2 - 1)(y^2 - 3)$, ta có:

y	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	
y^2-1	+	+	0	-	+	+	
y^2-3	+	0	-	-	0	+	
$(y^2-1)(y^2-3)$	+	0	-	0	-	0	+

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |(4 - 4y^2) - (1 - y^4)| dy = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |y^4 - 4y^2 + 3| dy \\ &= \int_{-\sqrt{3}}^{-1} -(y^4 - 4y^2 + 3) dy + \int_{-1}^1 (y^4 - 4y^2 + 3) dy + \int_1^{\sqrt{3}} -(y^4 - 4y^2 + 3) dy \\ &= -\left(\frac{y^5}{5} - \frac{4y^3}{3} + 3y\right) \Big|_{-\sqrt{3}}^{-1} + \left(\frac{y^5}{5} - \frac{4y^3}{3} + 3y\right) \Big|_{-1}^1 - \left(\frac{y^5}{5} - \frac{4y^3}{3} + 3y\right) \Big|_1^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{112 - 24\sqrt{3}}{15}. \end{aligned}$$

Câu 2: $S = \int_0^1 \sqrt{4x^2 - 4x + 1} dx = \frac{a}{b}, (a, b \in \mathbb{Z}^+)$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $\sqrt{a + 4b}$ bằng

A. 1.

B. -3.

C. 35.

D. 3.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có: $I_7 = \int_0^1 \sqrt{(2x-1)^2} dx = \int_0^1 |2x-1| dx$

$$\Rightarrow I_7 = \int_0^1 |2x-1| dx = \int_0^{\frac{1}{2}} |2x-1| dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |2x-1| dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x-1) dx = \frac{1}{2}.$$

Suy ra: $a=1, b=2$.

Câu 3: $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin x} dx = A\sqrt{B}$, biết $A=2B$ Giá trị A^3+B^3 bằng

A. 72.

B. 8.

C. 65.

D. 35.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$$\text{Ta có: } \sqrt{1+\sin x} = \sqrt{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2} = \left|\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right| = \sqrt{2} \left|\sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$\text{Với } x \in [0; 2\pi] \Rightarrow \frac{x}{2} \in [0; \pi] \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right].$$

$$+ \text{ Với } \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}; \pi\right] \text{ thì } \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

$$+ \text{ Với } \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \in \left[\pi; \frac{5\pi}{4}\right] \text{ thì } \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) < 0$$

$$\Rightarrow I = \sqrt{2} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) dx - \sqrt{2} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) dx = 4\sqrt{2}.$$

Câu 4: Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x} dx = a\sqrt{3}+b$. Giá trị $A=a-b-4$ bằng

A. 2.

B. -5.

C. 5.

D. -8.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(\sin x - \sqrt{3}\cos x)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \sqrt{3}\cos x| dx.$$

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

$$\text{Do } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ nên } x = \frac{\pi}{3}.$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} |\sin x - \sqrt{3}\cos x| dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \sqrt{3}\cos x| dx = \left| \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x - \sqrt{3}\cos x) dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \sqrt{3}\cos x) dx \right| \\ &= \left| \left(-\cos x - \sqrt{3}\sin x\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \right| + \left| \left(-\cos x - \sqrt{3}\sin x\right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \right| = \left| -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1 \right| + \left| -\sqrt{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right| = 3 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a=-1; b=3 \Rightarrow A=-8$$

Dạng 6: Tích phân siêu việt

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Xét tích phân $I = \int_1^{\sqrt{2}} x \cdot e^{x^2} dx$. Sử dụng phương pháp đổi biến số với $u = x^2$, tích phân I được biến đổi thành dạng nào sau đây:

A. $I = 2 \int_1^2 e^u du$. **B.** $I = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}} e^u du$. **C.** $I = \frac{1}{2} \int_1^2 e^u du$. **D.** $I = 2 \int_1^{\sqrt{2}} e^u du$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có $I = \int_1^{\sqrt{2}} e^{x^2} x dx$.

Đặt $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} du$.

Với $x = 1 \Rightarrow u = 1$ và $x = \sqrt{2} \Rightarrow u = 2$.

Khi đó $I = \frac{1}{2} \int_1^2 e^u du$.

Ví dụ 2: Biết rằng $I = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x(\ln^2 x - 3 \ln x + 2)} = a \ln 3 + b \ln 2 + c, (a, b, c \in \mathbb{Z})$. Giá trị của $S = a + b + c$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Đặt $t = \ln x \Rightarrow I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^2 - 3t + 2} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1} \right) dt = \ln \left| \frac{t-2}{t-1} \right| \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \ln \frac{3}{2} = \ln 3 - \ln 2$.

Do đó $a = 1; b = -1; c = 0 \Rightarrow S = 0$.

Ví dụ 3: Cho tích phân $\int_{e^3}^{e^8} \frac{dx}{x \ln x \sqrt{\ln x}} = \ln a - \ln b, (a, b \in \mathbb{N}^*)$. Giá trị $S = \cos[(a+b)\pi] + \sin[(a-b)\pi]$ bằng

A. 0. **B.** -1. **C.** 1. **D.** -4.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$I = \int_{e^3}^{e^8} \frac{dx}{x \ln x \sqrt{\ln x}} = \int_3^8 \frac{dx}{x \ln x \sqrt{1 + \ln x}}$

Đặt $t = \sqrt{1 + \ln x}; x = e^3$ thì $t = 2; x = e^8$ thì $t = 3$.

$$t^2 = 1 + \ln x \Rightarrow 2t dt = \frac{dx}{x}; \ln x = t^2 - 1.$$

$$I = \int_2^3 \frac{2t dt}{(t^2 - 1)t} = \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_2^3 = \ln 3 - \ln 2 \Rightarrow a = 3, b = 2.$$

$$S = \cos[(a+b)\pi] + \sin[(a-b)\pi] = -1.$$

Ví dụ 4: Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tính $\int_1^e f'(x) \ln x dx$ bằng:

A. $I = \frac{e^2 - 3}{2e^2}$. **B.** $I = \frac{2 - e^2}{e^2}$. **C.** $I = \frac{e^2 - 2}{e^2}$. **D.** $I = \frac{3 - e^2}{2e^2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Do $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$ nên $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{1}{2x^2} \right)' \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Tính $I = \int_1^e f'(x) \ln x dx$. Đặt $\begin{cases} \ln x = u \\ f'(x) dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} dx = du \\ f(x) = v \end{cases}$.

$$\text{Khi đó } I = f(x) \cdot \ln(x) \Big|_1^e - \int_1^e \frac{f'(x)}{x} dx = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln(x) \Big|_1^e - \frac{1}{2x^2} \Big|_1^e = \frac{e^2 - 3}{2e^2}.$$

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = f(x)$ với $f(0) = f(1) = 1$. Biết rằng: $\int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = ae + b$ Tính

$$Q = a^{2017} + b^{2017}.$$

A. $Q = 2^{2017} + 1$. **B.** $Q = 2$. **C.** $Q = 0$. **D.** $Q = 2^{2017} - 1$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = e^x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x f'(x) dx + \int_0^1 e^x f'(x) dx = ef(1) - f(0) = e - 1.$$

Do đó $a = 1, b = -1$.

$$\text{Suy ra } Q = a^{2017} + b^{2017} = 1^{2017} + (-1)^{2017} = 0.$$

Vậy $Q = 0$.

Ví dụ 6: Tính tích phân $I = \int_{-2}^2 \frac{x^{2018}}{e^x + 1} dx$

- A. $I = 0$. B. $I = \frac{2^{2020}}{2019}$. C. $I = \frac{2^{2019}}{2019}$. D. $I = \frac{2^{2018}}{2018}$.

Lời giải

Tính tích phân $I = \int_{-2}^2 \frac{x^{2018}}{e^x + 1} dx$.

Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$. Khi $x = -2$ thì $t = 2$; khi $x = 2$ thì $t = -2$.

Ta có

$$I = \int_{-2}^2 \frac{x^{2018}}{e^x + 1} dx = \int_{-2}^2 \frac{(-t)^{2018}}{e^{-t} + 1} dt = \int_{-2}^2 \frac{t^{2018} \cdot e^t}{e^t + 1} dt \Rightarrow 2I = \int_{-2}^2 t^{2018} dt = \frac{t^{2019}}{2019} \Big|_{-2}^2 = \frac{2 \cdot 2^{2019}}{2019} \Rightarrow I = \frac{2^{2019}}{2019}.$$

Ví dụ 7: Biết $\int_0^1 \frac{\pi x^3 + 2^x + ex^3 \cdot 2^x}{\pi + e \cdot 2^x} dx = \frac{1}{m} + \frac{1}{e \ln n} \ln \left(p + \frac{e}{e + \pi} \right)$ với m, n, p là các số nguyên dương.

Tính tổng $S = m + n + p$.

- A. $S = 6$. B. $S = 5$. C. $S = 7$. D. $S = 8$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \int_0^1 \frac{\pi x^3 + 2^x + ex^3 \cdot 2^x}{\pi + e \cdot 2^x} dx = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{2^x}{\pi + e \cdot 2^x} \right) dx = \frac{1}{4} + \int_0^1 \frac{2^x}{\pi + e \cdot 2^x} dx = \frac{1}{4} + J.$$

$$\text{Tính } J = \int_0^1 \frac{2^x}{\pi + e \cdot 2^x} dx.$$

$$\text{Đặt } \pi + e \cdot 2^x = t \Rightarrow e \cdot 2^x \ln 2 dx = dt \Leftrightarrow 2^x dx = \frac{1}{e \ln 2} dt.$$

Đổi cận: Khi $x = 0$ thì $t = \pi + e$; khi $x = 1$ thì $t = \pi + 2e$.

$$J = \int_0^1 \frac{2^x}{\pi + e \cdot 2^x} dx = \frac{1}{e \ln 2} \int_{\pi+e}^{\pi+2e} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{e \ln 2} \ln |t| \Big|_{\pi+e}^{\pi+2e} = \frac{1}{e \ln 2} \ln \left(1 + \frac{e}{e + \pi} \right).$$

$$\text{Khi đó } \int_0^1 \frac{\pi x^3 + 2^x + ex^3 \cdot 2^x}{\pi + e \cdot 2^x} dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{e \ln 2} \ln \left(1 + \frac{e}{e + \pi} \right) \Rightarrow m = 4, n = 2, p = 1. \text{ Vậy } S = 7.$$

Ví dụ 8 : Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) dx = 1$. Giá trị của

$$\int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx \text{ bằng}$$

- A. 1. B. 6. C. 4. D. 3.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$\text{Do } \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = 1 \text{ và } \int_1^2 f(x) dx = 2$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx = 3.$$

$$\text{Mặt khác } \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx = \int_{-2}^0 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx + \int_0^2 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx \text{ và } y = f(x) \text{ là hàm số chẵn, liên tục trên } \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Xét } I = \int_{-2}^0 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx. \text{ Đặt } t = -x \Rightarrow dx = -dt$$

$$\Rightarrow I = \int_{-2}^0 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx = - \int_2^0 \frac{f(-t)}{3^{-t} + 1} dt = \int_0^2 \frac{f(-t)}{\frac{1}{3^t} + 1} dt = \int_0^2 \frac{3^t f(t)}{3^t + 1} dt = \int_0^2 \frac{3^x f(x)}{3^x + 1} dx$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx = \int_{-2}^0 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx + \int_0^2 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx = \int_0^2 \frac{3^x f(x)}{3^x + 1} dx + \int_0^2 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx = \int_0^2 \frac{(3^x + 1)f(x)}{3^x + 1} dx = \int_0^2 f(x) dx = 3.$$

Ví dụ 9: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 4]$ và thỏa mãn $f(x) = \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x}$. Tính tích

$$\text{phân } I = \int_3^4 f(x) dx.$$

A. $I = 3 + 2 \ln^2 2$.

B. $I = 2 \ln^2 2$.

C. $I = \ln^2 2$.

D. $I = 2 \ln 2$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$$\text{Ta có } \int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 \left[\frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x} \right] dx = \int_1^4 \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} dx + \int_1^4 \frac{\ln x}{x} dx.$$

$$\text{Xét } K = \int_1^4 \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} dx.$$

$$\text{Đặt } 2\sqrt{x}-1 = t \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{t+1}{2} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = dt.$$

$$\Rightarrow K = \int_1^3 f(t) dt = \int_1^3 f(x) dx.$$

$$\text{Xét } M = \int_1^4 \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^4 \ln x d(\ln x) = \left. \frac{\ln^2 x}{2} \right|_1^4 = 2 \ln^2 2.$$

$$\text{Do đó } \int_1^4 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx + 2 \ln^2 2 \Rightarrow \int_3^4 f(x) dx = 2 \ln^2 2.$$

Ví dụ 10: Biết $\int_0^1 \frac{(x^2 + 5x + 6)e^x}{x + 2 + e^{-x}} dx = ae - b - \ln \frac{ae + c}{3}$ với a, b, c là các số nguyên và e là cơ số của

logarit tự nhiên. Tính $S = 2a + b + c$.

A. $S = 10$.

B. $S = 0$.

C. $S = 5$.

D. $S = 9$.

Lời giải

ĐÁP ÁN D

Ta có : $I = \int_0^1 \frac{(x^2 + 5x + 6)e^x}{x + 2 + e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{(x+2)(x+3)e^{2x}}{(x+2)e^x + 1} dx.$

Đặt $t = (x+2)e^x \Rightarrow dt = (x+3)e^x dx$. Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow t = 2, x = 1 \Rightarrow t = 3e$.

$$I = \int_2^{3e} \frac{tdt}{t+1} = \int_2^{3e} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = \left(t - \ln|t+1|\right) \Big|_2^{3e} = 3e - 2 - \ln \frac{3e+1}{3}.$$

Vậy $a = 3, b = 2, c = 1 \Rightarrow S = 9$.

Ví dụ 11: Cho số thực $a \neq 0$, đặt $b = \int_{-a}^a \frac{1}{(2a+x)e^x} dx$. Tính $I = \int_0^{2a} \frac{e^x}{3a-x} dx$ theo a và b .

A. $I = \frac{b}{\sqrt{e^a}}.$

B. $I = \frac{b}{e^a}.$

C. $I = \frac{a}{\sqrt{e^b}}.$

D. $I = b.e^a.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Đặt $t = a - x \Leftrightarrow x = a - t \Rightarrow dx = -dt$.

Đổi cận:

x	$0 \quad 2a$
t	$a \quad -a$

Ta có $I = -\int_a^{-a} \frac{e^{a-t}}{3a-(a-t)} dt = \int_{-a}^a \frac{e^a}{(2a+t)e^t} dt = b.e^a.$

3. Bài tập rèn luyện tốc độ

Câu 1: Biết $\int_e^{e^4} f(\ln x) \frac{1}{x} dx = 4$. Tính tích phân $I = \int_1^4 f(x) dx$.

A. 8.

B. 16.

C. 2.

D. 4.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$.

Đổi cận : Với $x = e \Rightarrow t = 1$; $x = e^4 \Rightarrow t = 4$. Do đó, ta có

$$\int_e^{e^4} f(\ln x) \frac{1}{x} dx = \int_1^4 f(t) dt = 4 \Rightarrow \int_1^4 f(x) dx = 4.$$

Câu 2: Biết $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2 + x \ln x} dx = \ln(\ln a + b)$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $P = a^2 + b^2 + ab$.

A. 10.

B. 8.

C. 12.

D. 6.

Lời giải

ĐÁP ÁN B

$$\text{Ta có } \int_1^2 \frac{x+1}{x^2+x \ln x} dx = \int_1^2 \frac{x+1}{x(x+\ln x)} dx.$$

$$\text{Đặt } t = x + \ln x \Rightarrow dt = \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{x+1}{x} dx.$$

$$\text{Khi } x=1 \Rightarrow t=1; x=2 \Rightarrow t=2+\ln 2.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_1^{2+\ln 2} \frac{dt}{t} = \ln |t| \Big|_1^{2+\ln 2} = \ln(\ln 2 + 2). \text{ Suy ra } \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } P=8.$$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^{2018} f(x) dx = 2$. Khi đó tích phân

$$\int_0^{\sqrt{e^{2018}-1}} \frac{x}{x^2+1} f(\ln(x^2+1)) dx \text{ bằng}$$

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

ĐÁP ÁN C

$$\text{Đặt } I = \int_0^{\sqrt{e^{2018}-1}} \frac{x}{x^2+1} f(\ln(x^2+1)) dx.$$

$$\text{Đặt } t = \ln(x^2+1) \Rightarrow dt = \frac{2x}{x^2+1} dx.$$

$$\text{Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=0; x=\sqrt{e^{2018}-1} \Rightarrow t=2018.$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^{2018} f(t) dt = \int_0^{2018} f(x) dx = 2.$$

Câu 3: Cho các số thực a, b khác không. Xét hàm số $f(x) = \frac{a}{(x+1)^3} + bxe^x$ với mọi x khác -1 . Biết

$$f'(0) = -22 \text{ và } \int_0^1 f(x) dx = 5. \text{ Tính } a+b?$$

A. 19.

B. 7.

C. 8.

D. 10.

Lời giải

ĐÁP ÁN D

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{-3a}{(x+1)^4} + be^x + bxe^x \text{ nên } f'(0) = -3a + b = -22 \quad (1).$$

$$\text{Xét } 5 = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left[\frac{a}{(x+1)^3} + bxe^x \right] dx = a \int_0^1 (x+1)^{-3} d(x+1) + b \int_0^1 x d(e^x)$$

$$= -\frac{a}{2(x+1)^2} \Big|_0^1 + b \left[xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx \right] = -\frac{a}{2} \left(\frac{1}{4} - 1 \right) + b \left[e - e^x \Big|_0^1 \right] = \frac{3a}{8} + b \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \begin{cases} -3a + b = -22 \\ \frac{3a}{8} + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b = 10.$$

Câu 4: Biết rằng tích phân $\int_0^4 \frac{(x+1)e^x}{\sqrt{2x+1}} dx = ae^4 + b$. Tính $T = a^2 - b^2$

A. $T = 1$. **B.** $T = 2$. **C.** $T = \frac{3}{2}$. **D.** $T = \frac{5}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } I = \int_0^4 \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}} e^x dx = \frac{1}{2} \int_0^4 \frac{2x+2}{\sqrt{2x+1}} e^x dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^4 \sqrt{2x+1} \cdot e^x dx + \int_0^4 \frac{e^x}{\sqrt{2x+1}} dx \right).$$

$$\text{Xét } I_1 = \int_0^4 \frac{e^x}{\sqrt{2x+1}} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^x \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2x+1} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } I_1 = e^x \cdot \sqrt{2x+1} \Big|_0^4 - \int_0^4 e^x \cdot \sqrt{2x+1} dx.$$

$$\text{Suy ra } I = \frac{3e^4 - 1}{2}. \text{ Khi đó } a = \frac{3}{2}, b = \frac{-1}{2} \Rightarrow T = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2.$$

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$ và $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx = \frac{e^2 - 1}{4}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = 2 - e$. **B.** $I = e - 2$. **C.** $I = \frac{e}{2}$. **D.** $I = \frac{e-1}{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$$\text{Xét } A = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = (x+1)e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = xe^x \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } A = xe^x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 xe^x f'(x) dx = - \int_0^1 xe^x f'(x) dx \Rightarrow \int_0^1 xe^x f'(x) dx = \frac{1-e^2}{4}$$

$$\text{Xét } \int_0^1 x^2 e^{2x} dx = e^{2x} \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{e^2 - 1}{4}$$

$$\text{Ta có : } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 2 \int_0^1 x e^x f'(x) dx + \int_0^1 x^2 e^{2x} dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x) + x e^x)^2 dx = 0$$

$$\text{Suy ra } f'(x) + x e^x = 0, \forall x \in [0;1] \text{ (do } (f'(x) + x e^x)^2 \geq 0, \forall x \in [0;1])$$

$$\Rightarrow f'(x) = -x e^x \Rightarrow f(x) = (1-x) e^x + C$$

$$\text{Do } f(1) = 0 \text{ nên } f(x) = (1-x) e^x$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (1-x) e^x dx = (2-x) e^x \Big|_0^1 = e - 2.$$

Câu 6: Cho $\int_0^1 \frac{(x^2 + x) e^x}{x + e^{-x}} dx = a.e + b \ln(e + c)$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $P = a + 2b - c$.

A. $P = 1$.

B. $P = -1$.

C. $P = 0$.

D. $P = -2$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$\text{Ta có: } I = \int_0^1 \frac{(x^2 + x) e^x}{x + e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{(x+1) e^x x e^x}{x e^x + 1} dx.$$

$$\text{Đặt } t = x e^x + 1 \Rightarrow dt = (1+x) e^x dx.$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = e + 1.$$

$$\text{Khi đó: } I = \int_1^{e+1} \frac{t-1}{t} dt = \int_1^{e+1} \left(1 - \frac{1}{t} \right) dt = \left(t - \ln|t| \right) \Big|_1^{e+1} = e - \ln(e+1).$$

$$\text{Suy ra: } a = 1, b = -1, c = 1.$$

$$\text{Vậy: } P = a + 2b - c = -2.$$

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-\ln 2; \ln 2]$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \frac{1}{e^x + 1}$. Biết

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = a \ln 2 + b \ln 3 \quad (a; b \in \mathbb{Q}). \text{ Tính } P = a + b.$$

A. $P = \frac{1}{2}$.

B. $P = -2$.

C. $P = -1$.

D. $P = 2$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Gọi $I = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx$.

Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$.

Đổi cận: Với $x = -\ln 2 \Rightarrow t = \ln 2$; Với $x = \ln 2 \Rightarrow t = -\ln 2$.

Ta được $I = - \int_{\ln 2}^{-\ln 2} f(-t) dt = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-t) dt = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x) dx$.

Khi đó ta có: $2I = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx + \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x) dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} [f(x) + f(-x)] dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx$.

Xét $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx$. Đặt $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$

Đổi cận: Với $x = -\ln 2 \Rightarrow u = \frac{1}{2}$; $x = \ln 2 \Rightarrow u = 2$.

Ta được $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{e^x}{e^x(e^x + 1)} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{u(u+1)} du$

$= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du = (\ln|u| - \ln|u+1|) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \ln 2$

Vậy ta có $a = \frac{1}{2}$, $b = 0 \Rightarrow a + b = \frac{1}{2}$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_1^e \frac{f(\ln(x))}{x} dx = e$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int_0^e f(x) dx = 1$.

B. $\int_0^1 f(x) dx = 1$.

C. $\int_0^1 f(x) dx = e$.

D. $\int_0^e f(x) dx = e$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Sử dụng phương pháp đổi biến số. Đặt $t = \ln(x)$, suy ra $dt = \frac{1}{x} dx$.

Đổi cận:

x	1	e
t	0	1

Khi đó $\int_1^e \frac{f(\ln(x))}{x} dx = e \Leftrightarrow \int_0^1 f(t) dt = e$.

Câu 9: Cho tích phân $I = \int_1^e \frac{3 \ln x + 1}{x} dx$. Nếu đặt $t = \ln x$ thì

A. $I = \int_0^1 \frac{3t+1}{e^t} dt$. **B.** $I = \int_1^e \frac{3t+1}{t} dt$. **C.** $I = \int_1^e (3t+1) dt$. **D.** $I = \int_0^1 (3t+1) dt$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$. Đổi cận $x = e \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó $I = \int_1^e \frac{3 \ln x + 1}{x} dx = \int_0^1 (3t+1) dt$.

Câu 10: Biết $\int_e^{e^4} f(\ln x) \frac{1}{x} dx = 4$. Tính tích phân $I = \int_1^4 f(x) dx$.

A. $I = 8$. **B.** $I = 16$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = 4$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$.

x	e	e^4
t	1	4

$$\int_e^{e^4} f(\ln x) \frac{1}{x} dx = \int_1^4 f(t) dt = \int_1^4 f(x) dx.$$

Suy ra $I = \int_1^4 f(x) dx = 4$.

Câu 11: Biết tích phân $\int_0^{\ln 6} \frac{e^x}{1 + \sqrt{e^x + 3}} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$, với a, b, c là các số nguyên. Tính

$T = a + b + c$.

A. $T = -1$. **B.** $T = 0$. **C.** $T = 2$. **D.** $T = 1$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Đặt $t = \sqrt{e^x + 3} \Rightarrow t^2 = e^x + 3 \Rightarrow 2t dt = e^x dx$.

Đổi cận $\begin{cases} x = \ln 6 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 2 \end{cases}$.

Suy ra $\int_0^{\ln 6} \frac{e^x}{1 + \sqrt{e^x + 3}} dx = \int_2^3 \frac{2t dt}{1+t} = \int_2^3 \left(2 - \frac{2}{1+t} \right) dt = (2t - 2 \ln |t+1|) \Big|_2^3 = (6 - 2 \ln 4) - (4 - 2 \ln 3)$

$= 2 - 4 \ln 2 + 2 \ln 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 2 \end{cases}$

Vậy $T = 0$.

Câu 12: Cho $\int_0^3 e^{\sqrt{x+1}} \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = a.e^2 + b.e + c$. Với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = 1$.

B. $S = 2$.

C. $S = 0$.

D. $S = 4$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Xét $I = \int_0^3 e^{\sqrt{x+1}} \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$; đặt $u = \sqrt{x+1} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx$.

Đổi cận:

x	0	3
u	1	2

$$\Rightarrow I = \int_1^2 e^u 2du = 2e^u \Big|_1^2 = 2e^2 - 2e \Rightarrow a = 2, b = -2, c = 0, S = a + b + c = 0.$$

Câu 13: Cho $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx$ có kết quả dạng $I = \ln a + b$ với $a > 0, b \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2ab = -1$.

B. $2ab = 1$.

C. $-b + \ln \frac{3}{2a} = -\frac{1}{3}$.

D. $-b + \ln \frac{3}{2a} = \frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Đặt $\ln x + 2 = t \Leftrightarrow \ln x = t - 2 \Rightarrow \frac{1}{x} dx = dt$.

Đổi cận: khi $x = 1$ thì $t = 2$; khi $x = e$ thì $t = 3$.

$$\text{Khi đó } I = \int_2^3 \frac{t-2}{t^2} dt = \int_2^3 \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} \right) dt = \left(\ln |t| + \frac{2}{t} \right) \Big|_2^3 = \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Vậy $2ab = -1$.

Dạng 7: Tích phân hàm ẩn

1. Phương pháp

Phương pháp chung cho loại toán này là áp dụng kỹ thuật đổi biến, phương pháp từng phần và kỹ thuật đạo hàm..., ngoài ra ta có một vài dạng đặc trưng sau:

Loại 1: Biểu thức tích phân đưa về dạng: $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$

Cách giải:

$$+ \text{Ta có } u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = [u(x)f(x)]'$$

$$+ \text{Do đó } u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = h(x)$$

$$\text{Suy ra } u(x)f(x) = \int h(x)dx$$

$$\text{Suy ra được } f(x)$$

$$\text{Loại 2: Biểu thức tích phân đưa về dạng: } f'(x) + f(x) = h(x)$$

Cách giải:

$$+ \text{Nhân hai vế với } e^x \Rightarrow e^x.f'(x) + e^x.f(x) = e^x.h(x) \Leftrightarrow [e^x.f(x)]' = e^x.h(x)$$

$$\text{Suy ra } e^x.f(x) = \int e^x h(x)dx$$

$$\text{Suy ra được } f(x)$$

$$\text{Loại 3: Biểu thức tích phân đưa về dạng: } f'(x) - f(x) = h(x)$$

Cách giải:

$$+ \text{Nhân hai vế với } e^{-x} \Rightarrow e^{-x}.f'(x) + e^{-x}.f(x) = e^{-x}.h(x) \Leftrightarrow [e^{-x}.f(x)]' = e^{-x}.h(x)$$

$$\text{Suy ra } e^{-x}.f(x) = \int e^{-x}h(x)dx$$

$$\text{Suy ra được } f(x)$$

$$\text{Loại 4: Biểu thức tích phân đưa về dạng: } f'(x) + p(x)f(x) = h(x)$$

Cách giải:

$$+ \text{Nhân hai vế với } e^{\int p(x)dx} \Rightarrow f'(x).e^{\int p(x)dx} + p(x).e^{\int p(x)dx}.f(x) = h(x).e^{\int p(x)dx}$$

$$\Leftrightarrow \left[f(x).e^{\int p(x)dx} \right]' = h(x).e^{\int p(x)dx}$$

$$\text{Suy ra } f(x).e^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx}.h(x)dx$$

$$\text{Suy ra được } f(x)$$

$$\text{Công thức } \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $3f(x) + xf'(x) = x^{2018}$ với mọi $x \in [0;1]$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = \frac{1}{2018 \times 2021}$.

B. $I = \frac{1}{2019 \times 2020}$.

C. $I = \frac{1}{2019 \times 2021}$.

D. $I = \frac{1}{2018 \times 2019}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Từ giả thiết $3f(x) + xf'(x) = x^{2018}$, nhân hai vế cho x^2 ta được

$$3x^2 f(x) + x^3 f'(x) = x^{2020} \Leftrightarrow [x^3 f(x)]' = x^{2020}.$$

Suy ra $x^3 f(x) = \int x^{2020} dx = \frac{x^{2021}}{2021} + C$.

Thay $x=0$ vào hai vế ta được $C=0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^{2018}}{2021}$.

Vậy $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{2021} x^{2018} dx = \frac{1}{2021} \cdot \frac{1}{2019} x^{2019} \Big|_0^1 = \frac{1}{2021 \times 2019}$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;4]$, thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x} \sqrt{2x+1}$ với mọi $x \in [0;4]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $e^4 f(4) - f(0) = \frac{26}{3}$.

B. $e^4 f(4) - f(0) = 3e$.

C. $e^4 f(4) - f(0) = e^4 - 1$.

D. $e^4 f(4) - f(0) = 3$.

Lời giải

ĐÁP ÁN A

Nhân hai vế cho e^x để thu được đạo hàm đúng, ta được

$$e^x f(x) + e^x f'(x) = \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow [e^x f(x)]' = \sqrt{2x+1}.$$

Suy ra $e^x f(x) = \int \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{3} (2x+1) \sqrt{2x+1} + C$.

Vậy $e^4 f(4) - f(0) = \frac{26}{3}$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x) - 2018f(x) = 2018x^{2017}e^{2018x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2018$. Giá trị $f(1)$ bằng

- A. $2018e^{-2018}$. B. $2017e^{2018}$. C. $2018e^{2018}$. D. $2019e^{2018}$.

Lời giải

ĐÁP ÁN D

Nhân hai vế cho e^{-2018x} để thu được đạo hàm đúng, ta được

$$f'(x)e^{-2018x} - 2018f(x)e^{-2018x} = 2018x^{2017} \Leftrightarrow [f(x)e^{-2018x}]' = 2018x^{2017}.$$

$$\text{Suy ra } f(x)e^{-2018x} = \int 2018x^{2017} dx = x^{2018} + C.$$

$$\text{Thay } x=0 \text{ vào hai vế ta được } C = 2018 \Rightarrow f(x) = (x^{2018} + 2018)e^{2018x}.$$

$$\text{Vậy } f(1) = 2019e^{2018}.$$

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x) + xf(x) = 2xe^{-x^2}$ và $f(0) = -2$. Giá trị $f(1)$ bằng

- A. e . B. $\frac{1}{e}$. C. $\frac{2}{e}$. D. $-\frac{2}{e}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Nhân hai vế cho $e^{\frac{x^2}{2}}$ để thu được đạo hàm đúng, ta được

$$f'(x)e^{\frac{x^2}{2}} + f(x)xe^{\frac{x^2}{2}} = 2xe^{\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow \left[e^{\frac{x^2}{2}} f(x) \right]' = 2xe^{\frac{x^2}{2}}.$$

$$\text{Suy ra } e^{\frac{x^2}{2}} f(x) = \int 2xe^{\frac{x^2}{2}} dx = 2e^{\frac{x^2}{2}} + C.$$

$$\text{Thay } x=0 \text{ vào hai vế ta được } C = 0 \Rightarrow f(x) = 2e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

$$\text{Vậy } f(1) = 2e^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{e}.$$

Ví dụ 5: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $2f(x) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x}$. Tích phân

$$\int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{2}{15}$. D. $\frac{3}{5}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có: $2f(x) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x}$ (1).

Đặt $t = 1-x$, thay vào (1), ta được: $2f(1-t) + 3f(t) = \sqrt{t}$ hay $2f(1-x) + 3f(x) = \sqrt{x}$ (2).

Từ (1) & (2), ta được: $f(x) = \frac{3}{5}\sqrt{x} - \frac{2}{5}\sqrt{1-x}$.

Do đó, ta có: $\int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{5} \int_0^1 \sqrt{x} dx - \frac{2}{5} \int_0^1 \sqrt{1-x} dx = \frac{2}{5} - \frac{4}{15} = \frac{2}{15}$.

Cách 2. Công thức $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$

Lấy tích phân 2 vế ta được $2 \int_0^1 f(x) dx + 3 \int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx$

$$5 \int_0^1 f(x) dx = \frac{2}{3} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{2}{15}.$$

Chú ý: Ta có thể dùng công thức $\int_{x_1}^{x_2} f(ax+b) dx = \int_{ax_1+b}^{ax_2+b} f(x) dx$. Khi đó:

Từ $2f(x) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x}$ suy ra: $2 \int_0^1 f(x) dx + 3 \int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx$

$$\Leftrightarrow 2 \int_0^1 f(x) dx - 3 \int_1^0 f(x) dx = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx \Leftrightarrow 5 \int_0^1 f(x) dx = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{2}{15}.$$

Ví dụ 6: Cho $\int_1^2 f(x) dx = a$. Giá trị $\int_1^0 x.f(x^2+1) dx$ theo a là

- A. $2a$. B. $4a$. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{a}{4}$.

Hướng dẫn giải**ĐÁP ÁN C**

Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = 2$.

$$\text{Khi đó: } I = \frac{1}{2} \int_1^2 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) dx = \frac{a}{2}.$$

Ví dụ 7: Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn, có đạo hàm trên đoạn $[-6; 6]$. Biết rằng $\int_{-1}^2 f(x) dx = 8$ và

$$\int_1^3 f(-2x) dx = 3. \text{ Giá trị } \int_{-1}^6 f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. 1. B. e. C. -1. D. 14.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có $y = f(x)$ là hàm số chẵn nên $f(2x) = f(-2x)$ suy ra $\int_1^3 f(-2x)dx = \int_1^3 f(2x)dx = 3$.

Mặt khác: $\int_1^3 f(2x)dx = \frac{1}{2} \int_1^3 f(2x)d(2x) = \frac{1}{2} \int_2^6 f(x)dx = 3 \Rightarrow \int_2^6 f(x)dx = 6$.

Vậy $I = \int_{-1}^6 f(x)dx = \int_{-1}^2 f(x)dx + \int_2^6 f(x)dx = 8 + 6 = 14$.

Ví dụ 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = e$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.** $\int_0^1 f(x)dx = 1$. **B.** $\int_0^1 f(x)dx = e$. **C.** $\int_0^e f(x)dx = 1$. **D.** $\int_0^e f(x)dx = e$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$

Ta có $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_1^e f(\ln x) d(\ln x) = F(\ln x) \Big|_1^e = F(1) - F(0) = e$

Ta có $\int_0^1 f(x)dx = F(x) \Big|_0^1 = F(1) - F(0) = e$ nên B đúng.

Ví dụ 9: Cho $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục trong đoạn $[-1;1]$ và $\int_{-1}^1 f(x)dx = 2$. Kết quả $I = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+e^x} dx$ bằng

- A.** 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Cách 1: Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$.

Đổi cận $x = -1 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = -1$.

Ta được:

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+e^x} f(x) dx = - \int_1^{-1} \frac{1}{1+e^{-t}} f(-t) dt = \int_{-1}^1 \frac{e^t}{1+e^t} f(t) dt = \int_{-1}^1 \frac{e^x}{1+e^x} f(x) dx.$$

$$\text{Do đó: } 2I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+e^x} f(x) dx + \int_{-1}^1 \frac{e^x}{1+e^x} f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \Rightarrow I = 1.$$

Cách 2: Chọn $h(x) = x^2$ làm hàm chẵn. Ta có $\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$, do đó $f(x) = \frac{3}{2} h(x) = \frac{3}{2} x^2$.

$$\text{Khi đó } \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+e^x} dx = \int_{-1}^1 \frac{3x^2}{1+e^x} dx = 2.$$

Lời bình: Với cách làm này, các em chỉ cần nắm rõ nguyên tắc tìm một hàm số đại diện cho lớp hàm số thỏa mãn giả thiết bài toán là có thể dễ dàng tìm được kết quả bài toán bằng máy tính hoặc bằng phương pháp cơ bản với hàm số $y = f(x)$ khá đơn giản. Đối với bài toán này ta có thể chọn hàm số $h(x) = 1$ cho đơn giản hơn nữa.

Ví dụ 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trong đoạn $[1; e]$, biết $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = 1$, $f(e) = 1$. Giá trị

$$I = \int_1^e f'(x) \cdot \ln x dx \text{ bằng}$$

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_1^e f'(x) \ln x dx = f(x) \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = f(e) - \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = 1 - 1 = 0.$$

Ví dụ 11: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^1 f(x) dx = 2$; $\int_0^3 f(x) dx = 6$. Tính $I = \int_{-1}^1 f(|2x-1|) dx$

A. $I = \frac{2}{3}$.

B. $I = 4$.

C. $I = \frac{3}{2}$.

D. $I = 6$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Có } I = \int_{-1}^1 f(|2x-1|) dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(2x-1) dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x) d(1-2x) + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 f(2x-1) d(2x-1)$$

$$= -\frac{1}{2} \int_3^0 f(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^3 f(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 4.$$

Ví dụ 12: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số k để $\int_1^k (2x-1) dx = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

A. $\begin{cases} k=1 \\ k=2 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} k=1 \\ k=-2 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} k=-1 \\ k=-2 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} k=-1 \\ k=2 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$\text{Ta có } \int_1^k (2x-1) dx = \frac{1}{2} \int_1^k (2x-1) d(2x-1) = \frac{(2x-1)^2}{4} \Big|_1^k = \frac{(2k-1)^2}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\text{Mà } 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = 2$$

$$\text{Khi đó } \int_1^k (2x-1) dx = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \Leftrightarrow \frac{(2k-1)^2}{4} - \frac{1}{4} = 2 \Leftrightarrow (2k-1)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} k=2 \\ k=-1 \end{cases}.$$

Ví dụ 13: Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0; a]$ thỏa mãn $\begin{cases} f(x) \cdot f(a-x) = 1 \\ f(x) > 0, \forall x \in [0; a] \end{cases}$ và $\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} = \frac{ba}{c}$, trong đó b, c là hai số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó $b+c$ có giá trị thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. (11; 22). B. (0; 9). C. (7; 21). D. (2017; 2020).

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Đặt $t = a - x \Rightarrow dt = -dx$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = a; x = a \Rightarrow t = 0$

$$\text{Lúc đó } I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} = \int_a^0 \frac{-dt}{1+f(a-t)} = \int_0^a \frac{dx}{1+f(a-x)} = \int_0^a \frac{dx}{1+\frac{1}{f(x)}} = \int_0^a \frac{f(x)dx}{1+f(x)}$$

$$\text{Suy ra } 2I = I + I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} + \int_0^a \frac{f(x)dx}{1+f(x)} = \int_0^a 1dx = a$$

$$\text{Do đó } I = \frac{1}{2}a \Rightarrow b = 1; c = 2 \Rightarrow b + c = 3.$$

Cách 2: Chọn $f(x) = 1$ là một hàm thỏa các giả thiết. Dễ dàng tính được

$$I = \frac{1}{2}a \Rightarrow b = 1; c = 2 \Rightarrow b + c = 3.$$

3. Bài tập rèn luyện tốc độ

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4, \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 2$. Giá trị của tích phân $\int_0^3 f(x) dx$ bằng

- A. 2. B. 6. C. 4. D. 10.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

● Xét $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4$. Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x$, suy ra $2tdt = dx$.

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = 1 \rightarrow t = 1 \\ x = 9 \rightarrow t = 3 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } 4 = \int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^3 f(t) 2dt \Rightarrow \int_1^3 f(t) dt = 2.$$

● Xét $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 2$. Đặt $u = \sin x$, suy ra $du = \cos x dx$.

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \rightarrow u=0 \\ x=\frac{\pi}{2} \rightarrow u=1 \end{cases}$. Suy ra $2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = \int_0^1 f(t) dt$.

Vậy $I = \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 4$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4$, $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$. Giá trị của tích phân

$I = \int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $I = 6$.

B. $I = 2$.

C. $I = 3$.

D. $I = 1$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Xét $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4$.

Đặt $t = \tan x$, suy ra $dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx = (\tan^2 x + 1) dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow t=1 \end{cases}$. Khi đó $4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = \int_0^1 \frac{f(t)}{t^2+1} dt = \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1} dx$.

Từ đó suy ra $I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1} dx = 4 + 2 = 6$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = 1$, $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = 1$. Giá

trị của tích phân $I = \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

● Xét $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = 1$. Đặt $t = \cos^2 x$.

Suy ra

$$dt = -2 \sin x \cos x dx = -2 \cos^2 x \tan x dx = -2t \cdot \tan x dx \longrightarrow \tan x dx = -\frac{dt}{2t}.$$

$$\text{Đổi cận: } \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow t=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } 1 = A = -\frac{1}{2} \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{t} dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{x} dx \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{x} dx = 2.$$

$$\bullet \text{ Xét } B = \int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = 1. \text{ Đặt } u = \ln^2 x.$$

$$\text{Suy ra } du = \frac{2 \ln x}{x} dx = \frac{2 \ln^2 x}{x \ln x} dx = \frac{2u}{x \ln x} dx \Rightarrow \frac{dx}{x \ln x} = \frac{du}{2u}.$$

$$\text{Đổi cận: } \begin{cases} x=e \Rightarrow u=1 \\ x=e^2 \Rightarrow u=4 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } 1 = B = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{f(u)}{u} du = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{f(x)}{x} dx \Rightarrow \int_1^4 \frac{f(x)}{x} dx = 2.$$

$$\bullet \text{ Xét tích phân cần tính } I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx.$$

$$\text{Đặt } v = 2x, \text{ suy ra } \begin{cases} dx = \frac{1}{2} dv \\ x = \frac{v}{2} \end{cases}. \text{ Đổi cận: } \begin{cases} x=\frac{1}{2} \Rightarrow v=1 \\ x=2 \Rightarrow v=4 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(v)}{v} dv = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{x} dx + \int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx = 2 + 2 = 4.$$

Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0; 2]$. Biết $f(0) = 1$ và

Câu 4:

$$f(x)f(2-x) = e^{2x^2-4x} \text{ với mọi } x \in [0; 2]. \text{ Giá trị tích phân } I = \int_0^2 \frac{(x^3 - 3x^2)f'(x)}{f(x)} dx \text{ bằng}$$

A. $-\frac{14}{3}.$

B. $-\frac{32}{5}.$

C. $-\frac{16}{3}.$

D. $-\frac{16}{5}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$\text{Từ giả thiết } f(x)f(2-x) = e^{2x^2-4x} \xrightarrow{x=2} f(2) = 1.$$

Ta có $I = \int_0^2 \frac{(x^3 - 3x^2)f'(x)}{f(x)} dx$. Đặt $\begin{cases} u = x^3 - 3x^2 \\ dv = \frac{f'(x)}{f(x)} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (3x^2 - 6x) dx \\ v = \ln|f(x)| \end{cases}$.

Khi đó

$$I = (x^3 - 3x^2) \ln|f(x)| \Big|_0^2 - \int_0^2 (3x^2 - 6x) \ln|f(x)| dx$$

$$\stackrel{f(2)=1}{=} -3 \int_0^2 (x^2 - 2x) \ln|f(x)| dx = -3J.$$

Ta có $J = \int_0^2 (x^2 - 2x) \ln|f(x)| dx \stackrel{x=2-t}{=} \int_2^0 [(2-t)^2 - 2(2-t)] \ln|f(2-t)| d(2-t)$

$$= \int_2^0 [(2-x)^2 - 2(2-x)] \ln|f(2-x)| d(2-x) = \int_0^2 (x^2 - 2x) \ln|f(2-x)| dx.$$

Suy ra

$$2J = \int_0^2 (x^2 - 2x) \ln|f(x)| dx + \int_0^2 (x^2 - 2x) \ln|f(2-x)| dx$$

$$= \int_0^2 (x^2 - 2x) \ln|f(x)f(2-x)| dx$$

$$= \int_0^2 (x^2 - 2x) \ln e^{2x^2 - 4x} dx = \int_0^2 (x^2 - 2x)(2x^2 - 4x) dx = \frac{32}{15} \Rightarrow J = \frac{16}{15}.$$

Vậy $I = -3J = -\frac{16}{5}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ và thỏa mãn $2f(x) + f(-x) = \cos x$. Giá trị của

tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ bằng

A. $I = -2$.

B. $I = \frac{2}{3}$.

C. $I = \frac{3}{2}$.

D. $I = 2$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Từ giả thiết, thay x bằng $-x$ ta được $2f(-x) + f(x) = \cos x$.

Do đó ta có hệ

$$\begin{cases} 2f(x) + f(-x) = \cos x \\ 2f(-x) + f(x) = \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4f(x) + 2f(-x) = 2\cos x \\ f(x) + 2f(-x) = \cos x \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}\cos x.$$

Khi đó $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{1}{3} \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ và thỏa mãn $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$. Giá trị của tích phân

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{7}{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Từ giả thiết, thay x bằng $\frac{1}{x}$ ta được $f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{3}{x}$.

Do đó ta có hệ

$$\begin{cases} f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x \\ f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x \\ 4f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{6}{x} \end{cases} \longrightarrow f(x) = \frac{2}{x} - x.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{2}{x^2} - 1 \right) dx = \left(-\frac{2}{x} - x \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{3}{2}.$$

Cách khác. Từ $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x \Rightarrow f(x) = 3x - 2f\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$\text{Khi đó } I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(3 - 2 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \right) dx = 3 \int_{\frac{1}{2}}^2 dx - 2 \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} dx.$$

$$\text{Xét } J = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} dx. \text{ Đặt } t = \frac{1}{x}, \text{ suy ra } dt = -\frac{1}{x^2} dx = -t^2 dx \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt.$$

$$\text{Đổi cận: } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \rightarrow t = 2 \\ x = 2 \rightarrow t = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } J = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} dx = \int_2^{\frac{1}{2}} t f(t) \left(-\frac{1}{t^2} \right) dt = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(t)}{t} dt = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx = I.$$

$$\text{Vậy } I = 3 \int_{\frac{1}{2}}^2 dx - 2I \Rightarrow I = \int_{\frac{1}{2}}^2 dx = \frac{3}{2}.$$

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 15x^4 + 12x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A. $\frac{5}{2}$.

B. $\frac{9}{2}$.

C. 8.

D. 10.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$\text{Nhận thấy được } [f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = [f(x) \cdot f'(x)]'.$$

$$\text{Do đó giả thiết tương đương với } [f(x) \cdot f'(x)]' = 15x^4 + 12x.$$

$$\text{Suy ra } f(x) \cdot f'(x) = \int (15x^4 + 12x) dx = 3x^5 + 6x^2 + C \xrightarrow{f(0)=f'(0)=1} C = 1$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot f'(x) = 3x^5 + 6x^2 + 1$$

$$\Rightarrow \int f(x) \cdot f'(x) dx = \int (3x^5 + 6x^2 + 1) dx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^6}{2} + 2x^3 + x + C'.$$

$$\text{Thay } x=0 \text{ vào hai vế ta được } \frac{f^2(0)}{2} = C' \Rightarrow C' = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } f^2(x) = x^6 + 4x^3 + 2x + 1 \Rightarrow f^2(1) = 8.$$

Câu 8: Cho $\int_{-1}^5 f(x) dx = 4$. Giá trị $\int_{-1}^2 f(2x+1) dx$ bằng

A. 2.

B. $\frac{5}{2}$.

C. 4.

D. $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$$\text{Đặt } 2x+1 = u \Rightarrow 2dx = du \Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_{-1}^5 f(u) du = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$$

Câu 9: Cho $\int_{-1}^5 f(x) dx = 5$, $\int_4^5 f(t) dt = -2$ và $\int_{-1}^4 g(u) du = \frac{1}{3}$. Tính $\int_{-1}^4 (f(x) + g(x)) dx$ bằng

A. $\frac{8}{3}$

B. $\frac{22}{3}$

C. $-\frac{20}{3}$

D. $\frac{10}{3}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$$\text{Ta có } \int_5^4 f(t) dt = -\int_5^4 f(t) dt = -2 \Rightarrow \int_5^4 f(t) dt = \int_5^4 f(x) dx = 2.$$

$$\text{Suy ra } \int_{-1}^5 f(x) dx + \int_4^5 f(t) dt = \int_{-1}^5 f(x) dx + \int_5^4 f(x) dx = \int_{-1}^4 f(x) dx = 7.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^4 (f(x) + g(x)) dx + \int_{-1}^4 f(x) dx + \int_{-1}^4 g(x) dx \\ &= \int_{-1}^4 f(x) dx + \int_5^4 f(x) dx = \int_{-1}^4 g(u) du = 7 + \frac{1}{3} = \frac{22}{3}. \end{aligned}$$

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(\tan x) = \cos^4 x, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị $I = \int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{2+\pi}{8}$.

B. 1.

C. $\frac{2+\pi}{4}$.

D. $\frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$$\begin{aligned} f(\tan x) = \cos^4 x &\Leftrightarrow f(\tan x) = \left(\frac{1}{\tan^2 x + 1} \right)^2 \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{2+\pi}{8} \end{aligned}$$

Dạng 8: Bất đẳng thức tích phân

1. Phương pháp

Áp dụng các bất đẳng thức:

+ Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

+ Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $m \leq f(x) \leq M$ thì $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

+ Nếu $f(x), g(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì $\left(\int_a^b f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx$ dấu "=" xảy ra khi

và chỉ khi $f(x) = k \cdot g(x)$.

+ Bất đẳng thức AM-GM

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$. Giá trị phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. 1.

B. $\frac{7}{5}$.

C. $\frac{7}{4}$.

D. 4.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Dùng tích phân từng phần ta có $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{x^3}{3} f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 f'(x) dx$. Kết hợp với giả thiết $f(1)=0$, ta suy ra $\int_0^1 x^3 f'(x) dx = -1$.

Theo Holder $(-1)^2 = \left(\int_0^1 x^3 f'(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 x^6 dx \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{x^7}{7} \Big|_0^1 \cdot 7 = 1$.

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $f'(x) = kx^3$, thay vào $\int_0^1 x^3 f'(x) dx = -1$ ta được $k = -7$.

Suy ra $f'(x) = -7x^3 \Rightarrow f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + C$

$\xrightarrow{f(1)=0} C = \frac{7}{4} \Rightarrow f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{7}{5}$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 x^5 f(x) dx = \frac{11}{78}$ và

$\int_0^1 f'(x) d(f(x)) = \frac{4}{13}$. Giá trị $f(2)$ bằng

A. 2.

B. $\frac{251}{7}$.

C. $\frac{256}{7}$.

D. $\frac{261}{7}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Theo Holder $\left(\frac{2}{13} \right)^2 = \left(\int_0^1 x^6 f'(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 x^{12} dx \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{13} \cdot \frac{4}{13} = \frac{4}{169}$.

$\Rightarrow f'(x) = 2x^6 \Rightarrow f(x) = \frac{2}{7}x^7 + C \xrightarrow{f(1)=1} C = \frac{5}{7}$.

Vậy $f(x) = \frac{2}{7}x^7 + \frac{5}{7} \Rightarrow f(2) = \frac{261}{7}$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=2, f(0)=0$ và $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 4$. Tích phân $\int_0^1 [f^3(x) + 2018x] dx$ bằng

- A. 0. B. 1011. C. 2018. D. 2022.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Theo Holder $2^2 = \left(\int_0^1 f'(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 dx \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 1 \cdot 4 = 4$.

$\Rightarrow f'(x) = 2 \Rightarrow f(x) = 2x + C \xrightarrow{f(0)=0} C = 0$.

Vậy $f(x) = 2x \Rightarrow \int_0^1 [f^3(x) + 2018x] dx = 1011$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1) = ef(0)$ và $\int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)} + \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \leq 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $f(1) = \sqrt{\frac{2e}{e-1}}$. B. $f(1) = \frac{2(e-2)}{e-1}$.
C. $f(1) = \sqrt{\frac{2e^2}{e^2-1}}$. D. $f(1) = \sqrt{\frac{2(e-2)}{e-1}}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có $\int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)} + \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{f^2(x)} + [f'(x)]^2 \right] dx \stackrel{\text{AM-GM}}{\geq} 2 \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx$

$= 2 \ln |f(x)| \Big|_0^1 = 2 \ln |f(1)| - 2 \ln |f(0)| = 2 \ln \left| \frac{f(1)}{f(0)} \right| = 2 \ln e = 2$.

Mà $\int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)} + \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \leq 2$ nên dấu "=" xảy ra, tức là $f'(x) = \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)f'(x) = 1$

$\Rightarrow \int f(x)f'(x) dx = \int x dx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} = x + C \Rightarrow f(x) = \sqrt{2x + 2C}$.

Theo giả thiết $f(1) = ef(0)$ nên ta có $\sqrt{2+2C} = e\sqrt{2C} \Leftrightarrow 2+2C = e^2 2C \Leftrightarrow C = \frac{1}{e^2-1}$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{2x + \frac{2}{e^2 - 1}} \Rightarrow f(1) = \sqrt{2 + \frac{2}{e^2 - 1}} = \sqrt{\frac{2e^2}{e^2 - 1}}.$$

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên $[0;1]$, có đạo hàm dương và liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(0)=1$ và $\int_0^1 [f^3(x) + 4[f'(x)]^3] dx \leq 3 \int_0^1 f'(x) f^2(x) dx$. Giá trị $I = \int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. $2(\sqrt{e}-1)$. B. $2(e^2-1)$. C. $\frac{\sqrt{e}-1}{2}$. D. $\frac{e^2-1}{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho ba số dương ta có

$$\begin{aligned} f^3(x) + 4[f'(x)]^3 &= 4[f'(x)]^3 + \frac{f^3(x)}{2} + \frac{f^3(x)}{2} \\ &\geq 3\sqrt[3]{4[f'(x)]^3 \cdot \frac{f^3(x)}{2} \cdot \frac{f^3(x)}{2}} = 3f'(x)f^2(x). \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 [f^3(x) + 4[f'(x)]^3] dx \geq 3 \int_0^1 f'(x)f^2(x) dx.$$

Mà $\int_0^1 [f^3(x) + 4[f'(x)]^3] dx \leq 3 \int_0^1 f'(x)f^2(x) dx$ nên dấu "=" xảy ra, tức là

$$4[f'(x)]^3 = \frac{f^3(x)}{2} = \frac{f^3(x)}{2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \frac{1}{2} \int dx \Rightarrow \ln|f(x)| = \frac{1}{2}x + C \Rightarrow f(x) = e^{\frac{1}{2}x+C}.$$

$$\text{Theo giả thiết } f(0)=1 \Rightarrow C=0 \Rightarrow f(x) = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = 2(\sqrt{e}-1).$$

3. Bài tập rèn luyện tốc độ

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;\pi]$, thỏa mãn $\int_0^\pi f'(x) \sin x dx = -1$ và

$$\int_0^\pi f^2(x) dx = \frac{2}{\pi}. \text{ Giá trị tích phân } \int_0^\pi xf(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $-\frac{6}{\pi}$. B. $-\frac{4}{\pi}$. C. $\frac{2}{\pi}$. D. $\frac{4}{\pi}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Theo Holder $(1)^2 = \int_0^\pi f(x) \cos x dx \leq \int_0^\pi f^2(x) dx \int_0^\pi \cos^2 x dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1.$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi} \cos x \Rightarrow \int_0^\pi x f(x) dx = \int_0^\pi \frac{2x \cos x}{\pi} dx = -\frac{4}{\pi}.$$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa $f(1)=0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{\pi^2}{8}$ và

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) f(x) dx = \frac{1}{2}. \text{ Giá trị của tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{1}{\pi}.$

B. $\frac{2}{\pi}.$

C. $\frac{\pi}{2}.$

D. $\pi.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Theo Holder

$$\left(-\frac{\pi}{4}\right)^2 = \left(\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) f'(x) dx\right)^2 \leq \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{8}.$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \Rightarrow f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + C \xrightarrow{f(1)=0} C = 0.$$

$$\text{Vậy } f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{2}{\pi}.$$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên $[0;1]$, có đạo hàm dương liên và tục trên $[0;1]$, thỏa

$$\text{mãn } \int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}} dx \geq 1 \text{ và } f(0)=1, f(1)=e^2. \text{ Giá trị của } f\left(\frac{1}{2}\right) \text{ bằng}$$

A. 1.

B. 4.

C. $\sqrt{e}.$

D. $e.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Hàm dưới dấu tích phân là $\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{f'(x)}{f(x)}}$, $\forall x \in [0;1]$. Điều này làm ta liên tưởng đến đạo hàm

đúng $\frac{f'(x)}{f(x)}$, muốn vậy ta phải đánh giá theo AM – GM như sau:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + mx \geq 2\sqrt{m} \cdot \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}} \text{ với } m \geq 0 \text{ và } x \in [0;1].$$

Do đó ta cần tìm tham số $m \geq 0$ sao cho

$$\int_0^1 \left[\frac{f'(x)}{f(x)} + mx \right] dx \geq 2\sqrt{m} \cdot \int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}} dx$$

hay

$$\begin{aligned} \ln|f(x)| \Big|_0^1 + m \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 &\geq 2\sqrt{m} \cdot 1 \Leftrightarrow \ln|f(1)| - \ln|f(0)| + \frac{m}{2} \\ &\geq 2\sqrt{m} \Leftrightarrow 2 - 0 + \frac{m}{2} \geq 2\sqrt{m}. \end{aligned}$$

Để dấu "=" xảy ra thì ta cần có $2 - 0 + \frac{m}{2} = 2\sqrt{m} \Leftrightarrow m = 4$.

Với $m = 4$ thì đẳng thức xảy ra nên $\frac{f'(x)}{f(x)} = 4x$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int 4x dx \Leftrightarrow \ln|f(x)| = 2x^2 + C \Rightarrow f(x) = e^{2x^2+C}.$$

Theo giả thiết $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=e^2 \end{cases} \Rightarrow C=0 \Rightarrow f(x)=e^{2x^2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}.$

Cách 2. Theo Holder

$$1^2 \leq \left(\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}} dx \right)^2 = \left(\int_0^1 \sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{f'(x)}{f(x)}} dx \right)^2 \leq \int_0^1 x dx \cdot \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{f(1)}{f(0)} = 1.$$

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $\frac{f'(x)}{f(x)} = kx$, thay vào $\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}} dx = 1$ ta được $k = 4$.

Suy ra $\frac{f'(x)}{f(x)} = 4x$. (làm tiếp như trên)

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 [f(x)f'(x)]^2 dx \leq 1$ và

$f(0)=1, f(1)=\sqrt{3}$. Giá trị của $f\left(\frac{1}{2}\right)$ bằng

A. $\sqrt{2}$.

B. 3.

C. $\sqrt{e}$.

D. e .

Lời giải

ĐÁP ÁN A

Hàm dưới dấu tích phân là $[f(x)f'(x)]^2$. Điều này làm ta liên tưởng đến đạo hàm đúng $f(x)f'(x)$, muốn vậy ta phải đánh giá theo AM – GM như sau:

$$\left[f(x)f'(x) \right]^2 + m \geq 2\sqrt{m} \cdot f(x)f'(x) \text{ với } m \geq 0.$$

Do đó ta cần tìm tham số $m \geq 0$ sao cho

$$\int_0^1 \left(\left[f(x)f'(x) \right]^2 + m \right) dx \geq 2\sqrt{m} \int_0^1 f(x)f'(x) dx.$$

hay

$$1 + m \geq 2\sqrt{m} \cdot \frac{f^2(x)}{2} \Big|_0^1 \Leftrightarrow 1 + m \geq 2\sqrt{m}.$$

Để dấu "=" xảy ra thì ta cần có $1 + m = 2\sqrt{m} \Leftrightarrow m = 1$.

Với $m = 1$ thì đẳng thức xảy ra nên $\left[f(x)f'(x) \right]^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)f'(x) = 1 \\ f(x)f'(x) = -1 \end{cases}$.

$$\bullet f(x)f'(x) = -1 \Rightarrow \int_0^1 f(x)f'(x) dx = -\int_0^1 dx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} \Big|_0^1 = -x \Big|_0^1 \Leftrightarrow 1 = -1. \text{ (vô lý)}$$

$$\bullet f(x)f'(x) = 1 \Rightarrow \int f(x)f'(x) dx = \int dx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} = x + C \Rightarrow f(x) = \sqrt{2x + 2C}.$$

$$\text{Theo giả thiết } \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \sqrt{2x + 1} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}.$$

$$\text{Cách 2. Ta có } \int_0^1 f(x)f'(x) dx = \frac{f^2(x)}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} [f^2(1) - f^2(0)] = 1.$$

$$\text{Theo Holder } 1^2 = \left(\int_0^1 1 \cdot f(x)f'(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 1^2 dx \cdot \int_0^1 \left[f(x)f'(x) \right]^2 dx \leq 1 \cdot 1 = 1.$$

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $f'(x)f(x) = k$, thay vào $\int_0^1 f(x)f'(x) dx = 1$ ta được $k = 1$. Suy ra $f'(x)f(x) = 1$. (làm tiếp như trên)

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1; 2]$, thỏa mãn

$$\int_1^2 \frac{\left[f'(x) \right]^2}{xf(x)} dx \leq 24 \text{ và } f(1) = 1, f(2) = 16. \text{ Giá trị của } f(\sqrt{2}) \text{ bằng}$$

A. 1.

B. $\sqrt{2}$.

C. 2.

D. 4.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Hàm dưới dấu tích phân là $\frac{[f'(x)]^2}{xf(x)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{[f'(x)]^2}{f(x)}$. Điều này làm ta liên tưởng đến đạo hàm đúng $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$, muốn vậy ta phải đánh giá theo AM – GM như sau:

$$\frac{[f'(x)]^2}{xf(x)} + mx \geq 2\sqrt{m} \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} \text{ với } m \geq 0 \text{ và } x \in [1; 2].$$

Do đó ta cần tìm tham số $m \geq 0$ sao cho

$$\int_1^2 \left(\frac{[f'(x)]^2}{xf(x)} + mx \right) dx \geq 2\sqrt{m} \int_1^2 \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx$$

hay

$$24 + \frac{2m}{3} \geq 4\sqrt{m} \sqrt{f(x)} \Big|_1^2 \Leftrightarrow 24 + \frac{2m}{3} \geq 4\sqrt{m} [\sqrt{f(2)} - \sqrt{f(1)}] \Leftrightarrow 24 + \frac{2m}{3} \geq 12\sqrt{m} \Leftrightarrow m = 16.$$

Để dấu "=" xảy ra thì ta cần có $24 + \frac{2m}{3} = 12\sqrt{m} \Leftrightarrow m = 16$.

Với $m = 16$ thì đẳng thức xảy ra nên $\frac{[f'(x)]^2}{xf(x)} = 16x \Rightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = 2x$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = \int 2x dx \Leftrightarrow \sqrt{f(x)} = x^2 + C \Rightarrow f(x) = (x^2 + C)^2.$$

Theo giả thiết $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 16 \end{cases} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = x^4 \Rightarrow f(\sqrt{2}) = 4.$

Cách 2. Ta có $\int_1^2 \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2 \int_1^2 \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} \Big|_1^2 = 2[\sqrt{f(2)} - \sqrt{f(1)}] = 6.$

Theo Holder $6^2 = \left(\int_1^2 \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx \right)^2 = \left(\int_1^2 \sqrt{x} \cdot \frac{f'(x)}{\sqrt{xf(x)}} dx \right)^2 \leq \int_1^2 x dx \cdot \int_1^2 \frac{[f'(x)]^2}{xf(x)} dx \leq \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 \cdot 24 = 36.$

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $\frac{f'(x)}{\sqrt{xf(x)}} = k\sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = kx$, thay vào $\int_1^2 \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 6$ ta được $k = 4$.

Suy ra $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = 4x$. (làm tiếp như trên)