

Câu 1.(3,50 điểm) Giải và biện luận bất phương trình sau theo tham số m :

$$\sqrt{x+2\sqrt{mx-m^2}} + \sqrt{x-2\sqrt{mx-m^2}} \leq 2\sqrt{m} \text{ với } m > 0.$$

Câu 2.(3,50 điểm) Cho bốn số thực p, q, m, n thỏa mãn hệ thức

$$(q-n)^2 + (p-m)(pn-qm) < 0.$$

Chứng minh rằng hai phương trình

$$x^2 + px + q = 0 \text{ và } x^2 + mx + n = 0$$

đều có các nghiệm phân biệt và các nghiệm của chúng nằm xen kẽ nhau khi biểu diễn trên trục số.

Câu 3.(4,00 điểm) Cho tam giác ABC có các cạnh $BC = a, AC = b, AB = c$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác.

a) Chứng minh rằng $a.IA^2 + b.IB^2 + c.IC^2 = abc$.

b) Chứng minh rằng $\sqrt{a(bc - IA^2)} + \sqrt{b(ca - IB^2)} + \sqrt{c(ab - IC^2)} \leq \sqrt{6abc}$.

Hãy chỉ ra một trường hợp xảy ra dấu đẳng thức.

Câu 4.(4,00 điểm) Cho x, y, z là 3 số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = xy + yz + 2019zx$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = xy + yz + 2zx$.

Câu 5.(3,00 điểm) Cho dãy số thực (x_n) thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} 0 < x_n < 1 \\ x_{n+1}(1-x_n) \geq \frac{1}{4}, \forall n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng $x_n > \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \forall n = 1, 2, 3, \dots$

b) Tìm giới hạn của dãy (x_n) .

Câu 6.(2,00 điểm) Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn

i) $f(2020) = 2019$;

ii) $f(x) \cdot f_4(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$, trong đó kí hiệu $f_4(x) = f(f(f(f(x))))$.

Hãy tính $f(2018)$.

-----Hết-----

Thí sinh không sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ kí giám thị 1: Chữ kí giám thị 2:

HƯỚNG DẪN CHẤM THI

(Gồm có 5 trang)

1. Hướng dẫn chung

- Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án mà vẫn đúng thì cho đủ điểm từng phần như hướng dẫn quy định.
- Việc chi tiết hóa thang điểm (nếu có) so với thang điểm chấm phải bảo đảm không sai lệch với hướng dẫn chấm và được thống nhất thực hiện trong Hội đồng chấm thi.
- Điểm bài thi không làm tròn số.

2. Đáp án và thang điểm

CÂU	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
1	Giải và biện luận bất phương trình sau theo m : $\sqrt{x+2\sqrt{mx-m^2}} + \sqrt{x-2\sqrt{mx-m^2}} \leq 2\sqrt{m} \text{ với } m > 0.$	3,50 đ
	Điều kiện: $\begin{cases} mx - m^2 \geq 0 \\ x + \sqrt{mx - m^2} \geq 0 \\ x - \sqrt{mx - m^2} \geq 0 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq m \text{ (1).}$	0,50 đ
	Đặt $t = 2\sqrt{mx - m^2}; t \geq 0$. Thì $x = \frac{t^2 + 4m^2}{4m}$; $\sqrt{x + 2\sqrt{mx - m^2}} = \sqrt{\frac{t^2 + 4m^2}{4m}} + t = \sqrt{\frac{(t + 2m)^2}{4m}} = \frac{ t + 2m }{2\sqrt{m}};$ Và $\sqrt{x - 2\sqrt{mx - m^2}} = \sqrt{\frac{t^2 + 4m^2}{4m}} - t = \sqrt{\frac{(t - 2m)^2}{4m}} = \frac{ t - 2m }{2\sqrt{m}}.$	1,00 đ
	Khi đó bất phương trình đã cho là: $ t + 2m + t - 2m \leq 4m, m > 0 \text{ (2).}$	0,50 đ
	Vì $m > 0, t \geq 0$ nên $ t + 2m = t + 2m$ nên: $(2) \Leftrightarrow t + 2m + t - 2m \leq 4m \Leftrightarrow t - 2m \leq 2m - t, m \geq 0$ $\Rightarrow t - 2m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 2m$	0,50 đ
	Nghĩa là $0 \leq 2\sqrt{mx - m^2} \leq 2m \Leftrightarrow m^2 \leq mx \leq 2m^2 \Leftrightarrow m \leq x \leq 2m$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = [m; 2m]$.	1,00 đ
2	Cho 4 số thực p, q, m, n thỏa mãn hệ thức $(q - n)^2 + (p - m)(pn - qm) < 0 \text{ (1).}$ Chứng minh rằng 2 phương trình $x^2 + px + q = 0 \text{ (2)}$ và $x^2 + mx + n = 0 \text{ (3)}$ đều có các nghiệm phân biệt và các nghiệm của chúng nằm xen kẽ nhau khi biểu diễn trên trục số.	3,50 đ
	Từ điều kiện $(q - n)^2 + (p - m)(pn - qm) < 0$ suy ra $p - m \neq 0$.	0,50 đ

	Các phương trình (2) và (3) đều có hệ số $a = 1 > 0$ nên các parabol biểu diễn đều có bề lõm quay lên trên.	0,50 đ
	Hai pt có nghiệm phân biệt và nằm xen kẽ nhau khi biểu diễn trên trục số khi và chỉ khi đồ thị các hàm số $y = x^2 + px + q$ (C) và $y = x^2 + mx + n$ (C') cắt nhau tại 1 điểm nằm dưới trục hoành (4).	0,50 đ
	Hoành độ giao điểm của (C) và (C') là nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = x^2 + mx + n \Leftrightarrow x = \frac{n - q}{p - m}.$	0,50 đ
	Tung độ giao điểm của (C) và (C') là $y = \left(\frac{n - q}{p - m}\right)^2 + p\left(\frac{n - q}{p - m}\right) + q$ $= \frac{1}{(p - m)^2} \left[(n - q)^2 + p(n - q)(p - m) + q(p - m)^2 \right]$ $= \frac{1}{(p - m)^2} \left[(n - q)^2 + (p - m)(pn - qm) \right] < 0 \text{ (do (3)).}$	1,00 đ
	Vậy (4) được chứng minh, nên khẳng định của đề bài đã chứng minh xong.	0,50 đ
3		4,00 đ
	a) Chứng minh $a.IA^2 + b.IB^2 + c.IC^2 = abc$	2,50 đ
	Giả sử đường tròn (I) tiếp xúc với BC, CA, AB theo thứ tự tại D, E, F. Gọi K là điểm đối xứng của I qua AC.	0,50 đ
	Ta có $\frac{S_{AFIE}}{S_{ABC}} = \frac{S_{AIK}}{S_{ABC}} = \frac{AI \cdot AK}{AB \cdot AC} = \frac{IA^2}{bc}.$	0,50 đ
	Tương tự $\frac{S_{BDIF}}{S_{ABC}} = \frac{IB^2}{ca}; \frac{S_{CEID}}{S_{ABC}} = \frac{IC^2}{ab}.$	0,50 đ
	Suy ra $\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = \frac{S_{AFIE} + S_{BDIF} + S_{CEID}}{S_{ABC}} = 1$	0,50 đ
	Suy ra $a.IA^2 + b.IB^2 + c.IC^2 = abc.$	0,50 đ
	b) Chứng minh $\sqrt{a(bc - IA^2)} + \sqrt{b(ca - IB^2)} + \sqrt{c(ab - IC^2)} \leq \sqrt{6abc}$	1,50 đ
	Áp dụng bất đẳng thức Bunhicovski ta có $\sqrt{a(bc - IA^2)} + \sqrt{b(ca - IB^2)} + \sqrt{c(ab - IC^2)}$ $\leq \sqrt{(1+1+1) \left[a(bc - IA^2) + b(ca - IB^2) + c(ab - IC^2) \right]}$ $= \sqrt{3 \left[3abc - (aIA^2 + bIB^2 + cIC^2) \right]} = \sqrt{6abc}.$	0,50 đ
	Dễ thấy khi $a = b = c$ hay tam giác ABC đều thì dấu đẳng thức xảy ra.	0,50 đ
4	Cho x, y, z là 3 số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1.$	4,00 đ
	a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = xy + yz + 2019zx$	2,00 đ
	Ta có: $0 \leq (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 1 + 2(xy + yz + zx)$	0,50 đ

	Suy ra $xy + yz + zx \geq -\frac{1}{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x + y + z = 0$.	
	Do vậy $P = (xy + yz + zx) + 2018zx \geq -\frac{1}{2} + 2018zx \geq -\frac{1}{2} - 2018\left(\frac{z^2 + x^2}{2}\right) \geq -\frac{1}{2} - \frac{2018}{2} = -\frac{2019}{2}.$	0,50 đ
	Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \\ x = -z \\ z^2 + x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0, x = -z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$ Vậy min $P = -\frac{2019}{2}$ khi $y = 0, x = -z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$	1,00 đ
	b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = xy + yz + 2zx$.	2,00 đ
	Xét các giá trị dương của x, y, z . Vì $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nên ta có thể đặt $\begin{cases} y = \cos \alpha \\ x = \sin \alpha \cos \beta, \text{ với } \alpha, \beta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \\ z = \sin \alpha \sin \beta \end{cases}$	0,50 đ
	Thế thì $Q = y(x + z) + 2xz = \cos \alpha \sin \alpha (\cos \beta + \sin \beta) + 2 \sin^2 \alpha \sin \beta \cos \beta.$	
	Vì $\alpha, \beta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $Q \leq \sqrt{2} \cos \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha (1).$ Dấu “=” xảy ra khi $\cos \beta = \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}.$	0,50 đ
	Biến đổi (1) với dạng $Q \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\alpha + \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\sqrt{2} \sin 2\alpha - \cos 2\alpha) \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$	0,50 đ
	Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\sin 2\alpha} = \frac{-1}{\cos 2\alpha} \\ \sqrt{2} \sin 2\alpha - \cos 2\alpha = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ Suy ra $\begin{cases} \sin \alpha = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{6}} \\ \cos \alpha = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{6}} \end{cases}$; tức là $y = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{6}}, x = z = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{12}}.$ Vậy $\max Q = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ khi $y = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{6}}, x = z = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{12}}.$	0,50 đ
5	Cho dãy số thực (x_n) thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} 0 < x_n < 1 \\ x_{n+1}(1 - x_n) \geq \frac{1}{4}, \forall n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$ a) Chứng minh rằng $x_n > \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \forall n = 1, 2, 3, \dots$	3,00 đ

	b) Tìm giới hạn của dãy (x_n) .	
	a) Chứng minh rằng $x_n > \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \forall n = 1, 2, 3, \dots$	1,50 đ
	Ta chứng minh rằng bằng quy nạp: + Với $n = 1$, bất đẳng thức đúng.	0,50 đ
	+ Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$. Vì $x_k > \frac{1}{2} - \frac{1}{2k} \Rightarrow 1 - x_k < \frac{1}{2} + \frac{1}{2k} = \frac{k+1}{2k}$.	0,50 đ
	Lại có: $x_{k+1}(1 - x_k) \geq \frac{1}{4} \Rightarrow x_{k+1} > \frac{2k}{4(k+1)} = \frac{k}{2(k+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(k+1)}$. Vậy bất đẳng thức đúng với $n = k+1$. Vậy bất đẳng thức đúng với $\forall n \in \mathbb{N}^*$.	0,50 đ
	b) Tìm giới hạn của dãy (x_n)	1,50 đ
	Ta có $(2x_n - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x_n(1 - x_n) \leq \frac{1}{4}$. Kết hợp với (2) ta có: $x_n(1 - x_n) \leq x_{n+1}(1 - x_n) \Rightarrow x_n \leq x_{n+1}$, dãy tăng.	0,50 đ
	Hơn nữa, theo (1) dãy bị chặn, nên tồn tại giới hạn $\lim x_n = x_0$.	0,50 đ
	Lấy giới hạn bất đẳng thức $x_{n+1}(1 - x_n) \geq \frac{1}{4}$ ta được $x_0(1 - x_0) \geq \frac{1}{4} \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$. Vậy $\lim x_n = \frac{1}{2}$.	0,50 đ
6	Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn i) $f(2020) = 2019$; ii) $f(x) \cdot f_4(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$, trong đó $f_4(x) = f(f(f(f(x))))$. Hãy tính $f(2018)$.	2,00 đ
	Kí hiệu $f_2(x) = f(f(x)), f_3(x) = f(f(f(x)))$. Gọi D_f là tập giá trị của hàm số $f(x)$. Từ (i) suy ra $2019 \in D_f$; từ $f(x) \cdot f_4(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f_4(2020) = \frac{1}{2019} \in D_f$ và $xf_3(x) = 1, \forall x \in D_f$.	0,50 đ
	Do f liên tục trên $D := \left[\frac{1}{2019}; 2019 \right] \subset D_f$ nên $f_3(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in D$; Suy ra f là đơn ánh trên D và do f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên f nghịch biến trên D .	0,50 đ
	Giả sử tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) > \frac{1}{x_0}$ (1). Do là hàm nghịch biến nên	

$f_2(x_0) < f\left(\frac{1}{x_0}\right) (2).$ Và $\frac{1}{x_0} = f_3(x_0) > f_2\left(\frac{1}{x_0}\right)$ suy ra $f\left(\frac{1}{x_0}\right) < f_3\left(\frac{1}{x_0}\right) = x_0 (3).$ Từ (2) và (3) suy ra $x_0 > f_2(x_0)$ hay $f(x_0) < f_3(x_0) = \frac{1}{x_0}$, mâu thuẫn với (1).	0,50 đ
Tương tự, cũng không tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) < \frac{1}{x_0}$. Vậy $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in D$. Do $2018 \in D$ nên suy ra $f(2018) = \frac{1}{2018}$.	0,50 đ