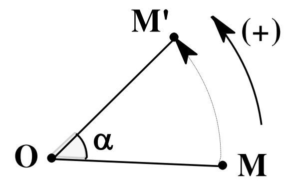
Chủ đề 2: PHÉP QUAY

I- LÝ THUYẾT:

1. Định nghĩa: Cho điểm O và ***góc lượng giác*** α.



Phép biến hình biến *O* thành chính nó, biến mỗi điểm *M* khác *O* thành điểm M’ sao cho $OM = OM'$ và góc lượng giác $(OM;OM') = \alpha$.

Ký hiệu: $Q_{(O;\alpha)}$

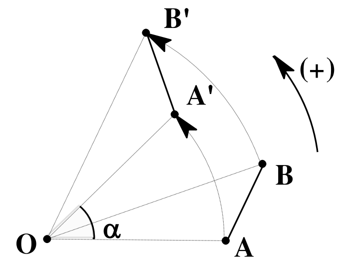
2. Nhận xét:

a) Phép quay tâm O góc quay $a = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ là phép đồng nhất.

b) Phép quay tâm O góc quay $a = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ là phép đối xứng tâm O.

3. Tính chất:

Tính chất 1:

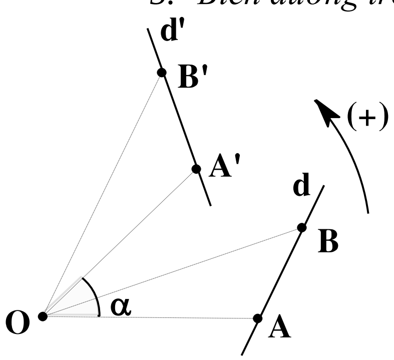


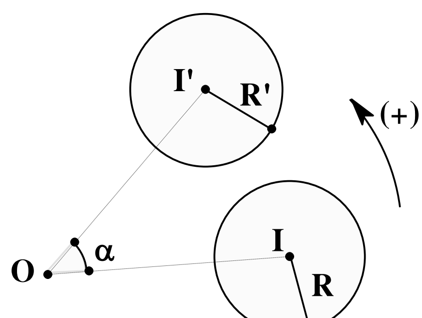
$$\forall A, B: \begin{cases} Q_{(O;\alpha)}(A) = A' \\ Q_{(O;\alpha)}(B) = B' \end{cases} \Rightarrow A'B' = AB$$

$\Rightarrow$ Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ (Phép dời hình)

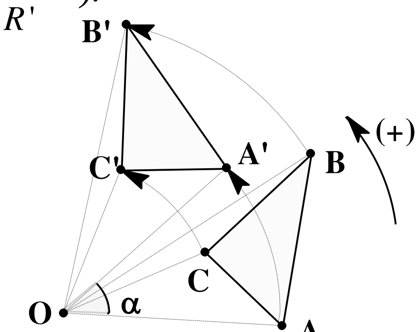
Tính chất 2: Phép quay:

1. Bảo toàn tính thẳng hàng và thứ tự của các điểm tương ứng.
2. Biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.
3. *Biến đường thẳng thành đường thẳng.*
4. *Biến tam giác thành tam giác bằng nó.*(trực tâm $\longrightarrow$ trực tâm, trọng tâm $\longrightarrow$ trọng tâm). Góc thành góc bằng nó.
5. *Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính* ($\begin{cases} I \longrightarrow I' \\ R = R' \end{cases}$).





R = R'



ΔABC = ΔA'B'C'

4. Một số kết quả và dấu hiệu sử dụng phép quay để giải toán

a. ΔABC cân tại A: $\Leftrightarrow \exists\, Q_{(A;\alpha)}(B) = C$. Đặc biệt: ΔABC vuông cân tại A: $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} Q_{(A;90^0)}(B) = C \\ Q_{(A;-90^0)}(B) = C \end{array}\right.$

b. Chứng minh ΔABC đều: $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} Q_{(A;60^0)}(B) = C \\ Q_{(B;60^0)}(C) = A \end{array}\right.$

c. Chứng minh ABCD (với O là gđiểm 2 đường chéo)là hình vuông: $\Leftrightarrow \begin{cases} Q_{(O;45^0)}(A) = B \\ Q_{(O;45^0)}(B) = C \end{cases}$

* MỘT SỐ KẾT QUẢ CẦN LƯU Ý:

1) Ảnh của điểm qua phép quay $Q_{(O;90^0)}$, $Q_{(O;-90^0)}$:

Điểm $M(x_M;y_M)$: $\left[\begin{array}{l} Q_{(O;90^0)}(M)=M'(x';y'):\ \begin{cases} x'=-y_M \\ y'=x_M \end{cases} \\ Q_{(O;-90^0)}(M)=M'(x';y'):\ \begin{cases} x'=y_M \\ y'=-x_M \end{cases} \end{array}\right.$

2) Giả sử phép quay $Q_{(I;\alpha)}$ biến đường thẳng d thành d':

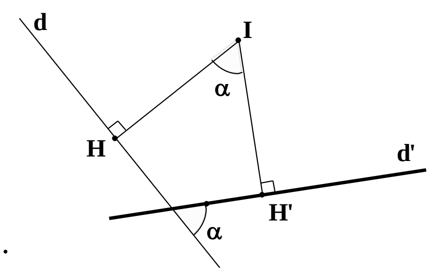
Khi đó: $\left[\begin{array}{l} 0<\alpha<90^0 \Rightarrow (d;d')=\alpha \\ 90^0<\alpha<180^0 \Rightarrow (d;d')=180^0-\alpha \end{array}\right.$

3) Các phương pháp xác định ảnh của đường thẳng d qua $Q_{(I;\alpha)}$:

Phương pháp 1: *Chọn 2 điểm bất kì. Đường thẳng ảnh đi qua 2 ảnh tương ứng.*

$$A,\ B\in d:\ \begin{cases} Q_{(I;\alpha)}(A)=A' \\ Q_{(I;\alpha)}(B)=B' \end{cases} \Rightarrow Q_{(I;\alpha)}(d)=d'\equiv A'B'$$

Phương pháp 2: *Chọn 1 điểm A thuộc đường thẳng. Xác định ảnh A'. Đường thẳng ảnh d' đi qua A' và hợp với d một góc α.*



Phương pháp 3:

Gồm 2 bước:

Bước 1: Chọn $H\in d$ với $IH\perp d$. Xác định $Q_{(I;\alpha)}(H)=H'$.

Bước 2: Đường thẳng d' cần tìm đi qua H' và vuông góc với IH'.

II- LUYỆN TẬP :

Bài tập 1: Cho điểm $M(1;2)$, Δ: $x-y+1=0$, (C): $x^2+y^2-2x-4y+1=0$. Xác định tọa độ điểm A', Δ', (C') lần lượt là ảnh của M, Δ, (C) qua:

a) Phép quay tâm O, góc quay $\alpha=90^0$.

b) Phép quay tâm O, góc quay $\alpha=-90^0$.

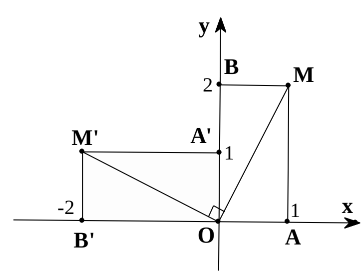
Gợi ý:

a) Ta có: $Q_{(O;90^0)}(M)=M'(-2;1)$.

Dễ thấy :

Qua phép quay $Q_{(O;90^0)}$, hình chữ nhật OAMB có ảnh

Là hình chữ nhật OA'M'B'.



Ta có: $\begin{cases} Q_{(O;90^0)}(A)=A'(0;1) \\ Q_{(O;90^0)}(B)=B'(-2;0) \end{cases} \Rightarrow Q_{(O;90^0)}(M)=M'(-2;1)$

*** Kỷ năng xác định ảnh của đường thẳng qua phép quay tâm O, góc quay $\alpha=90^0$.**

Phương pháp 1: *Chọn 2 điểm bất kì trên Δ, xác định ảnh tương ứng. Đường thẳng Δ' cần tìm là đường thẳng qua hai ảnh.*

Chọn $M(1;2)$, $B(0;1)\in\Delta$

Ta có: $\begin{cases} Q_{(O;90^0)}(M) = M'(-2;1) \in \Delta' \\ Q_{(O;90^0)}(N) = N'(-1;0) \in \Delta' \end{cases} \Rightarrow \Delta' \equiv M'N'$.

Đường thẳng Δ' đi qua điểm $M'(-2;1)$ và có 1 vtcp $\overrightarrow{M'N'} = (1;-1)$

Vậy $\Delta' : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Phương pháp 2: *Sử dụng mối quan hệ về góc giữa d và d'*

Gọi Δ' là ảnh của đường thẳng Δ qua $Q_{(O;90^0)}$. Suy ra: $\Delta' \perp \Delta \Rightarrow \Delta' :\ x + y + m = 0$

Chọn $M(1;2) \in \Delta \Rightarrow Q_{(O;90^0)}(M) = M'(-2;1) \in \Delta'$

Ta có: $-2 + 1 + m = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Vậy $\Delta' :\ x + y + 1 = 0$

Phương pháp 3: *Sử dụng quỹ tích:* $\boxed{\forall M \in \Delta \Rightarrow Q_{(O;90^0)}(M) = M' \in \Delta'}$

Gọi $M(x;y) \in \Delta \Rightarrow Q_{(O;90^0)}(M) = M'(x';y') :\ \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y' \\ y = -x' \end{cases}$

Lúc đó: $M(y';-x') \in \Delta \Leftrightarrow (y') - (-x') + 1 = 0 \Leftrightarrow x' + y' + 1 = 0$

Vậy $\Delta' :\ x + y + 1 = 0$

Nhận xét: *Trong 3 phương pháp trên,*

- Phương pháp 1 tỏ ra hiệu quả cho tất cả các phép biến hình (dù dài dòng).

* Xác định ảnh của đường tròn:

Phương pháp 1: *Theo tính chất của phép quay: Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.*

Ta có $(C) \equiv (M;R)$: $\begin{cases} M(1;2) \\ R = 2 \end{cases}$

$Q_{(O;90^0)}(M) = M'(-2;1)$ là tâm của đường tròn ảnh (C').

Vậy đường tròn (C'): $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$

Phương pháp 2: *Sử dụng quỹ tích.*

Gọi $M(x;y) \in (C) \Rightarrow Q_{(O;90^0)}(M) = M'(x';y') :\ \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y' \\ y = -x' \end{cases}$

Lúc đó: $M(y';-x') \in (C) \Leftrightarrow (y')^2 + (-x')^2 - 2(y') - 4(-x') + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x')^2 + (y')^2 + 4x' - 2y' + 1 = 0$$

Vậy (C'): $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$

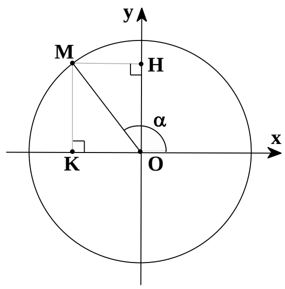
Hoàn toàn tương tự, giải quyết yêu cầu b.

PHẦN KIẾN THỨC ĐỌC THÊM:

CÔNG THỨC TỌA ĐỘ VỚI PHÉP QUAY VỚI TÂM VÀ GÓC QUAY BẤT KÌ

Đặt vấn đề:

Trong Hình học 10, Đai số 10 và 11, lý thuyết về lượng giác một cách cơ bản thì chúng ta đã thừa nhận:



Với mỗi góc lượng giác α bất kì.

- Xác định trên (C) điểm M sao cho: $xOM = \alpha$
- Lúc đó: $M\left(x_M; y_M\right)$, ta thừa nhận:

$$\sin\alpha = y_M;\ \cos\alpha = x_M;\ \tan\alpha = \frac{y_M}{x_M};\ \cot\alpha = \frac{x_M}{y_M}$$

Hay: $M\left(\cos\alpha; \sin\alpha\right)$ (*)

Sở dĩ có cách biễu diễn (*) vì đường tròn lượng giác có bán kính $R = 1$.
Và thực chất đây là cách biểu diễn đơn giản nhất đối với ***hệ tọa độ cực gốc O, có góc và bán kính R bất kì.***

<u>TỔNG QUÁT:</u> *Đối với hệ tọa độ cực:* gốc O có góc α và bán kính R bất kì.
Điểm M với góc lượng giác $xOM = \varphi$, thì ta có: $M\left(R\cos\varphi; R\sin\varphi\right)$

<u>Bài tập 2:</u> Cho điểm $M(1;2)$, $\Delta: x - y + 1 = 0$, (C): $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$. Xác định tọa độ điểm M', Δ', (C') lần lượt là ảnh của M, Δ, (C) qua phép quay tâm O, góc quay $\alpha \neq k2\pi$.

Gợi ý:

Giả sử góc lượng giác $\left(Ox; OM\right) = \varphi_0$. Khi đó, góc lượng giác $\left(Ox; OM'\right) = \varphi_0 + \alpha$

Vậy điểm $M\left(\sqrt{5}\cos\varphi_0; \sqrt{5}\sin\varphi_0\right)$

Do đó: $\begin{cases}\sqrt{5}\cos\varphi_0 = 1\\ \sqrt{5}\sin\varphi_0 = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos\varphi_0 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\\ \sin\varphi_0 = \dfrac{2}{\sqrt{5}}\end{cases}$ và điểm $M'\left(\sqrt{5}\cos(\varphi_0 + \alpha); \sqrt{5}\sin(\varphi_0 + \alpha)\right)$

nên: $\begin{cases}\sqrt{5}\cos(\varphi_0 + \alpha) = \sqrt{5}\left(\cos\varphi_0.\cos\alpha - \sin\varphi_0.\sin\alpha\right) = \cos\alpha - 2\sin\alpha\\ \sqrt{5}\sin(\varphi_0 + \alpha) = \sqrt{5}\left(\sin\varphi_0.\cos\alpha + \cos\varphi_0.\sin\alpha\right) = 2\cos\alpha + \sin\alpha\end{cases}$

Vậy điểm $M'\left(\cos\alpha - 2\sin\alpha; 2\cos\alpha + \sin\alpha\right)$ (y.c.b.t)

Hoàn toàn tương tự như yêu cầu trên, độc giả tự giải quyết.

<u>Bài tập 3:</u> Cho điểm $I(1;2)$, $M(-2;3)$. Xác định tọa độ điểm M' là ảnh của M qua phép quay tâm I, góc quay $\alpha \neq k2\pi$.

Gợi ý:

* Trước hết ta tìm điểm N sao cho $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{IM}$:

Giả sử điểm $N(x; y)$, khi đó: $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases}x = -2 - 1\\ y = 3 - 2\end{cases} \Leftrightarrow N(-3;1)$

* Gọi N' là ảnh của $N(-3;1)$ qua $Q_{(I;\alpha)}$, khi đó do M' là ảnh của M qua $Q_{(I;\alpha)}$ và $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{IM}$ nên $\overrightarrow{ON'} = \overrightarrow{IM'}$.

* Bây giờ, ta tính tọa độ của điểm N'. Giả sử, góc lượng giác $\left(Ox; ON\right) = \varphi_0$. Khi đó, góc lượng giác $\left(Ox; OM'\right) = \varphi_0 + \alpha.$

Vậy điểm $M\left(\sqrt{5}\cos\varphi_0; \sqrt{5}\sin\varphi_0\right)$

Do đó: $\begin{cases}\sqrt{10}\cos\varphi_0 = -3\\ \sqrt{10}\sin\varphi_0 = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos\varphi_0 = \dfrac{-3}{\sqrt{10}}\\ \sin\varphi_0 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\end{cases}$ và điểm $N^{/}\left(\sqrt{10}\cos(\varphi_0+\alpha);\sqrt{10}\sin(\varphi_0+\alpha)\right)$

nên: $\begin{cases}\sqrt{10}\cos(\varphi_0+\alpha) = \sqrt{10}\left(\cos\varphi_0.\cos\alpha - \sin\varphi_0.\sin\alpha\right) = -3\cos\alpha - \sin\alpha\\ \sqrt{10}\sin(\varphi_0+\alpha) = \sqrt{10}\left(\sin\varphi_0.\cos\alpha + \cos\varphi_0.\sin\alpha\right) = \cos\alpha - 3\sin\alpha\end{cases}$

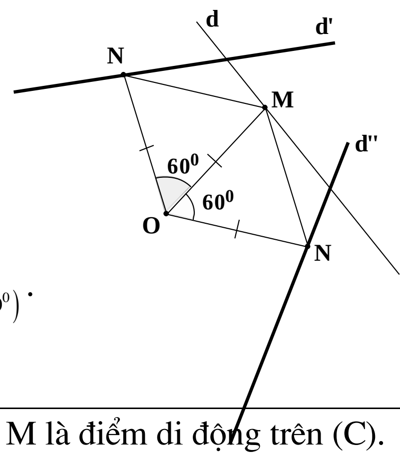
Suy ra: điểm $N^{/}\left(-3\cos\alpha - \sin\alpha;\cos\alpha - 3\sin\alpha\right)$

* Giả sử: $M^{/}(x';y')$ thì $\overrightarrow{IM^{/}} = (x-1;y-2)$

Do $\overrightarrow{ON^{/}} = \overrightarrow{IM^{/}} \Leftrightarrow \begin{cases}x-1 = -3\cos\alpha - \sin\alpha\\ y-2 = \text{os}\alpha - 3\sin\alpha\end{cases}$. Do đó: $M^{/}\left(1-3\cos\alpha - \sin\alpha;2+\cos\alpha - 3\sin\alpha\right)$ (y.c.b.t)

Bài tập 4: Cho đường thẳng d và điểm O cố định không thuộc d, M là điểm di động trên d. Hãy tìm tập hợp các điểm N sao cho ΔOMN đều.

Gợi ý: *Biểu diễn điểm N theo M thông qua phép quay* 60^0



Do tam giác OMN đều nên tồn tại hai phép quay:

$\left[\begin{array}{l}Q_{\left(O;60^0\right)}(M) = N\\ Q_{\left(O;-60^0\right)}(M) = N\end{array}\right.$

Do M thuộc đường thẳng d nên N thuộc vào đường thẳng d', d'' lần lượt là ảnh của d qua $Q_{\left(O;60^0\right)}$ và $Q_{\left(O;-60^0\right)}$.

Vậy quỹ tích cần tìm là 2 đường thẳng d' và d''.

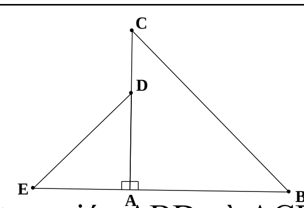
Tương tự:

Bài tập 5: Cho đtròn (C) và điểm O cố định không thuộc (C), M là điểm di động trên (C). Hãy tìm tập hợp các điểm N sao cho ΔOMN vuông cân tại O.

Gợi ý: *Biểu diễn điểm N theo M thông qua phép quay* 90^0

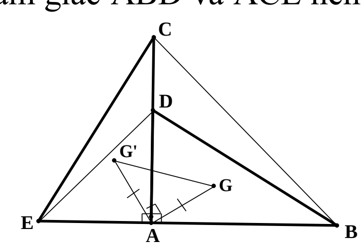
Bài tập 6: Cho 2 tam giác vuông cân ABC và ADE (như hình vẽ). Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác ABD và ACE. Chứng minh tam giác AGG' vuông cân.

Gợi ý: *Xây dựng phép quay tâm A góc quay* 90^0 *biến G thành G'.*



Xét phép quay: $Q_{\left(A;90^0\right)}$ có : $\begin{cases}Q_{\left(A;90^0\right)}(B) = C\\ Q_{\left(A;90^0\right)}(D) = E\end{cases}$

Suy ra: $Q_{\left(A;90^0\right)}(\Delta ABD) = \Delta ACE$. Do G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác ABD và ACE nên

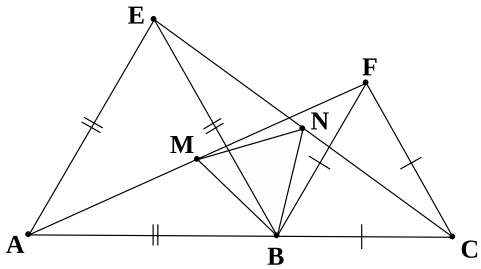


theo tính chất của phép quay: $Q_{\left(A;90^0\right)}(G) = G' \Leftrightarrow \begin{cases}AG = AG'\\ GAG' = 90^0\end{cases}$

Vậy tam giác AGG' vuông cân. (đ.p.c.m)

Bài tập 7: Cho ba điểm A, B, C theo thứ tự trên thẳng hàng. Vẽ cùng một phía hai tam giác đều ABE, BCF. Gọi M và N tương ứng là hai trung điểm của AF và CE. Chứng minh rằng: BMN là tam giác đều.

Gợi ý: *Xây dựng phép quay tâm B góc quay* 60^0 *biến N thành M.*



Xét phép quay: $Q_{\left(B;60^0\right)}$ có : $\begin{cases} Q_{\left(B;60^0\right)}(C) = F \\ Q_{\left(B;60^0\right)}(E) = A \end{cases}$

Suy ra: $Q_{\left(B;60^0\right)}(CE) = FA$.

Do N và M lần lượt là trung điểm các cạnh CE và AF nên theo tính chất của phép quay: $Q_{\left(B;60^0\right)}(N) = M \Leftrightarrow \begin{cases} BN = BM \\ MBN = 60^0 \end{cases}$

Vậy tam giác BMN đều. (đ.p.c.m)

Bài tập 8: Cho tam giác ABC. Dựng về phía ngoài tam giác các hình vuông BCIJ, ACMN, ABEF và gọi O, P, Q lần lượt là tâm của của chúng.

a) Gọi D là trung điểm của AB. Chứng minh rằng: ΔDOP vuông cân tại D.

b) Chứng minh rằng: AO ⊥ PQ và AO=PQ.

Gợi ý: *Xây dựng phép quay tâm D góc quay* 90^0 *biến O thành P, hoặc sử dụng mối quan hệ hình học liên quan.*

a) Xét phép quay $Q_{\left(C;90^0\right)}$

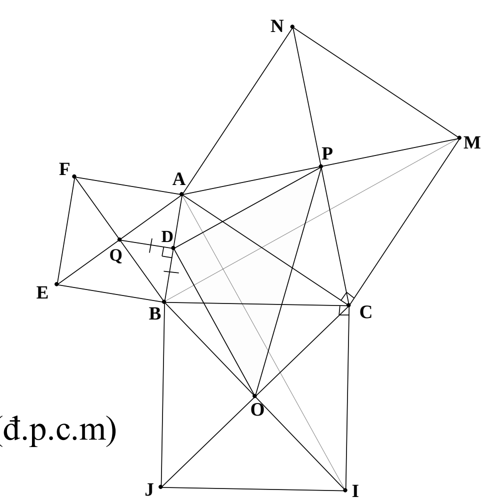
$$\begin{cases} Q_{\left(C;90^0\right)}(M) = A \\ Q_{\left(C;90^0\right)}(B) = I \end{cases} \Rightarrow Q_{\left(C;90^0\right)}(MB) = MI \Leftrightarrow \begin{cases} MB = AI \\ MB \perp AI \end{cases} \quad (1)$$

Dễ thấy, DP là đường trung bình của các tamgiác ABM

nên: $\begin{cases} DP = \dfrac{1}{2}BM \\ DP \,//\, BM \end{cases}$ (2)

Tương tự, DO là đường trung bình của tam giác ABI nên:

$$\begin{cases} DO = \dfrac{1}{2}AI \\ DO \,//\, AI \end{cases} \quad (3)$$



Từ (1), (2) và (3) suy ra: $\begin{cases} DO = DP \\ DO \perp DP \end{cases}$ hay ΔDOP vuông cân tại D. (đ.p.c.m)

b) Theo câu a, ΔDOP vuông cân tại D nên $Q_{\left(D;90^0\right)}(O) = P$ (*)

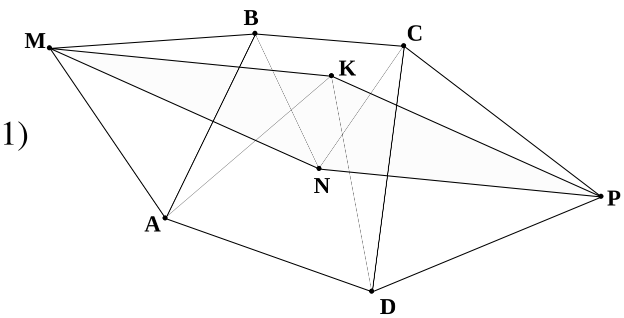
Mặt khác: $Q_{\left(D;90^0\right)}(A) = Q$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra: $Q_{\left(D;90^0\right)}(AO) = QP \Leftrightarrow \begin{cases} AO = QP \\ AO \perp QP \end{cases}$ (đ.p.c.m)

<u>Bài tập 9:</u> Cho tứ giác lồi ABCD. Về phía ngoài tứ giác dựng các tam giác đều ABM, CDP. Về phía trong tứ giác dựng hai tam giác đều BCN và ADK.CMR: MNPK là hình bình hành.

Gợi ý:

Xét phép quay $Q_{\left(B;60^0\right)}: \begin{cases} Q_{\left(B;60^0\right)}(M) = A \\ Q_{\left(B;60^0\right)}(N) = C \end{cases}$



$\Rightarrow Q_{\left(B;60^0\right)}(MN) = AC \Rightarrow MN = AC$ (1)

Xét phép quay $Q_{\left(D;60^0\right)}: \begin{cases} Q_{\left(D;60^0\right)}(K) = A \\ Q_{\left(D;60^0\right)}(P) = C \end{cases}$

$\Rightarrow Q_{\left(D;60^0\right)}(KP) = AC \Rightarrow KP = AC$ (2)

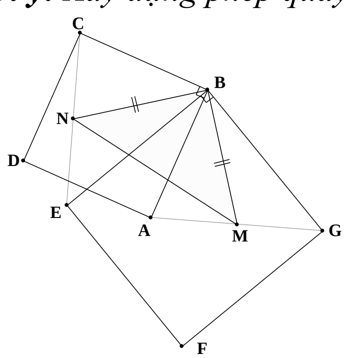
Từ (1) và (2) suy ra: $MN = KP$ (*)

Tương tự, chứng minh được $MK = PN$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra: MKNP là hình bình hành (đ.p.c.m)

<u>Bài tập 10:</u> Cho 2 hình vuông ABCD và BEFG. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AG và CE. Chứng minh rằng: Tam giác BMN vuông cân.

Gợi ý: *Xây dựng phép quay tâm B góc quay* 90^0 *biến N thành M.*



Xét phép quay: $Q_{\left(B;90^0\right)}$ có : $\begin{cases} Q_{\left(B;90^0\right)}(C) = A \\ Q_{\left(B;90^0\right)}(E) = G \end{cases}$

Suy ra: $Q_{\left(B;90^0\right)}(CE) = AG$.

Do N và M lần lượt là trung điểm các cạnh CE và AG nên theo tính chất của phép quay:

$$Q_{\left(B;90^0\right)}(N) = M \Leftrightarrow \begin{cases} BN = BM \\ MBN = 90^0 \end{cases}$$

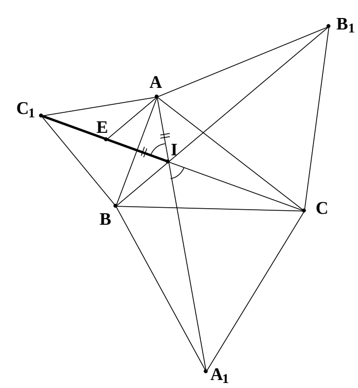
Vậy tam giác MBN vuông cân. (đ.p.c.m)

<u>Bài tập 11:</u> Về phía ngoài tam giác ABC, dựng ba tam giác đều BCA_1, ACB_1, ABC_1. Chứng minh rằng: AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

Gợi ý: *Sử dụng tính chất phép quay: Bảo toàn tính thẳng hàng và thứ tự của 3 điểm bất kì.*

Giả sử: $AA_1 \cap CC_1 = I$. Cần chỉ rõ: $I \in BB_1$ hay B, I, B_1 thẳng hàng.

Thật vậy, xét phép quay $Q_{\left(B;60^0\right)}: \begin{cases} Q_{\left(B;60^0\right)}(A_1) = C \\ Q_{\left(B;60^0\right)}(A) = C_1 \end{cases}$



$\Leftrightarrow \begin{cases} AA_1 = CC_1 \\ \left(AA_1; CC_1\right) = 60^0 \end{cases} \Rightarrow AIC_1 = 60^0$ (1)

Lấy trên IC_1 điểm E sao cho: $AI = EI$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: ΔAEI là tam giác đều.

Lúc đó, xét phép quay $Q_{(A;60^0)}: \begin{cases} Q_{(A;60^0)}(E) = I \\ Q_{(A;60^0)}(C_1) = B \\ Q_{(A;60^0)}(C) = B_1 \end{cases}$

Do E, C, C_1 thẳng hàng nên theo tính chất của phép quay: I, B_1, B thẳng hàng. Điều này chứng tỏ AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy. (đ.p.c.m)

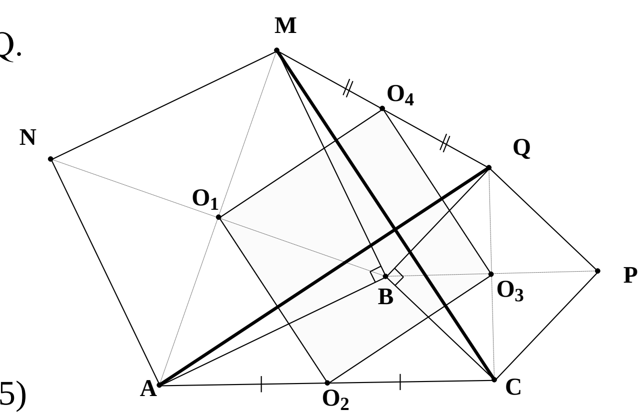
Bài tập 12: Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB và BC, về phía ngoài tam giác, dựng 2 hình vuông ABMN và BCPQ. Chứng minh rằng: Các tâm của hình vuông này cùng với 2 trung điểm của MQ, AC tạo thành 1 hình vuông.

Gợi ý:

Gọi O_1 và O_3 lần lượt là tâm 2 hình vuông ABMN và BCPQ, còn O_2 và O_4 lần lượt là trung điểm của AC , MQ.

Xét phép quay $Q_{(B;90^0)}: \begin{cases} Q_{(B;90^0)}(M) = A \\ Q_{(B;90^0)}(C) = Q \end{cases} \Leftrightarrow Q_{(B;90^0)}(MC) = AQ \Leftrightarrow \begin{cases} MC = AQ \\ MC \perp AQ \end{cases}$ (1)

Dễ thấy: $O_1O_2, O_2O_3, O_3O_4, O_4O_1$ lần lượt là đường trung bình của các tam giác MAC, ACQ, MCQ, MAQ.



Suy ra: $\begin{cases} O_1O_2 // MC \\ O_1O_2 = \dfrac{1}{2}MC \end{cases}$ (2) và $\begin{cases} O_2O_3 // AQ \\ O_2O_3 = \dfrac{1}{2}AQ \end{cases}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $\begin{cases} O_1O_2 \perp O_2O_3 \\ O_1O_2 = O_2O_3 \end{cases}$ (*)

Tương tự, do $\begin{cases} O_3O_4 // MC \\ O_3O_4 = \dfrac{1}{2}MC \end{cases}$ (4) và $\begin{cases} O_4O_1 // AQ \\ O_4O_1 = \dfrac{1}{2}AQ \end{cases}$ (5)

Từ (1), (4) và (5) suy ra: $\begin{cases} O_3O_4 \perp O_4O_1 \\ O_3O_4 = O_4O_1 \end{cases}$ (**)

Từ (*), (**) suy ra: $O_1O_2O_3O_4$ là hình vuông. (đ.p.c.m)

Bài tập 13: Cho điểm A và 2 đường tròn (C), (C’) phân biệt. Dựng theo chiều dương tam giác đều ABC, biết đỉnh B, C lần lượt nằm trên (C) và (C’).

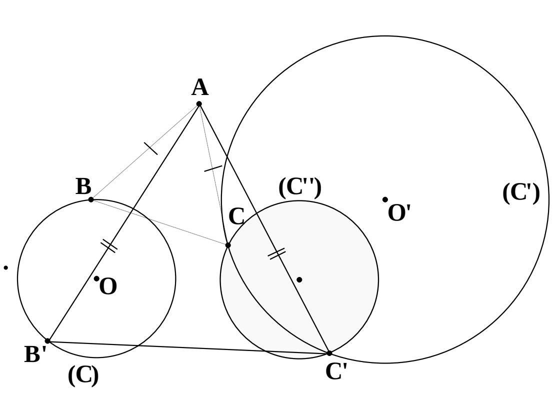
Gợi ý:

Phân tích: Do tam giác ABC đều nên:

$$\begin{cases} AB = AC \\ (AB;AC) = 60^0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists\, Q_{(A;60^0)}(B) = C$$

Cách dựng:

- Dựng đường tròn (C’’) là ảnh của (C) qua $Q_{(A;60^0)}$.
- Xác định giao điểm $C = (C') \cap (C'')$.
- Thực hiện phép quay $Q_{(A;-60^0)}(C) = B$



Biện luận: Nghiệm bài toán tùy thuộc số giao điểm của (C'') và (C').

Bài tập 14: Cho 2 đường thẳng a, b song song và một điểm G không nằm trên chúng. Xác định tam giác đều ABC có $A \in a$, $B \in b$ và G là trọng tâm tam giác ABC.

Gợi ý:

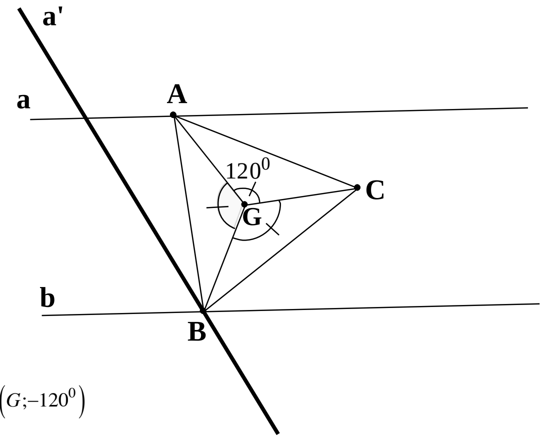
Phân tích: Giả sử đã dựng được ΔABC thỏa đk.

Ta có: $\begin{cases} GA = GB = GC \\ AGB = BGC = CGA = 120^0 \end{cases}$

Suy ra: $\exists\ Q_{\left(G;120^0\right)}(A) = B$

Cách dựng:

- Dựng a' là ảnh của a qua $Q_{\left(G;120^0\right)}$.
- Xác định $B = a' \cap b$.
- Các đỉnh A, C là ảnh của B qua $Q_{\left(G;120^0\right)}$, $Q_{\left(G;-120^0\right)}$



Biện luận: Bài toán luôn có 1 nghiệm hình.

Bài tập 15: Cho tam giác ABC và vẽ phía ngoài hai hình vuông ABMN, ACPQ.

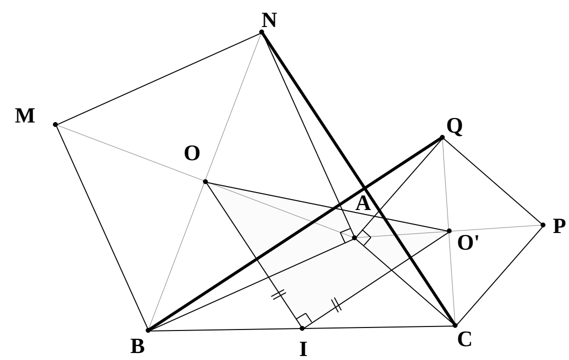
a) Chứng minh : $BQ = CN$ và $BQ \perp CN$.

b) Gọi O, O' lần lượt là tâm của các hình vuông ABMN, ACPQ. Chứng minh rằng: Tam giác OIO' vuông cân.

Gợi ý:

a) Xét phép quay $Q_{\left(A;-90^0\right)}$: $\begin{cases} Q_{\left(A;-90^0\right)}(B) = N \\ Q_{\left(A;-90^0\right)}(Q) = C \end{cases}$

$\Rightarrow Q_{\left(A;-90^0\right)}(BQ) = NC \Leftrightarrow \begin{cases} BQ = NC \\ BQ \perp NC \end{cases}$ (đ.p.c.m)



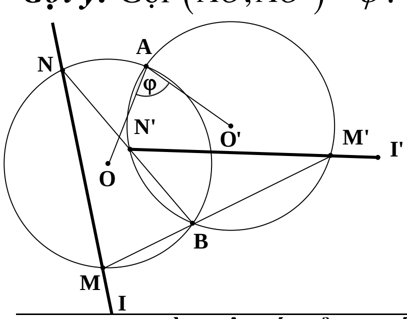
b) Ta có: OI và O'I lần lượt là đường trung bình của các tam giác BNC và BCQ nên suy ra:

$\begin{cases} OI \,//\, NC \\ OI = \dfrac{1}{2} NC \end{cases}$ (1) và $\begin{cases} O'I \,//\, BQ \\ O'I = \dfrac{1}{2} BQ \end{cases}$ (2)

Theo câu a, và từ (1), (2) suy ra: $\begin{cases} OI = O'I \\ OI \perp O'I \end{cases}$. Vậy tam giác OIO' vuông cân. (đ.p.c.m)

Bài tập 16: Cho 2 đường tròn (O) và (O') bằng nhau và cắt nhau ở A và B. Từ điểm I cố định kẻ cát tuyến di động IMN với (O), MB và NB cắt (O') tại M', N'.
Chứng minh rằng: Đường thẳng M'N' luôn đi qua 1 điểm cố định.

Gợi ý: Gọi $\left(AO; AO'\right) = \varphi$.



Xét phép quay $Q_{(A;\varphi)}$: $\begin{cases} Q_{(A;\varphi)}(O) = O' \\ R = R' \end{cases} \Rightarrow Q_{(A;\varphi)}\big((O)\big) = (O')$

Vì MM' và NN' qua B nên:

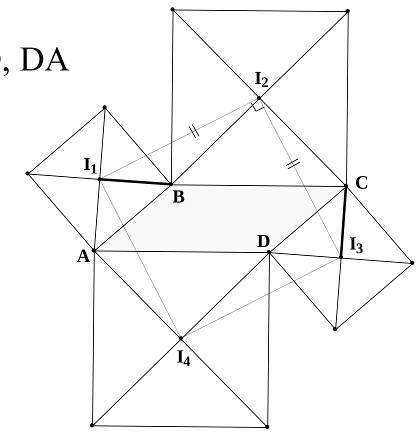
$$\left(AO; AO'\right) = \left(AM; AM'\right) = \left(AN; AN'\right)$$

Lúc đó: $\begin{cases} Q_{(A;\varphi)}(M)=M' \\ Q_{(A;\varphi)}(N)=N' \end{cases} \Rightarrow Q_{(A;\varphi)}(MN)=M'N'$

Do MN đi qua điểm I cố định nên M'N' đi qua điểm cố định I' là ảnh của I qua $Q_{(A;\varphi)}$.

<u>Bài tập 17:</u> Chứng minh rằng: Các đoạn thẳng nối tâm các hình vuông dựng trên các cạnh của một hình bình hành về phía ngoài, hợp thành một hình vuông.

Gợi ý:



Gọi I_1, I_2, I_3, I_4 lần lượt là tâm của các hình vuông cạnh AB, BC, CD, DA

Xét phép quay $Q_{(I_2;90^0)}$: $Q_{(I_2;90^0)}(B)=C$ (1)

Do $\Delta I_1BA=\Delta I_3CD$ nên $I_3C=BI_1$. (2)

Mặt khác: $\begin{cases} DCI_3=ABI_1=45^0 \\ DC // AB \end{cases} \Rightarrow I_3C \perp BI_1$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $Q_{(I_2;90^0)}(I_1)=I_3 \Leftrightarrow \begin{cases} I_1I_2=I_2I_3 \\ I_1I_2 \perp I_2I_3 \end{cases}$

Lý luận tương tự ta có $I_1I_4=I_4I_3$ và $I_1I_4 \perp I_4I_3$. Vậy $I_1I_2I_3I_4$ là hình vuông. (đ.p.c.m)

<u>III- BÀI TẬP TỰ LUẬN - TỰ LUYỆN:</u>

1) Cho tam giác ABC. Xác định ảnh của ΔABC qua các phép quay:

a) $Q_{(A;90^0)}$ a) $Q_{(A;60^0)}$

2) Cho hình vuông ABCD với O là tâm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD. Xác định ảnh của ΔAMN qua phép quay:

a) $Q_{(0;90^0)}$ a) $Q_{(O;-90^0)}$

3) Trong mặt phẳng cho các điểm $A(0;3)$, $B(-2;0)$, $C(1;4)$. Xác định toạ độ các điểm A',B', C' lần lượt là ảnh của A, B, C qua:

a) $Q_{(O;90^0)}$ b) $Q_{(O;-90^0)}$

4) Cho đường thẳng Δ: $x-4y+2=0$ và đường tròn (C): $x^2+y^2-4x+2y=0$. Xác định phương trình Δ', (C') lần lượt là ảnh của Δ và (C) qua phép quay:

a) $Q_{(O;90^0)}$ b) $Q_{(O;-90^0)}$

5) Cho nữa đường tròn tâm O và đường kính BC. Điểm A chạy trên nữa đường tròn đó. Dựng về phía ngoài của ΔABC hình vuông ABEF. Chứng minh rằng: E chạy trên nữa đường tròn cố định.

6) Cho đường thẳng d và điểm O cố định không thuộc d, M là điểm di động trên d. Hãy tìm tập hợp các điểm N sao cho ΔOMN đều.

7) Cho 2 đường tròn (O) và (O') bằng nhau và cắt nhau tại A, B. Từ 1 điểm I cố định kẻ cát tuyến di động IMN với (O), MB và NB lần lượt cắt (O') tại M', N'. CMR: M'N' luôn đi qua 1 điểm cố định.

8) Cho ba điểm A, B, C theo thứ tự trên thẳng hàng. Vẽ cùng một phía, dựng hai tam giác đều ABE, BCF. Gọi M và N tương ứng là hai trung điểm của AF và CE. Chứng minh rằng: BMN là tam giác đều.

9) Cho tam giác ABC. Qua điểm A dựng hai tam giác vuông cân ABE và ACF. Gọi M là trung điểm của BC và giả sử AM $\cap$ FE=H. Chứng minh rằng: AH là đường cao của ΔAEF.

10) Cho tứ giác lồi ABCD. Về phía ngoài tứ giác dựng các tam giác đều ABM, CDP. Về phía trong tứ giác dựng hai tam giác đều BCN và ADK. Chứng minh: MNPK là hình bình hành.

11) Cho tam giác ABC. Về phía ngoài tam giác, dựng ba tam giác đều BCA_1, ACB_1, ABC_1. Chứng minh rằng: AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

12) Cho tam giác ABC. Dựng về phía ngoài tam giác các hình vuông BCIJ, ACMN, ABEF và gọi O, P, Q lần lượt là tâm của chúng.

a) Gọi D là trung điểm của AB. Chứng minh rằng: ΔDOP vuông cân tại D.

b) Chứng minh rằng: AO $\perp$ PQ và AO=PQ.

13) Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB và BC, về phía ngoài tam giác dựng 2 hình vuông ABMN, BCPQ. Chứng minh rằng: Các tâm của hình vuông này cùng với 2 trung điểm của MQ, AC tạo thành 1 hình vuông.

III- BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hai điểm phân biệt A, B và α là góc lượng giác bất kì. Biết $Q_{(O;\alpha)}(A)=A_1$, $Q_{(O;\alpha)}(B)=B_1$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}$. B. $\overrightarrow{A_1B_1}=-\overrightarrow{AB}$. C. $A_1B_1\perp AB$. D. $A_1B_1=AB$.

Câu 2: Cho tam giác đều ABC (*thứ tự đỉnh theo chiều dương lượng giác*), khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $Q_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}(B)=C$. B. $Q_{\left(A;-\frac{\pi}{3}\right)}(C)=B$. C. $Q_{\left(A;\frac{7\pi}{3}\right)}(C)=B$. D. $Q_{\left(A;-\frac{7\pi}{3}\right)}(C)=B$.

Câu 3: Gọi hình vuông $ABCD$ tâm O (các đỉnh theo thứ tự theo chiều ngược chiều kim đồng hồ). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $Q_{(O;90^0)}(B)=A$. B. $Q_{(O;90^0)}(B)=C$. C. $Q_{(O;90^0)}(B)=O$. D. $Q_{(O;90^0)}(B)=D$.

Câu 4: Cho hình vuông $MNPQ$ (thứ tự các đỉnh cùng chiều quay của kim đồng hồ). Phép quay nào sau đây biến điểm M thành điểm P.

A. Phép quay tâm Q góc $-90°$. B. Phép quay tâm Q góc $45°$.

C. Phép quay tâm Q góc $-45°$. D. Phép quay tâm Q góc $90°$.

Câu 5: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(1;2)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $Q_{\left(O;\frac{3\pi}{2}\right)}(A)=A'(-2;1)$. B. $Q_{\left(O;\frac{3\pi}{2}\right)}(A)=A'(2;-1)$.

C. $Q_{\left(O;\frac{3\pi}{2}\right)}(A)=A'(-1;-2)$. D. $Q_{\left(O;\frac{3\pi}{2}\right)}(A)=A'(-2;-1)$.

Câu 6: Có bao nhiêu phép quay với góc quay α $\left(0^0<\alpha<360^0\right)$ biến tam giác đều cho trước thành chính nó?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 7: Biết thực hiện liên tiếp hai phép quay $Q_{(I;\alpha)}$ và $Q_{(I;\beta)}$, $(\alpha \neq k2\pi,\ \beta \neq k'2\pi,\ k,k' \in \mathbb{Z})$ ta được phép đồng nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\alpha+\beta=\pi+k2\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$.
B. $\alpha+\beta=k2\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$.
C. $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$.
C. $\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$.

Câu 8: Phép biến hình nào sau đây **không** có tính chất: "Biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với nó"?

A. Phép đồng nhất.
B. Phép vị tự.
C. Phép quay bất kì.
D. Phép tịnh tiến.

Câu 9: Cho đường thẳng Δ và điểm $I \notin \Delta$. Phép quay tâm I với góc quay α nào sau đây thì biến đường thẳng thành chính nó?

A. $\alpha=60^0$.
B. $\alpha=90^0$.
C. $\alpha=180^0$.
D. $\alpha=360^0$.

Câu 10: Phép quay tâm I góc quay $90°$ biến đường thẳng d thành đường thẳng d'. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $d\perp d'$.
B. $d//d'$.
C. $d\equiv d'$.
D. $(d,d')=45°$.

Câu 11: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, ảnh của điểm $B(3;-4)$ qua phép quay tâm O, góc quay -90^0, có tọa độ là

A. $(4;3)$.
B. $(-4;-3)$.
C. $(-3;4)$.
D. $(4;-3)$.

Câu 12: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(0;3)$. Xác định tọa độ điểm M' là ảnh của điểm M qua phép quay tâm $O(0;0)$, góc quay $\alpha=270°$.

A. $M'(-3;0)$.
B. $M'(-3;3)$.
C. $M'(0;-3)$.
D. $M'(3;0)$.

Câu 13: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, phép quay tâm $I(2;1)$, góc quay 120^0, biến điểm $M(1;9)$ thành điểm M' có tọa độ là

A. $M'\left(\dfrac{1-5\sqrt{3}}{2};\dfrac{-2-3\sqrt{3}}{2}\right)$.
B. $M'\left(\dfrac{5-8\sqrt{3}}{2};\dfrac{-6-\sqrt{3}}{2}\right)$.
C. $M'\left(\dfrac{5-8\sqrt{3}}{2};\dfrac{-2-2\sqrt{3}}{2}\right)$.
D. $M'\left(\dfrac{1-5\sqrt{3}}{2};\dfrac{-6-\sqrt{3}}{2}\right)$.

Câu 14: Cho $M(3;4)$. Tìm ảnh của điểm M qua phép quay tâm O góc quay 30^0.

A. $M'\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2};\dfrac{3}{2}+2\sqrt{3}\right)$.
B. $M'\left(-2;2\sqrt{3}\right)$.
C. $M'\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2};2\sqrt{3}\right)$.
D. $M'\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-2;\dfrac{3}{2}+2\sqrt{3}\right)$.

Câu 15: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(1;1)$. Hỏi các điểm sau điểm nào là ảnh của M qua phép quay tâm O, góc 45°?

A. $M'(-1;1)$.
B. $M'(1;0)$.
C. $M'(\sqrt{2};0)$.
D. $M'(0;\sqrt{2})$.

Câu 16: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: 2x-y+1=0$. Ảnh của đường thẳng Δ qua phép quay tâm O, góc quay -90^0 là đường thẳng có phương trình

A. $x+2y+1=0$.
B. $2x-y-2=0$.
C. $2x-y+2=0$.
D. $x+2y-1=0$.

Câu 17: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, phép quay tâm O, góc quay 90^0 biến đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+6y-3=0$ thành đường tròn (C') có phương trình nào sau đây?

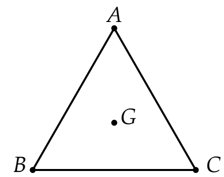
A. $(C'):(x-3)^2+(y-2)^2=16.$ B. $(C'):(x+3)^2+(y+2)^2=16.$

C. $(C'):(x+2)^2+(y-3)^2=16.$ D. $(C'):(x-2)^2+(y-3)^2=16.$

Câu 18: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x+1)^2+y^2=5$. Xác định phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép quay tâm O, góc quay -90^0.

A. $x^2+(y+1)^2=5.$ B. $x^2+(y-1)^2=5.$ C. $(x+1)^2+(y+1)^2=5.$ D. $(x-1)^2+y^2=5.$

Câu 19: Cho tam giác đều ABC có G là trọng tâm (hình vẽ bên). Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $Q_{(G,120^\circ)}(B)=A.$ B. $Q_{(G,60^\circ)}(B)=A.$

C. $Q_{(G,120^\circ)}(A)=B.$ D. $Q_{(G,6^\circ)}(A)=B.$

Câu 20: Có bao nhiêu phép quay với góc quay α với $\alpha\in[-\pi;\pi]$ biến hình vuông thành chính nó?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 5.

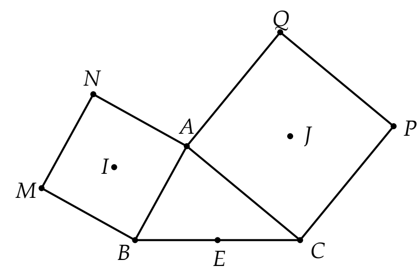
Câu 21: Trong mặt phẳng, tìm ảnh của điểm $A(2;-1)$ qua phép quay tâm O, góc quay $90°$.

A. $M(1;-2)$. B. $N(1;2)$. C. $P(-1;2)$. D. $Q(2;1)$.

Câu 22: Trong mặt phẳng, cho đường thẳng $\Delta: x-2y+1=0$. Xác định ảnh của Δ qua phép quay tâm O (O là gốc tọa độ), góc quay $-90°$.

A. $x-2y-1=0.$ B. $2x-y+1=0.$ C. $2x+y+1=0.$ D. $2x+y-1=0.$

Câu 23: Về phía ngoài tam giác ABC, dựng các hình vuông $ABMN$ và $ACPQ$. Gọi I, J lần lượt là tâm các hình vuông $ABMN$ và $ACPQ$; E là trung điểm BC (tham khảo hình vẽ). Khẳng định nào sau đây **sai**?



A. ΔEIJ vuông cân. B. $BQ\perp CN$.

C. $AE\perp MP$. D. $BQ=CN$.

Câu 24: Trong mặt phẳng, cho hai điểm $A(1;-3), B(2;1)$. Gọi M, N lần lượt là ảnh của A, B qua phép dời hình bằng cách thực hiện liếp tiếp phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(3;-1)$ và phép quay tâm O, góc quay $90°$. Viết phương trình đường thẳng MN.

A. $x+4y+20=0.$ B. $x+4y-20=0.$ C. $4x-y-12=0.$ D. $4x-y+5=0.$

Câu 25: Cho tam giác đều ABC cạnh a có G là trọng tâm. Gọi tam giác MNP là ảnh của tam giác ABC qua phép dời hình bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BC}$ và phép quay tâm G, góc quay $90°$. Tính độ dài GM.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. C. $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. D. $a\sqrt{7}$.

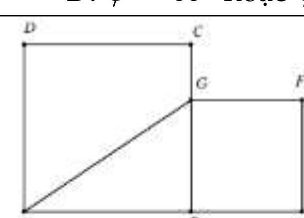
Câu 26: Cho tam giác đều ABC. Hãy xác định góc quay của phép quay tâm A biến B thành điểm C.

A. $\varphi=30°$. B. $\varphi=90°$. C. $\varphi=-120°$. D. $\varphi=-60^0$ hoặc $\varphi=60^0$.

Câu 27: Cho hai hình vuông $ABCD$ và $BEFG$ như hình bên. Tìm ảnh của tam giác ABG qua phép quay tâm B, góc quay $-90°$.

A. ΔBCD. B. ΔCBE.

C. ΔABD. D. ΔDCG.



Câu 28: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho vectơ $\vec{v}=(3;-2)$ và điểm $M(-1;4)$. Xác định tọa độ ảnh của điểm M qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O, góc quay 90^0 và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

A. $(-1;-3)$. B. $(7;-1)$. C. $(2;-6)$. D. $(4;2)$.

Câu 29: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d:2x-3y+9=0$. Viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d qua phép quay tâm O góc 90^0.

A. $2x+3y-9=0$. B. $3x+2y+9=0$. C. $3x+2y-9=0$. D. $2x+3y+9=0$.

Câu 30: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d:4x+3y+5=0$ và $d':x+7y-4=0$. Nếu có phép quay biến đường thẳng này thành đường thẳng kia thì số đo của góc quay φ với $(0\le\varphi\le180°)$ là góc nào sau đây?

A. $120°$. B. $60°$. C. $90°$. D. $45°$.

Câu 31: Có bao nhiêu điểm biến thành chính nó qua phép quay tâm O góc α với $\alpha\ne k2\pi$ (k là một số nguyên)?

A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 32: Cho hình chữ nhật có O là tâm đối xứng. Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O góc quay α, $0<\alpha\le2\pi$ biến hình chữ nhật trên thành chính nó?

A.Không có. B.Hai. C.Ba. D.Bốn.

Câu 33: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $B(-3;6)$. Tìm toạ độ điểm E sao cho B là ảnh của E qua phép quay tâm O góc quay -90^0.

A. $E(6;3)$. B. $E(-3;-6)$. C. $E(-6;-3)$. D. $E(3;6)$.

Câu 34: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép quay tâm O biến điểm $A(1;0)$ thành điểm $A'(0;1)$. Khi đó nó biến điểm $M(1;-1)$ thành điểm

A. $M'(-1;-1)$. B. $M'(1;1)$. C. $M'(-1;1)$. D. $M'(1;0)$.

Câu 35: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, phép quay tâm $I(4;-3)$ góc quay $180°$ biến đường thẳng $d:x+y-5=0$ thành đường thẳng d' có phương trình

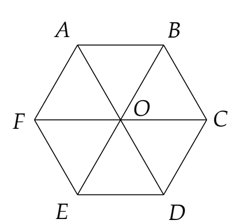
A. $x-y+3=0$. B. $x+y+3=0$. C. $x+y+5=0$. D. $x+y-3=0$.

Câu 36: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C'):x^2+y^2-4x+10y+4=0$. Viết phương trình đường tròn (C) biết (C') là ảnh của (C) qua phép quay với tâm quay là gốc tọa độ O và góc quay bằng $270°$.

A. $(C):x^2+y^2-10x+4y+4=0$. B. $(C):x^2+y^2-10x-4y+4=0$.

C. $(C):x^2+y^2+10x+4y+4=0$. D. $(C):x^2+y^2+10x-4y+4=0$.

Câu 37: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O như hình bên. Tam giác EOD là ảnh của tam giác AOF qua phép quay tâm O góc quay α. Tìm α.



A. $\alpha=60°$. B. $\alpha=-60°$. C. $\alpha=120°$. D. $\alpha=-120°$.

HẾT

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hai điểm phân biệt A, B và α là góc lượng giác bất kì. Biết $Q_{(O;\alpha)}(A)=A_1$, $Q_{(O;\alpha)}(B)=B_1$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}$. B. $\overrightarrow{A_1B_1}=-\overrightarrow{AB}$. C. $A_1B_1\perp AB$. D. $A_1B_1=AB$.

Lời giải:

Phép quay là phép dời hình nên bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 2: Cho tam giác đều ABC (*thứ tự đỉnh theo chiều dương lượng giác*), khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $Q_{\left(A;\frac{\pi}{3}\right)}(B)=C$. B. $Q_{\left(A;-\frac{\pi}{3}\right)}(C)=B$. C. $Q_{\left(A;\frac{7\pi}{3}\right)}(C)=B$. D. $Q_{\left(A;-\frac{7\pi}{3}\right)}(C)=B$.

Lời giải:

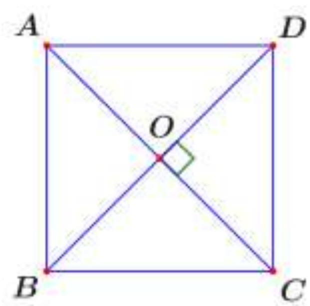
Ta có: $Q_{\left(A;\frac{7\pi}{3}\right)}(C)\neq B$. Vậy C sai.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 3: Gọi hình vuông $ABCD$ tâm O (các đỉnh theo thứ tự theo chiều ngược chiều kim đồng hồ). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $Q_{(O;90^0)}(B)=A$. B. $Q_{(O;90^0)}(B)=C$. C. $Q_{(O;90^0)}(B)=O$. D. $Q_{(O;90^0)}(B)=D$.

Lời giải:



- $Q_{(O;90^0)}(B)=C$ vậy B đúng.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 4: Cho hình vuông $MNPQ$ (thứ tự các đỉnh cùng chiều quay của kim đồng hồ). Phép quay nào sau đây biến điểm M thành điểm P.

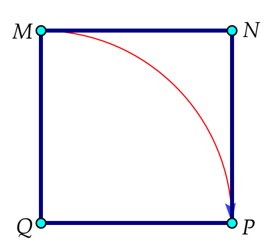
A. Phép quay tâm Q góc $-90°$. B. Phép quay tâm Q góc $45°$.

C. Phép quay tâm Q góc $-45°$. D. Phép quay tâm Q góc $90°$.

Lời giải:

Dễ thấy $Q_{(Q,-90°)}(M)=P$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***



Câu 5: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(1;2)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $Q_{\left(O;\frac{3\pi}{2}\right)}(A)=A'(-2;1)$. B. $Q_{\left(O;\frac{3\pi}{2}\right)}(A)=A'(2;-1)$.

C. $Q_{\left(O;\frac{3\pi}{2}\right)}(A)=A'(-1;-2)$. D. $Q_{\left(O;\frac{3\pi}{2}\right)}(A)=A'(-2;-1)$.

Lời giải:

Ta có: $Q_{\left(O;\frac{3\pi}{2}\right)}\left(A\right)=Q_{\left(O;-\frac{\pi}{2}\right)}\left(A\right)=A'\left(2;-1\right).$

$\Rightarrow$ *Chọn đáp án B.*

Câu 6: Có bao nhiêu phép quay với góc quay α $\left(0^0<\alpha<360^0\right)$ biến tam giác đều cho trước thành chính nó?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

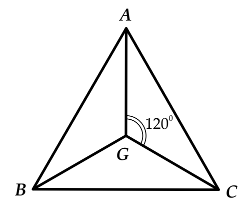
Lời giải:

Tồn tại hai phép quay với góc quay α $\left(0^0<\alpha<360^0\right)$:

+) $Q_{\left(G;120^0\right)}\left(\Delta ABC\right)=\left(\Delta ABC\right).$

+) $Q_{\left(G;240^0\right)}\left(\Delta ABC\right)=\left(\Delta ABC\right).$

Với G là trọng tâm tam giác ABC.



$\Rightarrow$ *Chọn đáp án C.*

Câu 7: Biết thực hiện liên tiếp hai phép quay $Q_{(I;\alpha)}$ và $Q_{(I;\beta)}$, $\left(\alpha\neq k2\pi,\ \beta\neq k'2\pi,\ k,k'\in\mathbb{Z}\right)$ ta được phép đồng nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

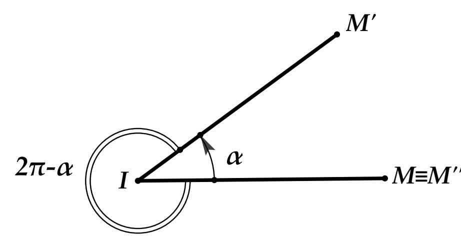
A. $\alpha+\beta=\pi+k2\pi,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$ B. $\alpha+\beta=k2\pi,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$

C. $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$ C. $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$

Lời giải:

Khi $\alpha+\beta=k2\pi,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$ thì thực hiện liên tiếp hai phép quay $Q_{(I;\alpha)}$ và $Q_{(I;\beta)}$, $\left(\alpha\neq k2\pi,\ \beta\neq k'2\pi,\ k,k'\in\mathbb{Z}\right)$ ta được phép đồng nhất.

$\Rightarrow$ *Chọn đáp án B.*



Câu 8: Phép biến hình nào sau đây **không** có tính chất: "Biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với nó"?

A. Phép đồng nhất. B. Phép vị tự. C. Phép quay bất kì. D. Phép tịnh tiến.

Lời giải:

Phép quay với góc quay $\alpha=k2\pi$ hoặc $\alpha=\pi+k2\pi,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$ biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

$\Rightarrow$ *Chọn đáp án C.*

Câu 9: Cho đường thẳng Δ và điểm $I\notin\Delta$. Phép quay tâm I với góc quay α nào sau đây thì biến đường thẳng thành chính nó?

A. $\alpha=60^0.$ B. $\alpha=90^0.$ C. $\alpha=180^0.$ D. $\alpha=360^0.$

Lời giải:

- $Q_{(I;60^\circ)}\left(\Delta\right)=\Delta'\Rightarrow\left(\Delta;\Delta'\right)=60^\circ\Rightarrow\Delta\neq\Delta'$. Vậy A sai
- $Q_{(O;90^\circ)}\left(\Delta\right)=\Delta'\Rightarrow\Delta'\perp\Delta$. Vậy B sai
- $Q_{(O;180^\circ)}\left(\Delta\right)=\Delta'\Rightarrow\Delta'\,//\,\Delta$. Vậy C sai
- $Q_{(O;360^\circ)}\left(\Delta\right)=\Delta'\Rightarrow\Delta'\equiv\Delta$. Vậy D đúng

$\Rightarrow$ *Chọn đáp án D.*

Câu 10: Phép quay tâm I góc quay $90°$ biến đường thẳng d thành đường thẳng d'. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $d \perp d'$. B. $d // d'$. C. $d \equiv d'$. D. $(d, d') = 45°$.

Lời giải:

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 11: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, ảnh của điểm $B(3;-4)$ qua phép quay tâm O, góc quay -90^0, có tọa độ là

A. $(4;3)$. B. $(-4;-3)$. C. $(-3;4)$. D. $(4;-3)$.

Lời giải:

- $Q_{(O;-90°)}(B) = B' \Rightarrow \begin{cases} x_{B'} = y_B = -4 \\ y_{B'} = x_B = -3 \end{cases} \Rightarrow B'(-4;-3)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 12: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(0;3)$. Xác định tọa độ điểm M' là ảnh của điểm M qua phép quay tâm $O(0;0)$, góc quay $\alpha = 270°$.

A. $M'(-3;0)$. B. $M'(-3;3)$. C. $M'(0;-3)$. D. $M'(3;0)$.

Lời giải:

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 13: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, phép quay tâm $I(2;1)$, góc quay 120^0, biến điểm $M(1;9)$ thành điểm M' có tọa độ là

A. $M'\left(\dfrac{1-5\sqrt{3}}{2};\dfrac{-2-3\sqrt{3}}{2}\right)$. B. $M'\left(\dfrac{5-8\sqrt{3}}{2};\dfrac{-6-\sqrt{3}}{2}\right)$.

C. $M'\left(\dfrac{5-8\sqrt{3}}{2};\dfrac{-2-2\sqrt{3}}{2}\right)$. D. $M'\left(\dfrac{1-5\sqrt{3}}{2};\dfrac{-6-\sqrt{3}}{2}\right)$.

Lời giải:

Giả sử $M'(x';y')$. Ta có: $\begin{cases} x' = (x-a)\cos 120^0 - (y-b)\sin 120^0 + a \\ y' = (x-a)\sin 120^0 + (y-b)\cos 120^0 + b \end{cases}$.

Thay $x = 1; y = 9; a = 2; b = 1$, ta có $M'\left(\dfrac{5-8\sqrt{3}}{2};\dfrac{-6-\sqrt{3}}{2}\right)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 14: Cho $M(3;4)$. Tìm ảnh của điểm M qua phép quay tâm O góc quay 30^0.

A. $M'\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2};\dfrac{3}{2}+2\sqrt{3}\right)$. B. $M'\left(-2;2\sqrt{3}\right)$.

C. $M'\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2};2\sqrt{3}\right)$. D. $M'\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-2;\dfrac{3}{2}+2\sqrt{3}\right)$.

Lời giải:

Gọi $M'(x';y')=Q_{(O;30^0)}$.Áp dụng biểu thức tọa độ $\begin{cases} x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha \\ y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha \end{cases}$ ta có

$$\begin{cases} x'=3\cos 30^0-4\sin 30^0=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-2 \\ y'=3\sin 30^0+4\cos 30^0=\dfrac{3}{2}+2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow M'\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-2;\dfrac{3}{2}+2\sqrt{3}\right).$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 15: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(1;1)$. Hỏi các điểm sau điểm nào là ảnh của M qua phép quay tâm O, góc 45°?

A. $M'(-1;1)$. B. $M'(1;0)$. C. $M'(\sqrt{2};0)$. D. $M'(0;\sqrt{2})$.

Lời giải:

+ Thay biểu thức tọa độ của phép quay tâm O góc quay 45° ta có:

$$\begin{cases} x'=x.\cos 45^o-y.\sin 45^o=\cos 45^o-\sin 45^o=0 \\ y'=x.\sin 45^o+y.\cos 45^o=\sin 45^o+\cos 45^o=\sqrt{2} \end{cases}.$$

Vậy $M'(0;\sqrt{2})$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 16: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: 2x-y+1=0$. Ảnh của đường thẳng Δ qua phép quay tâm O, góc quay -90^0 là đường thẳng có phương trình

A. $x+2y+1=0$. B. $2x-y-2=0$. C. $2x-y+2=0$. D. $x+2y-1=0$.

Lời giải:

• Gọi $M(x;y)\in(d)$, $Q_{(O;-90^\circ)}(\Delta)=\Delta'; Q_{(O;-90^\circ)}(M)=M'\Rightarrow M'\in\Delta'$

$\Rightarrow \begin{cases} x_{M'}=y_M \\ y_{M'}=-x_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M=x_{M'} \\ x_M=-y_{M'} \end{cases}$, thay vào phương trình đường thẳng

$\Delta \Rightarrow 2.(-y_{M'})-x_{M'}+1=0\Rightarrow \Delta: x+2y-1=0$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 17: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, phép quay tâm O, góc quay 90^0 biến đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+6y-3=0$ thành đường tròn (C') có phương trình nào sau đây?

A. $(C'):(x-3)^2+(y-2)^2=16$. B. $(C'):(x+3)^2+(y+2)^2=16$.

C. $(C'):(x+2)^2+(y-3)^2=16$. D. $(C'):(x-2)^2+(y-3)^2=16$.

Lời giải:

Đường tròn $I(2;-3)$, bán kính $R=4$.

Ta có: $Q_{(O;90^0)}(I)=I'(3;2)$: Tâm đường tròn (C').

Đường tròn (C') có tâm $I'(3;2)$, bán kính $R'=R=4$ nên có phương trình: $(x-3)^2+(y-2)^2=16$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 18: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x+1)^2+y^2=5$. Xác định phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép quay tâm O, góc quay -90^0.

A. $x^2+(y+1)^2=5$. B. $x^2+(y-1)^2=5$. C. $(x+1)^2+(y+1)^2=5$. D. $(x-1)^2+y^2=5$.

Lời giải:

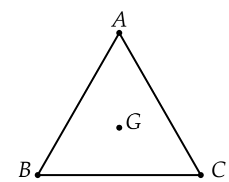
Đường tròn (C) có tâm $I(-1;0)$, bán kính $R=\sqrt{5}$.

Ta có: $Q_{(O;-90^0)}(I)=I'(0;1)$.

Đường tròn (C') có tâm $I'(0;1)$, bán kính $R'=R=\sqrt{5}$, có phương trình: $x^2+(y-1)^2=5$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 19: Cho tam giác đều ABC có G là trọng tâm (hình vẽ bên). Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $Q_{(G,120^\circ)}(B)=A$. B. $Q_{(G,60^\circ)}(B)=A$.

C. $Q_{(G,120^\circ)}(A)=B$. D. $Q_{(G,6^\circ)}(A)=B$.

Lời giải:

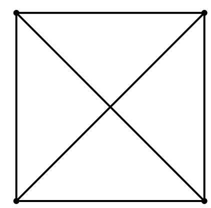
Ta có $Q_{(G,120^\circ)}(A)=B$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 20: Có bao nhiêu phép quay với góc quay α với $\alpha\in[-\pi;\pi]$ biến hình vuông thành chính nó?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 5.

Lời giải:



Gọi O là tâm của hình vuông. Khi đó phép quay tâm O, góc quay α với $\alpha\in\left\{-\pi;-\frac{\pi}{2};0;\frac{\pi}{2};\pi\right\}$ biến hình vuông thành chính nó.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 21: Trong mặt phẳng, tìm ảnh của điểm $A(2;-1)$ qua phép quay tâm O, góc quay 90°.

A. $M(1;-2)$. B. $N(1;2)$. C. $P(-1;2)$. D. $Q(2;1)$.

Lời giải:

Biểu thức tọa độ của phép quay tâm O, góc quay 90° biến $M(x;y)$ thành $M'(x';y')$: $\begin{cases}x'=-y\\y'=x\end{cases}$.

Suy ra $Q_{(O,90^\circ)}(A)=N(1;2)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 22: Trong mặt phẳng, cho đường thẳng $\Delta: x-2y+1=0$. Xác định ảnh của Δ qua phép quay tâm O (O là gốc tọa độ), góc quay -90°.

A. $x-2y-1=0$. B. $2x-y+1=0$. C. $2x+y+1=0$. D. $2x+y-1=0$.

Lời giải:

Lấy $M(-1;0)$, $N(1;1)$ nằm trên Δ.

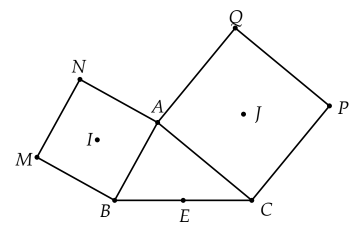
Biểu thức tọa độ của phép quay tâm O, góc quay -90° biến $M(x;y)$ thành $M'(x';y')$: $\begin{cases}x'=y\\y'=-x\end{cases}$.

Khi đó $Q_{(O,-90^\circ)}(M)=M'(0;1)$, $Q_{(O,-90^\circ)}(N)=N'(1;-1)$ và $Q_{(O,-90^\circ)}(\Delta)=\Delta'$.

Suy ra Δ' đi qua hai điểm M', N'. Do đó $\Delta': 2x+y-1=0$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 23: Về phía ngoài tam giác ABC, dựng các hình vuông $ABMN$ và $ACPQ$. Gọi I, J lần lượt là tâm các hình vuông $ABMN$ và $ACPQ$; E là trung điểm BC (tham khảo hình vẽ). Khẳng định nào sau đây **sai**?



A. ΔEIJ vuông cân. B. $BQ \perp CN$.

C. $AE \perp MP$. D. $BQ = CN$.

Lời giải:

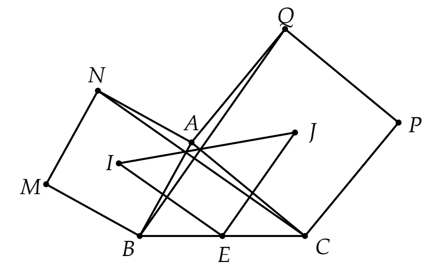
Xét phép quay tâm A, góc quay $90°$.

Ta có $Q_{(A,90°)}(N) = B, Q_{(A,90°)}(C) = Q \Rightarrow Q_{(A,90°)}(NC) = BQ$.

Suy ra $BQ = CN$ và $BQ \perp CN$.

ΔBCN có EI là đường trung bình nên $EI // CN$ và $EI = \frac{1}{2}CN$.

ΔCBQ có EJ là đường trung bình nên $EJ // BQ$ và $EJ = \frac{1}{2}BQ$.



Suy ra $EI = EJ$ và $EI \perp EJ$ $\Rightarrow \Delta EIJ$ vuông cân tại E.

$\Rightarrow$ *Chọn đáp án C.*

Câu 24: Trong mặt phẳng, cho hai điểm $A(1;-3)$, $B(2;1)$. Gọi M, N lần lượt là ảnh của A, B qua phép dời hình bằng cách thực hiện liếp tiếp phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (3;-1)$ và phép quay tâm O, góc quay $90°$. Viết phương trình đường thẳng MN.

A. $x + 4y + 20 = 0$. B. $x + 4y - 20 = 0$. C. $4x - y - 12 = 0$. D. $4x - y + 5 = 0$.

Lời giải:

Ta có $T_{\vec{v}}(A) = C(4;-4)$, $T_{\vec{v}}(B) = D(5;0)$, $Q_{(O,90°)}(C) = M(4;4)$, $Q_{(O,90°)}(D) = N(0;5)$.

Suy ra $MN: x + 4y - 20 = 0$.

$\Rightarrow$ *Chọn đáp án B.*

Câu 25: Cho tam giác đều ABC cạnh a có G là trọng tâm. Gọi tam giác MNP là ảnh của tam giác ABC qua phép dời hình bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BC}$ và phép quay tâm G, góc quay $90°$. Tính độ dài GM.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{7}}{2}$. D. $a\sqrt{7}$.

Lời giải:

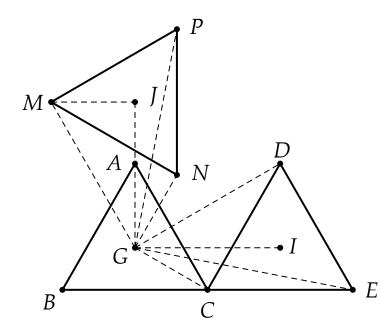
Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BC}$ biến ΔABC thành ΔDCE.

Phép quay tâm G, góc quay $90°$ biến ΔDCE thành ΔMNP.

Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của ΔDCE và ΔMNP.

Ta có $T_{\overrightarrow{BC}}(G) = I \Rightarrow GI = a$, $Q_{(G,90°)}(I) = J \Rightarrow GI = GJ = a$.

$T_{\overrightarrow{BC}}(AG) = DI, Q_{(G,90°)}(DI) = MJ \Rightarrow MJ \perp AG, MJ = AG = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.



Suy ra $MG = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

$\Rightarrow$ *Chọn đáp án B.*

Câu 26: Cho tam giác đều ABC. Hãy xác định góc quay của phép quay tâm A biến B thành điểm C.

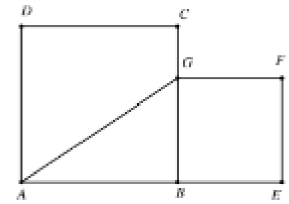
A. $\varphi = 30°$. B. $\varphi = 90°$. C. $\varphi = -120°$. D. $\varphi = -60^0$ hoặc $\varphi = 60^0$.

Lời giải:

Ta có: $\begin{cases} AB = AC \\ (AB, AC) = \pm 60° \end{cases}$ nên $Q_{(A;\pm 60°)}(B) = C$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 27: Cho hai hình vuông $ABCD$ và $BEFG$ như hình bên. Tìm ảnh của tam giác ABG qua phép quay tâm B, góc quay $-90°$.



A. ΔBCD. B. ΔCBE.

C. ΔABD. D. ΔDCG.

Lời giải:

Ta có: $Q_{(B,-90°)}(B) = B, Q_{(B,-90°)}(A) = C, Q_{(B,-90°)}(G) = E$ hay ảnh của tam giác ABG qua phép quay tâm B, góc quay $-90°$ là tam giác ΔCBE.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 28: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho vecto $\vec{v} = (3;-2)$ và điểm $M(-1;4)$. Xác định tọa độ ảnh của điểm M qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O, góc quay 90^0 và phép tịnh tiến theo vecto $\vec{v}$.

A. $(-1;-3)$. B. $(7;-1)$. C. $(2;-6)$. D. $(4;2)$.

Lời giải:

Ta có: $Q_{(O;90^0)}(M) = M_1(-4;-1)$ và $T_{\vec{v}}(M_1) = M_2(-1;-3)$.

$\Rightarrow$***Chọn đáp án A.***

Câu 29: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d: 2x - 3y + 9 = 0$. Viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d qua phép quay tâm O góc 90^0.

A. $2x + 3y - 9 = 0$. B. $3x + 2y + 9 = 0$. C. $3x + 2y - 9 = 0$. D. $2x + 3y + 9 = 0$.

Lời giải:

Gọi $M(x;y) \in d$; $M'(x';y') = Q_{(O;90^0)}(M)$

Ta có: $\begin{cases} x' = x.\cos 90^0 - y.\sin 90^0 \\ y' = x.\sin 90^0 + y.\cos 90^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y' \\ y = -x' \end{cases} \Rightarrow M(y';-x')$.

Có: $M(y';-x') \in d: 2x - 3y + 9 = 0 \Rightarrow 2y' + 3x' + 9 = 0$

Vậy phương trình d' cần tìm là : $3x + 2y + 9 = 0$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 30: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d: 4x + 3y + 5 = 0$ và $d': x + 7y - 4 = 0$. Nếu có phép quay biến đường thẳng này thành đường thẳng kia thì số đo của góc quay φ với $(0 \le \varphi \le 180°)$ là góc nào sau đây?

A. $120°$. B. $60°$. C. $90°$. D. $45°$.

Lời giải:

Hai đường thẳng d và d' có vecto pháp tuyến lần lượt là $\overrightarrow{n_d} = (4;3)$ và $\overrightarrow{n_{d'}} = (1;7)$.

Ta có: $\cos(d,d') = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_d}, \overrightarrow{n_{d'}}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_d}.\overrightarrow{n_{d'}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_d}\right|.\left|\overrightarrow{n_{d'}}\right|} = \dfrac{|4.1 + 3.7|}{5.5\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Suy ra $(d,d') = 45°$.

Vì $\left(d,d'\right)=\varphi$ hoặc $\left(d,d'\right)=180^\circ-\varphi$ nên $\varphi=45^\circ$ hoặc $\varphi=135^\circ$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 31: Có bao nhiêu điểm biến thành chính nó qua phép quay tâm O góc α với $\alpha \neq k2\pi$ (k là một số nguyên)?

A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Lời giải:

Điểm đó chính là tâm quay O.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 32: Cho hình chữ nhật có O là tâm đối xứng. Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O góc quay α, $0<\alpha \le 2\pi$ biến hình chữ nhật trên thành chính nó?

A.Không có. B.Hai. C.Ba. D.Bốn.

Lời giải:

Có 2 phép quay tâm O góc α, $0<\alpha \le 2\pi$ biến tam giác trên thành chính nó là các phép quay với góc quay bằng: π, 2π.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 33: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $B(-3;6)$. Tìm toạ độ điểm E sao cho B là ảnh của E qua phép quay tâm O góc quay -90^0.

A. $E(6;3)$. B. $E(-3;-6)$. C. $E(-6;-3)$. D. $E(3;6)$.

Lời giải:

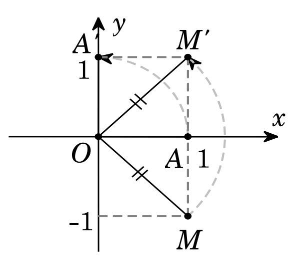
Điểm $E(-6;-3)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 34: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép quay tâm O biến điểm $A(1;0)$ thành điểm $A'(0;1)$. Khi đó nó biến điểm $M\,(1;-1)$ thành điểm

A. $M'(-1;-1)$. B. $M'(1;1)$. C. $M'(-1;1)$. D. $M'(1;0)$.

Lời giải:



Từ giả thiết, kết hợp với hình vẽ ta thấy góc quay là $\dfrac{\pi}{2}$.

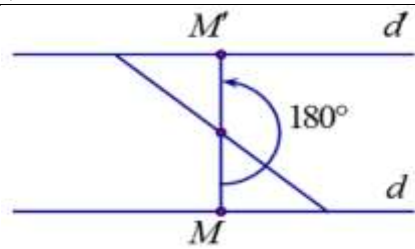
Khi đó phép quay tâm O góc quay $\dfrac{\pi}{2}$ biến điểm $M\,(1;-1)$ thành điểm $M'(1;1)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 35: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, phép quay tâm $I\,(4;-3)$ góc quay 180° biến đường thẳng $d: x+y-5=0$ thành đường thẳng d' có phương trình

A. $x-y+3=0$. B. $x+y+3=0$. C. $x+y+5=0$. D. $x+y-3=0$.

Lời giải:



Ta có phép quay $Q_{(I;180^\circ)}$ là phép đối xứng tâm I

Vì $I \notin d$ nên nếu $Đ_I(d) = d'$ thì $d // d'$, suy ra phương trình $d': x + y + m = 0 (m \neq -5)$.

Xét $\begin{cases} M(0;5) \in d \\ Đ_I(M) = M' \Rightarrow M'(8;-11). \text{ Cho } M'(8;-11) \in d' \Rightarrow m = 3. \text{ Vậy } d': x + y + 3 = 0. \\ I(4;-3) \end{cases}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 36: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C'): x^2 + y^2 - 4x + 10y + 4 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C) biết (C') là ảnh của (C) qua phép quay với tâm quay là gốc tọa độ O và góc quay bằng $270°$.

A. $(C): x^2 + y^2 - 10x + 4y + 4 = 0$.
B. $(C): x^2 + y^2 - 10x - 4y + 4 = 0$.
C. $(C): x^2 + y^2 + 10x + 4y + 4 = 0$.
D. $(C): x^2 + y^2 + 10x - 4y + 4 = 0$.

Lời giải:

Đường tròn (C') có tâm $I'(2;-5)$, bán kính $R' = \sqrt{4 + 25 - 4} = 5$.

Ta có $(C') = Q_{(O,270^\circ)}((C)) \Leftrightarrow (C') = Q_{(O,-90^\circ)}((C)) \Leftrightarrow (C) = Q_{(O,90^\circ)}((C'))$.

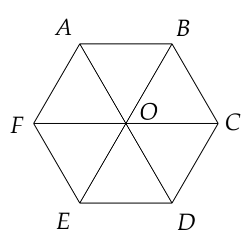
Do đó $I = Q_{(O,90^\circ)}(I')$. Vì đây là phép quay $90°$ nên $\begin{cases} x_I = -y_{I'} = 5 \\ y_I = x_{I'} = 2 \end{cases}$, suy ra $I(5;2)$.

Bán kính đường tròn (C) là $R = R' = 5$.

Vậy $(C): (x-5)^2 + (y-2)^2 = 25 \Leftrightarrow (C): x^2 + y^2 - 10x - 4y + 4 = 0$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 37: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O như hình bên. Tam giác EOD là ảnh của tam giác AOF qua phép quay tâm O góc quay α. Tìm α.



A. $\alpha = 60°$.
B. $\alpha = -60°$.
C. $\alpha = 120°$.
D. $\alpha = -120°$.

Lời giải:

$Q_{(O;-120)}(O) = O$, $Q_{(O;-120)}(A) = F$. $Q_{(O;-120)}(F) = D$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***