



Ths. Lê Văn Đoàn



ĐỀ CƯƠNG HỌC TẬP

TOÁN 10

TẬP II

WWW.TOANMATH.COM



MỤC LỤC

Trang

PHẦN I – ĐẠI SỐ

CHƯƠNG IV – BẤT ĐẲNG THỨC & BẤT PHƯƠNG TRÌNH	1
B – BẤT PHƯƠNG TRÌNH	1
I – Bất phương trình & Hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn	1
Dạng toán 1. Giải phương bất trình bậc nhất – Hai phương trình tương đương	2
Dạng toán 2. Bất phương trình qui về bậc nhất – Hệ bất phương trình	4
Dạng toán 3. Bất phương trình bậc nhất một ẩn chứa tham số	10
II – Dấu của tam thức bậc hai & Bất phương trình bậc hai	15
Dạng toán 1. Xét dấu & Giải bất phương trình bậc hai	15
Dạng toán 2. Phương trình & Bất phương trình chứa căn, trị tuyệt đối	20
Dạng toán 3. Bài toán chứa tham số trong phương trình & bất phương trình	35
CHƯƠNG V – GÓC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC	47
A – HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN	47
B – CUNG LIÊN KẾT	52
C – CÔNG THỨC CỘNG CUNG	62
D – CÔNG THỨC NHÂN	69
E – CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI	77

PHẦN II – HÌNH HỌC

CHƯƠNG III – PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG	89
A – TỌA ĐỘ VÉCTƠ & TỌA ĐỘ ĐIỂM	89
B – PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG	97
Dạng toán 1. Lập phương trình đường thẳng & Bài toán liên quan	100
Dạng toán 2. Các bài toán dựng tam giác – Sự tương giao – Khoảng cách – Góc	105
C – PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN	133
D – PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG ELÍP	177
E – PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG HYPERBOL	197
F – PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG PARABOL	211
G – BA ĐƯỜNG CONIC	224
H – ỨNG DỤNG TỌA ĐỘ GIẢI TOÁN ĐẠI SỐ & GIẢI TÍCH	234

B – BẤT PHƯƠNG TRÌNH



I – Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

① Điều kiện của bất phương trình

Điều kiện của bất phương trình là điều kiện mà ẩn số phải thỏa mãn để các biểu thức ở hai vế của bất phương trình có nghĩa. Cụ thể, ta có ba trường hợp:

- + Dạng $\frac{1}{Q(x)}$ $\longrightarrow$ Điều kiện có nghĩa: $Q(x) \neq 0$.
- + Dạng $\sqrt{P(x)}$ $\longrightarrow$ Điều kiện có nghĩa: $P(x) \geq 0$.
- + Dạng $\frac{1}{\sqrt{Q(x)}}$ $\longrightarrow$ Điều kiện có nghĩa: $Q(x) > 0$.

② Hai bất phương trình tương đương

Hai bất phương trình được gọi là tương đương với nhau nếu chúng có cùng một tập nghiệm.

③ Phương pháp giải bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

a/ Giải bất phương trình bậc nhất một ẩn

☞ Phương pháp:

- Bước 1. Đặt điều kiện cho bất phương trình có nghĩa (nếu có)
- Bước 2. Chuyển vế và giải.
- Bước 3. Giao nghiệm với điều kiện được tập nghiệm S.

b/ Hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

☞ Phương pháp:

- Bước 1. Đặt điều kiện cho hệ bất phương trình có nghĩa (nếu có).
- Bước 2. Giải từng bất phương trình của hệ rồi lấy giao các tập nghiệm thu được.
- Bước 3. Giao nghiệm với điều kiện được tập nghiệm S.

④ Giải và biện luận bất phương trình bậc nhất dạng: $ax + b < 0$.

Điều kiện		Kết quả tập nghiệm
$a > 0$		$S = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$
$a < 0$		$S = \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$
$a = 0$	$b \geq 0$	$S = \emptyset$
	$b < 0$	$S = \mathbb{R}$

☞ Lưu ý: Ta có thể giải tương tự cho các trường hợp: $ax + b > 0 \vee \begin{cases} ax + b \leq 0 \\ ax + b \geq 0 \end{cases}$

Dạng 1. Giải phương trình bậc nhất – Hai phương trình tương đương

☆☆☆

BÀI TẬP ỨNG DỤNG

Bài 1. Tìm điều kiện có nghĩa của các phương trình sau

$$1/ \quad \frac{1}{x} < 1 - \frac{1}{x+1}.$$

$$2/ \quad 2|x| - 1 + \sqrt[3]{x-1} \leq \frac{2x}{x+1}.$$

$$3/ \quad 3x + \frac{3}{\sqrt{x-2}} > 2 + \frac{x}{x-3}.$$

$$4/ \quad \frac{\sqrt{x-3}}{|x| - \sqrt{x-3}} \geq \sqrt{16-2x}.$$

$$5/ \quad \sqrt{\frac{x+1}{(x-2)^2}} < x+1.$$

$$6/ \quad \sqrt[3]{\frac{1+x}{x^2-3x+2}} - 2x^2 \leq 1.$$

$$7/ \quad x + \sqrt{x-4} < 1 + \sqrt{x-4}.$$

$$8/ \quad \sqrt{2-x} + x < 2 + \sqrt{x}.$$

$$9/ \quad \frac{x+2}{1+x^2} \geq 1 + \frac{4}{(x-2)^2}.$$

$$10/ \quad x + \frac{x-1}{\sqrt{x-3}} > 2 - \frac{2}{\sqrt{x-4}}.$$

$$11/ \quad \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{(x-3)(x+4)} \leq \frac{3}{\sqrt{6-x}}.$$

$$12/ \quad \frac{2x-3}{|x-1| - \sqrt{x+2}} \leq \sqrt{3-4x} + \frac{1}{\sqrt{x+6}}.$$

Bài 2. Chứng minh các phương trình sau vô nghiệm

$$1/ \quad x^2 + \sqrt{x+8} \leq -3.$$

$$2/ \quad \sqrt{x-6} + \sqrt{3-x} \geq -4.$$

$$3/ \quad \sqrt{3-x} + \sqrt{x-5} \geq -10.$$

$$4/ \quad \sqrt{1+x^2} - \sqrt{2+x^2} > 1.$$

$$5/ \quad (x-3)\sqrt{-x-10} > (x^4+1)\sqrt{x-5}.$$

$$6/ \quad \frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{x-10}(\sqrt{x}+2)} < \frac{4-x^2}{(x-4)(x+5)}.$$

$$7/ \quad \sqrt{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}} < 2.$$

$$8/ \quad \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^4-x^2+1} < 2\sqrt{x^6+1}.$$

$$9/ \quad 4x^6 + 3 > (x^4 + 2)^2.$$

$$10/ \quad \sqrt{x^2+1} + \frac{4}{\sqrt{x^2+1}} < 4.$$

$$11/ \quad \sqrt{4x^2+4x+2} + \sqrt{x^2-6x+10} < 2. \quad 12/ \quad x + 2\sqrt{x-2} + \sqrt{x^2+1} - 1 \leq 0.$$

Bài 3. Xét sự tương đương của các cặp bất phương trình sau

$$1/ \quad -4x + 1 > 0 \quad \& \quad 4x - 1 < 0.$$

$$2/ \quad 3x + \frac{1}{x-3} \geq 3 + \frac{1}{x-3} \quad \& \quad 3x - 3 \geq 0.$$

- 3/ $\sqrt{x-1} \geq x.$ & $(2x+1)\sqrt{x-1} \geq x(2x+1).$
- 4/ $\frac{3x-5}{x^2+1} > 7.$ & $3x-5 > 7(x^2+1).$
- 5/ $2x-3-\frac{1}{x-5} < x-4.$ & $2x-3 < x-4.$
- 6/ $x+3-\frac{1}{x+7} < 2-\frac{1}{x+7}.$ & $x+3 < 2.$
- 7/ $4x+8 < 1-x.$ & $(18+x-2x^2)(4x+8) < (18+x-2x^2)(1-x).$
- 8/ $3x+1 < x+3.$ & $(3x+1)^2 < (x+3)^2.$
- 9/ $\frac{x+5}{x-1} < 0.$ & $(x+5)(x-1) < 0.$
- 10/ $x^2 \geq x.$ & $x \geq 1.$
- 11/ $x^4 \geq x^2.$ & $x^2 \geq 1.$
- 12/ $\frac{1}{x} \leq 1.$ & $x \geq 1.$
- 13/ $\sqrt{1-x} \leq x.$ & $1-x \leq x^2.$
- 14/ $\sqrt{(x+1)(x-2)} \geq x.$ & $\sqrt{x+1}\sqrt{x-2} \geq x.$
- 15/ $(2-x)^2(x+1) > 2(2-x)^2.$ & $x+1 > 2.$

Bài 4. Giải các bất phương trình sau

- 1/ $-2x + \frac{3}{5} > \frac{3(2x-7)}{3}.$
- 2/ $3 - \frac{2x+1}{5} > x + \frac{3}{4}.$
- 3/ $\frac{5(x-1)}{6} - 1 < \frac{2(x+1)}{3}.$
- 4/ $2 + \frac{3(x+1)}{8} < 3 - \frac{x-1}{4}.$
- 5/ $\frac{3x+1}{2} - \frac{x-2}{3} < \frac{1-2x}{4}.$
- 6/ $\frac{x+1}{2} - \frac{x+2}{3} < 2 + \frac{x}{6}.$
- 7/ $\frac{10-3x}{2} + 9 > \frac{2x-7}{4} - 2x.$
- 8/ $(x+2)^3 \geq (x-1)^2 + 4.$
- 9/ $x + \sqrt{x} < (2\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1).$
- 10/ $(\sqrt{1-x} + 3)(2\sqrt{1-x} - 5) > \sqrt{1-x} - 3.$
- 11/ $\sqrt{(x-4)^2(x+1)} > 0.$
- 12/ $\sqrt{(x+2)^2(x-3)} > 0.$
- 13/ $\sqrt{x-3} \geq \sqrt{3-x}.$
- 14/ $\sqrt{x-1} < 3 + \sqrt{x-1}.$

15/ $\frac{x-2}{\sqrt{x-4}} \leq \frac{4}{\sqrt{x-4}}$.

16/ $\frac{(10-x)\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-4}} > 4$.

17/ $(x-1)(x+1)^2 \geq 0$.

18/ $\frac{\sqrt{x-3}}{1-2x} \leq 0$.

19/ $(x-3)\sqrt{x-2} \geq 0$.

20/ $(4-x)\sqrt{5-x} \leq 0$.

Dạng 2. Bất phương trình quy về bất phương trình bậc nhất một ẩn

Hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

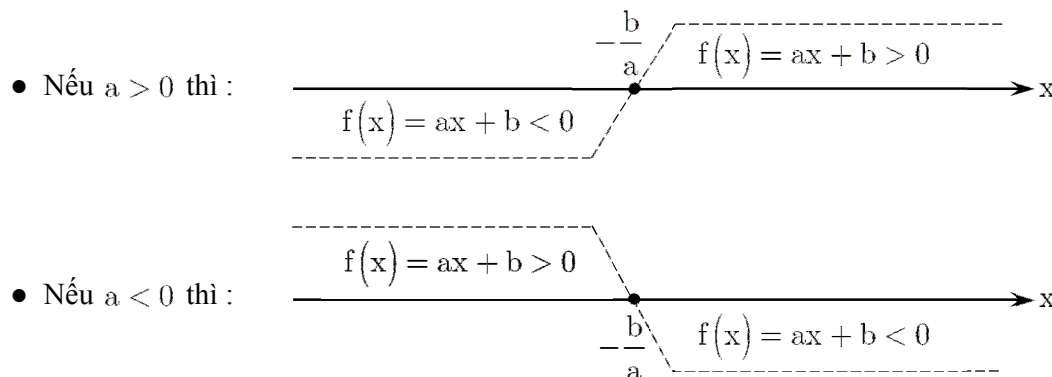


① Dấu của nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$

a/ Sử dụng bảng xét dấu (trái trái – phải cùng: với hệ số a)

x		$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	$a > 0$	–	0	+
	$a < 0$	+	0	–

b/ Sử dụng trục số



② Bất phương trình tích số

— Dạng: $P(x).Q(x) > 0$ (1) Trong đó: $P(x); Q(x)$ là các nhị thức bậc nhất.

— Phương pháp: Lập bảng xét dấu $P(x).Q(x)$. Từ đó suy ra tập nghiệm của (1).

③ Bất phương trình chứa ẩn số ở mẫu

— Dạng: $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ (2) Trong đó: $P(x); Q(x)$ là các nhị thức bậc nhất.

— Phương pháp: Lập bảng xét dấu $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Từ đó suy ra tập nghiệm của (2).

⌘ Lưu ý: Không nên quy đồng và khử mẫu.

④ Bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

— Tương tự như giải phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối, ta thường sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của giá trị tuyệt đối để khử dấu giá trị tuyệt đối.

— Dạng 1. $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ -g(x) < f(x) < g(x) \end{cases}$

— Dạng 2. $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) : \text{có nghĩa} \\ g(x) \geq 0 \\ \begin{cases} f(x) < -g(x) \\ f(x) > g(x) \end{cases} \end{cases}$

✎ Lưu ý: Với $B > 0$, ta luôn có $|A| < B \Leftrightarrow -B < A < B$ và $|A| > B \Leftrightarrow \begin{cases} A < -B \\ A > B \end{cases}$.

BÀI TẬP ỨNG DỤNG

Bài 5. Lập bảng xét dấu của các hàm số sau

1/ $f(x) = x + 1$.

2/ $f(x) = 2x + 1$.

3/ $f(x) = 2 - x$.

4/ $f(x) = 2\sqrt{2} + x$.

5/ $f(x) = 3 - \sqrt{3}x$.

6/ $f(x) = (m^2 + 1)x - 1$.

7/ $f(x) = 4m - 1 - (m^2 - 2m + 2)x$.

8/ $f(x) = (4m^2 + 2m + 1)x - 3m$.

9/ $f(x) = m^3 + m - 3(m^2 + 1)x$.

10/ $f(x) = 3x(3x - 1)$.

11/ $f(x) = \frac{5x - 3}{(x - 3)(2x - 1)}$.

12/ $f(x) = \frac{x(x + 1)}{x - 2}$.

13/ $f(x) = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x^2 - 1}$.

14/ $f(x) = (2x - 5)^2$.

15/ $f(x) = (3 - 7x)^4$.

16/ $f(x) = -(3x + 1)^2$.

17/ $f(x) = (2x - 7)^3$.

18/ $f(x) = (3 - x\sqrt{2})^7$.

19/ $f(x) = (5x + 2)^5$.

20/ $f(x) = x(8 - 3x)$.

21/ $f(x) = (4x - 1)(x - 1)$.

22/ $f(x) = (3x + 7)(5 - 2x)$.

23/ $f(x) = (2x + 5)(3x + 7)$.

24/ $f(x) = x^3(x - 3)$.

25/ $f(x) = x(2 - 7x)^3.$

26/ $f(x) = (x + 1)^3(4 - x).$

27/ $f(x) = (x\sqrt{3} - 1)(\sqrt{2} - x)^5.$

28/ $f(x) = (2 - x)^3(2x + 5)^5.$

29/ $f(x) = (2x - 4)(x + 1)(6 - 2x).$

30/ $f(x) = (4 - x)(x + 1)(5x - 2).$

31/ $f(x) = 3x(2x + 7)(9 - 3x).$

32/ $f(x) = (1 - 3x)^3(x - 1)^2.$

33/ $f(x) = (4 - x)^2(5x - 2).$

34/ $f(x) = x^2(2x - 3).$

Bài 6. Giải các bất phương trình sau

1/ $(x + 1)(x - 1)(3x - 6) > 0.$

2/ $(2x - 7)(4 - 5x) \geq 0.$

3/ $x^2 - x - 20 > 2(x - 11).$

4/ $3x(2x + 7)(9 - 3x) \geq 0.$

5/ $\frac{2}{x - 3} > 0.$

6/ $\frac{-3}{2 - 3x} > 0.$

7/ $\frac{1}{x - 1} \leq 2.$

8/ $\frac{x}{x - 5} \geq \frac{1}{2}.$

9/ $\frac{x}{x^2 - x} \geq 0.$

10/ $\frac{4x + 3}{2x - 5} \leq 6.$

11/ $\frac{x - 2}{x^2 - 4} < 0.$

12/ $\frac{1 - x}{x} < 0.$

13/ $\frac{5x - 6}{x + 6} \leq 1.$

14/ $\frac{x + 9}{x - 1} \leq 0.$

15/ $\frac{x - 1}{x - 3} \geq 2.$

16/ $\frac{5 - 6x}{4x + 1} \geq -1.$

17/ $\frac{(2x - 5)(x + 2)}{-4x + 3} > 0.$

18/ $\frac{x - 3}{x + 1} > \frac{x + 5}{x - 2}.$

19/ $\frac{2x + 3}{3x + 7} \geq \frac{2}{3}.$

20/ $\frac{7x - 5}{8x + 3} \geq 4.$

21/ $\frac{x - 3}{x + 5} < \frac{1 - 2x}{x - 3}.$

22/ $\frac{3x - 4}{x - 2} > 1.$

23/ $\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4} \leq 0.$

24/ $\frac{x - 2}{x^2 - 4} \geq 0.$

25/ $\frac{(4x + 3)^2}{(2x - 5)^5} \leq 0.$

26/ $\frac{3 - 2x}{x^2} > 0.$

$$27/ \frac{2x-5}{2-x} \geq -1.$$

$$28/ \frac{2x-5}{3x+2} < \frac{3x+2}{2x-5}.$$

$$29/ \frac{-4}{3x+1} < \frac{3}{2-x}.$$

$$30/ \frac{2x^2+x}{1-2x} \geq 1-x$$

$$31/ \frac{x^2}{3x-8} \geq 0.$$

$$32/ \frac{(x+9)^4}{x-1} \geq 0.$$

$$33/ \frac{x+9}{(x-1)^2} < 0.$$

$$34/ \frac{x^2+6x+9}{2x^2-x-1} > 0.$$

$$35/ \frac{(3x+1)(x-3)}{5-2x} \leq 0.$$

$$36/ \frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1} < 1.$$

$$37/ \frac{2}{x-1} \leq \frac{5}{2x-1}.$$

$$38/ x+1 > \frac{4}{x+1}.$$

$$39/ \frac{1}{x-1} < \frac{2}{x-x^2}.$$

$$40/ \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} > \frac{3}{x+3}.$$

$$41/ \frac{(5-6x)^6}{(4x+1)^3} \leq 0.$$

$$42/ \frac{-1}{x-2} < \frac{3}{3x-4}.$$

$$43/ \frac{x^2-(2x-6)^2}{(1-x)(x+4)} \leq 0.$$

$$44/ \frac{x+2}{3x+1} > \frac{x-2}{2x-1}.$$

$$45/ \frac{(x-1)(x+2)^2}{-1-x} \leq 0.$$

$$46/ \frac{x^2+3x-1}{2-x} \geq -x.$$

$$47/ \frac{(x+9)^4}{x-1} \leq 0.$$

$$48/ \frac{(x+2)^4(x+6)}{(x-7)^3(x-2)^2} \geq 0.$$

$$49/ \frac{7}{(x-2)(x-3)} + \frac{9}{x-3} + 1 < 0.$$

$$50/ \frac{(x-1)^3(x+2)^4}{x^2(x-7)^5} \geq 0.$$

$$51/ \frac{x^2-3x+24}{x^2-3x+3} < 4.$$

$$52/ x^3-6x^2+11x-6 \geq 0.$$

$$53/ x^3+8x^2+17x+10 < 0.$$

$$54/ x^3+6x^2+11x+6 > 0.$$

$$55/ 2x^3-5x^2-2x+2 < 0.$$

$$56/ (x^2-2x-3)^2 \geq (3x-3)^2.$$

$$57/ 1 < \frac{3x^2-7x+8}{x^2+1} \leq 2.$$

$$58/ \frac{5x-7}{x-5} < 4 - \frac{x}{5-x} + \frac{3x}{x^2-25} \leq 4.$$

Bài 7. Giải các hệ bất phương trình sau

$$1/ \begin{cases} 8x - 5 > \frac{15x - 8}{2} \\ 2(2x - 3) > 5x - \frac{3}{4} \end{cases}.$$

$$2/ \begin{cases} \frac{4x - 5}{7} < x + 3 \\ \frac{3x + 8}{4} > 2x - 5 \end{cases}.$$

$$3/ \begin{cases} \frac{4}{3} - 12x \leq x + \frac{1}{2} \\ \frac{4x - 3}{2} < \frac{2 - x}{3} \end{cases}.$$

$$4/ \begin{cases} \frac{x}{2} \leq x + \frac{4}{3} \\ \frac{2x - 9}{3} < \frac{19 + x}{2} \end{cases}.$$

$$5/ \begin{cases} \frac{11 - x}{2} \geq 2x - 5 \\ 2(3x + 1) \geq \frac{x - 8}{2} \end{cases}.$$

$$6/ \begin{cases} 15x - 2 > 2x + \frac{1}{3} \\ 2(x - 4) < \frac{3x - 14}{2} \end{cases}.$$

$$7/ \begin{cases} \frac{2x - 3}{4} < \frac{3x + 1}{5} \\ 3x + \frac{5}{2} < 8 - \frac{x}{3} \end{cases}.$$

$$8/ \begin{cases} \frac{3x - 1}{4} - \frac{3(x - 2)}{8} - 1 > \frac{5 - 3x}{2} \\ 3 - \frac{4x - 1}{18} > \frac{x - 1}{12} - \frac{4 - 5x}{9} \end{cases}.$$

$$9/ \begin{cases} 3x + 1 \geq 2x + 7 \\ 4x + 3 > 2x + 19 \end{cases}.$$

$$10/ \begin{cases} 9x - 12 \geq 4x + 15 \\ 19 - 3x < 7 + 5x \end{cases}.$$

$$11/ \begin{cases} \frac{5x + 7}{3} \geq 3 - x \\ \frac{1 - 5x}{13} < 3x + 4 \end{cases}.$$

$$12/ \begin{cases} 5x - \frac{3}{2} \geq \frac{2x + 1}{6} \\ x^2 < (x + 2)^2 \end{cases}.$$

$$13/ \begin{cases} x + 3 \leq 4 + 2x \\ 5x - 3 < 4x - 1 \end{cases}.$$

$$14/ \begin{cases} \frac{x + 3}{7} \geq 3 - x \\ \frac{1 - 5x}{2} < 4x + 2 \end{cases}.$$

$$15/ \begin{cases} 5x - 2 < 4x + 5 \\ x^2 < (x + 2)^2 \end{cases}.$$

$$16/ \begin{cases} 7x - 5 < 0 \\ (2x + 3)(x - 1) \geq 0 \end{cases}.$$

$$17/ \begin{cases} (1 + x)^2 < x^2 - 3x + 5 \\ x^3 - 6x^2 - 7x - 5 < (x - 2)^3 \end{cases}.$$

$$18/ \begin{cases} (x - 2)(6 - x) \geq 0 \\ \frac{4x - 3}{2} < x + 3 \end{cases}.$$

$$19/ \begin{cases} \frac{(x - 1)^2}{x - 2} \geq 0 \\ 2x - 4 > 0 \end{cases}.$$

$$20/ \begin{cases} \frac{x - 2}{x - 3} > 7 \\ (2x - 3)(x + 3) \geq 0 \end{cases}.$$

$$21/ \begin{cases} \frac{2x + 3}{x - 1} \geq 1 \\ \frac{(x + 2)(2x - 4)}{x - 1} \leq 0 \end{cases}.$$

$$22/ \begin{cases} \frac{x + 1}{1 - 2x} > \frac{x - 4}{3 - 2x} \\ \frac{2}{x + 1} < 1 \end{cases}.$$

$$23/ \begin{cases} (x+1)(x+4) < 0 \\ \frac{2}{2x+1} > \frac{1}{x-3} \end{cases}.$$

$$24/ \begin{cases} x-1 \leq 2x-3 \\ \frac{5-3x}{2} \leq x-3 \\ 3x < x+5 \end{cases}.$$

$$25/ \begin{cases} \frac{2}{2x-1} \leq \frac{1}{3-x} \\ |x| < 1 \end{cases}.$$

$$26/ \begin{cases} |5x-4| < 6 \\ \frac{3}{1-x} \geq \frac{4}{x+1} \end{cases}.$$

$$27/ \begin{cases} 4x^2 - 1 \geq 0 \\ x(x-2) \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 2 \leq 0 \end{cases}.$$

$$28/ \begin{cases} \frac{2}{x} \geq x-1 \\ \frac{x}{x+1} > 4+x \\ \frac{x+2}{1-x} < \frac{2-x}{x+1} \end{cases}.$$

Bài 8. Tìm các nghiệm nguyên của các hệ bất phương trình sau

$$1/ \begin{cases} 6x + \frac{5}{7} > 4x + 7 \\ \frac{8x+3}{2} < 2x + 25 \end{cases}.$$

$$2/ \begin{cases} 15x - 2 > 2x + \frac{1}{3} \\ 2(x-4) < \frac{3x-14}{2} \end{cases}.$$

Bài 9. Giải các bất phương trình sau

$$1/ |4-3x| \leq 8.$$

$$2/ |2x+1| \geq 3.$$

$$3/ |2x-4| \leq x+12.$$

$$4/ |x-2| < x-1.$$

$$5/ |x-3| < 3x+15.$$

$$6/ |3x-2| > 7.$$

$$7/ |5x-12| < 3.$$

$$8/ |1-4x| < 2x+1.$$

$$9/ |2x-8| \leq 7.$$

$$10/ |3x+15| \geq 3.$$

$$11/ |x-1| > \frac{x+1}{2}.$$

$$12/ |x| < \frac{4}{x}.$$

$$13/ |x-2| < \frac{x}{2}.$$

$$14/ |2x-5| \leq x+1.$$

$$15/ |2x+1| \leq x.$$

$$16/ |x-2| > x+1.$$

$$17/ \left| \frac{2}{x-4} \right| > 1.$$

$$18/ \left| \frac{2x-1}{x-1} \right| > 2.$$

$$19/ \left| \frac{2}{x-13} \right| > \frac{8}{9}.$$

$$20/ |x| < 2|x-4|+2.$$

$$21/ \left| \frac{-1}{x+2} \right| \geq \left| \frac{2}{x-1} \right|.$$

$$22/ \left| \frac{x-1}{x+1} \right| < 1.$$

23/ $\frac{|x+2|-x}{x} < 2.$

24/ $\frac{|x+3|+x}{x+2} > 1.$

25/ $\frac{|1-3x|-|2x-1|}{4x-|x+1|} > 1.$

26/ $|x-1|+|-2x+6| \geq x-5.$

27/ $|2x+\sqrt{2}|+|x+\sqrt{2}| < -3x-2.$

28/ $|x-1|+|2x-4|-|4-x| < 2.$

Dạng 3. Bất phương trình bậc nhất một ẩn chứa tham số**① Giải và biện luận bất phương trình bậc nhất dạng $ax + b < 0$**

Điều kiện		Kết quả tập nghiệm
$a > 0$		$S = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$
$a < 0$		$S = \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$
$a = 0$	$b \geq 0$	$S = \emptyset$
	$b < 0$	$S = \mathbb{R}$

② Giải và biện luận bất phương trình dạng: $(a_1x + b_1)(a_2x + b_2) > 0$ hoặc $\frac{a_1x + b_1}{a_2x + b_2} > 0$

- Đặt $x_1 = -\frac{b_1}{a_1}$; $x_2 = -\frac{b_2}{a_2}$. Tính $x_1 - x_2$.
- Lập bảng xét dấu chung: a_1, a_2 ; $x_1 - x_2$.
- Từ bảng xét dấu, ta chia bài toán thành nhiều trường hợp. Trong mỗi trường hợp ta xét dấu của $(a_1x + b_1)(a_2x + b_2)$ hoặc $\frac{a_1x + b_1}{a_2x + b_2}$ nhờ qui tắc đan dấu.

③ Giải và biện luận hệ bất phương trình bậc nhất chứa tham số:
$$\begin{cases} f(x; m) > 0 & (1) \\ g(x; m) > 0 & (2) \end{cases}$$

- Giải (1); (2) tìm tập nghiệm S_1 ; S_2 tương ứng $\Rightarrow$ Tập nghiệm hệ: $S = S_1 \cap S_2$.
- Hệ có nghiệm khi $S = S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$.
- Hệ vô nghiệm khi $S = S_1 \cap S_2 = \emptyset$.
- Hệ có nghiệm duy nhất khi hệ có dạng $\begin{cases} f(x; m) \geq a \\ g(x; m) \leq b \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{a = b}$.

📌 **Lưu ý:** Cần nắm vững các phép toán trên tập hợp ở phần chương I.

BÀI TẬP ỨNG DỤNG

Bài 10. Tìm tham số m để bất phương trình sau đây vô nghiệm

1/ $m^2x + 4m - 3 < x + m^2$.

2/ $m^2x + 1 \geq m + (3m - 2)x$.

3/ $mx - m^2 > mx - 4$.

4/ $3 - mx < 2(x - m) - (m + 1)^2$.

Bài 11. Giải và biện luận các bất phương trình sau

1/ $m(x - m) \leq x - 1$.

2/ $mx + 6 > 2x + 3m$.

3/ $(m + 1)x + m < 3m + 4$.

4/ $mx + 1 > m^2 + x$.

5/ $\frac{m(x - 2)}{6} + \frac{x - m}{3} > \frac{x + 1}{2}$.

6/ $3 - mx < 2(x - m) - (m + 1)^2$.

7/ $mx - m^2 > 2x - 4$.

8/ $x + 2m > 2 + mx$.

9/ $m^2x - 1 \leq x + m$.

10/ $2x + m^2 \geq mx + 3m - 2$.

11/ $m(x - 2) \leq 2mx + m - 1$.

12/ $25m^2 - x < m^2x - 5$.

13/ $2(x - m) - (m + 1)^3 \geq 3 - mx$.

14/ $(m + 1)(m - 2)x \leq m^2 - 4$.

15/ $(m^2 - 3m + 2)x \leq m - 1$.

16/ $x + 25m^2 \geq 5mx + 1$.

17/ $(m^2 + 2m)x + 8 < 4mx + m^3$.

18/ $m(x + 1) > 1$.

19/ $(m + 1)(mx - 1) > 2$.

20/ $(m^2 - 3m + 2)(mx - 1) \leq m^2 - 1$.

21/ $(m^2 - 3m + 2)x \leq m - 1$.

22/ $x(x - m) \leq 0$.

23/ $(x - 1)(x + m) \geq 0$.

24/ $(x - 3)(6m - 12 - x) \leq 0$.

25/ $(2x - 6)(x - m + 1) \geq 0$.

26/ $\frac{x - \sqrt{3}}{x + 2m + 1} > 0$.

27/ $\frac{x - 4m}{2 - x} > 0$.

28/ $\frac{x - 4m}{4 - x} \leq 0$.

29/ $(x + m)(x + 1 - m) > 0$.

30/ $(2x - m)(x + 2 - m) \leq 0$.

31/ $\frac{m - x}{m + 2 + x} \leq 0$.

32/ $\frac{x + 4m}{2x - m + 4} > 0$.

33/ $m^2(x - 1) < m - 4mx - 3x$.

34/ $\frac{2x + m - 1}{x + 1} > 0$.

35/ $\frac{mx - m + 1}{x - 1} < 0$.

36/ $\sqrt{x - 1}(x - m + 2) > 0$.

Bài 12. Giải và biện luận hệ bất phương trình

1/
$$\begin{cases} 2x + 1 \leq 0 \\ 3x + 1 \geq m \end{cases}$$

2/
$$\begin{cases} 4x - 1 \geq 0 \\ x + 3m \geq 0 \end{cases}$$

3/
$$\begin{cases} (x-1)(4-x) > 0 \\ x-m+1 \leq 0 \end{cases}$$

4/
$$\begin{cases} (x-\sqrt{5})(\sqrt{7}-x) \geq 0 \\ x-m-1 \leq 0 \end{cases}$$

5/
$$\begin{cases} \frac{3}{1-x} > \frac{4}{x+1} \\ x-m-1 \geq 0 \end{cases}$$

6/
$$\begin{cases} \frac{2}{1-x} > \frac{5}{1-2x} \\ x-m-1 \geq 0 \end{cases}$$

7/
$$\begin{cases} \frac{x-2}{2} < 4x-8 \\ (x-m+1)^2 > (x-m-1)^2 \end{cases}$$

8/
$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ mx-2 < 0 \end{cases}$$

9/
$$\begin{cases} x-2 \leq 0 \\ (m+1)x-1 > 0 \end{cases}$$

10/
$$\begin{cases} x+m \geq 1 \\ mx+2 \geq m \end{cases}$$

Bài 13. Tìm tham số m để hệ bất phương trình sau có nghiệm

1/
$$\begin{cases} 4x-5 > -3x+2 \\ 3x+2m+2 < 0 \end{cases}$$

2/
$$\begin{cases} 3x-2 > -4x+5 \\ 3x+m+2 < 0 \end{cases}$$

3/
$$\begin{cases} 4(x-3)+1 \leq 3(x-3) \\ x+m > 1 \end{cases}$$

4/
$$\begin{cases} \frac{1}{x+1} > 2 \\ x-m \leq 2 \end{cases}$$

5/
$$\begin{cases} \frac{1}{x+m} \geq 2 \\ x-1 \geq 2 \end{cases}$$

6/
$$\begin{cases} \frac{2}{m-x} \geq 1 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

7/
$$\begin{cases} x-7 \leq 0 \\ mx \geq m+12 \end{cases}$$

8/
$$\begin{cases} 2x-1 > 0 \\ (3m-2)x-m > 0 \end{cases}$$

9/
$$\begin{cases} 2x-1 < x+2 \\ m(m+1)x+1 > (m-2)x+3m+7 \end{cases}$$

10/
$$\begin{cases} 3x+3 > 2x \\ x-1 \leq 2m(x-2m) \end{cases}$$

11/
$$\begin{cases} x+m-1 > 0 \\ 3m-2-x > 0 \end{cases}$$

12/
$$\begin{cases} mx-1 > 0 \\ (3m-2)x-m > 0 \end{cases}$$

13/
$$\begin{cases} x+4m^2 \leq 2mx+1 \\ 3x+2 > 2x-1 \end{cases}$$

14/
$$\begin{cases} 7x-2 \geq -4x+19 \\ 2x-3m+2 < 0 \end{cases}$$

Bài 14. Tìm tham số m để hệ bất phương trình sau vô nghiệm

$$1/ \begin{cases} 2x + 7 < 8x - 1 \\ m + 5 < 2x \end{cases}.$$

$$2/ \begin{cases} (x - 3)^2 \geq x^2 + 7x + 1 \\ 2m \leq 8 + 5x \end{cases}.$$

$$3/ \begin{cases} x - m + 3 > 2m \\ -1 < 2(x - 2) \end{cases}.$$

$$4/ \begin{cases} 4x + 5 > 11 - x \\ m^2 - mx > 3(3 - x) \end{cases}.$$

$$5/ \begin{cases} \frac{8}{3 - x} > 1 \\ x > 3 - mx \end{cases}.$$

$$6/ \begin{cases} x - 7 \leq 0 \\ mx \geq m + 12 \end{cases}.$$

$$7/ \begin{cases} (x - 1)(x - 2) < 0 \\ mx + 1 < 2x + m \end{cases}.$$

$$8/ \begin{cases} \frac{2x}{x - 1} \leq 1 \\ 2x - m + 2 > 0 \end{cases}.$$

$$9/ \begin{cases} 3x + 5 \geq x - 1 \\ (x + 2)^2 \leq (x - 1)^2 + 9 \\ m^2x + 1 > (3m - 2)x + m \end{cases}.$$

$$10/ \begin{cases} \frac{1}{x - 1} < \frac{1}{x + 2} \\ x(x^2 - 3m) < x^2(m - 3) \end{cases}.$$

Bài 15. Tìm tham số m để bất phương trình có tập nghiệm là D cho trước

$$1/ x + m \geq 1$$

$$\text{có tập nghiệm là } D = [-2; +\infty).$$

$$2/ 2x - m < 3(x - 1)$$

$$\text{có tập nghiệm là } D = (4; +\infty).$$

$$3/ mx - 16 \geq 2(x - m^3)$$

$$\text{có tập nghiệm là } D = [-38; +\infty).$$

$$4/ \sqrt{4 - x}[(m^2 + 1)x - 5m] \geq 0$$

$$\text{có tập nghiệm là } D = [2; 4].$$

$$5/ m^3(x + 2) \leq m^2(x - 1)$$

$$\text{có tập nghiệm là } D = \mathbb{R}.$$

$$6/ m(x + mx) \leq 1$$

$$\text{có tập nghiệm là } D = \emptyset.$$

$$7/ m^2(x - 1) \geq 9x + 3m$$

$$\text{có tập nghiệm là } D = \mathbb{R}.$$

$$8/ m^2(x - 1) < m - 4mx - 3x$$

$$\text{có tập nghiệm là } D = \emptyset.$$

Bài 16. Tìm tham số m để bất phương trình thỏa $\forall x \in D$ cho trước

$$1/ x \geq m$$

$$\forall x \in D = [0; 2].$$

$$2/ 2x + m \leq 2$$

$$\forall x \in D = [-1; 4].$$

$$3/ m^2 - x < 1$$

$$\forall x \in D = (3; 4).$$

$$4/ x - 1 > 4m$$

$$\forall x \in D = [-2; 4].$$

$$5/ (m^2 + 1)x < 4$$

$$\forall x \in D = [-1; 2].$$

- | | |
|-------------------------------------|--|
| 6/ $5x - m \leq 2$ | $\forall x \in D = (0; 4)$. |
| 7/ $m - 3x \leq 2$ | $\forall x \in D = (3; 1)$. |
| 8/ $3x - 1 < 2(x + 1)$ | $\forall x \in D = (m - 1; 4]$. |
| 9/ $x - 2m \leq 1$ | $\forall x \in D = (-\infty; 2 - m)$. |
| 10/ $1 - 2x \leq 0$ | $\forall x \in D = [m - 1; 2 - m]$. |
| 11/ $x - 2m + 1 > 0$ | $\forall x \in D = (m + 1; 2m - 3)$. |
| 12/ $(x - 1)(x + 3) < 0$ | $\forall x \in D = [m; 1 - m)$. |
| 13/ $(2x - 1)(x + 4) > 0$ | $\forall x \in D = (2m - 1; m + 3]$. |
| 14/ $(m^2 + 1)x - m(x + 3) + 1 > 0$ | $\forall x \in D = [-1; 2]$. |
| 15/ $mx + 2 \geq x + m$ | $\forall x \in D = [0; 2]$. |
| 16/ $2(m - 1)x + m > 0$ | $\forall x \in D = (1; 3)$. |
| 17/ $(m + 1)x - 3m \leq 0$ | $\forall x \in D = [-1; 2]$. |
| 18/ $mx - 3m + 2 > 0$ | $\forall x \in D = (0; +\infty)$. |

Bài 17. Tìm tham số m để hệ bất phương trình sau có nghiệm duy nhất

- | | |
|--|--|
| 1/ $\begin{cases} x \leq m \\ 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$ | 2/ $\begin{cases} 2x - m \geq 0 \\ 2(x - 1) \leq 3 \end{cases}$ |
| 3/ $\begin{cases} (x + 1)(x - 2) \leq 0 \\ x - 2m \geq 2 \end{cases}$ | 4/ $\begin{cases} (x - 2)(x - 4) \leq 0 \\ x \leq 2m + 1 \end{cases}$ |
| 5/ $\begin{cases} (x - 3)^2 \geq x^2 + 7x + 1 \\ 2m \leq 8 + 5x \end{cases}$ | 6/ $\begin{cases} x - y \leq 0 \\ mx \geq m + 12 \end{cases}$ |
| 7/ $\begin{cases} \frac{x^2 + 3}{x} \geq x + 1 \\ m(x - 1) \geq 2 \end{cases}$ | 8/ $\begin{cases} \frac{x^2 - x + 3}{x} \geq x \\ m(x - 1) \geq 2 \end{cases}$ |
| 9/ $\begin{cases} (x^2 - 1)(x - 2) \geq 0 \\ x^2 + (m - 1)(2m - 1) \leq (3m - 2)x \end{cases}$ | 10/ $\begin{cases} 2m(x + 1) \geq x + 3 \\ 4mx + 3 \geq 4x \end{cases}$ |

II – Dấu của tam thức bậc hai và bất phương trình bậc hai



Dạng 1. Xét dấu của tam thức bậc hai – Giải bất phương trình bậc hai

① Dấu của tam thức bậc hai

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

$\Delta < 0$	$a.f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$	: $f(x)$ cùng dấu với a .
$\Delta = 0$	$a.f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$	: $f(x)$ cùng dấu với a .
$\Delta > 0$	$a.f(x) < 0, \forall x \in (x_1; x_2)$	: Trong trái.
	$a.f(x) > 0, \forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	: Ngoài cùng.

② Giải bất phương trình bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c > 0$ [hay $f(x) < 0; f(x) \leq 0; f(x) \geq 0$]

- Bước 1. Cho $f(x) = 0$ tìm nghiệm $x_1; x_2$ (nếu có).
- Bước 2. Lập bảng xét dấu của $f(x)$ dựa vào dấu của tam thức bậc hai.
- Bước 3. Từ bảng xét dấu, suy ra tập nghiệm của bất phương trình.

③ Giải bất phương trình bậc hai dạng: $f(x).g(x) > 0$ hoặc $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ [hay $< 0; \leq 0; \geq 0$]

- Bước 1. Tìm điều kiện xác định D_1 nếu có.
- Bước 2. Cho $f(x) = 0; g(x) = 0$ tìm nghiệm x_i ($i = 1 \div n$).
- Bước 3. Lập bảng xét dấu $f(x); g(x) \Rightarrow$ Dấu của $f(x).g(x)$ và $\frac{f(x)}{g(x)}$.
- Bước 4. Từ bảng xét dấu $\Rightarrow$ tập nghiệm S_1 . Vậy tập nghiệm bất phương trình: $S = D_1 \cap S_1$.

④ Giải hệ bất phương trình bậc hai một ẩn dạng: $\begin{cases} f(x) = ax^2 + bx + c > 0 & (1) \\ g(x) = a'x^2 + b'x + c' > 0 & (2) \end{cases}$

- Bước 1. Giải (1), (2) được tập nghiệm tương ứng là S_1, S_2 .
- Bước 2. Nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2$.

🔍 Lưu ý

- Hai bất phương trình (1) và (2) được gọi là tương đương nếu và chỉ nếu $S_1 = S_2$.
- Cần sử dụng thành thạo các phép toán trên tập hợp.

BÀI TẬP ỨNG DỤNG**Bài 18.** Lập bảng xét dấu của các hàm số sau

1/ $f(x) = x^2 - 3x + 2.$

2/ $f(x) = 3x^2 - 2x + 1.$

3/ $f(x) = -x^2 + 4x + 5.$

4/ $f(x) = x^2 - x - 12.$

5/ $f(x) = -2x^2 + 5x - 2.$

6/ $f(x) = -4x^2 + 12x - 9.$

7/ $f(x) = 2x^2 - 6x + \frac{9}{2}.$

8/ $f(x) = x^2 + x + 1.$

9/ $f(x) = -2x^2 + 7x - 8.$

10/ $f(x) = 3x^2 - 2x - 8.$

11/ $f(x) = -x^2 + 2x - 1.$

12/ $f(x) = 2x^2 - 7x + 5.$

13/ $f(x) = -3x^2 + 2x - 5.$

14/ $f(x) = -x^2 - 5x - 6.$

15/ $f(x) = -3x^2 + 2x - \frac{1}{3}.$

16/ $f(x) = -2x^2 + 6x - \frac{9}{2}.$

17/ $f(x) = 2x^2 + \sqrt{2}(1 - \sqrt{2} + \sqrt{6})x + \sqrt{2} - \sqrt{6}.$

18/ $f(x) = -6x^2 + (2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})x - \sqrt{6}.$

19/ $f(x) = \sqrt{3}x^2 + 8\sqrt{2}x + 16\sqrt{2}.$

20/ $f(x) = (x + 4)^2(x^2 + 8x + 11) + 4.$

21/ $f(x) = (x^2 - 5x)(x^2 - 5x + 10) + 24.$

22/ $f(x) = (4 - 2x)(x^2 - 5x + 4).$

23/ $f(x) = (3x^2 - 10x + 3)(4x - 5).$

24/ $f(x) = (3x^2 - 4x)(2x^2 - x - 1).$

25/ $f(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{4x - x^2}.$

26/ $f(x) = \frac{(3x^2 - x)(3 - x^2)}{4x^2 + x - 3}.$

27/ $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1}.$

28/ $f(x) = mx^2 + (1 - 2m)x - 2.$

29/ $f(x) = (m^2 + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 4.$

30/ $f(x) = mx^2 - (m^2 + 1)x + m.$

Bài 19. Giải các bất phương trình sau

1/ $x^2 - 4x + 3 \geq 0.$

2/ $-2x^2 + 5x - 3 \geq 0.$

3/ $7x^2 - 4x - 3 < 0.$

4/ $-x^2 + 6x - 9 > 0.$

5/ $3x^2 + x + 1 \geq 0.$

6/ $-x^2 + 7x - 10 \leq 0.$

7/ $2x^2 + 4x + 3 < 0.$

8/ $2x^2 - 5x + 2 \leq 0.$

9/ $-5x^2 + 4x + 12 < 0.$

10/ $16x^2 + 40x + 25 > 0.$

11/ $-2x^2 + 3x - 7 \geq 0.$

12/ $3x^2 - 4x + 4 \geq 0.$

$$13/ \quad x^2 - x - 6 \leq 0.$$

$$14/ \quad \frac{-3x^2 - x + 4}{x^2 + 3x + 5} > 0.$$

$$15/ \quad \frac{4x^2 + 3x - 1}{x^2 + 5x + 7} > 0.$$

$$16/ \quad \frac{5x^2 + 3x - 8}{x^2 - 7x + 6} < 0.$$

$$17/ \quad \frac{x^2 + 4x + 4}{2x^2 - x - 1} < 0.$$

$$18/ \quad \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 4x - 5} \leq 0.$$

$$19/ \quad \frac{x^2 - 7x + 12}{2x^2 + 4x + 5} > 0.$$

$$20/ \quad \frac{(2 - x^2)(x^2 - 2x + 1)}{-x^2 + 3x + 4} > 0.$$

$$21/ \quad \frac{x^4 - 4x^3 + 2x^2}{x^2 - x - 30} > 0.$$

$$22/ \quad \frac{x^2 + 6x - 7}{x + 7} < 0.$$

$$23/ \quad \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \geq 0.$$

$$24/ \quad \frac{x^2 - 7x + 10}{-x^2 + 6x - 9} \leq 0.$$

$$25/ \quad 3x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 3 \geq 0.$$

$$26/ \quad (1 - 2x)(x^2 + x - 30) < 0.$$

$$27/ \quad \frac{x^2 + 4x - 5}{x + 1} > 0.$$

$$28/ \quad \frac{x^2 - 3x - 4}{1 - 2x} \leq 0.$$

$$29/ \quad \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x - 10} < 0.$$

$$30/ \quad \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} > 0.$$

Bài 20. Giải các bất phương trình sau

$$1/ \quad \frac{5x - 1}{x^2 + 3} < 1.$$

$$2/ \quad \frac{3}{x^2 - 8x + 15} > 1.$$

$$3/ \quad \frac{4 - 3x^2}{x^2 + x + 1} > 1.$$

$$4/ \quad \frac{x - 1}{x + 1} \leq 5 + x.$$

$$5/ \quad \frac{x - 2}{x^2 + 1} < \frac{1}{2}.$$

$$6/ \quad \frac{x^2 + 6x - 7}{x^2 + 1} \leq 2.$$

$$7/ \quad \frac{x + 1}{(x - 1)^2} < 1.$$

$$8/ \quad \frac{x - 1}{x + 1} < x.$$

$$9/ \quad x \leq \frac{6}{x - 5}.$$

$$10/ \quad \frac{1}{x + 2} < \frac{3}{x - 3}.$$

$$11/ \quad \frac{14x}{x + 1} < \frac{9x - 30}{x - 4}.$$

$$12/ \quad \frac{2(x - 4)}{(x - 1)(x - 7)} \geq \frac{1}{x - 2}.$$

$$13/ \quad \frac{1}{x - 2} + \frac{1}{x - 1} > \frac{1}{x}.$$

$$14/ \quad \frac{1}{x + 1} + \frac{2}{x + 3} < \frac{3}{x + 2}.$$

$$15/ \quad \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x} \leq \frac{2}{x + 2}.$$

$$16/ \quad \frac{x - 1}{x} - \frac{x + 1}{x - 1} < 2.$$

$$17/ \frac{(x-2)(x-4)(x-7)}{(x+2)(x+4)(x+7)} > 1.$$

$$18/ \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} > 1.$$

$$19/ (x^2 - 2x)(2x - 2) - \frac{18x - 18}{x^2 - 2x} \leq 0.$$

$$20/ (x^2 + 3x)(2x + 3) - \frac{32x + 48}{x^2 + 3x} \geq 0.$$

Bài 21. Giải các bất phương trình sau

$$1/ x^4 - 5x^2 + 4 < 0.$$

$$2/ x^4 - 2x^2 - 63 \leq 0.$$

$$3/ x^4 - 3x^2 + 2 > 0.$$

$$4/ x^6 + 19x^3 - 216 \geq 0.$$

$$5/ (x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) \geq 5.$$

$$6/ (x^2 - x - 1)(x^2 - x - 7) < -5.$$

$$7/ x^2 + (x + 1)^2 \leq \frac{15}{x^2 + x + 1}.$$

$$8/ 1 + \frac{12}{x^2} < \frac{7}{x}.$$

$$9/ \frac{1}{|x| - 3} < \frac{1}{2}.$$

$$10/ \left| 3x \right| - \left| \frac{1}{x} \right| < 2.$$

Bài 22. Giải các hệ bất phương trình sau

$$1/ \begin{cases} x - 2 > 0 \\ -3x^2 + 6x + 9 \leq 0 \end{cases}$$

$$2/ \begin{cases} x^2 + x + 5 < 0 \\ x^2 - 6x + 1 > 0 \end{cases}$$

$$3/ \begin{cases} 3x^2 + 8x - 3 \leq 0 \\ -6x^2 + 17x - 7 \geq 0 \end{cases}$$

$$4/ \begin{cases} 5x^2 + 7x - 6 \geq 0 \\ 5x^2 - 13x + 6 > 0 \end{cases}$$

$$5/ \begin{cases} (x - 1)(2x - 3) \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$6/ \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \leq 0 \\ x^2 - 6x + 8 < 0 \end{cases}$$

$$7/ \begin{cases} 2x^2 - 7x - 4 \leq 0 \\ 2x^2 - 15x + 22 > 0 \end{cases}$$

$$8/ \begin{cases} x^2 - x - 3 - \sqrt{3} > 0 \\ x^2 - 2x - 2 - 2\sqrt{2} \geq 0 \end{cases}$$

$$9/ \begin{cases} 2x^2 - (2\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{3} - 1 \leq 0 \\ 5x^2 - 8x + 3 < 0 \end{cases}$$

$$10/ \begin{cases} 2x^2 + 9x + 7 > 0 \\ x^2 + x - 6 < 0 \end{cases}$$

$$11/ \begin{cases} 2x^2 + x - 6 > 0 \\ 3x^2 - 10x + 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$12/ \begin{cases} -2x^2 - 5x + 4 < 0 \\ -x^2 - 3x + 10 > 0 \end{cases}$$

$$13/ \begin{cases} -x^2 + 4x - 7 < 0 \\ x^2 - 2x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$14/ \begin{cases} x^2 + x + 5 < 0 \\ x^2 - 6x + 1 > 0 \end{cases}$$

$$15/ \begin{cases} x^2 - 4x - 5 > 0 \\ x^2 + x - 20 < 0 \end{cases}$$

$$16/ \begin{cases} x^2 - 2x + 1 > 0 \\ -x^2 + 2x + 3 > 0 \end{cases}$$

$$17/ \begin{cases} 4x^2 + 4x + 1 \leq 0 \\ 3x^2 - (9 - \sqrt{2})x - 3\sqrt{2} \leq 0 \end{cases}.$$

$$18/ \begin{cases} 2x^2 + 9x + 7 > 0 \\ (x^2 + x - 6)(x^2 - 2x + 2) < 0 \end{cases}.$$

$$19/ \begin{cases} 4x^2 - 5x - 6 \leq 0 \\ (1 - x^2)(4x^2 - 12x + 5) > 0 \end{cases}.$$

$$20/ \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ (2x - 1)^2 < 4x(x + 1) \end{cases}.$$

$$21/ \begin{cases} x(x + 5) \leq 4x + 2 \\ (2x - 1)(x + 3) \geq 4x \end{cases}.$$

$$22/ -4 \leq \frac{x^2 - 2x - 7}{x^2 + 1} \leq 1.$$

$$23/ \frac{1}{13} \leq \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 5x + 7} \leq 1.$$

$$24/ -1 < \frac{10x^2 - 3x - 2}{-x^2 + 3x - 2} < 1.$$

$$25/ 1 < \frac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 + 1} \leq 2.$$

$$26/ -3 \leq \frac{x^2 - 3x - 1}{x^2 + x + 1} < 3.$$

$$27/ \begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 2 \\ 2x^2 - 11x + 9 < 0 \\ x^3 - x^2 + 2x - 2 > 0 \end{cases}.$$

$$28/ \begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases}.$$

$$29/ \begin{cases} \frac{1 - 2x}{3x - 2} \leq 0 \\ \frac{3x - 2}{x^2 + x - 6} \leq 0 \end{cases}.$$

$$30/ \begin{cases} x^3 - 4x \geq 0 \\ \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 2x - 3} \geq 0 \end{cases}.$$

$$31/ \begin{cases} \frac{3x^2 - 4x - 11}{x^2 - x - 6} \leq 1 \\ (3 - 2x)(x^2 - 4x + 3) > 0 \end{cases}$$

$$32/ \begin{cases} \frac{1}{x + 1} + \frac{2}{x^2 - x + 1} \geq \frac{2x + 3}{x^3 + 1} \\ (2x + 3)(4x - 2) > 0 \end{cases}$$

Dạng 2. Phương trình – Bất phương trình chứa căn, chứa dấu giá trị tuyệt đối**① Phương trình – Bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối**

- Để giải phương trình, bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối, ta thường sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của giá trị tuyệt đối để khử dấu giá trị tuyệt đối.
- Xem lại cách giải phương trình giá trị tuyệt đối (Chương 3. Phương trình và hệ phương trình).

$$\text{a/ Dạng 1. } |f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{cases}$$

$$\text{b/ Dạng 2. } |f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ -g(x) < f(x) < g(x) \end{cases}$$

$$\text{c/ Dạng 3. } |f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow [f(x) - g(x)][f(x) + g(x)] > 0$$

🔍 Lưu ý

$$\diamond |A| = A \Leftrightarrow A \geq 0.$$

$$\diamond |A| = -A \Leftrightarrow A \leq 0.$$

$$\diamond \text{ Với } B > 0, \text{ ta có: } |A| < B \Leftrightarrow -B < A < B \text{ và } |A| > B \Leftrightarrow \begin{cases} A < -B \\ A > B \end{cases}.$$

$$\diamond |A + B| = |A| + |B| \Leftrightarrow AB \geq 0.$$

$$\diamond |A - B| = |A| + |B| \Leftrightarrow AB \leq 0.$$

② Phương trình – Bất phương trình chứa ẩn trong dấu căn

- Để giải phương trình, bất phương trình chứa ẩn trong dấu căn ta thường dùng phép nâng lũy thừa hoặc đặt ẩn phụ để khử dấu căn.
- Xem lại cách giải phương trình có dấu căn (Chương 3. Phương trình và hệ phương trình).

$$\text{a/ Dạng 1. } \sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

$$\text{b/ Dạng 2. } \sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$$

$$\text{c/ Dạng 3. } \sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$$

🔍 **Lưu ý:** Đối với các phương trình, bất phương trình, không có dạng chuẩn như lý thuyết, ta thực hiện:

✦ **Bước 1.** Đặt điều kiện cho căn có nghĩa.

✦ **Bước 2.** Chuyển về sao cho 2 vế đều không âm.

✦ **Bước 3.** Bình phương 2 vế để khử căn.

BÀI TẬP ỨNG DỤNG

Bài 23. Giải các bất phương trình sau

- | | |
|--|---|
| 1/ $\sqrt{x-1} \geq 1$. | 2/ $\sqrt{2x-1} \geq 2$. |
| 3/ $\sqrt{4x+2} \geq 3$. | 4/ $\sqrt{x-3} \leq 1$. |
| 5/ $\sqrt{x-2} \leq x-4$. | 6/ $\sqrt{2x+1} \geq 1-3x$. |
| 7/ $\sqrt{2x-1} \leq x$. | 8/ $5\sqrt{5x-2} \geq x+4$. |
| 9/ $\sqrt{2x^2+x+6} \leq 2(x+2)$. | 10/ $\sqrt{x^2-x+2} \geq x-3$. |
| 11/ $2\sqrt{x^2+x-2} \leq 1+2x$. | 12/ $\sqrt{x^2-1} \geq \sqrt{2x^2+2x}$. |
| 13/ $\sqrt{x+2} \leq \sqrt{3x^2-x+1}$. | 14/ $\sqrt{2x-1} \geq \sqrt{x+3}$. |
| 15/ $\sqrt{x^2-x-2} \leq \sqrt{-x^2+2x+3}$. | 16/ $\sqrt{4x^2-3} \geq \sqrt{2x^2-2x+1}$. |

Bài 24. Giải các bất phương trình sau

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 1/ $\sqrt{x-1} > x-3$. | 2/ $x < \sqrt{5x-4}$. |
| 3/ $x - \sqrt{3-2x} < 0$. | 4/ $\sqrt{5-x} \leq 2x-7$. |
| 5/ $\sqrt{x+1} < 2x-1$. | 6/ $x - 2\sqrt{x-3} \leq 3$. |
| 7/ $\sqrt{-3x+2} + 1 < x$. | 8/ $\sqrt{7x+11} + x + 1 \geq 0$. |
| 9/ $\sqrt{2x-5} - x + 1 \leq 0$. | 10/ $\sqrt{x^2-2x} \geq x+1$. |
| 11/ $x + \sqrt{8-x^2} \geq 4$. | 12/ $\sqrt{x^2-4x} > x-3$. |
| 13/ $\sqrt{x^2-4x+3} < x+1$. | 14/ $\sqrt{x^2-3x+2} < 2x-1$. |
| 15/ $\sqrt{x^2+x-6} \geq x+2$. | 16/ $\sqrt{2x^2-3x-5} < x-1$. |
| 17/ $\sqrt{-x^2+7x-6} < 3+2x$. | 18/ $\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$. |
| 19/ $\sqrt{3x^2+13+2x} < 1$. | 20/ $\sqrt{x^2-4x+5} + 2x \geq 3$. |
| 21/ $\sqrt{x^2+6x-3} < x+1$. | 22/ $\sqrt{2x^2-6x+1} - x + 2 > 0$. |
| 23/ $2x + \sqrt{4x-1} > 0$. | 24/ $\sqrt{3x-5x^2} \leq 5x-2$. |
| 25/ $\sqrt{x^2-x-12} < 7-x$. | 26/ $1-x + \sqrt{2x^2-3x-5} \leq 0$. |
| 27/ $\sqrt{x^2-3x-10} < x-2$. | 28/ $3\sqrt{-x^2+x+6} > 2(1-2x)$. |
| 29/ $\sqrt{3x^2+13x+4} + 2 - x < 0$. | 30/ $2\sqrt{3x+x^2} \leq 2x-1$. |
| 31/ $\sqrt{2x^2-6x-20} + 2 - x > 0$. | 32/ $\sqrt{x^2-2x-15} \leq x-3$. |

33/ $\sqrt{x+2} \leq |x|.$

34/ $\sqrt{x^2 + x - 6} < x - 1.$

35/ $\sqrt{2x-1} \leq 2x-3.$

36/ $\sqrt{x^2 + 8x} \leq 2(x+1).$

37/ $\sqrt{x^2 + 9x} > x + 4.$

38/ $\sqrt{2x^2 - 1} > 1 - x.$

39/ $\sqrt{x^2 - 4x - 12} > x - 4.$

40/ $\sqrt{x^2 - 5x - 14} \geq 2x - 1.$

Bài 25. Giải các phương trình sau

1/ $x^4 - 4x^2 + 3 = 0.$

2/ $-x^4 + 10x^2 - 9 = 0.$

3/ $x^4 - 3x^2 - 4 = 0.$

4/ $x^4 - x^2 - 12 = 0.$

5/ $x^4 - x^2 + 3 = 0.$

6/ $(1-x^2)(1+x^2) + 3 = 0.$

7/ $\sqrt{3x-2} = 2x-1.$

8/ $\sqrt{2x-3} = x-3.$

9/ $\sqrt{4-6x-x^2} = 4+x.$

10/ $\sqrt{5x+10} = 8-x.$

11/ $x - \sqrt{2x-5} = 4.$

12/ $\sqrt{3x^2 - 9x + 1} = x - 2.$

13/ $\sqrt{3x^2 - 9x + 1} = |x-2|.$

14/ $\sqrt{|x^2 - 3x - 2|} = 2(x-1).$

15/ $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2.$

16/ $\sqrt{x^2 + 2x + 4} = \sqrt{2-x}.$

17/ $\sqrt{x^2 + 9} - \sqrt{x^2 - 7} = 2.$

18/ $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = x^2 - 3x - 4.$

19/ $x^2 - 6x + 9 = 4\sqrt{x^2 - 6x + 6}.$

20/ $\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 3.$

21/ $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} = \sqrt{(3+x)(6-x)} + 3.$

22/ $(x+1)(x+4) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6.$

27/ $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1.$

28/ $\sqrt{(x+1)(x+2)} = x^2 + 3x - 4.$

29/ $\sqrt{x-2+2\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2}.$

30/ $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = 1.$

31/ $\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}} - 2\sqrt{2x+3-4\sqrt{2x-1}} + 3\sqrt{2x+8-6\sqrt{2x-1}} = 4.$

32/ $\sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + 4356} + x}{x}} - \sqrt{x\sqrt{x^2 + 4356} - x^2} = 5.$

33/ $\frac{\sqrt{21+x} + \sqrt{21-x}}{\sqrt{21+x} - \sqrt{21-x}} = \frac{21}{x}.$

34/ $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}.$

35/ $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}.$

36/ $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = 2.$

37/ $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0.$

38/ $\sqrt{2x^2 - 1} > 1 - x.$

$$39/ \sqrt{x^2 - 4x - 12} = x - 4.$$

$$41/ \sqrt[3]{5x + 7} - \sqrt[3]{5x - 13} = 1.$$

$$43/ \sqrt[3]{24 + \sqrt{x}} - \sqrt[3]{5 + \sqrt{x}} = 1.$$

$$40/ \sqrt{3x^2 + 5x + 8} - \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 1.$$

$$42/ \sqrt[3]{9 - \sqrt{x + 1}} + \sqrt[3]{7 + \sqrt{x + 1}} = 4.$$

$$44/ \sqrt[4]{47 - 2x} + \sqrt[4]{35 + 2x} = 4.$$

Bài 26. Giải các bất phương trình sau

$$1/ \frac{\sqrt{1-x} + 1}{x} \geq 2.$$

$$3/ \frac{1 - \sqrt{1-4x^2}}{x} < 3.$$

$$5/ \frac{2 + \sqrt{-3x^2 + x + 4}}{x} < 2.$$

$$7/ \sqrt{\frac{x^3 + 8}{x}} > x - 2.$$

$$9/ (x - 3)\sqrt{x^2 - 4} \leq x^2 - 9.$$

$$11/ (x + 2)\sqrt{x^2 - 3x - 4} \leq x^2 - 4.$$

$$13/ \sqrt{|1 - 4x|} \geq 2x + 1.$$

$$2/ \frac{1 - \sqrt{8x - 3}}{4x} \geq 4.$$

$$4/ \frac{\sqrt{-3x^2 + 16x - 5}}{x - 1} \leq 2.$$

$$6/ \frac{1 - \sqrt{21 - 4x - x^2}}{x + 4} < \frac{1}{2}.$$

$$8/ \frac{\sqrt{6 + x - x^2}}{2x + 5} \geq \frac{\sqrt{6 + x - x^2}}{x + 4}.$$

$$10/ (2x + 1)\sqrt{x + 1} < 4x^2 - 1.$$

$$12/ \sqrt{2x + 1 - \sqrt{x - 8}} > 3.$$

$$14/ x - \sqrt{1 - |x|} < 0.$$

Bài 27. Giải các phương trình sau

$$1/ \left| \frac{x^2 - 2}{x - 1} \right| = 2.$$

$$3/ |x^2 - 8x + 12| = x^2 - 8x + 12.$$

$$5/ |x^2 - 1| = x^2 - 2x + 8.$$

$$7/ |x^2 - 1| + |x| = 1.$$

$$9/ |x^2 - 2x + 3| = |x + 1|.$$

$$11/ |x^2 - 4| + 2x = |x + 2| + 1.$$

$$13/ \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 1.$$

$$14/ |2\sqrt{2|x| - 1} - 1| = 3.$$

$$2/ |x^2 - 5x + 4| = x + 4.$$

$$4/ |x^2 - 5x + 4| = x^2 + 6x + 5.$$

$$6/ 2x^2 - |5x - 2| = 0.$$

$$8/ |2 - 3x^2| - |6 - x^2| = 0.$$

$$10/ 2|x| - |x - 3| = 3.$$

$$12/ \frac{x^2 - 1 + |x + 1|}{|x|(x - 2)} = 2.$$

$$14/ \sqrt{x + \sqrt{14x - 49}} + \sqrt{x - \sqrt{14x - 49}} = \sqrt{14}.$$

$$16/ |x + \sqrt{1 - x^2}| = -\sqrt{2}(2x^2 - 1).$$

Bài 28. Giải các bất phương trình sau

$$1/ |4 - 3x| \leq 8.$$

$$2/ |2x - 4| \leq x + 12.$$

3/ $|x| < \frac{4}{x}$.

4/ $|x^2 - 4x| < 5$.

5/ $|x^2 - 2x| < x$.

6/ $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$.

7/ $|x^2 - 3x| + x - 2 < 0$.

8/ $|x^2 - 4| + 2x < 4$.

9/ $|-x^2 - x - 1| \leq 2x + 5$.

10/ $\left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \right| \leq 1$.

11/ $\left| \frac{x^2 - 4}{x^2 + x + 2} \right| \leq 1$.

12/ $|x^2 - x| \leq |x^2 - 1|$.

13/ $|x - 6| > |x^2 - 5x + 9|$.

14/ $|x^2 + 4x + 3| > |x^2 - 4x - 5|$.

15/ $|x - 3| - |x + 1| < 2$.

16/ $|3x - 2| \geq 7$.

17/ $|x - 3| > 3x + 15$.

18/ $2x^2 - |5x - 3| < 0$.

19/ $|x^2 - 2x - 8| > 2x$.

20/ $|x^2 - 2x - 3| \leq 3x - 3$.

21/ $|1 - 4x| > 2x + 1$.

22/ $3|x - 1| + x^2 - 7 > 0$.

23/ $|x^2 + 3x + 2| + x^2 + 2x \geq 0$.

24/ $x - 8 > |x^2 + 3x - 4|$.

25/ $|x - 1| + |x + 2| < 3$.

26/ $2|x - 3| - |3x + 1| \leq x + 5$.

27/ $|x^2 - 1| - 2x < 0$.

28/ $x^2 - |5x - 3| - x < 2$.

29/ $x^2 - 7x + 12 > |x - 4|$.

30/ $|x^3 - 1| \geq 1 - x$.

31/ $|4x^3 - 3x| \leq 1$.

32/ $|x - 6| > |x^2 - 5x + 9|$.

33/ $|x^2 - 2x - 3| - 2 > |2x - 1|$.

34/ $2|x + 1| < |x - 2| + 3x + 1$.

35/ $\left| \frac{2}{x - 4} \right| > 1$.

36/ $\left| \frac{2x - 1}{x - 1} \right| > 2$.

37/ $\left| \frac{x^2 - 4x}{x^2 + x + 2} \right| \leq 1$.

38/ $\frac{2x - 5}{|x - 3|} + 1 > 0$.

39/ $\frac{|x - 2|}{x^2 - 5x + 6} \geq 3$.

40/ $\left| \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 3x + 2} \right| \geq 1$.

41/ $\left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \right| \leq 1$.

42/ $\frac{|2x - 1|}{x^2 - 3x - 4} < \frac{1}{2}$.

Bài 29. Giải các bất phương trình sau

$$1/ \frac{|x-1|}{x+2} < 1.$$

$$2/ \frac{|x+2|-x}{x} < 2.$$

$$3/ \frac{|x+3|+x}{x+2} > 1.$$

$$4/ \frac{|2x-1|}{x^2+x-2} \geq 3.$$

$$5/ \frac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geq 2.$$

$$6/ \frac{|2x-1|}{(x+1)(x-2)} \leq \frac{1}{2}.$$

$$7/ \frac{(2x-3)(2|x-1|+2)}{|x-1|-2} \leq 0.$$

$$8/ \frac{|1-3x|-|2x-1|}{4x-|x+1|} > 1.$$

$$9/ |x-2|+2|x+1| \leq x^2.$$

$$10/ |x-1|+|-2x+6| \geq x-5.$$

$$11/ |2x+\sqrt{2}|+|x+\sqrt{2}| < -3x-2.$$

$$12/ |x-1|+|2x-4|-|4-x| < 2.$$

$$13/ (|x-1|-3)(|x+2|-5) < 0.$$

$$14/ \frac{|x-1|+3}{|5-x|+x} < 4.$$

$$15/ |x^2-2x-3| < 3x-3.$$

$$16/ x^2-|5x-3|-x < 2.$$

$$17/ 3x^2-|x-3| > 9x-2.$$

$$18/ |x-4|+7x \geq x^2+12.$$

$$19/ |x+6| \leq |x^2+6x-7|.$$

$$20/ |x^2+3x-4|-2|x+3|+2 > 0.$$

$$21/ |x-1|+|2x-4|-|3x+2| \geq 3.$$

$$22/ \frac{|4x^2-1|}{2x-1} < x^2+x-1.$$

$$23/ \left| \frac{x^2-5x+4}{x^2-4} \right| \leq 1.$$

$$24/ \frac{|x+2|+|x|}{|x-3|+x} < 2.$$

$$25/ \frac{|x^2+2x|+3}{x^2+|x-2|} \geq 1.$$

$$26/ \frac{x^2-|x|-6}{x^2-4} \geq x.$$

Bài 30. Giải các bất phương trình

$$1/ \sqrt{1-x} + \sqrt{4+x} \leq 3.$$

$$2/ \sqrt{x+2} - \sqrt{x-6} > 2.$$

$$3/ \sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} < 2.$$

$$4/ \sqrt{x^2+9} - \sqrt{x^2+7} \geq 2.$$

$$5/ \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1} \leq \sqrt{x}.$$

$$6/ \sqrt{2x+1} \leq 2\sqrt{x} - \sqrt{x-3}.$$

$$7/ \sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} < \sqrt{x-2}.$$

$$8/ \sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} \geq \sqrt{2x-8}.$$

$$9/ \sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} < \sqrt{x-2}.$$

$$10/ \sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} \leq \sqrt{4x-7}.$$

$$11/ \sqrt{x+11} \geq \sqrt{x-4} + \sqrt{2x-1}.$$

$$12/ \sqrt{x+3} + \sqrt{2-x} \geq 3.$$

13/ $\sqrt{x+4} - \sqrt{5-4x} \geq 1.$

14/ $\sqrt{2x-1} + \sqrt{5-x} > 3\sqrt{2-x}.$

15/ $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} > 1.$

16/ $\sqrt{1-x} + \sqrt{4+x} > 1.$

17/ $\sqrt{1-x} + \sqrt{4+x} > 3.$

18/ $\sqrt{x+4} - \sqrt{2x-6} \leq 1.$

19/ $\sqrt{3x+7} - \sqrt{1+x} > 2.$

20/ $\sqrt{5-x^2} + \sqrt{5x^2-1} > 4x.$

Bài 31. Giải các bất phương trình sau

1/ $\sqrt{5x^2+10x+1} \geq 7-2x-x^2.$

2/ $(x+1)(x+4) < 5\sqrt{x^2+5x+28}.$

3/ $\sqrt{(4+x)(6-x)} \leq x^2-2x-12.$

4/ $-4\sqrt{(4-x)(x+2)} \leq x^2-2x-12.$

5/ $\sqrt{x(x+3)} \leq -x^2-3x+6.$

6/ $\sqrt{(x+1)(x+2)} < x^2+3x-4.$

7/ $\sqrt{x^2+2x} > -2x^2-4x+3.$

8/ $\frac{x}{x+1} - 2\sqrt{\frac{x+1}{x}} > 3.$

9/ $2\sqrt{\frac{3x-1}{x}} \geq \frac{x}{3x-1} + 1.$

10/ $2\sqrt{\frac{6x-1}{x}} < \frac{2x}{6x-1} + 1.$

11/ $\sqrt{\frac{2x-1}{x}} + 1 + \sqrt{\frac{x}{2x-1}} > \frac{3x}{2x-1}.$

12/ $2\sqrt{\frac{x}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x}} \leq \frac{2(x-1)}{x} + 3.$

13/ $3\sqrt{\frac{2x}{x-1}} + 4\sqrt{\frac{x-1}{2x}} \geq \frac{3x-3}{2x} + 10.$

14/ $\sqrt{\frac{x}{3-2x}} + 5\sqrt{\frac{3-2x}{x}} > \frac{12-8x}{x} + 5.$

15/ $5\sqrt{x} + \frac{5}{2\sqrt{x}} < 2x + \frac{1}{2x} + 4.$

16/ $\frac{1}{1-x^2} > \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} - 1.$

Bài 32. Giải các bất phương trình sau (nhân liên hiệp)

1/ $4(x+1)^2 < (2x+10)\left(1-\sqrt{3+2x}\right)^2.$

2/ $x-4 < \frac{x^2}{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^2}.$

3/ $\frac{2x^2}{\left(3-\sqrt{9+2x}\right)^2} < x+4.$

4/ $\frac{9x^2}{\left(\sqrt{1+3x}-1\right)^2} > 2x+1.$

5/ $\frac{(3x+2)^2}{\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{x-1}\right)^2} < x+2.$

6/ $\frac{25x^2}{\left(\sqrt{6x+3}+\sqrt{x+3}\right)^2} \geq x.$

7/ $\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+5}\right)\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x-4}\right) > 3.$

8/ $\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-3}\right) < 3.$

9/ $\frac{16x^2}{\left(\sqrt{4x+1}-1\right)^2} \geq 4(3x-2).$

10/ $\frac{9x^2}{\left(\sqrt{5x-1}-\sqrt{2x-1}\right)^2} \leq 4x+5.$

- 11/ $\frac{(x+2)^2}{(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1})^2} \leq x+8.$ 12/ $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2} \geq 1.$
- 13/ $\sqrt{x+8}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}) \geq 3.$ 14/ $\sqrt{x-1}(\sqrt{x-3}-\sqrt{8-x}) \geq 2x-11.$
- 15/ $\sqrt{x-2}(\sqrt{3x-5}-\sqrt{2x+3}) \leq x-8.$ 16/ $\sqrt{2x-3}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}) \leq 1.$
- 17/ $\sqrt{2x-8}(\sqrt{x+3}+\sqrt{7-x}) > 2x-4.$ 18/ $\sqrt{x+3}(\sqrt{2x-8}-\sqrt{7-x}) > 3(x-5).$
- 19/ $\sqrt{5x-1}(\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x-3}) > 1+x.$ 20/ $\sqrt{2x-4}(\sqrt{5x-1}+\sqrt{x-1}) < 4x.$
- 21/ $\sqrt{3x-5}(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x-3}) < 5-x.$ 22/ $\sqrt{1-2x}(\sqrt{x+4}+\sqrt{1-x}) < 2x+3.$
- 23/ $(\sqrt{3x+6}+\sqrt{3x-3})(\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-2}) \leq 3.$ 24/ $(\sqrt{x+12}+\sqrt{x-6})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-4}) \geq 6.$

Bài 33. Giải các bất phương trình sau

- 1/ $\frac{\sqrt{2(x^2-16)}}{\sqrt{x-3}} - \sqrt{x-3} > \frac{7-x}{\sqrt{x-3}}.$ 2/ $\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \geq \frac{\sqrt{-x^2+x+6}}{x+4}.$
- 3/ $(x^2-3x)\sqrt{2x^2-3x-2} \geq 0.$ 4/ $\frac{13-x}{4\sqrt{x-2}-x} \geq \sqrt{x-2}+9.$
- 5/ $\sqrt{x-1}+x-3 \geq \sqrt{2(x-3)^2+2x-2}.$ 6/ $3\sqrt{x}+\frac{3}{2\sqrt{x}} < 2x+\frac{1}{2x}-7.$
- 7/ $\sqrt{\frac{x^3+8}{x}} > x-2.$ 8/ $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1} \leq 2-\frac{x^2}{4}.$
- 9/ $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}+\sqrt{(x-1)(3-x)} \leq 2.$ 10/ $x(x+4)\sqrt{-x^2+4x}+(x-2)^2 < 2.$
- 11/ $\sqrt{1-x}-\sqrt{x^2+1} < x.$ 12/ $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-x} \geq \sqrt{x^2+7x}.$
- 13/ $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-4x+3} \leq x-\sqrt{4x-4}.$
- 14/ $\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15} \leq \sqrt{4x^2-18x+18}.$
- 15/ $\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-42} < 181-14x.$

Bài tập qua các kì thi

Bài 34. Cao đẳng Bán Công Hoa Sen khối D năm 2006

Giải BPT: $\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3.$

ĐS: $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{9}{2}; +\infty\right).$

Bài 35. Cao đẳng Kỹ Thuật Y Tế I năm 2006

Giải BPT: $\sqrt{x^2 - 4x + 5} + 2x \geq 3.$

ĐS: $x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right).$

Bài 36. Cao đẳng Kinh Tế – Công Nghệ Tp. Hồ Chí Minh khối A năm 2006

Giải BPT: $\sqrt{x^2 - 4x + 3} < x + 1.$

ĐS: $x \in \left[\frac{1}{3}; 1\right] \cup [3; +\infty).$

Bài 37. Cao đẳng Sư Phạm Điện Biên khối A, B năm 2005

Giải BPT: $\frac{\sqrt{1-x} + 1}{x} \geq 2.$

ĐS: $x \in \left[0; \frac{3}{4}\right].$

Bài 38. Cao đẳng Điều Dưỡng – Hệ chính quy năm 2004

Giải BPT: $\sqrt{x+11} \geq \sqrt{x-4} + \sqrt{2x-1}.$

ĐS: $x \in [4; 5].$

Bài 39. Hệ Cao đẳng khối T, M năm 2004 trường Đại học Hùng Vương

Giải BPT: $\sqrt{x^2 + x - 6} \geq x + 2.$

ĐS: $x \in (-\infty; -3].$

Bài 40. Cao đẳng Tài Chính – Quản Trị Kinh Doanh khối A năm 2006

Giải BPT: $\sqrt{x+3} - \sqrt{2-x} > 1.$

ĐS:

Bài 41. Cao đẳng Sư Phạm Vĩnh Phúc khối D, M, T năm 2006

Giải BPT: $\sqrt{x-1} > x - 3.$

ĐS:

Bài 42. Cao đẳng Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh khối A năm 2006

$x^2 + 2x + 5 \leq 4\sqrt{2x^2 + 4x + 3}.$

ĐS:

Bài 43. Cao đẳng Sư Phạm Yên Bái khối B, D₁, M năm 2006

Giải BPT: $2x - 2 - \sqrt{x-1} \geq 0.$

ĐS:

Bài 44. Cao đẳng Sư Phạm Lào Cai khối A năm 2006

Giải BPT: $\sqrt{5-2x} - \sqrt{2-x} \geq \sqrt{2x+5}.$

ĐS:

Bài 45. Cao đẳng Giao Thông Vận Tải năm 2006

Giải BPT: $\sqrt{x^2 - 4x + 3} - \sqrt{2x^2 - 3x + 1} \geq x - 1.$

ĐS:

Bài 46. Cao đẳng Sư Phạm Cần Thơ khối A năm 2006

Giải BPT: $\sqrt{(x+5)(3x+4)} > 4(x-1).$

ĐS:

Bài 47. Cao đẳng Kinh Tế Kỹ Thuật Thái Bình năm 2004

Giải BPT: $\sqrt{2(x^2 - 1)} \leq x + 1.$

ĐS: $x = -1 \vee x \in (1; 3).$

Bài 48. Cao đẳng Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh năm 1998

Giải BPT: $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \leq 2 - \frac{x^2}{4}.$

ĐS: $x \in [-1; 1].$

Bài 49. Cao đẳng Hải Quan năm 1999 – Hệ phân ban

Giải BPT: $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} \geq 2\sqrt{x^2 - 5x + 4}.$ ĐS: $x = 1 \vee x \geq 4.$

Bài 50. Cao đẳng A, B – 2009

Giải BPT: $\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-2} \leq \sqrt{5x+1}$

ĐS: $2 \leq x \leq 3.$

Bài 51. Cao đẳng Sư Phạm Nhà Trẻ Mẫu Giáo TWI năm 2000

Giải BPT: $(x^2 + x - 2)\sqrt{2x^2 - 1} < 0.$

ĐS:

Bài 52. Cao đẳng Nông Lâm 2000

Giải BPT: $-4\sqrt{(4-x)(2+x)} \leq x^2 - 2x - 8.$

ĐS:

Bài 53. Cao đẳng Sư Phạm Kinh Tế năm 2002

Giải BPT: $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}.$

ĐS:

Bài 54. Cao đẳng Giao Thông Vận Tải năm 2005

Giải BPT: $\sqrt{x^2 + 2x - 15} < x - 2.$

ĐS:

Bài 55. Cao đẳng Sư Phạm Vĩnh Long khối A, B năm 2005

Giải BPT: $\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x.$

ĐS: $3 < x \leq 5.$

Bài 56. Đại học Dân Lập Phương Đông khối A năm 2000

Giải BPT: $2x^2 + 4x + 3\sqrt{3-2x-x^2} > 1.$

ĐS: $x \in [-3; 1].$

Bài 57. Đại học Dân Lập Duy Tân khối D năm 2000

Giải BPT:

1/ $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \geq 1.$

ĐS:

2/ $x + 1 \geq \sqrt{2(x^2 - 1)}.$

ĐS:

Bài 58. Đại học Dân Lập Kỹ Thuật Công Nghệ Tp. Hồ Chí Minh (Hutech) năm 2000

Giải BPT: $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}.$

ĐS:

Bài 59. Học Viện Chính Trị Quốc Gia – Phân Viện Báo Chí Tuyên Truyền năm 2000

Giải BPT: $x + \sqrt{x^2 + 4x} > 1.$

ĐS:

Bài 60. Học Viện Ngân Hàng Tp. Hồ Chí Minh năm 2000

Giải BPT: $x(x-4)\sqrt{-x^2+4x} + (x-2)^2 < 2$.

ĐS: $x \in (2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$.

Bài 61. Đại học Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh năm 2000

Giải BPT: $\sqrt{x^2+3x+2} + \sqrt{x^2+6x+5} \leq \sqrt{2x^2+9x+7}$.

Bài 62. Đại học Thái Nguyên năm 2000

Giải BPT: $3\sqrt{x} + \frac{3}{2\sqrt{x}} < 2x + \frac{1}{2x} - 7$.

ĐS: $\begin{cases} 0 < x < 4 - \frac{3\sqrt{7}}{2} \\ x > 4 + \frac{3\sqrt{7}}{2} \end{cases}$.

Bài 63. Đại học Thủy Lợi năm 2000

Giải BPT: $4\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} < 2x + \frac{1}{2x} + 2$.

ĐS:

Bài 64. Đại học Ngoại Thương khối D năm 2000

Giải BPT: $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} \geq \sqrt{2x-8}$.

ĐS: $x \in [-4; 5] \cup (6; 7]$.

Bài 65. Đại học Thủy Lợi Hà Nội – Đại học Thăng Long năm 2000

Giải BPT: $\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} < \sqrt{5-2x}$.

ĐS:

Bài 66. Đại học Bách Khoa Hà Nội khối D năm 2000

Giải BPT: $\sqrt{x^2+3x+2} + \sqrt{x^2+6x+5} \leq \sqrt{2x^2+9x+7}$.

Bài 67. Đại học Dược Hà Nội năm 2000

Giải BPT: $\sqrt{x^2-8x+15} + \sqrt{x^2+2x-15} \leq \sqrt{4x^2-18x+18}$. ĐS: $x < 0 \vee x > 5$.

Bài 68. Học Viện Quan Hệ Quốc Tế năm 2000

Giải BPT: $(x+1)(x+4) < 5\sqrt{x^2+5x+28}$.

ĐS: $x \in (-9; 4)$.

Bài 69. Đại học Anh Ninh khối A năm 2000

Giải BPT: $\sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6} + 2\sqrt{49x^2+7x-42} < 181-14x$.

HD: $t = \sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6} \geq 0 \dots \Rightarrow$.

ĐS: $\frac{6}{7} \leq x < 6$.

Bài 70. Đại học Mỏ – Địa Chất Hà Nội năm 2000

Giải BPT: $\sqrt{(x+1)(4-x)} > x-2$.

ĐS: $x \in \left[-1; \frac{7}{2}\right)$.

Bài 71. Đại học Dân Lập Hồng Bàng năm 1999

Giải BPT: $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1}$

ĐS: $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$.

Bài 72. Đại học Dân Lập Kỹ Thuật Công Nghệ (HuTech) khối A, B năm 1999

Giải BPT: $\sqrt{2x+3} \geq x-2$.

ĐS: $x \in \left[-\frac{3}{2}; 3+2\sqrt{2}\right]$.

Bài 73. Đại học Dân Lập Kỹ Thuật Công Nghệ (HuTech) khối D năm 1999

Giải BPT: $\sqrt{2x-1} \leq 8-x$.

ĐS: $x \in \left[\frac{1}{2}; 5\right]$.

Bài 74. Đại học Mở Hà Nội khối A, B, R, V và D4 năm 1999

Giải BPT: $\frac{x-1}{x} - 2\sqrt{\frac{x-1}{x}} \geq 3$.

ĐS: $x \in \left[-\frac{1}{12}; 0\right]$.

Bài 75. Đại học Thủy Sản năm 1999

Giải BPT: $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} \geq \sqrt{2x-3}$.

ĐS: $x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$.

Bài 76. Đại học Huế khối D, R hệ chưa phân ban năm 1999

Giải BPT: $\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \geq \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$.

ĐS: $x \in [-2; -1] \vee x = 3$.

Bài 77. Đại học Huế khối D, R, T hệ phân ban năm 1999

Giải BPT: $\frac{\sqrt{12+x-x^2}}{x-11} \geq \frac{\sqrt{12+x-x^2}}{2x-9}$.

ĐS: $x \in [-2; 4] \vee x = -3$.

Bài 78. Đại học Tài Chính Kế Toán Tp. Hồ Chí Minh năm 1999

Giải BPT: $\sqrt{2x-1} \leq 8-x$.

ĐS:

Bài 79. Đại học An Ninh Hà Nội khối D năm 1999

Giải BPT: $\sqrt{5x-1} - \sqrt{4x-1} \leq 3\sqrt{x}$.

ĐS: $x \in \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

Bài 80. Đại học Mô – Địa Chất năm 1999

Giải BPT: $\frac{2x^2}{(3-\sqrt{9+2x})^2} < x+21$.

ĐS: $x \in \left[-\frac{9}{2}; \frac{7}{2}\right) \setminus \{0\}$.

Bài 81. Học Viện Ngân Hàng năm 1999

Giải BPT: $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} > \frac{3}{2}$.

ĐS: $x \in [1; +\infty)$.

Bài 82. Đại học Bách Khoa Hà Nội năm 1999

Giải BPT: $\sqrt{x+1} > 3 - \sqrt{x+4}$.

ĐS: $x > 0$.

Bài 83. Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh đợt I khối D – Học Viện Ngân Hàng năm 1999

Giải BPT: $x(x-4)\sqrt{-x^2+4x} + (x-2)^2 < 2$.

ĐS: $x \in (2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3})$.

Bài 84. Đề thi chuyên Toán – Tin Đại học Quốc Gia Hà Nội năm 1988

Giải BPT: $\sqrt{x^4+x^2+1} + \sqrt{x(x^2-x+1)} \leq \sqrt{\frac{(x^2+1)^3}{x}}$.

ĐS: $x > 0$.

Bài 85. Đại học Giao Thông Vận Tải Tp. Hồ Chí Minh năm 1998

Giải BPT: $\sqrt{3x^2 + 6x + 4} < 2 - 2x - x^2$

ĐS: $-2 < x < 0$.

Bài 86. Đại học Nông Nghiệp năm 1998

Giải BPT: $\frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{x} < 3$.

ĐS: $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Bài 87. Đại học Luật năm 1998

Giải BPT: $\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} > 1 - x$.

ĐS: $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty) \setminus \{1\}$.

Bài 88. Đại học Tài Chính Kế Toán năm 1998

Giải BPT: $\frac{\sqrt{51 - 2x - x^2}}{1 - x} < 1$.

ĐS:

Bài 89. Đại học Xây Dựng năm 1998

Giải BPT: $\frac{\sqrt{-3x^2 + x + 4} + 2}{x} < 2$.

ĐS:

Bài 90. Đại học Ngoại Ngữ năm 1998

Giải BPT: $\frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{x} < 3$.

ĐS: $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$.

Bài 91. Đại học Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh năm 1998

Giải BPT: $\frac{\sqrt{2 - x} + 4x - 3}{x} \geq 2$.

ĐS:

Bài 92. Đại học An Ninh năm 1998

Giải BPT: $\sqrt{x^2 + x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3} \leq \sqrt{x^2 + 4x - 5}$.

ĐS:

Bài 93. Đại học Sư Phạm Quy Nhơn năm 1998

Giải BPT: $\frac{9x^2 - 4}{\sqrt{5x^2 - 1}} \leq 3x - 2$

ĐS: $\left[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{5}{2}\right]$.

Bài 94. Đại học A – 2005

Giải BPT: $\sqrt{5x - 1} - \sqrt{x - 1} > \sqrt{2x - 4}$.

ĐS: $2 \leq x \leq 10$.

Bài 95. Đại học A – 2004

Giải BPT: $\frac{\sqrt{2(x^2 - 16)}}{\sqrt{x - 3}} + \sqrt{x - 3} > \frac{7 - x}{\sqrt{x - 3}}$

ĐS: $x > 10 - \sqrt{34}$.

Bài 96. Đại học D – 2002

Giải BPT: $(x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0$.

ĐS: $x \leq -\frac{1}{2}$ hoặc $x \geq 3$.

Bài 97. Đại học Ngoại Thương năm 2001

Giải BPT: $\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x} \geq x$.

HD: Liên hiệp $0 \leq x \leq 1$.

Bài 98. Đại học Dân Lập Phương Đông năm 2001

Giải BPT: $\sqrt{7x-13} - \sqrt{3x-9} \leq \sqrt{5x-27}$

ĐS: $\frac{299 + \sqrt{26304}}{59} \leq x \leq 23.$

Bài 99. Đại học Y Hà Nội năm 2001

Giải BPT: $2x^2 + \sqrt{x^2 - 5x - 6} > 10x + 15$

ĐS: $\begin{cases} x > \frac{5 + \sqrt{53}}{2} \\ x < \frac{5 - \sqrt{53}}{2} \end{cases}.$

Bài 100. Đại học Y Dược Tp. Hồ Chí Minh năm 2001

Giải BPT: $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} \geq 2\sqrt{x^2 - 5x + 4}$

ĐS: $x = 1 \vee x \geq 4.$

Bài 101. Đại học Sư Phạm Vinh năm 2001

Giải BPT: $\frac{x^2}{(1 + \sqrt{1+x})^2} > x - 4$

ĐS: $-1 \leq x < 8.$

Bài 102. Đại học Dân Lập Ngoại Ngữ – Tin Học năm 1997

Giải BPT: $(x-3)\sqrt{x^2-4} \leq x^2-9$

ĐS: $x \geq 3 \vee x \leq -\frac{13}{6}.$

Bài 103. Dự bị Đại học khối D năm 2004

Giải BPT: $x^2 + \sqrt{2x^2 + 4x + 3} \geq 6 - 2x.$

ĐS: $x \leq -2 \vee x \geq 0.$

Bài 104. Dự bị Đại học khối D năm 2005

Giải BPT: $\sqrt{8x^2 - 6x + 1} - 4x + 1 \leq 0.$

ĐS: $x = \frac{1}{4} \vee x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right).$

Bài 105. Dự bị Đại học khối B năm 2005

Giải BPT: $\sqrt{2x+7} - \sqrt{5-x} \geq \sqrt{3x-2}.$

ĐS:

Bài 106. Đại học Cần Thơ khối D năm 2001

Giải BPT: $x(x+1) - \sqrt{x^2 + x + 4} + 2 \geq 0.$

ĐS: $x \leq -1 \vee x \geq 0.$

Bài 107. Đại học Kinh Tế Quốc Dân năm 2001

Giải BPT: $\sqrt{(x+5)(3x+4)} > 4(x-1).$

ĐS: $x \in (-\infty; -5] \cup \left[-\frac{4}{3}; 4\right).$

Bài 108. Đại học Giao Thông Vận Tải Tp. Hồ Chí Minh khối A năm 2001

Giải BPT: $\frac{x+1}{x-1} - 2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 3 \geq 0.$

ĐS:

Bài 109. Đại học Kiến Trúc Hà Nội năm 2001

Giải BPT: $\sqrt{x^2 - 4x + 3} - \sqrt{2x^2 - 3x + 1} \geq x - 1.$

ĐS: $x = 1$ hay $x \leq \frac{1}{2}.$

Bài 110. Đại học khối A năm 2010

Giải BPT: $\frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)}} \geq 1.$

HD: Mẫu số < 0 , chuyển về, áp dụng đk dấu " $=$ " của BĐT B.C.S $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$

Bài 111. Đại học Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh năm 1994

Giải BPT: $\sqrt{2x^2 - 6x + 1} - x + 2 \geq 0.$

ĐS: $x \leq \frac{3 - \sqrt{7}}{2} \vee x > 3.$

Bài 112. Đại học Nông Lâm Tp. Hồ Chí Minh năm 1995

Giải BPT: $\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 1} < \sqrt{x - 2}.$

ĐS: $x > \sqrt{\frac{28}{3}}.$

Bài 113. Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh năm 1996

Giải BPT: $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} \geq 2\sqrt{x^2 - 5x + 4}.$

HD: Sử dụng miền nghiệm của điều kiện.

ĐS: $x = 1 \vee x \geq 4.$

Bài 114. Đại học Dân Lập Văn Lang năm khối B, D năm 1997

Giải BPT: $(x - 3)\sqrt{x^2 + 4} \leq x^2 - 9.$

ĐS: $x \leq -\frac{5}{6} \vee x \geq 3.$

Bài 115. Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh năm 1997

Giải BPT: $(x^2 + 1)^2 \leq x\sqrt{x^2 + 2} + 1.$

ĐS: $S = \left[0; \sqrt{\sqrt{2} - 1}\right].$

Bài 116. Đại học Luật Tp. Hồ Chí Minh năm 1996

Giải BPT: $5\sqrt{x} + \frac{5}{2\sqrt{x}} < 2x + \frac{1}{2x} + 4.$

ĐS: $\left(0; \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}; +\infty\right).$

Dạng 3. Phương trình – Bất phương trình – Hệ phương trình có chứa tham số



① Tam thức không đổi dấu trên $\mathbb{R}$

Từ định lý về dấu của tam thức bậc hai, ta suy ra kết quả sau: Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

(Điều kiện để bất phương trình có nghiệm $\forall x \in \mathbb{R}$)

$$a/ f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \quad \& \quad f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

$$b/ f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \quad \& \quad f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

Từ đó, ta có thể suy ra điều kiện vô nghiệm của bất phương trình như sau:

$$c/ \text{Để bất phương trình } f(x) > 0 \text{ vô nghiệm} \Leftrightarrow f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

$$d/ \text{Để bất phương trình } f(x) \geq 0 \text{ vô nghiệm} \Leftrightarrow f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

$$e/ \text{Để bất phương trình } f(x) < 0 \text{ vô nghiệm} \Leftrightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

$$f/ \text{Để bất phương trình } f(x) \leq 0 \text{ vô nghiệm} \Leftrightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

Lưu ý

✧ Nếu $f(x; m) = ax^2 + bx + c$ có chứa tham số. Để $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, ta cần xét:

$$\bullet \text{ Trường hợp 1. } \begin{cases} a = b = 0 \\ c > 0 \end{cases} \quad \bullet \text{ Trường hợp 2. } \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

✧ Nếu $f(x; m) = ax^2 + bx + c$ có chứa tham số. Để $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$, ta cần xét:

$$\bullet \text{ Trường hợp 1. } \begin{cases} a = b = 0 \\ c < 0 \end{cases} \quad \bullet \text{ Trường hợp 2. } \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

② Giải và biện luận bất phương trình bậc hai $f(x; m) = ax^2 + bx + c > 0$

- **Bước 1.** Xét $a = 0$ nếu hệ số a có tham số.
- **Bước 2.** Lập Δ và tìm nghiệm $\Delta = 0$ (nếu có nghiệm, thì lúc này nghiệm là $m_1 = \dots$).
- **Bước 3.** Lập bảng xét dấu a và Δ trên cùng một bảng xét dấu (biến số là m).
- **Bước 4.** Dựa vào bảng xét dấu, biện luận nghiệm của bất phương trình.

BÀI TẬP ỨNG DỤNG**Bài 117.** Định m để biểu thức $f(x)$ sau luôn dương với mọi x

1/ $f(x) = x^2 - (m+2)x + 8m + 1.$

2/ $f(x) = mx^2 - 2(m-1)x + 4m.$

3/ $f(x) = (m-1)x^2 - (m-5)x + m-1.$ 4/ $f(x) = (m^2+1)x^2 + 2(m+3)x + 1.$

5/ $f(x) = (3m+1)x^2 - (3m+1)x + m+4.$ 6/ $f(x) = (m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m-3.$

Bài 118. Định m để biểu thức $f(x)$ sau luôn không dương với mọi x (luôn luôn âm)

1/ $f(x) = -2x^2 + 2(m-2)x + m-2.$

2/ $f(x) = (m+4)x^2 - (m-1)x - 1 - 2m$

3/ $f(x) = (m-1)x^2 + 2(m+2)x + m-6.$ 4/ $f(x) = (m-2)x^2 + 2(m-2)x + 2.$

5/ $f(x) = (m^2+4m-5)x^2 - 2(m-1)x + 2.$ 6/ $f(x) = (m-4)x^2 + (m+1)x + 2m-1.$

Bài 119. Chứng minh các phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của $m \in \mathbb{R}$

1/ $4x^2 + 4(m+2)x + 3m + 2 = 0.$

2/ $mx^2 + (5m+6)x + m-1 = 0.$

3/ $(3-2m)x^2 + (3m-2)x + m-1 = 0.$ 4/ $(3m-1)x^2 + 3(m+1)x + 1 = 0.$

Bài 120. Chứng minh các phương trình sau vô nghiệm

1/ $x^2 + (1+m\sqrt{3})x + m^2 + m\sqrt{3} + 2 = 0.$ 2/ $x^2 + (1-m\sqrt{3})x + m^2 - m\sqrt{3} + 2 = 0$

3/ $(2m^2 - 7m + 10)x^2 + 2(m-3)x + 1 = 0.$ 4/ $(m+1)x^2 + mx + 7m = 0.$

Bài 121. Tìm tham số m để các bất phương trình sau có vô số nghiệm (BPT thỏa $\forall x \in \mathbb{R}$)

1/ $x^2 - mx + m + 3 \geq 0.$

2/ $3x^2 + 2(m-1)x + m + 4 > 0.$

3/ $x^2 - (3m-2)x + 2m^2 - 5m - 2 \geq 0.$ 4/ $x^2 + (m+1)x + 2m + 7 > 0.$

5/ $-x^2 + 2(1-m)x - 9 \leq 0.$

6/ $x^2 - (m-2)x + 8m + 1 > 0.$

7/ $2x^2 + (m-2)x - m + 4 > 0.$

8/ $mx^2 + (m-1)x + m-1 < 0.$

9/ $mx^2 - 4(m+1)x + m-5 > 0.$

10/ $mx^2 - mx - 5 < 0.$

11/ $5x^2 - 4mx + m \geq 0.$

12/ $mx^2 + 2mx - 1 < 0.$

13/ $4x^2 - 2(m+1)x + m > 0.$

14/ $(1-3m)x^2 - 2mx + 1 - m \geq 0.$

15/ $\frac{1}{m}x^2 + 2(m-2)x + m^2 > 0.$

16/ $(1-m^2)x^2 - 3(m^2-1)x + 1 \geq 0.$

17/ $(m^2+3)x^2 + 2(m+1)x + 1 > 0.$

18/ $(m+1)x^2 - 2(m+1)x - m + 2 > 0.$

19/ $(m+4)x^2 - (m-1)x - 1 - 2m < 0.$ 20/ $(m-1)x^2 + 2(m-1)x - 4m < 0.$

$$21/ \quad (2m - 1)x^2 - (m + 1)x + m \geq 0.$$

$$22/ \quad (m - 2)x^2 + 4mx + m - 1 \leq 0.$$

$$23/ \quad \frac{x^2 - 8x + 20}{mx^2 + 2(m + 1)x + 9m + 4} < 0.$$

$$24/ \quad \frac{3x^2 - 5x + 4}{(m - 4)x^2 + (1 + m)x + 2m - 1} > 0.$$

$$25/ \quad \frac{x^2 + mx - 1}{2x^2 - 2x + 3} < 1.$$

$$26/ \quad -4 < \frac{2x^2 + mx - 4}{-x^2 + x - 1} < 6.$$

$$27/ \quad |3(m + 6)x^2 - 3(m + 3)x + 2m - 3| > 3.$$

$$28/ \quad \left| \frac{x^2 + (m - 1)x + 3}{x^2 + x + 1} \right| \leq 2.$$

$$29/ \quad \left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + mx + 1} \right| \leq 3.$$

$$30/ \quad \left| \frac{3x^2 - 4x}{x^2 + 2mx + 3m} \right| \geq 2.$$

Bài 122. Tìm tham số m để các bất phương trình sau vô nghiệm

$$1/ \quad x^2 + 6x + m + 7 \leq 0.$$

$$2/ \quad -x^2 + 2(m - 1)x + 1 \geq 0.$$

$$3/ \quad (m - 2)x^2 + 2x - 4 \geq 0.$$

$$4/ \quad mx^2 + 4x + m < 0.$$

$$5/ \quad mx^2 + 2(m - 1)x + 4 \geq 0.$$

$$6/ \quad mx^2 - 4(m + 1)x + m - 5 < 0.$$

$$7/ \quad mx^2 + 6mx + 8m - 10 \geq 0.$$

$$8/ \quad (m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3m - 3 > 0.$$

$$9/ \quad (m - 1)x^2 + 2(m - 1)x + 3m - 2 > 0.$$

$$10/ \quad (m + 2)x^2 - 2(m - 1)x + 4 < 0.$$

$$11/ \quad (m - 2)x^2 + (m - 2)x + m \leq 0.$$

$$12/ \quad (m - 2)x^2 + 2(m - 2)x + m + 4 \leq 0.$$

$$13/ \quad (m - 3)x^2 + (m + 2)x - 4 > 0.$$

$$14/ \quad (m + 3)x^2 + 2(m - 1)x + 4m < 0.$$

$$15/ \quad (m - 4)x^2 + (m + 1)x + 2m - 1 \geq 0.$$

$$16/ \quad (m + 4)x^2 - (m - 4)x - 2m + 1 < 0.$$

$$17/ \quad (3 - m)x^2 - 2(2m - 5)x - 2m + 5 > 0.$$

$$18/ \quad (3m + 1)x^2 - (3m + 1)x + m + 4 \leq 0.$$

$$19/ \quad m(m + 8)x^2 - 2(m + 8)x + 8m + 1 \geq 0.$$

$$20/ \quad (m^2 + 2m - 3)x^2 + 2(m - 1)x + 1 < 0.$$

Bài 123. Tìm tham số m để các bất phương trình sau có nghiệm

$$1/ \quad mx^2 + 2(m + 1)x + m - 2 \leq 0.$$

$$2/ \quad (m + 2)x^2 + 2(m + 2)x + m + 4 \geq 0.$$

$$3/ \quad (m - 2)x^2 + 2(m - 2)x + 2 \leq 0.$$

$$4/ \quad (m - 1)x^2 + 2(m + 2)x + m - 6 \leq 0.$$

$$5/ \quad -2x^2 + 2(m - 2)x + m - 2 < 0.$$

$$6/ \quad -x^2 + 3x - m + 1 < 0.$$

$$7/ \quad x^2 + (m - 2)x - 8m + 1 \geq 0.$$

$$8/ \quad (m^2 + 1)x^2 + 2(m + 3)x + 1 \geq 0.$$

$$9/ \quad (m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + 5m - 6 = 0.$$

$$10/ \quad (m - 5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0.$$

$$11/ \quad (3 - m)x^2 - 2(m + 3)x + m + 2 = 0.$$

$$12/ \quad (1 + m)x^2 - 2mx + 2m = 0.$$

$$13/ \quad (2m - 3 - m^2)x^2 + 2(2 - 3m)x = 3. \quad 14/ \quad (m - 2)x^2 - 4mx + 2m - 6 = 0.$$

Bài 124. Giải và biện luận các bất phương trình sau

$$\begin{array}{ll} 1/ \quad x^2 - mx + m + 3 > 0. & 2/ \quad (1 + m)x^2 - 2mx + 2m \leq 0. \\ 3/ \quad mx^2 - 2x + 4 > 0. & 4/ \quad x^2 - 2(m + 3)x + m^2 + 4m + 1 > 0. \\ 5/ \quad x^2 - 2(m + 3)x + m^2 + 4m + 1 < 0. & 6/ \quad 3mx^2 - mx + 1 \geq 0. \\ 7/ \quad (m - 1)x^2 - 4mx + 4 < 0. & 8/ \quad mx^2 + (m - 3)x + m - 3 \leq 0. \\ 9/ \quad mx^2 + 4mx + m + 6 \geq 0. & 10/ \quad (m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3m - 3 \geq 0. \\ 11/ \quad (1 - m)x^2 + 2mx + m + 1 \leq 0. & 12/ \quad 2x^2 - 2(m + 1)x + 1 \geq 0. \\ 13/ \quad (m - 3)x^2 - 4(m - 3)x + m \geq 0. & 14/ \quad x^2 - 2x + 2m - m^2 \geq 0. \\ 15/ \quad x^2 - 2mx + 3m < 0. & 16/ \quad (m - 1)x^2 + 3(m - 1)x + 5 \geq 0. \\ 17/ \quad x^2 - 2mx + m^2 - 1 \leq 0. & 18/ \quad (m + 1)x^2 - 2mx + 4m > 0. \\ 19/ \quad (m^2 + 1)x^2 + 2(m + 3)x + 1 \geq 0. & 20/ \quad x + \frac{1}{x} \leq \frac{1 - \sqrt{m}}{1 + \sqrt{m}} + \frac{1 + \sqrt{m}}{1 - \sqrt{m}}. \end{array}$$

Bài 125. Tìm tham số m để bất phương trình sau thỏa điều kiện x cho trước

$$\begin{array}{ll} 1/ \quad x^2 + 2(m + 1)x - m + 3 \geq 0 & \forall x \geq 0. \\ 2/ \quad x^2 + 2(m + 1)x - m + 3 \geq 0 & \forall x \leq 0. \\ 3/ \quad x^2 - (m + 1)x + 1 > 0 & \forall x > 0. \\ 4/ \quad (3 - m)x^2 - 2(m + 1)x + 1 > 0 & \forall x < 0. \\ 5/ \quad x^2 - 2(m - 2)x + m - 2 \leq 0 & \forall x \in [0; 1]. \\ 6/ \quad (m - 2)x^2 - 2(m - 2)x + 1 \leq 0 & \forall x \in [0; 1]. \\ 7/ \quad x^2 - 2mx + 3m - 2 > 0 & \forall x \in (1; 2). \\ 8/ \quad (m + 1)x^2 - 2(2m - 1)x < 3(1 - 2m) & \forall x \in (-1; 1). \\ 9/ \quad (x - m + 1)(x - m + 3) < 0 & \forall x \in (1; 2). \\ 10/ \quad (x + 3 - 2m)(x + 3m - 2) < 0 & \forall x \in [2; 3]. \\ 11/ \quad (x - 2m)(x + m - 1) > 0 & \forall x \in [3; +\infty). \\ 12/ \quad \left| \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 - (m + 1)x + 4} \right| < 2 & \forall x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Bài 126. Tìm miền xác định của hàm số tùy theo giá trị của m

$$1/ \quad y = f(x) = 2x - 3 + \sqrt{(m-1)x^2 + 3(m-1)x + m}.$$

$$2/ \quad y = f(x) = \frac{4x+5}{\sqrt{(2-3m)x^2 + 2mx + m-1}} + x - 2.$$

$$3/ \quad y = f(x) = 3x^2 + mx - 7 - \sqrt{\frac{3x^2 - 4x}{x^2 + mx + m}} - 2.$$

$$4/ \quad y = f(x) = 5x^2 + 2m - \sqrt{(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 2 - 2m}.$$

$$5/ \quad y = f(x) = \frac{\sqrt{mx^2 + (m+2)x + 2}}{x-1} + m^2 - 3m + 1.$$

Bài 127. Tìm tham số m để hai bất phương trình sau đây tương đương nhau

$$1/ \quad 4x^2 - 8x + 3 > 0 \quad \& \quad x^2 - 2x + 1 - m^2 \geq 0.$$

$$2/ \quad x^2 + 8x + 7 > 0 \quad \& \quad mx^2 - 2x + 4 > 0.$$

$$3/ \quad 2x^2 + 5x + 3 < 0 \quad \& \quad -x^2 + 3x - m + 1 < 0.$$

$$4/ \quad x^2 - x - 20 \geq 0 \quad \& \quad -x^2 + 2(m-1)x + 1 \geq 0.$$

Bài 128. Tìm tham số m để bất phương trình: $(1-m)x^2 + 2mx + m - 6 \geq 0$

1/ Có nghiệm.

2/ Có duy nhất một nghiệm.

3/ Có nghiệm là một đoạn trên trục số có độ dài bằng 1.

Bài 129. Tìm tham số m để bất phương trình: $mx^2 - 2(m-1)x - m - 5 \leq 0$

1/ Có nghiệm.

2/ Có duy nhất một nghiệm.

3/ Có nghiệm là một đoạn trên trục số có độ dài bằng 2.

Bài 130. Tìm tham số m để nghiệm các hệ sau thỏa yêu cầu bài toán

$$1/ \quad \begin{cases} x^2 - 6x + 5 < 0 \\ x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{Có nghiệm.}$$

$$2/ \quad \begin{cases} x^3 - 2x^2 - 5x + 6 < 0 \\ x^2 - (m^2 - 1)x + 3m - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{Có một nghiệm âm và một nghiệm dương.}$$

$$3/ \quad \begin{cases} x^2 + 7x - 8 < 0 \\ x^2 - (3m+1)x + m(2m+1) = 0 \end{cases} \quad \text{Vô nghiệm.}$$

- 4/ $\begin{cases} x^2 - 2mx + 2m^2 + m - 2 = 0 \\ x^2 - 2mx + 2m > 0 \end{cases}$ Có nghiệm duy nhất.
- 5/ $\begin{cases} x^2 + m^2 = 4 \\ x^2 + (5m + 2)x + 4m^2 + 2m < 0 \end{cases}$ Có nghiệm.
- 6/ $\begin{cases} x^2 - (m + 3)x + 3m < 0 \\ x^2 + (m + 9)x + 9m < 0 \end{cases}$ Có nghiệm.
- 7/ $\begin{cases} x^2 - 2mx + 4m \leq 0 \\ x^2 - mx + 8m \leq 0 \end{cases}$ Có nghiệm duy nhất.
- 8/ $\begin{cases} x^2 + (m + 1)x + 1 \leq 0 \\ (m + 1)x^2 + x + 1 \geq 0 \end{cases}$ Có nghiệm duy nhất.
- 9/ $\begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 \leq 0 \\ mx^2 + 2mx + 1 \leq 0 \end{cases}$ Vô nghiệm.
- 10/ $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 > 0 \\ x^2 - 4(m + 1)x + 4m^2 + 8m + 3 \leq 0 \end{cases}$ Có nghiệm.
- 11/ $\begin{cases} (2m + 1)x + 3 > (x - 3)m^2 \\ (m - 2)x^2 - 4x - 1 > 0 \end{cases}$ Có nghiệm.
- 12/ $\begin{cases} m^2(x - 2) + (m + 1)x > 2 + mx \\ (m + 1)x^2 + x + 2 > 0 \end{cases}$ Có nghiệm.
- 13/ $\begin{cases} x^2 - (2m + 1)x - 4m \geq 0 \\ x^2 - 2mx + 3 - 2m \leq 0 \end{cases}$ Có nghiệm duy nhất.
- 14/ $\begin{cases} x^2 - 4(m + 1)x + 4m^2 + 8m + 3 \leq 0 \\ x^2 - 5x + 4 > 0 \end{cases}$ Có nghiệm.
- 15/ $\begin{cases} x^2 + (m + 1)x + 1 \leq 0 \\ (m + 1)x^2 + x + 1 \geq 0 \end{cases}$ Có nghiệm duy nhất.
- 16/ $\begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 \leq 0 \\ mx^2 + 2mx + 1 \leq 0 \end{cases}$ Vô nghiệm.

Bài 131. Tìm tham số m để các hệ sau có tập nghiệm là $\mathbb{R}$

$$1/ \quad 6 < \frac{3x^2 - mx - 6}{x^2 + x + 1} < 9. \quad 2/ \quad 1 \leq \frac{3x^2 - mx + 5}{2x^2 - x + 1} < 6.$$

Bài 132. Tìm tham số m để các hệ phương trình có nghiệm thỏa yêu cầu sau của bài toán

- 1/ $\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 10x + 24 > 0 \\ x^2 + 2(m^2 - 1)x - 2m + 1 = 0 \end{cases}$ Có hai nghiệm âm.
- 2/ $\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 10x + 24 > 0 \\ x^2 + 2(m^2 - 1)x - 2m + 1 = 0 \end{cases}$ Có nghiệm duy nhất.
- 3/ $\begin{cases} x^2 + (2m + 1)x + m^2 + m - 2 = 0 \\ x^4 - 4x^2 + 4 < 0 \end{cases}$ Có nghiệm duy nhất.
- 4/ $\begin{cases} x^2 - 2(m + 3)x + m^2 + 6m + 5 = 0 \\ x^4 - 10x^2 + 9 < 0 \end{cases}$ Có nghiệm duy nhất.
- 5/ $\begin{cases} x^2 - 2x + m = 0 \\ x^4 - 4x^3 + 4x^2 + m - 10 < 0 \end{cases}$ Có nghiệm duy nhất.
- 6/ $\begin{cases} x^2 - 2x - 4 + m \leq 0 \\ x^4 - 6x^2 - 8x + 20 - m \leq 0 \end{cases}$ Có nghiệm.

Bài 133. Cho hệ bất phương trình: $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \leq 0 \\ x^2 - 8x + 14 + m \leq 0 \end{cases}$ Tìm tham số m để:

- 1/ Hệ vô nghiệm.
- 2/ Hệ có nghiệm duy nhất.
- 3/ Hệ có nghiệm là một đoạn trên trục số có độ dài bằng 1.

Bài 134. Cho hệ bất phương trình: $\begin{cases} x^2 - 3x + 4 \leq 0 \\ 3x^2 - 2(m + 1)x - m^2 + 2m - 3 \leq 0 \end{cases}$

- 1/ Tìm m để hệ vô nghiệm.
- 2/ Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

Bài 135. Cho hệ bất phương trình: $\begin{cases} x^2 - (3m - 1)x + 5m + 6 = 0 \\ x^2 - 2x < 0 \end{cases}$

- 1/ Tìm m để hệ có đúng một nghiệm.
- 2/ Tìm m để hệ có hai nghiệm phân biệt.

Bài 136. Cho hệ bất phương trình: $\begin{cases} x^2 - (3m - 1)x + 2m^2 - m < 0 \\ x^2 + m^2 = 4 \end{cases}$

- 1/ Tìm m để hệ có nghiệm.
- 2/ Tìm m để hệ có đúng một nghiệm.
- 3/ Tìm m để hệ có hai nghiệm phân biệt.

Bài 137. Cho hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - 2x - 4m \leq 0 \\ x^2 - 4x + m \leq 0 \end{cases}$$

- 1/ Tìm m để hệ có nghiệm.
- 2/ Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

Bài 138. Cho hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} (m-1)x^2 + (m-1)x + m - 1 \geq 0 \\ mx^2 - 2x + 2m + 1 \leq 0 \end{cases}$$

- 1/ Tìm m để hệ có nghiệm.
- 2/ Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

Bài 139. Xác định m để hệ sau có nghiệm thỏa yêu bài toán

$$1/ \begin{cases} x^2 - 2mx \leq 0 \\ |x - 1 + m| \leq 2m \end{cases} \quad \text{Có nghiệm duy nhất.}$$

$$2/ \begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0 \\ x^3 - 3x|x| - m^2 - 15m \geq 0 \end{cases} \quad \text{Có nghiệm.}$$

Bài 140. Giải và biện luận hệ bất phương trình sau

$$1/ \begin{cases} mx + 1 \geq 0 \\ x^2 - 3x - 10 \leq 0 \end{cases} \quad 2/ \begin{cases} x^2 - x - 6 \leq 0 \\ x^2 - (m+1)x + m > 0 \end{cases}$$

$$3/ \begin{cases} (x-1)(x-2m) \leq 0 \\ (x+2)(x+m) \leq 0 \end{cases} \quad 4/ \begin{cases} x^2 + 2x - 8 \geq 0 \\ x^2 + (1-m)x - 2(m+1) < 0 \end{cases}$$

$$5/ \begin{cases} x^2 - 6x + 8 \leq 0 \\ x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m > 0 \end{cases} \quad 6/ \begin{cases} x^2 + (1-3m)x - m(1-2m) \leq 0 \\ x^2 + (m-4)x - 2(m-2) \leq 0 \end{cases}$$

Bài 141. Tìm tham số m để các hệ sau có nghiệm thỏa yêu cầu của bài toán

$$1/ \begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 \leq 4 \\ (x-m)^2 + (y-3)^2 \leq 1 \end{cases} \quad \text{Có nghiệm.}$$

$$2/ \begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq m \\ (x+1)^2 + (3-y)^2 \leq m \end{cases} \quad \text{Có nghiệm duy nhất.}$$

$$3/ \begin{cases} x^2 + (y-m+1)^2 \leq 4 \\ (x+m)^2 + (y+1)^2 \geq (m-2)^2 \end{cases} \quad \text{Có nghiệm.}$$

$$4/ \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2 \\ x - y + m = 0 \end{cases} \quad \text{Nghiệm đúng } x \in [0; 2].$$

Bài 142. Cho hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 6m + 5 \leq y \\ (x-y-m-2)(x-y-m-5) \leq 0 \end{cases}$$

- 1/ Giải hệ bất phương trình khi $m = 1$.
- 2/ Tìm tham số m để tập nghiệm của hệ chứa đoạn $[2; 4]$.

Bài 143. Cho hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} y - |x^2 - x| - 1 \geq 0 \\ |y - 2| + |x + 1| - 1 \leq 0 \end{cases}$$

- 1/ Giải hệ khi $y = 2$.
- 2/ Tìm các nghiệm của hệ.

Bài 144. Cho bất phương trình: $mx - \sqrt{x-3} \leq m+1 \quad (*)$

- 1/ Giải bất phương trình $(*)$ khi $m = \frac{1}{2}$.
- 2/ Với giá trị nào của tham số m thì bất phương trình có nghiệm.

Bài 145. Cho bất phương trình: $\sqrt{(m+2)x-m} \geq |x+1| \quad (*)$

- 1/ Giải bất phương trình $(*)$ khi $m = 1$.
- 2/ Tìm tất cả giá trị của m để bất phương trình $(*)$ có nghiệm x thỏa: $0 \leq x \leq 2$.

Bài 146. Tìm tham số $m > 0$ để bất phương trình: $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} > m$ có nghiệm.

Bài 147. Tìm tham số m để: $\sqrt{(1+2x)(3-x)} > m + (2x^2 - 5x + 3)$ thỏa $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; 3\right]$.

Bài 148. Tìm nghiệm của bất phương trình: $x + \sqrt{1-x^2} < x\sqrt{1-x^2}$ trên đoạn $[0; 1]$.

Bài 149. Cho bất phương trình: $(x^2 + 1)^2 + m \leq x\sqrt{x^2 + 2} + 4 \quad (*)$

- 1/ Giải bất phương trình $(*)$ khi $m = 3$.
- 2/ Tìm tham số m để bất phương trình $(*)$ được thỏa $\forall x \in [0; 1]$.

Bài 150. Cho bất phương trình: $x - 2\sqrt{x-1} \leq m+1 \quad (*)$

- 1/ Giải bất phương trình $(*)$ khi $m = 0$.
- 2/ Với giá trị nào của tham số m thì bất phương trình $(*)$ có nghiệm.

Bài 151. Cho $x \in [0; 1]$. Chứng minh rằng: $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{1-x} \leq \sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2}}$. Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Bài 152. Giải bất phương trình: $2x + \sqrt{a^2 - x^2} > 0$ với a là số cho trước.

Bài 153. Tìm m để bất phương trình: $x - m\sqrt{x-1} > m+1$ có nghiệm.

Bài 154. Giải bất phương trình: $\sqrt{1-x} - \sqrt{x^2+1} > 0$. Suy ra bảng xét dấu của hàm số $f(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x^2+1}$.

Giải bất phương trình: $\sqrt{1-x} - \sqrt{x^2+1} < x$.

Bài 155. Cho đa thức: $P(x) = 2x^3 + mx^2 + nx + p$ Trong đó m, n, p là hằng số.

1/ Xác định m, n, p để $P(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$.

2/ Với các giá trị tìm được của m, n, p , giải bất phương trình: $P(|x-1|) > 0$.

Bài 156. Với giá trị nào của tham số m thì bất phương trình: $x^2 + 2|x-m|x + m^2 + x - 1 \leq 0$ có nghiệm.

Bài 157. Tìm tham số m để bất phương trình: $x^2 + |x-m| < 3$ có nghiệm âm.

Bài 158. Cho bất phương trình: $\sqrt{x(2-x)} + m + 1 \geq x^2 - 2x + 3$ (*)

1/ Tìm m để bất phương trình (*) có nghiệm.

2/ Tìm m để độ dài miền nghiệm của bất phương trình (*) bằng 2.

Bài 159. Cho bất phương trình: $\sqrt{x(6-x)} \geq x^2 - 6x + m + 2$ (*)

1/ Tìm tham số m để bất phương trình (*) có nghiệm.

2/ Tìm tham số m để miền nghiệm của bất phương trình (*) thuộc đoạn $[2; 4]$.

Bài 160. Tìm các giá trị của m sao cho bất phương trình: $x|x-3| < m$ được thỏa $\forall x \in [1; 4]$.

Bài 161. Tìm tham số m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{array}{ll} 1/ \begin{cases} x^2 - (m+2)x + 2m < 0 \\ x^2 + (m+7)x + 7m < 0 \end{cases} & 2/ \begin{cases} x^2 + (2-3m^2)x - 6m^2 < 0 \\ x^2 - (2m+5)x + m^2 + 5m + 6 \geq 0 \end{cases} \\ 3/ \begin{cases} x^2 - 2x - m + 1 \leq 0 \\ x^2 - (2m+1)x + m^2 + m \leq 0 \end{cases} & 4/ \begin{cases} \sqrt{x^2 + x - 2} + x < 1 \\ x^2 - 2(m+2)x + 1 > 0 \end{cases} \end{array}$$

Bài 162. Cho hệ bất phương trình: $\begin{cases} x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3 < 0 \\ x^2 - mx - 3 \leq 0 \end{cases}$ (*)

1/ Giải hệ (*) khi $m = 2$.

2/ Tìm tham số m để hệ (*) có nghiệm.

Bài 163. Cho hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} x^4 - 5x^2 + 4 < 0 \\ x^2 + (2m + 1)x + m^2 + m - 2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

- 1/ Giải hệ $(*)$ với $m = 1$.
- 2/ Tìm tham số m để hệ $(*)$ có nghiệm.
- 3/ Tìm tham số m để hệ $(*)$ có nghiệm duy nhất.

Bài 164. Cho hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} x^4 + 8x^2 + 16x + 16m^2 + 32m + 16 = 0 \\ x^2 + \frac{4x^2}{(x + 2)^2} \geq 5 \end{cases} \quad (*)$$

- 1/ Giải hệ $(*)$ với $m = 2$.
- 2/ Tìm tham số m để hệ $(*)$ có nghiệm.

Bài 165. Tìm tham số m để hệ:
$$\begin{cases} x^2 + (y + 1)^2 \leq m \\ (x + 1)^2 + y^2 \leq m \end{cases}$$
 có nghiệm duy nhất.

Bài 166. Giải và biện luận hệ:
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 \leq a \end{cases}$$

Bài 167. Tìm tham số m để hệ:
$$\begin{cases} x + 3y \geq (x + y)^2 + m \\ (x - y)^2 \leq 3y - x - m \end{cases}$$
 có nghiệm duy nhất.

Bài tập qua các kì thi

Bài 168. Cao đẳng Giao Thông năm 2003

Giải hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} 3x^2 + 2x - 1 < 0 \\ x^3 - 3x + 1 > 0 \end{cases}$$

Bài 169. Cao đẳng Khí Tượng Thủy Văn khối A năm 2003

Giải hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - 2x \leq 0 \\ x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0 \end{cases}$$

Bài 170. Đại học kiến trúc Tp. Hồ Chí Minh năm 1994

Cho bất phương trình: $mx - \sqrt{x - 3} \leq m + 1$.

- 1/ Giải bất phương trình với $m = \frac{1}{2}$.

2/ Với giá trị nào của tham số m thì bất phương trình có nghiệm ?

ĐS: 1/ $3 \leq x \leq 7$. 2/ $m \leq \frac{1+\sqrt{3}}{4}$.

Bài 171. Đại học Tài Chính Kế Toán Tp. Hồ Chí Minh năm 1995

Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} |y - |x^2 - x|| - 1 \geq 0 \\ |y - 2| + |x + 1| - 1 \leq 0 \end{cases}$$

1/ Giải hệ bất phương trình khi $y = 2$.

2/ Tìm tất cả các nghiệm nguyên của hệ.

ĐS: 1/ $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq 0$. 2/ $S = \{(0; 2), (-1; 3)\}$.

Bài 172. Đại học Y Dược Tp. Hồ Chí Minh năm 1996

Tìm a để bất phương trình $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} \geq a$ có nghiệm với a là tham số dương.

ĐS: $0 < a < 1$.

Bài 173. Đại học Ngoại Thương Cơ Sở 2 năm 1999

Với giá trị nào của m thì hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 8x + 7 \leq 0 \\ x^2 - (2m+1)x + m^2 + m \leq 0 \end{cases}$$
 có nghiệm ?

Xác định m để hệ bất phương trình có một nghiệm duy nhất ?

Bài 174. Học Viện Quan Hệ Quốc Tế năm 1997

Tìm m để hệ
$$\begin{cases} x^2 - (m+2)x + 2m < 0 \\ x^2 + (m+7)x + 7m < 0 \end{cases}$$
 có nghiệm ĐS: $m < 0$.

Bài 175. Đại học Thương Mại năm 1997

Tìm m để hệ
$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 - m \leq 0 \\ x^2 - (2m+1)x + m^2 + m \leq 0 \end{cases}$$
 có nghiệm

Bài 176. Đại học Thủy Lợi năm 1998

Tìm m để hệ
$$\begin{cases} x^2 - 2mx < 0 \\ |x - 1 + m| \leq 2m \end{cases}$$
 có nghiệm

Bài 177. Đại học Thương Mại năm 1998

Tìm m để hệ
$$\begin{cases} x^2 - 3x + 4 \leq 0 \\ x^3 - 3x|x| - m^2 - 15m \geq 0 \end{cases}$$
 có nghiệm

Bài 178. Đại học Kinh Tế Quốc Dân Hà Nội năm 1999

$$\begin{cases} x^2 + 5x + 4 < 0 \\ x^3 + 3x^2 - 9x - 10 > 0 \end{cases}$$
 ĐS: $-4 < x < -1$.

Chương 5

GÓC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC



A – HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Hệ thức lượng giác cơ bản

$$\textcircled{1} \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

$$\textcircled{2} \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

$$\textcircled{3} \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$\textcircled{4} \quad \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1.$$

$$\textcircled{5} \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

$$\textcircled{6} \quad 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Chứng minh các đẳng thức sau

$$1/ \quad \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x.$$

$$2/ \quad 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x.$$

$$3/ \quad 3 - 4 \sin^2 x = 4 \cos^2 x - 1.$$

$$4/ \quad \sin x \cot x + \cos x \tan x = \sin x + \cos x.$$

$$5/ \quad \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x.$$

$$6/ \quad \cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

$$7/ \quad 4 \cos^2 x - 3 = (1 - 2 \sin x)(1 + 2 \sin x). \quad 8/ \quad (1 + \cos x)(\sin^2 x - \cos x + \cos^2 x) = \sin^2 x.$$

$$9/ \quad \sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \cos^2 x = 2 \sin^2 x - 1. \quad 10/ \quad \sin^3 x \cos x + \sin x \cos^3 x = \sin x \cos x.$$

$$11/ \quad \tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x.$$

$$12/ \quad \cot^2 x - \cos^2 x = \cot^2 x \cos^2 x.$$

Bài 2. Chứng minh các đẳng thức sau

$$1/ \quad \tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}.$$

$$2/ \quad \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$$

$$3/ \quad \frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \cot x} = 1.$$

$$4/ \quad \left(1 - \frac{1}{\cos x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) + \tan^2 x = 0.$$

$$5/ \quad \frac{1 + \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = 1 + 2 \tan^2 x.$$

$$6/ \quad \tan x \tan y = \frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y}.$$

$$7/ \quad 1 - \cot^4 x = \frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin^4 x}.$$

$$8/ \quad \tan x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1}{\cos x}.$$

$$9/ \quad (1 - \cos x)(1 + \cot^2 x) = \frac{1}{1 + \cos x}.$$

$$10/ \quad \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} - \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{4 \cot x}{\sin x}.$$

$$11/ \quad \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}.$$

$$12/ \quad \frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 1} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}.$$

$$13/ \quad \frac{\sin^2 x + 2 \cos x - 1}{2 + \cos x - \cos^2 x} = \frac{\cos x}{1 + \cos x}.$$

$$14/ \quad \frac{\sin x + \cos x - 1}{1 - \cos x} = \frac{2 \cos x}{\sin x - \cos x + 1}.$$

Bài 3. Chứng minh các đẳng thức sau

- 1/ $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$.
- 2/ $\sin^6 x - \cos^6 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(1 - \sin^2 x \cos^2 x)$.
- 3/ $\sin^8 x + \cos^8 x = (1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x)^2 - 2 \sin^4 x \cos^4 x$.
- 4/ $\sin^8 x - \cos^8 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x)$.

Bài 4. Chứng minh các đẳng thức sau

- 1/ $1 + \sin x + \cos x + \tan x = (1 + \cos x)(1 + \tan x)$.
- 2/ $(1 + \tan x)(1 + \cot x) \sin x \cos x = 1 + 2 \sin x \cos x$.
- 3/ $(1 + \tan x) \cos^2 x + (1 + \cot x) \sin^2 x = (\sin x + \cos x)^2$.
- 4/ $\sin^2 x \tan x + \cos^2 x \cot x + 2 \sin x \cos x = \tan x + \cot x$.
- 5/ $\sin^2 x \tan^2 x + 4 \sin^2 x - \tan^2 x + 3 \cos^2 x = 3$.

Bài 5. Chứng minh các đẳng thức sau

- 1/ $\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 1}$.
- 2/ $\frac{\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cot^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \tan^6 \alpha$.
- 3/ $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \tan \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cot \alpha} = 1 - \sin \alpha \cos \alpha$.
- 4/ $\frac{\tan \alpha - \sin \alpha}{\sin^3 \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha (1 + \cos \alpha)}$.
- 5/ $\frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2$.
- 6/ $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \tan^2 \alpha = \frac{3 \tan^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1$.
- 7/ $\frac{\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta}{\tan^2 \alpha \tan^2 \beta} = \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}$.
- 8/ $\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \left[\frac{(1 + \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha} - 1 \right] = 2 \cot \alpha$.
- 9/ $(1 - \cos \alpha)(1 + \cot^2 \alpha) = \frac{1}{1 + \cos \alpha}$.
- 10/ $1 + \tan \alpha + \tan^2 \alpha + \tan^3 \alpha = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos^3 \alpha}$.
- 11/ $\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{1 + \cot^2 \alpha}{1 - \cot^2 \alpha}$.
- 12/ $\frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \cdot \frac{1 + \cot^2 \alpha}{\cot^2 \alpha} = \frac{1 + \tan^4 \alpha}{\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha}$.
- 13/ $\left(\sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} \right)^2 = 4 \tan^2 \alpha$.
- 14/ $\left(\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \right)^2 = 4 \cot^2 \alpha$.

Bài 6. Rút gọn các biểu thức sau

- 1/ $P_1 = \sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$.
- 2/ $P_2 = \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha$.
- 3/ $P_3 = \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cot^2 \alpha$.
- 4/ $P_4 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cot^2 \alpha$.
- 5/ $P_5 = (1 - \sin^2 \alpha) \cot^2 \alpha + 1 - \cot^2 \alpha$.
- 6/ $P_6 = \sin^2 \alpha \tan \alpha + \cos^2 \alpha \cot \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

$$7/ \quad P_7 = \frac{2\cos^2 \alpha - 1}{\sin \alpha + \cos \alpha}.$$

$$8/ \quad P_8 = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha}.$$

$$9/ \quad P_9 = \frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}.$$

$$10/ \quad P_{10} = \tan \alpha + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}.$$

$$11/ \quad P_{11} = \frac{\sin x + \tan x}{\tan x} - \sin x \cot x.$$

$$12/ \quad P_{12} = \frac{\cos x \tan x}{\sin^2 x} - \cot x \cos x.$$

$$13/ \quad P_{13} = \frac{\cos^2 x - \cot^2 x}{\sin^2 x - \tan^2 x}.$$

$$14/ \quad P_{14} = \frac{1 - \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x} - \cos^2 x.$$

$$15/ \quad P_{15} = \frac{\sin^3 x + \sin x \cos^2 x - \cos x}{1 - 2\sin x \cos x}.$$

$$16/ \quad P_{16} = \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\tan x - \sin x \cos x}.$$

$$17/ \quad P_{17} = \frac{\sin^2 x + \sin^2 x \tan^2 x}{\cos^2 x + \cos^2 x \tan^2 x}.$$

$$18/ \quad P_{18} = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + 1 - \cos^2 x.$$

$$19/ \quad P_{19} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} - \cot^2 x \cot^2 y.$$

$$20/ \quad P_{20} = \frac{1}{\sin x} - \frac{\sin x}{1 + \cot x} - \frac{\cos x \cot x}{1 + \tan x}.$$

$$21/ \quad P_{21} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} + \frac{1 - \sin x}{\cos x} + \tan x + \cot x.$$

$$22/ \quad P_{22} = \left(1 + \cot x + \frac{1}{\sin x}\right) \left(1 + \cot x - \frac{1}{\sin x}\right).$$

$$23/ \quad P_{23} = \sqrt{(1 + \tan x) \cos^2 x + (1 + \cot x) \sin^2 x}.$$

$$24/ \quad P_{24} = \frac{1}{\sin x - \sqrt{\cot^2 x - \cos^2 x}}, \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Bài 7. Biến đổi các biểu thức sau thành tích số

$$1/ \quad A = 2\cos^2 x - 1.$$

$$2/ \quad B = 3 - 4\sin^2 x.$$

$$3/ \quad C = \sin x \cos x + \cos^2 x - 1.$$

$$4/ \quad D = \sin^2 x + \sin x \cos x - 1.$$

$$5/ \quad E = 1 + \sin x + \cos x + \tan x.$$

$$6/ \quad F = \tan x - \cot x + \sin x + \cos x.$$

$$7/ \quad G = \cos x \tan^2 x - (1 + \cos x).$$

$$8/ \quad H = (3 - 4\cos^2 x) - \sin x (2\sin x + 1).$$

$$9/ \quad I = \sin^2 x - 3\cos^2 x + \sqrt{6} \cos x - \sqrt{2} \sin x.$$

$$10/ \quad J = \cos^3 x - \sin^3 x + \sin x + \cos x.$$

$$11/ \quad K = \cos^3 x + \cos^2 x + 2\sin x - 2.$$

$$12/ \quad L = \cos^2 x + \sin^3 x + \cos x.$$

$$13/ \quad M = 1 + \cos x + \cos^2 x - \sin x (1 + \cos x).$$

- 14/ $N = 2 \cos^3 x + 2 \cos^2 x + \sin x - 1.$
- 15/ $O = \cos^3 x + \sin^3 x + 2 \sin^2 x - 1.$
- 16/ $P = (2 \sin x - 1)(2 \cos x + 2 \sin x + 1) - 3 + 4 \cos^2 x.$
- 17/ $Q = (2 \cos x - 1)(\sin x + \cos x) - 1.$
- 18/ $R = 4 \sin^3 x + 3 \cos^3 x - 3 \sin x - \sin^2 x \cos x.$
- 19/ $S = (1 + \sin x) \tan^2 x - (1 + \cos x).$
- 20/ $T = 2 - 5 \sin x + 3(1 - \sin x) \tan^2 x.$
- 21/ $U = 2 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x + 3 \sin x - \cos x - 1.$
- 22/ $V = \tan x - 3 \cot x - 4(\sin x + \sqrt{3} \cos x).$
- 23/ $X = 3 \sin x + 2 \cos x - 3 \tan x - 2.$
- 24/ $Y = 2(\tan x - \sin x) + 3(\cot x - \cos x) + 5.$
- 25/ $Z = 3(\cot x - \cos x) - 5(\tan x - \sin x) - 2.$

Bài 8. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến x

- 1/ $A = \cos^4 x - \sin^4 x + 2 \sin^2 x.$
- 2/ $B = \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x.$
- 3/ $C = \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin^2 x.$
- 4/ $D = \cos^4 x (2 \cos^2 x - 3) + \sin^4 x (2 \sin^2 x - 3).$
- 5/ $E = \sin^6 x + \cos^6 x - 2 \sin^4 x - \cos^4 x + \sin^2 x.$
- 6/ $F = \sin x \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}}, \left(0 < x < \frac{\pi}{4} \right).$
- 7/ $G = \sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x}.$
- 8/ $H = \cos^2 x \cot^2 x + 5 \cos^2 x - \cot^2 x + 4 \sin^2 x.$
- 9/ $I = (1 + \cot x) \sin^3 x + (1 + \tan x) \cos^3 x - \sin x - \cos x.$
- 10/ $J = (\sin^4 x + \cos^4 x - 1)(\tan^2 x + \cot^2 x + 2).$
- 11/ $K = 3(\sin^8 x - \cos^8 x) + 4(\cos^6 x - 2 \sin^6 x) + 6 \sin^4 x.$
- 12/ $L = \sin^4 x (1 + \sin^2 x) + \cos^4 x (1 + \cos^2 x) + 5 \sin^2 x \cos^2 x + 1.$
- 13/ $M = 2(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x)^2 - (\sin^8 x + \cos^8 x).$

Bài 9. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến x

$$1/ \quad A = \frac{2}{\tan x - 1} + \frac{\cot x + 1}{\cot x - 1}.$$

$$2/ \quad B = \frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 x \cos^2 x}.$$

$$3/ \quad C = \frac{1 - \tan^2 x}{\tan x} - (1 + \tan^2 x)(1 + \cot^2 x).$$

$$4/ \quad D = \frac{(1 - \cot^2 x)^2}{\cot^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

$$5/ \quad E = \frac{1 - \sin^6 x}{\cos^6 x} - \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x}.$$

$$6/ \quad F = \frac{\tan^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cot^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

$$7/ \quad G = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cot x}.$$

$$8/ \quad H = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x}.$$

Bài 10. Cho $f(x) = \sqrt{2(1 - \cos x)}$, $g(x) = \sqrt{2 + \cos x - \sqrt{3} \cdot \sin x}$, $h(x) = \sqrt{2 + \cos x + \sqrt{3} \cdot \sin x}$.

Chứng minh các đại lượng sau không phụ thuộc vào biến: $A = f^2(x) + g^2(x) + h^2(x)$,

$B = f^4(x) + g^4(x) + h^4(x)$, $C = f^2(x) \cdot g^2(x) + g^2(x) \cdot h^2(x) + h^2(x) \cdot f^2(x)$.

Bài 11. Cho $a \sin x \sin y - b \cos x \cos y = 0$. Chứng minh rằng biểu thức

$$Q = \frac{1}{a \sin^2 x + b \cos^2 x} + \frac{1}{a \sin^2 y + b \cos^2 y} \text{ không phụ thuộc vào biến.}$$

Bài 12. Cho $Q = \sin^6 x + \cos^6 x - m(\sin^4 x + \cos^4 x)$. Tìm tham số m để biểu thức Q không phụ thuộc vào x và tính giá trị của Q với m vừa tìm được (nếu có).

(HKII – Chuyên Trần Đại Nghĩa – năm 1998)

Bài 13. Cho $\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} = \frac{1}{a + b}$. Chứng minh rằng:

$$1/ \quad \frac{\sin^8 x}{a^3} + \frac{\cos^8 x}{b^3} = \frac{1}{(a + b)^3} \quad (\text{HKII – Chuyên Lê Hồng Phong – năm 2001})$$

$$2/ \quad \frac{\sin^{10} x}{a^4} + \frac{\cos^{10} x}{b^4} = \frac{1}{(a + b)^4} \quad (\text{HKII – Hà Nội Amsterdam – năm 2007})$$

B – ĐƯỜNG TRÒN LƯỢNG GIÁC – CUNG GÓC LƯỢNG GIÁC CUNG LIÊN KẾT

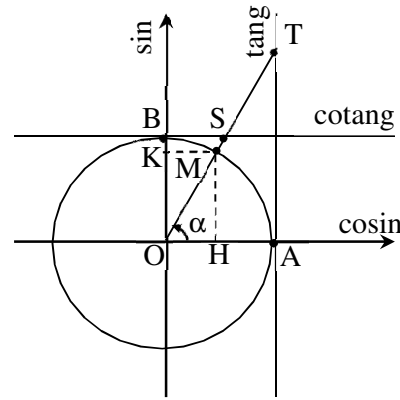


I – Giá trị lượng giác của góc (cung) lượng giác

1. Định nghĩa các giá trị lượng giác

Cho $(OA, OM) = \alpha$. Giả sử $M(x; y)$.

- $\cos \alpha = x = \overline{OH}$.
- $\sin \alpha = y = \overline{OK}$.
- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \overline{AT} \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$.
- $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \overline{BS} \left(\alpha \neq k\pi \right)$.



✎ Nhận xét

- $\forall \alpha, -1 \leq \cos \alpha \leq 1; -1 \leq \sin \alpha \leq 1$.
- $\tan \alpha$ xác định khi $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\cot \alpha$ xác định khi $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha$.
- $\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha$.
- $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha$.
- $\cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha$.

2. Dấu của các giá trị lượng giác

Giá trị lượng giác \ Phần tư	I	II	III	IV
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

3. Một số lưu ý

- Quan hệ giữa độ và radian: $1^\circ = \frac{\pi}{180}(\text{rad})$ và $1(\text{rad}) = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.
- Với $\pi \approx 3,14$ thì $1^\circ \approx 0,0175(\text{rad})$ và ngược lại $1(\text{rad}) = 57^\circ 17' 45''$.
- Độ dài l của cung tròn có số đo $\alpha(\text{rad})$, bán kính R là $l = R \cdot \alpha$.
- Số đo của các cung lượng giác có điểm đầu A, điểm cuối là B là $\text{sđ}\widehat{AB} = \alpha + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.
- Mỗi cung lượng giác $\widehat{CD}$ ứng với một góc lượng giác (OC, OD) và ngược

II – Cung góc liên kết

Góc đối nhau	Góc bù nhau	Góc phụ nhau
$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$

Góc hơn kém π	Góc hơn kém $\frac{\pi}{2}$
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$
$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$
$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$

rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
độ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	0		0
cot		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1		0	

✎ Cần nắm vững hệ thức cơ bản

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$
- $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$
- $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1.$
- $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$

BÀI TẬP ỨNG DỤNG**MỐI LIÊN HỆ GIỮA ĐƠN VỊ ĐỘ VÀ RADIAN**

Bài 14. Đổi số đo các cung sau ra độ, phút, giây: $\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{9}, \frac{9\pi}{5}, \frac{7\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}, -\frac{3\pi}{4}, 2, \frac{15\pi}{7}, \frac{\pi}{15}$.

Bài 15. Đổi số đo các góc sau ra radian (rad): $90^\circ, 36^\circ, 15^\circ, -72^\circ, 270^\circ, 240^\circ, 540^\circ, -750^\circ, 21^\circ$.

Bài 16. Đổi số đo độ của các cung tròn sau thành số đo radian (chính xác đến phần nghìn): $21^\circ 30', 75^\circ 54', 12^\circ 36', 15^\circ 30', -105^\circ 45' 30'', 27^\circ 38' 49''$.

Bài 17. Đổi số đo radian của các cung tròn sau ra số đo độ (chính xác đến phút): $\frac{2}{\pi}(\text{rad})$ và $2,5\pi$.

Bài 18. Điền các giá trị thích hợp vào ô trống

0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	120°	150°	180°

$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{4\pi}{3}$

Radian	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\pi}{12}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$
Độ				135°	-50°	810°

TÍNH ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

Bài 19. Một đường tròn có bán kính $10(\text{cm})$. Tính độ dài các cung có số đo là

$$\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{18}, \frac{3\pi}{5}, \frac{7\pi}{3}, \frac{13\pi}{6}, -2\pi, \frac{3\pi}{4}, 45^\circ, \frac{3}{2}(\text{rad}), 75^\circ.$$

Bài 20. Kim giờ của đồng hồ dài $7(\text{cm})$, kim phút dài $10(\text{cm})$. Tính quãng đường kim phút, kim giờ đi được trong 30 phút.

Bài 21. Bánh xe có đường kính (tính cả lốp) là $55(\text{cm})$. Nếu xe chạy với vận tốc $40(\text{km/h})$ thì trong một giây bánh xe quay được bao nhiêu vòng?

Bài 22. Kim phút và kim giờ của đồng hồ lớn nhà Bưu Điện Hà Nội theo thứ tự dài $1,75(\text{m})$ và $1,26(\text{m})$. Hỏi trong 15 phút, mũi kim phút và mũi kim giờ vạch trên cung tròn có độ dài bằng bao nhiêu mét?

BIỂU DIỄN NGỌN CUNG LƯỢNG GIÁC

Bài 23. Biểu diễn các góc sau lên đường tròn lượng giác gốc A: 30^0 , -45^0 , 120^0 , -120^0 , 330^0 , 630^0 , 750^0 , -1250^0 , $\frac{7\pi}{4}$, $-\frac{4\pi}{3}$, -750^0 , 1125^0 , $\frac{15\pi}{2}$, $\frac{2010\pi}{4}$.

Bài 24. Xác định điểm cuối của cung có số đo: $k2\pi$, $k\pi$, $k\frac{\pi}{2}$, $k\frac{\pi}{3}$, $k\frac{\pi}{4}$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Bài 25. Xác định điểm ngọn của các họ nghiệm sau đây trên đường tròn lượng giác với $k \in \mathbb{Z}$.

1/ $x = k\pi$.

2/ $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

3/ $x = 4k\pi$.

4/ $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

5/ $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$.

6/ $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

7/ $x = \frac{k\pi}{3}$.

8/ $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}$.

9/ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k3\pi}{4}$.

10/ $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$.

Bài 26. Cho hai điểm M và N sao cho $\widehat{sđAM} = \frac{\pi}{6}$ và $\widehat{sđAN} = \frac{k\pi}{798}$ với $k \in \mathbb{Z}$. Tìm $k \in \mathbb{N}$ để:

1/ M trùng với N.

2/ M đối xứng với N qua tâm O.

Bài 27. Hai góc lượng giác có số đo radian $\frac{35\pi}{3}$ và $\frac{m\pi}{5}$ với m là số nguyên có thể có cùng tia đầu và tia cuối hay không ?

GIA TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG (GÓC)

Bài 28. Xác định dấu của các giá trị lượng giác hoặc biểu thức

1/ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$ với $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

2/ $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$, $\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $\cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

3/ $A = \sin 40^0 \cdot \cos(-290^0)$.

4/ $B = \sin(-25^0) \cdot \cos 170^0$.

5/ $C = \sin 225^0 \cdot \tan 130^0 \cdot \cot(-175^0)$.

6/ $D = \cos 195^0 \cdot \tan 269^0 \cdot \cot(-98^0)$.

7/ $E = \sin 50^0 \cdot \cos(-300^0)$.

8/ $F = \sin 215^0 \cdot \tan \frac{21\pi}{7}$.

9/ $G = \cot \frac{3\pi}{5} \cdot \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

10/ $H = \cos \frac{4\pi}{5} \cdot \sin \frac{\pi}{3} \cdot \tan \frac{4\pi}{3} \cdot \cot \frac{9\pi}{5}$.

Bài 29. Tính giá trị còn lại của góc x, biết

1/ $\sin x = \frac{1}{2}$ với $90^0 < x < 180^0$.

2/ $\sin x = -\frac{4}{5}$ với $270^0 < x < 360^0$.

3/ $\sin x = -\frac{3}{5}$ với $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

4/ $\cos x = \frac{1}{4}$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

5/ $\cos x = \frac{3}{5}$ với $0 < x < 90^\circ$.

6/ $\cos x = -\frac{5}{13}$ với $180^\circ < x < 270^\circ$.

7/ $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ với $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

8/ $\cos x = \frac{4}{5}$ với $270^\circ < x < 360^\circ$.

9/ $\sin x = \frac{5}{13}$ với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

10/ $\sin x = -\frac{1}{3}$ với $180^\circ < x < 270^\circ$.

11/ $\tan x = 3$ với $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

12/ $\tan x = -2$ với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

13/ $\tan x = -\frac{1}{2}$ với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

14/ $\cot x = 3$ với $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

15/ $\tan x = \frac{3}{4}$ với $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

16/ $\tan x = -\sqrt{2}$ với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

17/ $\cot x = \frac{2}{3}$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

18/ $\cot x = -\sqrt{3}$ với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

19/ $\cot x = -3$ với $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

20/ $\cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$

Bài 30. Tính giá trị của các biểu thức lượng giác sau

1/ Cho $\tan x = -2$. Tính: $A_1 = \frac{5 \cot x + 4 \tan x}{5 \cot x - 4 \tan x}$, $A_2 = \frac{2 \sin x + \cos x}{\cos x - 3 \sin x}$.

2/ Cho $\cot x = \sqrt{2}$. Tính: $B_1 = \frac{3 \sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$, $B_2 = \frac{\sin x - 3 \cos x}{\sin x + 3 \cos x}$.

3/ Cho $\cot x = 2$. Tính: $C_1 = \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{3 \sin x - 2 \cos x}$, $C_2 = \frac{2}{\cos^2 x - \sin x \cos x}$.

4/ Cho $\tan x = 2$. Tính: $D_1 = \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{4 \sin x - 5 \cos x}$, $D_2 = \frac{3 \sin x - 2 \cos x}{5 \sin^3 x + 4 \cos^3 x}$,

$$D_3 = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x + \sin^2 x \cos x}, D_4 = \frac{\sin x + 5 \cos x}{\sin^3 x - 2 \cos^3 x}, D_5 = \frac{8 \cos^3 x - 2 \sin^3 x + \cos x}{2 \cos x - \sin^3 x},$$

$$D_6 = \frac{\sin^3 x - 2 \cos^3 x + 2 \sin x + 3 \cos x}{\sin^3 x - \cos^2 x + 5 \sin x}.$$

5/ Cho $\sin x = \frac{3}{5}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Tính $E = \frac{\cot x + \tan x}{\cot x - \tan x}$.

6/ Cho $\sin x = \frac{1}{3}$, $90^\circ < x < 180^\circ$. Tính $F = \frac{8 \tan^2 x + 3 \cot x - 1}{\tan x + \cot x}$.

7/ Cho $\cos x = -\frac{2}{3}$. Tính $G = \frac{\cot x + 3 \tan x}{2 \cot x + \tan x}$.

8/ Cho $\sin x = \frac{2}{3}$, $0 < x < 90^\circ$. Tính $H_1 = \frac{\tan x - \cos x}{\cot x}$, $H_2 = \frac{\tan x \cos x}{\sin^2 x} - \cos x \cot x$.

9/ Cho $\cos x = -\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Tính $I_1 = \frac{\cot x + \tan x}{\cot x - \tan x}$, $I_2 = \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$.

Bài 31. Cho $\sin x + \cos x = \frac{5}{4}$. Hãy tính giá trị của biểu thức sau

1/ $A = \sin x \cdot \cos x$. ĐS: $A = \frac{9}{32}$.

2/ $B = \sin x - \cos x$. ĐS: $B = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$.

3/ $C = \sin^3 x - \cos^3 x$. ĐS: $C = \pm \frac{41\sqrt{7}}{128}$.

Bài 32. Cho $\tan x - \cot x = 3$. Hãy tính giá trị của biểu thức sau

1/ $A = \tan^2 x + \cot^2 x$. ĐS: $A = 11$.

2/ $B = \tan x + \cot x$. ĐS: $B = \pm \sqrt{13}$.

3/ $C = \tan^4 x - \cot^4 x$. ĐS: $C = \pm 33\sqrt{13}$.

Bài 33. Cho $\sin x + \cos x = m$. Hãy tính theo m giá trị các biểu thức

1/ $A = \sin x \cos x$. 2/ $B = \sin^3 x + \cos^3 x$.

3/ $C = \sin^4 x + \cos^4 x$. 4/ $D = |\sin x - \cos x|$.

5/ $E = \tan^2 x + \cot^2 x$. 6/ $F = \sin^6 x + \cos^6 x$.

Bài 34. Tính $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$. Biết rằng

1/ $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$. 2/ $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$.

3/ $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$. (HKII, Nguyễn Thượng Hiền – năm 2005)

4/ $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$. ĐS: $\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}; -\frac{4}{3}; -\frac{3}{4}$.

5/ $\tan x + \cot x = 4$. ĐS: $\frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}; 2+\sqrt{3}; 2-\sqrt{3}$.

Bài 35. Cho $\tan x - 2 \cot x = -1$. Hãy tính

1/ $A = \tan^2 x - \cot^2 x$. 2/ $B = \tan^3 x + \cot^3 x$.

3/ $C = \tan^4 x + 2 \cot^4 x$. 4/ $D = \tan^5 x - 3 \cot^5 x$.

Bài 36. Tính giá trị của các biểu thức sau đây khi

1/ Cho $3 \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$. Tính $A = \sin^4 x + 3 \cos^4 x$. ĐS: $A = \frac{7}{4}$.

2/ Cho $3\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$. Tính $B = \sin^4 x + 3\cos^4 x$. **ĐS:** $B = 1$.

3/ Cho $4\sin^4 x + 3\cos^4 x = \frac{7}{4}$. Tính $C = 3\sin^4 x + 4\cos^4 x$. **ĐS:** $C = \frac{7}{4} \vee C = \frac{57}{28}$.

CUNG GÓC LIÊN KẾT

Bài 37. Biểu diễn các số đo của cung dưới dạng $\alpha + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{3}, \frac{14\pi}{5}, -\frac{21\pi}{6}.$$

Bài 38. Biểu diễn các số đo của cung dưới dạng $\alpha + k360^\circ$ với $k \in \mathbb{Z}$.

$$370^\circ, 512^\circ, 765^\circ, -1000^\circ, 1234^\circ.$$

Bài 39. Biểu diễn các số đo của cung dưới dạng $\alpha + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{8\pi}{3}, \frac{11\pi}{5}, \frac{7\pi}{2}, \frac{18\pi}{7}, -\frac{27\pi}{10}, -\frac{25\pi}{4}.$$

Bài 40. Dùng cung liên kết (không dùng máy tính), hãy tính các giá trị sau

1/ $\sin 150^\circ$.	2/ $\cot 135^\circ$.	3/ $\cos 225^\circ$.	4/ $\tan 210^\circ$.
5/ $\cot 225^\circ$.	6/ $\sin 240^\circ$.	7/ $\cos 315^\circ$.	8/ $\tan 300^\circ$.
9/ $\cot(-1380^\circ)$.	10/ $\cos 11\pi$.	11/ $\sin 13\pi$.	12/ $\tan 10\pi$.
13/ $\cot \frac{7\pi}{6}$.	14/ $\cos \frac{11\pi}{3}$.	15/ $\cot \frac{25\pi}{4}$.	16/ $\sin \frac{17\pi}{3}$.
17/ $\cos \frac{29\pi}{6}$.	18/ $\tan \frac{45\pi}{4}$.	19/ $\cos\left(-\frac{16\pi}{3}\right)$.	20/ $\sin\left(-\frac{31\pi}{2}\right)$.
21/ $\cot\left(-\frac{19\pi}{4}\right)$.	22/ $\cos\left(-\frac{26\pi}{3}\right)$.	23/ $\tan\left(-\frac{159\pi}{4}\right)$.	24/ $\sin\left(-\frac{115\pi}{6}\right)$.

Bài 41. Diễn tả giá trị lượng giác của các góc sau bằng giá trị lượng giác của góc x

1/ $\sin(x - 90^\circ)$.	2/ $\cos(180^\circ + x)$.	3/ $\sin(270^\circ - x)$.	4/ $\sin(x - 180^\circ)$.
5/ $\cos(x + 540^\circ)$.	6/ $\cot(180^\circ + x)$.	7/ $\sin(x - 540^\circ)$.	8/ $\tan(360^\circ - x)$.
9/ $\cos(450^\circ + x)$.	10/ $\sin^2(270^\circ + x)$.	11/ $\cos^3(90^\circ + x)$.	12/ $\cot^5(180^\circ - x)$.

Bài 42. Diễn tả giá trị lượng giác của các góc sau bằng giá trị lượng giác của góc x

1/ $\cot(x - \pi)$.	2/ $\sin(\pi + x)$.	3/ $\tan(2\pi - x)$.	4/ $\cot(3\pi - x)$.
5/ $\sin(x - 7\pi)$.	6/ $\tan(x - 5\pi)$.	7/ $\sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right)$.	8/ $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$.
9/ $\cot\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$.	10/ $\cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right)$.	11/ $\tan\left(\frac{11\pi}{2} + x\right)$.	12/ $\sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}
 &13/ \sin^2(\pi + x). \quad 14/ \cos^9(\pi - x). \quad 15/ \cot^{11}(x - 3\pi). \quad 16/ \cos^4(x + 3\pi). \\
 &17/ \cot^2(x - 5\pi). \quad 18/ \cos^6(x - \pi). \quad 19/ \cos^8\left(x - \frac{3\pi}{2}\right). \quad 20/ \cos^5\left(\frac{\pi}{2} - x\right). \\
 &21/ \sin^{2012}\left(x - \frac{\pi}{2}\right). \quad 22/ \tan^2\left(x - \frac{9\pi}{2}\right). \quad 23/ \cos^{2013}\left(x + \frac{7\pi}{2}\right). \quad 24/ \sin^{1991}\left(\frac{5\pi}{2} - x\right). \\
 &25/ \cos^{2015}\left(x - \frac{11\pi}{2}\right). \quad 26/ \cot^2\left(x - \frac{9\pi}{2}\right). \quad 27/ \tan^{11}\left(\frac{11\pi}{2} + x\right). \quad 28/ \cos(x - 2012\pi).
 \end{aligned}$$

Bài 43. Rút gọn (đơn giản) các biểu thức

$$\begin{aligned}
 1/ \quad &A = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(x - \pi). \\
 2/ \quad &B = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right). \\
 3/ \quad &C = 2\cos x + 3\cos(\pi - x) - \sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right). \\
 4/ \quad &D = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(5\pi - x) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right). \\
 5/ \quad &E = 2\cos x - 3\cos(\pi - x) + 5\sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right). \\
 6/ \quad &F = \sin(5\pi + x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cot(3\pi - x) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right). \\
 7/ \quad &G = \cos(15\pi - x) + \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cot\left(\frac{11\pi}{2} - x\right). \\
 8/ \quad &H = \sin(\pi + x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cot(2\pi - x) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right). \\
 9/ \quad &I = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x). \\
 10/ \quad &J = \cos(270^\circ - x) - 2\sin(x - 450^\circ) + \cos(x + 900^\circ) + 2\sin(270^\circ - x). \\
 11/ \quad &K = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin^2\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) + \sin^2(x + \pi). \\
 12/ \quad &L = \sin^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{9} + \sin^2 \frac{2\pi}{9} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}. \\
 13/ \quad &M = \cos^{2013} x + \cos^{2013}(\pi + x) \cdot \sin^{2012}(\pi + x) - \sin^{2011}\left(\frac{\pi}{2} - x\right).
 \end{aligned}$$

$$14/ \quad N = \sin^6 \left(\pi + x \right) + \cos^6 \left(x - \pi \right) - 2 \sin^4 \left(x + 2\pi \right) - \sin^4 \left(x - \frac{3\pi}{2} \right) + \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{2} \right).$$

$$15/ \quad O = \frac{\tan \left(\frac{19\pi}{2} - x \right) \cdot \cos \left(36\pi - x \right) \cdot \sin \left(x - 5\pi \right)}{\sin \left(\frac{9\pi}{2} - x \right) \cdot \cos \left(x - 99\pi \right)}.$$

$$16/ \quad P = \sin \left(x + \frac{85\pi}{2} \right) + \cos \left(207\pi + x \right) + \sin^2 \left(33\pi + x \right) + \sin^2 \left(x - \frac{3\pi}{2} \right).$$

Bài 44. Rút gọn và tính giá trị của biểu thức (không dùng máy tính)

- 1/ $A = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 180^\circ.$
- 2/ $B = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \dots + \cos 180^\circ.$
- 3/ $C = \cos 10^\circ + \cos 40^\circ + \cos 70^\circ + \dots + \cos 170^\circ.$
- 4/ $D = \tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \tan 60^\circ + \dots + \tan 180^\circ.$
- 5/ $E = \cot 15^\circ + \cot 30^\circ + \cot 45^\circ + \dots + \cot 165^\circ.$
- 6/ $F = \sin 5^\circ + \sin 10^\circ + \sin 15^\circ + \dots + \sin 360^\circ.$
- 7/ $G = \cot 195^\circ + \cot 210^\circ + \cot 225^\circ + \dots + \cot 345^\circ.$
- 8/ $H = \cot 15^\circ \cdot \cot 35^\circ \cdot \cot 55^\circ \cdot \cot 75^\circ.$
- 9/ $I = \tan 10^\circ \cdot \tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \dots \tan 80^\circ.$
- 10/ $J = \tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \dots \tan 89^\circ.$
- 11/ $K = \sin^2 28^\circ + \sin^2 36^\circ + \sin^2 54^\circ + \cos^2 152^\circ.$
- 12/ $L = \cos^2 2^\circ + \cos^2 4^\circ + \cos^2 6^\circ + \dots + \cos^2 88^\circ.$
- 13/ $M = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 90^\circ.$
- 14/ $N = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \dots + \cos^2 180^\circ.$
- 15/ $O = \sin 20^\circ + \sin 40^\circ + \sin 60^\circ + \dots + \sin 340^\circ + \sin 360^\circ.$

Bài 45. Rút gọn và tính giá trị của biểu thức (không dùng máy tính)

- 1/ $A = \cos \left(-315^\circ \right) \cdot \sin 765^\circ.$
- 2/ $B = \sin 32^\circ \cdot \sin 148^\circ - \sin 302^\circ \cdot \sin 122^\circ.$
- 3/ $C = \sin 810^\circ \cdot \cos 540^\circ + \tan 135^\circ \cdot \cot 585^\circ.$
- 4/ $D = \sin 825^\circ \cdot \cos \left(-15^\circ \right) + \cos 75^\circ \cdot \sin \left(-555^\circ \right).$
- 5/ $E = 2 \tan 540^\circ + 2 \cos 1170^\circ + 4 \sin 990^\circ.$
- 6/ $F = \frac{\sin \left(-234^\circ \right) - \cos 216^\circ}{\sin 144^\circ - \cos 126^\circ} \cdot \tan 36^\circ.$

$$7/ \quad G = \frac{\sin(-324^0) + \cos 666^0}{\sin 1206^0 + \cos 36^0} \cdot \cot 36^0.$$

$$8/ \quad H = \frac{\sin(-328^0) \cdot \sin 958^0}{\cot 572^0} - \frac{\cos(-508^0) \cdot \cos(-1022^0)}{\tan(-212^0)}.$$

$$9/ \quad I = \frac{\cos(-288^0) \cdot \cot 72^0}{\tan(-142^0) \cdot \sin 108^0} - \tan 18^0.$$

$$10/ \quad J = 2 \sin(790^0 + x) + \cos(1260^0 - x) + \tan(630^0 + x) \cdot \tan(1260^0 - x).$$

$$11/ \quad K = \frac{1}{\tan 368^0} + \frac{2 \sin 2550^0 \cdot \cos(-188^0)}{2 \cos 638^0 + \cos 98^0}.$$

$$12/ \quad L = \frac{(\cos 44^0 + \tan 226^0) \cdot \cos 406^0}{\cos 316^0} - \cos 72^0 \cdot \cot 18^0.$$

$$13/ \quad M = \frac{\tan 46^0 \cdot \sin 44^0 + \cot(-136^0) \cdot \sin 404^0}{\cos 316^0} - \tan 36^0 \cdot \tan 54^0.$$

$$14/ \quad N = \frac{\sin(-328^0) \cdot \sin 958^0}{\cos 572^0} - \frac{\cos(-508^0) \cdot \cos(-1022^0)}{\tan(-212^0)}.$$

$$15/ \quad O = \frac{\sin \frac{4\pi}{3} + \cos \frac{17\pi}{6}}{\sin \frac{23\pi}{6} + \cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right)}.$$

$$16/ \quad P = \frac{\sin(-4, 8\pi) \cdot \sin(-5, 7\pi)}{\cot(-5, 2\pi)} + \frac{\cos(-6, 7\pi) \cdot \cos(-5, 8\pi)}{\tan(-6, 2\pi)}.$$

Bài 46. Chứng minh rằng nếu A, B, C là ba góc của một tam giác thì

$$1/ \quad \sin B = \sin(A + C).$$

$$2/ \quad \cos(A + B) = -\cos C.$$

$$3/ \quad \sin \frac{A + B}{2} = \cos \frac{C}{2}.$$

$$4/ \quad \cos(B - C) = -\cos(A + 2C).$$

$$5/ \quad \cos(A + B - C) = -\cos 2C.$$

$$6/ \quad \sin(A + 2B + C) = -\sin B.$$

$$7/ \quad \cot(A - B + C) = -\cot 2B.$$

$$8/ \quad \cos \frac{-3A + B + C}{2} = -\sin 2A.$$

$$9/ \quad \sin \frac{A + B + 3C}{2} = \cos C.$$

$$10/ \quad \tan \frac{A + B - 2C}{2} = \cot \frac{3C}{2}.$$

$$11/ \quad \cos \frac{A + 3B + C}{2} = -\sin B.$$

$$12/ \quad \cot \frac{A - 2B + C}{2} = \tan \frac{3B}{2}.$$

C – CÔNG THỨC CỘNG

$$\textcircled{1} \sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\textcircled{2} \sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

$$\textcircled{3} \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\textcircled{4} \cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\textcircled{5} \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

$$\textcircled{6} \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

Hệ quả:

$$\textcircled{1} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha}$$

$$\textcircled{2} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 47. Không dùng máy tính. Hãy tính giá trị của các biểu thức

1/ $A = \sin 12^\circ \cdot \cos 48^\circ + \cos 12^\circ \cdot \sin 48^\circ$.

2/ $B = \cos 38^\circ \cdot \cos 22^\circ - \sin 38^\circ \cdot \sin 22^\circ$.

3/ $C = \sin 10^\circ \cdot \cos 55^\circ - \cos 10^\circ \cdot \sin 55^\circ$.

4/ $D = \sin 36^\circ \cdot \cos 6^\circ - \sin 126^\circ \cdot \cos 84^\circ$.

5/ $E = \cos 112^\circ \cdot \cos 23^\circ - \sin 112^\circ \cdot \sin 23^\circ$.

6/ $F = \sin 200^\circ \cdot \sin 310^\circ + \cos 340^\circ \cdot \cos 50^\circ$.

7/ $G = \cos 11^\circ \cdot \cos 21^\circ + \cos 69^\circ \cdot \cos 79^\circ - \cos 10^\circ$.

8/ $H = \cos 68^\circ \cdot \cos 78^\circ + \cos 22^\circ \cdot \cos 12^\circ - \sin 100^\circ$.

9/ $I = \cos(-53^\circ) \cdot \sin(-337^\circ) + \sin 307^\circ \cdot \sin 113^\circ$.

Bài 48. Tính giá trị lượng giác của các cung góc sau

1/ 15° .

2/ 75° .

3/ 105° .

4/ 285° .

5/ $\frac{19\pi}{12}$.

6/ $\frac{5\pi}{12}$.

7/ $\frac{7\pi}{12}$.

8/ $\frac{13\pi}{12}$.

Bài 49. Tính giá trị của các biểu thức sau

1/ $A = \frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ}$.

2/ $B = \frac{\tan 25^\circ + \tan 20^\circ}{1 - \tan 25^\circ \tan 20^\circ}$.

3/ $C = \frac{\sin 10^\circ \cos 20^\circ + \sin 20^\circ \cos 10^\circ}{\cos 17^\circ \cos 13^\circ - \sin 17^\circ \sin 13^\circ}$.

4/ $D = \frac{\tan 225^\circ - \cot 81^\circ \cot 69^\circ}{\cot 261^\circ + \tan 201^\circ}$.

5/ $E = \frac{\sin 73^\circ \cos 3^\circ - \sin 87^\circ \cos 17^\circ}{\cos 132^\circ \cos 62^\circ + \cos 42^\circ \cos 28^\circ}$.

6/ $F = \frac{\cot 225^\circ - \cot 79^\circ \cot 71^\circ}{\cot 259^\circ + \cot 251^\circ}$.

$$7/ \quad G = \cos^2 75^0 - \sin^2 75^0.$$

$$8/ \quad H = \sin^2 20^0 + \sin^2 100^0 + \sin^2 140^0.$$

$$9/ \quad I = \cos^2 10^0 + \cos 110^0 + \cos^2 130^0.$$

$$10/ \quad J = \tan 20^0 \cdot \tan 80^0 + \tan 80^0 \cdot \tan 140^0 + \tan 140^0 \cdot \tan 20^0.$$

$$11/ \quad K = \tan 10^0 \cdot \tan 70^0 + \tan 70^0 \cdot \tan 130^0 + \tan 130^0 \cdot \tan 190^0.$$

$$12/ \quad L = \sin 160^0 \cos 110^0 + \sin 250^0 \cos 340^0 + \tan 110^0 \tan 340^0.$$

$$13/ \quad M = (\cos 70^0 + \cos 50^0)(\cos 310^0 + \cos 290^0) + (\cos 40^0 + \cos 160^0)(\cos 320^0 - \cos 380^0).$$

Bài 50. Tính giá trị của các biểu thức sau

$$1/ \quad A = \cos x \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \text{ biết } \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ và } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

$$2/ \quad B = \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \text{ biết } \cos x = -\frac{12}{13} \text{ và } \pi < x < \frac{3\pi}{2}.$$

$$3/ \quad C = \cos(x - 30^0) \text{ biết } \tan x = \sqrt{2} \text{ và } 0 < x < 90^0.$$

$$4/ \quad D = \tan \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \text{ biết } \sin x = \frac{3}{5} \text{ và } \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

$$5/ \quad E = \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \text{ biết } \sin x = -\frac{12}{13} \text{ và } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi.$$

$$6/ \quad F = \cot \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \text{ biết } \sin x = -\frac{4}{5} \text{ và } \pi < x < \frac{3\pi}{2}.$$

$$7/ \quad G = \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \text{ biết } \cot \left(\frac{5\pi}{2} - x \right) = 2.$$

$$8/ \quad H = \sin \left(2x + \frac{7\pi}{4} \right) \text{ biết } \cot x = \frac{2}{3}.$$

$$9/ \quad I = \cos(a + b) \cdot \cos(a - b) \text{ biết } \cos a = \frac{1}{3} \text{ và } \cos b = \frac{1}{4}.$$

Bài 51. Biết $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $(0^0 < \alpha < 90^0)$ và $\sin \beta = \frac{8}{17}$, $(90^0 < \beta < 180^0)$. Hãy tính giá trị của biểu thức $A = \cos(\alpha + \beta)$ và $B = \sin(\alpha - \beta)$.

Bài 52. Biết $\sin \alpha = \frac{8}{17}$, $\tan \beta = \frac{5}{12}$ và α, β là các góc nhọn. Hãy tính giá trị của các biểu thức $A = \sin(\alpha - \beta)$, $B = \cos(\alpha + \beta)$ và $C = \tan(\alpha + \beta)$.

Bài 53. Cho $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ và $\tan \alpha \cdot \tan \beta = 3 - 2\sqrt{2}$.

1/ Hãy tính $\tan(\alpha + \beta)$; $\tan \alpha + \tan \beta$. 2/ Tính $\tan \alpha$; $\tan \beta$. Suy ra α và β .

Bài 54. Cho $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$. Tính giá trị của các biểu thức

$$1/ \quad A = (\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2. \quad 2/ \quad B = (\cos \alpha + \sin \beta)^2 + (\cos \beta - \sin \alpha)^2.$$

Bài 55. Rút gọn các biểu thức

$$1/ \quad A = \sin x - \sqrt{3} \cos x.$$

$$2/ \quad B = \sqrt{3} \sin 7x - \cos 7x.$$

$$3/ \quad C = a \sin x + b \cos x, \quad (a^2 + b^2 \neq 0). \quad 4/ \quad D = \sqrt{3} \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right).$$

$$5/ \quad E = \cos 7x \cdot \cos 5x - \sqrt{3} \sin 2x + \sin 7x \cdot \sin 5x. \quad 6/ \quad F = \sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x + 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right).$$

$$7/ \quad G = 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) + 4 \sin x + 1. \quad 8/ \quad H = \sin 2x + 2\sqrt{2} \cos x + 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 3.$$

Bài 56. Rút gọn các biểu thức

$$1/ \quad A = \sin x \cos 5x - \cos x \sin 5x.$$

$$2/ \quad B = \sin 4x \cot 2x - \cos 4x.$$

$$3/ \quad C = \cos 6x \tan 3x - \sin 6x.$$

$$4/ \quad D = \sin(x + y) \cos(x - y) + \sin(x - y) \cos(x + y).$$

$$5/ \quad E = \cos(40^\circ - x) \cos(x + 20^\circ) - \sin(40^\circ - x) \sin(x + 20^\circ).$$

$$6/ \quad F = \sin(14^\circ + 2x) \cos(16^\circ - 2x) + \cos(14^\circ + 2x) \sin(16^\circ - 2x).$$

$$7/ \quad G = \sin(x + 10^\circ) \cos(2x - 80^\circ) + \sin(x + 100^\circ) \cos(2x + 10^\circ).$$

$$8/ \quad H = \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) + \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right).$$

$$9/ \quad I = \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(x + \frac{3\pi}{4} \right).$$

$$10/ \quad J = \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\frac{9\pi}{4} - x \right) - \sin \left(\frac{5\pi}{4} - x \right) \cos \left(\frac{5\pi}{3} + x \right).$$

$$11/ \quad K = \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right).$$

$$12/ \quad L = \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(x + \frac{13\pi}{4} \right) + \cos \left(x + \frac{13\pi}{6} \right) \cos \left(x + \frac{3\pi}{4} \right).$$

Bài 57. Rút gọn các biểu thức sau

$$1/ \quad A = \frac{\tan 3x - \tan x}{1 + \tan x \tan 3x}.$$

$$2/ \quad B = \frac{\tan 2x + 1}{1 - \tan 2x}.$$

$$3/ \quad C = \frac{\tan 2x + \cot(90^\circ + x)}{1 + \cot(90^\circ - 2x) \tan x}.$$

$$4/ \quad D = \frac{\tan^2 2x - \tan^2 x}{1 - \tan^2 2x \tan^2 x}.$$

Bài 58. Rút gọn các biểu thức sau

$$1/ \quad A = \sin(a + b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin(-b).$$

$$2/ \quad B = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) - \cos(a - b).$$

$$3/ \quad C = \cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right) + \frac{1}{2} \sin^2 a.$$

$$4/ \quad D = \sin^2 a \sin^2 b - \cos^2 a \cos^2 b.$$

$$5/ \quad E = \frac{2 \sin(a + b)}{\cos(a + b) + \cos(a - b)} - \tan b.$$

Bài 59. Rút gọn các biểu thức sau

$$1/ \quad A = \cos^2 x - \sqrt{3} \sin 2x - \sin^2 x.$$

$$2/ \quad B = 4 \sin^3 x - 3 \sin x + \sqrt{3} \cos 3x.$$

$$3/ \quad C = \sin(x + 45^\circ) + \cos(x + 45^\circ).$$

$$4/ \quad D = \tan 3x - \tan x - \sin 2x.$$

$$5/ \quad E = \tan 2x + \cot x - 8 \cos^2 x.$$

Bài 60. Chứng minh các đẳng thức sau

$$1/ \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

$$2/ \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

$$3/ \quad \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

$$4/ \quad \sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$$

$$5/ \quad \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

$$6/ \quad \cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$7/ \quad \cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$8/ \quad \sin(x + y) \sin(x - y) = \sin^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \cos^2 x.$$

$$9/ \quad \cos(x + y) \cos(x - y) = \cos^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \sin^2 x.$$

Bài 61. Chứng minh các đẳng thức sau

$$1/ \quad \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2} \sin x.$$

- 2/ $4 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 4 \sin^2 x - 3.$
- 3/ $\sin x \sin (y - z) + \sin y \sin (z - x) + \sin z \sin (x - y) = 0.$
- 4/ $\cos x \sin (y - z) + \cos y \sin (z - x) + \cos z \sin (x - y) = 0.$
- 5/ $\tan (x + y) - \tan x - \tan y = \tan (x + y) \tan x \tan y.$
- 6/ $\tan 2x \tan \left(\frac{\pi}{6} - x \right) + \tan 2x \tan \left(\frac{\pi}{3} - x \right) + \tan \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \tan \left(\frac{\pi}{6} - x \right) = 1.$
- 7/ $\tan x \cdot \tan \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + \tan \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \cdot \tan \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) + \tan \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) \cdot \tan x = -3.$
- 8/ $\cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \cdot \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \cos \left(x + \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 - \sqrt{3}).$
- 9/ $(\cos 70^\circ + \cos 50^\circ)(\cos 230^\circ + \cos 290^\circ) + (\cos 40^\circ + \cos 160^\circ)(\cos 320^\circ + \cos 380^\circ) = 0.$

Bài 62. Chứng minh các đẳng thức sau

- 1/ $\frac{\cos(a - b)}{\cos(a + b)} = \frac{\cot a \cot b + 1}{\cot a \cot b - 1}.$
- 2/ $\frac{\sin(a - b)}{\cos a \cos b} + \frac{\sin(b - c)}{\cos b \cos c} + \frac{\sin(c - a)}{\cos c \cos a} = 0.$
- 3/ $\frac{\sin(a + b) \sin(a - b)}{\cos^2 a \cos^2 b} = \tan^2 a - \tan^2 b.$
- 4/ $\frac{\cos(a + b) \cos(a - b)}{\cos^2 a \cos^2 b} = 1 - \tan^2 a \tan^2 b.$

Bài 63. Chứng minh các hệ thức sau, với điều kiện cho trước

- 1/ Nếu $\cos(a + b) = 0$ thì $\sin(a + 2b) = \sin a.$
- 2/ Nếu $\sin(2a + b) = 3 \sin b$ thì $\tan(a + b) = 2 \tan a.$ **HD:** $\begin{cases} b = (a + b) - a \\ 2a + b = (a + b) + a \end{cases}.$
- 3/ Nếu $\tan a = 2 \tan b$ thì $\sin(a + b) = 3 \sin(a - b).$
- 4/ Nếu $\tan a \cdot \tan b = -\frac{1}{3}$ thì $\cos(a + b) = 2 \cos(a - b).$ **HD:** Khai triển giả thiết.
- 5/ Nếu $5 \sin b = \sin(2a + b)$ thì $\tan(a + b) = \frac{3}{2} \tan a.$
- 6/ Nếu $\sin b = \sin a \cos(a + b)$ thì $2 \tan a = \tan(a + b).$ **HD:** $b = (a + b) - a.$

$$7/ \quad \text{Nếu } \cos(2a + b) = 1 \text{ thì } \tan(a + b) - \tan a = 2 \tan \frac{b}{2}.$$

$$8/ \quad \text{Nếu } \cos(a + b) = k \cos(a - b) \text{ thì } \tan a \tan b = \frac{1 - k}{1 + k}. \quad \underline{\text{HD:}} \begin{cases} a + 2b = (a + b) + b \\ a = (a + b) - b \end{cases}.$$

Bài 64. Chứng minh các đẳng thức sau

$$1/ \quad \tan a + \tan b + \tan c - \tan a \tan b \tan c = \frac{\sin(a + b + c)}{\cos a \cos b \cos c}.$$

$$2/ \quad \cos^2 x + \cos^2(x + y) + \cos^2 y - 2 \cos x \cos y \cos(x + y) = 1.$$

(Thi học kì II trường THPT chuyên Lê Hồng Phong – Tp. HCM năm 2007)

Bài 65. Chứng minh các biểu thức sau độc lập với biến x

$$1/ \quad A = \sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right).$$

$$2/ \quad B = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right).$$

$$3/ \quad C = \sin^2 x + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right).$$

$$4/ \quad D = \cos^2 x + \cos^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x - \frac{2\pi}{3}\right).$$

$$5/ \quad F = \frac{a \cos^3 x - \cos 3x}{\cos x} + \frac{a \sin^3 x + \sin 3x}{\sin x}, \quad a = \text{const}.$$

Bài 66. Chứng minh rằng: $\tan x \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \tan 3x$. Từ đó tính giá trị của biểu thức

$$P = \tan 10^\circ \tan 50^\circ \tan 110^\circ.$$

Bài 67. Cho tam giác ABC với A, B, C lần lượt là ba góc của tam giác. Chứng minh

$$1/ \quad \sin C = \sin A \cos B + \sin B \cos A.$$

$$2/ \quad \sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B.$$

$$3/ \quad \cos A = \sin B \sin C - \cos B \cos C.$$

$$4/ \quad \frac{\sin C}{\cos A \cos B} = \tan A + \tan B, \quad (A, B \neq 90^\circ).$$

$$5/ \quad \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C, \quad (A, B, C \neq 90^\circ).$$

$$6/ \quad \cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1.$$

$$7/ \quad \sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

$$8/ \quad \cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

$$9/ \quad \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1.$$

$$10/ \quad \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}.$$

$$11/ \quad \cot B + \frac{\cos C}{\sin B \cdot \cos A} = \cot C + \frac{\cos B}{\sin C \cdot \cos A}, \quad (A \neq 90^\circ).$$

$$12/ \quad \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

$$13/ \quad \sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 + 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

$$14/ \quad \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A + \sin C \cos A \cos B = \sin A \sin B \sin C.$$

Bài 68. Cho tam giác ABC với A, B, C lần lượt là ba góc của tam giác. Chứng minh

$$1/ \quad \tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}, \quad \forall A, B, C \text{ nhọn.}$$

$$2/ \quad \tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C \geq 9, \quad \forall A, B, C \text{ nhọn.}$$

$$3/ \quad \tan^6 A + \tan^6 B + \tan^6 C \geq 81, \quad \forall A, B, C \text{ nhọn.}$$

$$4/ \quad \tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} \geq 1.$$

$$5/ \quad \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}.$$

HD:

1/, 2/, 3/, sử dụng $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$ và bất đẳng thức Cauchy.

4 / sử dụng bất đẳng thức bổ đề $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ và

$$\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1.$$

5 / khai triển $\left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right)^2$ và sử dụng câu 3 /.

D – CÔNG THỨC NHÂN



Công thức nhân đôi

① $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$

② $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha.$

③ $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}.$

④ $\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}.$

Công thức hạ bậc

① $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$

② $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$

③ $\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}.$

Công thức nhân ba (mở rộng)

① $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$

② $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$

③ $\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}.$

BÀI TẬP ỨNG DỤNG

RÚT GỌN VÀ TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

Bài 69. Tính giá trị của các biểu thức sau (không dùng máy tính bỏ túi)

1/ $A = \cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}.$

2/ $B = 3 \cos 10^0 - 4 \cos^3 10^0.$

3/ $C = \sin 20^0 (1 - 4 \cos^2 20^0).$

4/ $D = 4 \sin^3 40^0 + 3 \sin 130^0.$

5/ $E = 4 \sin^3 50^0 + 3 \cos 140^0.$

6/ $F = \frac{\tan 15^0}{1 - \tan^2 15^0}.$

7/ $G = \frac{\tan \frac{7\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}}.$

8/ $H = \frac{1}{\sin 10^0} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^0}.$

9/ $I = \frac{1}{\sin 10^0} - 4 \sin 70^0.$

10/ $J = \tan^2 \frac{\pi}{12} + \tan^2 \frac{5\pi}{12}.$

11/ $K = \tan^2 36^0 \tan^2 72^0.$

12/ $L = \cos^2 70^0 + \sin^2 40^0 \sin 100^0.$

13/ $M = \cos^2 20^0 + 2 \sin^2 55^0 - \sqrt{2} \sin 65^0.$

14/ $N = \sin 6^0 \cdot \sin 42^0 \cdot \sin 66^0 \cdot \sin 78^0.$

Bài 70. Tính giá trị của các biểu thức sau (không dùng máy tính bỏ túi)

1/ $A = \cos 36^0 \cos 72^0.$

2/ $B = \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}.$

3/ $C = \sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{4}.$

4/ $D = \sin \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{8}.$

5/ $E = \sin 10^0 \sin 50^0 \sin 70^0.$

6/ $F = \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}.$

7/ $G = \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7}.$

8/ $H = \sin 6^0 \cos 12^0 \cos 24^0 \cos 48^0.$

9/ $I = \sin 6^0 \sin 42^0 \sin 66^0 \sin 78^0.$

10/ $J = \sin 5^0 \cdot \sin 15^0 \cdot \sin 25^0 \dots \sin 75^0 \cdot \sin 85^0.$

11/ $K = \cos 10^0 \cdot \cos 20^0 \cdot \cos 30^0 \dots \cos 70^0 \cdot \cos 80^0.$

12/ $L = 8 \tan 18^0 \cos 18^0 \cos 36^0 \cos 72^0.$

13/ $M = \cos 20^0 \cos 40^0 \cos 60^0 \cos 80^0.$

14/ $N = \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{3\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9}.$

15/ $O = 96\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{48} \cos \frac{\pi}{48} \cos \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{6}.$

16/ $P = \cos \frac{2\pi}{31} \cdot \cos \frac{4\pi}{31} \cdot \cos \frac{8\pi}{31} \cdot \cos \frac{16\pi}{31} \cdot \cos \frac{32\pi}{31}.$

17/ $Q = \cos \frac{\pi}{33} \cos \frac{2\pi}{33} \cos \frac{4\pi}{33} \cos \frac{8\pi}{33} \cos \frac{16\pi}{33}.$

18/ $R = \cos \frac{\pi}{15} \cdot \cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{3\pi}{15} \cdot \cos \frac{4\pi}{15} \cdot \cos \frac{5\pi}{15} \cdot \cos \frac{6\pi}{15} \cdot \cos \frac{7\pi}{15}.$

Bài 71. Tính giá trị của các biểu thức sau (không dùng máy tính bỏ túi)

1/ $A = \frac{\cos 80^0 + \cos 20^0}{\cos 35^0 \cos 15^0 - \sin 35^0 \sin 15^0}.$

2/ $B = 3 \sin 15^0 \cos 15^0 - \frac{\sin 60^0}{\sin^4 15^0 - \cos^4 15^0}.$

3/ $C = \tan 9^0 - \tan 27^0 - \tan 63^0 + \tan 81^0.$

4/ $D = 4 \tan \frac{\pi}{8} + 2 \tan \frac{\pi}{16} + \tan \frac{\pi}{32} - \cot \frac{\pi}{32}.$

Đại học Quốc Gia Hà Nội khối B năm 2000

5/ $E = \frac{\cos^2 696^0 + \tan(-260^0) \tan 530^0 - \cos^2 156^0}{\tan^2 252^0 + \cot^2 342^0}.$

Bài 72. Rút gọn các biểu thức

$$1/ \quad A = (\sin x + \cos x)^2.$$

$$2/ \quad B = 1 - 4 \sin^2 x \cos^2 x.$$

$$3/ \quad C = \sin x \cos x \cos 2x.$$

$$4/ \quad D = \cos^4 2x - \sin^4 2x.$$

$$5/ \quad E = \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{2} \right) - \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{2} \right).$$

$$6/ \quad F = \sin x \cos x \cos 2x.$$

$$7/ \quad G = 4 \sin x \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right).$$

$$8/ \quad H = \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2} \right).$$

$$9/ \quad I = \sin 8x + 2 \cos^2 (45^\circ + 4x).$$

$$10/ \quad J = \sin 2x + \cos 2x - 2 \cos x (\sin x + \cos x) + 1.$$

Bài 73. Tính giá trị của các biểu thức sau (không dùng máy tính bỏ túi)

$$1/ \quad A = \frac{2 \cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x}.$$

$$2/ \quad B = \frac{1 - 2 \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x}.$$

$$3/ \quad C = \frac{2}{(1 - \tan x)(1 + \cot x)}.$$

$$4/ \quad D = (1 - \tan^2 x) \cot x.$$

$$5/ \quad E = \frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x}.$$

$$6/ \quad F = \frac{\cot x - \tan x}{\cos 2x}.$$

$$7/ \quad G = \frac{1 + \sin \left(\frac{3\pi}{2} - x \right)}{1 + \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right)}.$$

$$8/ \quad H = \frac{\sin^2 2x - 4 \sin^2 x}{\sin^2 2x + 4 \sin^2 x - 4}.$$

$$9/ \quad I = \frac{\sin 4x}{1 + \cos 4x} \cdot \frac{\cos 2x}{1 + \cos 2x}.$$

$$10/ \quad J = \frac{\sin 3x - \cos 3x}{\sin x + \cos x}.$$

$$11/ \quad K = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \cdot \frac{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right)}.$$

$$12/ \quad L = \cot 2x + \frac{1}{2 \sin 2x} + \tan x.$$

$$13/ \quad M = \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} \cdot \cot x.$$

$$14/ \quad N = \frac{2(\sin 2x + 2 \cos^2 x - 1)}{\cos x - \sin x - \cos 3x + \sin 3x}.$$

$$15/ \quad O = \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}, \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{4} \right).$$

$$16/ \quad P = \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \frac{1}{\sin 8x} + \cot 8x.$$

$$17/ \quad O = \sqrt{1 - \sin 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x}, \quad \left(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \right).$$

Bài 74. Tính giá trị của biểu thức lượng giác, khi biết

$$1/ \quad \sin 2x, \cos 2x \text{ khi } \sin x = \frac{3}{5}, \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

$$2/ \quad \sin 2x, \cos 2x \text{ khi } \sin x + \cos x = \sqrt{2}.$$

$$3/ \quad \cos 2x, \sin 2x, \tan 2x \text{ khi } \cos x = -\frac{5}{13}, \pi < x < \frac{3\pi}{2}.$$

$$4/ \quad \cos 2x, \sin 2x, \tan 2x \text{ khi } \tan x = 2.$$

$$5/ \quad \sin x, \cos x \text{ khi } \sin 2x = -\frac{4}{5}, \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}.$$

$$6/ \quad \cos 2x, \sin 2x, \tan 2x \text{ khi } \tan x = \frac{7}{8}.$$

$$7/ \quad \sin 2x, \cos 2x, \tan 2x \text{ khi } \tan x = 2 - \sqrt{3}, 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Bài 75. Tính giá trị của biểu thức lượng giác, khi biết

$$1/ \quad A = \sin^5 x \cos x - \cos^5 x \sin x \text{ khi biết } x = \frac{\pi}{16}.$$

$$2/ \quad B = \sin^4 x + \sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x + \cos^4 x \text{ khi biết } x = \frac{\pi}{48}.$$

$$3/ \quad C = \cos 4x \text{ khi biết } \tan x + \cot x = 3.$$

$$4/ \quad D = \cos(270^\circ + 4x) \text{ khi biết } \cot(45^\circ + x) = 2.$$

$$5/ \quad E = \sin^4 x + \cos^4 x \text{ khi biết } \sin x + \cos x = m \text{ với } m \in \mathbb{R}.$$

$$6/ \quad F = \frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} \text{ khi biết } \sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}, \left(0 < x < \frac{\pi}{4}\right).$$

Bài 76. Chứng minh rằng $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

Bài 77. Tính giá trị lượng giác của (không dùng máy tính bỏ túi)

$$1/ \quad \cos 15^\circ. \quad 2/ \quad \cos 18^\circ. \quad 3/ \quad \sin 36^\circ. \quad 4/ \quad \cos 36^\circ.$$

Bài 78. Tính $\tan \frac{x}{2}$ khi biết

$$1/ \quad \cos x = \frac{4}{5}, 0 < x < \frac{\pi}{2}. \quad 2/ \quad \tan x = \frac{24}{7}, \pi < x < \frac{3\pi}{2}.$$

$$3/ \quad \sin x + \cos x = \frac{\sqrt{7}}{2}, 0 < x < \frac{\pi}{6}.$$

Bài 79. Cho $\tan x = \frac{1}{2}, \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ và $\tan y = \frac{1}{3}, \left(0 < y < \frac{\pi}{2}\right)$.

$$1/ \quad \text{Tính } x + y. \quad 2/ \quad \sin(x - 2y) \text{ và } \cos(2x + y).$$

Bài 80. Tìm x khi biết

$$1/ \quad \begin{cases} 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \tan x = \sqrt{2} - 1 \end{cases} \quad 2/ \quad \begin{cases} 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{cases}.$$

Bài 81. Tính theo $\cos 2x$ các biểu thức sau

1/ $A = 1 + \cos^2 x$.

2/ $B = \sin^2 x \cos^2 x$.

3/ $C = \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x}$.

4/ $D = \frac{1 + \cot^2 x}{1 - \cot^2 x}$.

5/ $E = \sin^6 x + \cos^6 x$.

6/ $F = \sin^6 x \cos^2 x + \cos^6 x \sin^2 x$.

Bài 82. Tính theo $t = \tan \frac{x}{2}$ các biểu thức sau

1/ $A = \sin x$.

2/ $B = \cos x$.

3/ $C = \frac{\sin x}{3 - 2 \cos x}$.

4/ $D = \tan x + \cot x$.

5/ $E = \frac{1 - \tan x}{1 + \cot x}$.

6/ $F = \frac{\tan x + \sin x}{\tan x - \sin x}$.

CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

Bài 83. Chứng minh các đẳng thức sau

1/ $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$.

2/ $\sin 4x = 4 \sin x \cos x (1 - 2 \sin^2 x)$.

3/ $\cos^2 2x - \sin^2 x = \cos x \cos 3x$.

4/ $\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$.

5/ $8 \sin^4 x = 3 - 4 \cos 2x + \cos 4x$.

6/ $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$.

7/ $\sin^4 x + \cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x = \cos 4x$.

8/ $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x$.

9/ $\sin^6 x - \cos^6 x = \frac{15}{16} \cos 2x + \frac{1}{16} \cos 6x$.

10/ $\sin^6 \frac{x}{2} - \cos^6 \frac{x}{2} = \frac{1}{4} \cos x (\sin^2 x - 4)$.

11/ $\cos^8 x - \sin^8 x = \frac{7}{8} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 6x$.

13/ $\cos^3 x \cos 3x - \sin^3 x \sin 3x = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2$.

Bài 84. Chứng minh rằng nếu $a + b = \frac{\pi}{4}$ thì $(1 + \tan a)(1 + \tan b) = 2$.

Bài 85. Chứng minh các đẳng thức sau

1/ $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \tan x$.

2/ $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$.

3/ $\cot x - \tan x = 2 \cot 2x$.

4/ $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$.

5/ $\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \cdot \tan^2 \frac{x}{2} = 1$.

6/ $\frac{1}{\sin 2x} + \cot 2x = \cot x$

7/ $\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) + \cot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) = \frac{2}{\cos x}$.

8/ $(\tan 2x - \tan x) \cos 2x = \tan x$.

$$9/ \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2 \tan 2x. \quad 10/ \cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x = \frac{1}{2} \sin 4x.$$

$$11/ \cos 3x \sin^3 x + \sin 3x \cos^3 x = \frac{3}{4} \sin 4x. \quad 12/ \tan x \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \tan 3x.$$

$$13/ \tan x + \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 3 \tan 3x. \quad 14/ \cot x - \tan x - 2 \tan 2x - 4 \tan 4x = 8 \cot 8x.$$

Bài 86. Chứng minh các đẳng thức sau

$$1/ \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

$$2/ \tan 2x + \frac{1}{\cos 2x} = \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 - \sin 2x}.$$

$$3/ \frac{2 \sin 2x + \sin 4x}{2(\cos x + \cos 3x)} = \tan 2x \cos x.$$

$$4/ \frac{6 + 2 \cos 4x}{1 - \cos 4x} = \tan^2 x + \cot^2 x.$$

$$5/ \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 + \sin 2x} = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}.$$

$$6/ \left(\frac{1}{\cos x} + 1\right) \tan \frac{x}{2} = \tan x$$

$$7/ \frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right).$$

$$8/ \frac{2 \sin x - \sin 2x}{2 \sin x + \sin 2x} = \tan^2 \frac{x}{2}.$$

$$9/ \frac{1 - 2 \sin^2 x}{2 \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = 1.$$

$$10/ \frac{\sin x + \sin \frac{x}{2}}{1 + \cos x + \cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}.$$

$$11/ \frac{1 - \cos x + \cos 2x}{\sin 2x - \sin x} = \cot x.$$

$$12/ \frac{1 + \cos 4x}{\cot x - \tan x} = \frac{1}{2} \sin 4x.$$

$$13/ \frac{\sin 2x \cos x}{(1 + \cos 2x)(1 + \cos x)} = \tan \frac{x}{2}.$$

$$14/ \frac{\sin^4 x - \cos^4 x + \cos^2 x}{1(1 - \cos x)} = \cos^2 \frac{x}{2}.$$

$$15/ \cot^2 x + \tan^2 x = \frac{6 + 2 \cos 4x}{1 - \cos 4x}.$$

$$16/ \left(\cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{4}{1 - 2 \tan x \cot 2x}.$$

$$17/ \frac{\cot^2 2x - 1}{2 \cot 2x} - \cos 8x \cot 4x = \sin 8x.$$

$$18/ \tan 2x + \frac{1}{\cos 2x} = \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 - \sin 2x}.$$

$$19/ \tan 4x - \frac{1}{\cos 4x} = \frac{\sin 2x - \cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x}.$$

$$20/ \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} - \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = 2 \tan 2x.$$

$$21/ \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos x} - \tan x.$$

$$22/ \frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2 \cos^2 x + \cos x - 1} = 2 \cos x.$$

$$23/ 2 \left(\frac{1}{\sin 2x} + \cot 2x \right) = \cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2}.$$

$$24/ \frac{\sin^4 x + \sin 2x - \cos^4 x}{\tan 2x - 1} = \cos 2x.$$

$$25/ \frac{\sin^2 2x - 4 \sin^2 x}{\sin^2 2x + 4 \sin^2 x - 4} = \tan^4 x.$$

$$26/ \frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} = 8 \cos 2x.$$

$$27/ \frac{\cos^2 x - \cos 3x}{\cos x} + \frac{\sin^3 x + \sin 3x}{\sin x} = 3.$$

$$28/ \left(1 + \tan x + \frac{1}{\cos x} \right) \left(1 + \tan x - \frac{1}{\cos x} \right) = \frac{\sin 2x}{\cos^2 x}.$$

Bài 87. Chứng minh các đẳng thức sau

$$1/ A = \cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2^2} \cos \frac{a}{2^3} \dots \cos \frac{a}{2^n} = \frac{\sin a}{2^n \cdot \sin \frac{a}{2^n}}.$$

$$2/ B = \cos \frac{\pi}{2n+1} \cdot \cos \frac{2\pi}{2n+1} \dots \cos \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}.$$

$$3/ C = \cos \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \cos \frac{4\pi}{2n+1} \dots \cos \frac{2n\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}.$$

$$4/ D = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x}}} = \cos \frac{x}{8}, \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \right).$$

Bài 88. Chứng minh các biểu thức sau đây không phụ thuộc vào biến số

$$1/ A = \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{\sin 2x + 2 \sin x} + \tan^2 \frac{x}{2}.$$

$$2/ B = \frac{\cos^3 x - \cos 3x}{\cos x} + \frac{\sin^3 x + \sin 3x}{\sin x}.$$

$$3/ C = 4 \sin^4 x + 2 \cos 2x - \frac{1}{2} \cos 4x.$$

$$4/ D = 3 \cos 2x + 5 \sin^4 x + 4 \sin^2 x \cos^2 x - \cos^4 x.$$

$$5/ E = \frac{\tan^2 x - 1}{2} \cot x + \cos 4x \cot 2x + \sin 4x.$$

$$6/ \quad F = \sin^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{2} \right) + \sin^4 \left(x + \frac{3\pi}{4} \right).$$

BIẾN ĐỔI THÀNH TÍCH

Bài 89. Biến đổi thành tích các biểu thức sau

$$1/ \quad A = (2 \sin x - 1)(2 \cos x + \sin x) - \sin 2x + \cos x.$$

$$2/ \quad B = (2 \cos x - 1)(2 \sin x + \cos x) - \sin 2x + \sin x.$$

$$3/ \quad C = (2 \sin x - 1)(2 \cos 2x + 2 \sin x + 3) - 4 \sin^2 x + 1.$$

$$4/ \quad D = (2 \cos x - 1)(2 \cos x + 2 \sin x + 1) + 4 \sin^2 x - 3.$$

$$5/ \quad E = (2 \sin x + 1)(3 \cos 4x + 2 \sin x - 4) + 4 \cos^2 x - 3.$$

$$6/ \quad F = 1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x.$$

$$7/ \quad G = 1 + \cos x + \cos^2 x - \sin x(1 + \cos x).$$

$$8/ \quad H = (1 + \sin^2 x) \cos x - \sin 2x + (1 + \cos^2 x) \sin x - 1.$$

Bài 90. Biến đổi thành tích các biểu thức sau

$$1/ \quad A = \sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x.$$

$$2/ \quad B = \sin^3 x + \cos^3 x - \sin x + \cos x.$$

$$3/ \quad C = \sin^3 x + \cos^3 x - \cos 2x.$$

$$4/ \quad D = \cos^2 x + \sin^3 x + \cos x.$$

$$5/ \quad E = \cos^3 x + \cos^2 x + 2 \sin x - 2.$$

$$6/ \quad F = \cos^3 x + \sin^3 x + 2 \sin^2 x - 1.$$

Bài 91. Biến đổi thành tích các biểu thức sau

$$1/ \quad A = \sin 2x + \cos 2x + \cos x - \sin x.$$

$$2/ \quad B = \sin 2x + \cos 2x + 3 \sin x - \cos x - 2.$$

$$3/ \quad C = \cos 2x - \sin 2x + 3 \sin x + \cos x - 2.$$

$$4/ \quad D = \sin 2x + \cos 2x + 2(\cos x - \sin x) - 3.$$

$$5/ \quad E = 9 \sin x + 6 \cos x - 3 \sin 2x + \cos 2x.$$

$$6/ \quad F = \sin 2x + 2 \cos 2x + 4 \cos x - \sin x - 1.$$

$$7/ \quad G = (2 \cos x - 1)(\sin x + \cos x) - 1.$$

$$8/ \quad H = 2 \sin 2x - \cos 2x - 7 \sin x - 2 \cos x + 4.$$

E – CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI



① Công thức biến đổi tổng thành tích

$\bullet \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}.$	$\bullet \tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}.$
$\bullet \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}.$	$\bullet \tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b}.$
$\bullet \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}.$	$\bullet \cot a + \cot b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \cdot \sin b}.$
$\bullet \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}.$	$\bullet \cot a - \cot b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \cdot \sin b}.$

★ Hệ quả

- $\bullet \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cdot \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cdot \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right).$
- $\bullet \sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right).$

② Công thức biến đổi tích thành tổng

- $\bullet \cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)].$
- $\bullet \sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)].$
- $\bullet \sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)].$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH

Bài 92. Tính giá trị của biểu thức

1/ $A = \frac{\cos 2x - \cos 4x}{\sin 4x - \sin 2x}$ khi $x = 20^\circ.$

2/ $B = \frac{\cos x \cdot \cos 13x}{\cos 3x + \cos 5x}$ khi $x = \frac{\pi}{17}.$

3/ $C = \frac{\cos x \cdot \cos 10x}{\cos 2x + \cos 4x}$ khi $x = \frac{\pi}{13}.$

$$4/ \quad D = \frac{\tan 2x - \sin 2x}{\tan 2x + \sin 2x} \text{ khi } \tan x = \frac{2}{15}.$$

$$5/ \quad E = \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} \text{ khi } \sin x = \frac{1}{3}, \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Bài 93. Rút gọn biểu thức

$$1/ \quad A = \frac{1 - 2 \cos x}{1 + 2 \cos x}.$$

$$2/ \quad B = \frac{\sqrt{3} - 2 \cos 3x}{\sqrt{3} + 2 \cos 3x}.$$

$$3/ \quad C = \frac{1 - 2 \cos 2x}{\sqrt{3} + 2 \sin 2x}.$$

$$4/ \quad D = \frac{\sqrt{2} - 2 \sin 2x}{\sqrt{2} + 2 \sin 2x}.$$

$$5/ \quad E = \frac{\sin 5x - \sin 3x}{2 \cos 4x}.$$

$$6/ \quad F = \frac{\cos 4x - \cos 2x}{\sin 4x + \sin 2x}.$$

$$7/ \quad G = \frac{\sin(x + y)}{\sin x + \sin y}.$$

$$8/ \quad H = \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y}.$$

$$9/ \quad I = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}.$$

$$10/ \quad J = \frac{\sin^2 4x - \sin^2 2x}{\cos^2 x - \cos^2 2x}.$$

$$11/ \quad K = \frac{\sin^2 4x}{2 \cos x + \cos 3x + \cos 5x}.$$

$$12/ \quad L = \frac{\sin 2x}{\tan x + \cot 2x}.$$

$$13/ \quad M = \frac{\tan 3x + \tan 5x}{\cot 3x + \cot 5x}.$$

$$14/ \quad N = \frac{\tan 2x + \cot 2x}{1 + \tan 2x \cdot \tan 4x}.$$

$$15/ \quad O = \frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \sin 2x - \cos 2x}.$$

$$16/ \quad P = \frac{1 + \sin 4x - \cos 4x}{1 + \cos 4x + \sin 4x}.$$

$$17/ \quad Q = \frac{\sin 2x + 2 \sin 3x + \sin 4x}{\cos 3x + 2 \cos 4x + \cos 5x}.$$

$$18/ \quad R = \frac{\sin x + \sin 4x + \sin 7x}{\cos x + \cos 4x + \cos 7x}.$$

$$19/ \quad S = \frac{\cos 2x - \sin 4x - \cos 6x}{\cos 2x + \sin 4x - \cos 6x}.$$

$$20/ \quad T = \frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2 \cos^2 x + \cos x - 1}.$$

$$21/ \quad U = \frac{2(\sin 2x + 2 \cos^2 x - 1)}{\cos x - \sin x - \cos 3x + \sin 3x}.$$

$$22/ \quad V = \frac{\sin(x + y) - \sin x}{\sin(x + y) + \sin x} - \frac{\cos(x + y) + \cos x}{\cos(x - y) - \cos x}.$$

$$23/ \quad X = \frac{\cos 7x - \cos 8x - \cos 9x + \cos 10x}{\sin 7x - \sin 8x - \sin 9x + \sin 10x}.$$

$$24/ \quad Y = \frac{\sin 4x + \sin 5x + \sin 6x}{\cos 4x + \cos 5x + \cos 6x}.$$

Bài 94. Biến đổi thành tích các biểu thức sau đây

$$1/ \quad A = \cos 3x + \cos x.$$

$$2/ \quad B = \sin 3x + \sin 2x.$$

$$3/ \quad C = \cos 4x - \cos x.$$

$$4/ \quad D = \sin 5x - \sin x.$$

$$5/ \quad E = 1 + \sin 2x.$$

$$6/ \quad F = 1 - \sin x.$$

$$7/ \quad G = 1 + 2 \cos x.$$

$$8/ \quad H = \sqrt{2} \sin 2x - 1.$$

$$9/ \quad I = \sqrt{3} + 2 \cos 2x.$$

$$10/ \quad J = \sin(a + b) - \sin(a - b).$$

$$11/ K = \cos^2 x - \cos^2 y.$$

$$13/ M = 1 + \sin x + \cos x.$$

$$15/ O = \sin 3x - \sin x + \sin 2x.$$

$$17/ R = \sin x + \sin 2x + \sin 3x.$$

$$19/ T = \sqrt{2} \sin 2x + \cos 5x - \cos 9x.$$

$$21/ V = \cos x + \cos 3x + 2 \cos 5x.$$

$$23/ Y = \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}.$$

$$25/ W = \sin 70^\circ - \sin 20^\circ + \sin 50^\circ.$$

$$27/ \Phi = \cos \left(\frac{\pi}{2} + 5x \right) + \sin x - \cos 3x.$$

$$29/ \Lambda = \sin x + \sin y + \sin (x + y).$$

$$31/ \Theta = \cos x + \cos y + \cos (x + y) + 1.$$

$$33/ \Upsilon = 1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x.$$

$$35/ \Xi = \sin 5x + \sin 6x + \sin 7x + \sin 8x.$$

$$12/ L = 1 + \sin x - \cos 2x.$$

$$14/ N = \cos x + \sin 2x - \cos 3x.$$

$$16/ Q = \cos x - \cos 2x - \sin 3x.$$

$$18/ S = \cos x + \cos 2x + \cos 3x.$$

$$20/ U = \sin 3x - 2 \sin 2x + \sin x.$$

$$22/ X = \cos 46^\circ - \cos 22^\circ - 2 \cos 78^\circ.$$

$$24/ Z = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}.$$

$$26/ \Delta = \cos 5x + \cos 7x - \cos (\pi + 6x).$$

$$28/ \Gamma = \sin x + \sin y + \sin \frac{x + y}{2}.$$

$$30/ \Pi = \cos x + \cos y + \sin (x + y).$$

$$32/ \Sigma = \cos (60^\circ + x) + \cos (60^\circ - x) + \cos 3x.$$

$$34/ \Omega = \sin 2x + \sin 4x + \sin 6x.$$

$$36/ \Psi = \cos 5x + \cos 8x + \cos 9x + \cos 12x.$$

Bài 95. Biến đổi thành tích các biểu thức sau đây

$$1/ 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x.$$

$$3/ \sin x - \sin 2x + \sin 5x + \sin 8x.$$

$$5/ \cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x.$$

$$7/ \sin 35^\circ + \cos 40^\circ + \sin 55^\circ + \cos 20^\circ.$$

$$9/ \sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ.$$

$$11/ 1 + \sin x - \cos 5x - \sin 7x - 2 \cos^2 \frac{3x}{2}.$$

$$13/ \sin x + \sin 2x + \sin 3x - 1 - \cos x - \cos 2x.$$

$$14/ 1 + \sin x + \cos 3x - \cos x - \sin 2x - \cos 2x.$$

$$15/ \sin x + \sin 2x + \sin 3x - \cos x - \cos 2x - \cos 3x.$$

$$2/ \sin x - \sin 3x + \sin 7x - \sin 5x.$$

$$4/ \cos 7x + \sin 3x + \sin 2x - \cos 3x.$$

$$6/ \cos 10x - \cos 8x - \cos 6x + 1.$$

$$8/ \sin 57^\circ - \sin 59^\circ - \sin 93^\circ + \sin 61^\circ.$$

$$10/ \cos 5x + 3 \cos 7x + 3 \cos 9x + \cos 11x.$$

$$12/ \sin 3x + \sin x - \sin 2x + 2(1 - \cos x) \cos x.$$

Bài 96. Biến đổi thành tích các biểu thức sau đây

$$1/ \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x - 1.$$

$$3/ \sin^2 3x - \sin^2 2x - \sin^2 x.$$

$$5/ \sin^2 x - 2 \sin^2 2x + \sin^2 3x.$$

$$7/ \sin^2 3x - \cos^2 4x - \sin^2 5x + \cos^2 6x.$$

$$2/ \sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x - \frac{3}{2}.$$

$$4/ \sin^2 x - \cos^2 2x - \cos^2 3x.$$

$$6/ \sin^2 4x - \cos^2 6x - \sin (10,5\pi + 10x).$$

$$8/ \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x - \frac{3}{2}.$$

$$9/ \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x - 2. \quad 10/ \cos 3x + \sin 7x - 2\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{2} \right) + 2\cos^2 \frac{9x}{2}.$$

$$11/ \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2x \right) \cot 3x + \sin(\pi + 2x) - \sqrt{2} \cos 5x. \quad 12/ 2\sin 2x - \cos \left(\frac{\pi}{2} + 3x \right) - \frac{\cos 3x \cos \left(\frac{\pi}{2} - 5x \right)}{\cos 5x}.$$

Bài 97. Chứng minh

$$1/ \sin 75^\circ + \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2}. \quad 2/ \cos 12^\circ - \cos 48^\circ = \sin 18^\circ.$$

$$3/ \sin 65^\circ + \sin 55^\circ = \sqrt{3} \cos 5^\circ. \quad 4/ \tan 267^\circ + \tan 93^\circ = 0.$$

$$5/ \cos 85^\circ + \cos 35^\circ + \cos 25^\circ = 0. \quad 6/ \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ = 4.$$

$$7/ \cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ = \frac{1}{2}.$$

$$8/ \tan 9^\circ + \tan 15^\circ + \cot 15^\circ + \cot 9^\circ = \tan 27^\circ + \cot 27^\circ.$$

$$9/ \cos x - \frac{1}{2} \cos 3x - \frac{1}{2} \cos 5x = 8 \sin^2 x \cos^3 x.$$

$$10/ \sin x (1 + 2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 2 \cos 6x) = \sin 7x.$$

$$11/ 1 + 4 \cos x + 6 \sin 2x - 4 \sin x = 16 \sin 2x \sin^4 \frac{x}{2}.$$

$$12/ 8 \sin^2 x \sin(x + 60^\circ) \sin(x - 60^\circ) = \cos 4x - \cos 2x.$$

$$13/ (\sin x - \cos x)^2 - \cos 4x = 4 \sin 2x \sin(x + 15^\circ) \cos(x - 15^\circ).$$

Bài 98. Cho $a + b = c$. Chứng minh: $\sin a + \sin b + \sin c = 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}$.

Bài 99. Tính các giá trị của biểu thức

$$1/ A = \sin^6 \frac{\pi}{24} + \cos^6 \frac{\pi}{24}.$$

$$2/ B = \tan^2 \frac{\pi}{12} + \cot^2 \frac{\pi}{12}.$$

$$3/ C = \cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11}.$$

$$4/ D = \cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{4\pi}{11} + \cos \frac{6\pi}{11} + \cos \frac{8\pi}{11} + \cos \frac{10\pi}{11}.$$

$$5/ E = \cos 0^\circ + \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}.$$

$$6/ F = (\sin 40^\circ + \cos 10^\circ)^2 - (\cos 40^\circ + \sin 10^\circ)^2 + \cos 140^\circ.$$

Bài 100. Trong ΔABC có ba góc lần lượt là A, B, C . Chứng minh rằng

$$1/ \quad \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

$$2/ \quad \sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

$$3/ \quad \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

$$4/ \quad \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C.$$

$$5/ \quad 1 + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -4 \cos A \cos B \cos C.$$

$$6/ \quad \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C).$$

$$7/ \quad \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C.$$

CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

Bài 101. Biến đổi thành tổng các biểu thức sau

$$1/ \quad A = \sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5}.$$

$$2/ \quad B = \sin 5x \cos 3x.$$

$$3/ \quad C = \sin \frac{3\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6}.$$

$$4/ \quad D = \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12}.$$

$$5/ \quad E = \sin(x + y) \cos(x - y).$$

$$6/ \quad F = \sin(x + 30^\circ) \cos(x - 30^\circ).$$

$$7/ \quad G = 2 \sin x \sin 2x \sin 3x.$$

$$8/ \quad H = 8 \cos x \sin 2x \sin 3x.$$

$$9/ \quad I = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cos 2x.$$

$$10/ \quad J = 4 \cos(a - b) \cos(b - c) \cos(c - a).$$

Bài 102. Tính giá trị của biểu thức

$$1/ \quad A = \cos 75^\circ \cos 15^\circ.$$

$$2/ \quad B = \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}.$$

$$3/ \quad C = \sin \frac{11\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}.$$

$$4/ \quad D = \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ.$$

$$5/ \quad E = \sin \frac{x}{4} \cdot \sin \frac{5x}{4}, \text{ khi } x = 60^\circ.$$

$$6/ \quad F = \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ.$$

$$7/ \quad G = 2^4 \cdot \sin \frac{\pi}{24} \cdot \sin \frac{5\pi}{24} \cdot \sin \frac{7\pi}{24} \cdot \sin \frac{11\pi}{24}.$$

$$8/ \quad H = \sin 5^\circ \cdot \sin 15^\circ \cdot \sin 25^\circ \dots \sin 65^\circ \sin 75^\circ \cdot \sin 85^\circ.$$

$$9/ \quad I = \sin^2 10^\circ + \cos 70^\circ \cos 50^\circ.$$

$$10/ \quad J = \cos 10^\circ \cos 50^\circ - \cos 5^\circ \cos 25^\circ + \frac{1}{2} \cos 10^\circ.$$

$$11/ \quad K = \sin^2 50^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin 50^\circ \sin 10^\circ.$$

$$12/ \quad L = \cos^2 73^\circ + \cos^2 47^\circ + \cos 73^\circ \cdot \cos 47^\circ.$$

$$13/ \quad M = \sin^2 50^\circ + \sin^2 70^\circ - \cos 50^\circ \cos 70^\circ. \quad (\text{Đại học An Ninh khối A năm 2001})$$

$$14/ \quad N = \cos 10^\circ \cos 50^\circ - \cos 5^\circ \cos 25^\circ + \frac{1}{2} \sin 10^\circ.$$

$$15/ \quad O = 2(\cos 22^\circ + \cos 44^\circ) - \frac{\sin 55^\circ}{\sin 11^\circ}.$$

$$16/ \quad P = \frac{\sin 60^\circ}{\sin^4 15^\circ - \sin^4 75^\circ} + 3 \sin 15^\circ \sin 75^\circ.$$

$$17/ \quad Q = -2\sqrt{2} \sin 10^\circ \left(2 \sin 35^\circ - \frac{1}{2 \cos 5^\circ} - \frac{\cos 40^\circ}{\sin 5^\circ} \right).$$

$$18/ \quad R = \frac{1}{\sin 10^\circ} - 4 \sin 70^\circ.$$

$$19/ \quad S = \frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}.$$

$$20/ \quad T = \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}.$$

$$21/ \quad U = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5}.$$

$$22/ \quad V = \cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{6\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9}.$$

Bài 103. Rút gọn biểu thức $A = 2 \sin x (\cos x + \cos 3x + \cos 5x)$. Từ đó suy ra giá trị của biểu thức

$$B = \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}.$$

Bài 104. Rút gọn các biểu thức sau

$$1/ \quad A = \cos 11x \cos 3x - \cos 17x \cos 9x.$$

$$2/ \quad B = \sin 18x \cos 13x - \sin 9x \cos 4x.$$

$$3/ \quad C = \sin x \sin 3x + \sin 4x \sin 8x.$$

$$4/ \quad D = \sin 2x \sin 6x - \cos x \cos 3x.$$

$$5/ \quad E = \cos 3x \cos 6x - \cos 4x \cos 7x.$$

$$6/ \quad F = \sin x \sin (60^\circ - x) \sin (60^\circ + x).$$

$$7/ \quad G = 8 \cos x \cos (60^\circ - x) \cos (60^\circ + x) + 1.$$

$$8/ \quad H = \cos x \cos 2x \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 12x.$$

$$9/ \quad I = 4 \sin 2x \sin 5x \sin 7x - \sin 4x.$$

$$10/ \quad J = \sin 2x \sin 6x \cos 4x + \frac{1}{4} \cos 12x.$$

$$11/ \quad K = \sin x \sin 2x \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x.$$

$$12/ \quad L = 4 \cos x \sin \left(\frac{\pi}{6} + x \right) \sin \left(\frac{\pi}{6} - x \right) - \cos 2x.$$

$$13/ \quad M = \sin 4x \sin 10x - \sin 11x \sin 3x - \sin 7x \sin x.$$

$$14/ \quad N = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} - \sin x \sin 3x - \sin 2x \sin 3x.$$

$$15/ \quad O = \sin \frac{7x}{2} \cos \frac{3x}{2} + \sin \frac{x}{2} \cos \frac{5x}{2} + \sin 2x \cos 7x.$$

$$16/ \quad P = \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x - 4 \cos x \cos 2x \cos 3x - 2.$$

$$17/ \quad Q = \sin x (1 + 2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 2 \cos 6x).$$

$$18/ \quad R = \frac{\sin 5x}{\sin x} - 2(\cos 2x + \cos 4x).$$

$$19/ \quad S = \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - \sin \frac{\pi}{12} \cos \left(\frac{\pi}{12} + 2x \right).$$

Bài 105. Chứng minh các đẳng thức sau

$$1/ \quad \cos 12^0 + \cos 18^0 - 4 \cos 15^0 \cos 21^0 \cos 24^0 = -\frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$$

(Đại học Quốc Gia Hà Nội khối A năm 2001)

$$2/ \quad \tan 9^0 - \tan 63^0 + \tan 81^0 - \tan 27^0 = 4.$$

$$3/ \quad \tan 30^0 + \tan 40^0 + \tan 50^0 + \tan 60^0 = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cos 20^0.$$

$$4/ \quad \cos(2x + 60^0) \cos(2x - 60^0) = \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{4}.$$

$$5/ \quad (\sin x + \cos x)^2 - \cos 4x = 4 \sin 2x \sin(x + 15^0) \cos(x - 15^0).$$

$$6/ \quad \sin^2 x + \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} - x \right) + \sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \frac{3}{4}.$$

$$7/ \quad \sin a \sin(b - c) + \sin b \sin(c - a) + \sin c \sin(a - b) = 0.$$

$$8/ \quad \cos^2 x - 2 \cos a \cos x \cos(a + x) + \cos^2(a + x) = \sin^2 a.$$

$$9/ \quad \sin^8 x - \cos^8 x = \frac{7}{8} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 6x.$$

$$10/ \quad \sin^8 x + \cos^8 x = \frac{35}{64} + \frac{7}{16} \cos 4x + \frac{1}{64} \cos 8x.$$

$$11/ \quad \tan \frac{3\pi}{11} + 4 \tan \frac{2\pi}{11} = \sqrt{11}.$$

$$12/ \quad \tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 80^\circ = \sqrt{3}.$$

$$13/ \quad 8 \sin^3 18^\circ + 8 \sin^2 18^\circ = 1. \quad (\text{Học Viện Ngân Hàng năm 2000})$$

$$14/ \quad \sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} + \sin^4 \frac{6\pi}{16} = \frac{3}{2}.$$

$$15/ \quad \tan 10^\circ \tan 25^\circ + \tan 25^\circ \tan 55^\circ + \tan 55^\circ \tan 10^\circ = 1.$$

$$16/ \quad \tan 15^\circ \tan 25^\circ \tan 35^\circ \tan 85^\circ = 1.$$

$$17/ \quad \tan 20^\circ - \tan 40^\circ + \tan 80^\circ = 3\sqrt{3}.$$

$$18/ \quad \tan 10^\circ - \tan 50^\circ + \tan 60^\circ + \tan 70^\circ = 2\sqrt{3}.$$

$$19/ \quad \tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \tan 80^\circ + \tan 60^\circ = 8 \sin 40^\circ.$$

$$20/ \quad \tan^6 20^\circ - 33 \tan^4 20^\circ + 27 \tan^2 20^\circ - 3 = 0.$$

Bài 106. Tính các góc của ΔABC biết rằng

$$1/ \quad B - C = \frac{\pi}{3} \text{ và } \sin B \cdot \sin C = \frac{1}{2}. \quad \underline{\text{ĐS:}} \quad B = \frac{\pi}{2}, \quad C = \frac{\pi}{6}, \quad A = \frac{\pi}{3}.$$

$$2/ \quad B + C = \frac{2\pi}{3} \text{ và } \sin B \cdot \cos C = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}. \quad \underline{\text{ĐS:}} \quad A = \frac{\pi}{3}, \quad B = \frac{5\pi}{12}, \quad C = \frac{\pi}{4}.$$

Bài 107. Chứng minh điều kiện cần và đủ để ΔABC vuông

$$1/ \quad \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1. \quad 2/ \quad \tan 2A + \tan 2B + \tan 2C = 0.$$

$$3/ \quad \frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} = \frac{a}{\sin B \cdot \sin C}. \quad 4/ \quad \cot \frac{B}{2} = \frac{a + c}{b}.$$

Bài 108. Chứng minh điều kiện cần và đủ để ΔABC cân:

$$1/ \quad a \tan A + b \tan B = (a + b) \tan \frac{A + B}{2}. \quad 2/ \quad 2 \tan B + \tan C = \tan^2 B \cdot \tan C.$$

$$3/ \quad \frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \frac{1}{2} (\tan A + \tan B). \quad 4/ \quad \cot \frac{C}{2} = \frac{2 \sin A \cdot \sin B}{\sin C}.$$

Bài 109. Chứng minh bất đẳng thức, từ đó suy ra điều kiện cần và đủ để ΔABC đều:

$$1/ \quad \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}. \quad \underline{\text{HD:}} \quad \text{Cộng } \sin \frac{\pi}{3} \text{ vào VT.}$$

$$2/ \quad \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}. \quad \underline{\text{HD:}} \quad \text{Cộng } \cos \frac{\pi}{3} \text{ vào VT.}$$

$$3/ \quad \tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}.$$

$$4/ \quad \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \frac{1}{8}.$$

HD: Biến đổi $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C - \frac{1}{8}$ về dạng hằng đẳng thức.

Bài 110. Cho $\cos \varphi = \cos a \cos b$ với $a, b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Chứng minh: $\tan \frac{\varphi + a}{2} \tan \frac{\varphi - a}{2} = \tan^2 \frac{b}{2}$.

Bài 111. Cho $\sin(2a + b) = 5 \sin b$. Chứng minh: $\frac{2 \tan(a + b)}{\tan a} = 3$ với $\begin{cases} a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ a + b \neq \frac{\pi}{2} + l\pi \end{cases}$.

Bài 112. Cho $\tan(a + b) = 3 \tan a$. Chứng minh: $\sin(2a + 2b) + \sin 2a = 2 \sin 2b$.

Bài 113. Cho $\frac{a}{b} = \frac{\sin(x - \alpha)}{\sin(x - \beta)}$; $\frac{A}{B} = \frac{\cos(x - \alpha)}{\cos(x - \beta)}$ và $aB + bA \neq 0$. Chứng minh:

$$\frac{aA + bB}{aB + bA} = \cos(\alpha - \beta).$$

Bài 114. Chứng minh rằng nếu $\tan \frac{x}{2} = \frac{a}{b}$ thì $A = a \sin x + b \cos x$ không phụ thuộc vào a và x .

Bài 115. Cho a, b, c là ba cạnh của tam giác, tương ứng các góc lần lượt là A, B, C . Các góc nhọn α, β, γ được xác định bởi $\cos \alpha = \frac{a}{b + c}$, $\cos \beta = \frac{b}{c + a}$, $\cos \gamma = \frac{c}{a + b}$. Chứng minh:

$$1/ \quad \tan^2 \frac{\alpha}{2} + \tan^2 \frac{\beta}{2} + \tan^2 \frac{\gamma}{2} = 1. \quad 2/ \quad \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2} = \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}.$$

Bài 116. Chứng minh: $\frac{1}{\cos x \cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x \cos 3x} + \dots + \frac{1}{\cos 7x \cos 8x} = \frac{\tan 8x - \tan x}{\sin x}$.

Bài 117. Tính giá trị của biểu thức: $M = \sin^8 20^\circ + \sin^8 40^\circ + \sin^8 80^\circ$.

(Đề thi học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình khối 11 năm 2006)

Bài 118. Tính giá trị của biểu thức: $N = \frac{2 \sin 2^\circ + 4 \sin 4^\circ + \dots + 178 \sin 178^\circ + 180 \sin 180^\circ}{\cot 1^\circ}$.

Bài 119. Rút gọn các biểu thức sau

$$1/ \quad A = \cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \dots + \cos(2n - 1)\alpha. \quad \underline{\text{ĐS:}} \quad A = \frac{\sin 2n\alpha}{2 \sin \alpha}.$$

$$2/ \quad B = \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n - 1)\pi}{n}. \quad \underline{\text{ĐS:}} \quad B = \cot \frac{\pi}{2n}.$$

$$3/ \quad C = \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{3\pi}{n} + \cos \frac{5\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(2n - 1)\pi}{n}. \quad \underline{\text{ĐS:}} \quad C = -\cos \frac{\pi}{n}.$$

$$4/ \quad D = \frac{1}{\cos a \cdot \cos 2a} + \frac{1}{\cos 2a \cdot \cos 3a} + \dots + \frac{1}{\cos 4a \cdot \cos 5a}, \quad a = \frac{\pi}{5}. \quad \underline{\text{ĐS:}} \quad D = 1 - \sqrt{5}.$$

$$5/ \quad E = \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos 2x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos 3x}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{\cos 2^{n-1}x}\right). \quad \underline{\text{ĐS:}} \quad E = \frac{\tan 2^{n-1}x}{\tan \frac{x}{2}}.$$

$$6/ \quad F = \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \frac{1}{\sin 8x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x}.$$

$$7/ \quad G = \sin^3 \frac{x}{3} + 3 \sin^3 \frac{x}{3} + 3^2 \sin^3 \frac{x}{3} + \dots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{x}{3^n}.$$

Bài 120. Tìm phân nguyên của biểu thức: $M = \tan^4 \frac{3\pi}{4} + \tan^4 \frac{\pi}{4} + 2 \left(\tan^2 \frac{3\pi}{4} + \tan^2 \frac{2\pi}{7} \right).$

Bài 121. Chứng minh: $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x)$ (*). Khi thay $x = \frac{a}{3^n}$ vào biểu thức (*). Hãy

tính $S_n = \sin^3 \frac{a}{3} + 3 \sin^3 \frac{a}{3^2} + \dots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{a}{3^n}.$

ĐS: $S_n = \frac{1}{4} \left(3^n \sin \frac{a}{3^n} - \sin a \right).$

Bài 122. Chứng minh: $\cos a = \frac{\sin 2a}{2 \sin a}.$ Từ đó suy ra giá trị của $P_n = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \dots \cos \frac{x}{2^n}.$

ĐS: $P_n = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}.$

Bài 123. Chứng minh: $\frac{1}{\sin x} = \cot \frac{x}{2} - \cot x.$ Từ đó tính:

$$S = \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin 2\alpha} + \dots + \frac{1}{\sin 2^{n-1}\alpha}, \quad (2^{n-1}\alpha \neq k\pi).$$

ĐS: $S = \cot \frac{\alpha}{2} - \cot 2^{n-1}\alpha.$

Bài 124. Chứng minh: $\tan^2 x \cdot \tan 2x = \tan 2x - 2 \tan x.$ Từ đó tính:

$$S_n = \tan^2 \frac{a}{2} \cdot \tan a + 2 \tan^2 \frac{a}{2^2} \cdot \tan \frac{a}{2} + \dots + 2^{n-1} \tan^2 \frac{a}{2^n} \cdot \tan \frac{a}{2^{n-1}}.$$

ĐS: $S_n = \tan a - 2^n \tan \frac{a}{2^n}.$

Bài 125. Tính $\sin^2 2x$, biết: $\frac{1}{\tan^2 x} + \frac{1}{\cot^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 7.$

ĐS: $\frac{8}{9}.$

Bài 126. Cho biết $\sin a = m$ và $270^\circ < x < 450^\circ$. Chứng minh:

$$1/ \cos \frac{a}{2} = -\frac{1}{2}(\sqrt{1+m} + \sqrt{1-m}). \quad 2/ \sin \frac{a}{2} = -\frac{1}{2}(\sqrt{1+m} - \sqrt{1-m}).$$

Bài 127. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh: $\tan \alpha + \cot \alpha \geq 2$.

Bài 128. Chứng minh các bất đẳng thức sau

$$1/ \sin 75^\circ + \sin 15^\circ > 1. \quad 2/ \cos 36^\circ > \tan 36^\circ.$$

Bài 129. Chứng minh các bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} 1/ & \sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x - \cos 2x \leq \sqrt{2}. \\ 2/ & \sqrt{3} \sin 3x + \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \leq 2. \\ 3/ & \left| \sin x \sin(x + 60^\circ) \sin(x - 60^\circ) \right| \leq \frac{1}{4}. \\ 4/ & \cos x \cos 3x - \sin 2x \sin 4x \leq 1. \\ 5/ & \left| \cos 2x \cos x + \sin x \sin 3x - \sin^2 x \cos 3x \right| \leq 1. \\ 6/ & 2 \sin x (\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x + \cos 9x) \leq 1. \end{aligned}$$

Bài 130. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

$$\begin{aligned} 1/ & y = \sqrt{3} \sin x + \cos x + 2. \\ 2/ & y = \cos x + \frac{1}{\cos x}, \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right). \\ 3/ & y = \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x. \\ 4/ & y = \sin^4 x + \cos^4 x, \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right). \\ 5/ & y = \sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x}. \\ 6/ & y = \cos^4 x + \sin^4 x + \cos^2 x \sin^2 x. \\ 7/ & y = \sin^4 4x - \cos^2 x + \frac{5}{4} \cos 2x. \\ 8/ & y = 2 \sin^6 x + 2 \cos^6 x - \sin^4 x - \cos^4 x + \cos 2x. \end{aligned}$$

PHẦN II

HÌNH HỌC

Chương 3

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG & ỨNG DỤNG



A – TỌA ĐỘ VÉCTƠ – TỌA ĐỘ ĐIỂM

① Tọa độ Oxy

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$ và hai véctơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$. Khi đó:

— Véctơ $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$.

— Độ dài đoạn $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

— Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Lúc đó: $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$; $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$.

— Gọi $G(x_G; y_G)$ là trọng tâm ΔABC , lúc này: $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$; $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$.

— Gọi $M(x_M; y_M)$ chia đoạn AB theo tỉ số k , ($k \neq -1$). Khi đó: $x_M = \frac{x_A - kx_B}{1 - k}$; $y_M = \frac{y_A - ky_B}{1 - k}$.

— $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2)$ (hoành + hoành ; tung + tung) = một véctơ.

— $k\vec{a} = (ka_1; ka_2)$ với $k \in \mathbb{R}$.

— $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$. (hoành nhân hoành + tung nhân tung) = một số.

— Để $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ cùng phương $\Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

— Điều kiện để $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ vuông góc nhau $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$.

— Điều kiện để $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ bằng nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$ (hoành = hoành, tung = tung)

— Để ba điểm A, B, C thẳng hàng thì $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \frac{x_B - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_A}$ với $\begin{cases} x_C \neq x_A \\ y_C \neq y_A \end{cases}$.

— Góc giữa hai véctơ $\vec{a}, \vec{b}$: $\cos \varphi = \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$.

— Cho điểm $M(x_M; y_M)$ thì tọa độ của điểm

- M_1 đối xứng với M qua trục hoành Ox $\Leftrightarrow M_1(x_M; -y_M)$.
- M_2 đối xứng với M qua trục tung Oy $\Leftrightarrow M_2(-x_M; y_M)$.
- M_3 đối xứng với M qua gốc tọa độ O $\Leftrightarrow M_3(-x_M; -y_M)$.
- $M \in Ox \Rightarrow M(x_M; 0)$ và $M \in Oy \Rightarrow M(0; y_M)$.
- $M \in d: y = ax + b \Leftrightarrow y_M = ax_M + b$.

② Một số dạng toán cơ bản

a/ **Dạng toán 1.** Xác định điểm thỏa mãn một đẳng thức vectơ hay độ dài

- **Bước 1.** Giả sử $M(x; y)$.
- **Bước 2.** Tọa độ hóa các vectơ có trong đẳng thức hoặc sử dụng công thức về khoảng cách giữa hai điểm, để chuyển đẳng thức về biểu thức đại số.
- **Bước 3.** Giải phương trình hoặc hệ trên, ta nhận được tọa độ điểm M.

✎ **Lưu ý**

- Để D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
- Để xác định tâm I và bán kính đường tròn R ngoại tiếp ΔABC

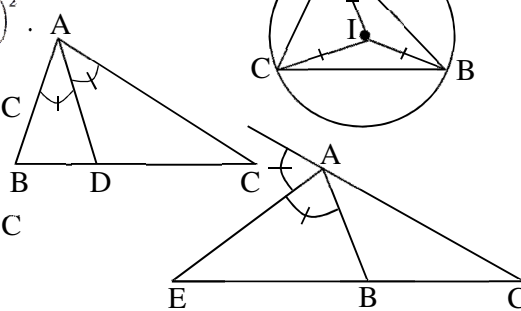
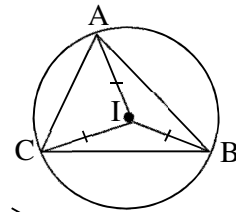
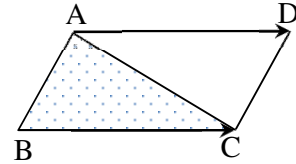
$$+ \text{ Tâm I thỏa } \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \end{cases} \cdot \text{Giải hệ tìm } I(x_I; y_I).$$

$$+ \text{ Bán kính } R = AI = \sqrt{(x_I - x_A)^2 + (y_I - y_A)^2}.$$

- Tọa độ chân đường phân giác
 - + Để D là chân đường phân giác trong của ΔABC

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = \frac{BA}{AC} \cdot \overrightarrow{CD}. \text{ (theo vòng tròn)}$$
 - + Để E là chân đường phân giác ngoài của ΔABC

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{EB} = \frac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{EC}.$$



b/ **Dạng toán 2.** Vectơ cùng phương (thẳng hàng) – Tìm điểm $M \in d$ để $\begin{cases} (MA + MB)_{\min} \\ |MA - MB|_{\max} \end{cases}$.

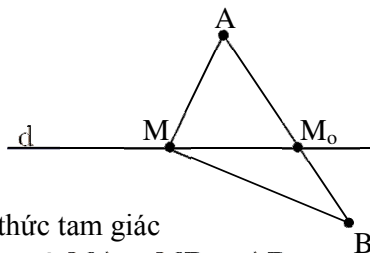
- Để $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \frac{x_B - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_A}.$$
- Tìm điểm $M(x, y) \in d : Ax + By + C = 0$ để tổng $(MA + MB)$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 Đây là bài toán bất đẳng thức tam giác, cần phân biệt hai trường hợp:
 - + **Trường hợp 1.** Hai điểm A, B nằm khác bên so với đường thẳng d.

• **Cách 1.** Sử dụng vectơ cùng phương

$$* \text{ Gọi } M\left(x_0; -\frac{A}{B}x_0 - \frac{C}{B}\right) \in d : Ax + By + C = 0.$$

$$* \text{ Để tổng } (MA + MB)_{\min} \Leftrightarrow M \equiv M_0 \Leftrightarrow M, A, B \text{ thẳng hàng} \Rightarrow M.$$

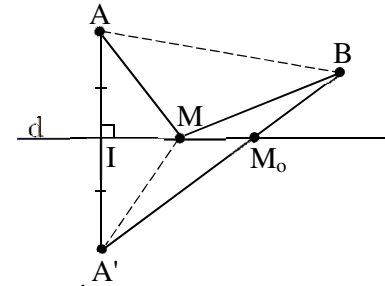


• **Cách 2.** Sử dụng bất đẳng thức tam giác

- * Trong ΔABM , ta có $MA + MB \geq AB$.
- * Viết phương trình đường thẳng AB: đi qua A và B.
- * $(MA + MB)_{\min} = AB$ khi $M \equiv M_0 = d \cap AB$.

+ **Trường hợp 2.** Hai điểm A, B nằm cùng bên so với đường thẳng d

- Dựng A' đối xứng với A qua d $\Rightarrow A'$.
- Trong $\triangle AMB$, ta có:
 $MA + MB \geq AB \Leftrightarrow MA' + MB \geq AB$.
- Do đó, $(MA + MB)_{\min} = AB$
 $\Leftrightarrow M \equiv M_o = d \cap A'B \Leftrightarrow (MA' + MB)_{\min} \geq AB$.



Lưu ý

Để xét xem hai điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ nằm cùng bên hay nằm hai bên so với đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$ thì ta cần tính: $P = (Ax_A + By_A + C)(Ax_B + By_B + C)$.

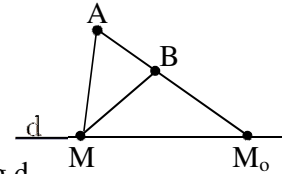
Nếu $P > 0 \Rightarrow$ Hai điểm A, B nằm cùng bên so với đường thẳng d.

Nếu $P < 0 \Rightarrow$ Hai điểm A, B nằm hai bên so với đường thẳng d.

— Tìm điểm $M(x, y) \in d: Ax + By + C = 0$ để $|MA - MB|_{\max}$.

+ **Trường hợp 1.** Hai điểm A, B nằm cùng bên so với đường thẳng d

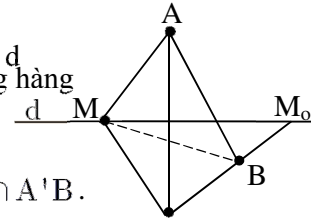
$$|MA - MB| \leq AB \Leftrightarrow |MA - MB|_{\max} = AB \Leftrightarrow \begin{cases} M \equiv M_o = d \cap AB \\ M, A, B \end{cases}$$



+ **Trường hợp 2.** Hai điểm A, B nằm hai bên so với đường thẳng d
 Dựng A' là điểm đối xứng của điểm A qua d, khi đó:

$$|MA - MB| \leq AB \Leftrightarrow |MA' - MB| \leq AB.$$

$$\Rightarrow |MA - MB|_{\max} = |MA' - MB|_{\max} = AB \Leftrightarrow M \equiv M_o = d \cap A'B.$$

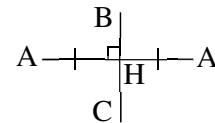


c/ **Dạng toán 3.** Tìm hình chiếu vuông góc của $A(x_A; y_A)$ lên BC với $B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$.

Gọi $H(x_H; y_H)$ là hình chiếu của A lên đường thẳng BC.

$$\text{Tọa độ điểm H thỏa hệ phương trình: } \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ B, H, C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC} \end{cases}$$

Để tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A qua BC $\Leftrightarrow H$ là trung điểm AA'.



d/ **Dạng toán 4.** Phương pháp tọa độ hóa

Phương pháp tọa độ hóa thường được sử dụng phổ biến trong hai loại toán:

- **Loại 1.** Ta thực hiện phép tọa độ hóa các điểm trong hình và đưa bài toán hình học về dạng giải tích.
- **Loại 2.** Lựa chọn các điểm thích hợp để biến đổi biểu thức đại số về dạng độ dài hình học. Phương pháp này tỏ ra rất hiệu quả đối với bài toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các biểu thức đại số.

Lưu ý

- $|\vec{u}| - |\vec{v}| \leq |\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}| \Rightarrow$ Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ cùng phương và hướng.
- $|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}|$. Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ cùng phương.
- $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ cùng phương và hướng.

e/ **Dạng toán 5.** Tìm quỹ tích một điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

— **Bước 1.** Gọi $M(x_o; y_o)$ là điểm cần tìm quỹ tích và dựa vào giả thiết và ràng buộc điều

kiện để tìm quan hệ: $M: \begin{cases} x_o = f_1(m) \\ y_o = f_2(m) \end{cases} \quad (I) \text{ với } \forall m \in D: \text{ tập chứa điều kiện } \exists m.$

— **Bước 2.** Khử m ở hệ phương trình (I) ta được $F(x_o; y_o) = 0 \quad (1)$. Giới hạn khoảng chạy của x_o hoặc y_o ở hệ (I) và điều kiện $m \in D \quad (2)$.

— **Bước 3.** Kết luận: từ (1), (2) ta có quỹ tích của điểm M là

+ Cả đường cong (S): $F(x; y) = 0$ nếu (2) là tập $\mathbb{R}$.

+ Một phần đường cong (S): $F(x; y) = 0$ trên D nếu (2) là $D \subset \mathbb{R}$.

🐞 **Lưu ý:** $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$ hay $\frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ x_C - x_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_B - y_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \right\|.$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho ΔABC biết $A(1;0)$, $B(-3;-5)$, $C(0;3)$.

1/ Xác định tọa độ điểm E sao cho $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{BC}$.

2/ Xác định tọa độ điểm F sao cho $AF = CF = 5$.

3/ Tìm tập hợp điểm M sao cho $\left| 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) - 3\overrightarrow{MC} \right| = \left| \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right|$.

ĐS: 1/ $E(7;16)$. 2/ $F(-4;0) \vee F(5;3)$. 3/ là đường tròn $\begin{cases} \text{Tâm } I(-4; -19) \\ \text{Bk: } R = \sqrt{73} \end{cases}$.

Bài 2. Trong mặt phẳng vuông góc Oxy, cho ΔABC có $A(-4;1)$, $B(2;4)$, $C(2;-2)$.

1/ Chứng minh rằng ba điểm A, B, C không thẳng hàng (tạo thành một tam giác).

2/ Tính $\cos \widehat{CBA}$.

3/ Tính chu vi và diện tích ΔABC . Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

4/ Tìm điểm M sao cho: $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

ĐS: 1/ $\cos \widehat{CBA} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. 2/ Chu vi $= 6(\sqrt{5} + 1)$; $S_{\Delta ABC} = \frac{6}{\sqrt{5} + 1}$. 3/ $M(-1;4)$.

Bài 3. Cao đẳng Cơ Khí Luyện Kim năm 2004 (câu III – 2)

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho ba điểm $A(-2;-3)$, $B(2;1)$, $C(2;-1)$. Tìm tọa độ đỉnh D để tứ giác ABCD là hình bình hành.

ĐS: $D(-2;-5)$.

Bài 4. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc Oxy, cho $A(4;3)$, $B(2;7)$, $C(-3;-8)$.

- 1/ Tìm điểm D sao cho ABCD là hình bình hành.
- 2/ Tìm giao điểm I của hai đường thẳng OA và BC.
- 3/ Tìm tọa độ trọng tâm, trực tâm ΔABC .
- 4/ Tìm tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

ĐS: 1/ $D(-1; -12)$. 2/ $I\left(-\frac{4}{9}; -\frac{1}{3}\right)$. 3/ $G\left(1; \frac{2}{3}\right)$, $H(13; 0)$. 4/ $J(-5; 1)$.

Bài 5. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc Oxy, cho $A(1; 5)$, $B(-4; -5)$, $C(4; -1)$. Tìm tâm đường tròn nội tiếp ΔABC .

ĐS: $I(1; 0)$.

Bài 6. Đại học Giao Thông Vận Tải Tp. Hồ Chí Minh – Đề 2 năm 1997

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, tìm tọa độ trực tâm của ΔABC , biết tọa độ các đỉnh $A(-1; 2)$, $B(5; 7)$, $C(4; -3)$.

ĐS: $H\left(-\frac{1}{11}; \frac{21}{11}\right)$.

Bài 7. Đại học Sư Phạm Kỹ Thuật Tp. Hồ Chí Minh năm 2001

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc Oxy, cho $A(-1; 2)$, $B(2; 0)$, $C(-3; 1)$.

1/ Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

2/ Tìm điểm M trên đường thẳng BC sao cho diện tích ΔABM bằng $\frac{1}{3}$ diện tích ΔABC .

ĐS: 1/ $I\left(-\frac{11}{14}; -\frac{13}{4}\right)$. 2/ $M\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) \vee M\left(\frac{11}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

Bài 8. Đại học Bách Khoa Hà Nội năm 2001

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho ΔABC có ba đỉnh thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{1}{x}$. Chứng minh trực tâm H của ΔABC cũng thuộc (C) .

HD: Gọi $A\left(a; \frac{1}{a}\right)$, $B\left(b; \frac{1}{b}\right)$, $C\left(c; \frac{1}{c}\right) \in (C)$. Từ $\begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} \Rightarrow H\left(-\frac{1}{abc}; -abc\right) \Rightarrow H \in (C)$.

Bài 9. Cao đẳng Sư Phạm Kom Tum năm 2004

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hai điểm $A(-1; 2)$, $B(3; 4)$. Tìm điểm C trên đường thẳng $d: x - 2y + 1 = 0$ sao cho ΔABC vuông tại C.

ĐS: $C(3; 2) \vee C\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$.

Bài 10. Cao đẳng Công Nghiệp IV năm 2004

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho ΔABC vuông tại A với

$B(-3; 0)$, $C(7; 0)$, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác là $r = 2\sqrt{10} - 5$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC , biết điểm I có tung độ dương.

ĐS: $I(2 + \sqrt{10}; 2\sqrt{20} - 5) \vee I(2 - \sqrt{10}; 2\sqrt{10} - 5)$.

Bài 11. Đại học Mỏ – Địa Chất năm 2001 (Câu IV – 2)

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ trực chuẩn Oxy, cho $A(10; 5)$, $B(15; -5)$, $C(-20; 0)$ là ba đỉnh của một hình thang cân ABCD. Tìm tọa độ điểm D, biết rằng $AB \parallel CD$.

ĐS: $D(-7; -26)$.

Bài 12. Đại học Luật Hà Nội năm 1998 (Câu IV – 2)

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, tìm điểm C thuộc đường thẳng $x - y + 2 = 0$ sao cho ΔABC vuông tại C với $A(1; -2)$, $B(-3; 3)$.

$$\text{ĐS: } C(1; 3) \vee C\left(-\frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right).$$

Bài 13. Đại học Nông Nghiệp I đề 1 năm 1995

Cho điểm $A(1; 1)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy. Hãy tìm điểm B trên đường thẳng $y = 3$ và điểm C trên trục hoành sao cho ΔABC là tam giác đều.

$$\text{ĐS: } B\left(1 - \frac{4}{\sqrt{3}}; 3\right), C\left(1 - \frac{5}{\sqrt{3}}\right) \vee B\left(1 + \frac{4}{\sqrt{3}}; 3\right), C\left(1 + \frac{5}{\sqrt{3}}\right).$$

Bài 14. Đại học Tổng Hợp năm 1976

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho $A(-1; 0)$, $B(1; 0)$ và lấy điểm di động trên đường thẳng $d: y = 1$. Hãy tính $\frac{MA^2}{MB^2}$ và tìm M sao cho $\frac{MA}{MB} = k$, ($k > 0$).

$$\text{ĐS: } \frac{MA^2}{MB^2} = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 2} \text{ và } M_{1,2}\left(\frac{k^2 + 1 \pm \sqrt{-k^4 + 6k^2 - 1}}{k^2 - 1}; 1\right) \in d.$$

Bài 15. Đại học Ngoại Thương năm 1993

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho hai điểm $A(3 \cos t; 0)$ và $B(0; 2 \sin t)$. Tìm tập hợp các điểm $M(x_0; y_0)$ sao cho: $2\overrightarrow{AM} + 5\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ khi t thay đổi.

$$\text{ĐS: Tập hợp điểm M là elip (E): } \frac{x^2}{4} + \frac{9y^2}{100} = 1.$$

Bài 16. Đại học Mỏ Địa Chất năm 1999

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho ΔABC và điểm M bất kỳ.

1/ Chứng minh rằng: $\vec{u} = 3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

2/ Tìm tập hợp điểm M trên mặt phẳng sao cho: $|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$.

$$\text{ĐS: } 1/ \vec{u} = 2\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{AB}. \quad 2/ \text{ Đường tròn tâm (C) tâm I, bán kính } R = \frac{CB}{3}.$$

Bài 17. Học Viện Ngân Hàng Tp. Hồ Chí Minh năm 2000

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho ΔABC có đỉnh $C(-2; -4)$ và trọng tâm $G(0; 4)$.

1/ Giả sử $M(2; 0)$ là trung điểm của cạnh BC. Xác định tọa độ các đỉnh A, B.

2/ Giả sử M di động trên đường thẳng $d: x + y + 2 = 0$. Hãy tìm quỹ tích điểm B. Xác định M để độ dài cạnh AB là ngắn nhất.

$$\text{ĐS: } 1/ B(6; 4), A(-4; 12). \quad 2/ \text{ Quỹ tích là } d: x + y - 2 = 0. \quad 2/ M\left(-\frac{1}{4}; \frac{9}{4}\right).$$

Bài 18. Đại học Ngoại Thương năm 2000

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = mx + 1$. Chứng minh rằng khi m thay đổi, đường thẳng luôn luôn cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt A và B. Hãy tìm quỹ tích tâm vòng tròn ngoại tiếp ΔOAB khi m thay đổi với O là gốc tọa độ.

$$\text{ĐS: } A(x_1; mx_1 + 1), B(x_2; mx_2 + 1) \text{ và quỹ tích tâm là Parabol } (P'): y = 2x^2 + 1.$$

Bài 19. Đại Học Nông Nghiệp năm 1997

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm $A(1;1)$, $B(3;3)$, $C(2;0)$.

1/ Tính diện tích ΔABC .

2/ Hãy tìm tất cả các điểm M trên trục hoành Ox sao cho góc $\widehat{AMB}$ nhỏ nhất.

ĐS: $S_{\Delta ABC} = 2$ (đ.v.d.t) và $M \equiv O$.

Bài 20. Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm $A(1;3)$, $B(3;1)$, $C(2;4)$.

a/ Tính diện tích ΔABC .

b/ Tìm tất cả các điểm $M \in Ox$ sao cho góc $\widehat{AMB}$ nhỏ nhất.

Bài 21. Trích bộ đề tuyển sinh Đại học – Cao đẳng – Đề 97 – câu Va

Tìm trên trục hoành Ox điểm P sao cho tổng các khoảng cách từ P đến các điểm A và B là nhỏ nhất (hay $(PA + PB)_{\min}$). Biết rằng:

1/ $A(1;1)$, $B(2;-4)$.

2/ $A(1;2)$, $B(3;4)$.

ĐS: 1/ $P \equiv P_0\left(\frac{6}{5}; 0\right)$. 2/ $P \equiv P_0\left(\frac{5}{3}; 0\right)$.

Bài 22. Tìm trên đường thẳng $d: x + y = 0$ điểm M sao cho tổng các khoảng cách từ M đến các điểm A và B là nhỏ nhất trong các trường hợp sau

1/ $A(1;1)$, $B(-2;-4)$.

2/ $A(1;1)$, $B(3;-2)$.

Bài 23. Cho điểm $M(4;1)$ và hai điểm $A(a;0)$, $B(0;b)$ với $a, b > 0$ sao cho A, B, M thẳng hàng. Xác định tọa độ điểm A, B sao cho

1/ Diện tích tam giác OAB là nhỏ nhất ($S_{\Delta OAB \min}$).

2/ $OA + OB$ nhỏ nhất.

3/ $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

ĐS: 1/ $A(8;0)$, $B(0;2)$. 2/ $A(6;0)$, $B(0;3)$. 3/ $A\left(\frac{17}{4}; 0\right)$, $B(0;17)$.

Bài 24. Cho điểm $M(2;1)$ và hai điểm $A(a;0)$, $B(0;b)$ với $a, b > 0$ sao cho A, B, M thẳng hàng. Xác định tọa độ điểm A, B sao cho:

1/ Diện tích tam giác OAB là nhỏ nhất ($S_{\Delta OAB \min}$).

2/ $OA + OB$ nhỏ nhất.

3/ $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

ĐS: 1/ $A(4;0)$, $B(0;2)$.

Bài 25. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho $A(1;-2)$, $B(3;4)$.

1/ Tìm điểm M trên trục hoành sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai điểm A, B là ngắn nhất.

2/ Tìm điểm N trên trục hoành sao cho $|NA - NB|$ là dài nhất.

3/ Tìm điểm I trên trục tung sao cho $(IA + IB)_{\min}$.

4/ Tìm điểm J trên trục tung sao cho $|\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB}|$ ngắn nhất.

ĐS: 1/ $M\left(\frac{5}{3}; 0\right)$.

2/ $|\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NB}|_{\max} = 2\sqrt{2}$ khi $N(-1; 0)$.

3/ $(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})_{\min} = 2\sqrt{13}$ khi $I\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

4/ $|\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB}|_{\min} = 4$ khi $J(0; 1)$.

Bài 26. Cho ba điểm $A(0; 6)$, $B(2; 5)$, $M(2t - 2; t)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho

1/ $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})_{\min}$.

2/ $|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|_{\max}$.

Bài 27. Cho ba điểm $A(1; 2)$, $B(2; 5)$, $M(2t + 2; t)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho

1/ $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})_{\min}$.

2/ $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|_{\max}$.

3/ $|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|_{\max}$.

4/ $|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|_{\min}$.

Bài 28. Học Viện Kỹ Thuật Mật Mã năm 2000

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, tìm quỹ tích điểm M sao cho khoảng cách từ M đến $A(1; 2)$ và khoảng cách từ M đến Ox luôn bằng nhau.

Bài 29. Cao đẳng khối M, T năm 2003

Trên mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(1; 2)$, $B(3; 4)$. Tìm trên tia Ox một điểm P sao cho $AP + PB$ là nhỏ nhất.

ĐS: $P\left(\frac{5}{3}; 0\right)$.

Bài 30. Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh năm 1997 (câu IVa - 1)

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc Oxy, cho $A(0; 2)$, Parabol $(P): y = x^2$. Xác định điểm M trên (P) sao cho $AM_{\min}$.

ĐS: $M_{1,2}\left(\pm \frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

B – PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

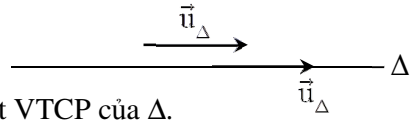


① Vector chỉ phương của đường thẳng

— Vector $\vec{u} \neq \vec{0}$ được gọi là **vector chỉ phương** (VTCP) của đường thẳng Δ nếu giá của nó song song hoặc trùng với Δ . Kí hiệu VTCP $\vec{u}_\Delta$.

— Nhận xét

- + Nếu $\vec{u}$ là một VTCP của Δ thì $k\vec{u}$ ($k \neq 0$) cũng là một VTCP của Δ .
- + Một đường thẳng hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm và một VTCP.

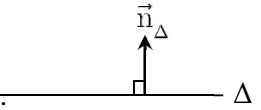


② Vector pháp tuyến của đường thẳng

— Vector $\vec{n} \neq \vec{0}$ được gọi là **vector pháp tuyến** (VTPT) của đường thẳng Δ nếu giá của nó vuông góc với Δ . Kí hiệu VTPT $\vec{n}_\Delta$.

— Nhận xét

- + Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của Δ thì $k\vec{n}$ ($k \neq 0$) cũng là một VTPT của Δ .
- + Một đường thẳng hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm và một VTPT.
- + Nếu $\vec{u}$ là một VTCP và $\vec{n}$ là một VTPT của Δ thì $\vec{u} \perp \vec{n}$.



③ Phương trình tham số của đường thẳng

— Cho đường thẳng Δ đi qua $M_o(x_o; y_o)$ và có VTCP $\vec{u} = (u_1; u_2)$. Phương trình tham số của

$$\Delta: \begin{cases} x = x_o + tu_1 \\ y = y_o + tu_2 \end{cases} \quad (t \text{ là tham số}) \text{ và } t \in \mathbb{R}.$$

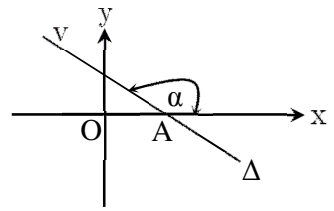
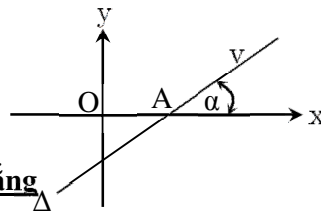
— Nhận xét

$$+ M(x; y) \in \Delta \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_o + tu_1 \\ y = y_o + tu_2 \end{cases} \text{ hay } M(x_o + tu_1; y_o + tu_2) \in \Delta.$$

+ Gọi k là hệ số góc của Δ thì

$$\bullet k = \tan \alpha \text{ với } \begin{cases} \alpha = \widehat{xAv} \\ \alpha \neq 90^\circ \end{cases}.$$

$$\bullet k = \frac{u_2}{u_1} \text{ với } u_1 \neq 0.$$



④ Phương trình chính tắc của đường thẳng

— Cho đường thẳng Δ đi qua $M_o(x_o; y_o)$ và có VTCP $\vec{u} = (u_1; u_2)$. Phương trình chính tắc của

$$\Delta: \frac{x - x_o}{u_1} = \frac{y - y_o}{u_2} \quad (u_1 \neq 0, u_2 \neq 0).$$

— Trong trường hợp $u_1 = 0$ hoặc $u_2 = 0$ thì đường thẳng không có phương trình chính tắc.

⑤ Phương trình tổng quát của đường thẳng

- Phương trình: $ax + by + c = 0$ với $a^2 + b^2 \neq 0$ (a, b không đồng thời $= 0$) được gọi là **phương trình tổng quát** của đường thẳng.
- Nhận xét

$$+ \text{ Nếu } \Delta \text{ có phương trình: } ax + by + c = 0 \text{ thì } \Delta \text{ có } \begin{cases} \text{VTPT } \vec{n}_{\Delta} = (a; b) \\ \text{VTCP } \vec{u}_{\Delta} = (-b; a) \\ \text{VTCP } \vec{u}_{\Delta} = (b; -a) \end{cases}$$

- + Nếu Δ đi qua $M_0(x_0; y_0)$ và có VTPT $\vec{n}_{\Delta} = (a; b)$ thì phương trình của Δ là

$$\Delta: a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

- + Đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(a; 0), B(0; b)$ ($a, b \neq 0$). Phương trình của

$$\Delta: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \text{ Được gọi là phương trình đường thẳng theo đoạn chắn.}$$

- + Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và có hệ số góc k . Phương trình của

$$\Delta: y = k(x - x_0) + y_0. \text{ Được gọi là phương trình đường thẳng theo hệ số góc } k.$$

- + Một số trường hợp đặt biệt:

Các hệ số	Phương trình đường thẳng Δ	Tính chất đường thẳng Δ
$c = 0$	$ax + by = 0$	Δ đi qua gốc toạ độ O
$a = 0$	$by + c = 0$	$\Delta // Ox$ hoặc $\Delta \equiv Ox$
$b = 0$	$ax + c = 0$	$\Delta // Oy$ hoặc $\Delta \equiv Oy$

⑥ Vị trí tương đối của hai đường thẳng

- Cho hai đường thẳng $\Delta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $\Delta_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

- Toạ độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2 là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad (I)$$

$$\text{Đặt } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1, \quad D_x = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = b_1c_2 - b_2c_1, \quad D_y = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = c_1a_2 - c_2a_1$$

$$+ \Delta_1 \text{ cắt } \Delta_2 \Leftrightarrow \text{hệ (I) có một nghiệm} \Leftrightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}.$$

$$+ \Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \text{hệ (I) vô nghiệm} \Leftrightarrow D = 0 \text{ và } (D_x \neq 0 \text{ hay } D_y \neq 0) \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}.$$

$$+ \Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \text{hệ (I) vô số nghiệm} \Leftrightarrow D = D_x = D_y = 0 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

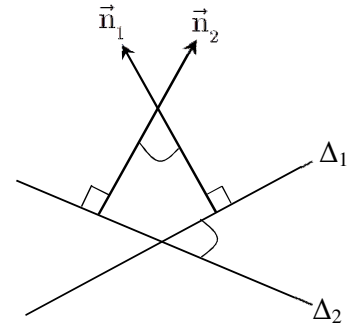
✎ **Lưu ý:** Trong các biểu thức tỉ số: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}; \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}; \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ thì $a_2, b_2, c_2 \neq 0$.

⑦ Góc giữa hai đường thẳng

— Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ có VTPT $\vec{n}_1 = (a_1; b_1)$ và đường thẳng $\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ có VTPT $\vec{n}_2 = (a_2; b_2)$.

Lúc đó: $(\Delta_1, \Delta_2) = \begin{cases} (\vec{n}_1, \vec{n}_2) & \text{khi } (\vec{n}_1, \vec{n}_2) \leq 90^\circ \\ 180^\circ - (\vec{n}_1, \vec{n}_2) & \text{khi } (\vec{n}_1, \vec{n}_2) > 90^\circ \end{cases}$ và

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|a_1b_1 + a_2b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$



— Lưu ý

+ Nếu $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

+ Nếu $\begin{cases} \Delta_1 : y = k_1x + m_1 \\ \Delta_2 : y = k_2x + m_2 \end{cases}$ thì $\begin{cases} \Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2 \\ \Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1 \end{cases}$ và $\tan(\Delta_1, \Delta_2) = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2} \right|$

⑧ Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

— Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng:

Cho đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ và $M(x_o; y_o) \Rightarrow d(M_o, \Delta) = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

— Vị trí tương đối của hai điểm đối với một đường thẳng:

Cho đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ và hai điểm $M(x_M; y_M), N(x_N; y_N) \notin \Delta$.

+ M, N nằm cùng phía đối với $\Delta \Leftrightarrow (ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) > 0$.

+ M, N nằm khác phía đối với $\Delta \Leftrightarrow (ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) < 0$.

— Phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng:

Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ cắt nhau.

Phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là:

$$d : \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Ta có thể phân biệt đường phân giác trong hoặc ngoài dựa vào dấu của tích $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2$ như sau:

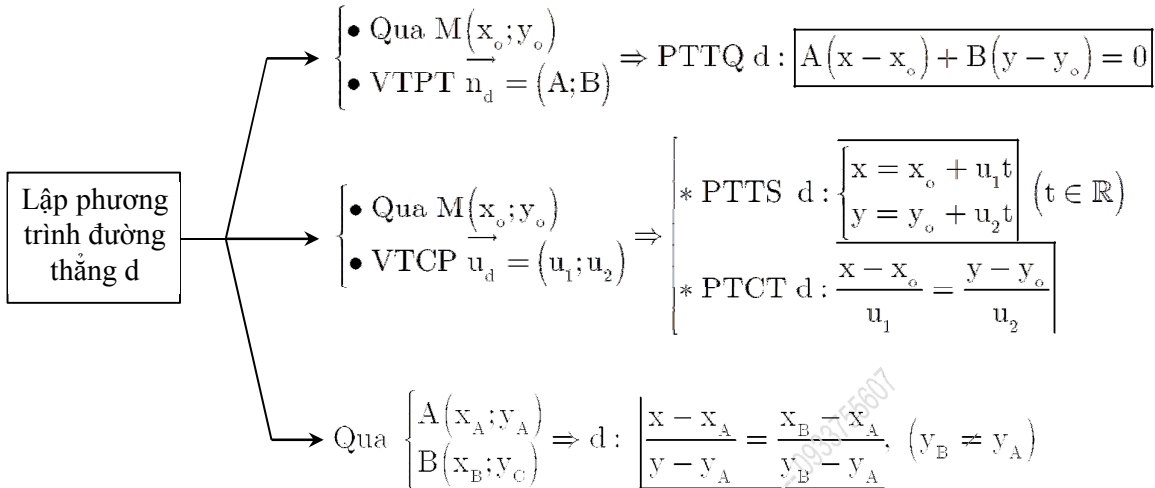
Dấu của tích $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2$	Phương trình góc nhọn	Phương trình góc tù
—	$t_1 = t_2$	$t_1 = -t_2$
+	$t_1 = -t_2$	$t_1 = t_2$

Trong đó: $t_1 = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}; t_2 = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$.

Dạng toán 1. Lập phương trình đường thẳng và một số bài toán liên quan



① Lập phương trình đường thẳng



✎ Một số lưu ý:

- Đường thẳng Δ qua điểm .
- Đường thẳng Δ qua và có hệ số góc k .
- Đường thẳng có phương trình: — .
- Đường thẳng có phương trình: — .
- Trong nhiều trường hợp đặc thù, để xác định phương trình đường thẳng chúng ta còn sử dụng:
 - + Phương trình chùm đường thẳng.
 - + Phương trình quỹ tích.
- Ta có thể chuyển đổi giữa các phương trình tham số, chính tắc, tổng quát của 1 đường thẳng.
- Để là một phương trình đường thẳng thì .

② Một số bài toán thường gặp khác

a/ Tìm điểm cố định của họ đường conic (thẳng)

- Bước 1. Gọi .
- Bước 2. Biến đổi về một trong các dạng (biến số là m).
- Bước 3. Tọa độ điểm cố định:

+ Nếu (*) được biến đổi về (1) thì tọa độ thỏa $\Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$.

+ Nếu (*) được biến đổi về (2) thì tọa độ thỏa $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$.

**b/ Cho họ đường thẳng phụ thuộc tham số m có phương trình
đường con cố định luôn tiếp xúc với họ**

. Hãy tìm

Để giải bài toán này, ta có thể sử dụng theo hai phương pháp

☛ **Phương pháp 1.** Thực hiện theo hai bước:

- **Bước 1.** Định dạng cho đồ thị cố định, chẳng hạn như parabol
- **Bước 2.** Sử dụng điều kiện tiếp xúc của hai đồ thị với mọi giá trị của tham số, ta xác định được là đường con cố định tiếp xúc với họ cần tìm.

☛ **Phương pháp 2.** Thực hiện theo hai bước:

- **Bước 1.** Tìm tập hợp các điểm mà họ không đi qua. Tập hợp đó được xác định bởi bất phương trình có dạng
- **Bước 2.** Ta đi chứng minh họ luôn tiếp xúc với đường con có phương trình

c/ Tìm điểm M' đối xứng với điểm M qua đường thẳng

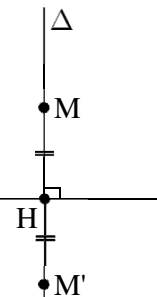
Để giải bài toán này, ta có thể sử dụng theo hai phương pháp

☛ **Phương pháp 1**

- **Bước 1.** Viết phương trình đường thẳng Δ qua M và vuông góc với d .
- **Bước 2.** Xác định (H là hình chiếu của M trên d).
- **Bước 3.** Xác định sao cho H là trung điểm của

☛ **Phương pháp 2**

- **Bước 1.** Gọi H là trung điểm của $d : Ax + By + C = 0$
- **Bước 2.** M' đối xứng của M qua (sử dụng tọa độ).



d/ Lập phương trình đường thẳng d' đối xứng với đường thẳng d qua đường thẳng Δ

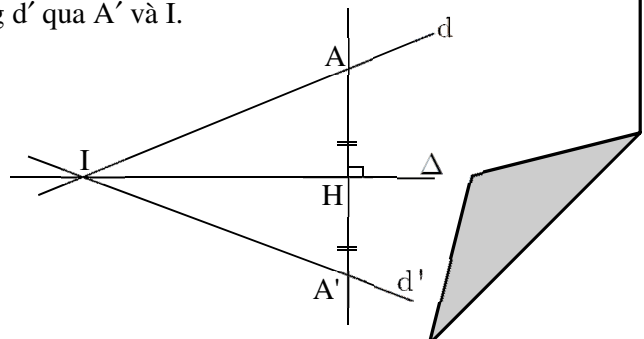
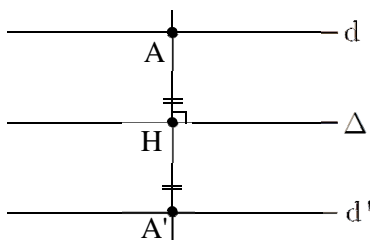
Để giải bài toán này, trước tiên ta nên xem xét chúng cắt nhau hay song song.

☛ **Nếu $d \parallel \Delta$**

- **Bước 1.** Lấy $A \in d$. Xác định A' đối xứng với A qua Δ .
- **Bước 2.** Viết phương trình đường thẳng d' qua A' và song song với d .

☛ **Nếu $d \cap \Delta = I$**

- **Bước 1.** Lấy $A \in d$ ($A \neq I$). Xác định A' đối xứng với A qua Δ .
- **Bước 2.** Viết phương trình đường thẳng d' qua A' và I .



e/ Lập phương trình đường thẳng d' đối xứng với đường thẳng d qua điểm I

- **Bước 1.** Lấy $A \in d$. Xác định A' đối xứng với A qua I .
- **Bước 2.** Viết phương trình đường thẳng d' qua A' và song song với d .

BÀI TẬP ỨNG DỤNG

Bài 31. Lập phương trình tham số, phương trình chính tắc (nếu có) và phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm A và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$:

- | | |
|--|----------------------------------|
| 1/ $A \equiv O(0;0), \vec{u} = (1;-3)$. | 2/ $A(-2;3), \vec{u} = (5;-1)$. |
| 3/ $A(3;-1), \vec{u} = (-2;-5)$. | 4/ $A(2;0), \vec{u} = (3;4)$. |
| 5/ $A(-1;2), \vec{u} = (-4;6)$. | 6/ $A(1;1), \vec{u} = (1;5)$. |
| 7/ $A(2;-3), \vec{u} = (4;-1)$. | 8/ $A(-3;5), \vec{u} = (0;-2)$. |
| 9/ $A(7;-3), \vec{u} = (0;3)$. | 10/ $A(1;2), \vec{u} = (5;0)$. |

Bài 32. Lập phương trình tham số, phương trình chính tắc (nếu có) và phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm A và có vectơ chỉ phương $\vec{n}$:

- | | |
|----------------------------------|--|
| 1/ $A(0;1), \vec{n} = (1;2)$. | 2/ $A(-2;3), \vec{n} = (5;-1)$. |
| 3/ $A(3;4), \vec{n} = (4;-3)$. | 4/ $A(-1;2), \vec{n} = (-2;3)$. |
| 5/ $A(1;3), \vec{n} = (3;-4)$. | 6/ $A(3;-1), \vec{n} = (-2;-5)$. |
| 7/ $A(2;0), \vec{n} = (-1;-1)$. | 8/ $A(1;2), \vec{n} = (5;0)$. |
| 9/ $A(7;-3), \vec{n} = (0;3)$. | 10/ $A \equiv O(0;0), \vec{n} = (2;5)$. |

Bài 33. Cho đường thẳng có phương trình $d: 2x - 3y + 1 = 0$.

- 1/ Hãy tìm vectơ pháp tuyến và vectơ chỉ phương của đường thẳng d .
- 2/ Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng d .

Bài 34. Lập phương trình tham số, phương trình chính tắc (nếu có) và phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm A và có hệ số góc k

- | | |
|-------------------------------|-------------------------|
| 1/ $A(2;4), k = 2$. | 2/ $A(-3;1), k = -2$. |
| 3/ $A(-5;-8), k = -3$. | 4/ $A(-3;4), k = 3$. |
| 5/ $A(5;2), k = 1$. | 6/ $A(-3;-5), k = -1$. |
| 7/ $A(2;-4), k = 0$. | 8/ $A(-4;0), k = -9$. |
| 9/ $A \equiv O(0;0), k = 4$. | 10/ $A(0;30), k = -7$. |

Bài 35. Lập phương trình tham số, phương trình chính tắc (nếu có) và phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua hai điểm A và B

1/ $A(2; 1), B(-4; 5)$.

2/ $A(-2; 4), B(1; 0)$.

3/ $A(5; 3), B(-2; -7)$.

4/ $A(3; 5), B(3; 8)$.

5/ $A(3; 5), B(6; 2)$.

6/ $A(4; 0), B(3; 0)$.

7/ $A(0; 3), B(0; -2)$.

8/ $A(3; 0), B(0; 5)$.

9/ $A(0; 4), B(-3; 0)$.

10/ $A(-2; 0), B(0; -6)$.

Bài 36. Lập phương trình tham số, phương trình chính tắc (nếu có) và phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua điểm A và song song với đường thẳng Δ

1/ $A(2; 3), \Delta: 4x - 10y + 1 = 0$.

2/ $A(5; 7), \Delta: x - 2y + 6 = 0$.

3/ $A(-1; 2), \Delta: 5x + 1 = 0$.

4/ $A(-1; -7), \Delta: y - 2 = 0$.

5/ $A(2; 3), \Delta: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + 4t \end{cases}$.

6/ $A(-5; 3), \Delta: \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = -3 + 5t \end{cases}$.

7/ $A(0; 3), \Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y+4}{-2}$.

8/ $A(5; 2), \Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{-2}$.

9/ $A(-1; 2), \Delta \equiv O_x$.

10/ $A(4; 3), \Delta \equiv O_y$.

Bài 37. Lập phương trình tham số, phương trình chính tắc (nếu có) và phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng Δ

1/ $A(4; -1), \Delta: 3x - 5y + 2013 = 0$.

2/ $A(2; -3), \Delta: x + 3y - 7 = 0$.

3/ $A(4; 5), \Delta: -x + 5y - 4 = 0$.

4/ $A(5; 5), \Delta \equiv O_x$.

5/ $A(-4; -1), \Delta \equiv O_y$.

6/ $A(-7; 2012), \Delta: 2012x - 3y + 11 = 0$.

7/ $A(1; -4), \Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2}$.

8/ $A(4; -6), \Delta: \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-10}$.

9/ $A(1; 0), \Delta: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 4t \end{cases}$.

10/ $A(0; 7), \Delta: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \end{cases}$.

Bài 38. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarters vuông góc Oxy, cho ΔABC có các đỉnh tương ứng sau. Hãy lập:

a/ Phương trình ba cạnh ΔABC .

b/ Phương trình các đường cao. Từ đó suy ra trục tâm của ΔABC .

c/ Phương trình các đường trung tuyến. Suy ra trọng tâm của ΔABC .

d/ Phương trình các đường trung bình trong ΔABC .

e/ Phương trình các đường trung trực. Suy ra bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC .

1/ $A(1; -1), B(-2; 1), C(3; 5)$.

2/ $A(2; 0), B(2; -3), C(0; -1)$.

3/ $A(-4; 5), B(-1; 1), C(6; -1)$.

4/ $A(1; 4), B(3; -1), C(6; 2)$.

5/ $A(-1; -1), B(1; 9), C(9; 1)$.

6/ $A(4; -1), B(-3; 2), C(1; 6)$.

Bài 39. Cho ΔABC , biết phương trình ba cạnh của tam giác. Viết phương trình các đường cao AA' , BB' , CC' của tam giác, với

1/ $AB: 2x - 3y - 1 = 0, BC: x + 3y + 7 = 0, CA: 5x - 2y + 1 = 0$.

$$2/ \quad AB : 2x + y + 2 = 0, \quad BC : 4x + 5y - 8 = 0, \quad CA : 4x - y - 8 = 0.$$

Bài 40. Viết phương trình các cạnh và các trung trực của tam giác ABC biết trung điểm của các cạnh BC, CA, AB lần lượt là các điểm M, N, P với

$$1/ \quad M(1;1), N(5;7), P(-1;4). \quad 2/ \quad M(2;1), N(5;3), P(3;-4).$$

$$3/ \quad M\left(2; -\frac{3}{2}\right), N\left(1; -\frac{1}{2}\right), P(1;-2). \quad 4/ \quad M\left(\frac{3}{2}; 2\right), N\left(\frac{7}{2}; 3\right), P(1;4).$$

$$5/ \quad M\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right), N\left(\frac{5}{2}; -\frac{7}{2}\right), P(2;-4) \quad 6/ \quad M(-1;-1), N(1;9), P(9;1).$$

Bài 41. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M và chẵn trên hai trục tọa độ 2 đoạn bằng nhau (tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân) với

$$1/ \quad M(-4;10). \quad 2/ \quad M(2;1).$$

$$3/ \quad M(-3;-2). \quad 4/ \quad M(2;-1).$$

Bài 42. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M và cùng với hai trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích S, với

$$1/ \quad M(-4;10), S = 2. \quad 2/ \quad M(2;1), S = 4.$$

$$3/ \quad M(-3;-2), S = 3. \quad 4/ \quad M(2;-1), S = 4.$$

Bài 43. Tìm hình chiếu của điểm M lên đường thẳng d và điểm M' đối xứng với M qua đường thẳng d với

$$1/ \quad M(2;1), d : 2x + y - 3 = 0. \quad 2/ \quad M(3;-1), d : 2x + 5y - 30 = 0.$$

$$3/ \quad M(4;1), d : x - 2y + 4 = 0. \quad 4/ \quad M(-5;13), d : 2x - 3y - 3 = 0.$$

Bài 44. Lập phương trình đường thẳng d' đối xứng với đường thẳng d qua đường thẳng Δ , với

$$1/ \quad d : 2x - y + 1 = 0, \Delta : 3x - 4y + 2 = 0. \quad 2/ \quad d : x - 2y + 4 = 0, \Delta : 2x + y - 2 = 0.$$

$$3/ \quad d : x + y - 1 = 0, \Delta : x - 3y + 3 = 0. \quad 4/ \quad d : 2x - 3y + 1 = 0, \Delta : 2x - 3y - 1 = 0.$$

Bài 45. Cho phương trình: $mx + (m-2)y - m = 0 \quad (1).$

1/ Chứng minh: $\forall m$ phương trình (1) là phương trình của một đường thẳng gọi là họ (d_m) .

2/ Tìm điểm cố định mà họ (d_m) luôn đi qua.

ĐS: $2/ \quad M(1;0).$

Bài 46. Cho họ đường thẳng có phương trình: $(d_m) : (2m+1)x - y - m^2 = 0$. Chứng minh rằng họ đường thẳng (d_m) luôn tiếp xúc với một parabol cố định.

ĐS: Tiếp xúc với parabol $(P) : y = x^2 + x$.

Bài 47. Cho hai điểm $A(0;2), B(m;-2).$

1/ Hãy viết phương trình đường trung trực d của AB.

2/ Chứng minh rằng d luôn tiếp xúc với một đường cong cố định khi m thay đổi.

ĐS: Tiếp xúc với parabol $(P) : x = \frac{1}{4}y^2$.

Dạng 2. Các bài toán dựng tam giác – Sự tương giao – Khoảng cách – Góc

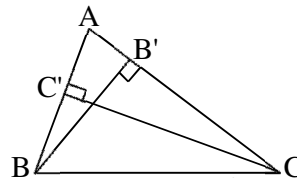


① Các bài toán dựng tam giác

Đó là các bài toán xác định tọa độ các đỉnh hoặc phương trình các cạnh của một tam giác khi biết một số yếu tố của tam giác đó. Để giải loại bài toán này ta thường sử dụng đến các cách dựng tam giác. Ta thường gặp một số loại cơ bản sau đây

a/ **Loại 1.** Dựng ΔABC , khi biết các đường thẳng chứa cạnh BC và hai đường cao BB' , CC' .

- Xác định tọa độ các điểm
- Dựng AB qua B và vuông góc với CC' .
- Dựng AC qua C và vuông góc với BB' .
- Xác định tọa độ

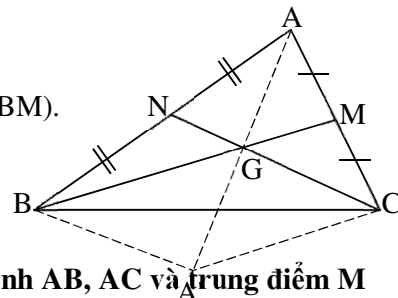


b/ **Loại 2.** Dựng ΔABC , khi biết đỉnh A và hai đường thẳng chứa hai đường cao BB' , CC' .

- Dựng AB qua A và vuông góc với CC' .
- Dựng AC qua A và vuông góc với BB' .
- Xác định

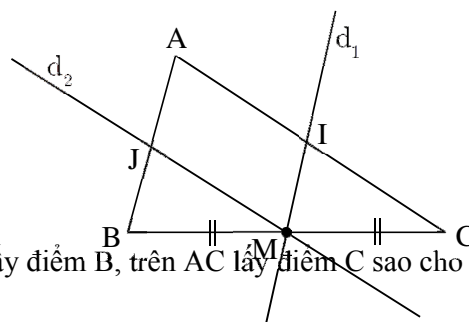
c/ **Loại 3.** Dựng ΔABC , khi biết đỉnh A , 2 đường thẳng chứa 2 đường trung tuyến BM , CN .

- Xác định trọng tâm
- Xác định A' đối xứng với A qua G ($BA' \parallel CN$, $CA' \parallel BM$).
- Dựng d_B qua A' và song song với CN .
- Dựng d_C qua A' và song song với BM .
- Xác định



d/ **Loại 4.** Dựng ΔABC , khi biết hai đường thẳng chứa hai cạnh AB , AC và trung điểm M của cạnh BC

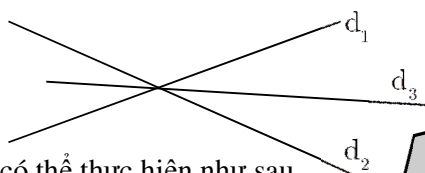
- Xác định
- Dựng d_1 qua M và song song với AB .
- Dựng d_2 qua M và song song với AC .
- Xác định trung điểm I của
- Xác định trung điểm J của
- Xác định B, C sao cho



Ngoài cách giải trên, ta có thể dựng theo: Trên AB lấy điểm B , trên AC lấy điểm C sao cho

② Vị trí tương đối – Khoảng cách – Góc

- Xem lại lý thuyết.
- Để chứng minh ba đường thẳng đồng quy, ta có thể thực hiện như sau
 - + Tìm giao điểm của hai trong ba đường thẳng.
 - + Chứng tỏ đường thẳng thứ ba đi qua giao điểm đó.



BÀI TẬP ÁP DỤNG**CÁC BÀI TOÁN DỰNG TAM GIÁC**

Bài 48. Cho tam giác ABC, biết phương trình một cạnh và hai đường cao. Viết phương trình hai cạnh và đường cao còn lại, với

- 1/ $BC : 4x + y - 12 = 0$, $BB' : 5x - 4y - 15 = 0$, $CC' : 2x + 2y - 9 = 0$.
 2/ $BC : 5x - 3y + 2 = 0$, $BB' : 4x - 3y + 1 = 0$, $CC' : 7x + 2y - 22 = 0$.
 3/ $BC : x - y + 2 = 0$, $BB' : 2x - 7y - 6 = 0$, $CC' : 7x - 2y - 1 = 0$.
 4/ $BC : 5x - 3y + 2 = 0$, $BB' : 2x - y - 1 = 0$, $CC' : x + 3y - 1 = 0$.

Bài 49. Cho tam giác ABC, biết tọa độ một đỉnh và phương trình hai đường cao. Viết phương trình các cạnh của tam giác đó, với

- 1/ $A(3;0)$, $BB' : 2x + 2y - 9 = 0$, $CC' : 3x - 12y - 1 = 0$.
 2/ $A(1;0)$, $BB' : x - 2y + 1 = 0$, $CC' : 3x + y - 1 = 0$.

Bài 50. Cho tam giác ABC, biết tọa độ một đỉnh và phương trình hai đường trung tuyến. Viết phương trình các cạnh của tam giác đó, với

- 1/ $A(1;3)$, $BM : x - 2y + 1 = 0$, $CN : y - 1 = 0$.
 2/ $A(3;9)$, $BM : 3x - 4y + 9 = 0$, $CN : y - 6 = 0$.

Bài 51. Cho tam giác ABC, biết phương trình một cạnh và hai đường trung tuyến. Viết phương trình các cạnh còn lại của tam giác đó, với

- 1/ $AB : x - 2y + 7 = 0$, $AM : x + y - 5 = 0$, $BN : 2x + y - 11 = 0$.
 2/ $AB : x - y + 1 = 0$, $AM : 2x + 3y = 0$, $BN : 2x + 6y + 3 = 0$.

Bài 52. Cho tam giác ABC, biết phương trình hai cạnh và tọa độ trung điểm của cạnh thứ ba. Viết phương trình của cạnh thứ ba, với

- 1/ $AB : 2x + y - 2 = 0$, $AC : x + 3y - 3 = 0$, $M(-1;1)$.
 2/ $AB : 2x - y - 2 = 0$, $AC : x + y + 3 = 0$, $M(3;0)$.
 3/ $AB : x - y + 1 = 0$, $AC : 2x + y - 1 = 0$, $M(2;1)$.
 4/ $AB : x + y - 2 = 0$, $AC : 2x + 6y + 3 = 0$, $M(-1;1)$.

Bài 53. Cho tam giác ABC, biết tọa độ một đỉnh, phương trình một đường cao và một trung tuyến. Viết phương trình các cạnh của tam giác đó, với

- 1/ $A(4;-1)$, $BH : 2x - 3y + 12 = 0$, $BM : 2x + 3y = 0$.
 2/ $A(2;-7)$, $BH : 3x + y + 11 = 0$, $CN : x + 2y + 7 = 0$.
 3/ $A(0;-2)$, $BH : x - 2y + 1 = 0$, $CN : 2x - y + 2 = 0$.
 4/ $A(-1;2)$, $BH : 5x - 2y - 4 = 0$, $CN : 5x + 7y - 20 = 0$.

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Bài 54. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau, nếu chúng cắt nhau thì tìm tọa độ giao điểm của chúng

$$1/ \quad d_1 : 2x + 3y + 1 = 0 \quad \& \quad d_2 : 4x + 5y - 6 = 0.$$

$$2/ \quad d_1 : 4x - y + 2 = 0 \quad \& \quad d_2 : -8x + 2y + 1 = 0.$$

$$3/ \quad d_1 : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -3 + 2t \end{cases} \quad \& \quad d_2 : \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -7 + 3t \end{cases}.$$

$$4/ \quad d_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 2t \end{cases} \quad \& \quad d_2 : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -4 - 6t \end{cases}.$$

$$5/ \quad d_1 : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -1 \end{cases} \quad \& \quad d_2 : x + y - 5 = 0.$$

$$6/ \quad d_1 : x = 2 \quad \& \quad d_2 : x + 2y - 4 = 0.$$

Bài 55. Cho hai đường thẳng d và Δ . Tìm m để hai đường thẳng

a/ Cắt nhau.

b/ Song song.

c/ Trùng nhau.

$$1/ \quad d : mx - 5y + 1 = 0 \quad \& \quad \Delta : 2x + y - 3 = 0.$$

$$2/ \quad d : 2mx + (m - 1)y - 2 = 0 \quad \& \quad \Delta : (m + 2)x + (2m + 1)y - (m + 2) = 0$$

$$3/ \quad d : (m - 2)x + (m - 6)y + m - 1 = 0 \quad \& \quad \Delta : (m - 4)x + (2m - 3)y + m - 5 = 0.$$

$$4/ \quad d : (m + 3)x + 2y + 6 = 0 \quad \& \quad \Delta : mx + y + 2 - m = 0.$$

Bài 56. Tìm m để ba đường thẳng sau đồng qui

$$1/ \quad d_1 : y = 2x - 1 \quad d_2 : 3x + 5y = 8 \quad d_3 : (m + 8)x - 2my = 3m.$$

$$2/ \quad d_1 : y = 2x - m \quad d_2 : y = -x + 2m \quad d_3 : mx - (m - 1)y = 2m - 1.$$

$$3/ \quad d_1 : 5x + 11y = 8 \quad d_2 : 10x - 7y = 74 \quad d_3 : 4mx + (2m - 1)y + m + 2.$$

$$4/ \quad d_1 : 3x - 4y + 15 = 0 \quad d_2 : 5x + 2y - 1 = 0 \quad d_3 : mx - (2m - 1)y + 9m - 13 = 0.$$

Bài 57. Viết phương trình đường thẳng d đi qua giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 và

$$1/ \quad d_1 : 3x - 2y + 10 = 0 \quad d_2 : 4x + 3y - 7 = 0 \quad d \text{ qua } A(2; 1).$$

$$2/ \quad d_1 : 3x - 5y + 2 = 0 \quad d_2 : 5x - 2y + 4 = 0 \quad d \text{ song song } d_3 : 2x - y + 4 = 0.$$

$$3/ \quad d_1 : 3x - 2y + 5 = 0 \quad d_2 : 2x + 4y - 7 = 0 \quad d \text{ vuông } d_3 : 4x - 3y + 5 = 0.$$

Bài 58. Tìm điểm mà các đường thẳng sau luôn đi qua với mọi m

$$1/ \quad (m - 2)x - y + 3 = 0. \quad 2/ \quad mx - y + (2m + 1) = 0.$$

$$3/ \quad mx - y - 2m - 1 = 0. \quad 4/ \quad (m + 2)x - y + 1 = 0.$$

Bài 59. Cho tam giác ABC với $A(0; -1)$, $B(2; -3)$, $C(2; 0)$.

1/ Viết phương trình các đường trung tuyến, phương trình các đường cao, phương trình các đường trung trực của tam giác.

2/ Chứng minh các đường trung tuyến đồng qui, các đường cao đồng qui, các đường trung trực đồng qui.

Bài 60. Hai cạnh của hình bình hành ABCD có phương trình $x - 3y = 0$, $2x + 5y + 6 = 0$, đỉnh $C(4; -1)$. Viết phương trình hai cạnh còn lại.

Bài 61. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M và cách đều hai điểm P, Q với

1/ $M(2; 5)$, $P(-1; 2)$, $Q(5; 4)$. 2/ $M(1; 5)$, $P(-2; 9)$, $Q(3; -2)$.

KHOẢNG CÁCH – PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG PHÂN GIÁC

Bài 62. Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d, với

1/ $M(4; -5)$, $d: 3x - 4y + 8 = 0$. 2/ $M(3; 5)$, $d: x + y + 1 = 0$.

3/ $M(4; -5)$, $d: \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$. 4/ $M(3; 5)$, $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3}$.

Bài 63. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy:

1/ Cho đường thẳng $\Delta: 2x - y + 3 = 0$. Tính bán kính đường tròn tâm $I(-5; 3)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ .

2/ Cho hình chữ nhật ABCD có phương trình 2 cạnh là: $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$ và đỉnh $A(2; -3)$. Tính diện tích hình chữ nhật đó.

3/ Tính diện tích hình vuông có 4 đỉnh nằm trên 2 đường thẳng song song: $d_1: 3x - 4y + 6 = 0$ và $d_2: 6x - 8y - 13 = 0$.

Bài 64. Cho tam giác ABC. Tính diện tích tam giác ABC, với

1/ $A(-1; -1)$, $B(2; -4)$, $C(4; 3)$. 2/ $A(-2; 14)$, $B(4; -2)$, $C(5; -4)$.

Bài 65. Viết phương trình đường thẳng d song song và cách đường thẳng Δ một khoảng h, với

1/ $\Delta: 2x - y + 3 = 0$, $h = \sqrt{5}$. 2/ $\Delta: \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + 4t \end{cases}$, $h = 3$.

3/ $\Delta: y - 3 = 0$, $h = 5$. 4/ $\Delta: x - 2 = 0$, $h = 4$.

Bài 66. Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng Δ và cách điểm A một khoảng bằng h, với

1/ $\Delta: 3x - 4y + 12 = 0$, $A(2; 3)$, $h = 2$. 2/ $\Delta: x + 4y - 2 = 0$, $A(-2; 3)$, $h = 3$.

3/ $\Delta: y - 3 = 0$, $A(3; -5)$, $h = 5$. 4/ $\Delta: x - 2 = 0$, $A(3; 1)$, $h = 4$.

Bài 67. Viết phương trình đường thẳng đi qua A và cách B một khoảng bằng h, với

1/ $A(-1; 2)$, $B(3; 5)$, $d = 3$. 2/ $A(-1; 3)$, $B(4; 2)$, $d = 5$.

3/ $A(5; 1)$, $B(2; -3)$, $d = 5$. 4/ $A(3; 0)$, $B(0; 4)$, $d = 4$.

Bài 68. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M và cách đều hai điểm P, Q, với

1/ $M(2; 5)$, $P(-1; 2)$, $Q(5; 4)$. 2/ $M(1; 2)$, $P(2; 3)$, $Q(4; -5)$.

3/ $M(10; 2), P(3; 0), Q(-5; 4).$

4/ $M(2; 3), P(3; -1), Q(3; 5).$

Bài 69. Viết phương trình đường thẳng d cách điểm A một khoảng bằng h và cách điểm B một khoảng bằng k, với

1/ $A(1; 1), B(2; 3), h = 2, k = 4.$

2/ $A(2; 5), B(-1; 2), h = 1, k = 3.$

Bài 70. Cho đường thẳng $\Delta : x - y + 2 = 0$ và các điểm $O(0; 0), A(2; 0), B(-2; 2).$

1/ Chứng minh đường thẳng Δ cắt đoạn thẳng AB.

2/ Chứng minh rằng hai điểm O, A nằm cùng về một phía đối với đường thẳng Δ .

3/ Tìm điểm O' đối xứng với O qua Δ

4/ Trên Δ , tìm điểm M sao cho độ dài đường gấp khúc OMA ngắn nhất.

Bài 71. Cho hai điểm $A(2; 2), B(5; 1).$ Tìm điểm C trên đường thẳng $\Delta : x - 2y + 8 = 0$ sao cho diện tích tam giác ABC bằng 17 (đvdt).

ĐS: $C(12; 10), C\left(-\frac{76}{5}; -\frac{18}{5}\right).$

Bài 72. Tìm tập hợp điểm

1/ Tìm tập hợp các điểm cách đường thẳng $\Delta : -2x + 5y - 1 = 0$ một khoảng bằng 3.

2/ Tìm tập hợp các điểm cách đều 2 đường thẳng $d : 5x + 3y - 3 = 0, \Delta : 5x + 3y + 7 = 0.$

3/ Tìm tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng $d : 4x - 3y + 2 = 0, \Delta : y - 3 = 0.$

4/ Tìm tập hợp các điểm có tỉ số các khoảng cách đến hai đường thẳng sau bằng $\frac{5}{13}$:

$d : 5x - 12y + 4 = 0$ và $\Delta : 4x - 3y - 10 = 0.$

Bài 73. Viết phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng

1/ $3x - 4y + 12 = 0, 12x + 5y - 20 = 0.$ 2/ $3x - 4y - 9 = 0, 8x - 6y + 1 = 0.$

3/ $x + 3y - 6 = 0, 3x + y + 2 = 0.$ 4/ $x + 2y - 11 = 0, 3x - 6y - 5 = 0.$

Bài 74. Cho tam giác ABC. Tìm tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC, với

1/ $A(-3; -5), B(4; -6), C(3; 1).$ 2/ $A(1; 2), B(5; 2), C(1; -3).$

3/ $AB : 2x - 3y + 21 = 0, BC : 2x + 3y + 9 = 0, CA : 3x - 2y - 6 = 0.$

4/ $AB : 4x + 3y + 12 = 0, BC : 3x - 4y - 24 = 0, CA : 3x + 4y - 6 = 0.$

GÓC

Bài 75. Tính góc giữa hai đường thẳng

1/ $x - 2y - 1 = 0, x + 3y - 11 = 0.$ 2/ $2x - y + 5 = 0, 3x + y - 6 = 0.$

3/ $3x - 7y + 26 = 0, 2x + 5y - 13 = 0.$ 4/ $3x + 4y - 5 = 0, 4x - 3y + 11 = 0.$

Bài 76. Tính số đo của các góc trong tam giác ABC, với

1/ $A(-3; -5), B(4; -6), C(3; 1).$ 2/ $A(1; 2), B(5; 2), C(1; -3).$

3/ $AB : 2x - 3y + 21 = 0, BC : 2x + 3y + 9 = 0, CA : 3x - 2y - 6 = 0.$

4/ $AB : 4x + 3y + 12 = 0, BC : 3x - 4y - 24 = 0, CA : 3x + 4y - 6 = 0.$

Bài 77. Cho hai đường thẳng d và Δ . Tìm m để góc giữa hai đường thẳng đó bằng α , với

1/ $d : 2mx + (m - 3)y + 4m - 1 = 0, \Delta : (m - 1)x + (m + 2)y + m - 2 = 0, \alpha = 45^\circ$.

2/ $d : (m + 3)x - (m - 1)y + m - 3 = 0, \Delta : (m - 2)x + (m + 1)y - m - 1 = 0, \alpha = 90^\circ$.

Bài 78. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A và tạo với đường thẳng Δ một góc α , với

1/ $A(6;2), \Delta : 3x + 2y - 6 = 0, \alpha = 45^\circ$. 2/ $A(-2;0), \Delta : x + 3y - 3 = 0, \alpha = 45^\circ$.

3/ $A(2;5), \Delta : x + 3y + 6 = 0, \alpha = 60^\circ$. 4/ $A(1;3), \Delta : x - y = 0, \alpha = 30^\circ$.

Bài 79. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm $I(4;-1)$ và phương trình một cạnh là $3x - y + 5 = 0$.

1/ Viết phương trình hai đường chéo của hình vuông.

2/ Tìm tọa độ 4 đỉnh của hình vuông.

BÀI TẬP QUA CÁC KÌ THI

Bài 80. Cao đẳng Sư Phạm Nhà Trẻ Mẫu Giáo TW1 năm 2000

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(\Delta) : 2x - 3y + 3 = 0$. Viết phương trình đường thẳng đi qua $M(-5;13)$ và vuông góc với đường thẳng (Δ) .

ĐS: $d : 3x + 2y - 11 = 0$.

Bài 81. Cao đẳng Sư Phạm Hà Nội năm 1997

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC với $A(1;-1), B(-2;1), C(3;5)$.

1/ Viết phương trình đường vuông góc AH kẻ từ A đến trung tuyến BK của ΔABC .

2/ Tính diện tích ΔABK .

ĐS: 1/ $AH : 4x + y - 3 = 0$. 2/ $S_{\Delta ABK} = 11(\text{đvdt})$.

Bài 82. Cao đẳng Kỹ Nghệ Tp. Hồ Chí Minh năm 1998

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng: $(\Delta_1) : 4x - 3y - 12 = 0$ và $(\Delta_2) : 4x + 3y - 12 = 0$.

1/ Xác định đỉnh của tam giác có ba cạnh thuộc $(\Delta_1), (\Delta_2)$ và trục Oy.

2/ Tìm tọa độ tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác nói trên.

ĐS: 1/ $\begin{cases} A(0;-4) = \Delta_1 \cap Oy \\ B(0;4) = \Delta_2 \cap Oy \\ C(3;0) = \Delta_1 \cap \Delta_2 \end{cases}$. 2/ $\begin{cases} \text{Tâm } I\left(\frac{4}{3}; 0\right) \\ Bk : R = d(I; AB) = \frac{4}{3} \end{cases}$.

Bài 83. Cao đẳng Sư Phạm Hà Nội khối A năm 1999

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC , cạnh BC, các đường cao BI, CK có phương trình lần lượt là $7x + 5y - 8 = 0, 9x - 3y - 4 = 0, x + y - 2 = 0$. Viết phương trình các cạnh AB, AC và đường cao AH.

ĐS: $AB : x - y = 0, AC : x + 3y - 8 = 0, AH : 5x - 7y + 4 = 0$.

Bài 84. Cao đẳng Công Nghiệp Tp. Hồ Chí Minh năm 2000

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC có các đường cao (BH): $x + y - 1 = 0$,
(CK): $-3x + y + 1 = 0$ và cạnh (BC): $5x - y - 5 = 0$. Viết phương trình của các cạnh còn lại của tam giác và đường cao AL ?

ĐS: AB: $x + 3y - 1 = 0$, AC: $x - y + 3 = 0$, AL: $x + 5y - 3 = 0$.

Bài 85. Cao đẳng Kiểm Sát Phía Bắc năm 2000

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC có A(1;3) và hai trung tuyến là $x - 2y + 1 = 0$ và $y - 1 = 0$. Viết phương trình các cạnh của tam giác ?

ĐS: AB: $x - y + 2 = 0$, AC: $x + 2y - 3 = 0$, BC: $x - 4y + 1 = 0$.

Bài 86. Cao đẳng Sư Phạm Nhà Trẻ Mẫu Giáo TWI năm 2001

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm A(1;2), B(-1;2) và đường thẳng d có phương trình (d): $x - 2y + 1 = 0$. Hãy tìm tọa độ của điểm C thuộc đường thẳng d sao cho ba điểm A, B, C tạo thành tam giác và thỏa mãn một trong các điều kiện sau

1/ CA = CB.

2/ AB = AC.

ĐS: 1/ $C\left(0; \frac{1}{2}\right)$. 2/ $C(3;2) \vee C\left(-\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right)$.

Bài 87. Cao đẳng Sư Phạm Vĩnh Phúc khối A năm 2002

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC và điểm M(-1;1) là trung điểm của AB. Hai cạnh AC và BC theo thứ tự nằm trên hai đường thẳng $2x + y - 2 = 0$ và $x + 3y - 3 = 0$.

1/ Xác định tọa độ ba đỉnh A, B, C của ΔABC và viết phương trình đường cao CH.

2/ Tính diện tích ΔABC .

ĐS: 1/ A(1;0), B(-3;2), $C\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ và CH: $10x - 5y - 2 = 0$. 2/ $S_{\Delta ABC} = \frac{6}{5}$ (đvdt).

Bài 88. Cao đẳng Nông Lâm năm 2003

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $x + y - 1 = 0$ và $3x - y + 5 = 0$. Hãy tìm diện tích hình bình hành có hai cạnh nằm trên hai đường thẳng đã cho, một đỉnh là giao điểm của hai đường thẳng đó và giao điểm của hai đường chéo là I(3;3).

ĐS: $S_{ABCD} = 55$ (đvdt).

Bài 89. Cao đẳng Sư Phạm Phú Thọ khối A năm 2003

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Đềcac Oxy cho tam giác ABC có đỉnh A(2;-3),

B(3;-2) và diện tích tam giác ABC bằng $\frac{3}{2}$. Biết trọng tâm G của ΔABC thuộc đường thẳng d: $3x - y - 8 = 0$. Tìm tọa độ điểm C.

ĐS: $C(1;-1) \vee C(4;8)$.

Bài 90. Cao đẳng khối D, M năm 2004 – Đại học Hùng Vương

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho ΔABC biết đỉnh A(3;9) và phương trình các đường trung tuyến BM, CN lần lượt là $3x - 4y + 9 = 0$, $y - 6 = 0$. Viết phương trình đường trung tuyến AD của tam giác đã cho.

ĐS: $AD : 3x + 2y - 27 = 0.$

Bài 91. Cao đẳng Điều Dưỡng chính quy năm 2004 – Đại học Điều dưỡng

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho ΔABC có đỉnh $A(0;1)$ và hai đường thẳng chứa các đường cao vẽ từ B và C có phương trình tương ứng là $2x - y - 1 = 0$ và $x + 3y - 1 = 0$. Tính diện tích ΔABC .

ĐS: $S_{\Delta ABC} = 14(\text{đvdt}).$

Bài 92. Cao đẳng khối A năm 2004

Cho tam giác ABC có $A(-6;-3)$, $B(-4;3)$, $C(9;2)$.

1/ Viết phương trình các cạnh của ΔABC .

2/ Viết phương trình đường phân giác trong của góc A của tam giác ABC.

3/ Tìm điểm M trên cạnh AB và tìm điểm N trên cạnh AC sao cho $MN \parallel BC$ và $AM = CN$.

ĐS: 1/
$$\begin{cases} AB : 3x - y + 15 = 0 \\ AC : x - 3y - 3 = 0 \\ BC : x + 13y - 35 = 0 \end{cases} \quad 2/ d_A : y = x + 3. \quad 3/ M\left(-\frac{32}{7}; \frac{9}{7}\right), N\left(\frac{33}{7}; \frac{4}{7}\right).$$

Bài 93. Cao đẳng Sư Phạm Hải Phòng năm 2004

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $\Delta_1 : x - y + 1 = 0$,

$\Delta_2 : 2x + y - 1 = 0$ và điểm $P(2;1)$.

1/ Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm P và giao điểm I của hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 .

2/ Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm P và cắt hai đường thẳng Δ_1 , Δ_2 lần lượt tại hai điểm A, B sao cho P là trung điểm AB.

ĐS: 1/ $y - 1 = 0.$ 2/ $d \equiv AB : 4x - y - 7 = 0$ (có thể giải theo 3 cách).

Bài 94. Cao đẳng Sư Phạm Kom Tum năm 2004

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho hai điểm $A(-1;2)$ và $B(3;4)$. Tìm điểm C trên đường thẳng $d : x - 2y + 1 = 0$ sao cho ΔABC vuông ở C.

ĐS: $C(3;2) \vee C\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right).$

Bài 95. Cao đẳng Kinh Tế Kỹ Thuật Công Nghiệp I khối B năm 2004

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho đường thẳng $d : 2x + 3y + 1 = 0$ và điểm $M(1;1)$. Viết phương trình của các đường thẳng đi qua điểm M và tạo với đường thẳng d một góc 45° .

ĐS: $x - 5y + 4 = 0.$ Có thể giải theo hai cách.

Bài 96. Cao đẳng Kinh Tế Kỹ Thuật Công Nghiệp I khối A năm 2004

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho hai điểm $A(3;-1)$ và $B(3;5)$. Hãy viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $I(-2;3)$ và cách đều hai điểm A, B.

ĐS: $x + 2 = 0 \vee x + 5y - 13 = 0.$

Bài 97. Cao đẳng Mẫu Giáo TW 1 năm 2004

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Decac Oxy, xét ΔABC với $AB: x - 2y + 7 = 0$, các đường trung tuyến kẻ từ A, B lần lượt có phương trình $x + y - 5 = 0$ và $2x + y - 11 = 0$. Hãy tính diện tích của ΔABC và lập phương trình hai đường thẳng AC và BC.

ĐS: $S_{\Delta ABC} = \frac{45}{2}(\text{đvdt})$ và $AC: 16x + 13y - 68 = 0$, $BC: 17x + 11y - 106 = 0$.

Bài 98. Cao đẳng khối T – M trường Đại học Hùng Vương năm 2004

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho ΔABC biết đỉnh $A(3;9)$ và phương trình các đường trung tuyến BM, CN lần lượt là: $3x - 4y + 9 = 0$ và $y - 6 = 0$. Viết phương trình đường trung tuyến AD.

ĐS: $AD: 3x + 2y - 27 = 0$.

Bài 99. Cao đẳng Công Nghiệp IV năm 2004

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho ΔABC vuông tại A với $B(-3;0)$, $C(7;0)$, bán kính đường tròn nội tiếp $r = 2\sqrt{10} - 5$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn nội tiếp ΔABC , biết điểm I có hoành độ dương.

ĐS: $I(2 + \sqrt{10}; 2\sqrt{10} - 5) \vee I(2 - \sqrt{10}; 2\sqrt{10} - 5)$.

Bài 100. Cao đẳng Tài Chính Kế Toán năm 2004

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(2;1)$, $B(-2;3)$, $C(4;5)$. Hãy viết phương trình các đường thẳng cách đều ba điểm A, B, C.

ĐS: Là các đường trung bình ΔABC $\begin{cases} MN: x - 3y + 6 = 0 \\ NP: x + 2y - 9 = 0 \\ MP: 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$

Bài 101. Cao đẳng khối A, B năm 2005

Một hình thoi có: một đường chéo phương trình là $x + 2y - 7 = 0$, một cạnh có phương trình là $x + 3y - 3 = 0$, một đỉnh là $(0;1)$. Tìm phương trình các cạnh của hình thoi.

Bài 102. Cao đẳng Sư Phạm KomTum năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho điểm $M\left(\frac{5}{2}; 2\right)$ và hai đường thẳng

$(\Delta_1): x - 2y = 0$, $(\Delta_2): 2x - y = 0$. Lập phương trình đường thẳng d qua M cắt $(\Delta_1), (\Delta_2)$ lần lượt tại A, B sao cho M là trung điểm của đoạn AB.

Bài 103. Cao đẳng Sư Phạm Vĩnh Long khối A, B năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho ΔABC có $A(1;3)$ và hai đường trung tuyến xuất phát từ B và C lần lượt có phương trình: $x - 2y + 1 = 0$ và $y - 1 = 0$. Hãy lập phương trình các cạnh của ΔABC .

ĐS: $AB: x - y + 2 = 0$, $BC: x - 4y + 1 = 0$, $CA: x + 2y - 7 = 0$.

Bài 104. Cao đẳng Sư Phạm Hà Nội năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho ΔABC có điểm $A(1;2)$, đường trung tuyến BM và đường phân giác trong CD tương ứng có phương trình $2x + y + 1 = 0$, $x + y - 1 = 0$. Hãy viết phương trình đường thẳng BC.

ĐS: $BC: 4x + 3y + 4 = 0$.

Bài 105. Cao đẳng Bến Tre năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, viết phương trình các cạnh của ΔABC biết đỉnh $A(4;-1)$, phương trình một đường cao và một đường trung tuyến vẽ cùng một đỉnh lần lượt là $d_1: 2x - 3y + 12 = 0$ và $d_2: 2x + 3y = 0$.

ĐS: $AB: 3x + 7y - 5 = 0$, $AC: 3x + 2y - 10 = 0$, $BC: 9x + 11y + 5 = 0$.

Bài 106. Cao đẳng Kinh Tế Kỹ Thuật Cần Thơ năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho ΔABC có đỉnh $A(1;3)$, phương trình đường cao BH: $2x - 3y - 10 = 0$ và phương trình đường thẳng BC: $5x - 3y - 34 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh B và C.

ĐS: $B(8;2)$, $C(5;-3)$.

Bài 107. Cao đẳng Sư Phạm Hà Nam khối H năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho $A(1;2)$, $B(-5;4)$ và đường thẳng $\Delta: x + 3y - 2 = 0$. Tìm điểm M trên đường thẳng Δ sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ ngắn nhất.

ĐS: $M\left(-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Bài 108. Cao đẳng Sư Phạm Quảng Ninh khối A năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho ΔABC có điểm $A(2;-1)$ và hai đường phân giác trong của hai góc B, C lần lượt có phương trình $(\Delta_B): x - 2y + 1 = 0$, $(\Delta_C): x + y + 3 = 0$. Viết phương trình cạnh BC.

ĐS: $BC: 4x - y + 3 = 0$.

Bài 109. Cao đẳng Sư Phạm Điện Biên khối A, B năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho ΔABC vuông ở A. Biết tọa độ $A(3;5)$, $B(7;1)$ và đường thẳng BC đi qua điểm $M(2;0)$. Tìm tọa độ đỉnh C.

ĐS: $C(-3;-1)$.

Bài 110. Cao đẳng Sư Phạm Cà Mau khối A năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho hai điểm $A(1;1)$, $B(2;1)$ và đường thẳng $d: x - 2y + 2 = 0$.

1/ Chứng tỏ rằng hai điểm A, B ở về cùng một phía của d.

2/ Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho tổng khoảng cách $(MA + MB)$ bé nhất.

ĐS: $M\left(\frac{23}{15}; \frac{16}{13}\right)$.

Bài 111. Cao đẳng Truyền Hình khối A năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$, $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Biết $M(1; -1)$ là trung điểm cạnh BC và $G\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ là trọng tâm của $\triangle ABC$. Tìm tọa độ đỉnh A, B, C.

Bài 112. Cao đẳng Cộng Đồng Vĩnh Long khối A, B năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho $\triangle ABC$ có đỉnh $A(3; 0)$ và phương trình hai đường cao $(BB') : 2x + 2y - 9 = 0$ và $(CC') : 3x - 12y - 1 = 0$. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC.

Bài 113. Cao đẳng Sư Phạm Hà Nội khối D1, T năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho $\triangle ABC$ có $A(2; -4)$, $B(0; 2)$ và điểm C thuộc đường thẳng: $3x - y + 1 = 0$, diện tích $\triangle ABC$ bằng 1 (đơn vị diện tích). Hãy tìm tọa độ điểm C.

ĐS: $C\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) \vee C(-1; -2)$.

Bài 114. Cao đẳng Kinh Tế – Kỹ Thuật Công Nghiệp I khối A năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho ba điểm $A(1; 2)$, $B(3; 1)$, $C(4; 3)$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ là tam giác cân. Viết phương trình các đường cao của tam giác đó.

ĐS: $AH : x + 2y - 5 = 0$, $BI : 3x + y - 10 = 0$, $CK : 2x - y - 5 = 0$.

Bài 115. Cao đẳng Xây Dựng số 2 khối A năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho một tam giác có một đỉnh là $A(4; 3)$, một đường cao và một đường trung tuyến đi qua hai đỉnh khác nhau có phương trình lần lượt là $3x - y + 11 = 0$ và $x + y - 1 = 0$. Hãy viết phương trình các cạnh tam giác.

ĐS: $AC : x + 3y - 13 = 0$, $AB : x - 2y + 2 = 0$, $BC : 7x + y + 29 = 0$.

Bài 116. Cao đẳng Giao Thông Vận Tải III Tp. Hồ Chí Minh khối A năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho hình thoi ABCD có phương trình hai cạnh và một đường chéo là $AB : 7x - 11y + 83 = 0$, $CD : 7x - 11y - 53 = 0$, $BD : 5x - 3y + 1 = 0$. Tìm tọa độ B và D. Viết phương trình đường chéo AC, rồi suy ra tọa độ của A và C.

ĐS: $AC : 3x + 5y - 13 = 0 \Rightarrow A(-4; 5)$, $C(6; -1)$.

Bài 117. Cao đẳng Bán Công Hoa Sen khối A năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho hai đường thẳng có phương trình: $d_1 : 2x - 3y + 1 = 0$, $d_2 : 4x + y - 5 = 0$. Gọi A là giao điểm của d_1 và d_2 . Tìm điểm B trên d_1 và điểm C trên d_2 sao cho $\triangle ABC$ có trọng tâm là điểm $G(3; 5)$.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad A(1;1), B\left(\frac{61}{7}; \frac{43}{7}\right), C\left(-\frac{5}{7}; \frac{55}{7}\right).$$

Bài 118. Cao đẳng Kinh Tế Kỹ Thuật Cần Thơ khối A năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho ΔABC với $A(2;1)$, $B(4;-3)$ và $C(m;-2)$. Định m để ΔABC vuông tại C.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad m = 1 \vee m = 5.$$

Bài 119. Cao đẳng Điện Lực Tp. Hồ Chí Minh năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $x + y - 3 = 0$ và hai điểm $A(1;1)$, $B(-3;4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng AB bằng 1.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad M(0;3) \vee M(10;-7).$$

Bài 120. Cao đẳng Kinh Tế – Công Nghệ Tp. Hồ Chí Minh khối D1 năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho ΔABC vuông cân tại $A(4;1)$ và cạnh huyền BC có phương trình: $3x - y + 5 = 0$. Viết phương trình hai cạnh góc vuông AC và AB.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad AC : x - 2y - 2 = 0 \text{ và } AB : 2x + y - 9 = 0.$$

Bài 121. Cao đẳng Sư Phạm Bình Phước năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho $A(-1;1)$, $B(-4;3)$. Tìm điểm C thuộc đường thẳng $x + 2y + 1 = 0$ sao cho khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng AB bằng 6.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad C\left(\frac{43}{11}; -\frac{27}{11}\right) \vee C(-7;3).$$

Bài 122. Cao đẳng Sư Phạm Trà Vinh khối M năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho ΔABC biết $C(-2;-4)$, trong tâm $G(0;4)$ và $M(2;0)$ là trung điểm cạnh BC. Hãy viết phương trình đường thẳng chứa cạnh AB.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad AB : 4x + 5y - 44 = 0.$$

Bài 123. Cao đẳng Kỹ Thuật Cao Thắng năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường thẳng d : $3x - 4y + 1 = 0$. Hãy viết phương trình đường thẳng song song với d và có khoảng cách đến d bằng 1.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad \Delta_1 : 3x - 4y - 4 = 0 \vee \Delta_2 : 3x - 4y + 6 = 0.$$

Bài 124. Cao đẳng Kinh Tế Tp. Hồ Chí Minh năm 2007

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho hai đường thẳng $d_1 : x + y + 1 = 0$, $d_2 : 2x - y - 1 = 0$ và điểm $M(2;-4)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua I và cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B mà I là trung điểm của AB.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad \Delta \equiv AB : x + 4y - 14 = 0.$$

Bài 125. Cao đẳng Kinh Tế Đối Ngoại năm 2007

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC . Biết điểm $B(4; -1)$, đường cao AH có phương trình là: $2x - 3y + 12 = 0$, đường trung tuyến AM có phương trình: $2x + 3y = 0$. Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của tam giác ABC.

ĐS: $A(-3; 2)$, $B(4; 1)$, $C(8; -7)$.

Bài 126. Cao đẳng Xây Dựng số 2 năm 2007

Viết phương trình các cạnh của ΔABC biết đỉnh $A(1; 1)$, đường trung tuyến và đường cao đi qua đỉnh B lần lượt có phương trình: $3x + 4y - 27 = 0$, $2x + y - 8 = 0$.

ĐS: $AB: x = 1$, $AC: x - 2y + 1 = 0$, $BC: x + 8y - 49 = 0$.

Bài 127. Cao đẳng Công Nghiệp Thực Phẩm năm 2007

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho ΔABC có đỉnh $A(2; -7)$, trung tuyến CM, đường cao BK có phương trình lần lượt là $x + 2y + 7 = 0$ và $3x + y + 11 = 0$. Viết phương trình các đường thẳng AC và BC.

ĐS: $AC: x - 3y - 23 = 0$ và $BC: 7x + 9y + 19 = 0$.

Bài 128. Cao đẳng khối A, B, D năm 2008

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, tìm điểm A thuộc trục hoành và điểm B thuộc trục tung sao cho A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x - 2y + 3 = 0$.

ĐS: $A(2; 0)$, $B(0; 4)$.

Bài 129. Cao đẳng A, B, D năm 2011 (Chương Trình Cơ Bản)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x + y + 3 = 0$. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(2; -4)$ và tạo với đường thẳng d một góc bằng 45° .

ĐS: $\Delta_1: y + 4 = 0 \vee \Delta_2: x - 2 = 0$.

Bài 130. Cao đẳng A, B, D năm 2011 (Chương Trình Nâng Cao)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình các cạnh là $AB: x + 3y - 7 = 0$, $BC: 4x + 5y - 7 = 0$, $CA: 3x + 2y - 7 = 0$. Viết phương trình đường cao kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC.

ĐS: $AH: 5x - 4y + 3 = 0$.

Bài 131. Đại học Sư Phạm–Kinh tế–Tài Chính–Nông Nghiệp Tp. Hồ Chí Minh năm 1977

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, hãy viết phương trình đường thẳng đi qua giao điểm của hai đường thẳng: $3x - 5y + 2 = 0$, $5x - 2y + 4 = 0$ và song song với đường thẳng $2x - y + 4 = 0$.

ĐS: $d: 38x - 19y + 30 = 0$.

Bài 132. Đại học Thể Dục Thể Thao Tp. Hồ Chí Minh năm 1977

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, hãy lập phương trình đường phân giác của góc tù tạo bởi hai đường thẳng $\Delta_1: 3x - 4y + 12 = 0$, $\Delta_2: 12x + 3y - 7 = 0$.

ĐS: $d: (60 - 9\sqrt{17})x + (15 - 12\sqrt{17})y - 35 + 36\sqrt{17} = 0$.

Bài 133. Đại học Tổng Hợp Tp. Hồ Chí Minh khối B năm 1978

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, cho hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt có phương trình: $d_1: x + y = 1$, $d_2: x - 3y + 3 = 0$. Hãy viết phương trình đường thẳng d đối xứng với d_2 qua đường thẳng d_1 .

ĐS: $d: 3x - y + 1 = 0$.

Bài 134. Đại học Thể Dục Thể Thao Tp. Hồ Chí Minh năm 1978

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, cho tam giác cân PRQ, biết phương trình cạnh đáy PQ: $2x - 3y + 5 = 0$, cạnh bên PR: $x + y + 1 = 0$. Tìm phương trình cạnh bên RQ biết rằng nó đi qua điểm $D(1;1)$.

ĐS: RQ: $17x + 7y - 24 = 0$.

Bài 135. Đại học Bách Khoa – Đại học Tổng Hợp Tp. Hồ Chí Minh năm 1979

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, cho đường cong (C): $y = \sqrt{x^2 + 9}$ và đường thẳng $d: ax - 5y - 32 = 0$.

1/ Vẽ đường cong đã cho.

2/ Tính khoảng cách z từ một điểm M tùy ý của đường cong đến đường thẳng d theo hoành độ x của M .

3/ Tính khoảng cách ngắn nhất giữa đường cong và đường thẳng.

ĐS: 1/ Vẽ (H): $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{3^2} = -1$ ở trên Ox. 2/ $z = \frac{|4x - 5\sqrt{x^2 + 9} - 32|}{\sqrt{41}}$. 3/ $M\left(4; -\frac{16}{5}\right)$.

Bài 136. Đại học Y – Nha – Dược Tp. Hồ Chí Minh năm 1980

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, hãy viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(1;2)$ mà khoảng cách từ điểm $M(2;3)$ và điểm $N(4;-5)$ đến đường thẳng ấy bằng nhau.

ĐS: $d: 3x + 2y - 7 = 0$ ∨ $d: 4x + y - 6 = 0$.

Bài 137. Học Viện Ngân Hàng Tp. Hồ Chí Minh năm 1991

Trong mặt phẳng tọa độ Descartes vuông góc, cho ΔABC có đỉnh $A(2;2)$. Lập phương trình các cạnh của ΔABC . Biết rằng các đường thẳng $9x - 3y - 4 = 0$ và $x + y - 2 = 0$ lần lượt là các đường cao của tam giác xuất phát từ B và C.

ĐS: AC: $x + 3y - 8 = 0$, AB: $x - y = 0$, BC: $7x + 5y - 8 = 0$.

Bài 138. Đại học Cần Thơ 1993 – Đại học Hàng Hải 1995 – Trung Tâm Đào Tạo Cán Bộ Y Tế Tp. Hồ Chí Minh năm 1997 – Học Viện Hàng Không 2001

Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC nếu biết $B(2;-1)$, đường cao qua A và đường phân giác trong góc C có phương trình lần lượt là $3x - 4y + 27 = 0$; $x + 2y - 5 = 0$.

ĐS: AB: $4x + 7y - 1 = 0$, BC: $4x + 3y - 5 = 0$, AC: $y = 3$.

Lời bình

Phương trình đường thẳng $x + 2y - 5 = 0$ là phương trình đường phân giác ngoài của góc C, không phải là phương trình đường phân giác trong góc C. Đề ra thiếu chính xác. Một số trường Đại học đã ra đề này để tuyển sinh mà không phát hiện ra, ... Ở đây, tôi đã đổi lại đường phân giác ngoài góc C là $x + 2y - 5 = 0$ và giải ra kết quả như trên.

Bài 139. Trung Tâm Đào Tạo Cán Bộ Y Tế Tp. Hồ Chí Minh năm 1993

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, cho hai điểm $P(2;5)$ và $Q(5;1)$. Lập phương trình đường thẳng qua P cách Q một đoạn có độ dài bằng 3.

ĐS: $d: x - 2 = 0 \vee d: 7x + 24y - 134 = 0$.

Bài 140. Đại học Pháp Lý Tp. Hồ Chí Minh năm 1994

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho ba đường thẳng:

$d_1: 3x + 4y - 6 = 0$, $d_2: 4x + 3y - 1 = 0$, $d_3: y = 0$. Gọi $A = d_1 \cap d_2$, $B = d_2 \cap d_3$, $C = d_3 \cap d_1$.

1/ Viết phương trình đường phân giác trong của góc A của ΔABC và tính diện tích ΔABC .

2/ Viết phương trình đường tròn nội tiếp ΔABC .

ĐS: 1/ $d_A: x + y - 1 = 0$ và $S_{\Delta ABC} = \frac{21}{4}(\text{đvdt})$.

$$2/ \left(x - \frac{\sqrt{73} - 9}{8} \right)^2 + \left(y - \frac{1 - \sqrt{73}}{8} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{73} - 1}{8} \right)^2.$$

Bài 141. Đại học Tổng Hợp Tp. Hồ Chí Minh khối A, B năm 1994

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, cho hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt có phương trình:

$d_1: kx - y + k = 0$, $d_2: (1 - k^2)x + 2ky - (1 + k^2) = 0$.

1/ Chứng minh rằng khi k thay đổi, đường thẳng d_1 luôn đi qua một điểm cố định.

2/ Với mỗi giá trị k, hãy xác định giao điểm của d_1 và d_2 .

3/ Tìm quỹ tích của giao điểm đó khi k thay đổi.

ĐS: 1/ $M_0(-1;0)$. 2/ $M\left(\frac{1-k^2}{1+k^2}; \frac{2k^2}{1+k^2}\right)$ 3/ Đường tròn: $x^2 + y^2 = 1$ loại $M_0(-1;0)$.

Bài 142. Đại học Bách Khoa Hà Nội năm 1994

Phương trình hai cạnh một tam giác trong mặt phẳng tọa độ là: $5x - 2y + 6 = 0$;

$4x + 7y - 21 = 0$. Viết phương trình cạnh thứ ba của tam giác, biết trực tâm H trùng với gốc tọa độ.

ĐS: $BC: y + 7 = 0$.

Bài 143. Đại học Mỏ – Địa Chất năm 1995

Lập phương trình các cạnh ΔABC nếu biết $A(1;3)$ và hai đường trung tuyến có phương trình là $x - 2y + 1 = 0$ và $y - 1 = 0$.

ĐS: $AB: x + 2y - 7 = 0$, $AC: x - y + 2 = 0$, $BC: x - 4y - 1 = 0$.

Bài 144. Đại học Quốc Gia Hà Nội năm 1995

Trên mặt phẳng tọa độ trục chuẩn đã cho các điểm $P(2;3)$, $Q(4;-1)$, $R(-3;5)$ là các trung điểm của các cạnh của một tam giác. Hãy lập phương trình của các đường thẳng chứa các cạnh của tam giác đó.

ĐS: $BC: 6x - 7y - 3 = 0$, $AB: 2x + y + 1 = 0$, $AC: 2x + 5y - 3 = 0$.

Bài 145. Đại học Sư Phạm Hà Nội 2 – Khối A và Đại học Sư Phạm Quy Nhơn năm 1995

Lập phương trình các cạnh của ΔABC trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ trục chuẩn Oxy, nếu cho $C(-4;-5)$ và hai đường cao có phương trình $5x + 3y - 4 = 0$ và $3x + 8y + 13 = 0$.

ĐS: $BC: 3x - 5y - 13 = 0, AC: 8x - 3y + 17 = 0, AB: 5x + 2y - 1 = 0.$

Bài 146. Đại học Văn Hóa Hà Nội năm 1995

Lập phương trình các cạnh của hình vuông biết rằng hình vuông đó có đỉnh là $(-4; 8)$ và một đường chéo có phương trình: $7x - y + 8 = 0.$

ĐS: $AB: 3x - 4y + 32 = 0, AD: 4x + 3y + 1 = 0, BC: 4x + 3y - 24 = 0,$
 $CD: 3x - 4y + 7 = 0.$

Bài 147. Đại học Y Khoa Hà Nội năm 1995

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, cho hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt có phương trình: $d_1: (a - b)x + y = 1$ và $d_2: (a^2 - b^2)x + ay = b$ với $a^2 + b^2 > 0$. Xác định giao điểm của d_1 và d_2 , biện luận theo a, b số giao điểm ấy.

ĐS: TH₁. $\begin{cases} b = 0 & (a \neq b) \\ b = a & d_1 \equiv d_2 \end{cases} \quad d_1 \parallel d_2. \quad \text{TH}_2. \quad a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow d_1 \cap d_2 = A\left(\frac{1}{b}; \frac{a}{b}\right).$

Bài 148. Đại học Cần Thơ năm 1995

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, cho $A(2; -3), B(3; -2)$. Trọng tâm G của ΔABC nằm trên đường thẳng $d: 3x - y - 8 = 0$, diện tích ΔABC bằng $\frac{3}{2}$. Tìm tọa độ điểm C .

ĐS: $C(1; -1) \vee C(-2; -10).$

Bài 149. Đại học Tài Chính Hà Nội năm 1996

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, cho ΔABC có $M(-2; 2)$ là trung điểm của BC , cạnh AB có phương trình: $x - 2y - 2 = 0$, cạnh AC có phương trình: $2x + 5y + 3 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của ΔABC .

ĐS: $A\left(\frac{4}{9}; -\frac{7}{9}\right), B\left(\frac{40}{9}; \frac{11}{9}\right), C\left(-\frac{76}{9}; \frac{25}{9}\right).$

Bài 150. Đại học Văn Lang đợt 1 khối B, D năm 1997

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $3x + 4y - 12 = 0$.

1/ Xác định tọa độ qua các giao điểm A, B của d lần lượt với trục Ox, Oy .

2/ Tính tọa độ hình chiếu H của gốc O trên đường thẳng d .

3/ Viết phương trình đường thẳng d' đối xứng với d qua O .

ĐS: 1/ $A(4; 0), B(0; 3).$ 2/ $H\left(\frac{36}{25}; \frac{48}{25}\right).$ 3/ $d': 3x + 4y + 12 = 0.$

Bài 151. Đại học An Ninh đề 2 khối D năm 1997

Trong mặt phẳng tọa độ cho điểm $A(0; 2)$ và điểm $B(m; -2)$. Hãy viết phương trình đường thẳng trung trực d của AB . Chứng minh rằng d luôn tiếp xúc với đường cong (C) cố định khi m thay đổi.

ĐS: $d: y = \frac{m}{4}x - \frac{m^2}{8}$, luôn tiếp xúc với parabol $(P): y = \frac{1}{8}x^2.$

Bài 152. Đại học Huế khối D năm 1997

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $\Delta_1 : 4x - 3y - 12 = 0$,

$$\Delta_2 : 4x + 3y - 12 = 0.$$

1/ Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác có ba cạnh lần lượt nằm trên các đường thẳng Δ_1 , Δ_2 và trục tung.

2/ Xác định tâm và bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác nói trên.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad 1/ A(0; -4), B(0; 4), C(3; 0). \quad 2/ E\left(\frac{4}{3}; 0\right), r = \frac{4}{3}.$$

Bài 153. Đại học Sư Phạm Hà Nội 2 năm 1997

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(2; 1)$, $B(0; 1)$, $C(3; 5)$, $D(-3; -1)$.

1/ Tính diện tích tứ giác ABCD.

2/ Viết phương trình các cạnh của hình vuông có hai cạnh song song đi qua A và C và hai cạnh còn lại đi qua B và D.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad 1/ S_{ABCD} = 6(\text{đvdt}). \quad 2/ \begin{cases} MN : 7x + y - 15 = 0 \\ PQ : 7x + y - 26 = 0 \\ NP : x - 7y + 7 = 0 \\ MQ : x - 7y - 4 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} MN : x - 3y + 1 = 0 \\ PQ : x - 3y + 12 = 0 \\ NP : 3x + y - 1 = 0 \\ MQ : 3x + y + 10 = 0 \end{cases}.$$

Bài 154. Đại học Y Dược Tp. Hồ Chí Minh hệ Cử nhân năm 1997

Cho ΔABC , cạnh BC có trung điểm $M(0; 4)$, còn hai cạnh kia có phương trình là

$$2x + y - 11 = 0 \text{ và } x + 4y - 2 = 0.$$

1/ Xác định đỉnh A.

2/ Gọi C là đỉnh nằm trên đường thẳng $x - 4y - 2 = 0$ và N là trung điểm AC. Tìm tọa độ N rồi tính tọa độ B, C.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad 1/ A(6; -1). \quad 2/ C(-2; 1), B(2; 7).$$

Bài 155. Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh khối A – Đại học Luật năm 1997

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, cho đường thẳng $d : 2x + y - 4 = 0$ và hai điểm $M(3; 3)$, $N(-5; -19)$. Hạ $MK \perp d$ và gọi P là điểm đối xứng của M qua d.

1/ Tìm tọa độ điểm K và P.

2/ Tìm điểm A trên d sao cho $AM + AN$ có giá trị nhỏ nhất và tính giá trị đó.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad 1/ K(1; 2), P(-1; 1). \quad 2/ A(-3; 10) \Rightarrow (AM + AN)_{\min} = 2\sqrt{85}.$$

Bài 156. Đại học Đà Lạt năm 1998

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, cho hai đường thẳng $d_1 : (a + 1)x - 2y - a - 1 = 0$

$$\text{và } d_2 : x + (a - 1)y - a^2 = 0.$$

1/ Tìm giao điểm I của d_1 và d_2 .

2/ Tìm a để đường thẳng qua $M(0; a)$, $N(a; 0)$ cũng đi qua điểm I.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad 1/ I\left(\frac{3a^2 - 1}{a^2 + 1}; \frac{(a + 1)^2(a - 1)}{a^2 + 1}\right). \quad 2/ a = 1 \vee a = -\frac{1}{2}.$$

Bài 157. Đại học Kỹ Thuật Công Nghệ Tp. Hồ Chí Minh khối B, D năm 1998

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC có $A(2;2)$, biết tam giác có hai đường cao là:

$$9x - 3y - 4 = 0 \text{ và } x + y - 2 = 0.$$

1/ Viết phương trình các đường trung trực của tam giác ABC.

2/ Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC và xác định tọa độ trọng tâm ΔABC .

$$\text{ĐS: } 1/ \begin{cases} d_{AB} : 3x + 3y - 8 = 0 \\ d_{AC} : 9x - 3y + 3 = 0 \\ d_{BC} : 15x - 21y + 41 = 0 \end{cases} \quad 2/ (C) : \left(x - \frac{5}{12}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{4}\right)^2 = \frac{185}{72} \text{ và } G\left(\frac{5}{9}; \frac{17}{9}\right).$$

Bài 158. Đại học Giao Thông Vận Tải Tp. Hồ Chí Minh đề 1 năm 1998

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-1;2)$ và $B(3;4)$. Tìm tọa độ điểm C trên đường thẳng: $x - 2y + 1 = 0$ sao cho ΔABC vuông ở C.

$$\text{ĐS: } C(3;2) \vee C\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right).$$

Bài 159. Đại học Đà Nẵng khối A năm 1998

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, cho điểm $P(3;0)$ và hai đường thẳng:

$d_1 : 2x - y - 2 = 0$ và $d_2 : x + y + 3 = 0$. Gọi d là đường thẳng qua P và cắt d_1, d_2 lần lượt ở A và B. Viết phương trình của d biết rằng $PA = PB$.

$$\text{ĐS: } d : 4x - 5y - 12 = 0 \vee d : 8x - y - 24 = 0.$$

Bài 160. Đại học Văn Lang khối B, D năm 1998

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, cho ΔABC có đỉnh $B(3;5)$, đường cao kẻ từ A có phương trình: $2x - 5y + 3 = 0$ và đường trung tuyến kẻ từ đỉnh C có phương trình: $x + y - 5 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh A và viết phương trình các cạnh của tam giác.

$$\text{ĐS: } A(1;1), BC : 5x + 2y - 25 = 0, AB : 2x - y - 1 = 0, AC : x + 4y - 5 = 0.$$

Bài 161. Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh đợt 3 năm 1998

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, cho ΔABC có trọng tâm $G(-2;-1)$ và các cạnh $AB : 4x + y + 15 = 0$ và $AC : 2x + 5y + 3 = 0$.

1/ Tìm tọa độ đỉnh A và tọa độ trung điểm M của BC.

2/ Tìm tọa độ đỉnh B và viết phương trình đường thẳng BC.

$$\text{ĐS: } 1/ A(-4;1), M(-1;2). \quad 2/ B(-3;-3), BC : x - 2y - 3 = 0.$$

Bài 162. Đại học Hàng Hải năm 1998

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, cho $A(1;1)$, $B(-1;3)$ và đường thẳng d có phương trình $d : x + y + 4 = 0$.

1/ Tìm trên d điểm C cách đều hai điểm A, B.

2/ Với C vừa tìm được, tìm D sao cho ABCD là hình bình hành. Tính diện tích hình bình hành.

$$\text{ĐS: } 1/ C(-3;-1). \quad 2/ D(-1;-3) \text{ và } S_{\square ABCD} = 12(\text{đvdt}).$$

Bài 163. Đại học Cần Thơ năm 1998

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, cho ΔABC có đỉnh $A(-1; -3)$.

1/ Biết đường cao BH : $5x + 3y - 25 = 0$, đường cao CK : $3x + 8y - 12 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh B, C.

2/ Biết đường trung trực của AB là $\Delta : 3x + 2y - 4 = 0$ và trọng tâm $G(4; -2)$. Tìm tọa độ đỉnh B, C.

ĐS: 1/ $B(2; 5)$, $C(4; 0)$. 2/ $B(5; 1)$, $C(8; -4)$.

Bài 164. Đại học Văn Hóa Hà Nội năm 1998

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, cho ΔABC biết đỉnh $C(4; -1)$ và đường cao, đường trung tuyến kẻ từ một đỉnh có phương trình lần lượt là $2x - 3x + 12 = 0$ và $2x + 3y = 0$. Tìm phương trình các cạnh của tam giác ABC.

ĐS: AC : $3x + 7y - 5 = 0$, BC : $3x + 2y - 10 = 0$, AB : $9x + 11y + 5 = 0$.

Bài 165. Đại học Huế khối D năm 1998

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, hãy viết phương trình đường thẳng song song với $d : 3x - 4y + 1 = 0$ và có khoảng cách đến đường thẳng d bằng 1.

ĐS: $\Delta : 3x - 4y - 4 = 0 \vee \Delta : 3x - 4y + 6 = 0$.

Bài 166. Đại học Kiến Trúc Hà Nội năm 1998

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, cho ba điểm $A(2; 4)$, $B(3; 1)$, $C(1; 4)$ và đường thẳng d có phương trình: $d : x - y - 1 = 0$.

1/ Tìm $M \in d$ sao cho $AM + MB$ nhỏ nhất.

2/ Tìm $N \in d$ sao cho $AN + CN$ nhỏ nhất.

ĐS: 1/ $M\left(\frac{11}{4}; \frac{7}{4}\right) \Leftrightarrow (AM + BM)_{\min} = \sqrt{10}$. 2/ $N\left(\frac{23}{7}; \frac{16}{7}\right) \Leftrightarrow (AN + CN)_{\min} = 5$.

Bài 167. Đại học Dân Lập Kỹ Thuật Công Nghệ khối D năm 1999

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, cho điểm $M(-2; 3)$. Tìm phương trình đường thẳng d qua M và cách đều hai điểm $A(-1; 0)$, $B(2; 1)$.

ĐS: $d : x - 3y + 11 = 0 \vee d : x + y - 1 = 0$.

Bài 168. Đại học Cần Thơ khối A năm 1999

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, cho ba điểm $A(-3; 4)$, $B(-5; -1)$, $C(4; 3)$.

1/ Tính độ dài AB, BC, AC. Hãy cho biết tính chất (nhọn, tù, vuông) của các góc trong ΔABC .

2/ Tính độ dài đường cao AH của ΔABC và viết phương trình đường thẳng AH.

ĐS: 1/ $AB = \sqrt{29}$, $AC = \sqrt{50}$, $BC = \sqrt{97}$ nhọn.

2/ $AH = \frac{37}{\sqrt{97}}$, AH : $9x + 4y + 11 = 0$.

Bài 169. Đại học Mỹ Thuật Công Nghiệp khối A năm 1999

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, cho hai đường thẳng có phương trình lần lượt là:
 $d_1: x - y - 1 = 0$, $d_2: 3x - y + 1 = 0$ và điểm $M(1; 2)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm M , cắt d_1 và d_2 lần lượt tại M_1, M_2 và thỏa một trong các điều kiện sau:

1/ $MM_1 = MM_2$.

2/ $MM_1 = 2MM_2$.

ĐS: 1/ $d \equiv MM_2: x - 1 = 0$. 2/ $d \equiv MM_2: x + y - 3 = 0$.

Bài 170. Đại học Dược Hà Nội năm 1999

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: (a - b)x + y = 1$ và $d_2: (a^2 - b^2)x + ay = b$ với $b^2 = 4a^2 + 1$.

1/ Xác định giao điểm của d_1 và d_2 .

2/ Tìm tập hợp (E) các giao điểm của d_1 và d_2 khi a, b thay đổi.

ĐS: 1/ $M\left(-\frac{1}{b}; \frac{a}{b}\right)$. 2/ Ellipse $(E): \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$.

Bài 171. Đại học Đà Nẵng khối A – Đại học Kinh Tế Tp. Hồ Chí Minh năm 1999

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: 2x - y - 2 = 0$ và $d_2: 2x + 4y - 7 = 0$.

1/ Viết phương trình đường phân giác của góc tạo bởi d_1 và d_2 .

2/ Viết phương trình đường thẳng qua điểm $P(3; 1)$ cùng với d_1, d_2 tạo thành tam giác cân có đỉnh là giao của d_1 và d_2 .

ĐS: 1/ $\begin{cases} d: 2x - 6y + 3 = 0 \\ d: 6x + 2y - 11 = 0 \end{cases}$. 2/ $\begin{cases} \Delta: 3x + y - 10 = 0 \\ \Delta: x - 3y = 0 \end{cases}$.

Bài 172. Đại học Sư Phạm Hà Nội 2 năm 1999

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, cho tam giác ABC với các đỉnh $A(-6; -3)$, $B(-4; 3)$ và $C(9; 2)$.

1/ Viết phương trình đường thẳng d chứa đường phân giác trong của góc A của ΔABC .

2/ Tìm điểm P trên đường thẳng d sao cho tứ giác ABCP là hình thang.

ĐS: 1/ $d: x - y + 3 = 0$. 2/ $P(14; 17) \vee P(2; 5)$.

Bài 173. Đại học Kinh Tế Quốc Dân Hà Nội năm 1999

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, hãy viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(0; 1)$ và tạo với đường thẳng $x + 2y + 3 = 0$ một góc bằng 45° .

ĐS: $d: 3x + y - 1 = 0 \vee d: x - 3y + 1 = 0$.

Bài 174. Đại học Hàng Hải năm 1999

Cho ΔABC có $A(2; -1)$ và phương trình các đường cao là $2x - y + 1 = 0$, $3x + y + 2 = 0$.
 Lập phương trình đường trung tuyến của tam giác qua đỉnh A.

ĐS: $AM : x + 32y + 30 = 0$.

Bài 175. Đại học Mở Bán Công Tp. Hồ Chí Minh khối A, B năm 2000

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, cho điểm $M(1;6)$ và $d : 2x - 3y + 3 = 0$.

- 1/ Viết phương trình đường thẳng d_1 đi qua M và song song với d.
- 2/ Viết phương trình đường thẳng d_2 đi qua M, vuông góc với d và xác định tọa độ hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng d.

ĐS: 1/ $d_1 : 2x - 3y + 16 = 0$. 2/ $d_2 : 3x + 2y - 15 = 0$ và $H(3;3)$.

Bài 176. Đại học Tây Nguyên khối D năm 2000

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, hãy lập phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm $I(-2;3)$ và cách đều hai điểm $A(5;-1)$ và $B(3;7)$.

ĐS: $d : 4x + y + 5 = 0 \vee d : y - 3 = 0$.

Bài 177. Đại học Sư Phạm Hà Nội 2 khối A năm 2000

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho $\triangle ABC$ và đỉnh $A(1;1)$. Các đường cao hạ từ B và C lần lượt nằm trên các đường thẳng d_1 và d_2 theo thứ tự có phương trình $-2x + y - 8 = 0$ và $2x + 3y - 6 = 0$. Hãy viết phương trình đường thẳng chứa đường cao hạ từ đỉnh A và xác định tọa độ đỉnh B, C của $\triangle ABC$.

ĐS: $I\left(-\frac{9}{4}; \frac{7}{2}\right) = d_1 \cap d_2$, $AI : 10x + 13y - 23 = 0$, $B(-17;-26)$, $C(3;0)$.

Bài 178. Đại học Thương Mại năm 2000

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, cho $\triangle ABC$ có $A(2;-1)$ và phương trình hai đường phân giác trong của góc B và góc C lần lượt có phương trình: $d_B : x - 2y + 1 = 0$ và $d_C : x + y + 3 = 0$. Tìm phương trình của đường thẳng chứa cạnh BC.

ĐS: $BC : 4x - y + 3 = 0$.

Bài 179. Học Viện Ngân Hàng Tp. Hồ Chí Minh năm 2000

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho $\triangle ABC$ có đỉnh $C(-2;-4)$ và trọng tâm $G(0;4)$.

- 1/ Giả sử $M(2;0)$ là trung điểm của cạnh BC. Xác định tọa độ các đỉnh A và B.
- 2/ Giả sử M di động trên đường thẳng $(D) : x + y - 2 = 0$, tìm quỹ tích điểm B. Hãy xác định M để độ dài cạnh AB là ngắn nhất.

ĐS: 1/ $\begin{cases} \overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MG} \\ \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CM} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-4;12) \\ B(6;4) \end{cases}$. 2/ Quỹ tích là $d : x + y - 10 = 0$ và $M\left(-\frac{1}{4}; \frac{9}{4}\right)$.

Bài 180. Đại học Giao Thông Vận Tải khối A năm 2001

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho hình bình hành ABCD có số đo diện tích bằng 4. Biết tọa độ các đỉnh $A(1;0)$, $B(2;0)$ và giao điểm I của hai đường chéo AC và BD nằm trên đường thẳng $y = x$. Hãy tìm tọa độ các đỉnh C và D.

ĐS: $C(3;4)$, $D(2;4) \vee C(-5;-4)$, $D(-6;-4)$.

Bài 181. Học Viện Kỹ Thuật Quân Sự năm 2001

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho ΔABC cân, cạnh đáy BC có phương trình $x + 3y + 1 = 0$. Cạnh bên AB có phương trình $x - y + 5 = 0$. Đường thẳng chứa cạnh AC đi qua điểm $M(-4; 1)$. Tìm tọa độ đỉnh C.

ĐS: Ba cạnh ΔABC đồng quy tại M Vô lí Bài toán không xác định $\exists C$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 182. Đại học Nông Nghiệp I năm 2001

Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A(1; 1)$ và đường thẳng d có phương trình: $4x + 3y = 12$.

1/ Gọi B và C lần lượt là giao điểm của d với các trục Ox và Oy. Xác định tọa độ trực tâm của ΔABC .

2/ Điểm M chạy trên đường thẳng d. Trên nửa đường thẳng đi qua hai điểm A và M, lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 4$. Điểm N chạy trên đường cong nào? Viết phương trình đường cong đó.

ĐS: 1/ $H(-3; -2)$. 2/ N chạy trên đường tròn (C): $\left(x - \frac{13}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{5}\right)^2 = 4$.

Bài 183. Đại học Hàng Hải năm 2001

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho điểm $M\left(\frac{5}{2}; 2\right)$ và hai đường thẳng có phương

trình $y = \frac{x}{2}$; $y - 2x = 0$. Lập phương trình đường thẳng d qua M và cắt hai đường thẳng nói trên tại hai điểm A và B sao cho M là trung điểm của AB.

ĐS: $y = 2$.

Bài 184. Đại học Huế khối A,B,V năm 2001

Viết phương trình ba cạnh của ΔABC trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho biết đỉnh $C(4; 3)$, đường phân giác trong và đường trung tuyến kẻ từ một đỉnh của tam giác có phương trình lần lượt là $x + 2y - 5 = 0$ và $4x + 13y - 10 = 0$.

ĐS: AC: $x + y - 7 = 0$, AB: $x + 7y + 5 = 0$, BC: $x - 8y + 20 = 0$.

Bài 185. Đại học Kinh Tế Quốc Dân năm 2001

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ trục chuẩn Oxy, hãy lập phương trình các cạnh của ΔABC nếu cho $B(-4; 5)$ và hai đường cao hạ từ hai đỉnh còn lại của tam giác lần lượt có phương trình: $5x + 3y - 4 = 0$ và $3x + 8y + 13 = 0$.

ĐS: BC: $3x - 5y + 37 = 0$, AB: $8x - 3y - 47 = 0$, AC: $2535x - 3016y + 29033 = 0$.

Bài 186. Đại học khối A năm 2002

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đề các vuông góc Oxy, xét tam giác ABC vuông tại A, phương trình đường thẳng BC là $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$, các đỉnh A và B thuộc trục hoành và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

ĐS: $G_1\left(\frac{7 + 4\sqrt{3}}{3}; \frac{6 + \sqrt{3}}{3}\right)$, $G_2\left(\frac{-4\sqrt{3} - 1}{3}; \frac{-6 - 2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Bài 187. Đại học khối B năm 2002

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcác vuông góc Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có tâm $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, phương trình đường thẳng AB là $x - 2y + 2 = 0$ và $AB = 2AD$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết rằng đỉnh A có hoành độ âm.
ĐS: $A(-2; 0)$, $B(2; 2)$, $C(3; 0)$, $D(-1; -2)$.

Bài 188. Đại học khối B năm 2003

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcác vuông góc Oxy, cho tam giác ABC có $AB = AC$, $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Biết $M(1; -1)$ là trung điểm cạnh BC và $G\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ là trọng tâm tam giác ABC.

Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

ĐS: $A(0; 2)$, $B(4; 0)$, $C(-2; -2)$.

Bài 189. Dự bị 1 – Đại học khối D năm 2003

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(1; 0)$ và hai đường thẳng lần lượt chứa các đường cao vẽ từ B và C có phương trình tương ứng là: $x - 2y + 1 = 0$, $3x + y - 1 = 0$. Tính diện tích tam giác ABC.

ĐS: $B(-5; -2)$, $C(-1; 4)$ $S_{\Delta ABC} = 14$.

Bài 190. Đại học khối A năm 2004

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(0; 2)$ và $B(-\sqrt{3}; -1)$. Tìm tọa độ trục tâm và tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác OAB.

ĐS: $H(\sqrt{3}; -1)$, $I(-\sqrt{3}; 1)$.

Bài 191. Đại học khối B năm 2004

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1; 1)$, $B(4; -3)$. Tìm điểm C thuộc đường thẳng $x - 2y - 1 = 0$ sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng 6.

ĐS: $C_1(7; 3)$, $C_2\left(-\frac{43}{11}; -\frac{27}{11}\right)$.

Bài 192. Đại học khối D năm 2004

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có các đỉnh $A(-1; 0)$, $B(4; 0)$, $C(0; m)$ với $m \neq 0$. Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC theo m. Xác định m để tam giác GAB vuông tại G.

ĐS: $G\left(1; \frac{m}{3}\right)$, $m = \pm 3\sqrt{6}$.

Bài 193. Dự bị 2 – Đại học khối A năm 2004

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(0; 2)$ và đường thẳng $d: x - 2y + 2 = 0$. Tìm trên d hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông ở B và $AB = 2BC$.

ĐS: $B\left(\frac{2}{5}; \frac{6}{5}\right)$.

Bài 194. Dự bị 1 – Đại học khối B năm 2004

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $I(-2;0)$ và hai đường thẳng $d_1: 2x - y + 5 = 0$, $d_2: x + y - 3 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm I và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại A, B sao cho $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$.
ĐS: $d: 7x - 3y + 6 = 0$.

Bài 195. Dự bị 1 – Đại học khối D năm 2004

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông ở A. Biết $A(-1;4)$, $B(4;-1)$, đường thẳng BC đi qua điểm $K\left(\frac{7}{3}; 2\right)$. Tìm tọa độ đỉnh C.

ĐS: $C\left(-\frac{69}{50}; -\frac{1579}{250}\right)$.

Bài 196. Dự bị 2 – Đại học khối D năm 2004

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(2;3)$ và hai đường thẳng $d_1: x + y + 5 = 0$, $d_2: x + 2y - 7 = 0$. Tìm tọa độ các điểm B trên d_1 và C trên d_2 sao cho tam giác ABC có trọng tâm $G(2;0)$.

Bài 197. Đại học khối A năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: x - y = 0$ và $d_2: 2x + y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh hình vuông ABCD biết rằng đỉnh A thuộc d_1 , đỉnh C thuộc d_2 và các đỉnh B, D thuộc trục hoành.

ĐS: $A(1;1), B(0;0), C(1;-1), D(2;0)$ hoặc $A(1;1), B(2;0), C(1;-1), D(0;0)$.

Bài 198. Dự bị 1 – Đại học khối A năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại đỉnh A có trọng tâm $G\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$, phương trình đường thẳng BC là $x - 2y - 4 = 0$ và phương trình đường thẳng BG là $7x - 4y - 8 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

ĐS: $A(0;3), B(0;-2), C(4;0)$.

Bài 199. Đại học khối A năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho các đường thẳng lần lượt có phương trình: $d_1: x + y + 3 = 0$, $d_2: x - y - 4 = 0$, $d_3: x - 2y = 0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên đường thẳng d_3 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng d_1 bằng hai lần khoảng cách từ M đến đường thẳng d_2 .

ĐS: $M(-22;-11) \vee M(2;1)$.

Bài 200. Dự bị 2 – Đại học khối A năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A thuộc đường thẳng $d: x - 4y - 2 = 0$, cạnh BC song song với d . Phương trình đường cao (BH): $x + y + 3 = 0$ và trung điểm của cạnh AC là $M(1;1)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

ĐS: $A\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right), B(-4;1), C\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

Bài 201. Dự bị 1 – Đại học khối B năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại B, với $A(1; -1)$, $B(3; 5)$. Điểm B nằm trên đường thẳng $d: 2x - y = 0$. Viết phương trình các đường thẳng AB, BC.

ĐS: $(AB): 23x - y - 24 = 0$ và $(BC): 19x - 13y + 8 = 0$.

Bài 202. Dự bị 2 – Đại học khối B năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(2; 1)$, đường cao qua đỉnh B có phương trình $x - 3y - 7 = 0$ và đường trung tuyến qua đỉnh C có phương trình $x + y + 1 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh B và C của tam giác.

ĐS: $B(-2; -3)$, $C(4; -5)$.

Bài 203. Đại học khối B năm 2007

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(2; 2)$ và các đường thẳng:

$d_1: x + y - 2 = 0$, $d_2: x + y - 8 = 0$. Tìm tọa độ các điểm B và C lần lượt thuộc d_1 và d_2 sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

ĐS: $B(-1; 3)$, $C(3; 5)$ ∨ $B(3; -1)$, $C(5; 3)$.

Bài 204. Dự bị 2 – Đại học khối A năm 2007

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trọng tâm $G(-2; 0)$, phương trình các cạnh $AB: 4x + y + 14 = 0$, $AC: 2x + 5y - 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

ĐS: $A(-4; 2)$, $B(-3; -2)$, $C(1; 0)$.

Bài 205. Dự bị 1 – Đại học khối D năm 2007

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(2; 1)$. Trên trục Ox, lấy điểm B có hoành độ $x_B \geq 0$, trên trục Oy, lấy điểm C có tung độ $y_C \geq 0$ sao cho tam giác ABC vuông tại A. Tìm các điểm B, C sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

ĐS: $B(0; 0)$, $C(0; 5)$.

Bài 206. Dự bị 2 – Đại học khối A năm 2007

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho các điểm $A(0; 1)$, $B(2; -1)$ và các đường thẳng

$d_1: (m - 1)x + (m - 2)y + 2 - m = 0$, $d_2: (2 - m)x + (m - 1)y + 3m - 5 = 0$. Chứng minh d_1 và d_2 luôn cắt nhau. Gọi P là giao điểm của d_1 và d_2 . Tìm m sao cho $PA + PB$ lớn nhất.

ĐS: Chú ý: $(PA + PB)^2 \leq 2(PA^2 + PB^2) = 2AB^2 = 16$. Do đó $(PA + PB)_{\max} = 4$ khi P là trung điểm của cung AB. Khi đó $P(2; 1)$ hay $P(0; -1) \Rightarrow m = 1 \vee m = 2$.

Bài 207. Đại học khối B năm 2008

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, hãy xác định tọa độ đỉnh C của tam giác ABC biết rằng hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB là điểm $H(-1; -1)$, đường phân giác trong góc A có phương trình $x - y + 2 = 0$ và đường cao kẻ từ B có phương trình $4x + 3y - 1 = 0$.

ĐS: $C\left(-\frac{10}{3}; \frac{3}{4}\right)$.

Bài 208. Đại học khối A năm 2009 (Chương trình cơ bản)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm $I(6;2)$ là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Điểm $M(1;5)$ thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng $\Delta: x + y - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AB.

$$\text{ĐS: } AB: \begin{cases} y - 5 = 0 \\ x - 4y + 19 = 0 \end{cases}.$$

Bài 209. Đại học khối B năm 2009 (Chương trình nâng cao)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh $A(-1;4)$ và các đỉnh B, C thuộc đường thẳng $\Delta: x - y - 4 = 0$. Xác định tọa độ các điểm B và C, biết diện tích tam giác ABC bằng 18.

$$\text{ĐS: } B\left(\frac{11}{2}; \frac{3}{2}\right), C\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right) \vee B\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right), C\left(\frac{11}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

Bài 210. Đại học khối D năm 2009 (Chương trình cơ bản)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $M(2;0)$ là trung điểm của cạnh AB. Đường trung tuyến và đường cao qua đỉnh A lần lượt có phương trình là $7x - 2y - 3 = 0$, $6x - y - 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AC.

$$\text{ĐS: } (AC): 3x - 4y + 5 = 0.$$

Bài 211. Đại học khối A năm 2010 (Chương trình nâng cao)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh $A(6;6)$; đường thẳng đi qua trung điểm của các cạnh AB và AC có phương trình $x + y - 4 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C, biết điểm $E(1;-3)$ nằm trên đường cao đi qua đỉnh C của tam giác đã cho.

$$\text{ĐS: } B(0;-4), C(-4;0) \vee B(-6;2), C(2;-6).$$

Bài 212. Đại học khối B năm 2010 (Chương trình cơ bản)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A, có đỉnh $C(-4;1)$, phân giác trong góc A có phương trình $x + y - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng BC, biết diện tích tam giác ABC bằng 24 và đỉnh A có hoành độ dương.

$$\text{ĐS: } BC: 3x - 4y + 16 = 0.$$

Bài 213. Đại học khối D năm 2010 (Chương trình nâng cao)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(0;2)$ và Δ là đường thẳng đi qua O. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên Δ . Viết phương trình đường thẳng Δ , biết khoảng cách từ H đến trục hoành bằng AH.

$$\text{ĐS: } \Delta_{12}: (\sqrt{5} - 1)x \pm 2\sqrt{\sqrt{5} - 2}y = 0.$$

Bài 214. Đại học khối B năm 2011 (Chương trình cơ bản)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $\Delta: x - y - 4 = 0$ và $d: 2x - y - 2 = 0$. Tìm tọa độ điểm N thuộc đường thẳng d sao cho đường thẳng ON cắt đường thẳng Δ tại điểm M thỏa mãn $OM.ON = 8$.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad N(0; -2) \vee N\left(\frac{6}{5}; \frac{2}{5}\right).$$

Bài 215. Đại học khối D năm 2011 (Chương trình cơ bản)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $B(-4; 1)$, trọng tâm $G(1; 1)$ và đường thẳng chứa phân giác trong của góc A có phương trình $x - y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A và C.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad A(4; 3), C(3; -1).$$

Bài 216. Đại học khối A năm 2012 (Chương trình cơ bản)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho $CN = 2ND$. Giả sử $M\left(\frac{11}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và đường thẳng AN có phương trình $2x - y - 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm A.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad A(1; -1) \vee A(4; 5).$$

Email: vandoan_automobile@yahoo.com.vn --- Phone: 0929.031.789 --- 0933755607

C – PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN



① Xác định tâm và bán kính đường tròn

- Nếu phương trình đường tròn có dạng $x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + c = 0$ thì có tâm là $I(-m, -n)$ và bán kính bằng $R = \sqrt{m^2 + n^2 - c}$.
- Nếu phương trình đường tròn có dạng $(x - m)^2 + (y - n)^2 = R^2$ thì tâm I được xác định $I(m, n)$ và bán kính R .

🔍 Lưu ý

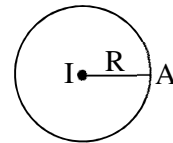
- Nếu $m^2 + n^2 - c > 0$ là phương trình đường tròn nếu thỏa mãn điều kiện: $R > 0$.
- Điều kiện đường thẳng tiếp xúc với đường tròn Δ là $d(I, \Delta) = R$.

② Lập phương trình đường tròn

Để lập phương trình đường tròn ta thường cần phải xác định **tâm** và **bán kính R** của đường tròn. Khi đó phương trình đường tròn là $(x - m)^2 + (y - n)^2 = R^2$.

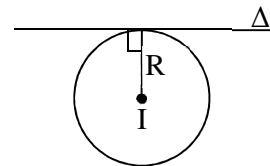
a/ **Dạng 1.** có tâm I và đi qua điểm A.

- Tâm $I(m, n)$.
- Bán kính $R = IA$.



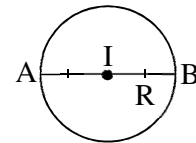
b/ **Dạng 2.** có tâm I và tiếp xúc với đường thẳng Δ .

- Tâm $I(m, n)$.
- Bán kính $R = d(I, \Delta)$.



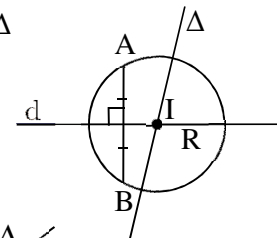
c/ **Dạng 3.** có đường kính AB.

- Tâm I là trung điểm AB.
- Bán kính $R = \frac{AB}{2}$.



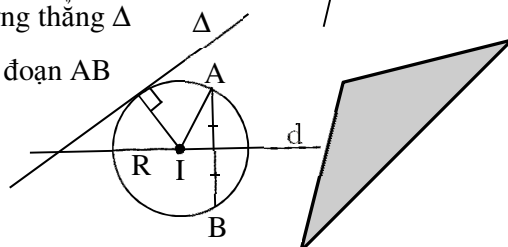
d/ **Dạng 4.** đi qua hai điểm A, B và có tâm I nằm trên đường thẳng Δ .

- Viết phương trình đường trung trực d của đoạn AB.
- Xác định tâm I là giao điểm của d và Δ .
- Bán kính $R = IA = IB$.



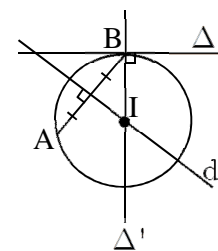
e/ **Dạng 5.** (C) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường thẳng Δ .

- Viết phương trình đường trung trực d của đoạn AB.
- Tâm I của (C) thỏa mãn: $\begin{cases} I \in d \\ d(I, \Delta) = IA \end{cases}$.
- Bán kính $R = IA$.



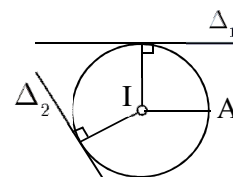
f/ **Dạng 6.** đi qua điểm A và tiếp xúc với đường thẳng Δ tại điểm B

- Viết phương trình đường trung trực d của đoạn AB.
- Viết phương trình đường thẳng Δ' đi qua B và Δ .
- Xác định tâm
- Bán kính



g/ **Dạng 7.** đi qua điểm A và tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2

- Tâm I của
- Bán kính

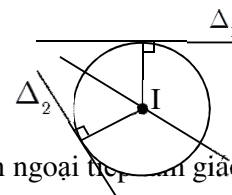


Lưu ý

- Muốn bỏ dấu giá trị tuyệt đối trong , ta xét dấu miền mặt phẳng định bởi Δ_1 và Δ_2 hay xét dấu khoảng cách đại số từ A đến Δ_1 và Δ_2 .
- Nếu $\Delta_1 \parallel \Delta_2$, ta tính , và được thay thế bởi .

h/ **Dạng 8.** tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và có tâm nằm trên đường thẳng d

- Tâm I của
- Bán kính



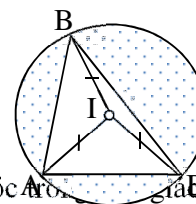
i/ **Dạng 9.** đi qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C (đường tròn ngoại tiếp tam giác)

Cách 1

- Phương trình của có dạng:
- Lần lượt thay toạ độ của A, B, C vào ta được hệ phương trình ẩn .
- Giải hệ phương trình này ta tìm được phương trình của .

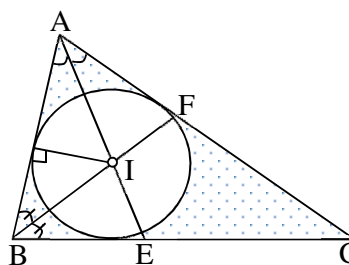
Cách 2

- Tâm I của
- Bán kính



j/ **Dạng 10.** nội tiếp tam giác ABC

- Viết phương trình của hai đường phân giác trong của hai góc A và B.
- Xác định tâm I là giao điểm của hai đường phân giác trên.
- Bán kính



③ Tập hợp các tâm đường tròn (quỹ tích tâm I của đường tròn)

Để tìm tập hợp các tâm I của đường tròn ta có thể làm theo các bước sau

— **Bước 1.** Tìm giá trị của m để tồn tại tâm I.

— **Bước 2.** Tìm tọa độ tâm I. Giả sử: I .

— **Bước 3.** Khử m giữa x và y ta được phương trình .

— **Bước 4.** Dựa vào điều kiện của m ở bước 1 để giới hạn miền của x hoặc y.

— **Bước 5.** Phương trình tập hợp điểm là cùng với phần giới hạn ở bước 4.

🔍 **Lưu ý:** Để tìm tập hợp điểm là đường tròn, ta cũng thực hiện tương tự như các bước trên.

④ Vị trí tương đối của đường thẳng d và đường tròn (C)

Để biện luận số giao điểm của đường thẳng và đường tròn ta có thể thực hiện như sau

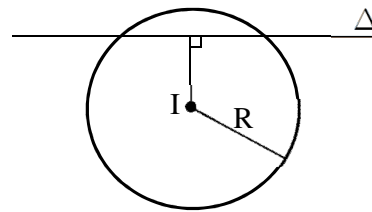
☞ **Phương pháp 1.** So sánh khoảng cách từ tâm I đến với bán kính R.

— Xác định tâm I và bán kính R của .

— Tính khoảng cách từ I đến
+ cắt tại hai điểm phân biệt.

+ tiếp xúc với .

+ và không có điểm chung.

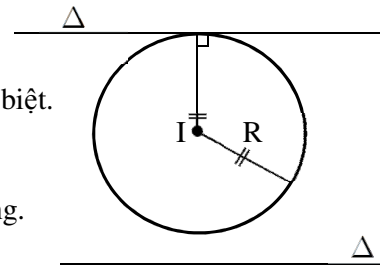


☞ **Phương pháp 2.** Tọa độ giao điểm (nếu có) của và là nghiệm của hệ phương trình:

+ Hệ có 2 nghiệm cắt tại hai điểm phân biệt.

+ Hệ có 1 nghiệm tiếp xúc với .

+ Hệ vô nghiệm và không có điểm chung.



⑤ Vị trí tương đối của hai đường tròn và

Để biện luận số giao điểm của hai đường tròn và , ta có thể thực hiện theo hai phương pháp

☞ **Phương pháp 1.** So sánh độ dài đoạn nối tâm I_1I_2 với các bán kính R_1, R_2 .

— cắt tại hai điểm.

— $I_1I_2 = R_1 + R_2 \Leftrightarrow (C_1)$ tiếp xúc ngoài với (C_2) .

— $I_1I_2 = |R_1 - R_2| \Leftrightarrow (C_1)$ tiếp xúc trong với (C_2) .

— $I_1I_2 > R_1 + R_2 \Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) ở ngoài nhau.

— $I_1I_2 < |R_1 - R_2| \Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) ở trong nhau.

☞ **Phương pháp 2.** Phương pháp đại số: Toạ độ các giao điểm (nếu có) của và là nghiệm của hệ phương trình

- Hệ có hai nghiệm $\Leftrightarrow$ cắt tại 2 điểm.
- Hệ có một nghiệm $\Leftrightarrow$ tiếp xúc với .
- Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow$ và không có điểm chung.

⑥ **Tiếp tuyến của đường tròn**

- Cho đường tròn có tâm I, bán kính R và đường thẳng Δ .
- Δ tiếp xúc với .

a/ **Dạng 1. Tiếp tuyến tại một điểm** .

- **Phương pháp 1.** Tiếp tuyến đi qua và có VTPT .
- **Phương pháp 2.** Phân đôi toạ độ:

Phương trình tiếp tuyến có dạng :

b/ **Dạng 2. Tiếp tuyến có phương cho trước.**

- **Bước 1.** Viết phương trình của Δ có phương cho trước :
- **Bước 2.** Dựa vào điều kiện tiếp xúc để tìm thành phần còn lại.

Từ đó suy ra phương trình của Δ .

☞ **Lưu ý :** Các dạng phương cho trước thường gặp là

- Tiếp tuyến Tiếp tuyến .
- Tiếp tuyến Tiếp tuyến .
- Tiếp tuyến có hệ số góc bằng k Tiếp tuyến .
- Tiếp tuyến tạo với đường thẳng một góc α . Khi đó ta linh hoạt sử

dụng một trong hai công thức hoặc .

c/ **Dạng 3. Tiếp tuyến vẽ từ một điểm ở ngoài đường tròn** .

- Viết phương trình của Δ đi qua A (chứa 2 tham số).
- Dựa vào điều kiện: ta tìm được các tham số. Từ đó suy ra phương trình của Δ .

d/ **Dạng 4. Lập phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C_1) và (C_2) .**

- **Bước 1.** Giả sử tiếp tuyến là $\Delta : Ax + By + C = 0$ với $A^2 + B^2 > 0$.
- **Bước 2.** Theo điều kiện tiếp xúc của Δ với (C_1) và (C_2) :
$$\begin{cases} d(I_1; \Delta) = R_1 \\ d(I_2; \Delta) = R_2 \end{cases}$$

— **Bước 3.** Kết luận về tiếp tuyến chung của Δ .

e/ Họ tiếp tuyến của đường tròn

— Cho đường tròn (C) có phương trình : $(C) : (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

— Tiếp tuyến với (C) tại $M(x_o; y_o) \in (C)$ có dạng :

$$(x - a)(x_o - a) + (y - b)(y_o - b) = R^2 \Leftrightarrow (x - a) \cdot \frac{x_o - a}{R} + (y - b) \cdot \frac{y_o - b}{R} = R.$$

— Vì $M(x_o; y_o) \in (C) \Leftrightarrow \left(\frac{x_o - a}{R}\right)^2 + \left(\frac{y_o - b}{R}\right)^2 = 1$. Do đó có thể đặt :

$$\begin{cases} \frac{x_o - a}{R} = \sin t \\ \frac{y_o - b}{R} = \cos t \end{cases}, t \in [0; 2\pi).$$

— Khi đó, mọi tiếp tuyến Δ của (C) có dạng : $(\Delta) : (x - a) \sin t + (y - b) \cos t = R$.

— Ta gọi các tiếp tuyến Δ với tham số t là họ tiếp tuyến của (C) . Tọa độ tiếp điểm

của (C) với Δ là $\begin{cases} x = a + R \sin t \\ y = b + R \cos t \end{cases}$.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

XÁC ĐỊNH TÂM VÀ BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN

Bài 217. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình đường tròn. Tìm tâm và bán kính của đường tròn đó

1/ $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$.

2/ $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$.

3/ $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 1 = 0$.

4/ $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$.

5/ $16x^2 + 16y^2 + 16x - 8y = 11$.

6/ $7x^2 + 7y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$.

7/ $2x^2 + 2y^2 - 4x + 12y + 11 = 0$.

8/ $4x^2 + 4y^2 + 4x - 5y + 10 = 0$.

Bài 218. Tìm m để các phương trình sau là phương trình đường tròn

1/ $x^2 + y^2 + 4mx - 2my + 2m + 3 = 0$.

2/ $x^2 + y^2 - 2(m + 1)x + 2my + 3m^2 - 2 = 0$.

3/ $x^2 + y^2 - 2(m - 3)x + 4my - m^2 + 5m + 4 = 0$.

4/ $x^2 + y^2 - 2mx - 2(m^2 - 1)y + m^4 - 2m^4 - 2m^2 - 4m + 1 = 0$.

5/ $x^2 + y^2 - 6x + 2y \ln m + 3 \ln m + 7 = 0$ ($\circ$).

6/ $x^2 + y^2 - 2x + 4y + \ln(m - 2) + 4 = 0$ ($\circ$).

7/ $x^2 + y^2 - 2e^{2m}x + 2e^m y + 6e^{2m} - 4 = 0$ ($\circ$).

$$8/ \quad x^2 + y^2 - 2x \cos m + 4y + \cos^2 m - 2 \sin m + 5 = 0 \quad (\circ).$$

$$9/ \quad x^2 + y^2 - 4x \cos m + 2y \sin m - 4 = 0 \quad (\circ).$$

LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

Bài 219. Viết phương trình đường tròn có tâm I và đi qua điểm A, với

$$1/ \quad I(2; 4), A(-1; 3).$$

$$2/ \quad I(-3; 2), A(1; -1).$$

$$3/ \quad I(-1; 0), A(3; -11).$$

$$4/ \quad I(1; 2), A(5; 2).$$

$$5/ \quad I(3; 5), A(7; 2).$$

$$6/ \quad I(0; 0), A(4; 4).$$

Bài 220. Viết phương trình đường tròn có tâm I và tiếp xúc với đường thẳng Δ , với

$$1/ \quad I(3; 4), \Delta : 4x - 3y + 15 = 0.$$

$$2/ \quad I(2; 3), \Delta : 5x - 12y - 7 = 0.$$

$$3/ \quad I(-3; 2), \Delta \equiv O_x.$$

$$4/ \quad I(-3; -5), \Delta \equiv O_y.$$

$$5/ \quad I(-1; 2), \Delta : x - 2y + 7 = 0.$$

$$6/ \quad I(0; 0), \Delta : y - 2x = 0.$$

Bài 221. Viết phương trình đường tròn có đường kính AB, với

$$1/ \quad A(-2; 3), B(6; 5).$$

$$2/ \quad A(0; 1), C(5; 1).$$

$$3/ \quad A(-3; 4), B(7; 2).$$

$$4/ \quad A(5; 2), B(3; 6).$$

$$5/ \quad A(1; 1), B(7; 5).$$

$$6/ \quad A(1; 5), B(-1; 1).$$

Bài 222. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và có tâm I nằm trên đường thẳng Δ , với

$$1/ \quad A(2; 3), B(-1; 1), \Delta : x - 3y - 11 = 0.$$

$$2/ \quad A(0; 4), B(2; 6), \Delta : x - 2y + 5 = 0.$$

$$3/ \quad A(2; 2), B(8; 6), \Delta : 5x - 3y + 6 = 0.$$

$$4/ \quad A(-1; 0), B(1; 2), \Delta : x - y - 1 = 0.$$

$$5/ \quad A(-1; 2), B(3; 0), \Delta : 7x + y - 6 = 0.$$

$$6/ \quad A(0; 0), B(1; 2), \Delta : x - y = 0.$$

Bài 223. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường thẳng Δ , với

$$1/ \quad A(1; 2), B(3; 4), \Delta : 3x + y - 3 = 0.$$

$$2/ \quad A(6; 3), B(3; 2), \Delta : x + 2y - 2 = 0.$$

$$3/ \quad A(-1; -2), B(2; 1), \Delta : 2x - y + 2 = 0.$$

$$4/ \quad A(2; 0), B(4; 2), \Delta \equiv O_y.$$

Bài 224. Viết phương trình đường tròn đi qua điểm A và tiếp xúc với đường thẳng Δ tại điểm B, với

$$1/ \quad A(-2; 6), \Delta : 3x - 4y = 15, B(1; -3).$$

$$2/ \quad A(-2; 1), \Delta : 3x - 2y = 6, B(4; 3).$$

$$3/ \quad A(6; -2), \Delta \equiv O_x, B(6; 0).$$

$$4/ \quad A(4; -3), \Delta : x + 2y - 3 = 0, B(3; 0).$$

Bài 225. Viết phương trình đường tròn đi qua điểm A và tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 , với

$$1/ \quad A(2; 3),$$

$$\Delta_1 : 3x - 4y + 1 = 0,$$

$$\Delta_2 : 4x + 3y - 7 = 0.$$

$$2/ \quad A(1; 3),$$

$$\Delta_1 : x + 2y + 2 = 0,$$

$$\Delta_2 : 2x - y + 9 = 0.$$

$$3/ \quad A \equiv O(0; 0),$$

$$\Delta_1 : x + y - 4 = 0,$$

$$\Delta_2 : x + y + 4 = 0.$$

4/ $A(3; -6),$

$\Delta_1 \equiv O_x,$

$\Delta_2 \equiv O_y.$

Bài 226. Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và có tâm nằm trên đường thẳng d , với

1/ $\Delta_1 : 3x + 2y + 3 = 0, \quad \Delta_2 : 2x - 3y + 15 = 0, \quad d : x - y = 0.$

2/ $\Delta_1 : x + y + 4 = 0, \quad \Delta_2 : 7x - y + 4 = 0, \quad d : 4x + 3y - 2 = 0.$

3/ $\Delta_1 : 4x - 3y - 16 = 0, \quad \Delta_2 : 3x + 4y + 3 = 0, \quad d : 2x - y + 3 = 0.$

4/ $\Delta_1 : 4x + y - 2 = 0, \quad \Delta_2 : x + 4y + 17 = 0, \quad d : x - y + 5 = 0.$

Bài 227. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, với

1/ $A(2; 0), B(0; -3), C(5; -3).$

2/ $A(5; 3), B(6; 2), C(3; -1).$

3/ $A(1; 2), B(3; 1), C(-3; -1).$

4/ $A(-1; -7), B(-4; -3), C \equiv O(0; 0).$

5/ $AB : x - y + 2 = 0, \quad BC : 2x + 3y - 1 = 0, \quad CA : 4x + y - 17 = 0.$

6/ $AB : x + 2y - 5 = 0, \quad BC : 2x + y - 7 = 0, \quad CA : x - y + 1 = 0.$

Bài 228. Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC, với

1/ $A(2; 6), B(-3; -4), C(5; 0).$

2/ $A(2; 0), B(0; -3), C(5; -3).$

3/ $AB : 2x - 3y + 21 = 0, \quad BC : 3x - 2y - 6 = 0, \quad CA : 2x + 3y + 9 = 0.$

4/ $AB : 7x - y + 11 = 0, \quad BC : x + y - 15 = 0, \quad CA : 7x + 17y + 65 = 0.$

Bài 229. Lập phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau

1/ (C) đi qua ba điểm: $O(0; 0), M(1; 2), N(-2; 4).$

2/ (C) đi qua ba điểm: $A(1; 2), B(5; 2), C(1; -3).$

3/ (C) đi qua ba điểm: $A(4; 5), B(3; -2), C(1; 4).$

4/ (C) đi qua ba điểm: $A(1; 3), B(5; 6), C(7; 0).$

5/ (C) đi qua ba điểm: $A(2; 1), B(2; 5), C(-2; 1).$

6/ (C) đi qua ba điểm: $A(-2; 4), B(5; 5), C(6; -2).$

7/ (C) có tâm $I(2; -5)$ và tiếp xúc với $O_x.$

8/ (C) có tâm $I(1; 3)$ và tiếp xúc với $O_y.$

9/ (C) qua $A(9; 9)$ và tiếp với trục O_x tại điểm $M(6; 0).$

10/ (C) tiếp xúc với trục O_x tại điểm $A(2; 0)$ và khoảng cách từ tâm của (C) đến $B(6; 4)$ bằng 5.

11/ (C) tiếp xúc với cả hai trục tọa độ và qua $M(2; 1).$

12/ (C) tiếp xúc với cả hai trục tọa độ và có tâm nằm trên đường thẳng $d : 4x - 2y - 8 = 0.$

13/ (C) qua hai điểm $A(2; 3), B(-2; 1)$ và có tâm nằm trên trục hoành.

14/ (C) qua hai điểm $A(2; 0), B(3; 1)$ và bán kính $R = 5.$

15/ (C) qua hai điểm $A(-1; 1), B(0; 2)$ và có tâm nằm trên đường thẳng $d : 2x + 3y = 0.$

- 16/ (C) tiếp xúc với đường thẳng $d_1 : x - 2y + 3 = 0$ tại $M(1;2)$ và có tâm thuộc đường thẳng $d_2 : x - 5y - 5 = 0$.
- 17/ (C) tiếp xúc với đường thẳng $d_1 : 3x - 4y - 31 = 0$ tại điểm $M(1;-7)$ và có bán kính $R = 5$.
- 18/ (C) tiếp xúc với đường tròn $(C') : x^2 + y^2 - 2x = 0$ tại điểm $A(2;0)$ và $R = 5$.
- 19/ (C) qua $A(5;3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d : x + 3y + 2 = 0$ tại $M(1;-1)$.
- 20/ (C) qua các giao điểm của $(C_1) : x^2 + y^2 - 9 = 0$ và $(C_2) : x^2 + y^2 - 2x - 2y = 14$ và có tâm nằm trên đường thẳng $d : x + 6y - 6 = 0$.
- 21/ (C) đối xứng với đường tròn $(C') : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ qua $d : x - y - 1 = 0$.
- 22/ (C) đối xứng với đường tròn $(C') : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 3$ qua $d : x + y - 1 = 0$.
- 23/ (C) đối xứng với đường tròn $(C') : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ qua $d : x - 2 = 0$.

TẬP HỢP ĐIỂM (Quỹ tích tâm đường tròn)

Bài 230. Tìm tập hợp các tâm I của đường tròn (C) có phương trình (m và t là tham số)

- 1/ $x^2 + y^2 - 2(m-1)x - 4my + 3m + 11 = 0$.
- 2/ $x^2 + y^2 - 2mx - 4(m+1)y + 3m + 14 = 0$.
- 3/ $x^2 + y^2 - 2mx - 2m^2y + 2 = 0$.
- 4/ $x^2 + y^2 + mx - m(m+2)y - 2m^2 - 4 = 0$.
- 5/ $x^2 + y^2 - 2(\cos 2t + 4)x - 2y \sin 2t + 6 \cos 2t - 3 = 0$ (o).
- 6/ $x^2 + y^2 - 4x \sin t + 4(\cos 2t - \sin t)y - 2 \cos^2 t = 0$ (o).
- 7/ $x^2 + y^2 - 2(2 - e^t)x + 4(e^{2t} - 1)y - e^t - 3 = 0$ (o).
- 8/ $(t^2 + 1)(x^2 + y^2) + 8(t^2 - 1)x - 4(t^2 + 4t + 1)y - 3t^2 - 3 = 0$ (o).

Bài 231. Tìm tập hợp các tâm I của đường tròn (C), biết

- 1/ (C) tiếp xúc với đường thẳng $d : 6x - 8y + 15 = 0$ và có bán kính $R = 3$.
- 2/ (C) tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1 : x + 2y - 3 = 0$, $d_2 : x + 2y + 6 = 0$.
- 3/ (C) tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1 : 2x + 3y - 6 = 0$, $d_2 : 3x - 2y + 9 = 0$.
- 4/ (C) tiếp xúc với đường tròn $(C') : x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ và có bán kính $R = 2$.
- 5/ (C) đi qua điểm $A(2;3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d : y - 5 = 0$.

Bài 232. Cho $(C_m) : x^2 + y^2 - 2mx - 4(m-2)y + 6 - m = 0$.

- 1/ Tìm điều kiện của m để (C_m) là đường tròn.
- 2/ Tìm tập hợp tâm của họ đường tròn (C_m) khi m thay đổi.

Bài 233. Cho $(C_m): x^2 + y^2 + (m+2)x - (m+4)y + 1 = 0$.

- 1/ Chứng minh (C_m) là họ đường tròn.
- 2/ Chứng minh rằng trong các đường tròn của (C_m) có một đường tròn qua gốc tọa độ. Tìm phương trình đường tròn đó.

Bài 234. Cho $(C_m): x^2 + y^2 - 2(m+1)x + 4my + 17 = 0$.

- 1/ Tìm điều kiện m để (C_m) là đường tròn.
- 2/ Với giá trị nào của m thì đường tròn (C_m) tiếp xúc với đường thẳng $d: x + y - 1 = 0$.
- 3/ Tìm tập hợp tâm của họ (C_m) khi m thay đổi.

Bài 235. Cho $(C_m): x^2 + y^2 - 4mx - 2(m+1)y - 1 = 0$.

- 1/ Tìm điều kiện m để (C_m) là đường tròn.
- 2/ Tìm điểm cố định của họ (C_m) khi m thay đổi.
- 3/ Tìm tập hợp tâm của họ (C_m) khi m thay đổi.

Bài 236. Cho $(C_m): x^2 + y^2 + (m+3)x - (m+2)y + m - 13 = 0$.

- 1/ Chứng minh (C_m) là họ đường tròn.
- 2/ Chứng minh rằng khi m thay đổi thì (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định.

Bài 237. Cho $(C_m): x^2 + y^2 + (m+2)x - (m+4)y + m + 1 = 0$.

- 1/ Định m để (C_m) là đường tròn có bán kính nhỏ nhất.
- 2/ Tìm tập hợp tâm của họ đường tròn (C_m) .
- 3/ Chứng minh rằng khi m thay đổi thì (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định.

Bài 238. Cho $(C_m): x^2 + y^2 - 2mx - 4(2m-1)y + 5 = 0$.

- 1/ Tìm điều kiện của m để (C_m) là đường tròn.
- 2/ Tìm m để đường tròn (C_m) cắt trục hoành tại hai điểm A, B sao cho $AB = 4$.

Bài 239. Cho $(C_m): x^2 + y^2 - 2mx + 2my + m^2 - 2m + 3 = 0$.

- 1/ Định m để (C_m) là đường tròn. Khi đó tìm tọa độ tâm và bán kính.
- 2/ Định m để (C_m) tiếp xúc với hai trục tọa độ.
- 3/ Định m để (C_m) cắt trục Ox tại hai điểm A, B sao cho $AB = 2$.

Bài 240. Cho hai điểm $A(2; -4)$, $B(-6; 2)$. Tìm tập hợp các điểm $M(x; y)$ sao cho

- 1/ $AM^2 + BM^2 = 100$.
- 2/ $MA = 3MB$.
- 3/ $AM^2 + BM^2 = k^2$, ($k > 0$).
- 4/ $2MA^2 - 3MB^2 = OM^2$.

Bài 241. Cho hai điểm $A(2; 3)$, $B(-2; 1)$. Tìm tập hợp các điểm $M(x; y)$ sao cho

- 1/ $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.
- 2/ $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 4$.

Bài 242. Tìm tập hợp các điểm M sao cho tổng bình phương các khoảng cách từ đó đến hai đường thẳng d và d' bằng k , với

$$d: x - y + 3 = 0, \quad d': x + y - 1 = 0, \quad k = 9.$$

Bài 243. Cho bốn điểm $A(4;4)$, $B(-6;4)$, $C(-6;-2)$, $D(4;-2)$.

- 1/ Chứng tỏ rằng ABCD là hình chữ nhật.
- 2/ Tìm tập hợp các điểm M sao cho tổng bình phương các khoảng cách từ M đến các cạnh của hình chữ nhật bằng 100.

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

Bài 244. Xét vị trí tương đối của đường thẳng d và đường tròn (C) trong các trường hợp

- 1/ $d: x + y - 2 = 0$ & $(C): x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$.
- 2/ $d: \begin{cases} x = t \\ y = 5 - 2t \end{cases}$ & $(C): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$.

Bài 245. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$ và đường thẳng $\Delta: 3x - y + m = 0$. Tìm các giá trị của m để

- 1/ Đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn (C).
- 2/ Đường thẳng Δ cắt đường tròn (C).
- 3/ Đường thẳng Δ và đường tròn (C) không có điểm chung.

Bài 246. Biện luận theo m số giao điểm của đường thẳng d và đường tròn (C), với

- 1/ $d: mx - y - 3m - 2 = 0$ & $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$.
- 2/ $d: 2x - y + m = 0$ & $(C): x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$.
- 3/ $d: x + y - 1 = 0$ & $(C): x^2 + y^2 - 2(2m + 1)x - 4y + 4 - m = 0$.
- 4/ $d: mx + y - 4m = 0$ & $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$.
- 5/ $d: x - my + 2m + 3 = 0$ & $(C): x^2 + y^2 + x - 2y - 2 = 0$.
- 6/ $d: mx - y + 2 = 0$ & $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$.
- 7/ $d: mx - y + 7 - 4m = 0$ & $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$.
- 8/ $mx - y + 3m - 1 = 0$ & $(C): x^2 + y^2 - 4x - 3y = 0$.

Bài 247. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ và đường thẳng d đi qua điểm $A(-1;0)$ và có hệ số góc k

- 1/ Viết phương trình đường thẳng d.
- 2/ Biện luận theo k vị trí tương đối của d và (C).
- 3/ Suy ra phương trình các tiếp tuyến của (C) xuất phát từ A.

Bài 248. Cho đường thẳng d và đường tròn (C)

- a/ Chứng tỏ d cắt (C).
 - b/ Tìm tọa độ các giao điểm của d và (C).
- 1/ d đi qua $M(-1;5)$ và có hệ số góc $k = -\frac{1}{3}$, $(C): x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$.

$$2/ \quad d: 3x - y - 10 = 0, \quad (C): x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0.$$

Bài 249. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ và điểm $M(4;2)$. Viết phương trình đường thẳng d qua M và cắt đường tròn (C) tại hai điểm A và B sao cho M là trung điểm của AB .

Bài 250. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 1 = 0$ và đường thẳng $d: y = x$.

1/ Chứng minh rằng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B .

2/ Tính độ dài đoạn AB .

Bài 251. Viết phương trình đường thẳng qua $A(2;3)$ và cắt đường tròn $(C): (x+1)^2 + y^2 = 9$ tại hai điểm M và N sao cho $MN = 6$.

Bài 252. Cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ và đường thẳng $\Delta: 3x - 4y + 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng Δ và cắt (C) tại hai điểm A và B sao cho AB có độ dài lớn nhất.

Bài 253. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(3;2)$ và cắt đường tròn (C) theo một dây cung có độ dài

1/ Lớn nhất.

2/ Nhỏ nhất.

Bài 254. Cho đường tròn $(C): (x+1)^2 + (y+2)^2 = 2$ và đường thẳng $d: 3x - 2y - 1 = 0$.

1/ Xác định vị trí tương đối của d và (C) .

2/ Tìm trên đường thẳng d điểm $M(x_0; y_0)$ sao cho $(x_0^2 + y_0^2)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 255. Tìm trên đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0$ điểm M có khoảng cách đến đường thẳng $\Delta: 3x - 4y + 23 = 0$

1/ Nhỏ nhất.

2/ Lớn nhất.

Bài 256. Cho đường tròn $(C_m): x^2 + y^2 - 2mx + 2y + m + 7 = 0$ có tâm là I . Xác định m để đường thẳng $d: x + y + 1 = 0$ cắt (C_m) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho ΔIAB đều.

Bài 257. Cho $(C_m): x^2 + y^2 + (m+2)x - (m+4)y + m + 1 = 0$. Chứng minh rằng (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định. Suy ra giá trị của m để (C_m) là đường tròn có bán kính nhỏ nhất.

Bài 258. Cho đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y-3)^2 = 2$ và đường thẳng $\Delta: x - y - 2 = 0$. Tìm tọa độ điểm M trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến Δ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Bài 259. Xét vị trí tương đối của hai đường tròn (C_1) và (C_2) , tìm tọa độ giao điểm (nếu có) với

$$1/ \quad (C_1): x^2 + y^2 + 6x - 10y + 24 = 0$$

$$(C_2): x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0.$$

$$2/ \quad (C_1): x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$$

$$(C_2): x^2 + y^2 - 10x - 14y + 70 = 0.$$

$$3/ \quad (C_1): x^2 + y^2 - 6x - 3y = 0$$

$$(C_2) \text{ có tâm } I_2\left(5; \frac{5}{2}\right) \text{ và bán kính } R_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$4/ \quad (C_1): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0$$

$$(C_2): x^2 + y^2 - x - 5y + 4 = 0.$$

Bài 260. Biện luận số giao điểm của hai đường tròn (C_1) và (C_2) , với

$$\begin{aligned} 1/ & \begin{cases} (C_1): x^2 + y^2 - 6x - 2my + m^2 + 4 = 0 \\ (C_2): x^2 + y^2 - 2mx - 2(m+1)y + m^2 + 4 = 0 \end{cases} \\ 2/ & \begin{cases} (C_1): x^2 + y^2 + 4mx - 2my + 2m + 3 = 0 \\ (C_2): x^2 + y^2 + 4(m+1)x - 2my + 6m - 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Bài 261. Cho hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 7x - 7 = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 - x - 7y - 18 = 0$.

- 1/ Chứng tỏ (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm A và B.
- 2/ Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A và B.

Bài 262. Cho hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 1 = 0$ và $(C_m): x^2 + y^2 - 2(m+1)x + 4my - 5 = 0$.
Tìm m để (C_1) và (C_m) tiếp xúc với nhau.

Bài 263. Cho họ đường tròn $(C_m): x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 5m^2 - 1 = 0$.

- 1/ Tìm m để (C_m) cắt đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 = 1$ tại hai điểm phân biệt A và B.
- 2/ Tìm m để (C_m) và $(C_2): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ tiếp xúc với nhau.

Bài 264. Cho hai đường tròn $(C_1): (x+2)^2 + (y-2)^2 = 2$ và $(C_2): (x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$.

- 1/ Chứng minh rằng (C_1) và (C_2) nằm ngoài nhau.
- 2/ Cho $M(1;2)$. Hãy tìm hai điểm $A \in (C_1)$, $B \in (C_2)$ sao cho M là trung điểm của AB.

Bài 265. Cho hai điểm $A(8; 0)$, $B(0; 6)$.

- 1/ Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB.
- 2/ Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của OA, AB, OB. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP.
- 3/ Chứng minh rằng hai đường tròn trên tiếp xúc nhau. Tìm tọa độ tiếp điểm.

Bài 266. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$. Đường tròn (C') có tâm $I(2;2)$ cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{2}$. Hãy viết phương trình đường thẳng AB.

Bài 267. Cho ΔABC có $A(1;0)$, $B(0;2)$ và đường tròn $(C): (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$. Viết phương trình đường thẳng đi qua các giao điểm của đường tròn (C) và đường tròn ngoại tiếp ΔABO .

TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Bài 268. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M \in (C)$

- 1/ $(C): x^2 + y^2 = 25$ & $M(3;4)$.
- 2/ $(C): x^2 + y^2 = 50$ & $M(5;-5)$.
- 3/ $(C): (x-3)^2 + (y+4)^2 = 169$ & $M(8;-16)$.
- 4/ $(C): x^2 + y^2 + 4x - 9 = 0$ & $M(1;2)$.

$$5/ (C): x^2 + y^2 + 4x + 4y + 3 = 0 \quad \& \quad M(-3;0).$$

$$6/ (C): x^2 + y^2 - 2x - 8y - 8 = 0 \quad \& \quad M(4;0).$$

Bài 269. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$.

- 1/ Lập phương trình tiếp tuyến của (C) tại A có hoành độ là 0.
- 2/ Lập phương trình tiếp tuyến của (C) các giao điểm của nó với trục tung Oy .
- 3/ Lập phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) và đường thẳng $d: x + y = 0$.

Bài 270. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 8x - 6y + 17 = 0$.

- 1/ Chứng tỏ $M(6;5)$ nằm trên đường tròn (C) . Viết phương trình tiếp tuyến d của (C) qua M
- 2/ Chứng tỏ $N(0;-1)$ nằm ngoài đường tròn (C) . Viết phương trình tiếp tuyến d' của (C) qua điểm N.

Bài 271. Viết phương trình tiếp tuyến (C) kẻ từ một điểm cho trước

- 1/ $(C): x^2 + y^2 - 4x + 2y + 2 = 0 \quad \& \quad A(3;1).$
- 2/ $(C): x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0 \quad \& \quad A(0;-1).$
- 3/ $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0 \quad \& \quad A(3;5).$
- 4/ $(C): x^2 + y^2 - 2x - 8y - 8 = 0 \quad \& \quad A(-4;-6).$
- 5/ $(C): x^2 + y^2 + 2x - 8y + 13 = 0 \quad \& \quad A(1;1).$
- 6/ $(C): x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0 \quad \& \quad A(8;7).$
- 7/ $(C): (x-3)^2 + (y-1)^2 = 5. \quad \& \quad A(2;3).$

Bài 272. Cho đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$.

- 1/ Tìm tọa độ tâm và bán kính của đường tròn (C) .
- 2/ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(5;3)$.
- 3/ Lập phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d_1: 5x - 12y + 2 = 0$.
- 4/ Lập phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d_2: 3x + 4y - 7 = 0$.
- 5/ Lập phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(3;6)$.

Bài 273. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$.

- 1/ Tìm tọa độ tâm và bán kính của đường tròn (C) .
- 2/ Lập phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d_1: 4x + 2y - 1 = 0$.
- 3/ Lập phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d_2: 2x - y + 7 = 0$.

Bài 274. Cho đường tròn (C) , điểm A và đường thẳng d .

- a/ Chứng tỏ điểm A ở ngoài (C) .
- b/ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ A.

c/ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với d .

d/ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với d .

$$1/ (C): x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0 \quad A(-7;7) \quad d: 3x + 4y - 6 = 0.$$

$$2/ (C): x^2 + y^2 + 4x - 8y + 10 = 0 \quad A(2;2) \quad d: x + 2y - 6 = 0.$$

Bài 275. Cho đường tròn (C) và đường thẳng d .

a/ Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm của (C) với các trục tọa độ.

b/ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với d .

c/ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với d .

$$1/ (C): x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0 \quad \& \quad d: 2x - y + 3 = 0.$$

$$2/ (C): x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0 \quad \& \quad d: 2x - 3y + 1 = 0.$$

$$3/ (C): x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0 \quad \& \quad d: 3x - 4y + 12 = 0.$$

Bài 276. Cho đường tròn (C) . Hãy lập phương trình tiếp tuyến với (C) , biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng d một góc α trong các trường hợp sau:

$$1/ (C): (x-1)^2 + (y+1)^2 = 10 \quad \alpha = 45^\circ \quad \& \quad d: 2x + y - 4 = 0.$$

$$2/ (C): x^2 + y^2 + 4x - 8y + 10 = 0 \quad \alpha = 60^\circ \quad \& \quad d: 2x - 3y + 1 = 0.$$

Bài 277. Cho hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 = 9$ và $(C_2): x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$.

1/ Tìm tâm và bán kính của đường tròn (C_1) và (C_2) .

2/ Xét vị trí tương đối của (C_1) và (C_2) .

3/ Viết phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) .

Bài 278. Cho hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$.

1/ Tìm tâm và bán kính của đường tròn (C_1) và (C_2) .

2/ Xét vị trí tương đối của (C_1) và (C_2) .

3/ Viết phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) .

Bài 279. Cho hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$.

1/ Tìm tâm và bán kính của đường tròn (C_1) và (C_2) .

2/ Xét vị trí tương đối của (C_1) và (C_2) .

3/ Viết phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) .

Bài 280. Cho hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 10x = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$.

1/ Tìm tâm và bán kính của đường tròn (C_1) và (C_2) .

2/ Xét vị trí tương đối của (C_1) và (C_2) .

3/ Viết phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) .

Bài 281. Cho hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$.

- 1/ Tìm tâm và bán kính của đường tròn (C_1) và (C_2) .
- 2/ Xét vị trí tương đối của (C_1) và (C_2) .
- 3/ Viết phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) .

Bài 282. Lập phương trình tiếp tuyến chung của các đường tròn (C_1) và (C_2) sau:

- 1/ $(C_1): x^2 + y^2 = 1$ & $(C_2): (x - 8)^2 + (y - 6)^2 = 16$.
- 2/ $(C_1): (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ & $(C_2): (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$.
- 3/ $(C_1): (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$ & $(C_2): (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$.
- 4/ $(C_1): x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ & $(C_2): x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$.
- 5/ $(C_1): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ & $(C_2): x^2 + y^2 + 4x - 4y - 56 = 0$.
- 6/ $(C_1): x^2 + y^2 - 10x = 0$ & $(C_2): x^2 + y^2 + 4x - 2y - 2 = 0$.
- 7/ $(C_1): x^2 + y^2 - 10x + 24y - 56 = 0$ & $(C_2): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$.
- 8/ $(C_1): x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$ & $(C_2): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$.
- 9/ $(C_1): x^2 + y^2 - 8x - 4y - 29 = 0$ & $(C_2): x^2 + y^2 - 2x - 12y + 33 = 0$.
- 10/ $(C_1): x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ & $(C_2): x^2 + y^2 - 8x - 8y + 28 = 0$.
- 11/ $(C_1): x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ & $(C_2): x^2 + y^2 - 6x - 4y + 19 = 0$.
- 12/ $(C_1): x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ & $(C_2): x^2 + y^2 - 12x - 6y + 44 = 0$.

Bài 283. Cho hai điểm $A(1; 2)$, $B(3; 4)$ và đường thẳng $d: 3x + y + 3 = 0$.

- 1/ Viết phương trình các đường tròn (C_1) và (C_2) qua A, B và tiếp xúc với d.
- 2/ Viết phương trình tiếp tuyến chung (khác d) của hai đường tròn đó.

Bài 284. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$ và điểm $A(8; -1)$.

- 1/ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ A.
- 2/ Gọi M và N là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ A của (C) . Viết phương trình đường thẳng MN và tính độ dài đoạn thẳng MN.

Bài 285. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$ và điểm $A(3; 5)$.

- 1/ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ A.
- 2/ Gọi E và F là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ A của (C) . Viết phương trình đường thẳng EF và tính độ dài đoạn thẳng EF.

Bài 286. Cho đường tròn $(C): (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$. Lập phương trình tiếp tuyến của đường tròn biết rằng tiếp tuyến:

- 1/ Tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.
- 2/ Tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4.

Bài 287. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 6x - 2my + m^2 + 4 = 0$.

- 1/ Tìm m để từ $A(2; 3)$ có thể kẻ được hai tiếp tuyến với (C) .

2/ Viết phương trình các tiếp tuyến đó khi $m = 6$.

Bài 288. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ và đường thẳng $d: x - y + 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc d mà từ đó có thể kẻ được hai đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (C) tại A và B sao cho $\widehat{AMB} = 60^\circ$.

Bài 289. Cho đường tròn $(C): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ và đường thẳng $d: 3x - 4y + m = 0$. Tìm m để trên d có duy nhất một điểm P mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến PA, PB đến đường tròn sao cho ΔPAB đều.

Bài 290. Cho $(C_\alpha): (x^2 + y^2) \sin \alpha = 2(x \cos \alpha + y \sin \alpha - \cos \alpha), \forall \alpha \neq k\pi$.

1/ Chứng minh rằng (C_α) luôn là đường tròn $\forall \alpha$. Định tâm và bán kính đường tròn (C_α) .

2/ Chứng minh rằng (C_α) luôn có một tiếp tuyến cố định và xác định tiếp tuyến đó.

Bài 291. Cho hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$.

1/ Chứng minh (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm A và B .

2/ Viết phương trình đường tròn (C) qua A, B và điểm $C(3; -1)$.

3/ Cho điểm $M(4; 1)$. Chứng minh qua M có hai tiếp tuyến đến (C) . Gọi E, F là hai tiếp điểm của hai tiếp tuyến trên với (C) . Hãy lập phương trình đường tròn (C') ngoại tiếp ΔMEF .

Bài 292. Lập phương trình đường tròn (C) có bán kính nhỏ nhất, tiếp xúc với đường thẳng

$d: 3x + 4y + 20 = 0$ và đường tròn $(C'): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$.

Bài 293. Tìm trên đường thẳng $d: 3x + 4y + 20 = 0$ những điểm mà từ đó có thể kẻ đến đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$ những tiếp tuyến có độ dài nhỏ nhất.

Bài 294. Cho $(C_1): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 - 10x - 6y + 30 = 0$ có tâm lần lượt là I và J .

1/ Chứng minh rằng (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài nhau. Tìm tọa độ tiếp điểm H .

2/ Gọi d là tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) không đi qua H . Tìm giao điểm K của d và IJ .

3/ Viết phương trình đường tròn (C') đi qua K và tiếp xúc với (C_1) và (C_2) tại H .

XÉT VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN ĐỂ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH – HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Bài 295. Định m để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} mx + (m + 1)y = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$.

Bài 296. Định m để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} x + my - m = 0 \\ x^2 + y^2 - x = 0 \end{cases}$.

Bài 297. Định m để hệ phương trình sau có đúng một nghiệm $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0 \\ mx - y + 2 = 0 \end{cases}$.

Bài 298. Định m để hệ phương trình sau có đúng hai nghiệm $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1 + m) \\ (x + y)^2 = 4 \end{cases}$.

Bài 299. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (2m + 1)x + my + m - 1 = 0 \end{cases}$.

Xác định tham số m để hệ phương trình có hai nghiệm $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ sao cho biểu thức

$A = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 300. Cho hệ phương trình $\begin{cases} |x - 1| + |y + 1| = 1 \\ x^2 + y^2 = m \end{cases}$. Định m để hệ có nghiệm nhiều nhất.

Bài 301. Định m để phương trình sau có nghiệm: $x + y + \sqrt{2x(y - 1)} + m = 2$.

Bài 302. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 \leq 0 \\ x - y + m \geq 0 \end{cases}$.

1/ Giải hệ khi $m = 1$.

2/ Định m để hệ có nghiệm duy nhất.

Bài 303. Định m để hệ bất phương trình sau có nghiệm duy nhất $\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 1)^2 \leq m \\ (x + 1)^2 + (y - 1)^2 \leq m \end{cases}$.

Email: vandoan_automobile@yahoo.com.vn --- Phone: 0929.037.138 --- 0933.755.607

BÀI TẬP QUA CÁC KÌ THI

Bài 304. Các Trường Cao Đẳng năm 1984

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc Oxy, cho hai điểm $A(a;0)$ và $B(0;a)$.

1/ Gọi (C) là đường tròn tiếp xúc với Ox tại A và tâm C có tung độ là $\frac{m\sqrt{2}}{2}$ (m là tham số).

Viết phương trình đường tròn này. Tìm tọa độ giao điểm P của (C) và đường thẳng AB.

2/ Viết phương trình đường tròn (C') đi qua P và tiếp xúc với Oy tại B. Hai đường tròn (C) và (C') cắt nhau tại P và Q. Viết phương trình đường thẳng PQ. Chứng minh rằng khi m thay đổi, đường thẳng PQ luôn luôn đi qua một điểm cố định.

ĐS: 1/ $P\left(a - \frac{m\sqrt{2}}{2}; a\right)$. 2/ $(C') : \left(x - a + \frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (y - a)^2 = \left(a - \frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^2$,

$PQ : m\sqrt{2}y - (2a - m\sqrt{2})y = 0$ và PQ luôn đi qua gốc tọa độ O khi m thay đổi.

Bài 305. Cao đẳng Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh năm 1996

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường tròn: $(C) : x^2 + y^2 - 1 = 0$ và

$(C_m) : x^2 + y^2 - 2(m+1)x + 4my - 5 = 0$.

1/ Tìm quỹ tích tâm (C_m) khi m thay đổi.

2/ Chứng minh rằng: có hai đường tròn (C_m) tiếp xúc với (C) ứng với hai giá trị của m.

ĐS: 1/ Quỹ tích tâm $I(m+1; -2m)$ là d : $2x + y - 2 = 0$. 2/ $m = -1$; $m = \frac{3}{5}$.

Bài 306. Cao đẳng Kinh Tế Đối Ngoại Tp. Hồ Chí Minh năm 1998

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho họ $(C_m) : x^2 + y^2 + 4mx - 2my + 2m + 3 = 0$.

1/ Xác định m để (C_m) là đường tròn.

2/ Tìm tập hợp tâm các đường tròn (C_m) .

Bài 307. Cao đẳng Kinh Tế Đối Ngoại năm 1999 – Hệ chưa phân ban

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho họ đường cong $(C_m) : x^2 + y^2 - 2x - 2y + m = 0$ với m là tham số.

1/ Với điều kiện nào của m thì (C_m) là đường tròn? Xác định tâm và bán kính của (C_m) trong trường hợp này.

2/ Định m để (C_m) là đường tròn có bán kính bằng 1. Gọi đường tròn này là (C) . Viết phương trình đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C) tại điểm $A\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}; 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3/ Viết phương trình tất cả các tiếp tuyến với đường tròn (C) biết chúng vuông góc đường thẳng d.

ĐS: 1/ $m < 2$, $I(1;1)$, $R = \sqrt{2-m}$. 2/ $m = 1$, $d: x - y - \sqrt{2} = 0$.

Bài 308. Cao đẳng Sư Phạm Hà Nội khối A năm 2000

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(2;6)$, $B(-3;-4)$, $C(5;0)$.

1/ Viết phương trình đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

2/ Tìm tọa độ điểm D đối xứng với B qua AC.

Bài 309. Cao đẳng Nông Lâm năm 2000

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;0)$, $B(2;1)$ và đường thẳng d có phương trình (d): $2x - y + 3 = 0$.

1/ Tìm phương trình đường tròn có tâm tại A, tiếp xúc với đường thẳng d. Hãy xét xem điểm B nằm phía trong hay phía ngoài đường tròn đã tìm ?

2/ Tìm trên đường thẳng d điểm M sao cho tổng $(MA + MB)$ là nhỏ nhất so với mọi điểm còn lại trên đường thẳng d. Viết tọa độ điểm M ?

ĐS: 1/ $(x-1)^2 + y^2 = 5$ và điểm B nằm trong đường tròn. 2/ $M\left(-\frac{8}{11}; \frac{17}{11}\right)$.

Bài 310. Cao đẳng Sư Phạm Kỹ Thuật năm 2000

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho phương trình đường tròn: (C): $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$.

Hãy viết phương trình tiếp tuyến với (C) có hệ số góc $k = -1$.

Bài 311. Cao đẳng Kinh Tế Đối Ngoại năm 2000

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, họ đường con (C_m): $x^2 + y^2 - 2x - 2y + m = 0$.

1/ Với điều kiện nào của m thì (C_m) là đường tròn ? Xác định tâm và bán kính của (C_m) trong trường hợp này ?

2/ Định m để (C_m) là đường tròn có bán kính bằng 1. Gọi đường tròn này là (C). Viết phương trình đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C) tại điểm $A\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}; 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3/ Viết phương trình tất cả các tiếp tuyến với đường tròn (C) biết chúng vuông góc với đường thẳng d.

ĐS: 1/ $\begin{cases} m \leq 2 \\ \text{Tâm } I(1;1) \\ R = \sqrt{2-m} \end{cases}$. 2/ $\begin{cases} m = 1 \\ (C): x^2 + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0 \\ \text{TT } d: x - y - \sqrt{2} \end{cases}$. 3/ $\begin{cases} d_1: x - y - \sqrt{2} = 0 \\ d_2: x - y + \sqrt{2} = 0 \end{cases}$.

Bài 312. Cao đẳng Y Tế Nam Định năm 2000 (Hệ Cao đẳng Điều Dưỡng Chính Quy)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy:

1/ Viết phương trình đường tròn tâm Q(-1;2), bán kính $R = \sqrt{13}$, gọi đó là đường tròn (Q).

2/ Tìm tọa độ giao điểm của đường tròn (Q) với đường thẳng Δ có phương trình $(\Delta): x - 5y - 2 = 0$, gọi các giao điểm đó là A, B. Tìm tọa độ điểm C sao cho ΔABC là tam giác vuông và nội tiếp trong đường tròn (Q) .

ĐS: 1/ $(Q): (x+1)^2 + (y-2)^2 = 13$. 2/ $A(2;0), B(-3;-1)$. Nếu BC: đường kính thì $C(1;5)$. Nếu AC: đường kính thì $C(-4;4)$.

Bài 313. Cao đẳng Lao Động – Xã Hội năm 2000

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC có $A(3;-7), B(9;-5), C(-5;9)$.

1/ Viết phương trình đường phân giác góc lớn nhất của ΔABC .

2/ Viết phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $M(-2;-7)$ đến đường tròn ngoại tiếp của ΔABC .
Tìm tọa độ tiếp điểm ?

Bài 314. Cao đẳng Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh khối A năm 2002

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 9$ và điểm $A(1;2)$. Hãy lập phương trình của đường thẳng chứa dây cung của (C) đi qua A sao cho độ dài dây cung đó ngắn nhất ?

Bài 315. Cao đẳng Sư Phạm Hà Tĩnh khối A, B năm 2002

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ và điểm $M(2;4)$.

1/ Chứng tỏ rằng điểm M nằm trong đường tròn.

2/ Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M, cắt đường tròn tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của AB.

3/ Viết phương trình đường tròn đối xứng với đường tròn đã cho qua AB.

ĐS: 1/ Chứng minh $IM < IR$. 2/ $x + y - 6 = 0$. 2/ $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 4$.

Bài 316. Cao đẳng Tài Chính Kế Toán IV năm 2003

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Đề các vuông góc Oxy, cho đường tròn

$(C): (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) , biết rằng tiếp tuyến này đi qua điểm $M_0(6;3)$.

Bài 317. Cao đẳng Mẫu Giáo TW3 năm 2003

Cho tam giác ABC có $A(-1;5)$ và phương trình đường thẳng BC: $x - 2y - 5 = 0$ với $x_B < x_C$ và $I(0;1)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

1/ Viết phương trình các cạnh AB, AC của ΔABC .

2/ Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là chân đường cao vẽ từ các đỉnh A, B, C của tam giác. Tìm tọa độ các điểm A_1, B_1, C_1 .

3/ Gọi E là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta A_1B_1C_1$. Tìm tọa độ điểm E.

Bài 318. Cao đẳng Lương Thực Thực Phẩm năm 2004 (Đại học Lương Thực Thực Phẩm)

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho điểm $A(2;4)$. Viết phương trình đường thẳng trung trực d của đoạn OA. Từ đó suy ra phương trình đường tròn (C) có tâm I ở trên Ox và đi qua hai điểm O và A với O là gốc tọa độ.

ĐS: $d: x + 2y - 5 = 0$, $(C): (x - 5)^2 + y^2 = 25$.

Bài 319. Cao đẳng Sư Phạm Mẫu Giáo TW3 năm 2004

Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ và đường thẳng $d: x - y + 1 = 0$.

- 1/ Viết phương trình đường thẳng vuông góc với d và tiếp xúc với đường tròn.
- 2/ Viết phương trình đường thẳng song song với d và cắt đường tròn tại hai điểm M, N sao cho độ dài $MN = 2$.
- 3/ Tìm tọa độ điểm T trên d sao cho qua T kẻ được hai đường thẳng tiếp xúc với (C) tại hai điểm A, B và $\widehat{ATB} = 60^\circ$.

ĐS: $x + y - 1 + \sqrt{10} = 0$, $\begin{cases} x - y + 3 + 2\sqrt{2} = 0 \\ x - y + 3 - 2\sqrt{2} = 0 \end{cases}$, $T(3;4) \vee T(-3;-2)$.

Bài 320. Cao đẳng Công Nghiệp Hà Nội năm 2004

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho ΔABC , $AB: x + y - 2 = 0$, $AC: 2x + 6y + 3 = 0$, cạnh BC có trung điểm $M(-1;1)$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

ĐS: $(C): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{85}{8}$.

Bài 321. Cao đẳng Giao Thông Vận Tải II năm 2004

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho hai đường tròn: $(C_1): x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 + 6x - 4y - 4 = 0$. Chứng minh rằng hai đường tròn đó cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Hãy viết phương trình trục đẳng phương của hai đường tròn đó.

ĐS: $(C_1) \cap (C_2) = \{A(-7;1), B(1;1)\} \Rightarrow \text{Trục đẳng phương} \equiv AB: \begin{cases} x = 1 + 8t \\ y = 1 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Bài 322. Cao đẳng Giao Thông Vận Tải III năm 2004

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho họ đường con $(C_m): x^2 + y^2 - 4mx + 2(m+2)y + 6m^2 - 1 = 0$.

- 1/ Xác định m để (C_m) là đường tròn. Khi đó, tính theo m tọa độ tâm I và bán kính R của (C_m) .

- 2/ Tìm m để (C_m) là đường tròn có tâm nằm trên đường con $(P): y = x^2 - 7$.

ĐS: 1/ $-1 < m < 5$ và $I(2m; -m-2)$, $R = \sqrt{-m^2 + 4m + 5}$. 2/ $m = -\frac{5}{4} \vee m = 1$.

Bài 323. Cao đẳng Kinh Tế Kỹ Thuật Thái Bình năm 2004

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho ΔABC có $A(1;2)$, $B(2;4)$, $C(3;1)$.

1/ Lập phương trình đường tròn qua A, B, C.

2/ Tìm tọa độ điểm M trên cạnh BC sao cho diện tích ΔABM bằng $\frac{1}{3}$ diện tích ΔABC .

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad 1/ (C): \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}. \quad 2/ M\left(\frac{7}{3}; 3\right).$$

Bài 324. Cao đẳng Công Nghiệp Hà Nội năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho ΔABC , biết các cạnh AB, BC, CA lần lượt có phương trình: $2x + y - 5 = 0$, $x + 2y + 2 = 0$, $2x - y + 9 = 0$. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp ΔABC .

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad I(-1;2).$$

Bài 325. Cao đẳng Kinh Tế – Kỹ Thuật Công Nghiệp I khối A năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho ba điểm $A(-1;2)$,

$B(2;3)$, $C(2;-1)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn qua ba điểm A, B, C.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad I(1;1).$$

Bài 326. Cao đẳng Sư Phạm Hà Nam khối B năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho hai điểm $A(5;0)$, $B(1;4)$ và đường thẳng $d: x + y - 3 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua A, B và có tâm nằm trên đường thẳng d.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad (C): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10.$$

Bài 327. Cao đẳng Sư Phạm Sơn La khối A, B, T, M năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc Oxy, cho đường thẳng $\Delta: 2x + y + 3 = 0$ và hai điểm $A(-5;1)$, $B(-2;4)$.

1/ Viết phương trình đường tròn (C) đi qua A, B và có tâm $I \in \Delta$.

2/ Viết phương trình đường tiếp tuyến tại A với đường tròn (C).

3/ Viết phương trình các tiếp tuyến với (C), biết tiếp tuyến đi qua $D(1;2)$. Tìm tọa độ tiếp điểm.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad 1/ (C): (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9. \quad 2/ x + 5 = 0. \quad 3/ \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow M(1;1) \\ 4x + 3y - 10 = 0 \Rightarrow M\left(\frac{2}{5}; \frac{14}{5}\right) \end{cases}$$

Bài 328. Cao đẳng Sư Phạm Cà Mau khối B năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho $A(-2;-1)$ và đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$.

- 1/ Chứng minh rằng A là một điểm nằm ngoài đường tròn.
 2/ Viết phương trình các đường thẳng đi qua điểm A và tiếp xúc với đường tròn (C).

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad x \pm \frac{16 + 5\sqrt{7}}{9}y + \frac{34 \pm 5\sqrt{7}}{9} = 0.$$

Bài 329. Cao đẳng Sư Phạm Trà Vinh khối B, M năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho ΔABC biết $A(4; -2)$, $B(-2; 2)$, $C(-4; -1)$. Viết phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp ΔABC và phương trình tiếp tuyến với (C) tại B.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad (C): x^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{65}{4} \text{ và } 4x - 7y + 22 = 0.$$

Bài 330. Cao đẳng Tài Chính Kế Toán năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho ba điểm : $A(2; -2)$, $B(0; 4)$, $C(-2; 2)$. Tìm tọa độ trục tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

Bài 331. Cao đẳng Sư Phạm Sóc Trăng năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(4; 2)$, $B(1; -1)$. Viết phương trình đường tròn qua A, B và có tâm nằm trên đường thẳng $2x - y = 0$.

Bài 332. Cao đẳng Y Tế Thanh Hóa năm 2005

Lập phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$ trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy.

Bài 333. Cao đẳng Sư Phạm Vĩnh Phúc năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C), biết rằng tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng $d: x + y = 0$.

Bài 334. Cao đẳng Sư Phạm Quảng Bình năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, viết phương trình đường tròn (C) qua ba điểm $M_1(2; 3)$, $M_2(4; 5)$, $M_3(4; 1)$. Chứng tỏ điểm $K(5; 2)$ thuộc miền trong đường tròn (C). Viết phương trình đường thẳng d qua K sao cho d cắt (C) theo dây cung AB nhận K làm trung điểm.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad (C): x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0, \quad \rho_{K(5;2)/(C)} = -2 < 0, \quad d: \begin{cases} \text{Qua K} \\ \text{VTPT } \vec{n_d} = \vec{IK} \end{cases}.$$

Bài 335. Cao đẳng Kinh Tế – Kỹ Thuật Công Nghiệp II khối A năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$. Lập phương trình đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng $d: x - 2 = 0$.

ĐS: $(C') : (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 2.$

Bài 336. Cao đẳng Xây Dựng số 3 khối A năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$. Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) đi qua $F(0; 3)$.

ĐS: $d : x = 0$ và $d : 3x + 4y - 12 = 0$.

Bài 337. Cao đẳng Kinh Tế Đối Ngoại khối A, D năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$. Tìm tất cả các tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $3x + 4y = 0$.

ĐS: $d : 3x + 4y + 27 = 0 \vee d : 3x + 4y - 23 = 0$.

Bài 338. Cao đẳng Sư Phạm Hưng Yên khối B năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, tìm độ dài dây cung xác định bởi đường thẳng $4x + 3y - 8 = 0$ và đường tròn tâm $I(2; 1)$ tiếp xúc với đường thẳng $5x - 12y + 15 = 0$.

ĐS: $(C) : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$ và độ dài dây cung $AB = \frac{8}{5}$.

Bài 339. Cao đẳng Sư Phạm Mẫu Giáo TW 3 năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho hai đường thẳng có phương trình: $d_1 : x - y + 2 = 0$, $d_2 : 2x + y - 5 = 0$ và điểm $M(-1; 4)$.

1/ Viết phương trình đường thẳng Δ cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B sao cho M là trung điểm của đoạn AB.

2/ Viết phương trình đường tròn (C) qua M và tiếp xúc với đường thẳng d_1 tại giao điểm của d_1 với trục tung.

ĐS: 1/ $AB : x + 1 = 0$. 2/ $(C) : \left(x + \frac{5}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{17}{6}\right)^2 = \frac{25}{18}$.

Bài 340. Cao đẳng Sư Phạm Trung Ương năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ và điểm $A(0; 3)$. Xác định tọa độ tâm và bán kính đường tròn (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) kẻ từ A.

ĐS: Tâm $I(2; -1)$ và bán kính $R = 2$. Có hai tiếp tuyến: $x = 0 \vee 3x + 4y - 12 = 0$.

Bài 341. Dự bị khối A – Cao đẳng Sư Phạm Hà Nam năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy.

1/ Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(2; 4)$ và tiếp xúc với đường tròn

$(C) : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$.

2/ Cho điểm $A(-2;3)$, $B\left(\frac{1}{4};0\right)$, $C(2;0)$. Xác định tọa độ điểm I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

ĐS: 1/ $x - 2 = 0 \vee y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$. 2/ $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Bài 342. Cao đẳng Kỹ Thuật Y Tế I năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình $d_1: 2x + y + 2 = 0$, $d_2: 2x + y - 1 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm nằm trên trục Ox, đồng thời tiếp xúc với d_1 và d_2 .

ĐS: $(C): \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{20}$.

Bài 343. Cao đẳng Tài Chính – Hải Quan khối A năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$. Lập phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C) biết rằng tiếp tuyến đó đi qua $A(-4;3)$.

ĐS: $3x + y + 9 = 0 \vee x + 3y - 5 = 0$.

Bài 344. Cao đẳng Kỹ Thuật Cao Thắng năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$.

1/ Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn, biết các tiếp tuyến này vuông góc với đường thẳng $x + 2y = 0$.

2/ Tìm điều kiện của m để đường thẳng $x + (m - 1)y + m = 0$ tiếp xúc với đường tròn.

ĐS: 1/ $d: 2x - y - 8 + 5\sqrt{5} = 0 \vee d: 2x - y - 8 - 5\sqrt{5} = 0$.

2/ $d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow 8m^2 - 7m + 7 = 0$ vô nghiệm nên không có m thỏa YCBT.

Bài 345. Cao đẳng Kỹ Thuật Tp. Hồ Chí Minh khóa II năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho điểm $I(-2;1)$ và đường thẳng $d: 3x - 4y = 0$.

1/ Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I và tiếp xúc với d.

2/ Viết phương trình tập hợp các điểm mà qua các điểm đó vẽ được hai tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp tuyến vuông góc nhau.

ĐS: 1/ $(C): (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$. 2/ Tập hợp là $(C): (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 8$.

Bài 346. Cao đẳng Kinh Tế – Công Nghệ Tp. Hồ Chí Minh khối A năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc Oxy, cho điểm $A(3;0)$ và đường thẳng d có phương trình: $3x - 4y + 16 = 0$. Viết phương trình đường tròn tâm A và tiếp xúc với d.

$$\text{ĐS: } (C): (x-3)^2 + y^2 = 25.$$

Bài 347. Cao đẳng Kinh Tế Tp. Hồ Chí Minh năm 2007

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho đường tròn có phương trình $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$. Lập phương trình tiếp tuyến với (C) qua điểm $M(-4; 3)$.

$$\text{ĐS: } \Delta_1: 3x + y + 9 = 0 \quad \vee \quad \Delta_2: x + 3y - 5 = 0.$$

Bài 348. Cao đẳng Sư Phạm TW Tp. Hồ Chí Minh năm 2007

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho ΔABC có $A(2; 2)$, $B(8; 6)$, $C(1; -1)$.

- 1/ Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ đỉnh A của ΔABC .
- 2/ Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và có tâm nằm trên đường thẳng $d: 5x - 3y + 6 = 0$.
- 3/ Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A và cách điểm B một khoảng bằng 6.

$$\text{ĐS: } 1/ H(3; 1). \quad 2/ (C): (x-3)^2 + (y-7)^2 = 26. \quad 3/ x-2=0 \quad \vee \quad 5x+12y-34=0.$$

Bài 349. Cao đẳng Kỹ Thuật Cao Thắng năm 2007

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình:

$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 28 = 0$. Viết phương trình các tiếp tuyến với đường tròn (C) , biết các tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $5x + 4y = 0$.

$$\text{ĐS: } d_1: 5x + 4y + 18 = 0 \quad \vee \quad d_2: 5x + 4y - 6 = 0.$$

Bài 350. Cao đẳng A, A1, B, D năm 2012 (Chương trình nâng cao)

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 2x - y + 3 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc d, cắt trục Oxy tại A và B, cắt trục Oy tại C và D sao cho $AB = CD = 2$.

$$\text{ĐS: } (C): (x+3)^2 + (y+3)^2 = 10.$$

Bài 351. Đại học Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh năm 1976

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho bốn điểm: $A(1; -1)$, $B(4; 2)$, $C(1; 5)$ và $D(-2; 2)$.

- 1/ Tính môđun của $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CB}$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$ vuông góc. Từ đó suy ra tứ giác ABCD là hình gì?
- 2/ Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD.

$$\text{ĐS: } 1/ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{CB}| = 3\sqrt{2}; \text{ Hình vuông. } 2/ (C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 3.$$

Bài 352. Đại học Giáo Dục Tp. Hồ Chí Minh khối A năm 1976

Người ta cho hai trục tọa độ trục chuẩn $x'Ox$ và $y'Oy$ và một số dương α . Vòng tròn (C) với phương trình: $x^2 + y^2 - \alpha^2 = 0$ cắt nửa trục Ox ở A và nửa trục Ox' ở A'.

- 1/ Viết phương trình vòng tròn đường kính OA' . Ta gọi ω là tâm của vòng tròn đó.
- 2/ Gọi Az là nửa tiếp tuyến ở bên trong góc $x'Oy$ của vòng tròn (C) . Viết phương trình của vòng tròn tiếp xúc với $y'Oy$, $x'Ox$ và Az . Gọi γ là tâm của vòng tròn đó.

3/ Tìm phương trình của những tiếp tuyến chung cho các vòng tròn tâm ω và γ .

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad 1/ (C_\omega): \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2. \quad 2/ (C_\gamma): \left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

$$3/ d_1: x = 0 \vee d_{23}: y = \frac{1}{2}x + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} \vee d_4: y = -\frac{3}{4}x + \frac{\alpha}{4}.$$

Bài 353. Đại học Y – Nha – Dược Tp. Hồ Chí Minh năm 1977

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho các đường tròn $(C): x^2 + y^2 - x - y = 0$ và $(C'): x^2 + y^2 - x + y = 0$.

- 1/ Xác định tọa độ tâm của (C) và (C') . Tính bán kính của từng đường tròn nói trên.
 2/ Một đường thẳng d có phương trình $y = mx$ cắt vòng tròn (C) tại hai điểm O và M, đồng thời cắt đường tròn (C') tại hai điểm O và M'. Tính tọa độ điểm M và M' theo m.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad 1/ I_1\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ và } I_2\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), R_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad 2/ \begin{cases} M\left(\frac{m-1}{m^2+1}; \frac{m(m-1)}{m^2-1}\right) \\ M'\left(\frac{1-m}{m^2+1}; \frac{m(1-m)}{m^2-1}\right) \end{cases}.$$

Bài 354. Đại học Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh năm 1978

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến (C) xuất phát từ điểm $M(4; 7)$.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad d_1: y = 2x - 1 \vee d_2: y = \frac{x}{2} + 5.$$

Bài 355. Đại học Kinh Tế Tp. Hồ Chí Minh năm 1978

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$. Đường tròn này cắt Ox tại A và O, cắt Oy tại B và O.

- 1/ Viết phương trình các tiếp tuyến với (C) tại O, A, B.
 2/ Viết phương trình các tiếp tuyến với (C) xuất phát từ $M(4; 7)$.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad 1/ \begin{cases} t_O: x - 2y = 0 \\ t_A: x + 2y + 2 = 0 \\ t_B: x + 2y - 8 = 0 \end{cases} \quad 2/ d_1: y = 2x - 1 \vee d_2: y = \frac{x}{2} + 5.$$

Bài 356. Đại học Bách Khoa Hà Nội năm 1978

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc Oxy, hãy viết phương trình đường tròn qua hai điểm: $A\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và tiếp xúc với đường thẳng: $\Delta: x - \sqrt{3}y - 2 = 0$.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad (C_1): x^2 + y^2 = 1 \vee (C_2): (x - 2\sqrt{3} + 2)^2 + (y - 2\sqrt{3} - 1)^2 = 25.$$

Bài 357. Đại học Nông Nghiệp – Tổng Hợp – Sư Phạm – Kỹ Thuật năm 1980

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc Oxy, hãy viết phương trình đường tròn tâm $A(2; -1)$, tiếp xúc với đường thẳng $4y - 3x = 5$ và xác định tiếp điểm với đường đó.

ĐS: $(C): (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ và $H\left(\frac{29}{25}; \frac{53}{25}\right)$.

Bài 358. Đại học Kinh Tế–Sư Phạm–Nông Nghiệp–Bách Khoa–Tổng Hợp–Y–Nha–Dược năm 1982

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho hai điểm $A(8; 0)$, $B(0; 6)$.

1/ Viết phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp ΔOAB .

2/ Viết phương trình các tiếp tuyến với đường tròn (C) và qua $S(14; 8)$.

3/ Viết phương trình đường tròn nội tiếp ΔOAB .

ĐS: 1/ $(C): x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$. 2/ $T_1: y - 8 = 0 \vee T_2: 4x - 3y + 4 = 0$.

3/ $(C'): (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

Bài 359. Đại học Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh năm 1986

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, lập phương trình đường tròn đi qua các điểm $A(-1; 1)$ và $B(1; -3)$ có tâm nằm trên đường thẳng có phương trình:

$2x - y + 1 = 0$.

ĐS: $\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{65}{9}$.

Bài 360. Đại học Nông Lâm Tp. Hồ Chí Minh năm 1991

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho họ đường cong (C_m) có phương trình: $(C_m): x^2 + y^2 - (m - 2)x + 2my - 1 = 0$.

1/ Tìm tập hợp tâm các đường tròn (C_m) .

2/ Chứng tỏ rằng các đường tròn này đều qua hai điểm cố định khi m thay đổi.

3/ Cho $m = -2$ và điểm $A(0; -1)$. Viết phương trình các tiếp tuyến của đường tròn (C_{-2}) vẽ từ điểm A.

ĐS: 1/ Quỹ tích tâm I là $d: 2x + y + 2 = 0$. 2/ Hai điểm cố định $A(-2; -1)$, $B\left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

3/ Có hai tiếp tuyến: $(T_1): y + 1 = 0 \vee (T_2): 12x - 5y = 0$.

Bài 361. Đại học Kiến Trúc Tp. Hồ Chí Minh năm 1995

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho hai điểm $A(a; 0)$ và $B(0; a)$ với $a > 0$. Cho tham số thực $m \neq 0$ và $m \neq a$.

1/ Hãy viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại A và có tâm thỏa $y_1 = m$ (y_1 là tung độ của I).

2/ (C) cắt đường thẳng AB tại A và P. Hãy tìm tọa độ của điểm P. Từ đó hãy viết phương trình đường tròn (E) đi qua P và tiếp xúc với trục tung tại B.

3/ (C) và (E) cắt nhau tại P và Q. Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn luôn đi qua một điểm cố định.

ĐS: 1/ $(C): (x-a)^2 + (y-m)^2 = m^2$.

2/ $P(a-m; m)$ và $(E): (x-a+m)^2 + (y-a)^2 = (a-m)^2$.

3/ PQ luôn đi qua điểm cố định $O(0;0)$.

Bài 362. Đại học Công Đoàn năm 1995

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho họ đường thẳng phụ thuộc tham số α : $(x-1)\cos\alpha + (y-1)\sin\alpha - 1 = 0$.

1/ Tìm tập hợp các điểm của mặt phẳng không thuộc bất cứ đường thẳng nào của họ.

2/ Chứng minh rằng mọi đường thẳng của họ đều tiếp xúc với một đường tròn cố định.

ĐS: 1/ Tập hợp các điểm mà (C_α) không thể đi qua là miền trong của hình tròn (C) có phương trình: $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 < 1$.

2/ Tiếp xúc với đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

Bài 363. Đại học Dân Lập Duy Tân năm 1995

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho họ đường tròn (C_m) có phương trình là $(C_m): x^2 - 2mx + y^2 + 2(m+1)y - 12 = 0$.

1/ Tìm quỹ tích tâm của họ đường tròn trên.

2/ Với giá trị nào của m thì bán kính của họ đường tròn đã cho là nhỏ nhất?

3/ Với $m = 2$.

a/ Vẽ đường tròn (C_2) .

b/ Cho đường thẳng d có phương trình là $d: 3x - 3y + 12 = 0$. Tìm khoảng cách ngắn nhất giữa d và (C_2) .

ĐS: 1/ Quỹ tích tâm là $d: x + y + 1 = 0$. 2/ $R_{\min} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

3/ $d[d; (C_2)] = 1$.

Bài 364. Đại học Dân Lập Hùng Vương năm 1995

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho hai đường tròn có phương trình lần lượt là $(C): x^2 + y^2 = 1$ và $(C'): x^2 + y^2 - 6x + 6y + 17 = 0$.

1/ Tìm tâm và bán kính của (C) và (C') .

2/ Tìm phương trình đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn trên.

ĐS: 1/ (C) có tâm $O(0;0)$, $R_1 = 1$ và (C') có tâm $I(3;-3)$, $R_2 = 1$.

2/ $\Delta_{1,2}: -x - y \pm \sqrt{2} = 0$.

Bài 365. Đại học Y Dược Tp. Hồ Chí Minh năm 1995

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, xét hai điểm $A(a;0)$ và $B(0;b)$ với $ab \neq 0$. Gọi (C) là đường tròn tiếp xúc với Ox tại A và có tâm C với tung độ $y_C = m$, trong đó m là tham số, $m \neq 0$ và $m \neq \frac{a^2 + b^2}{ab}$.

1/ Đường thẳng AB cắt đường tròn (C) tại giao điểm thứ hai là P. Hãy xác định tọa độ điểm P.

2/ Xác định tâm K của đường tròn (K) tiếp xúc với trục Oy tại B và đi qua P.

3/ Các đường tròn (C) và (K) cắt nhau tại P và Q. Chứng tỏ khi m thay đổi đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad 1/ P \left(a - \frac{2abm}{a^2 + b^2}; \frac{2b^2m}{a^2 + b^2} \right). \quad 2/ K \left(\frac{a^2 + b^2 - 2bm}{2a}; b \right). \quad 3/ M_o \left(\frac{a^3 - ab^2}{a^2 + b^2}; \frac{ba^2 - b^3}{a^2 + b^2} \right).$$

Bài 366. Đại học Quốc Gia Hà Nội năm 1995

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, viết phương trình đường tròn tiếp xúc với Ox và cắt Oy tại điểm $(0;1)$. Tìm quỹ tích tâm của đường tròn đó.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad (C): x^2 + y^2 - 2ax - (a^2 + 1)y + a^2 = 0 \text{ và quỹ tích là Parabol } (P): y = \frac{x^2 + 1}{2}.$$

Bài 367. Đại học Ngoại Thương năm 1996

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, lập phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác có ba đỉnh là $A(1;1)$, $B(-1;2)$, $C(0;-1)$.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad (C): x^2 + y^2 + x - y - 2 = 0.$$

Bài 368. Đại học Quốc Gia Hà Nội năm 1996

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, lập phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác có ba cạnh nằm trên ba đường thẳng: $d_1: y = \frac{x}{5} - \frac{2}{5}$, $d_2: y = x + 2$, $d_3: y = 8 - x$.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad (C): (x - 2)^2 + y^2 = 26.$$

Bài 369. Đại học Y Dược Tp. Hồ Chí Minh năm 1997 – Hệ chưa phân ban

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc Oxy, cho họ đường tròn có phương trình: $(C_m): x^2 + y^2 - 2mx - 2(1 - m)y + 2m^2 - 2m - 3 = 0$. Cho $m = 2$ và điểm $A(0;3)$. Hãy viết phương trình các tiếp tuyến của (C_2) kẻ từ A.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad d_1 \equiv Oy: x = 0 \vee d_2: 3x + 4y - 12 = 0.$$

Bài 370. Đại học Ngoại Thương Tp. Hồ Chí Minh khối A, D năm 1997

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho đường tròn: $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ và điểm $A(3;5)$. Hãy tìm phương trình các tiếp tuyến kẻ từ A đến đường tròn. Giả sử các tiếp tuyến tiếp xúc với đường tròn tại M và N, tìm độ dài MN.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad d_1: y - 5 = 0 \vee d_2: 24x - 7y - 37 = 0.$$

Bài 371. Đại học Tài Chính Kế Toán Hà Nội năm 1997

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho đường tròn:
 $(C): x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ và điểm $M(2;4)$.

1/ Viết phương trình đường thẳng đi qua M và cắt đường tròn tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của đoạn AB.

2/ Viết phương trình các tiếp tuyến của đường tròn có hệ số góc $k = -1$.

ĐS: 1/ $d: x + y - 6 = 0$. 2/ $\Delta_1: x + y + 2\sqrt{2} + 4 = 0 \vee \Delta_2: x + y - 2\sqrt{2} - 4 = 0$.

Bài 372. Đại học Văn Lang khối A năm 1997

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho họ đường con

$$(C_m): x^2 + y^2 - (m-2)x + 2my - 1 = 0.$$

1/ Tìm tập hợp tâm các đường tròn (C_m) .

2/ Tìm các điểm cố định mà (C_m) luôn đi qua khi m thay đổi.

ĐS: 1/ $I\left(\frac{m-2}{2}; -m\right) \Rightarrow$ tập hợp tâm là $d: 2x + y + 2 = 0$. 2/ $A(2; -1), B\left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

Bài 373. Đại học Y Dược Tp. Hồ Chí Minh năm 1997 (chưa phân ban)

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho họ đường tròn:

$$(C_m): x^2 + y^2 - 2mx - 2(1-m)y + 2m^2 - 2m - 3 = 0. \text{ Tìm quỹ tích tâm của đường tròn.}$$

Cho $m = 2$ và điểm $A(0;3)$. Viết các phương trình tiếp tuyến của (C_2) kẻ từ A.

ĐS: Quỹ tích là $d: y = -x + 1$. Các tiếp tuyến: $x = 0 \vee 3x + 4y - 12 = 0$.

Bài 374. Đại học An Ninh (đề 1) khối A năm 1997

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho hai đường tròn:

$$(C_1): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \text{ và } (C_2): x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 = 0.$$

1/ Xác định các giao điểm của (C_1) và (C_2) .

2/ Viết phương trình đường tròn đi qua hai giao điểm đó và $A(0;1)$.

ĐS: 1/ $B\left(\frac{7-18\sqrt{3}}{13}; \frac{-17-12\sqrt{3}}{13}\right), C\left(\frac{7+18\sqrt{3}}{13}; \frac{-17+12\sqrt{3}}{13}\right)$.

$$2/ (C): 16x^2 + 16y^2 - 28x + 58y - 74 = 0.$$

Bài 375. Đại học Bách Khoa Hà Nội – Đại học Luật Hà Nội năm 1997

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, hãy viết phương trình đường tròn đi qua điểm $A(2; -1)$ và tiếp xúc với hai trục tọa độ Ox và Oy.

ĐS: $(C): (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1 \vee (C): (x-5)^2 + (y+5)^2 = 25$.

Bài 376. Đại học Thủy Sản năm 1997

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho $A(-1;3), B(1;1), M(2;4)$ và đường thẳng $d: y = 2x$.

1/ Tìm tọa độ điểm $C \in d$ sao cho ΔABC cân.

2/ Viết phương trình đường tròn (ABM) .

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad 1/ \text{ Có 4 điểm thỏa yêu cầu: } C\left(\frac{5 \pm \sqrt{15}}{5}; \frac{10 \pm 2\sqrt{15}}{5}\right) \vee C\left(\frac{3 \pm \sqrt{39}}{5}; \frac{6 \pm 2\sqrt{39}}{5}\right).$$

$$2/ \left(C_{ABM}\right): x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x - \frac{11}{2}y + 5 = 0.$$

Bài 377. Đại học Thái Nguyên khối A, B năm 1997

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho họ đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2my = 0$ và họ đường thẳng $d: y = -mx + m$.

1/ Chứng minh rằng d luôn đi qua tâm của đường tròn (C) và họ đường thẳng d qua một điểm cố định.

2/ Tìm quỹ tích giao điểm của họ đường tròn (C) và họ đường thẳng d .

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad 1/ \text{ Điểm cố định } M_0(1;0). \quad 2/ \text{ Quỹ tích điểm là đường cong } y^2 = \frac{x^2(1-x)}{1+x}.$$

Bài 378. Cao đẳng Kinh Tế Đối Ngoại năm 1998 – hệ phân ban

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho họ đường cong có phương trình: $(C_m): x^2 + y^2 + 4mx - 2my + 2m + 3 = 0$.

1/ Định m để (C_m) là đường tròn.

2/ Tìm tập hợp tâm các đường tròn (C_m) .

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad 1/ \quad m < -\frac{5}{3} \vee m > 1. \quad 2/ \text{ Là một phần đường thẳng } d: \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y < -\frac{5}{3} \vee y > 1 \end{cases}.$$

Bài 379. Đại học Thủy Sản năm 1998

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, hãy lập phương trình đường tròn qua $A(3;3)$, $B(1;1)$, $C(5;1)$.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad (ABC): x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0.$$

Bài 380. Đại học Nông Nghiệp I khối A năm 1998

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho $A(3;1)$, $B(0;7)$, $C(5;2)$.

1/ Chứng minh $\triangle ABC$ vuông và tính diện tích của nó.

2/ Giả sử M là điểm chạy trên đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Chứng minh khi đó trọng tâm G của $\triangle MBC$ chạy trên một đường tròn. Viết phương trình chính tắc đường tròn đó.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad 1/ \quad S_{\triangle ABC} = \frac{15}{2}(\text{đvdt}). \quad 2/ \quad (C): \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{25}{18}.$$

Bài 381. Đại học Thái Nguyên khối D năm 1998

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho $A(0;6)$, $B(4;0)$, $C(3;0)$.

Đường thẳng $(\Delta): x = m$ (m thay đổi) cắt AB và AC tại M và N . Gọi hình chiếu của M, N trên trục hoành là P và Q . Gọi H và E lần lượt là trung điểm AO và BC . Gọi I là tâm hình chữ nhật $MNPQ$.

1/ Chứng minh ba điểm H, E, I thẳng hàng.

2/ Tìm tâm đường tròn (ABC) .

3/ Tìm điểm $T \in AC$ sao cho $OT \perp BT$.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad 2/ J\left(\frac{7}{2}; 4\right). \quad 3/ T(2; 2) \vee T\left(\frac{18}{5}; -\frac{6}{5}\right).$$

Bài 382. Đại học Mỹ Thuật Công Nghiệp năm 1998

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho $A(8; 0)$, $B(0; 6)$.

1/ Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔOAB .

2/ Viết phương trình đường tròn nội tiếp ΔOAB .

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad 1/ (C) \equiv (ABC): x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0. \quad 2/ (C'): (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4.$$

Bài 383. Đại học An Ninh năm 1998

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho $A(4; 0)$, $B(0; 3)$.

1/ Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔOAB .

2/ Viết phương trình đường tròn nội tiếp $\Delta OABC$.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad 1/ (C): (x-2)^2 + \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}. \quad 2/ (C'): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1.$$

Bài 384. Đại học Kiến Trúc Hà Nội năm 1998

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho đường tròn có phương trình: $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ và điểm $A(3; 0)$. Viết phương trình đường thẳng chứa dây cung của đường tròn qua A khi:

1/ Dây cung có độ dài là lớn nhất.

2/ Dây cung có độ dài là nhỏ nhất.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad 1/ \Delta: x + 2y - 3 = 0. \quad 2/ d: 2x - y - 6 = 0.$$

Bài 385. Đại học Kỹ Thuật Công Nghệ Tp. Hồ Chí Minh khối A năm 1998

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy:

1/ Cho điểm $A(3; -2)$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Viết phương trình những tiếp tuyến với (C) vẽ từ A và tìm tọa độ các tiếp điểm.

2/ Lập phương trình đường tròn tâm $I(4; 3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d: x + 2y - 5 = 0$.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad 1/ \begin{cases} d_1: y = 2x - 8 \\ d_2: y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases} \text{ và } M(4; 0), N(1; -1). \quad 2/ (C'): (x-4)^2 + (y-3)^2 = 5.$$

Bài 386. Học Viện Bưu Chính Viễn Thông – Hệ Trung Cấp năm 1998

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho đường tròn

$(C): x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$ và điểm $M(0; -1)$. Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C) xuất phát từ M.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad d_1: y + 1 = 0 \vee d_2: 12x - 5y - 5 = 0.$$

Bài 387. Cao đẳng Kinh Tế Đối Ngoại năm 1998 – Hệ phân ban

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$. Tìm phương trình tiếp tuyến với (C) có hệ số góc là -2 .

ĐS: $d_1: 2x + y = 0 \vee d_2: 2x + y - 10 = 0$.

Bài 388. Đại học Xây Dựng Hà Nội năm 1998

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho hai đường tròn tâm $A(1;0)$, bán kính $R_A = 4$ và tâm $B(-1;0)$, bán kính $R_B = 2$. Tìm tập hợp tâm $I(x;y)$ của các đường tròn tiếp xúc với cả hai đường tròn trên.

ĐS: TH₁. $I \in (x'Ox) \cap AB: y = 0$. TH₂. $I \in (E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$.

Bài 389. Đại học Kiến Trúc Hà Nội năm 1998

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho hai đường thẳng: $d_1: 3x + 4y + 5 = 0$, $d_2: 4x - 3y - 5 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta: x - 6y - 10 = 0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng d_1 và d_2 .

ĐS: $(C_1): (x - 10)^2 + y^2 = 49 \vee (C_2): \left(x - \frac{10}{43}\right)^2 + \left(y + \frac{70}{43}\right)^2 = \frac{49}{1849}$.

Bài 390. Đại học Đà Lạt khối B năm 1999

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho đường cong (C_m) có phương trình: $x^2 + y^2 - 2(a + 1)x - 4(a - 1)y + 5 - a = 0$.

1/ Tìm điều kiện của a để (C_m) là đường tròn.

2/ Tìm a để đường tròn (C_m) tiếp xúc với đường thẳng $y = x$.

ĐS: 1/ $a \leq 0 \vee a \geq 1$. 2/ $a = \frac{2 \pm \sqrt{85}}{\sqrt{2}}$.

Bài 391. Đại học Ngoại Thương khối D năm 1999

Cho Parabol $y = x^2 - 2x$ và elíp $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$.

1/ Chứng minh rằng parabol và elíp cắt nhau tại bốn điểm phân biệt A, B, C, D.

2/ Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó.

ĐS: 1/ PTHĐGD: $9x^4 - 36x^3 + 37x^2 - 9 = 0$. 2/ Tâm $I\left(\frac{8}{9}; \frac{4}{9}\right)$, $R = \frac{\sqrt{161}}{9}$.

Bài 392. Đại học Ngoại Thương khối A năm 1999

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho họ vòng tròn $(C_m): x^2 + y^2 - 2mx - 2(m + 1)y + 2m - 1 = 0$.

1/ Chứng minh rằng khi m thay đổi, họ vòng tròn luôn luôn đi qua hai điểm cố định.

2/ Chứng minh rằng với mọi m , họ vòng tròn luôn cắt trục tung tại hai điểm phân biệt.

ĐS: 1/ $A(-1;2)$, $B(1;0)$. 2/ Hai điểm A và B luôn nằm về hai phía trục tung đpcm.

Bài 393. Đại học Ngoại Ngữ Hà Nội khối D năm 1999

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc Oxy, lập phương trình đường thẳng qua gốc tọa độ và cắt đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$ thành một dây cung có độ dài $= 8$.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad d: y = 0 \vee d: y = \frac{3}{4}x.$$

Bài 394. Đại học Dân Lập Kỹ Thuật Công Nghệ khối A, B năm 1999

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$ và đường thẳng $d: Ax + By + 1 = 0$.

1/ Tìm điều kiện của A, B để d tiếp xúc với (C) .

2/ Giả sử d tiếp xúc với (C) và M, N là hai điểm thuộc (C) sao cho $x_M = -1, y_N = 1$. Hãy tính A, B để tổng khoảng cách từ M và N đến d là nhỏ nhất.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad 1/ \quad A^2 + B^2 = 1. \quad 2/ \quad \text{Đặt} \quad \begin{cases} A = \cos x \\ B = \sin x \end{cases} \quad S_{\min} = 2 - \sqrt{2} \text{ khi } x = \frac{7\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ B = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Bài 395. Đại học Y Dược Tp. Hồ Chí Minh năm 1999

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho phương trình các đường tròn: $(C): x^2 + y^2 - 1 = 0$ và $(C_m): x^2 + y^2 - 2(m+1)x + 4my - 5 = 0$.

1/ Chứng minh rằng: có hai đường tròn thuộc họ (C_m) tiếp xúc với (C) .

2/ Viết phương trình các tiếp tuyến chung của hai đường tròn vừa tìm được ở câu 1/.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad 1/ \quad \begin{cases} (C_{-1}): \text{Tâm } I_1(0;2), R_1 = 3 \\ (C_{3/5}): \text{Tâm } I_2\left(\frac{8}{5}; \frac{6}{5}\right), R_2 = 3 \end{cases} \quad 2/ \quad d_{1,2}: 2x + y - 2 \pm 3\sqrt{5} = 0.$$

Bài 396. Đại học Quốc Gia Hà Nội khối A năm 1999 – Hệ chưa phân ban

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho họ đường tròn có phương trình: $x^2 + y^2 - 2(m+1)x - 2(m+2)y + 6m + 7 = 0$ với m là tham số.

1/ Tìm quỹ tích tâm các đường tròn đó có họ đó.

2/ Xác định tọa độ tâm của đường tròn thuộc họ đã cho mà tiếp xúc với trục Oy.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad 1/ \quad \begin{cases} I_m(m+1; m+2) \\ R = \sqrt{2(m^2 - 1)} \end{cases} \quad \text{Quỹ tích tâm là một phần của đường thẳng } \Delta: y = x + 1 \text{ với}$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ x > 2 \end{cases} \quad 2/ \quad \text{Tâm } I_3(4;5) \text{ tiếp xúc với trục tung Oy.}$$

Bài 397. Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh đợt 1 khối A năm 1999

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho hai đường tròn có phương trình: $(C_1): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 - 10x - 6y + 30 = 0$ có tâm lần lượt là I và J .

1/ Chứng minh rằng (C_1) tiếp xúc ngoài với (C_2) và tìm tọa độ tiếp điểm H .

2/ Gọi d là một tiếp tuyến chung không đi qua H của (C_1) và (C_2) . Tìm tọa độ giao điểm K của d và đường thẳng IJ . Viết phương trình đường tròn (C) đi qua K và tiếp xúc với hai đường tròn (C_1) và (C_2) tại H .

ĐS: 1/ $\frac{\overrightarrow{HI}}{\overrightarrow{HJ}} = -\frac{3}{2} \Rightarrow H\left(\frac{19}{5}; \frac{7}{5}\right)$. 2/ $K(11;11)$ và $(C): \left(x - \frac{37}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{31}{5}\right)^2 = 36$.

Bài 398. Đại học Ngoại Ngữ Hà Nội năm 2000

Trong mặt phẳng cho ba điểm: $A(-1;7), B(4;-3), C(-4;1)$. Hãy viết phương trình đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

ĐS: $(C): (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$.

Bài 399. Đại học Dân Lập Hùng Vương – Ban B năm 2000

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho hai điểm $A(3;0), B(0;4)$.

1/ Hãy viết phương trình đường cao của $\triangle OAB$ hạ từ đỉnh O và đường phân giác của góc $\widehat{OAB}$.

2/ Hãy viết phương trình đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp của $\triangle OAB$.

ĐS: 1/ $OH: 3x - 4y = 0$, $At: x + 2y - 3 = 0$. 2/ $\begin{cases} (C): \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = \frac{25}{4} \\ (C'): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases}$

Bài 400. Đại học Dân Lập Hùng Vương ban C năm 2000

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho họ đường tròn $(C_m): x^2 - y^2 - 2(1+m)x + 2m^2y + m^4 = 0, (m \neq 1)$.

1/ Hãy tìm quỹ tích của tâm họ đường tròn này khi tham số thực m biến thiên.

2/ Hãy chứng tỏ rằng các đường tròn trong họ đó luôn luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định. Hãy tìm đường thẳng cố định đó ?

ĐS: 1/ Quỹ tích tâm $I(1-m; m^2)$ là đường Parabol $y = x^2 - 2x + 1, x \neq 0$. 2/ Oy.

Bài 401. Đại học Hàng Hải năm 2000

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$ và điểm $A(1;3)$.

1/ Xác định tâm I và bán kính R của đường tròn (C) và chứng tỏ A nằm ngoài (C) .

2/ Lập phương trình tiếp tuyến của (C) xuất phát từ A .

ĐS: 1/ $I(3;-1); R = 2; IA = \sqrt{20} > 2$. 2/ $x = 1 \vee y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{4}$.

Bài 402. Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh đợt 2 năm 2000

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho họ đường cong (C_m) có phương trình: $x^2 + y^2 + 2(m-1)x - 2(m-2)y + m^2 - 8m + 13 = 0$.

1/ Tìm tất cả các giá trị của m để (C_m) là đường tròn. Tìm quỹ tích tâm I của đường tròn (C_m) khi m thay đổi.

2/ Cho $m = 4$. Viết phương trình các tiếp tuyến kẻ từ điểm $A(1;5)$ đến đường tròn (C_4) .

ĐS: 1/ $m < -4 \vee m > 2$ và quỹ tích tâm I là hai tia nằm trên $d: y = -x - 1$ với $\begin{cases} x > 5 \\ x < -1 \end{cases}$.

$$2/ d_1: 7x + 24y - 127 = 0 \vee d_2: x - 1 = 0.$$

Bài 403. Đại học Thủy Sản Nha Trang năm 2000

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho họ đường tròn (C_m) có phương trình: $x^2 + y^2 - (m - 2)x + 2my - 1 = 0$.

1/ Chứng minh rằng họ đường tròn (C_m) đi qua hai điểm cố định khi m thay đổi.

2/ Cho $m = -2$ và điểm $A(0; -1)$. Viết phương trình các tiếp tuyến của (C_{-2}) kẻ từ A .

ĐS: 1/ $M_1(-2; -1), M_2(\frac{2}{5}; \frac{1}{5})$. 2/ $d_1: y + 1 = 0 \vee d_2: 12x - 5y - 5 = 0$.

Bài 404. Đại học Dược Hà Nội năm 2000

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho các đường tròn:

$(C): x^2 + y^2 = 1$ và $(C_m): x^2 + y^2 - 2(m + 1)x + 4my = 5$.

1/ Chứng minh rằng có hai đường tròn $(C_{m_1}), (C_{m_2})$ tiếp xúc với đường tròn (C) ứng với hai giá trị m_1 và m_2 của m .

2/ Xác định phương trình các đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn $(C_{m_1}), (C_{m_2})$.

ĐS: 1/ $m = -1 \wedge m = \frac{3}{5}$. 2/ $\begin{cases} d_1: 2x + y + 3\sqrt{5} - 2 = 0 \\ d_2: 2x + y - 3\sqrt{5} - 2 = 0 \end{cases}$.

Bài 405. Đại học Tây Nguyên khối A, B năm 2000

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc Oxy, cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) có phương trình: $(C_1): x^2 + y^2 - 2x - 9y - 2 = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 - 8x - 9y + 16 = 0$.

1/ Chứng minh rằng hai đường tròn (C_1) và (C_2) tiếp xúc với nhau.

2/ Viết phương trình các tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) .

ĐS: 1/ Tiếp xúc ngoài tại $T(3;1)$. 2/ $\begin{cases} d_1: x - 3 = 0 \\ d_2: x - 2\sqrt{2}y + 2\sqrt{2} - 7 = 0 \\ d_3: x + 2\sqrt{2}y - 2\sqrt{2} - 7 = 0 \end{cases}$

Bài 406. Đại học Dân Lập Hùng Vương – Ban C năm 2000

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho họ đường tròn:

$(C_m): x^2 + y^2 - 2(1 - m)x - 2my + 4 = 0, (m \neq 1)$.

1/ Hãy tìm quỹ tích tâm họ đường tròn này khi tham số m biến thiên.

2/ Hãy chứng tỏ rằng các đường tròn trong họ luôn luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.
Hãy tìm đường thẳng cố định đó.

ĐS: 1/ Quỹ tích tâm I_m là parabol $(P): y = x^2 - 2x + 1$ trừ đi điểm $M(0;1) \in (P)$.

2/ (C_m) luôn tiếp xúc với trục tung $Oy: x = 0$.

Bài 407. Đại học Cần Thơ năm 2000

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho họ đường tròn có phương trình: $(C_m): x^2 + y^2 - (2m + 5)x + (4m - 1)y - 2m + 4 = 0$.

1/ Chứng minh rằng (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định $\forall m \in \mathbb{R}$.

2/ Xác định tất cả các giá trị của m để (C_m) tiếp xúc với trục tung.

ĐS: 1/ $A(1;1), B(3;2)$. 2/ $m = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Bài 408. Đại học Ngoại Thương cơ sở II khối A năm 2000

Cho Parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = mx + 1$. Chứng minh rằng khi m thay đổi, đường thẳng luôn luôn cắt parabol tại hai điểm phân biệt A và B. Hãy tìm quỹ tích tâm vòng tròn ngoại tiếp ΔOAB khi m thay đổi với O là gốc tọa độ.

ĐS: PTHĐGD: $x^2 - mx - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = m^2 + 4 > 0$. Tập hợp tâm I là $(P): y = 2x^2 + 1$.

Bài 409. Đại học Quân Sự Bộ Quốc Phòng năm 2001

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc Oxy, cho $A(2; -4), B(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}), C(6; 0)$. Tìm tâm và bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC .

Bài 410. Đại học Sư Phạm Kỹ Thuật Tp. Hồ Chí Minh năm 2001

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho ΔABC biết $A(-1; 2), B(2; 0), C(-3; 1)$.

1/ Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

2/ Tìm điểm M trên đường thẳng BC sao cho diện tích ΔABM bằng $\frac{1}{3}$ diện tích ΔABC .

ĐS: 1/ $I(\frac{11}{14}; \frac{13}{14})$. 2/ $M(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}) \vee M(\frac{11}{3}; -\frac{1}{3})$.

Bài 411. Đại học Mở Bán Công năm 2001

Trong Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc Oxy, cho $A(1; 2), B(0; 1), C(-2; 1)$.

1/ Viết phương trình đường thẳng AB.

2/ Viết phương trình đường cao CH của ΔABC .

3/ Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

Bài 412. Đại học Dân Lập Văn Lang năm 2001

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho $M(2; \frac{3}{2})$.

1/ Viết phương trình đường tròn (C) đường kính OM.

2/ Viết phương trình đường thẳng d qua M và cắt hai nửa trục dương Ox, Oy tại A và B sao cho diện tích ΔOAB bằng 6.

3/ Tìm tọa độ tâm I của đường tròn nội tiếp ΔOAB và viết phương trình đường tròn đó.

Bài 413. Đại học Tài Chính Kế Toán Hà Nội năm 2001

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho họ đường tròn $(C_m): x^2 + y^2 + 2mx - 6y + 4 - m = 0$.

1/ Chứng minh rằng (C_m) là đường tròn với mọi m . Hãy tìm tập hợp tâm các đường tròn (C_m) khi m thay đổi.

2/ Với $m = 4$. Hãy viết phương trình đường thẳng vuông góc với đường thẳng $\Delta: 3x - 4y + 10 = 0$ và cắt đường tròn tại hai điểm A và B sao cho $AB = 6$.

ĐS: 1/ $I(-m; 3) \Rightarrow$ Quỹ tích tâm là đường $y = 3$. 2/ $\begin{cases} d_1: 4x + 3y + 27 = 0 \\ d_2: 4x + 3y - 13 = 0 \end{cases}$

Bài 414. Đại học Y Hà Nội năm 2001

Cho đường tròn có phương trình: $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 5 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn đi qua điểm $A(0; -1)$.

ĐS: $4x - 3y - 3 = 0$.

Bài 415. Đại học Y Thái Bình – Hệ dài hạn

Cho $M(4; 3)$ là một điểm trên Parabol $(P): y = x^2 - 4x + 3$. Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với với (P) tại M và có tâm nằm trên trục hoành.

ĐS: $(C): (x - 16)^2 + y^2 = 153$.

Bài 416. Đại học Thể Dục Thể Thao I năm 2001

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$.

Qua điểm $A(1; 0)$, hãy viết phương trình hai tiếp tuyến với đường tròn đã cho và tính góc tạo bởi hai tiếp tuyến đó.

Bài 417. Đại học Mỏ – Địa Chất khối A năm 2001

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ trục chuẩn Oxy, hãy viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, biết phương trình đường thẳng $AB: y - x - 2 = 0$, phương trình đường thẳng $BC: 5y - x + 2 = 0$ và phương trình đường thẳng AC là $y + x - 8 = 0$.

ĐS: Nhận thấy $AB \perp AC$ Tâm là trung điểm BC $\Rightarrow (C): (x - 2)^2 + y^2 = 26$.

Bài 418. Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh khối A năm 2001

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: \sqrt{2}x + my + 1 - \sqrt{2} = 0$ và hai đường tròn: $(C_1): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 + 4x - 4y - 56 = 0$.

1/ Gọi I là tâm đường tròn (C_1) . Tìm m sao cho d cắt (C_1) tại hai điểm phân biệt A và B. Với giá trị nào của m thì diện tích ΔIAB lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

2/ Chứng minh rằng (C_1) tiếp xúc với (C_2) . Viết phương trình tổng quát của tất cả các tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) .

ĐS: 1/ $\forall m \in \mathbb{R}, (S_{\Delta IAB})_{\max} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow m = -4$. 2/ Tiếp xúc trong và $\Delta: 3x - 4y - 26 = 0$.

Bài 419. Học Viện Ngân Hàng Tp. Hồ Chí Minh khối D năm 2001

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho đường tròn có phương trình $(C): (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. Chứng minh rằng tiếp tuyến của đường tròn tại điểm $(x_o; y_o)$ có phương trình: $(x_o - a)(x - a) + (y_o - b)(y - b) = R^2$.

HD: Gọi $E(a; b)$ là tâm, $F(x_o; y_o) \in (C)$ và $M(x; y) \in tt \Rightarrow FM \perp EF \Leftrightarrow \overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$.

Bài 420. Đại học Kiến Trúc Tp. Hồ Chí Minh năm 2001

1/ cho đường tròn có phương trình $(C): (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. Chứng minh rằng tiếp tuyến của đường tròn tại điểm $(x_o; y_o)$ có phương trình:
 $(x_o - a)(x - a) + (y_o - b)(y - b) = R^2$.

2/ Chứng minh rằng tích các khoảng từ một điểm bất kỳ của Hyperbol: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ đến các tiệm cận của nó là một hằng số không đổi.

ĐS: 1/ Xem Học Viện Ngân Hàng 2001. 2/ $d(M_o; \Delta_1) \cdot d(M_o; \Delta_2) = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$.

Bài 421. Dự bị 1 – Đại học khối A năm 2002

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x - y + 1 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d mà qua đó ta kẻ được hai đường thẳng tiếp xúc với (C) tại A và B sao cho $\widehat{AMB} = 60^\circ$.

ĐS: $M_1(3; 4), M_2(-3; -2)$.

Bài 422. Dự bị 1 – Đại học khối B năm 2002

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C_1) và (C_2) .

ĐS: $(\Delta_{12}): 2x + y \pm 3\sqrt{5} - 2 = 0; (\Delta_3): y = -1; (\Delta_4): y = \frac{4}{3}x - 3$.

Bài 423. Dự bị 2 – Đại học khối D năm 2002

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 10x = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$.

1/ Viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của $(C_1), (C_2)$ và có tâm nằm trên đường thẳng $d: x + 6y - 6 = 0$.

2/ Viết phương trình tiếp tuyến chung của các đường tròn $(C_1), (C_2)$.

ĐS: 1/ $(x - 12)^2 + (y + 1)^2 = 125$. 2/ $x + 7y - 5 \pm 25\sqrt{2} = 0$.

Bài 424. Đại học khối D năm 2003

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đề-các vuông góc Oxy, cho đường tròn

$(C): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ và đường thẳng $(d): x - y - 1 = 0$. Viết phương trình đường

tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng d . Tìm tọa độ các giao điểm của (C) và (C') .

ĐS: $(C') : (x - 3)^2 + y^2 = 4, A(1;0), B(3;2).$

Bài 425. Dự bị 1 – Đại học khối B năm 2003

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d : x - 7y + 10 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng $\Delta : 2x + y = 0$ và tiếp xúc với đường thẳng d tại điểm $A(4;2)$.

ĐS: $(C) : (x - 6)^2 + (y + 12)^2 = 200.$

Bài 426. Dự bị 1 – Đại học khối A năm 2004

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(-1;1)$ và đường thẳng $d : x - y + 1 - \sqrt{2} = 0$. Viết phương trình đường tròn đi qua A, qua gốc tọa độ O và tiếp xúc với đường thẳng d .

ĐS: $(C) : x^2 + (y - 1)^2 = 1 \vee (C) : (x + 1)^2 + y^2 = 1.$

Bài 427. Đại học khối B năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;0), B(6;4)$. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm A và khoảng cách từ tâm của (C) đến điểm B bằng 5.

ĐS: $(C_1) : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1, (C_2) : (x - 2)^2 + (y - 7)^2 = 49.$

Bài 428. Dự bị 2 – Đại học khối A năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 12x - 4y + 36 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C_1) tiếp xúc với hai trục tọa độ Ox, Oy đồng thời tiếp xúc ngoài với đường tròn (C) .

ĐS:
$$\begin{cases} (C_1) : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4 \\ (C_2) : (x - 18)^2 + (y - 18)^2 = 18. \\ (C_3) : (x - 6)^2 + (y + 6)^2 = 36 \end{cases}$$

Bài 429. Dự bị 1 – Đại học khối B năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho 2 đường tròn lần lượt có phương trình:

$(C_1) : x^2 + y^2 = 9$ và $(C_2) : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$. Viết phương trình trục đẳng

phương d của 2 đường tròn (C_1) và (C_2) . Chứng minh rằng nếu K thuộc d thì khoảng cách từ K đến tâm của (C_1) nhỏ hơn khoảng cách từ K đến tâm của (C_2) .

ĐS: $d : x + y + 7 = 0$. Xét $OK^2 - IK^2 = -16 < 0 \quad OK < IK.$

Bài 430. Dự bị 1 – Đại học khối D năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình:

(C): $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d có phương trình: $2x - y + 3 = 0$ sao cho $MI = 2R$, trong đó I là tâm và R là bán kính của đường tròn (C).

ĐS: $M(-4; -5) \vee M\left(\frac{24}{5}; \frac{63}{5}\right)$.

Bài 431. Dự bị 2 – Đại học khối D năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm A(0;5), B(2;3). Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và có bán kính $R = \sqrt{10}$.

ĐS: (C): $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 10 \vee (C): (x-3)^2 + (y-6)^2 = 10$.

Bài 432. Đại học khối B năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ và điểm M(-3;1). Gọi T₁ và T₂ là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M đến (C). Viết phương trình đường thẳng T₁T₂.

ĐS: Chứng tỏ tọa độ $(x_o; y_o)$ của T₁, T₂ thỏa phương trình: $2x + y - 3 = 0$.

Bài 433. Đại học khối D năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) và đường thẳng d lần lượt có phương trình: (C): $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$, d: $x - y + 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên d sao cho đường tròn tâm M, có bán kính gấp đôi bán kính đường tròn (C), tiếp xúc ngoài với đường tròn (C).

ĐS: $M(1;4) \vee M(-2;1)$.

Bài 434. Dự bị 1 – Đại học khối D năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm A(-1;1) và đường thẳng

d: $x - y + 1 - \sqrt{2} = 0$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua điểm A, gốc tọa độ O và tiếp xúc với đường thẳng d.

ĐS: (C₁): $x^2 + y^2 - 2y = 0$, (C₂): $x^2 + y^2 + 2x = 0$.

Bài 435. Đại học khối A năm 2007

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có A(0;2), B(-2;-2), C(4;-2). Gọi H là chân đường cao kẻ từ B; M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC. Viết phương trình đường tròn đi qua các điểm H, M, N.

ĐS: H(1;1) và (C): $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$.

Bài 436. Đại học khối D năm 2007

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) và đường thẳng d có phương trình:

(C): $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ và d: $3x - 4y + m = 0$. Tìm m để trên d có duy nhất một điểm

P mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến PA, PB tới (C) (A, B là các tiếp điểm) sao cho tam giác PAB đều.

ĐS: $m = 19 \vee m = -41$.

Bài 437. Dự bị 1 – Đại học khối A năm 2007

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$. Đường tròn (C') tâm $I(2;2)$ cắt (C) tại các điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{2}$. Viết phương trình đường thẳng AB.

ĐS: Chú ý $AB \perp OI$. Phương trình AB: $y = -x \pm 1$.

Bài 438. Dự bị 1 – Đại học khối B năm 2007

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) và đường thẳng d lần lượt có phương trình: $(C): x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$, $d: x + y - 1 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh hình vuông ABCD ngoại tiếp đường tròn (C) , biết A nằm trên d .

ĐS: $A(2; -1), B(2; -5), C(6; -5), D(6; -1) \vee A(6; -5), B(6; -1), C(2; -1), D(2; -5)$.

Bài 439. Dự bị 2 – Đại học khối B năm 2007

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') có tâm $M(5;1)$ và (C') cắt (C) tại các điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{3}$.

ĐS: $(C_1): (x-5)^2 + (y-1)^2 = 13 \vee (C_1): (x-5)^2 + (y-1)^2 = 43$.

Bài 440. Đại học Sài Gòn khối B năm 2007

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho điểm $A(2;1)$ và hai đường thẳng $d_1: x - y - 1 = 0$, $d_2: x - 2y - 6 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với d_1 tại A và có tâm thuộc d_2 .

ĐS: $(C): (x-4)^2 + (y+1)^2 = 8$.

Bài 441. Đại học khối A năm 2009 (Chương trình nâng cao)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x + 4y + 6 = 0$ và đường thẳng $\Delta: x + my - 2m + 3 = 0$, với m là tham số thực. Gọi I là tâm của đường tròn (C) . Tìm m để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích ΔIAB lớn nhất.

ĐS: $m = 0 \vee m = \frac{8}{15}$.

Bài 442. Đại học khối B năm 2009 (Chương trình cơ bản)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-2)^2 + y^2 = \frac{4}{5}$ và hai đường thẳng $\Delta_1: x - y = 0$, $\Delta_2: x - 7y = 0$. Xác định tọa độ tâm K và tính bán kính của đường tròn (C_1) ; biết đường tròn (C_1) tiếp xúc với các đường thẳng Δ_1, Δ_2 và tâm $K \in (C)$.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad K\left(\frac{8}{5}; \frac{4}{5}\right), R = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Bài 443. Đại học khối D năm 2009 (Chương trình nâng cao)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + y^2 = 1$. Gọi I là tâm của (C) . Xác định tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho $\widehat{IMO} = 30^\circ$.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad M\left(\frac{3}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Bài 444. Đại học khối A năm 2010 (Chương trình cơ bản)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: \sqrt{3}x + y = 0$ và $d_2: \sqrt{3}x - y = 0$. Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A, cắt d_2 tại hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình của (T) , biết tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad (T): \left(x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 1.$$

Bài 445. Đại học khối D năm 2010 (Chương trình cơ bản)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(3; -7)$, trực tâm là $H(3; -1)$, tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(-2; 0)$. Xác định tọa độ đỉnh C, biết C có hoành độ dương.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad C(-2 + \sqrt{65}; 3).$$

Bài 446. Đại học khối A năm 2011 (Chương trình cơ bản)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x + y + 2 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Gọi I là tâm của (C) , M là điểm thuộc Δ . Qua M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) (A và B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M, biết tứ giác MAIB có diện tích bằng 10.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad M(2; -4) \vee M(-3; 1).$$

Bài 447. Đại học khối B năm 2011 (Chương trình nâng cao)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $B\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại các điểm D, E, F. Cho $D(3; 1)$ và đường thẳng EF có phương trình $y - 3 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh A, biết A có tung độ dương.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad A\left(3; \frac{13}{3}\right).$$

Bài 448. Đại học khối D năm 2011 (Chương trình nâng cao)

Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(1;0)$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt (C) tại điểm M và N sao cho ΔAMN vuông cân tại A.

ĐS: $\Delta: y = 1 \vee \Delta: y = -3$.

Bài 449. Đại học khối B năm 2012

- 1/ Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 = 4$,
 $(C_2): x^2 + y^2 - 12x + 8 = 0$ và đường thẳng $d: x - y - 4 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc (C_2) , tiếp xúc với d và cắt (C_1) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho AB vuông góc với d .
- 2/ Trong mặt phẳng hệ trục tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có $AC = 2BD$ và đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình $x^2 + y^2 = 4$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua các đỉnh A, B, C, D của hình thoi, biết $A \in O_x$.

ĐS: 1/ $(C): (x-3)^2 + (y-3)^2 = 8$. 2/ $(E): \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Email: vandoan_automobile@yahoo.com.vn --- Phone: 0929.031.789 --- 0933.755.607

D – PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG ELLIPSE



① Kiến thức cơ bản

a/ Định nghĩa

Cho cố định với và một độ dài không đổi. Tập hợp các điểm M sao cho được gọi là một elip.

Hai tiêu điểm của elip (E).

Trong đó:

Tiêu cự của elip (E).

Bán kính qua tiêu điểm của M.

b/ Phương trình chính tắc, phương trình tham số của elíp

➤ Phương trình chính tắc:

. Trong đó:

✧ Tọa độ các tiêu điểm:

✧

: Bán kính qua tiêu điểm bên trái.

: Bán kính qua tiêu điểm bên phải.

➤ Phương trình tham số:

c/ Hình dạng của elip

➤ Elip nhận các trục tọa độ làm các trục đối xứng và gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

➤ Tọa độ các đỉnh:

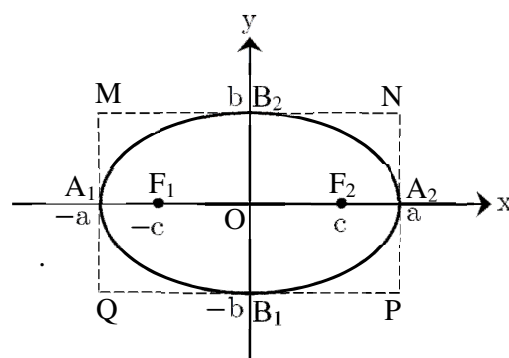
➤ Độ dài các trục:

Trục lớn

Trục nhỏ

➤ Tâm sai của

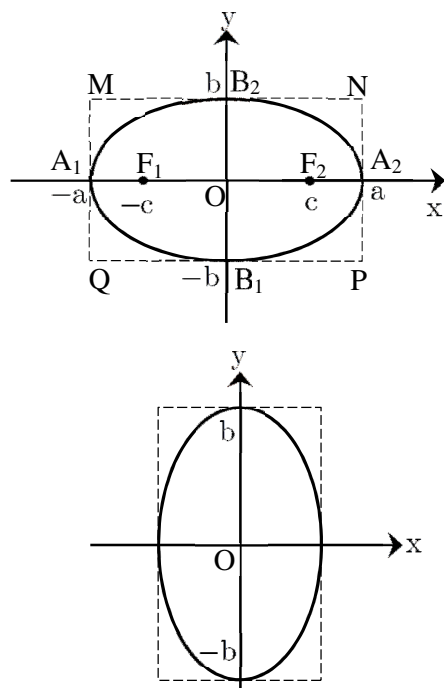
➤ Hình chữ nhật cơ sở tạo bởi các đường thẳng



d/ Đường chuẩn của elip

➤ Phương trình các đường chuẩn Δ_i ứng với các tiêu điểm F_i là: $x \pm \frac{a}{e} = 0$.

➤ Với $M \in (E)$ ta có: $\frac{MF_1}{d(M, \Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M, \Delta_2)} = e, (e < 1)$.



— Bước 2. Chuyển $MF_1 + MF_2 = 2a$ (1) thành biểu thức giải tích nhờ

$$\begin{cases} MF_1^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 & (2) \\ MF_2^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 & (3) \end{cases}$$

Dạng 1. $MF_1 + MF_2 = 2a \Rightarrow$ Tập hợp là elip (E) có hai tiêu điểm F_1, F_2 , trục lớn $2a$.

Dạng 2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b) \Rightarrow$ Tập hợp là elip (E) có độ dài trục lớn $2a$, trục nhỏ $2b$.

- ✧ ABCD là hình chữ nhật.
- ✧ Phương trình đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD là đường tròn (C) tâm O bán kính $R = OA$ có phương trình

$$(C): x^2 + y^2 = \frac{a_1^2 a_2^2 (b_1^2 - b_2^2) + b_1^2 b_2^2 (a_2^2 - a_1^2)}{a_2^2 b_1^2 - a_1^2 b_2^2}.$$

BÀI TẬP ỨNG DỤNG

TÌM CÁC THUỘC TÍNH VÀ LẬP PHƯƠNG TRÌNH ELÍP

Bài 450. Vẽ đồ thị các elíp (E) sau

1/ (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

2/ (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Bài 451. Cho elíp (E). Xác định độ dài các trục, tiêu cự, tọa độ các tiêu điểm, tọa độ các đỉnh, tâm sai, phương trình các đường chuẩn của (E), với (E) có phương trình

1/ (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

2/ (E): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

3/ (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

4/ (E): $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.

5/ (E): $16x^2 + 25y^2 = 400$.

6/ (E): $x^2 + 4y^2 = 1$.

7/ (E): $4x^2 + 9y^2 = 5$.

8/ (E): $9x^2 + 25y^2 = 1$.

9/ (E): $x^2 + 4y^2 = 4$.

10/ (E): $6x^2 + 9y^2 = 54$.

11/ (E): $9x^2 + 16y^2 = 144$.

12/ (E): $4x^2 + 9y^2 = 1$.

Bài 452. Lập phương trình chính tắc của elíp (E), biết

1/ Độ dài trục lớn bằng 6, trục nhỏ bằng 4.

2/ Có độ dài trục nhỏ và trục lớn lần lượt là 8 và 6.

3/ Độ dài trục lớn bằng 10, tiêu cự bằng 6.

4/ Độ dài trục lớn bằng 8, độ dài trục nhỏ bằng tiêu cự.

5/ Một tiêu điểm $F_1(1; 0)$ và độ dài trục lớn bằng 2.

6/ Tiêu cự bằng 8 và đi qua điểm $M(\sqrt{15}; -1)$.

7/ Độ dài trục nhỏ bằng 6 và đi qua điểm $M(-2\sqrt{5}; 2)$.

8/ Một tiêu điểm là $F_1(-2; 0)$ và độ dài trục lớn bằng 10.

9/ Một tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{3}; 0)$ và đi qua điểm $M\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

10/ Đi qua hai điểm $M(1; 0)$, $N\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$.

11/ Đi qua hai điểm $M(4; -\sqrt{3})$, $N(2\sqrt{2}; 3)$.

12/ Đi qua hai điểm $M(0; 3)$, $N\left(3; -\frac{12}{5}\right)$.

- 12/ Độ dài trục lớn bằng 10, tâm sai bằng $\frac{3}{5}$.
- 13/ Một tiêu điểm là $F_1(-8;0)$ và tâm sai bằng $\frac{4}{5}$.
- 14/ Độ dài trục nhỏ bằng 6, phương trình các đường chuẩn là $x\sqrt{7} \pm 16 = 0$.
- 15/ Một đỉnh là $A_1(-8;0)$, tâm sai bằng $\frac{3}{4}$.
- 16/ Đi qua điểm $M\left(2; -\frac{5}{3}\right)$ và có tâm sai bằng $\frac{2}{3}$.
- 17/ Có tiêu cự bằng 4 và tỉ số độ dài hai trục bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$.
- 18/ Đi qua điểm $M(8;12)$ và có bán kính qua tiêu điểm bên trái của M bằng 20.
- 19/ Đi qua điểm $M\left(3; 2\sqrt{3}\right)$ và có bán kính qua tiêu điểm bên trái của M bằng $4\sqrt{3}$.
- 20/ Có phương trình các cạnh hình chữ nhật cơ sở là $x = \pm 9, y = \pm 3$.
- 21/ Đi qua điểm $M\left(\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ và $\triangle MF_1F_2$ vuông tại M.
- 22/ Hình chữ nhật cơ sở của (E) có một cạnh nằm trên đường thẳng $x - 2 = 0$ và có độ dài đường chéo bằng 6.
- 23/ Có đỉnh là $A_1(-5;0)$ và phương trình đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở có dạng là $x^2 + y^2 = 34$.
- 24/ Có đỉnh là $B_1(0;6)$ và phương trình đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở có dạng là $x^2 + y^2 = 61$.
- 25/ Có độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{2}$, các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm của (E) cùng nằm trên một đường tròn.

TÌM ĐIỂM TRÊN ELIP THỎA ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Bài 453. Tìm những điểm trên elip (E): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ có bán kính qua tiêu điểm bằng $\frac{5}{2}$.

Bài 454. Tìm những điểm M trên elip (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ sao cho hiệu số hai bán kính qua tiêu điểm bằng $\frac{32}{5}$.

Bài 455. Cho elíp (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$. Tìm những điểm M nằm trên (E) sao cho số đo $\widehat{F_1MF_2}$ là

1/ 90° .

2/ 120° .

3/ 30° .

Bài 456. Cho elíp (E): $4x^2 + 9y^2 = 36$. Tìm những điểm M nằm trên (E) sao cho số đo $\widehat{F_1MF_2}$ là

1/ 90° .

2/ 60° .

3/ 30° .

Bài 457. Cho elíp (E) . Tìm những điểm $M \in (E)$ nhìn hai tiêu điểm dưới 1 góc $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 120^\circ$.

1/ $(E): 9x^2 + 25y^2 = 225$.

2/ $(E): 9x^2 + 16y^2 = 144$.

3/ $(E): 7x^2 + 16y^2 = 112$.

Bài 458. Cho elíp $(E): \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$. Tìm điểm M nằm trên (E) sao cho

1/ $MF_2 = 4MF_1$.

2/ Nhìn F_1 và F_2 dưới một góc vuông.

Bài 459. Cho elíp (E) . Tìm những điểm $M \in (E)$ sao cho

a/ $MF_1 = MF_2$.

b/ $MF_2 = 3MF_1$.

c/ $MF_1 = 4MF_2$.

1/ $(E): 9x^2 + 25y^2 = 225$.

2/ $(E): 9x^2 + 16y^2 = 144$.

3/ $(E): 7x^2 + 16y^2 = 112$.

Bài 460. Cho elíp $(E): x^2 + 9y^2 = 9$.

1/ Tìm M trên (E) sao cho $MF_1 = 2MF_2$.

2/ Tìm M trên (E) sao cho $3MF_1 = MF_2$.

3/ Tìm M trên (E) sao cho $\frac{1}{MF_1} + \frac{1}{MF_2} = \frac{6}{F_1F_2}$.

Bài 461. Cho elíp (E) . Tìm những điểm $M \in (E)$ nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông, với

1/ $(E): 9x^2 + 25y^2 = 225$.

2/ $(E): 9x^2 + 16y^2 = 144$.

3/ $(E): 7x^2 + 16y^2 = 112$.

Bài 462. Cho elíp (E) và đường thẳng d vuông góc với trục lớn tại tiêu điểm bên phải F_2 cắt (E) tại hai điểm M, N .

a/ Tìm tọa độ các điểm M, N .

b/ Tính MF_1, MF_2, MN .

1/ $(E): 9x^2 + 25y^2 = 1$.

2/ $(E): 9x^2 + 25y^2 = 225$.

3/ $(E): 9x^2 + 16y^2 = 144$.

4/ $(E): 7x^2 + 16y^2 = 112$.

Bài 463. Tìm trên đường thẳng $d: x + 5 = 0$ điểm M cách đều tiêu điểm trái và đỉnh trên của elíp

$(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Bài 464. Cho elíp $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

1/ Biết $M \in (E)$ sao cho $MF_1 = 3$. Tìm MF_2 và tìm tọa độ điểm M .

2/ Dây cung AB thay đổi đi qua tiêu điểm F_1 nhưng không đi qua tiêu điểm F_2 của (E) .

Chứng minh rằng chu vi tam giác ABF_2 không đổi.

Bài 465. Cho elíp $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ và đường thẳng $d: x - 2y + 12 = 0$. Tìm trên (E) điểm M sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d là lớn nhất, nhỏ nhất.

Bài 466. Cho elíp $(E): x^2 + 4y^2 = 25$ và đường thẳng $d: 3x + 4y - 30 = 0$. Tìm trên (E) điểm M sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d là lớn nhất, nhỏ nhất.

Bài 467. Cho elíp $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ và đường thẳng $d: x - \sqrt{2}y + 2 = 0$. Đường thẳng d cắt (E) tại hai điểm B, C. Tìm tọa độ điểm A trên (E) sao cho $\triangle ABC$ có diện tích lớn nhất.

Bài 468. Cho elíp $(E): x^2 + 2y^2 = 2$ và đường thẳng $d: 3x - 2y - 3 = 0$. Đường thẳng d cắt (E) tại hai điểm B, C. Tìm tọa độ điểm A trên (E) sao cho $\triangle ABC$ có diện tích lớn nhất.

Bài 469. Cho elíp $(E): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ và điểm $C(2; 0)$.

1/ Tìm điểm M thuộc elíp (E) sao cho có bán kính qua tiêu điểm này bằng 7 lần bán kính qua tiêu điểm kia.

2/ M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc $60^\circ, 90^\circ$.

3/ Tìm tọa độ các điểm A, B trên (E) sao cho $\triangle ABC$ là tam giác đều.

Bài 470. Cho elíp $(E): 13x^2 + 16y^2 = 208$. Tìm tọa độ các điểm A, B trên (E) sao cho $\triangle ABF_1$ là tam giác đều.

Bài 471. Cho elíp $(E): \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$. Tìm các điểm M thuộc elíp (E) sao cho

1/ Có tọa độ nguyên thuộc (E) .

2/ Có tổng hai tọa độ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Bài 472. Cho elíp $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ và đường thẳng $d: 3x + 4y - 12 = 0$.

1/ Chứng minh rằng d luôn cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B. Tính độ dài đoạn AB.

2/ Tìm tọa độ điểm $C \in (E)$ sao cho

a/ $\triangle ABC$ có diện tích bằng 6.

b/ $\triangle ABC$ có diện tích lớn nhất.

c/ $\triangle ABC$ vuông.

TIẾP TUYẾN – TƯƠNG GIAO

Bài 473. Cho elíp $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ và đường thẳng $\Delta: Ax + By + C = 0$. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để đường thẳng Δ tiếp xúc với elíp (E) là $a^2A^2 + b^2B^2 = C^2$.

Bài 474. Cho điểm $M(1; 2)$. Lập phương trình tiếp tuyến của elíp $(E): \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$ đi qua M.

Bài 475. Cho điểm $M(3; -4)$ và elíp $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

1/ Chứng minh rằng qua M kẻ được 2 tiếp tuyến đến (E) .

- 2/ Xác định phương trình hai tiếp tuyến và lập phương trình đường thẳng đi qua hai tiếp điểm của (E) với hai tiếp tuyến trên.

Bài 476. Cho elíp (E): $4x^2 + 9y^2 = 36$. Viết phương trình các tiếp tuyến của (E). Biết tiếp tuyến

- 1/ Tiếp xúc với (E) tại điểm M(0;4).
- 2/ Đi qua điểm A(3;0).
- 3/ Đi qua điểm B(2;3).
- 4/ Song song với đường thẳng $d_1: x - 2y + 6 = 0$.
- 5/ Vuông góc với đường thẳng $d_2: x - y = 0$.
- 6/ Tạo với đường thẳng $d_3: 2x - y = 0$ một góc bằng 60° .

Bài 477. Lập phương trình tiếp tuyến chung của hai elíp $(E_1): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và $(E_2): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Bài 478. Viết phương trình chính tắc của elíp, biết rằng elíp (E) tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1: x + y - 5 = 0$ và $d_2: x - 4y - 10 = 0$.

Bài 479. Cho elíp (E): $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{12} = 1$. Xét hình vuông ngoại tiếp elíp (E). Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của hình vuông đó.

Bài 480. Chứng minh rằng tích khoảng cách từ hai tiêu điểm của elíp đến một tiếp tuyến bất kỳ của elíp là một đại lượng không đổi.

Bài 481. Cho elíp (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và điểm M(1;1).

- 1/ Chứng minh rằng mọi đường thẳng đi qua M luôn cắt elíp (E) tại hai điểm phân biệt.
- 2/ Lập phương trình đường thẳng đi qua M và cắt elíp tại hai điểm phân biệt A, B sao cho độ dài đoạn MA = MB.

Bài 482. Cho elíp (E): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Xét vị trí tương đối của elíp (E) trong các trường hợp

- 1/ M(4;0).
- 2/ M(3;3).

Bài 483. Xét vị trí tương đối của đường thẳng d và elíp (E), biết:

- 1/ $d: 2x + y - 5 = 0$ và $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.
- 2/ $d: 2x - y = 0$ và $(E): \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$.

Bài 484. Cho hai elíp $(E_1): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ và $(E_2): x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$.

- 1/ Chứng minh rằng $(E_1) \cap (E_2) = \{A, B, C, D\}$ và ABCD là hình chữ nhật.
- 2/ Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD.

Bài 485. Cho hai elíp $(E_1): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và $(E_2): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1$.

- 1/ Chứng minh rằng $(E_1) \cap (E_2) = \{A, B, C, D\}$ và ABCD là hình chữ nhật.
- 2/ Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD.

Bài 486. Cho elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Một góc vuông đỉnh O quay quanh O, có 2 cạnh cắt (E) lần lượt tại A và B.

- 1/ Chứng minh rằng $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ không đổi.
- 2/ Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng AB. Suy ra đường thẳng AB luôn tiếp xúc với một đường tròn (C) cố định. Tìm phương trình của (C) .

TÍNH CHẤT VÀ MỘT SỐ DẠNG TOÁN KHÁC

Bài 487. Tính độ dài dây cung của elíp (E) đi qua một tiêu điểm và vuông góc với Ox trong các trường hợp sau

- 1/ $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.
- 2/ $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 4$.
- 3/ $(E): 9x^2 + 25y^2 = 225$.
- 4/ $(E): \frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{12} = 1$.

Bài 488. Trong mặt phẳng Oxy, gọi M là điểm bất kỳ trên elíp (E) . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của OM trong các trường hợp sau

- 1/ $(E): \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$.
- 2/ $(E): x^2 + 4y^2 = 4$.
- 3/ $(E): 9x^2 + 16y^2 = 144$.
- 4/ $(E): 8x^2 + 16y^2 = 32$.

Bài 489. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

- 1/ $A = x + 2y$ biết $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$.
- 2/ $B = \frac{x}{2} + 3y$ biết $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Bài 490. Cho elíp $(E): 9x^2 + 25y^2 = 225$.

- 1/ Tìm tọa độ tiêu điểm, tâm sai và độ dài các trục của (E) .
- 2/ Đường thẳng d qua tiêu điểm F_1 , vuông góc với Ox và cắt (E) tại hai điểm M, N. Tính độ dài đoạn thẳng MN.
- 3/ Lấy P, Q thuộc elíp (E) sao cho $PF_1 + QF_2 = 6$. Tính tổng $S = QF_1 + PF_2$.
- 4/ Cho $R \in (E)$ tính giá trị của biểu thức $W = RF_1 \cdot RF_2 + OR^2$.

Bài 491. Tìm tâm sai của (E) trong các trường hợp sau:

- 1/ Mỗi đỉnh trên trục nhỏ nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.
- 2/ Mỗi tiêu điểm nhìn trục nhỏ dưới một góc vuông.
- 3/ Mỗi tiêu điểm nhìn trục nhỏ dưới một góc 60° .
- 4/ Độ dài trục lớn bằng k lần độ dài trục nhỏ $(k > 1)$.
- 5/ Khoảng cách từ một đỉnh trên trục lớn đến một đỉnh trên trục nhỏ bằng tiêu cự.

Bài 492. Cho elíp $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Gọi F_1, F_2 là 2 tiêu điểm, A_1, A_2 là 2 đỉnh trên trục lớn, M là 1 điểm tùy ý thuộc (E) và P là hình chiếu của M trên trục lớn.

- 1/ Chứng minh: $b \leq OM \leq a$.

2/ Chứng minh: $MF_1 \cdot MF_2 + OM^2 = a^2 + b^2$.

3/ Chứng minh: $(MF_1 - MF_2)^2 = 4(OM^2 - b^2)$.

4/ Chứng minh: $\frac{MP^2}{A_1P \cdot A_2P} = \frac{b^2}{a^2}$.

Bài 493. Cho elíp $(E): 9x^2 + 16y^2 = 144$.

1/ Tìm tâm sai của (E) .

2/ Gọi M là điểm di động trên (E) . Chứng minh $OM^2 + MF_1 \cdot MF_2$ là một hằng số.

3/ Tìm điểm $N \in (E)$ sao cho $\triangle NF_1F_2$ vuông tại N.

4/ Cho A, B là hai điểm nằm trên (E) với $AF_1 + BF_2 = 8$. Tính $AF_2 + BF_1$.

QUỸ TÍCH – TẬP HỢP ĐIỂM

Bài 494. Tìm tập hợp những điểm $M(x; y)$ trong mặt phẳng tọa độ sao cho: $x = 4 \sin t, y = 3 \cos t$.

Bài 495. Cho điểm $A(3 \cos t; 0)$ và $B(0; \sin t)$. Tìm tập hợp điểm $M(x; y)$ sao cho $2\overrightarrow{AM} + 5\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ khi t thay đổi.

Bài 496. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 6x - 55 = 0$ và điểm $F_1(-3; 0)$:

1/ Tìm tập hợp các tâm M của đường tròn (C') di động luôn đi qua F_1 và tiếp xúc với (C) .

2/ Viết phương trình của tập hợp trên.

Bài 497. Cho hai đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x - 32 = 0$ và $(C'): x^2 + y^2 - 4x = 0$:

1/ Chứng minh (C) và (C') tiếp xúc nhau.

2/ Tìm tập hợp các tâm M của đường tròn (T) di động và tiếp xúc với hai đường tròn trên.

3/ Viết phương trình của tập hợp đó.

Bài 498. Tìm tập hợp các điểm M có tỉ số các khoảng cách từ đó đến điểm F và đến đường thẳng Δ bằng e, với:

1/ $F(3; 0), \Delta: x - 12 = 0, e = \frac{1}{2}$.

2/ $F(2; 0), \Delta: x - 8 = 0, e = \frac{1}{2}$.

3/ $F(-4; 0), \Delta: 4x + 25 = 0, e = \frac{4}{5}$.

4/ $F(3; 0), \Delta: 3x - 25 = 0, e = \frac{3}{5}$.

Bài 499. Cho hai điểm A, B lần lượt chạy trên hai trục Ox và Oy sao cho $AB = 12$.

1/ Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn AB.

2/ Tìm tập hợp các điểm N chia đoạn AB theo tỉ số $k = -\frac{1}{2}$.

Bài 500. Cho elíp (E) di động có tâm là gốc tọa độ và độ dài trục lớn bằng 16. Biết rằng (E) luôn đi qua điểm $M(4; 0)$. Chứng minh rằng hai tiêu điểm F_1 và F_2 của (E) luôn di động trên một elíp cố định.

Bài 501. Cho điểm A di động trên trục hoành và điểm B di động trên trục tung sao cho độ dài đoạn thẳng AB luôn bằng a không đổi. Tìm tập hợp các điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MB = 2MA$.

Bài 502. Cho hai điểm A và B cố định. Xác định hình thang ABCD có đáy lớn AB sao cho

$AD + BC = AB$ và $CD = \frac{AB}{3}$. Tìm tập hợp trung điểm M của đoạn CD.

Bài 503. Tìm giao điểm của hai elíp $(E_1): \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ và $(E_2): x^2 + 4y = 4$. Các giao điểm này có cùng nằm trên một đường tròn hay không? Nếu có thì viết phương trình đường tròn đó?

Bài 504. Cho hai elíp $(E_1): 4x^2 + 9y^2 = 36$ và $(E_2): x^2 + 16y^2 = 16$. Hãy viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của (E_1) và (E_2) .

BÀI TẬP QUA CÁC KÌ THI

Bài 505. Cao đẳng Kinh Tế Đối Ngoại năm 1997

Cho elíp $(E): 4x^2 + y^2 = 36$.

- 1/ Tính độ dài trục lớn, trục nhỏ, tọa độ các tiêu điểm và phương trình các đường chuẩn.
- 2/ Lập phương trình tiếp tuyến với (E) song song với đường phân giác góc phần tư thứ II.
- 3/ Lập phương trình parabol có đỉnh trùng với gốc tọa độ và có tiêu điểm là tiêu điểm phía trên của elíp (E) .

ĐS: 1/ $F_{1,2}(0; \pm 3\sqrt{3})$, $y = \pm 4\sqrt{3}$. 2/ $x + y \pm 3\sqrt{5} = 0$. 3/ $(P): y = \frac{x^2\sqrt{3}}{36}$.

Bài 506. Cao đẳng Sư Phạm Kỹ Thuật Vinh năm 2001

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường elíp có phương trình lần lượt là

$$(E_1): \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 \text{ và } (E_2): \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

- 1/ Viết phương trình của đường tròn đi qua giao điểm của hai elíp.
- 2/ Viết phương trình của các tiếp tuyến chung của hai elíp.

ĐS: 1/ $x^2 + y^2 = \frac{12}{5}$. 2/ $x + y \pm \sqrt{5} = 0 \vee x - y \pm \sqrt{5} = 0$.

Bài 507. Cao đẳng Sư Phạm Thể Dục TWII năm 2002

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elíp (E) có hai tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{3}; 0)$, $F_2(\sqrt{3}; 0)$, một đường chuẩn có phương trình $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

- 1/ Viết phương trình chính tắc của elíp (E) .
- 2/ Gọi $M \in (E)$. Tính giá trị của biểu thức $P = F_1M^2 + F_2M^2 - 3OM^2 - F_1M.F_2M$.
- 3/ Viết phương trình đường thẳng d song song với trục hoành và cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho $OA \perp OB$.

Bài 508. Cao đẳng Cơ Khí Luyện Kim năm 2004

Viết phương trình tiếp tuyến Δ của elíp $(E): \frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{8} = 1$, biết rằng Δ song song với đường thẳng $d: x + 2y - 2 = 0$.

ĐS: $\Delta_{1,2}: x + 2y \pm 8 = 0$.

Bài 509. Cao đẳng Kinh Tế Kỹ Thuật Công Nghiệp II năm 2004

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(4; -\sqrt{3})$, $B(2\sqrt{2}; 3)$.

1/ Viết phương trình chính tắc elíp đi qua hai điểm A và B.

2/ Xác định tiêu điểm, tiêu cự, tâm sai của elíp trên.

ĐS: 1/ $(E): \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{15} = 1$. 2/ $F_1(-\sqrt{5}; 0)$, $F_2(\sqrt{5}; 0)$, $2c = 2\sqrt{5}$, $e = \frac{1}{2}$.

Bài 510. Cao đẳng Hóa Chất năm 2004

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho elíp $(E): \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$.

1/ Xác định tâm sai của (E) .

2/ Qua điểm $M(1; 1)$ kẻ các tiếp tuyến MT, MT' với T, T' là các tiếp điểm với (E) . Hãy xác định tọa độ T, T'.

ĐS: 1/ $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. 2/ $T(0; 1)$, $T'(\frac{9}{5}; \frac{4}{5})$.

Bài 511. Cao đẳng Sư Phạm Bình Phước năm 2004

Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai elíp: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$ và $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$.

ĐS: Có bốn tiếp tuyến: $x + y \pm 3 = 0 \vee x - y \pm 3 = 0$.

Bài 512. Cao đẳng Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho elíp $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Chứng minh tích các khoảng cách từ các tiêu điểm của elíp (E) đến một tiếp tuyến bất kì của nó là một hằng số.

Bài 513. Cao đẳng Sư Phạm Quảng Nam năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$ và elíp $(E): x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$. Viết phương trình các tiếp tuyến chung của (C) và (E) .

Bài 514. Cao đẳng Kinh Tế Kế Hoạch Đà Nẵng năm 2005

Cho elíp $(E): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Viết phương trình tiếp tuyến của (E) song song với đường thẳng d có phương trình $x + 2y - \sqrt{8} = 0$.

Bài 515. Cao đẳng Bán Công Hoa Sen khôi D năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, viết phương trình các tiếp tuyến của elíp $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, biết rằng tiếp tuyến đi qua $A(4; -3)$.

ĐS: $x - 4 = 0 \vee y + 3 = 0$.

Bài 516. Cao đẳng Sư Phạm Hà Nam khối A năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(0; 3\sqrt{3})$ và tiếp xúc với elip (E).

ĐS: $3x \pm 2\sqrt{2}y \mp 6\sqrt{6} = 0$.

Bài 517. Cao đẳng Sư Phạm Hà Nam khối M năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

1/ Xác định tiêu cự, tâm sai, tiêu điểm, đường chuẩn của elip (E).

2/ Lập phương trình tiếp tuyến của (E), biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(4;1)$.

ĐS: 1/ Tiêu cự $2c = 2\sqrt{5}$, tâm sai $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$, tiêu điểm $F_{1,2}(\pm\sqrt{5};0)$, đường chuẩn $x = \frac{\pm 3}{\sqrt{5}}$.

2/ Có hai phương trình tiếp tuyến: $\Delta_{1,2}: y = \frac{4 \pm \sqrt{37}}{7}x + 1 - \frac{4 \mp \sqrt{37}}{7}$.

Bài 518. Cao đẳng Sư Phạm Trà Vinh khối A, B năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Viết phương trình tiếp tuyến với (E) biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(6;0)$. Tìm tọa độ tiếp điểm.

ĐS: $d_{1,2}: x \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}y - 6 = 0$. $A\left(\frac{3}{2}; \pm\sqrt{3}\right)$.

Bài 519. Cao đẳng Nguyễn Tất Thành khối A, D năm 2007

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho elip (E): $4x^2 + 9y^2 = 36$.

1/ Tìm tọa độ các tiêu điểm của (E).

2/ Tìm điểm M trên (E) nhìn các tiêu điểm của (E) dưới một góc vuông.

ĐS: 1/ $F_{1,2}(\pm\sqrt{5};0)$. 2/ Có bốn điểm: $M_{1,2}\left(\frac{3}{\sqrt{5}}; \pm\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$, $M_{3,4}\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}; \pm\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$.

Bài 520. Đại học Bách Khoa – Tổng Hợp năm 1980

1/ Viết phương trình chính tắc của Ellipse (E) có tiêu cự $2c = 8$, tâm sai $e = \frac{4}{5}$ và các tiêu điểm nằm trên trục hoành.

2/ Viết phương trình các tiếp tuyến với Ellipse (E) xuất phát từ điểm $A\left(0; \frac{45}{12}\right)$.

3/ Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi Ellipse và các tiếp tuyến nêu trên.

ĐS: 1/ (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. 2/ $d_{1,2}: 9x \pm 20y \mp 75 = 0$. 3/ $S_{hp} = 15\pi$ (đvdt).

Bài 521. Đại học Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh năm 1988 – Y Dược Tp. Hồ Chí Minh năm 1991

Cho Ellipse $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > 0, b > 0)$ và điểm $M(x_o; y_o) \in (E)$ với $-a < x_o < a$.

Tiếp tuyến tại M cắt hai tiếp tuyến tại $A(-a; 0)$ và $A'(a; 0)$ lần lượt tại T và T'.

1/ Chứng minh rằng tích số $P = AT \cdot AT'$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

2/ Tìm các điểm M sao cho tứ giác $ATT'A'$ có diện tích nhỏ nhất và tính diện tích nhỏ nhất đó.

3/ Gọi $N(x; y)$ là giao điểm của AT' và $A'T$. Tìm quỹ tích các giao điểm N khi M chạy trên Ellipse (E) .

ĐS: 1/ $P = b^2$. 2/ $S_{\min} = 2ab \Leftrightarrow M \equiv B(0; -b) \equiv B'(0; b)$. 3/ $(E'): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = 1$.

Bài 522. Đại học Bách Khoa–Kinh Tế–Tổng Hợp–Sur Phạm–Nông Nghiệp–Y–Nha–Được 1983

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho họ Ellipse (E_m) có phương

trình $(E_m): y^2 = 2x - \frac{x^2}{m}$ với m là tham số và $0 < m < 1$.

1/ Bằng phép tịnh tiến trục tung, hãy đưa phương trình trên về dạng chính tắc. Từ đó suy ra tọa độ của tâm và các đỉnh trên elip. Tìm quỹ tích của các đỉnh ấy.

2/ Tìm tọa độ các tiêu điểm của (E_m) và xác định quỹ tích các tiêu điểm khi m thay đổi ($0 < m < 1$).

ĐS: 1/ $(E_m): \frac{(x-m)^2}{m^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{m})^2} = 1$ $(E_m): \frac{X^2}{m^2} + \frac{Y^2}{(\sqrt{m})^2} = 1$ (E_m) có tâm $I(m; 0)$.

Đỉnh trên trục lớn: $A_2(m; \sqrt{m}), A_1(m; -\sqrt{m})$. Quỹ tích các đỉnh A_1, A_2 là một Parabol $(P): y^2 = x, (0 < x < 1)$.

2/ Tiêu điểm $F_{1,2}(m; \sqrt{m-m^2})$ Quỹ tích là đường tròn $(C): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ có tâm $H\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, bán kính $R = \frac{1}{2}$, bỏ đi hai điểm $O(0; 0), G(0; 1)$.

Bài 523. Đại học Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh năm 1993

Chứng minh đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$, tiếp xúc

$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 A^2 + b^2 B^2 = C^2$.

HD: $\begin{cases} TH_1: B \neq 0 & PTHĐGD: (a^2 A^2 + b^2 B^2)x^2 + 2a^2 ACx + a(C^2 - b^2 B^2) = 0: \Delta = 0 \\ TH_2: B = 0 & PTTĐGD: a^2 A^2 \cdot y^2 = a^2 b^2 A^2 - b^2 C^2: T/x \Leftrightarrow a^2 b^2 A^2 - b^2 C^2 = 0 \end{cases}$

Bài 524. Đại học Kiến Trúc năm 1994

Cho Ellipse có phương trình $(E): \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$. Xét một hình vuông ngoại tiếp Ellipse (tức là các cạnh của hình vuông đều tiếp xúc với Ellipse). Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của hình vuông đó.

ĐS: $x + y + 3 = 0, x - y + 3 = 0, x + y - 3 = 0, x - y - 3 = 0$.

Bài 525. Đại học Xây Dựng năm 1996

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarters vuông góc Oxy, cho Ellipse

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b > 0).$$

1/ Gọi E là điểm tùy ý trên Ellipse, chứng tỏ rằng $b \leq OE \leq a$.

2/ Gọi A, B là hai điểm thuộc Ellipse sao cho OA vuông góc với OB. Hãy xác định vị trí của A, B trên Ellipse để tam giác OAB có diện tích lớn nhất và nhỏ nhất. Tính giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất đó.

ĐS: 1/ Chứng minh theo 2 cách.

$$2/ (S_{\Delta OAB})_{\max} = \frac{ab}{2} \Leftrightarrow A, B \text{ là các đỉnh của } (E).$$

$$(S_{\Delta OAB})_{\min} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \Leftrightarrow A \left(\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), B \left(-\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}; -\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Bài 526. Đại học Ngoại Thương khối D năm 1997

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho Ellipse $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

và đường thẳng $d: x - \sqrt{2}y + 2 = 0$. Đường thẳng d cắt Ellipse tại hai điểm B và C. Tìm tọa độ điểm A trên Ellipse sao cho ΔABC có diện tích lớn nhất.

ĐS: $A(2; -\sqrt{2})$.

Bài 527. Học Viện Quan Hệ Quốc Tế năm 1997

Cho Ellipse $(E): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ và điểm $A(-2; 0)$. Giả sử M là điểm di động trên Ellipse. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên trục Oy. Giả sử AH cắt OM tại P. Chứng minh rằng khi M thay đổi trên Ellipse thì P luôn luôn chạy trên một đường cong (C) cố định. Vẽ đồ thị đường cong (C).

ĐS: P chạy trên Parabol $(P): y^2 = x + 1$ bỏ qua điểm $(-1; 0)$.

Bài 528. Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh năm 1997

Cho phương trình $(E): 4x^2 + 9y^2 = 36$ và điểm $M(1; 1)$. Lập phương trình đường thẳng qua M và cắt (E) tại M_1 và M_2 sao cho $MM_1 = MM_2$.

ĐS: $4x + 9y - 13 = 0$.

Bài 529. Đại học Mở Hà Nội khối D năm 1997

Cho hai Ellipse $(E_1): \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ và $(E_2): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Viết phương trình đường tròn đi qua giao điểm của hai Ellipse.

ĐS: Không có đường tròn thỏa yêu cầu bài toán do hệ vô nghiệm.

Bài 530. Học Viện Bưu Chính Viễn Thông năm 1999

Cho Ellipse $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với tiêu điểm $F(-c; 0)$. Tìm điểm M trên Ellipse (E) sao cho độ dài FM nhỏ nhất.

ĐS: $FM_{\min} \Leftrightarrow A_1 \equiv M(-a; 0) \in (E)$.

Bài 531. Đại học Nông Nghiệp I khối A năm 2000

Cho Ellipse $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Hãy viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của

Ellipse đã cho với Ellipse $(E'): \frac{x^2}{16} + y^2 = 1$.

ĐS: $(C): x^2 + y^2 = \frac{92}{11}$.

Bài 532. Đại học Nông Nghiệp I khối B năm 2000

1/ Cho elíp $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Hãy chứng minh rằng tích các khoảng cách từ các tiêu điểm của elíp đến một tiếp tuyến bất kỳ của nó là một hằng số.

2/ Hãy viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của elíp đã cho với elíp

$$\frac{x^2}{16} + y^2 = 1.$$

ĐS: $d[F_1; (d)] \cdot d[F_2; (d)] = 4 = \text{const}$ với $d: \frac{x \cdot x_0}{9} + \frac{y \cdot y_0}{4} = 1$ là tiếp tuyến bất kỳ tại $(x_0; y_0)$.

Bài 533. Đại học Thái Nguyên khối A, B đợt 1 năm 2000

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho elíp $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

1/ Tìm mối liên hệ giữa k và m để đường thẳng $d: y = kx + m$, $(k \in \mathbb{R})$ tiếp xúc với (E) .

2/ Khi d là tiếp tuyến của (E) , gọi giao điểm của d với các đường thẳng $x = 5$ và $x = -5$ là

M và N . Tính diện tích ΔFMN theo k , trong đó F là tiêu điểm của (E) có hoành độ dương.

3/ Xác định k để tam giác FMN có diện tích bé nhất.

ĐS: $1/ \Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2 - 25k^2 = 16$.

$$2/3/ S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{FM}| \cdot |\overrightarrow{FN}| = \frac{1}{2} \sqrt{4 + (m + 5k)^2} \sqrt{64 + (m - 5k)^2} \stackrel{B.C.S}{\geq} 16 \quad k = \pm \frac{3}{5}.$$

Bài 534. Học Viện Ngân Hàng Tp. Hồ Chí Minh năm 2001

1/ Nếu elíp $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ nhận các đường thẳng $3x - 2y - 20 = 0$ và $x + 6y = 20$ làm tiếp tuyến. Hãy tính a^2 và b^2 .

2/ Cho elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Hãy tìm mối liên hệ giữa a, b, k, m để (E) tiếp xúc với đường thẳng $d: y = kx + m, (k \in \mathbb{R})$.

ĐS: $a^2 = 40, b^2 = 10, k^2 a^2 + b^2 = m^2$.

Bài 535. Đại học Ngoại Thương khối A năm 2001

Cho họ đường cong (C_m) có phương trình $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{m^2 - 25} = 1$, trong đó m là tham số và $m \neq 0, m \neq \pm 5$.

1/ Tùy theo giá trị của m , hãy xác định khi nào thì (C_m) là elíp và khi nào thì (C_m) là hyperbol.

2/ Giả sử A là một điểm tùy ý trên đường thẳng $x = 1$ và A không thuộc trục hoành. Chứng minh rằng với mỗi điểm A luôn luôn có bốn đường cong của họ (C_m) đi qua A . Hỏi trong số bốn đường cong (C_m) đó, có bao nhiêu elíp và bao nhiêu hyperbol?

ĐS: 1/ $\begin{cases} (C_m) \equiv \text{Elip} \Leftrightarrow m^2 - 25 > 0 \Leftrightarrow |m| > 5 \\ (C_m) \equiv \text{Hyperbol} \Leftrightarrow m^2 - 25 < 0 \Leftrightarrow |m| < 5 \end{cases}$. 2/ Ứng $A(1; a)$ có $\begin{cases} 2: \text{Ellipse} \\ 2: \text{Hyperbol} \end{cases}$.

Bài 536. Đại học Y Dược Tp. Hồ Chí Minh năm 2001

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và hai đường thẳng $(D): ax - by = 0$ và $(D'): bx + ay = 0$ với $a^2 + b^2 > 0$. Gọi M, N là các giao điểm của (D) với (E) và P, Q là các giao điểm của (D') và (E) .

1/ Tính diện tích tứ giác MNPQ theo a và b .

2/ Tìm điều kiện đối với a, b để diện tích tứ giác MNPQ nhỏ nhất.

ĐS: 1/ $S_{MNPQ} = \frac{72(a^2 + b^2)}{\sqrt{(9a^2 + 4b^2)(9b^2 + 4a^2)}}$. 2/ $(S_{MNPQ})_{\min} = \frac{144}{13} \Leftrightarrow a^2 = b^2$.

Bài 537. Đại học khối D năm 2002

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Xét điểm M chuyển động trên tia Ox và điểm N chuyển động trên tia Oy sao cho đường thẳng MN luôn tiếp xúc với (E) . Xác định tọa độ của M, N để đoạn MN có độ dài nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất.

ĐS: $M(2\sqrt{7}; 0), N(0; \sqrt{21}), MN_{\min} = 7$.

Bài 538. Dự bị 1 – Đại học khối D năm 2002

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và đường thẳng

$d_m: mx - y - 1 = 0$.

1/ Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , đường thẳng d_m luôn cắt elip (E) tại hai điểm phân biệt.

2/ Viết phương trình tiếp tuyến của (E) , biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $N(1; -3)$.

ĐS: $2/ 5x - 4y - 17 = 0; x + 2y + 5 = 0$.

Bài 539. Dự bị 2 – Đại học khối B năm 2003

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ và các điểm

$M(-2; 3), N(5; n)$. Viết phương trình các đường thẳng d_1, d_2 qua M và tiếp xúc với (E) . Tìm n để trong số các tiếp tuyến của (E) đi qua N có một tiếp tuyến song song với d_1 hoặc d_2 .

ĐS: $d_1: x = -2; d_2: 2x + 3y - 5 = 0; n = -5$.

Bài 540. Dự bị 2 – Đại học khối B năm 2004

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$. Viết phương trình các tiếp tuyến của (E) song song với đường thẳng $d: x + \sqrt{2}y - 1 = 0$.

Bài 541. Đại học khối D năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $C(2; 0)$ và elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Tìm tọa độ các điểm A, B thuộc (E) , biết rằng hai điểm A, B đối xứng với nhau qua trục hoành và tam giác ABC là tam giác đều.

ĐS: $A\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ hoặc $A\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$.

Bài 542. Dự bị 1 – Đại học khối B năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{9} = 1$. Viết phương trình tiếp tuyến d của (E) biết d cắt hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho $AO = 2BO$.

ĐS: Bốn tiếp tuyến thỏa yêu cầu bài toán: $x + 2y \pm 10 = 0, x - 2y \pm 10 = 0$.

Bài 543. Dự bị 2 – Đại học khối D năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, lập phương trình chính tắc của elip (E) có độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{2}$, các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm của (E) cùng nằm trên một đường tròn.

ĐS: $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Bài 544. Đại học khối A năm 2008

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình chính tắc của elip (E) biết rằng (E) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20.

ĐS: $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Bài 545. Đại học khối B năm 2010 (Chương trình nâng cao)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(2; \sqrt{3})$ và elip $(E): \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$. Gọi F_1 và F_2 là các tiêu điểm của (E) (F_1 có hoành độ âm); M là giao điểm có tung độ dương của đường thẳng AF_1 với (E) ; N là điểm đối xứng của F_2 qua M . Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABF_2 .

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad (x-1)^2 + \left(y - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}.$$

Bài 546. Đại học khối A năm 2011 (Chương trình nâng cao)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Tìm tọa độ các điểm A và B thuộc (E) , có hoành độ dương sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad 1/ \quad M(2; -4) \vee M(-3; 1). \quad 2/ \quad A\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), B\left(\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \vee A\left(\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), B\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Bài 547. Đại học khối A năm 2012 (Chương trình nâng cao)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 8$. Viết phương trình chính tắc của elíp (E) , biết rằng (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và (E) cắt (C) tại bốn điểm tạo thành bốn đỉnh của hình vuông.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad (E): \frac{x^2}{16} + \frac{3y^2}{16} = 1.$$

E – PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG HYPERBOL



① Kiến thức cơ bản

a/ Định nghĩa

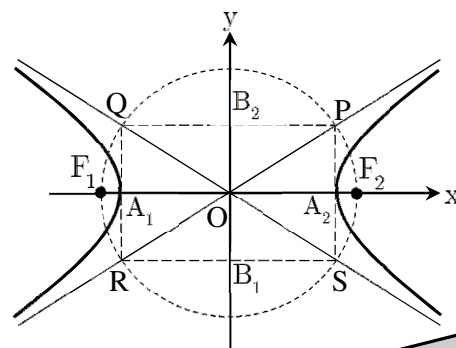
- Cho cố định với . Tập hợp điểm M sao cho với a là một số không đổi và được gọi là một Hyperbol .
- Vậy . Trong đó:
 - + Hai điểm gọi là **hai tiêu điểm** của Hyperbol.
 - + Khoảng cách gọi là **tiêu cự** của Hyperbol.
 - + Trung điểm I của gọi là **tâm** của Hyperbol.
 - + Với điểm thì các khoảng cách và gọi là các **bán kính qua tiêu** của điểm M.

b/ Phương trình chính tắc và tham số của Hyperbol

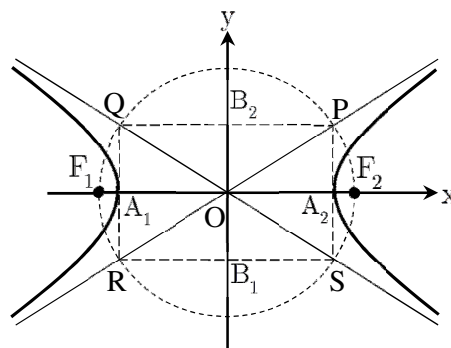
- Phương trình chính tắc của Hyperbol với . Trong đó:
 - + Tọa độ các tiêu điểm: .
 - + Với và là các bán kính qua tiêu điểm M thì .
- Phương trình tham số dạng lượng giác: .

c/ Hình dạng của hypebol

- nhận các trục tọa độ làm các trục đối xứng và gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.
- Tọa độ các đỉnh: .
- Độ dài các trục: trục thực: trục ảo: .



- Tâm sai của (H): $e = \frac{c}{a}$, ($e > 1$).
- Hình chữ nhật cơ sở: tạo bởi các đường thẳng: $x = \pm a$, $y = \pm b$.
- Phương trình các đường tiệm cận: $y = \pm \frac{b}{a}x$.



c/ Dạng toán 3. Vị trí tương đối đường thẳng và Hyperbol (H).

Bằng cách xét hệ phương trình tạo bởi (H) và đường thẳng (d). Khi đó, số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của (d) và (H).

— Phương trình tiếp tuyến của Hyperbol $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tại điểm

$M(x_o; y_o) \in (H)$ là $d: \boxed{\frac{x_o x}{a^2} - \frac{y_o y}{b^2} = 1}$ (phương pháp phân đôi tọa độ).

TÌM CÁC THUỘC TÍNH VÀ LẬP PHƯƠNG TRÌNH HYPERBOL (H)

Bài 548. Vẽ đồ thị các hypebol (H) sau

$$1/ \quad (H): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

$$2/ \quad (H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

$$3/ \quad (H): 25x^2 - 16y^2 = 400.$$

$$4/ \quad (H): x^2 - 4y^2 = 1.$$

Bài 549. Xác định các tọa độ tiêu điểm, các đỉnh, độ dài trục thực, độ dài trục ảo, tiêu cự, tâm sai và viết phương trình các đường tiệm cận của hypebol (H).

$$1/ \quad (H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

$$2/ \quad (H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

$$3/ \quad (H): 4x^2 - y^2 = 4.$$

$$4/ \quad (H): x^2 - y^2 = 1.$$

$$5/ \quad (H): 25x^2 - 16y^2 = 400.$$

$$6/ \quad (H): 16x^2 - 9y^2 = 16.$$

$$7/ \quad (H): 9x^2 - 16y^2 = 144.$$

$$8/ \quad (H): mx^2 - ny^2 = mn, \quad (m, n > 0).$$

$$9/ \quad (H): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

$$10/ \quad (H): 4x^2 - 9y^2 = 5.$$

$$11/ \quad (H): x^2 - 4y^2 = 1.$$

$$12/ \quad (H): 9x^2 - 25y^2 = 1.$$

Bài 550. Lập phương trình chính tắc và tham số của hypebol (H). Biết rằng

1/ Độ dài trục thực bằng 10, trục ảo bằng 6.

2/ Độ dài trục thực bằng 8, tiêu cự bằng 10.

3/ Có một tiêu điểm $F_2(5;0)$ và đỉnh $A_1(-4;0)$.

4/ Độ dài trục thực bằng 48, tâm sai bằng $\frac{13}{12}$.

5/ Độ dài trục ảo bằng 6, tâm sai bằng $\frac{5}{4}$.

6/ Có đỉnh $A_2(2;0)$ và tâm sai $e = \frac{3}{2}$.

7/ Có độ dài trục thực bằng 8 và tâm sai $e = \frac{5}{4}$.

8/ Độ dài trục ảo bằng 12, tâm sai bằng $\frac{5}{4}$.

9/ Tiêu điểm $F_1(-6;0)$ và tâm sai $e = \frac{3}{2}$.

10/ Có tiêu cự bằng 16 và tâm sai $e = \frac{4}{3}$.

11/ Một đỉnh là $A(5;0)$, một tiêu điểm là $F(6;0)$.

12/ Một tiêu điểm là $F(-7;0)$ và tâm sai $e = 2$.

13/ Qua $A(\sqrt{10};6)$ và có tâm sai $e = \sqrt{5}$.

14/ Qua $A(-5;3)$ và có tâm sai $e = \sqrt{2}$.

15/ Qua $A(-2;12)$ và có tiêu điểm $F_1(7;0)$.

TÌM ĐIỂM TRÊN HYPERBOL (H) THỎA ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC – SỰ TƯƠNG GIAO

Bài 555. Cho Hyperbol (H): $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$. Tìm những điểm M trên (H) sao cho

- 1/ M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.
- 2/ M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 60° .
- 3/ M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 45° .
- 4/ M có tọa độ nguyên.
- 5/ M thuộc nhánh phải và MF_1 nhỏ nhất (ngắn nhất).
- 6/ M thuộc nhánh phải và MF_1 lớn nhất (dài nhất).
- 7/ Khoảng cách từ M đến đường thẳng $\Delta: x - y + 3 = 0$ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Bài 556. Cho Hyperbol (H): $4x^2 - y^2 = 4$. Tìm những điểm M trên (H) sao cho

- 1/ M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.
- 2/ M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 120° .
- 3/ M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 30° .
- 4/ M có tọa độ nguyên.
- 5/ M thuộc nhánh phải và MF_1 nhỏ nhất (ngắn nhất).
- 6/ M thuộc nhánh phải và MF_1 lớn nhất (dài nhất).
- 7/ Khoảng cách từ M đến đường thẳng $\Delta: x + y - 2 = 0$ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Bài 557. Cho Hyperbol (H): $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$. Tìm những điểm M trên (H) sao cho

- 1/ M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.
- 2/ M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 120° .
- 3/ M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 60° .
- 4/ M có tọa độ nguyên.
- 5/ M thuộc nhánh phải và MF_1 nhỏ nhất (ngắn nhất).
- 6/ M thuộc nhánh phải và MF_1 lớn nhất (dài nhất).
- 7/ Có bán kính qua tiêu điểm này bằng hai lần bán kính qua tiêu điểm kia.
- 8/ Khoảng cách từ M đến đường thẳng $\Delta: y = x + 1$ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Bài 558. Cho hyperbol (H) và đường thẳng d vuông góc với trục thực tại tiêu điểm bên trái F_1 cắt (H) tại hai điểm M, N.

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------|
| a/ Tìm tọa độ các điểm M, N. | b/ Tính MF_1, MF_2, MN . |
| 1/ (H): $16x^2 - 9y^2 = 144$. | 2/ (H): $12x^2 - 4y^2 = 48$. |
| 3/ (H): $10x^2 + 36y^2 - 360 = 0$. | 4/ (H): $x^2 - 4y^2 = 4$. |

Bài 559. Cho hyperbol (H). Tìm những điểm $M \in (H)$ sao cho:

- | | |
|--|--|
| a/ $MF_2 = 3MF_1$. | b/ $MF_1 = 3MF_2$. |
| c/ $MF_1 = 2MF_2$. | e/ $MF_1 = 4MF_2$. |
| 1/ (H): $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. | 2/ (H): $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$. |
| 3/ (H): $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$. | 4/ (H): $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$. |

Bài 560. Cho hypebol (H) . Tìm những điểm $M \in (H)$ nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông, với:

1/ $(H): \frac{x^2}{4} - y^2 = 1.$

2/ $(H): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$

3/ $(H): \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$

4/ $(H): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$

Bài 561. Cho hypebol (H) . Tìm những điểm $M \in (H)$ nhìn hai tiêu điểm dưới một góc α , với:

1/ $(H): \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1, \alpha = 120^\circ.$

2/ $(H): \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{13} = 1, \alpha = 120^\circ.$

3/ $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1, \alpha = 60^\circ.$

4/ $(H): 16x^2 - 9y^2 = 144, \alpha = 45^\circ.$

Bài 562. Cho hyperbol $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Tìm điểm M trên hyperbol (H) sao cho

1/ M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

2/ Tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận bằng $\frac{24\sqrt{2}}{5}$.

Bài 563. Cho hyperbol $(H): 3x^2 - 4y^2 = 12$ có hai tiêu điểm là F_1, F_2 .

1/ Biết M là điểm trên (H) có $MF_1 = 3$. Hãy tính MF_2 và tìm tọa độ điểm M .

2/ Tìm trên một nhánh của (H) hai điểm P, Q sao cho $\triangle OPQ$ là tam giác đều.

Bài 564. Cho hyperbol $(H): \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$ và đường thẳng $d: x\sqrt{2} - y - 2 = 0$.

1/ Chứng minh rằng d luôn cắt (H) tại hai điểm phân biệt A, B . Tính độ dài đoạn AB .

2/ Tìm tọa độ điểm $C \in (H)$ sao cho

a/ $\triangle ABC$ có diện tích bằng 5.

b/ $\triangle ABC$ cân.

c/ $\triangle ABC$ vuông.

Bài 565. Cho hyperbol $(H): \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$ và đường thẳng $d: 2x + 15y - 10 = 0$.

1/ Chứng minh rằng d luôn cắt (H) tại 2 điểm phân biệt A, B với $x_A > 0$. Tính độ dài AB .

2/ Tìm tọa độ điểm $C \in (H)$ sao cho $\triangle ABC$ cân tại A .

TÍNH CHẤT CỦA HYPERBOL (H) VÀ MỘT SỐ DẠNG TOÁN KHÁC

Bài 566. Cho hyperbol $(H): \frac{x^2}{4} - y^2 = 1.$

1/ Xác định tiêu điểm và hai tiệm cận của (H) .

2/ Lấy tùy ý $M(x_0; y_0) \in (H)$. Tính các khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của (H) .

Bài 567. Cho hyperbol $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

1/ Gọi M là điểm tùy ý trên (H) . Chứng minh tích các khoảng cách từ M đến hai đường tiệm

cận bằng một số không đổi và bằng $\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$.

2/ Từ một điểm N bất kì trên (H), dựng hai đường thẳng song song với hai đường tiệm cận, cùng với hai đường tiệm cận tạo thành một hình bình hành. Chứng minh diện tích hình bình hành đó bằng $\frac{1}{2}ab$.

Bài 568. Cho hyperbol (H): $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ có hai tiêu điểm F_1, F_2 . Hãy tính:

$$1/ \quad H = OM^2 - MF_1.MF_2.$$

$$2/ \quad S = (MF_1 + MF_2)^2 - 4OM^2.$$

Bài 569. Cho hyperbol (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ có hai tiêu điểm F_1, F_2 và hai đỉnh A_1, A_2 . Điểm M di động trên (H) và có hình chiếu xuống trục hoành Ox là P. Chứng minh rằng

$$1/ \quad OM^2 - MF_1.MF_2 = a^2 - b^2.$$

$$2/ \quad \left(\text{MF}_1 + \text{MF}_2 \right)^2 = 4 \left(\text{OM}^2 + \text{b}^2 \right).$$

$$3/ \quad \text{PM}^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \overline{\text{PA}_1} \cdot \overline{\text{PA}_2}.$$

Bài 570. Cho hypebol $(H): 9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$.

1/ Viết phương trình các đường chuẩn của (H).

2/ Viết phương trình các đường tiệm cận của (H).

3/ Gọi M là một điểm bất kì trên (H) . Chứng minh tích các khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận bằng một số không đổi.

4/ Tìm điểm M trên (H) sao cho bán kính qua tiêu điểm bên trái bằng 2 lần bán kính qua tiêu điểm bên phải của M.

5/ Tìm điểm N trên (H) sao cho $\widehat{F_1NF_2} = 90^\circ$.

6/ Chứng minh rằng nếu một đường thẳng d cắt (H) tại P, Q và cắt hai đường tiệm cận tại P', Q' thì $PP' = QQ'$.

Bài 571. Cho đường thẳng $d: x + y - 3 = 0$ và hyperbol $(H): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Chứng tỏ rằng d cắt (H) tại hai điểm phân biệt và xác định tọa độ các giao điểm. Tính độ dài đoạn nối hai giao điểm.

Bài 572. Cho hyperbol (H): $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ và đường thẳng d: $x - y + m = 0$.

1/ Chứng minh: d luôn cắt (H) tại 2 điểm M, N thuộc hai nhánh khác nhau với $x_M < x_N$.

2/ Gọi F_1, F_2 là hai tiêu điểm của (H) . Tìm m để $NF_2 = 2MF_1$.

Bài 573. Cho hyperbol (H): $8x^2 - y^2 = 8$ và đường thẳng d: $2x - y + m = 0$.

1/ Chứng minh: d luôn cắt (H) tại 2 điểm M, N thuộc hai nhánh khác nhau với $x_M < x_N$.

2/ Gọi F_1, F_2 là hai tiêu điểm của (H) . Tìm m để $NF_2 = 2MF_1$.

Bài 574. Cho hyperbol (H): $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$. Lập phương trình đường thẳng d đi qua M(0;2) cắt (H) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho M là trung điểm của AB.

Bài 575. Cho hyperbol $(H): \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$. Lập phương trình đường thẳng d đi qua $M(0;2)$ cắt (H) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $\overrightarrow{3MA} - 5\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Bài 576. Tìm tọa độ giao điểm của $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ và elíp $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Chứng minh rằng các tiếp điểm này cùng nằm trên một đường tròn. Viết phương trình đường tròn này.

Bài 577. Cho hyperbol $(H): \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$. Gọi d là đường thẳng qua gốc tọa độ O có hệ số góc k và d' là đường thẳng cũng đi qua O nhưng vuông góc với d .

1/ Tìm điều kiện của k để d và d' đều cắt hyperbol (H) .

2/ Tính theo k diện tích hình thoi với 4 đỉnh là 4 giao điểm của d, d' và (H) .

3/ Xác định k để hình thoi ấy có diện tích nhỏ nhất.

Bài 578. Lập phương trình đường tròn đi qua giao điểm của $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và $(H): x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$.

Bài 579. Cho elíp có phương trình $(E): \frac{(x-1)^2}{5} + (y+2)^2 = 1$ và điểm A có $x_A = -\frac{3}{2}$ và $y_A > 0$ thuộc vào elíp (E) .

1/ Lập phương trình chính tắc của Hyperbol (H) có một tiêu điểm $F_1(-1;-2)$, tâm $I(1;-2)$ và đi qua điểm A .

2/ Xác định tọa độ giao điểm của (H) và (E) .

QUỸ TÍCH ĐIỂM - TẬP HỢP ĐIỂM (H)

Bài 580. Cho $M\left(\frac{3}{\sin \alpha}; \cot \alpha\right)$ với $\alpha \neq k\pi$. Tìm tập hợp điểm M .

Bài 581. Cho $M\left(\frac{a}{\cos \alpha}; b \tan \alpha\right)$ với $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$. Tìm tập hợp điểm M .

Bài 582. Cho điểm $F(2;0)$ và $\Delta: x = \frac{3}{2}$. Tìm tập hợp điểm M thỏa: $\sqrt{3}.PF = 3.d(M, \Delta)$.

Bài 583. Cho điểm $F(-3;0)$ và $\Delta: 3x + 4 = 0$. Tìm tập hợp điểm M sao cho $2MF = 3.d(M, \Delta)$.

Bài 584. Cho hai điểm $A(-1;0)$, $B(1;0)$ và đường thẳng $\Delta: x - \frac{1}{4} = 0$.

1/ Tìm tập hợp điểm M sao cho $MB = 2MH$ với H là hình chiếu vuông góc của M trên Δ .

2/ Tìm tập hợp điểm N sao cho các đường thẳng AN, BN không song song với Oy và có tích các hệ số góc bằng 4.

Bài 585. Cho hai đường tròn (C_1) có tâm là F_1 và bán kính R_1 , (C_2) có tâm là F_2 và bán kính R_2 ($R_1 \neq R_2$). Gọi M là tâm đường tròn (C) thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với (C_1) và (C_2) . Tìm tập hợp điểm M .

Bài 586. Cho điểm M di động trên hyperbol $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 25$. Tìm tập hợp trung điểm của đoạn MF_1 và MF_2 với $x_{F_1} < x_{F_2}$.

Bài 587. Cho hyperbol $(H): x^2 - y^2 = 1$ và đường thẳng $d: 5x - 3y - 1 = 0$. Tìm điểm $M \in (H)$ sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng d là nhỏ nhất.

Bài 588. Cho hai đường tròn $(C_1): (x - 3)^2 + y^2 = 9$ và $(C_2): (x + 3)^2 + y^2 = 4$. Tìm tập hợp tâm M của đường tròn tiếp xúc đồng thời với hai đường tròn nói trên.

Bài 589. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x = 0$ và điểm $F_2(2; 0)$.

- 1/ Tìm tọa độ tâm F_1 và bán kính R của (C) .
- 2/ Tìm tập hợp các tâm M của đường tròn (C') di động luôn đi qua F_2 và tiếp xúc với (C) .
- 3/ Viết phương trình của tập hợp trên.

Bài 590. Cho hai đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 10x + 9 = 0$ và $(C'): x^2 + y^2 - 10x + 21 = 0$.

- 1/ Xác định tâm và tính bán kính của (C) và (C') .
- 2/ Tìm tập hợp các tâm M của đường tròn (T) tiếp xúc với (C) và (C') .
- 3/ Viết phương trình của tập hợp đó trên.

Bài 591. Cho hai đường thẳng $\Delta: 5x - 2y = 0$ và $\Delta': 5x + 2y = 0$.

- 1/ Tìm tập hợp (H) các điểm M có tích các khoảng cách từ M đến Δ và Δ' bằng $\frac{100}{29}$.
- 2/ Viết phương trình các đường tiệm cận của (H) .
- 3/ Gọi N là một điểm bất kì trên (H) . Chứng minh tích các khoảng cách từ N đến các đường tiệm cận của (H) bằng một số không đổi.

Bài 592. Tìm tập hợp các điểm M có tỉ số các khoảng cách từ đó đến điểm F và đến đường thẳng Δ bằng e , với:

- | | |
|---|--|
| 1/ $F(4; 0), \Delta: x - 1 = 0, e = 2$. | 2/ $F(3\sqrt{2}; 0), \Delta: x - \frac{3\sqrt{2}}{2}, e = \frac{3\sqrt{2}}{3}$. |
| 2/ $F(6; 0), \Delta: 3x - 8 = 0, e = \frac{3}{2}$. | 2/ $F(3; 0), \Delta: 3x - 4 = 0, e = \frac{3}{2}$. |

BÀI TẬP QUA CÁC KÌ THI

Bài 593. Cao đẳng Marketing Tp. Hồ Chí Minh năm 1997

Cho hyperbol (H): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

1/ Tìm độ dài trục ảo, trục thực, tâm sai, tiêu điểm F_1, F_2 của (H).

2/ Tìm trên (H) những điểm sao cho $MF_1 \perp MF_2$.

ĐS: 1/ $2a = 8, 2b = 6, F_{1,2}(\pm 5; 0), e = \frac{5}{4}$. 2/ $M_{1,2}\left(\frac{4\sqrt{34}}{5}; \pm \frac{9}{5}\right), M_{3,4}\left(-\frac{4\sqrt{34}}{5}; \pm \frac{9}{5}\right)$.

Bài 594. Cao đẳng Công Nghiệp Hà Nội năm 2003

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Đề các vuông góc Oxy, cho hyperbol (H): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Lập phương trình elip (E), biết rằng (E) có các tiêu điểm của (H) và (E) ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của (H).

Bài 595. Cao đẳng Kinh Tế Tài Chính năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hyperbol (H): $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$. Viết phương trình tiếp tuyến với hyperbol (H), biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $A(10; 6)$.

Bài 596. Cao đẳng Kinh Tế Kỹ Thuật Công Nghiệp I năm 2007

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho hyperbol (H) có phương

trình: $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$ và điểm $M(2; 1)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua M, biết rằng đường thẳng đó cắt (H) tại hai điểm A, B mà M là trung điểm của AB.

ĐS: $d: 3x - y - 5 = 0$.

Bài 597. Đại học Kinh Tế – Đại học Sư Phạm – Đại học Kiến Trúc – Đại học Nông Nghiệp năm 1981

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho họ hyperbol có phương trình $(C_m): (m^2 - 4)x^2 - 4y^2 = 4(m^2 - 4)$ với m là tham số.

1/ Tùy theo m, hãy chỉ rõ bản chất (C_m) và cho biết tâm, đỉnh, tiêu điểm, tiệm cận nếu có.

2/ Vẽ (C_0) và $(C_{2\sqrt{2}})$ trên cùng một hình.

ĐS: $m = \pm 2 \quad (C_m): y^2 = 0, \quad m = 0 \quad (C_m): x^2 + y^2 = 4,$

$m \in (-2; 2) \Rightarrow (C_m): \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{4-m^2})^2} = 1; \quad \begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases} \quad (C_m): \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{4-m^2})^2} = 1.$

Bài 598. Đại học Dân Lập Hùng Vương năm 1996

Cho hyperbol $(H): \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

1/ Xác định tiêu điểm. Viết phương trình các tiệm cận.

2/ Cho $M(x_0; y_0) \in (H)$. Tính tích số từ M đến hai tiệm cận.

ĐS: 1/ $F_1(-\sqrt{5}; 0), F_2(\sqrt{5}; 0), d_{1,2}: y = \pm \frac{1}{2}x$. 2/ $d(M, d_1) \cdot d(M, d_2) = \frac{4}{5}$.

Bài 599. Đại học Dân Lập Thăng Long năm 1996

Với mỗi t mà $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, xét $M(t)$ có tọa độ $\left(x = \frac{1}{\cos t}; y = \sqrt{3} \tan t\right)$. Chứng minh:

1/ Khi t thay đổi, điểm $M(t)$ vạch nên một nhánh của hyperbol. Xác định tọa độ các tiêu điểm của hyperbol đó.

2/ Chứng minh điều kiện cần và đủ để đường thẳng nối hai điểm phân biệt $M(t_1), M(t_2)$ đi qua một tiêu điểm của (H) là $\tan \frac{t_1}{2} \cdot \tan \frac{t_2}{2} = -\frac{1}{3}$.

ĐS: 1/ Nhánh phải $(H): x^2 - \frac{y^2}{3} = 1, (x > 0)$ có $F(2; 0)$. 2/ Đặt $\begin{cases} u = \tan \frac{t_1}{2} \\ v = \tan \frac{t_2}{2} \end{cases}$.

Bài 600. Đại học Nông Nghiệp I năm 1997 – hệ chưa phân ban

Cho elip $(E): 4x^2 + 16y^2 = 64$.

1/ Xác định các tiêu điểm F_1, F_2 , tâm sai và vẽ (E) .

2/ M là một điểm bất kỳ trên elip. Chứng tỏ rằng tỉ số khoảng cách từ M đến tiêu điểm phải F_2 và tới đường thẳng $x = \frac{8}{\sqrt{3}}$ có giá trị không đổi.

3/ Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4\sqrt{3}x - 4 = 0$. Xét đường tròn (C') đi động nhưng luôn đi qua tiêu điểm phải F_2 và tiếp xúc với đường tròn (C) . Chứng tỏ rằng tâm N của đường tròn (C') nằm trên một hyperbol cố định. Viết phương trình của hyperbol đó.

ĐS: 1/ $F_{1,2}(\mp 2\sqrt{3}; 0), e = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 2/ $\frac{MF}{MH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 3/ $(H): \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1, \left(x \geq \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Bài 601. Đại học Giao Thông Vận Tải đề 2 năm 1997

Cho hyperbol $(H): x^2 - y^2 = 8$. Viết phương trình chính tắc của Elip (E) đi qua điểm $A(4; 6)$ và có tiêu điểm trùng với tiêu điểm của hyperbol đã cho.

ĐS: $(E): \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$.

Bài 602. Đại học Kiến Trúc Hà Nội (Cơ Sở Thủ Đức – Tp. Hồ Chí Minh) năm 1997

Cho hyperbol (H): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$.

1/ Viết phương trình đường thẳng d là tiếp tuyến của (H) và đi qua điểm A(2; -1).

2/ Gọi M₁ là tiếp điểm của (H) và d. Chứng minh d là phân giác góc $\widehat{F_1M_1F_2}$ (F₁, F₂ là tiêu điểm của hyperbol).

3/ Tính thể tích vật thể tròn xoay do quay miền phẳng giới hạn bởi (H), d, trục Ox quanh Oy.

ĐS: 1/ d : $5x - 6y - 16 = 0$. 2/ CM: $\frac{M_1F_1}{M_1F_2} = \frac{BF_1}{BF_2}$ với $\begin{cases} d \cap (H) = M_1\left(5; \frac{3}{2}\right) \\ d \cap O_x = B\left(\frac{16}{5}; 0\right) \end{cases}$. 3/ $V = \frac{21\pi}{75}$.

Bài 603. Đại học Dược Hà Nội năm 1997 – hệ chưa phân ban

Cho hyperbol (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1/ Tìm tập hợp điểm trong mặt phẳng Oxy sao cho từ mỗi điểm đó kẻ được hai tiếp tuyến với (H) và tiếp tuyến ấy vuông góc với nhau.

2/ M là điểm bất kỳ trên (H). Gọi Δ_1, Δ_2 là hai đường thẳng đi qua M và tương ứng song song với hai đường tiệm cận của (H). Chứng minh rằng diện tích hình bình hành được giới hạn bởi Δ_1, Δ_2 và hai đường tiệm cận là một số không đổi.

ĐS: 1/ $x^2 + y^2 = a^2 - b^2, \left(y \neq \pm \frac{b}{a}\right)$. 2/ $S = \frac{a^2b^2}{(a^2 + b^2)\sin\varphi}$ với $\varphi = (\Delta_1, \Delta_2)$.

Bài 604. Đại học Đà Nẵng khối B năm 1997 – hệ chưa phân ban

Lập phương trình chính tắc của hyperbol (H) với Ox là trục thực, tổng hai bán trục $a + b = 7$, phương trình hai tiệm cận: $y = \pm \frac{3}{4}x$.

1/ Tính độ dài các bán trục, vẽ hyperbol (H)

2/ Lập phương trình tiếp tuyến của (H) song song với đường thẳng d : $5x - 4y + 10 = 0$.

ĐS: 1/ (H): $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$. 2/ $5x - 4y + 4 = 0, \quad 5x - 5y - 4 = 0$.

Bài 605. Học Viện Công Nghệ Bưu Chính Viễn Thông năm 1999

Hai đường cong được gọi là trục giao nhau tại giao điểm của chúng khi và chỉ khi tại đó hai tiếp tuyến tương ứng của hai đường cong vuông góc với nhau. Chứng minh hai đường cong sau đây trục giao nhau tại giao điểm của chúng: $x^2 - y^2 = a$ và $y = \frac{b}{x}$ với $a, b = \text{const}$.

HD: • Tìm tọa độ giao điểm của (H): $x^2 - y^2 = a$ và d : $y = \frac{b}{x}$.

• Gọi $A(x_0; y_0)$ là một trong các giao điểm đó.

- Xác định hệ số góc k_1 của tiếp tuyến d_1 của (H) tại A.
- Xác định hệ số góc k_2 của tiếp tuyến d_2 của (H) tại A.
- Chứng tỏ $k_1 k_2 = -1$.

Bài 606. Đại học Luật Hà Nội năm 2000

Tìm tập hợp điểm $M(x; y)$ trong hệ tọa độ Oxy sao cho khoảng cách từ M đến điểm $F(0; 4)$ bằng hai lần khoảng cách từ M đến đường thẳng $y = 1$. Tập hợp đó là đường gì ?

ĐS: Tập hợp điểm $M(x; y)$ là hyperbol $(H): \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$.

Bài 607. Đại học Nông Nghiệp I khối A năm 2000

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho các điểm $A(-2; 0)$, $B(2; 0)$, $M(x; y)$.

- 1/ Xác định tọa độ điểm M, biết rằng M nằm phía trên trục hoành, số đo góc $\widehat{AMB} = 90^\circ$ và số đo góc $\widehat{MAB} = 30^\circ$.
- 2/ Khi M chuyển động trong mặt phẳng tọa độ sao cho ΔAMB có số đo góc $\widehat{MBA}$ gấp hai lần số đo góc $\widehat{MAB}$. Chứng minh rằng M chạy trên một nhánh của đường hyperbol. Xác định tọa độ tiêu điểm của nhánh hyperbol đó.

ĐS: 1/ $M(1; \sqrt{3})$.

$$2/ (H): \frac{9}{16} \left(x + \frac{2}{3} \right)^2 - \frac{3y^2}{16} = 1. \text{ Đặt } \begin{cases} x + \frac{2}{3} = X, y = Y \\ \frac{16}{9} = a^2, \frac{16}{3} = b^2 \end{cases} \quad (H): \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Bài 608. Đại học Kiến Trúc Tp. Hồ Chí Minh khối V năm 2001

Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm bất kỳ của hyperbol $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ đến các tiệm cận của nó là một số không đổi.

ĐS: $d_1 \cdot d_2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = \text{hằng số}.$

Bài 609. Dự bị 1 – Đại học khối A năm 2006

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{2} = 1$. Viết phương trình hyperbol (H) có hai đường tiệm cận là $y = \pm 2x$ và có hai tiêu điểm là hai tiêu điểm của elip (E) .

ĐS: $(H): \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 1.$

F – PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG PARABOL

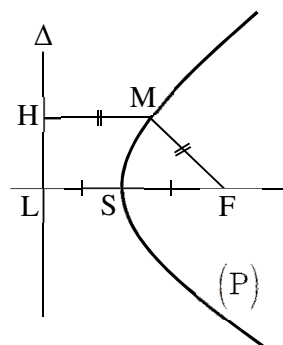


① Kiến thức cơ bản

a/ Định nghĩa

Trong mặt phẳng Oxy cho điểm cố định F và đường thẳng cố định Δ . Parabol là tập hợp những điểm M của mặt phẳng cách đều một đường thẳng Δ cố định và một điểm F cố định không thuộc Δ .
với H là hình chiếu của M lên Δ và

- Điểm F được gọi là tiêu điểm.
- Đường thẳng Δ được gọi là đường chuẩn.
- $MF = MH$ gọi là tham số tiêu của parabol.
- S (trung điểm của FL) gọi là đỉnh của parabol.
- Đường thẳng FL được gọi là trục đối xứng của parabol.



b/ Phương trình chính tắc của parabol

Cho parabol có tiêu điểm và đường chuẩn có phương trình

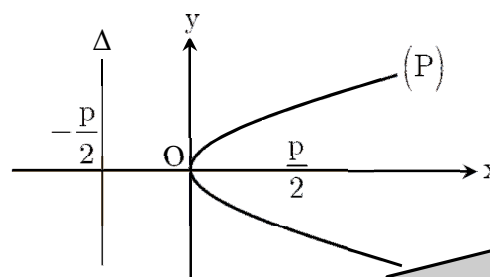
với

- Tọa độ tiêu điểm
- Phương trình đường chuẩn
- Với thì bán kính qua tiêu điểm của M là

c/ Hình dạng của parabol

- nằm về phía bên phải của trục tung.
- nhận trục hoành làm trục đối xứng.
- Tọa độ đỉnh: $O(0;0)$.
- Tâm sai: $e = 1$.

Ngoài dạng chính tắc $(P): y^2 = 2px$, người ta cũng xem các dạng phương trình sau là phương trình chính tắc của parabol: $(P): y^2 = -2px$ hay $(P): x^2 = \pm 2py$.



TÌM CÁC THUỘC TÍNH PARABOL – LẬP PHƯƠNG TRÌNH PARABOL

Bài 610. Tìm tọa độ tiêu điểm, phương trình đường chuẩn và bán kính qua tiêu điểm ứng với điểm $M \in (P)$ có $x_M = 2$ của các parabol (P) sau

- | | |
|----------------------------|-----------------------------|
| 1/ $(P): y^2 = x$. | 2/ $(P): y^2 = 2x$. |
| 3/ $(P): y^2 = 4x$. | 4/ $(P): y^2 = 6x$. |
| 5/ $(P): y^2 = 8x$. | 6/ $(P): y^2 = 16x$. |
| 7/ $(P): y^2 + 6x = 0$. | 8/ $(P): 3x^2 + 12y = 0$. |
| 9/ $(P): 3y^2 + 12x = 0$. | 10/ $(P): 3x^2 - 12y = 0$. |

Bài 611. Lập phương trình chính tắc của parabol (P) biết

- 1/ (P) có tiêu điểm $F(2;0)$.
- 2/ (P) có tiêu điểm $F(3;0)$.
- 3/ (P) có tiêu điểm $F(4;0)$.
- 4/ (P) đi qua điểm $M(6;-2)$.
- 5/ (P) đi qua điểm $M(1;-4)$.
- 6/ (P) đi qua điểm $M(1;-2)$.
- 7/ (P) có đường chuẩn $x = -3$.
- 8/ (P) có đường chuẩn $x + 2 = 0$.
- 9/ (P) có đỉnh $A(1;3)$ và đường chuẩn $d: x - 2y = 0$.
- 10/ (P) có khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn bằng 2.
- 11/ (P) có khoảng cách giữa đỉnh và tiêu điểm bằng 3.
- 12/ (P) có khoảng cách từ đỉnh đến đường chuẩn bằng 2.
- 13/ (P) có tham số tiêu bằng 5.
- 14/ (P) qua điểm M với $x_M = 2$ và khoảng từ M đến tiêu điểm là $\frac{5}{2}$.
- 15/ (P) có tiêu điểm F trùng với tiêu điểm bên phải của elip $(E): 5x^2 + 9y^2 = 45$.
- 16/ (P) có tiêu điểm F trùng với tiêu điểm bên phải của hypebol $(H): 16x^2 - 9y^2 = 144$.
- 17/ (P) có tiêu điểm F trùng với tâm của đường tròn $(C): x^2 - 6x + y^2 + 5 = 0$.
- 18/ (P) cắt đường thẳng $d: x + 2y = 0$ tại hai điểm M, N và $MN = 4\sqrt{5}$.
- 19/ Độ dài dây cung vuông góc với Ox là 8 và khoảng cách từ dây cung đó đến đỉnh là 4.
- 20/ Một dây cung của (P) vuông góc với Ox có độ dài bằng 8 và khoảng cách từ đỉnh O của (P) đến dây cung này bằng 1.
- 21/ (P) cắt đường phân giác của góc phần tư thứ nhất tại hai điểm A, B và $AB = 5\sqrt{2}$.
- 22/ (P) có đỉnh $A(1;-2)$ và (P) chẵn trên đường thẳng $d: y = x + 1$ một dây cung $MN = \sqrt{34}$.

TÌM ĐIỂM THUỘC PARABOL THỎA ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC – TƯƠNG GIAO

Bài 612. Cho parabol $(P): y^2 = 4x$ và điểm $M(x_0; y_0) \in (P)$.

- 1/ Tính khoảng cách từ M đến tiêu điểm F .
- 2/ Tìm tọa độ của điểm M biết $MF = 2$.
- 3/ Đường thẳng d qua F cắt (P) tại hai điểm A và B . Chứng minh: $AB = x_A + x_B + 2$.

Bài 613. Tốt nghiệp THPT năm 2005

Trong mặt phẳng Oxy, cho parabol $(P): y^2 = 8x$.

- 1/ Tìm tọa độ tiêu điểm và viết phương trình đường chuẩn của (P) .
- 2/ Viết phương trình tiếp tuyến của (P) tại điểm M thuộc (P) có tung độ bằng 4.
- 3/ Giả sử đường thẳng d đi qua tiêu điểm của (P) và cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ tương ứng là x_1, x_2 . Chứng minh: $AB = x_1 + x_2 + 4$.

Bài 614. Cho parabol $(P): y^2 = 12x$.

- 1/ Đường thẳng d vuông góc với trục đối xứng của parabol (P) tại tiêu điểm F và cắt (P) tại hai điểm M, N . Tính độ dài đoạn MN .
- 2/ Đường thẳng d qua tiêu điểm F của (P) và cắt (P) tại hai điểm A, B . Chứng minh rằng tích số $y_A \cdot y_B$ là hằng số.

Bài 615. Cho parabol (P) và đường thẳng d vuông góc với trục đối xứng tại tiêu điểm F cắt (P) tại hai điểm M, N .

- | | |
|---------------------------------|----------------------|
| a/ Tìm tọa độ các điểm M, N . | b/ Tính MF, MN . |
| 1/ $(P): y^2 = 6x$. | 2/ $(P): y^2 = 2x$. |
| 3/ $(P): y^2 = 16x$. | 4/ $(P): y^2 = x$. |

Bài 616. Cho parabol (P) .

- a/ Tìm những điểm $M \in (P)$ cách tiêu điểm F một đoạn bằng k .
 - b/ Chọn M có tung độ dương. Tìm điểm $A \in (P)$ sao cho $\triangle AFM$ vuông tại F .
- | | |
|------------------------------|-----------------------------|
| 1/ $(P): y^2 = 8x, k = 10$. | 2/ $(P): y^2 = 2x, k = 5$. |
| 3/ $(P): y^2 = 16x, k = 4$. | 4/ $(P): y^2 = 4x, k = 9$. |

Bài 617. Cho parabol (P) và đường thẳng d có hệ số góc m quay quanh tiêu điểm F của (P) cắt (P) tại hai điểm M, N .

- | | |
|--|---------------------------------|
| a/ Chứng minh $x_M \cdot x_N$ không đổi. | b/ Tính MF, NF, MN theo m . |
| 1/ $(P): y^2 = 4x$. | 2/ $(P): y^2 = 2x$. |
| 3/ $(P): y^2 = 16x$. | 4/ $(P): y^2 = x$. |

Bài 618. Cho parabol $(P): y^2 = 4x$ và đường thẳng $d: 2x - y - 4 = 0$. Tìm các điểm $M \in d$ để từ đó

- 1/ Không kẻ được tiếp tuyến nào đến (P) .
- 2/ Kẻ được một tiếp tuyến đến (P) .

3/ Kẻ được hai tiếp tuyến đến (P) .

Bài 619. Cho parabol $(P): y^2 = x$ và đường thẳng $d: x - y - 2 = 0$.

1/ Xác định tọa độ giao điểm A, B của d và (P) .

2/ Tìm tọa độ điểm $C \in (P)$ sao cho

a/ ΔABC có diện tích bằng 6.

b/ ΔABC đều.

3/ Tìm điểm M trên cung AB của parabol (P) sao cho tổng diện tích hai phần hình phẳng giới hạn bởi (P) và hai dây cung MA, MB là nhỏ nhất.

Bài 620. Cho parabol $(P): y^2 = 4x$ và đường thẳng $d: 2x - y - 4 = 0$.

1/ Xác định tọa độ giao điểm A, B của d và (P) .

2/ Tìm điểm X trên (P) sao cho $XF = 5$.

3/ Tìm tọa độ điểm $C \in (P)$ sao cho

a/ ΔABC có diện tích bằng $3\sqrt{10}$.

b/ ΔABC đều.

c/ ΔABC vuông.

4/ Tìm điểm M trên cung AB của parabol (P) sao cho tổng diện tích hai phần hình phẳng giới hạn bởi (P) và hai dây cung MA, MB là nhỏ nhất.

5/ Tìm điểm N trên (P) có bán kính qua tiêu điểm bằng 10 và tung độ dương.

6/ Tìm điểm Q trên (P) sao cho ΔONQ vuông tại O.

TẬP HỢP ĐIỂM – QUỸ TÍCH

Bài 621. Tìm tập hợp các tâm M của đường tròn (C) di động luôn đi qua điểm F và tiếp xúc với đường thẳng Δ , với:

1/ $F(2;0)$, $\Delta: x + 2 = 0$.

2/ $F(3;0)$, $\Delta: x + 3 = 0$.

3/ $F(1;0)$, $\Delta: x + 1 = 0$.

Bài 622. Cho parabol (P) . Đường thẳng d quay quanh O cắt (P) tại điểm thứ hai là A. Tìm tập hợp của

a/ Trung điểm M của đoạn OA.

b/ Điểm N sao cho $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NO} = \vec{0}$.

1/ $(P): y^2 = 16x$.

2/ $(P): y^2 = 4x$.

3/ $(P): y^2 = 2x$.

4/ $(P): y^2 = x$.

BÀI TẬP QUA CÁC KÌ THI

Bài 623. Cao đẳng Báo Chí Marketing khối A năm 2000

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y^2 = 8x$.

1/ Xác định tọa độ tiêu điểm F và phương trình đường chuẩn parabol (P) .

2/ Cho điểm $A(0;2)$. Viết phương trình tiếp tuyến với parabol (P) , biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm A.

Bài 624. Cao đẳng Cộng Đồng Tiền Giang năm 2003

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Đề các Oxy, cho parabol $(P): y = 4x^2$. Từ điểm M bất kỳ trên đường chuẩn của Parabol vẽ hai tiếp tuyến đến (P) , gọi T_1, T_2 là các tiếp điểm. Chứng minh rằng T_1, T_2 và tiêu điểm F của (P) thẳng hàng.

Bài 625. Cao đẳng Kinh Tế Kế Hoạch Đà Nẵng năm 2004

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, hãy viết phương trình của Parabol có tiêu điểm $F(-2;2)$ và đường chuẩn $\Delta: y = 4$.

ĐS: $(P): y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 2$.

Bài 626. Cao đẳng Sư Phạm Trà Vinh khối A năm 2005

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho parabol $(P): y^2 = x$ và điểm $M(1;1)$ thuộc (P) . Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I thuộc đường thẳng $d: 2x - y = 0$ và tiếp xúc với tiếp tuyến của (P) tại M .

ĐS: $(C): \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}$.

Bài 627. Đại học Kinh Tế – Đại học Tài Chính – Đại học Sư Phạm năm 1980

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y^2 - 4y - 8x = 4$.

- 1/ Xác định tiêu điểm và vẽ parabol (P) .
- 2/ Viết phương trình đường thẳng chứa dây AB của (P) sao cho điểm $M(0;4)$ là trung điểm của đoạn AB.
- 3/ Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và dây AB.

ĐS: 1/ $(P): (y-2)^2 = 8(x+1)$ có đỉnh $S(-1;2)$ và tiêu điểm $F(1;2)$.

2/ $AB: y = 2x + 4$. 3/ $S = \int_2^8 \left\{ \frac{1}{2}(y-4) - \frac{1}{8}[(y-2)^2 - 8] \right\} .dy$.

Bài 628. Đại học Y – Nha – Dược năm 1981

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descarter vuông góc Oxy, cho parabol $(P): y^2 = 2x$. Gọi F là tiêu điểm của (P) , M là điểm có tọa độ $\left(\frac{t^2}{2}; t\right), (t \neq 0)$ và N là giao điểm của đường MF với (P) , $(N \neq M)$.

1/ Tính theo t các tọa độ trung điểm của I của đoạn MN .

2/ Tìm quỹ tích I khi t thay đổi $(t \neq 0)$.

ĐS: 1/ $I\left(\frac{t^4+1}{4t^2}; \frac{t^2-1}{2t^2}\right), (t \neq 0 \wedge t \neq \pm 1)$. 2/ Parabol $(P'): y^2 = x - \frac{1}{2}$ bỏ điểm $F\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

Bài 629. Đại học Bách Khoa – Đại học Tổng Hợp Tp. Hồ Chí Minh năm 1982

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho $A(2;0)$ và điểm M di chuyển trên đường tròn (C) tâm O bán kính bằng 2, còn điểm H là hình chiếu vuông góc của M lên trục tung.

1/ Tính tọa độ của giao điểm P của các đường thẳng OM và AH theo góc $\alpha = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.

2/ Xác định và vẽ quỹ tích của P khi M chạy trên (C). Cho biết các đặc điểm của quỹ tích này.

ĐS: 1/ $P\left(\frac{2\cos\alpha}{1+\cos\alpha}; \frac{2\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\right), \begin{cases} \forall \alpha \neq \pi + k2\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ 2/ (P): $y^2 = 4(x-1)$ trừ đỉnh S(0;1).

Bài 630. Đại học Bách Khoa – Đại học Tổng Hợp Tp. Hồ Chí Minh năm 1992

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho điểm $F(3;0)$ và đường thẳng d có phương trình: $3x - 4y + 16 = 0$.

1/ Tính khoảng cách từ F đến d. Từ đó suy ra phương trình đường tròn tâm F và tiếp xúc với d.

2/ Viết phương trình parabol (P) có tiêu điểm F và đỉnh là gốc tọa độ O. Chứng minh rằng parabol tiếp xúc với d. Tìm tọa độ tiếp điểm.

ĐS: 1/ $d(F, d) = 5, (x-3)^2 + y^2 = 25$. 2/ (P): $y^2 = 12x$, tiếp xúc tại $A\left(\frac{16}{3}; 8\right)$.

Bài 631. Đại học Y Dược Tp. Hồ Chí Minh năm 1994

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, xét hình bị chắn phía dưới bởi parabol (P): $y = x^2$, bị chắn phía trên bởi đường thẳng đi qua điểm $M(1;4)$ và có hệ số góc k. Xác định k để hình nói trên có diện tích nhỏ nhất và khi đó tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng và parabol.

ĐS: $S_{\min} = \frac{1}{6}\sqrt[3]{12} \Leftrightarrow k = 2$ khi $A(1+\sqrt{3}; 4+2\sqrt{3}), B(1-\sqrt{3}; 4-2\sqrt{3})$

Bài 632. Đại học Nông Lâm năm 1994

Cho parabol (P): $y = x^2$ và hai điểm A, B di động trên (P) sao cho $AB = 2a$ với a là số nguyên dương cho trước. Xác định vị trí của A, B để diện tích miền phẳng giới hạn bởi đường thẳng AB và (P) đạt giá trị lớn nhất.

ĐS: $A(-a; a^2), B(a; a^2), (a \in \mathbb{Z}^+)$.

Bài 633. Đại học Kinh Tế Tp. Hồ Chí Minh năm 1994 – Đại học Mở Địa Chất năm 1998

Cho M là một điểm thuộc Parabol (P): $y^2 = 64x$ và N là một điểm thuộc đường thẳng d: $4x + 3y + 46 = 0$.

1/ Xác định M, N để đoạn MN ngắn nhất.

2/ Với kết quả đã tìm được ở câu 1/, chứng tỏ rằng khi đó MN vuông góc với tiếp tuyến tại M của Parabol (P).

ĐS: 1/ $M(9; -24), N\left(\frac{37}{5}; -\frac{126}{5}\right)$. 2/ Hiển nhiên $MN \perp d$.

Bài 634. Đại học Huế năm 1995

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $d: 2mx - 2y + 1 = 0$.

1/ Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , đường thẳng d luôn đi qua tiêu điểm của (P) và cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N . Tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn MN khi m thay đổi.

2/ Tính góc tạo bởi các tiếp tuyến M, N của parabol (P) .

ĐS: 1/ Quỹ tích là parabol $(P'): y = x^2 + \frac{1}{2}$. 2/ $(T_1, T_2) = \frac{\pi}{2}$ (hai tiếp tuyến vuông góc).

Bài 635. Đại học Đà Nẵng năm 1995

Cho Parabol $(P): y^2 = 2x$.

1/ Xác định đường chuẩn, tiêu điểm của (P) và vẽ (P) .

2/ Cho đường thẳng $\Delta: x - 2y + 6 = 0$. Tính khoảng cách ngắn nhất giữa Δ và (P) .

3/ Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) , trục Ox và tiếp tuyến tại $A(2;2)$.

ĐS: 2/ $d_{\min} = \frac{4\sqrt{5}}{5} = d(A; (P))$. 2/ (tt): $y = \frac{1}{2}x + 1$, $S_{hp} = \frac{4}{3}(\text{đvdt})$.

Bài 636. Đại học Kiến Trúc Hà Nội khối A năm 1995

Hai đường cong gọi là trực giao tại A nếu chúng cắt nhau tại A và tại đó hai tiếp tuyến của hai đường cong vuông góc với nhau. Tìm mối liên hệ giữa a và b để elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ và parabol $(P): y = 2x^2$ trực giao với nhau tại giao điểm của chúng.

ĐS: $a^2 = 2b^2$.

Bài 637. Đại học Luật Tp. Hồ Chí Minh năm 1995

Cho parabol $(P): y^2 = 16x$. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol

1/ Đi qua điểm $A(1; -4)$.

2/ Vuông góc với đường thẳng $: 2x - y + 5 = 0$.

ĐS: 1/ $2x + y + 2 = 0$. 2/ $x + 2y + 16 = 0$.

Bài 638. Đại học Quốc Gia Hà Nội năm 1995

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho hai đường parabol $y = 8 - 3x - 2x^2$ và $y = 2 + 9x - 2x^2$.

1/ Hãy xác định các giá trị của a và b sao cho đường thẳng $y = ax + b$ đồng thời là tiếp tuyến của hai parabol và xác định tọa độ các tiếp điểm.

2/ Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường parabol đã cho và tiếp tuyến được xác định ở trên.

ĐS: 1/ $a = 1; b = 10$ $M_1(-1;9), M_2(2;12)$.

$$2/ S_{hp} = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (x + 10 + 2x^2 + 3x - 8) dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (x + 10 + 2x^2 - 9x - 2) dx = \frac{9}{2} (\text{đvdt}).$$

Bài 639. Đại học Tổng Hợp Tp. Hồ Chí Minh khối D năm 1996

Cho phương trình đường tròn $(C_m): x^2 + y^2 - 4mx - 2(m+1)y = 1$.

1/ Chứng minh rằng $\forall m, (C_m)$ luôn đi qua hai điểm cố định.

2/ Tìm quỹ tích tâm các đường tròn (C_m) . Chứng minh rằng quỹ tích đó tiếp xúc với parabol $(P): y^2 = 2x$.

ĐS: 1/ $M_1(-1; 2), M_2\left(\frac{1}{5}; -\frac{2}{5}\right)$. 2/ $d: x - 2y + 2 = 0$. Điểm chung duy nhất $H(2; 2)$.

Bài 640. Đại học Đại Cương Tp. Hồ Chí Minh khối A năm 1996

Cho parabol $(P): y = x^2 - 2x + 3$ và d là đường thẳng cùng phương với đường thẳng $y = 2x$ sao cho d cắt (P) tại hai điểm A và B .

1/ Viết phương trình của d khi hai tiếp tuyến với (P) tại A và B vuông góc với nhau.

2/ Viết phương trình của d khi độ dài của đoạn thẳng AB bằng 10.

ĐS: 1/ $d: 8x - 4y + 1 = 0$. 2/ $d: 2x - y + 4 = 0$.

Bài 641. Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh năm 1997

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho điểm $A(0; 2)$ và parabol $(P): y = x^2$. Xác định các điểm M trên (P) sao cho AM ngắn nhất. Chứng tỏ rằng AM vuông góc với tiếp tuyến của parabol (P) tại M .

ĐS: $M\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{3}{2}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{3}{2}\right)$. PTTT: $d: 2x_0x - y - y_0 = 0 \Rightarrow AM \perp d$ tại M .

Bài 642. Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh khối A, B năm 1997

Cho parabol $(P): y = \frac{x^2}{2}$ và điểm $A\left(\frac{15}{8}; \frac{27}{8}\right)$.

1/ Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M_1\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ và vuông góc với tiếp tuyến của (P) tại M .

2/ Tìm tất cả các điểm M ở trên (P) sao cho AM vuông góc với tiếp tuyến của (P) tại M .

ĐS: 1/ $2x - 2y + 3 = 0$. 2/ $M_1\left(-1; \frac{1}{2}\right), M_2\left(\frac{5}{2}; \frac{25}{8}\right), M_3\left(-\frac{3}{2}; \frac{9}{8}\right)$.

Bài 643. Đại học Đà Nẵng khối A năm 1997

Cho parabol $(P): y^2 = 16x$.

- 1/ Lập phương trình tiếp tuyến với (P) sao cho nó vuông góc với đường thẳng Δ có phương trình là : $3x - 2y + 6 = 0$.
 - 2/ Lập phương trình tiếp tuyến với (P) qua điểm $M(-1;0)$.
- ĐS: 1/ $(T) : 2x + 3y + 18 = 0$. 2/ $2x \pm y + 2 = 0$.

Bài 644. Đại học Đà Nẵng khối A năm 1998 – hệ chưa phân ban

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho parabol $(P) : y^2 = 2x$ và đường thẳng $d : 2x - 2my - 1 = 0$.

- 1/ Xác định tiêu điểm F và viết phương trình đường chuẩn của parabol (P) .
- 2/ Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, đường thẳng d luôn đi qua tiêu điểm F của (P) và cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N.
- 3/ Tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn MN khi m thay đổi.

ĐS: 1/ $F\left(\frac{1}{2};0\right)$, $x = -\frac{1}{2}$. 2/ $\Delta' = m^2 + 1 > 0$ $d \cap (P) = \{M;N\}$. 3/ $(P') : y^2 = x - \frac{1}{2}$.

Bài 645. Đại học Dược Hà Nội năm 1998

Lập phương trình các tiếp tuyến chung của elip $(E) : \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1$ và parabol $(P) : y^2 = 12x$.

ĐS: $d_1 : 3x + 2\sqrt{3}y + 12 = 0$, $d_2 : 3x - 2\sqrt{3}y + 12 = 0$.

Bài 646. Học Viện Ngân Hàng Tp. Hồ Chí Minh năm 1998

Cho parabol $(P) : y^2 = x$ và gọi F là tiêu điểm của (P) . Giả sử đường thẳng d đi qua F, cắt (P) tại hai điểm M_1 và M_2 .

- 1/ Tính M_1M_2 khi d song song với trục Oy.
- 2/ Giả sử d không song song với Oy. Gọi k là hệ số góc của d. Tính M_1M_2 theo k. Xác định các điểm M_1, M_2 sao cho M_1M_2 ngắn nhất.

ĐS: 1/ $M_1M_2 = 1$. 2/ $d : y = k\left(x - \frac{1}{4}\right), k \neq 0$ $M_1M_2 = \frac{1}{k^2} + 1 > 1$.

Do đó, $(M_1M_2)_{\min} = 1 \Leftrightarrow d // Oy$ và $M_1\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{2}\right), M_2\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$.

Bài 647. Đại học Ngoại Ngữ Hà Nội năm 1998

Cho parabol $(P) : y^2 = 4x$.

- 1/ Chứng minh rằng từ điểm N tùy ý thuộc đường chuẩn của parabol có thể kẻ được hai tiếp tuyến đến parabol mà hai tiếp tuyến ấy vuông góc với nhau.
- 2/ Gọi T_1 và T_2 là tiếp điểm. Chứng minh rằng đường thẳng T_1T_2 luôn đi qua một điểm cố định khi N chạy trên đường chuẩn của parabol.
- 3/ Cho M là một điểm thuộc parabol (M khác đỉnh của parabol). Tiếp tuyến tại M của parabol cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B. Tìm quỹ tích trung điểm I của AB khi M chạy trên parabol đã cho.

ĐS: 1/ Chứng minh theo hai cách. 2/ Luôn qua $F(1;0)$. 3/ $y^2 = -\frac{1}{2}x$, ($x < 0$).

Bài 648. Đại học Kinh Tế Quốc Dân năm 1999

Cho parabol $(P): y^2 = 4x$. Một đường thẳng bất kỳ đi qua tiêu điểm của parabol đã cho và cắt parabol đó tại hai điểm phân biệt A và B. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ A và B đến trục của parabol là một đại lượng không đổi

HD: Tiêu điểm $F(1;0)$. Gọi d là đường thẳng qua F. Tính tung độ y_A, y_B và $y_A \cdot y_B = 4$???

Bài 649. Đại học Anh Ninh Hà Nội khối D năm 1999 – hệ phân ban

Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai parabol: $y = x^2 + x - 2$ và $y = -x^2 + 7x - 11$.

ĐS: $d_1: y = x - 2 \vee d_2: y = 7x - 11$.

Bài 650. Đại học Nông Nghiệp khối B năm 1999 hệ chưa phân ban

Cho parabol $(P): y^2 = x$ và hai điểm $A(4; -2)$, $B(1; 1)$ thuộc parabol. Hãy tìm điểm M nằm trên cung của parabol giới hạn bởi A và B sao cho diện tích tam giác AMB lớn nhất.

ĐS: $d \equiv AB: x + y - 2 = 0$ và $S_{\Delta AMB} = \frac{1}{2} AB \cdot d(M, d)$

$$\Leftrightarrow (S_{\Delta AMB})_{\max} \text{ khi } d(M, d)_{\max} = \frac{5\sqrt{2}}{8} \Leftrightarrow M\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}\right).$$

Bài 651. Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh đợt 2 khối A, B năm 1999

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho parabol $(P): y^2 = 4x$ và hai đường thẳng: $(D): m^2x + my + 1 = 0$ và $(L): x - my + m^2 = 0$ với $m \neq 0$.

1/ Chứng minh $(D) \perp (L)$ và giao điểm M của (D) và (L) di động trên một đường thẳng cố định khi m thay đổi.

2/ Chứng minh (D) và (L) luôn tiếp xúc với (P) . Gọi A và B lần lượt là các tiếp điểm của (D) và (L) với (P) . Chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định khi m thay đổi.

ĐS: 1/ $\vec{n}_{(D)} \cdot \vec{n}_{(L)} = 0$ và quỹ tích là đường $x = -1$. 2/ AB qua điểm cố định $F(1;0)$.

Bài 652. Đại học Ngoại Thương Tp. Hồ Chí Minh năm 1999

Cho parabol $(P): y = x^2 - 2x$ và elip $(E): \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$.

1/ Chứng minh rằng parabol và elip cắt nhau tại 4 điểm phân biệt A, B, C, D.

2/ Chứng minh rằng 4 điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm và bán kính đường tròn đó.

ĐS: 1/ $9x^4 - 36x^3 + 37x^2 - 9 = 0$. Xét $f(x) = 9x^4 - 36x^3 + 37x^2 - 9$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$f(x) = 0$ có 1 nghiệm x_1 trong khoảng $(-1;0)$, $f(x) = 0$ có 1 nghiệm x_2 trong

$(0;1)$, $f(x) = 0$ có 1 nghiệm x_3 trong $(1;2)$ và $f(x) = 0$ có 1 nghiệm x_4 trong $(2;3)$.

$$2/ (C): x^2 + y^2 - \frac{16}{9}x - \frac{8}{9}y - 1 = 0 \text{ có tâm } I\left(\frac{8}{9}; \frac{4}{9}\right) \text{ và bán kính } R = \frac{\sqrt{161}}{9}.$$

Bài 653. Đại học Thăng Long khối A năm 2000

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $\Delta: y = 2(x + 2)$.

- 1/ Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho tiếp tuyến của (P) tại M song song với Δ .
- 2/ Tính khoảng cách d từ M đến Δ .
- 3/ Gọi A, B là hai giao điểm của (P) với Δ . Chứng minh rằng diện tích của miền giới hạn bởi

(P) và Δ bằng $\frac{2}{3}$ tích của d với độ dài đoạn AB .

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad d_m: y = 2x - \frac{1}{4}.$$

Bài 654. Đại học Ngoại Thương Hà Nội khối D năm 2000

Cho parabol $y^2 = 8x$ và điểm $I(2; 4)$ nằm trên parabol. Xét góc vuông thay đổi quanh điểm I và hai cạnh của góc vuông cắt parabol tại M và N (khác điểm I). Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn luôn đi qua một điểm cố định.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad \begin{cases} M\left(\frac{m^2}{8}; m\right) \\ N\left(\frac{n^2}{8}; n\right) \\ A(x_o; y_o) \in MN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{IN} = 0 \\ A \in MN \end{cases} \forall m, n \Leftrightarrow \begin{cases} mn + 4(m + n) + 80 = 0 \\ 8x_o - (m + n)y_o + mn = 0 \end{cases} \quad A(10; -4).$$

Bài 655. Đại học Hàng Hải năm 2000

Cho Parabol (P) có tiêu điểm $F(2; 0)$, đường chuẩn Oy , trục đối xứng Ox .

- 1/ Lập phương trình của parabol (P) .
- 2/ Chứng minh rằng từ điểm A bất kỳ trên trục Oy ta luôn kẻ được hai tiếp tuyến đến parabol (P) và hai tiếp tuyến này vuông góc nhau.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad 1/ (P): y^2 = 4x - 4. \quad 2/ \text{ Phương trình } d \text{ đi qua } A(0; a) \in Oy: y = kx + a, (k \neq 0).$$

$$\text{Phương trình tung độ giao điểm } y = k \cdot \frac{y^2 + 4}{4} + a \Leftrightarrow ky^2 - 4y + 4k + 4a = 0.$$

Bài 656. Đại học Đà Nẵng đợt 1 khối A năm 2000

Cho parabol (P) có tiêu điểm $F\left(2; -\frac{3}{4}\right)$ và đường chuẩn $d: y = -\frac{5}{4}$.

- 1/ Lập phương trình của parabol (P) .
- 2/ Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và trục Ox .
- 3/ Viết phương trình tiếp tuyến của parabol (P) song song với trục Ox .

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad 1/ (P): y = x^2 - 4x + 3. \quad 2/ S = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx = \frac{4}{3}. \quad 3/ (tt) // O_x : y = 1.$$

Bài 657. Học Viện Quân Y Hà Nội năm 2000

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho parabol $(P): y^2 = 64x$ và đường thẳng $\Delta: 4x - 3y + 46 = 0$. Hãy viết phương trình đường tròn có tâm nằm trên đường thẳng Δ , tiếp xúc với parabol (P) và có bán kính nhỏ nhất.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad (C): \left(x - \frac{37}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{126}{5}\right)^2 = 4.$$

Bài 658. Đại học Ngoại Thương Hà Nội khối A, D năm 2000

Cho parabol $(P): y^2 = 8x$ và điểm $I(2; 4)$ nằm trên parabol. Xét góc vuông thay đổi quay quanh điểm I và hai cạnh của góc vuông cắt parabol tại hai điểm M và N (khác với điểm I). Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn luôn đi qua một điểm cố định.

HD: Nhận xét rằng I không thể có hai đường thẳng song song với các trục tọa độ thỏa YCBT. Do đó, phương trình hai đường d_1 và d_2 qua I và vuông góc với nhau là

$$\begin{cases} d_1: y = k(x - 2) + 4 \\ d_2: y = -\frac{1}{k}(x - 2) + 4 \end{cases} \quad (k \neq 0) \quad \text{và} \quad \begin{cases} M = (P) \cap d_1 \\ N = (P) \cap d_2 \end{cases}$$

$$MN: (y + 4)k^2 + (y + x - 6)k + (y + 4) = 0 \quad \text{và} \quad MN \text{ qua điểm cố định } A(10; -4).$$

Bài 659. Đại học Ngoại Thương Tp. Hồ Chí Minh khối A năm 2000

Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $y = mx + 1$. Chứng minh rằng khi m thay đổi, đường thẳng luôn luôn cắt parabol tại hai điểm phân biệt A và B. Hãy tìm quỹ tích tâm vòng tròn ngoại tiếp ΔOAB khi m thay đổi với O là gốc tọa độ.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad \text{Tâm I nằm trên parabol } (P'): y = 2x^2 + 1.$$

Bài 660. Trung Tâm Đạo Tào Bồi Dưỡng Cán Bộ Y Tế Tp. Hồ Chí Minh 2001

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy, cho parabol $(P): y^2 = 4x$ và M là điểm thay đổi trên đường thẳng $(\Delta): x = -1$.

1/ Tìm tọa độ các tiêu điểm, đường chuẩn của (P) . Hãy vẽ (P) .

2/ Chứng minh rằng từ M luôn luôn kẻ được hai tiếp tuyến $(d_1), (d_2)$ đến (P) và hai tiếp tuyến này vuông góc nhau.

3/ Gọi M_1, M_2 lần lượt là hai tiếp điểm của hai tiếp tuyến của $(d_1), (d_2)$ ở câu 2 với (P) .

Tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn M_1M_2 .

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad 1/ F(1; 0), (\Delta): x = -1. \quad 2/ \Delta' = m^2 + 4 > 0 \quad \text{và} \quad k_{d_1} \cdot k_{d_2} = \frac{2}{y_1} \cdot \frac{2}{y_2} = \frac{4}{-4} = -1.$$

$$3/ \text{ Quỹ tích trung điểm I của đoạn } M_1M_2 \text{ là parabol } (P'): x = \frac{1}{2}y^2 + 1.$$

Bài 661. Đại học Kiến Trúc Hà Nội năm 2001

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho parabol (P) có đỉnh tại gốc tọa độ và đi qua điểm $A(2; 2\sqrt{2})$. Đường thẳng d đi qua điểm $I\left(\frac{5}{2}; 1\right)$ cắt (P) tại hai điểm M, N sao cho $MI = IN$.
 Tính độ dài đoạn MN.

ĐS: $MN = 3\sqrt{5}$.

Bài 662. Đại học Nông Nghiệp I khối B năm 2001

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho parabol với phương trình $y^2 = 8x$.

- 1/ Tìm tọa độ tiêu điểm và đường chuẩn của parabol.
- 2/ Qua tiêu điểm kẻ đường thẳng bất kì cắt parabol tại hai điểm A và B. Chứng minh rằng các tiếp tuyến với parabol tại A và B vuông góc nhau.
- 3/ Tìm quỹ tích các điểm M mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến với parabol, sao cho chúng vuông góc nhau.

ĐS: 1/ $F(2;0)$, $x = -2$. 2/ $k_1 \cdot k_2 = \frac{4}{y_1} \cdot \frac{4}{y_2} = -1$. 3/ Đường thẳng $x + 2 = 0$.

Bài 663. Dự bị 2 – Đại học khối A năm 2003

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y^2 = x$ và điểm $I(0;2)$. Tìm tọa độ hai điểm M, N thuộc (P) sao cho $\overrightarrow{IM} = 4\overrightarrow{IN}$.

ĐS: $M(4;-2)$, $N(1;1)$ hoặc $M(36;6)$, $N(9;3)$.

Bài 664. Đại học khối D năm 2008

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y^2 = 16x$ và điểm $A(1;4)$. Hai điểm phân biệt B, C (B và C khác A) di động trên (P) sao cho góc $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

ĐS: Viết phương trình đường thẳng BC BC đi qua điểm cố định $I(17;-4)$.

G – BA ĐƯỜNG CONIC



① Định nghĩa

- Đường conic là tập hợp điểm có tỉ số khoảng cách từ đó đến một điểm cố định và đến một đường thẳng cố định không đi qua điểm cố định ấy, bằng một hằng số dương e .
- Hằng số dương e chính là tâm sai của đường conic .
- + Nếu là elíp.
- + Nếu là parabol.
- + Nếu là hyperbol.

② Các dạng toán thường gặp

a/ Dạng toán 1. Chứng minh đường cong là một conic

☞ Phương pháp

- Bước 1. Biến đổi về dạng .
- Bước 2. Biện luận theo ta được dạng của đường cong.

b/ Dạng toán 2. Lập phương trình của một conic

☞ Phương pháp: Nếu biết tâm sai e , một tiêu điểm và đường chuẩn ứng với tiêu điểm đó thì ta sử dụng tính chất:

c/ Dạng toán 3. Tiếp tuyến của đường conic

- Trong mặt phẳng tọa độ cho đường conic và đường thẳng .

Điều kiện cần và đủ để d tiếp xúc với là

Phương trình của Điều kiện cần và đủ để d tiếp xúc với

Elíp

Hyperbol

Parabol

- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường conic $(\mathfrak{C})$. Phương trình tiếp tuyến với $(\mathfrak{C})$ tại điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc $(\mathfrak{C})$ tương ứng với các dạng của phương trình $(\mathfrak{C})$ như sau:

☞ Phương pháp 2. Đi tìm tiếp điểm rồi sử dụng phương pháp phân đôi tọa độ để giải.

— Bước 1. Giả sử điểm $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm. Khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng $d : f(x, x_o, y, y_o) = 0$ (1) (phân đôi tạo độ) và $M \in (S) \Leftrightarrow f(x_o; y_o) = 0$ (2).

Email: vandoan_automobile@yahoo.com.vn --- Phone: 0929.031.789 --- 0933755607

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 665. Xác định tọa độ tiêu điểm, phương trình đường chuẩn của các côníc

$$1/ \quad \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1. \quad 2/ \quad \frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{20} = 1. \quad 3/ \quad y^2 = 6x.$$

Bài 666. Viết phương trình côníc trong mỗi trường hợp sau

- 1/ Tiêu điểm $F(3;1)$, đường chuẩn $\Delta : x = 0$ và tâm sai $e = 1$.
- 2/ Tiêu điểm $F(-1;4)$, đường chuẩn $\Delta : y = 0$ và tâm sai $e = \frac{1}{2}$.
- 3/ Tiêu điểm $F(2;-5)$, đường chuẩn $\Delta : y = x$ và tâm sai $e = 2$.
- 4/ Tiêu điểm $F(-3;-2)$, đường chuẩn $\Delta : x - 2y + 1 = 0$ và tâm sai $e = \sqrt{3}$.
- 5/ Tiêu điểm $F(3;0)$, đường chuẩn $\Delta : x + 3 = 0$ và tâm sai $e = 1$.
- 6/ Tiêu điểm $F(-2;0)$, đường chuẩn $\Delta : x = -8$ và tâm sai $e = \frac{1}{2}$.
- 7/ Tiêu điểm $F(-2;0)$, đường chuẩn $\Delta : x = -\frac{8}{9}$ và tâm sai $e = \frac{3}{2}$.
- 8/ Côníc là một elíp (E) có khoảng cách giữa hai đường chuẩn là 5 và khoảng cách giữa hai tiêu điểm là 4.
- 9/ Côníc là một elíp (E) có tâm sai $e = \frac{3}{4}$ và khoảng cách từ tâm đối xứng đến đường chuẩn là $\frac{16}{3}$.
- 10/ Côníc là một hyperbol (H) có hai đường tiệm cận là $4x \pm 3y = 0$ và khoảng cách giữa hai đường chuẩn là $\frac{18}{5}$.
- 11/ Côníc là một hyperbol (H) có một đường chuẩn $x = \frac{16}{5}$ và tâm sai $e = \frac{5}{4}$.
- 12/ Côníc có tâm sai $e = \frac{1}{2}$, một tiêu điểm là $F(-3;1)$ và phương trình đường chuẩn ứng với tiêu điểm đó là $\Delta : y + 2 = 0$.
- 13/ Côníc là một parabol với tiêu điểm $F(0;2)$ và đường chuẩn ứng với tiêu điểm đó là $3x - 4y - 12 = 0$.
- 14/ Côníc là một elíp (E) có tâm là O, tiêu điểm ở trên Ox, đi qua điểm $M(-\sqrt{3};1)$ và khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng 6.
- 15/ Côníc là một elíp (E) có tâm sai $e = \frac{2}{3}$, một tiêu điểm $F(2;1)$ và phương trình đường chuẩn ứng với tiêu điểm đó là $\Delta : 3x - 4y - 12 = 0$.
- 16/ Côníc là một hyperbol (H) với tiêu điểm $F(2;-3)$ đường chuẩn ứng với tiêu điểm đó là $3x - y + 3 = 0$ và tâm sai $e = \sqrt{5}$.
- 17/ Côníc là một hyperbol (H) có tâm sai $e = 2$, một tiêu điểm $F(1;1)$ và phương trình đường chuẩn ứng với tiêu điểm đó là $\Delta : x - y - 2 = 0$.

18/ Côníc là một parabol (P) có tiêu điểm là O và đường chuẩn $x - y - 2 = 0$.

Bài 667. Biện luận theo m hình dạng của côníc có phương trình

1/ $(\mathfrak{S}) : (m-1)x^2 + my^2 = m^2 - m$.

2/ $(\mathfrak{S}) : m^2x^2 + (m^2 - 9)y^2 + 18my - 9m^2 = 0$ với $m > 0$.

Bài 668. Chứng tỏ rằng phương trình $Ax^2 + By^2 + F = 0$ với $AF < 0$

1/ Là phương trình của một đường tròn có tâm $O(0;0)$ nếu $A = B$.

2/ Là phương trình của một elíp có đỉnh $O(0;0)$ nếu $\begin{cases} A \neq B \\ A.B > 0 \end{cases}$. Tìm tọa độ các tiêu điểm, phương trình đường chuẩn của elíp đó.

3/ Là phương trình của một hyperbol có đỉnh $O(0;0)$ nếu $\begin{cases} A \neq B \\ A.B < 0 \end{cases}$. Tìm tọa độ các tiêu điểm, phương trình đường chuẩn của hyperbol đó.

Bài 669. Chứng tỏ rằng phương trình $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ với $A.B > 0$

1/ Là một phương trình của một elíp nếu $A \cdot \left(\frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4C} - E \right) > 0$. Tìm tọa độ các tiêu điểm, phương trình đường chuẩn của elíp đó.

2/ Là một phương trình của một hyperbol nếu $A \cdot \left(\frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4C} - E \right) < 0$. Tìm tọa độ các tiêu điểm, phương trình đường chuẩn của hyperbol đó.

3/ Là một điểm nếu $\frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4C} - E = 0$.

Bài 670. Chứng tỏ rằng phương trình $Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$ với $A \neq 0$

1/ Là một phương trình của một parabol nếu $C \neq 0$.

2/ Là một phương trình của đường thẳng nếu $C = 0$ và $B^2 - 4AD = 0$.

3/ Là phương trình của hai đường thẳng nếu $C = 0$ và $B^2 - 4AD > 0$.

4/ Là tập rỗng nếu $C = 0$ và $B^2 - 4AD < 0$.

Bài 671. Chứng tỏ rằng phương trình $Ay^2 + By + Cx + D = 0$ với $A \neq 0$

1/ Là một phương trình của một parabol nếu $C \neq 0$.

2/ Là một phương trình của đường thẳng nếu $C = 0$ và $B^2 - 4AD = 0$.

3/ Là phương trình của hai đường thẳng nếu $C = 0$ và $B^2 - 4AD > 0$.

4/ Là tập rỗng nếu $C = 0$ và $B^2 - 4AD < 0$.

Bài 672. Chứng tỏ rằng phương trình $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (*)

1/ Là phương trình của một elíp nếu $B^2 - AC < 0$.

2/ Là phương trình của một hyperbol nếu $B^2 - AC > 0$.

3/ Là phương trình của một parabol nếu $B^2 - AC = 0$.

4/ Là phương trình của một đường tròn nếu $B = 0$ và $A = C \neq 0$.

5/ Là phương trình của một elíp hoặc hyperbol có trục cùng phương với trục tọa độ nếu $B = 0$ và $A.C \neq 0$ và $A \neq C$.

6/ Là phương trình của 2 đường thẳng nếu (*) có nghiệm y là phương trình bậc nhất theo x.

Bài 673. Cho elíp (E): $4x^2 + 16y^2 = 64$.

- 1/ Xác định các tiêu điểm F_1, F_2 , tâm sai và vẽ elíp.
- 2/ M là một điểm bất kỳ trên elíp. Chứng tỏ rằng tỉ số khoảng cách từ M đến tiêu điểm phải F_2 và tới đường thẳng $x = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ có giá trị không đổi.
- 3/ Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x\sqrt{3} - 4 = 0$. Xét đường tròn (C_1) đi động nhưng luôn đi qua tiêu điểm phải F_2 và tiếp xúc ngoài với đường tròn (C) . Chứng tỏ rằng các tâm N của đường tròn (C_1) nằm trên một hyperbol cố định. Viết phương trình hyperbol.

Bài 674. Cho hyperbol (H) có phương trình $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

- 1/ Tính độ dài phần đường tiệm cận chắn bởi hai đường chuẩn.
- 2/ Tính khoảng cách từ tiêu điểm đến các tiệm cận.
- 3/ Chứng minh rằng chân đường vuông góc hạ từ một tiêu điểm đến các đường tiệm cận nằm trên đường chuẩn.

Bài 675. Tính góc α , $(0 < \alpha \leq 90^\circ)$ giữa các đường tiệm cận của hyperbol. Biết khoảng cách giữa các tiêu điểm gấp 2 lần khoảng cách giữa các đường chuẩn.

Bài 676. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$ tiếp xúc với elíp $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ là $a^2A^2 + b^2B^2 = C^2$.

Bài 677. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$ tiếp xúc với hyperbol $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ là $a^2A^2 - b^2B^2 = C^2$.

Bài 678. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$ tiếp xúc với parabol $(P): y^2 = 2px$ là $B^2p = 2AC$.

Bài 679. Chứng minh rằng phương trình tiếp tuyến với elíp $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tại điểm

$$M(x_o; y_o) \in (E) \text{ có dạng: } \frac{x_o x}{a^2} + \frac{y_o y}{b^2} = 1.$$

Bài 680. Chứng minh rằng phương trình tiếp tuyến với hyperbol $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tại điểm

$$M(x_o; y_o) \in (H) \text{ có dạng: } \frac{x_o x}{a^2} - \frac{y_o y}{b^2} = 1.$$

Bài 681. Chứng minh rằng phương trình tiếp tuyến với parabol $(P): y^2 = 2px$ tại điểm

$$M(x_o; y_o) \in (P) \text{ có dạng: } y_o y = p(x + x_o).$$

Bài 682. Cho điểm $M(1; 2)$. Lập phương trình tiếp tuyến của côníc $(\mathfrak{S})$ đi qua M , biết

$$1/ (\mathfrak{S}): \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1. \quad 2/ (\mathfrak{S}): x^2 - \frac{y^2}{2} = 1.$$

Bài 683. Cho điểm $M(3; -4)$ và elíp (E) có phương trình $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

- 1/ Chứng minh rằng qua M kẻ được hai tiếp tuyến đến (E) .

- 2/ Xác định phương trình hai tiếp tuyến và lập phương trình đường thẳng đi qua hai tiếp điểm của (E) với hai tiếp tuyến trên.
- 3/ Viết phương trình tiếp tuyến của (E) đi qua điểm A(3;0).
- 4/ Viết phương trình tiếp tuyến của (E) đi qua điểm B(2;3).
- 5/ Viết phương trình tiếp tuyến của (E), biết tiếp tuyến song song với $d_1 : x - 2y + 6 = 0$.
- 6/ Viết phương trình tiếp tuyến của (E), biết tiếp tuyến vuông góc với $d_2 : y = x$.
- 7/ Viết phương trình tiếp tuyến của (E), biết tiếp tuyến tạo với $d_3 : 2x - y = 0$ một góc bằng 60° .

Bài 684. Cho hyperbol (H) : $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Viết phương trình tiếp tuyến của (H). Biết tiếp tuyến

- 1/ Đi qua điểm A(3;0).
- 2/ Đi qua điểm B(3;2).
- 3/ Song song với đường thẳng $d_1 : x - y + 1 = 0$.
- 4/ Vuông góc với đường thẳng $d_2 : x - 2y + 3 = 0$.
- 5/ Tạo với đường thẳng $d_3 : x - 2y - 4 = 0$ một góc bằng 45° .

Bài 685. Cho parabol (P) : $y^2 = 2x$. Lập phương trình tiếp tuyến của (E), biết tiếp tuyến

- 6/ Đi qua điểm A(2;2).
- 7/ Đi qua điểm B(2;3).
- 8/ Song song với đường thẳng $d_1 : 3x - 4y + 1 = 0$.
- 9/ Vuông góc với đường thẳng $d_2 : 4x - 3y + 7 = 0$.
- 10/ Tạo với đường thẳng $d_3 : 2x - y = 0$ một góc bằng 60° .

Bài 686. Cho đường thẳng $\Delta : 2x - y - 1 = 0$ và parabol (P) : $y^2 = 2x$.

- 1/ Lập phương trình tiếp tuyến của parabol (P) vuông góc với đường thẳng Δ .
- 2/ Gọi M là tiếp điểm của (P) với tiếp tuyến d. Hãy lập phương trình đường tròn tâm M và tiếp xúc với đường thẳng Δ .

Bài 687. Cho parabol (P) : $y = x^2 - 2x + 3$ và $d_1 : y = 2x$. Đường thẳng d là đường thẳng cùng phương với đường thẳng d_1 sao cho d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B.

- 1/ Lập phương trình của d khi hai tiếp tuyến của (P) tại A và B vuông góc với nhau.
- 2/ Lập phương trình của d khi độ dài $AB = 40$.

Bài 688. Cho điểm M(-2;9) và hyperbol (H) : $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$. Lập phương trình tiếp tuyến của hyperbol (H) đi qua điểm M.

Bài 689. Lập phương trình tiếp tuyến chung của

- 1/ (E) : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ & (C) : $x^2 + y^2 = 5$.
- 2/ (E) : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ & (H) : $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{27} = 1$.

- 3/ $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$ & $(C): x^2 + y^2 = 9.$
- 4/ $(E_1): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$ & $(E_2): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$
- 5/ $(H): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ & $(C): x^2 + y^2 = 4.$
- 6/ $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ & $(C): (x+2)^2 + y^2 = 4.$
- 7/ $(C): (x+2)^2 + y^2 = 4$ & $(P): y^2 = 12x.$
- 8/ $(H_1): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ & $(H_2): \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$
- 9/ $(H): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ & $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$
- 10/ $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ & $(P): y^2 = 12x.$
- 11/ $(H): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ & $(P): y^2 = 2x.$
- 12/ $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ & $(P): y^2 = 2x.$
- 13/ $(P_1): y = x^2 + 2x + 2$ & $(P_2): y = x^2.$

Bài 690. Cho elíp $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b)$. Chứng minh rằng tích khoảng cách từ các tiêu điểm đến một tiếp tuyến bất kỳ của elíp (E) bằng bình phương độ dài trục nhỏ của elíp.

Bài 691. Cho hyperbol $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Một tiếp tuyến bất kỳ của (H) là d tiếp xúc với (H) tại điểm T. Gọi M, N là các giao điểm của tiếp tuyến d với các đường tiệm cận của (H) .

- 1/ Chứng minh rằng T là trung điểm của MN.
- 2/ Chứng minh rằng diện tích $\triangle OMN$ không phụ thuộc vào tiếp tuyến d.

Bài 692. Cho parabol (P) . Chứng minh rằng tiếp tuyến tại hai đầu mút của dây cung qua tiêu vuông góc với nhau tại một điểm trên đường chuẩn.

Bài 693. Cho elíp $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ và hai điểm M, N trên elíp (E) , sao cho mỗi tiêu điểm F_1, F_2 của (E) nhìn đoạn MN dưới một góc vuông. Hãy xác định vị trí M, N trên tiếp tuyến ấy.

Bài 694. Cho elíp $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $0 < b < a$ có hai tiêu điểm F_1, F_2 . Đường thẳng di động d luôn đi qua F_2 cắt (E) tại P, Q.

- 1/ Đặt $(Ox, F_2P) = \alpha, (0 \leq \alpha \leq 2\pi)$. Tính độ dài F_2P, F_2Q theo a, b, α .
- 2/ Chứng minh: $\frac{1}{F_2P} + \frac{1}{F_2Q}$ không đổi.
- 3/ Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của đoạn PQ.

4/ Đường thẳng F_1P cắt elíp (E) tại $S \neq P$. Chứng minh $\frac{F_2P}{F_2Q} + \frac{F_1P}{F_1S}$ không đổi.

Bài 695. Cho điểm $F(-1;0)$ và đường thẳng $\Delta: x + 4 = 0$.

- 1/ Chứng minh rằng quỹ tích các điểm M sao cho $\frac{MF}{d(M, \Delta)} = \frac{1}{2}$ là một elíp (E) .
- 2/ Từ điểm N tùy ý trên đường thẳng Δ kẻ được hai tiếp tuyến đến (E) và tiếp xúc với (E) tại P và Q . Chứng minh rằng đường thẳng PQ đi qua F và xác định vị trí của N để độ dài đoạn PQ là nhỏ nhất.

Bài 696. Cho hai điểm $M(-2;m)$, $N(2;n)$ và elíp $(E): x^2 + 4y^2 = 4$.

- 1/ Gọi A_1, A_2 là các đỉnh trên trục lớn của elíp. Hãy viết phương trình các đường thẳng A_1N và A_2M và xác định tọa độ giao điểm I của chúng.
- 2/ Cho MN thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với elíp (E) . Tìm quỹ tích của điểm I .

Bài 697. Cho elíp $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và $A(-3;0)$, $M(-3;0)$, $N(3;0)$, $N(3;n)$.

- 1/ Xác định tọa độ giao điểm I của AN và BM .
- 2/ Chứng tỏ rằng để MN tiếp xúc với elíp (E) thì điều kiện cần và đủ là m, n thỏa mãn biểu thức $m.n = 4$.
- 3/ Với m, n thay đổi nhưng MN luôn tiếp xúc với elíp (E) . Tìm quỹ tích của điểm I .

Bài 698. Cho elíp $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với F_1, F_2 là các tiêu điểm và A_1, A_2 là các đỉnh thuộc trục lớn của nó. Lấy $M \in (E)$ và H_1, H_2 lần lượt theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của F_1, F_2 lên tiếp tuyến với (E) tại M . Gọi (C) là đường tròn đường kính A_1A_2 .

- 1/ Chứng minh $H_1, H_2 \in (C)$.
- 2/ Các đường thẳng H_1F_2, H_2F_1 cắt đường tròn (C) theo thứ tự tại các điểm K_1, K_2 . Chứng minh rằng $H_1H_2K_2K_1$ là hình chữ nhật.

Bài 699. Cho elíp $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b$. Tiếp tuyến tại M của elíp (E) cắt đường chuẩn Δ_2 tại N . Chứng minh rằng tiêu điểm F_2 nhìn MN dưới một góc vuông.

Bài 700. Cho elíp $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b$. Tiếp tuyến tại M của elíp (E) cắt hai trục tọa độ tại S_1 và S_2 . Xác định tọa độ của M để ΔOS_1S_2 có diện tích là nhỏ nhất.

Bài 701. Cho elíp $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b$. Từ điểm K tùy ý trên đường chuẩn Δ kẻ được hai tiếp tuyến đến (E) và tiếp xúc với (E) tại hai điểm H_1, H_2 .

- 1/ Chứng minh rằng đường thẳng H_1H_2 đi qua tiêu điểm F của elíp (E) .
- 2/ Xác định vị trí của điểm K để độ dài H_1H_2 nhỏ nhất.

Bài 702. Cho elíp $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b$. Gọi $A_2(a, 0)$ là đỉnh trên trục lớn của elíp (E) . Góc vuông t_{A_2} quay quanh A_2 cắt (E) tại P, Q không trùng với tâm của elíp.

- 1/ Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định.
- 2/ Tiếp tuyến của (E) tại P, Q cắt nhau tại M . Chứng minh rằng M chạy trên một đường thẳng cố định mà ta cần phải tìm.

Bài 703. Cho elíp $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b$. Hình chữ nhật Q được gọi là hình chữ nhật ngoại tiếp elíp (E) nếu mỗi cạnh của Q đều tiếp xúc với (E) . Trong tất cả hình chữ nhật ngoại tiếp (E) .

Hãy xác định:

- 1/ Hình chữ nhật có diện tích nhỏ nhất.
- 2/ Hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

Bài 704. Cho elíp (E) có phương trình $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Viết phương trình các cạnh của hình chữ nhật ngoại tiếp (E) có diện tích bằng 15.

Bài 705. Cho $(E_1): \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ và $(E_2): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.

- 1/ Một tiếp tuyến bất kỳ của (E_2) cắt (E_1) tại hai điểm P, Q . Chứng minh rằng các tiếp tuyến của (E_1) tại P, Q vuông góc với nhau.
- 2/ Từ điểm $M \in (E_1)$ kẻ hai tiếp tuyến Mt_1, Mt_2 đến (E_2) . Chứng minh rằng hai góc $\widehat{t_1Mt_2}, \widehat{F_1MF_2}$ với F_1, F_2 là hai tiêu điểm của $(E_1), (E_2)$ có chung đường phân giác.
- 3/ Phát biểu và chứng minh bài toán tổng quát.

H – ỨNG DỤNG TỌA ĐỘ GIẢI TOÁN ĐẠI SỐ & GIẢI TÍCH



① Bất đẳng thức tam giác

Cho ΔABC có các cạnh . Ta luôn có:

- hay .
- .

Như vậy, ta chọn có tọa độ thích hợp, dĩ nhiên liên quan đến bất đẳng thức, chứng minh rồi sử dụng một trong hai bất đẳng thức ở trên suy ra kết quả.

② Bất đẳng thức véctor

Cho .

- Dấu xảy ra cùng phương .
- . Dấu xảy ra cùng phương .
- . Dấu xảy ra cùng phương.
- . Do nên .

Bất đẳng thức được gọi là bất đẳng thức Bunhiacôpxki.

③ Các ứng dụng

- 1/ Chứng minh bất đẳng thức.
- 2/ Giải phương trình.
- 3/ Giải bất phương trình.
- 4/ Tìm giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất.

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Bài 706. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh: $\sqrt{(a+c)^2 + b^2} + \sqrt{(a-c)^2 + b^2} \geq 2\sqrt{a^2 + b^2}$.

HD: Đặt $\vec{u} = (a+c; b)$, $\vec{v} = (a-c; b)$.

Bài 707. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh: $\sqrt{a^2 + 4b^2 + 6a + 9} + \sqrt{a^2 + 4b^2 - 2a - 12b + 10} \geq 5$.

HD: Đặt $\vec{u} = (a+3; 2b)$; $\vec{v} = (1-a; 3-2b)$.

Bài 708. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh: $\sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{a^2 + ac + c^2} \geq \sqrt{b^2 + bc + c^2}$.

HD: Đặt $\vec{u} = \left(a + \frac{b}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$, $\vec{v} = \left(-\left(a + \frac{c}{2}\right); \frac{\sqrt{3}}{2}c\right)$.

Bài 709. Chứng minh với mọi số thực a ta luôn có: $\sqrt{a^2 + a + 1} + \sqrt{a^2 - a + 1} \geq 2$.

HD: Đặt $\vec{u} = \left(a + \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\vec{v} = \left(\frac{1}{2} - a; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Bài 710. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh:

$$\sqrt{4\cos^2 a \cos^2 b + \sin^2(a-b)} + \sqrt{4\sin^2 a \sin^2 b + \sin^2(a-b)} \geq 2.$$

HD: Đặt $\vec{u} = (2\cos a \cos b; \sin(a-b))$, $\vec{v} = (2\sin a \sin b; \sin(a-b))$.

Bài 711. Đại học An Ninh Nhân Nhân phân hiệu Tp. Hồ Chí Minh năm 1998

Chứng minh rằng: $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{1-x} \leq \sqrt{2} + \sqrt[4]{8}$, $\forall x \in [0; 1]$. Dấu "=" xảy ra khi nào?

HD: Đặt $\vec{a} = (1; 1)$, $\vec{b} = (\sqrt{x}; \sqrt{1-x})$, $\vec{c} = (\sqrt[4]{x}; \sqrt[4]{1-x})$.

Bài 712. Bộ đề tuyển sinh Đại học – Cao đẳng

Chứng minh: $\left| \frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} \right| \leq \frac{1}{2}$ với mọi a, b .

HD: Đặt $\vec{u} = \left(\frac{2a}{1+a^2}; \frac{1-a^2}{1+a^2}\right)$, $\vec{v} = \left(\frac{1-b^2}{1+b^2}; \frac{2b}{1+b^2}\right)$.

Bài 713. Cho ba số dương: a, b, c trong đó $a > c$, $b > c$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi nào?}$$

HD: Đặt $\vec{u} = (\sqrt{c}; \sqrt{b-c})$, $\vec{v} = (\sqrt{a-c}; \sqrt{c})$.

Bài 714. Cho $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$1/ \quad (ad + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2).$$

$$2/ \quad \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+b)^2 + (c+d)^2}.$$

HD: Đặt $\vec{x} = (a, c)$; $\vec{y} = (b, d)$.

Bài 715. Đại học khối A năm 2003

Cho ba số dương x, y, z thỏa điều kiện: $x + y + z \leq 1$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}$.

HD: Đặt $\vec{a} = \left(x, \frac{1}{x}\right)$; $\vec{b} = \left(y, \frac{1}{y}\right)$; $\vec{c} = \left(z, \frac{1}{z}\right)$.

Bài 716. Dự bị Cao đẳng Giao Thông Vận Tải II năm 2003

Cho ba số x, y, z bất kì. Chứng minh: $\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \geq \sqrt{y^2 + yz + z^2}$.

HD: Đặt $A\left(x + \frac{y}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}z\right)$, $B\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z\right)$, $C\left(\frac{y}{2} - \frac{z}{2}; 0\right)$.

Bài 717. Cho a, b, c, d là các số thực bất kì.

Chứng minh: $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$.

HD: Đặt $M(a; b), N(c; d), O(0; 0)$.

Bài 718. Chứng minh: $\sqrt{a^2 - a + 1} + \sqrt{a^2 - a\sqrt{3} + 1} \geq \sqrt{2}$ với mọi a .

HD: Đặt $A\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $C(a; 0)$.

Bài 719. Cho $a - 2b + 2 = 0$.

Chứng minh: $\sqrt{a^2 + b^2 - 6a - 10b + 34} + \sqrt{a^2 + b^2 - 10a - 14b + 74} \geq 6$.

HD: Xét $d: x - 2y + 2 = 0$ và $A(3; 5), B(5; 7), C(a; b) \in d$.

Bài 720. Cho x, y, z là các số thực đôi một khác nhau.

Chứng minh: $\frac{|x - y|}{\sqrt{1 + x^2} \cdot \sqrt{1 + y^2}} + \frac{|y - z|}{\sqrt{1 + y^2} \cdot \sqrt{1 + z^2}} > \frac{|x - z|}{\sqrt{1 + x^2} \cdot \sqrt{1 + z^2}}$.

HD: Đặt $A(x; yz), B(y; zx), C(z; xy)$.

Bài 721. Cho x, y, z là ba số thực bất kì thỏa $x + 2y + 3z = 6$.

Chứng minh: $\sqrt{1 + x^2} + 2\sqrt{1 + y^2} + 3\sqrt{1 + z^2} \geq 2\sqrt{10}$.

HD: Đặt $A(1; x), B(3; x + 2y), C\left(6; \frac{x + 2y + 3z}{2}\right), O(0; 0)$ và $OA + AB + BC \geq OC$.

Bài 722. Cho $a, b \in \mathbb{R}$. Chứng minh: $\sqrt{a^2 + 4} + \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 1} + \sqrt{b^2 - 6b + 10} \geq 5$.

HD: Đặt $A(0; -1), B(3; 3), C(a; 1), D(b; 2)$ và $AC + CD + BD \geq AB$.

Bài 723. Cho $x, y \in \mathbb{R}$. Chứng minh: $\sqrt{\cos^4 x + \cos^4 y} + \sin^2 x + \sin^2 y \geq \sqrt{2}$.

HD: Đặt $\vec{a} = (\cos^2 x; \cos^2 y), \vec{b} = (\sin^2 x; 0), \vec{c} = (0; \sin^2 y)$.

Bài 724. Cho $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh: $\left| \sqrt{\cos^4 x + 1} - \sqrt{\sin^4 x + 1} \right| \leq |\cos 2x|$.

HD: Đặt $\vec{a} = (\cos^2 x; 1), \vec{b} = (\sin^2 x; 1)$.

Bài 725. Cho ba số thực a, b, c thỏa $a + b + c = 1$.

Chứng minh: $\sqrt{a^2 + (b - c)^2} + \sqrt{b^2 + (c - a)^2} + \sqrt{c^2 + (a - b)^2} \geq 1$.

HD: Đặt $\vec{u} = (-a; b - c), \vec{v} = (-b; c - a), \vec{w} = (-c; a - b)$.

Bài 726. Cho $a, b, c > 0$ và $ab + bc + ca = abc$.

Chứng minh: $\frac{\sqrt{b^2 + 2a^2}}{ab} + \frac{\sqrt{c^2 + 2b^2}}{bc} + \frac{\sqrt{a^2 + 2c^2}}{ca} \geq \sqrt{3}$.

HD: Đặt $\vec{u} = \left(\frac{1}{a}; \frac{\sqrt{2}}{b}\right), \vec{v} = \left(\frac{1}{b}; \frac{\sqrt{2}}{c}\right), \vec{w} = \left(\frac{1}{c}; \frac{\sqrt{2}}{a}\right)$.

Bài 727. Cho $a + b + c = 2$ và $ax + by + cz = 6$.

Chứng minh: $\sqrt{16a^2 + a^2x^2} + \sqrt{16b^2 + b^2y^2} + \sqrt{16c^2 + c^2z^2} \geq 10$.

HD: Đặt $\vec{u} = (4a; ax), \vec{v} = (4b; by), \vec{w} = (4c; cz)$.

GIAI PHƯƠNG TRÌNH

Bài 728. Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 + 2x + 10} = \sqrt{29}$.

HD: Đặt $\vec{u} = (x - 1; 2), \vec{v} = (-1 - x; 3)$ và nghiệm $x = \frac{1}{5}$.

Bài 729. Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1} = 2$.

HD: Đặt $\vec{u} = \left(x - \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \vec{v} = \left(-x - \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và nghiệm $x = 0$.

Bài 730. Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 5} = \sqrt{9x^2 - 12x + 13}$.

HD: $\vec{u} = (2x - 1; 1), \vec{v} = (x - 1; 2)$ và nghiệm $x = \frac{1}{3}$.

Bài 731. Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 4y^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 + 4y^2 - 2x - 12y + 10} = 5$.

HD: Đặt $\vec{u} = (x + 3; 2y), \vec{v} = (1 - x; 3 - 2y)$ và nghiệm $x = 1, y = \frac{3}{2}$.

Bài 732. Giải phương trình: $\left| \sqrt{x^2 - 4x + 5} - \sqrt{x^2 - 10x + 50} \right| = 5$.

HD: Đặt $A(2; 1), B(5; 5), C(x; 0)$ và nghiệm $x = \frac{5}{4}$.

GIAI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Bài 733. Giải bất phương trình: $\sqrt{2(x - 3)^2 + 2x - 2} \leq \sqrt{x - 1} + x - 3$.

HD: Đặt $\vec{u} = (x - 3; \sqrt{x - 1}), \vec{v} = (1; 1)$ và nghiệm $x = 5$.

Bài 734. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \leq 1$.

HD: Đặt $\vec{u} = \left(x + \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \vec{v} = \left(x - \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và nghiệm $x \in \mathbb{R}$.

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

Bài 735. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \sqrt{x^2 - 8x + 32} + \sqrt{x^2 - 6x + 18}$.

HD: Đặt $A(x-4; -4), B(x-3; 3), O(0; 0)$ và $\min y = 5\sqrt{2}$ khi $x = \frac{24}{7}$.

Bài 736. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \sqrt{x^2 - 2px + 2p^2} + \sqrt{x^2 - 2qx + 2q^2}$ với $p, q \neq 0$.

HD: Đặt $\vec{u} = (x-p; p), \vec{v} = (q-x; q)$ và $\min y = \sqrt{2(q^2 + p^2)}$ khi $x = \frac{2pq}{p+q}$.

Bài 737. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{2x^2 - 2x + 1} + \sqrt{2x^2 + (\sqrt{3} + 1)x + 1} + \sqrt{2x^2 - (\sqrt{3} - 1)x + 1}.$$

HD: Đặt $A(1; 1), B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right), C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right), M(x; x)$ và $P_{\min} = 3$ khi $x = 0$.

Bài 738. Gọi $(x; y)$ là nghiệm của phương trình: $2x + 3y = 1$. Tìm cặp nghiệm $(x; y)$ sao cho biểu thức $P = 3x^2 + 2y^2$ nhỏ nhất.

HD: Đặt $\vec{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right), \vec{v} = (\sqrt{3}x; \sqrt{2}y)$ và $P_{\min} = \frac{6}{35}$ khi $(x; y) = \left(\frac{4}{35}; \frac{9}{35}\right)$.

Bài 739. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \sqrt{\cos^2 x - 2\cos x + 2} + \sqrt{\cos^2 x + 6\cos x + 13}$.

HD: Đặt $\vec{u} = (1 - \cos x; 1), \vec{v} = (\cos x + 3; 2)$ và $\min y = 5$.

Bài 740. Cho $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}$.

HD: Đặt $\vec{u} = (x; y), \vec{v} = (\sqrt{1+y}; \sqrt{1+x})$ và $P_{\max} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ khi $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 741. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \sqrt{a + \cos x} + \sqrt{a + \sin x}$ với $x \in \mathbb{R}, a \geq 1$.

HD: $\begin{cases} \vec{u} = (1; 1) \\ \vec{v} = (\sqrt{a + \cos x}; \sqrt{a + \sin x}) \end{cases}$ và $P_{\max} = \sqrt{2(2a + \sqrt{2})}$ khi $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.