

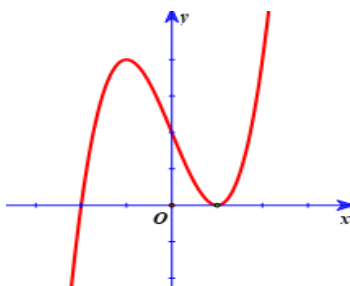
MỤC LỤC

PHẦN A. CÂU HỎI.....	1
Dạng 1. Đọc đồ thị hàm số.....	1
Dạng 2. Đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối.....	9
Dạng 3. Bài toán tương giao.....	11
Dạng 3.1 Bài toán tương giao đồ thị thông qua đồ thị, bảng biến thiên.....	11
Dạng 3.2 Bài toán tương giao đồ thị thông qua hàm số cho trước.....	14
Dạng 3.3 Bài toán tìm m để phương trình $f(x) = f(m)$ thỏa mãn điều kiện cho trước khi biết đồ thị, BBT của $f(x)$	15
Dạng 3.4 Bài toán tìm m để phương trình $ f(x) = f(m)$ thỏa mãn điều kiện cho trước khi biết đồ thị, BBT $f(x)$	17
Dạng 3.5 Bài toán tương giao đường thẳng với đồ thị hàm số bậc 3.....	18
Dạng 3.6 Bài toán tương giao của đường thẳng với đồ thị hàm số nhất biến.....	19
Dạng 3.7 Bài toán tương giao của đường thẳng với hàm số khác (chứa tham số).....	21
Dạng 3.8 Định m để hàm số $f(u)$ thỏa mãn điều kiện cho trước khi biết $f(x)$	22
Dạng 3.9 Một số bài toán tương giao liên quan đến đồ thị $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$ $f(u)$ khác.....	28
Dạng 4. Bài toán tiếp tuyến.....	31
PHẦN B. LỜI GIẢI THAM KHẢO.....	34
Dạng 1. Đọc đồ thị hàm số.....	34
Dạng 2. Đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối.....	38
Dạng 3. Bài toán tương giao.....	38
Dạng 3.1 Bài toán tương giao đồ thị thông qua đồ thị, bảng biến thiên.....	38
Dạng 3.2 Bài toán tương giao đồ thị thông qua hàm số cho trước.....	42
Dạng 3.3 Bài toán tìm m để phương trình $f(x) = f(m)$ thỏa mãn điều kiện cho trước khi biết đồ thị, BBT của $f(x)$	44
Dạng 3.4 Bài toán tìm m để phương trình $ f(x) = f(m)$ thỏa mãn điều kiện cho trước khi biết đồ thị, BBT $f(x)$	45
Dạng 3.5 Bài toán tương giao đường thẳng với đồ thị hàm số bậc 3.....	46
Dạng 3.6 Bài toán tương giao của đường thẳng với đồ thị hàm số nhất biến.....	50
Dạng 3.7 Bài toán tương giao của đường thẳng với hàm số khác (chứa tham số).....	56
Dạng 3.8 Định m để hàm số $f(u)$ thỏa mãn điều kiện cho trước khi biết $f(x)$	64
Dạng 3.9 Một số bài toán tương giao liên quan đến đồ thị $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$ $f(u)$ khác.....	70
Dạng 4. Bài toán tiếp tuyến.....	75

PHẦN A. CÂU HỎI

Dạng 1. Đọc đồ thị hàm số

Câu 1. (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2017) Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



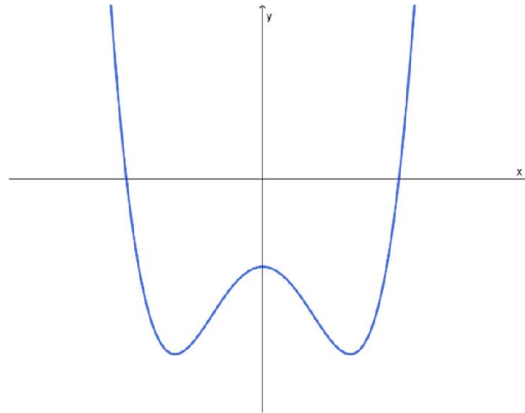
A. $y = -x^3 + 3x + 2$

B. $y = x^4 - x^2 + 1$

C. $y = x^4 + x^2 + 1$

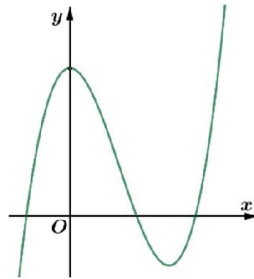
D. $y = x^3 - 3x + 2$

Câu 2. (Mã đề 102 BGD&ĐT NĂM 2018) Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



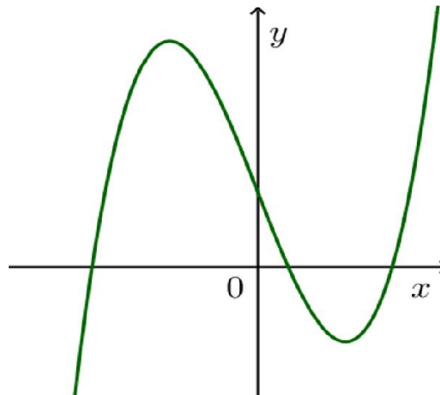
- A. $y = -x^3 + x^2 - 1$ B. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$ C. $y = x^3 - x^2 - 1$ D. $y = x^4 - 2x^2 - 1$

Câu 3. (MÃ ĐỀ 110 BGD&ĐT NĂM 2017) Đường cong ở hình bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



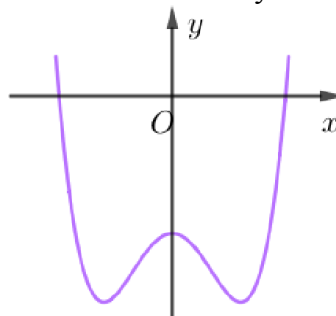
- A. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ B. $y = x^3 - 3x^2 + 3$ C. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$ D. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Câu 4. (ĐỀ MINH HỌA GBD&ĐT NĂM 2017) Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



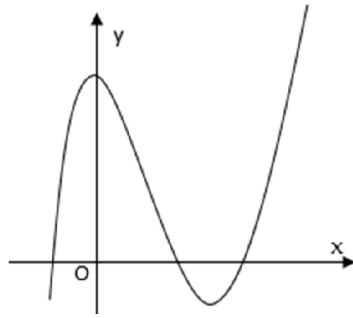
- A. $y = x^3 - 3x + 1$ B. $y = -x^3 + 3x + 1$ C. $y = x^4 - x^2 + 1$ D. $y = -x^2 + x - 1$

Câu 5. (Mã 103 - BGD - 2019) Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



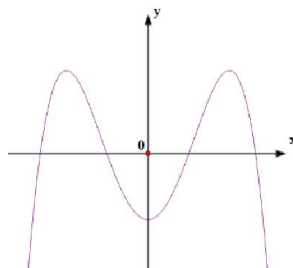
A. $y = x^3 - 3x^2 - 2$. B. $y = x^4 - 2x^2 - 2$. C. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$. D. $y = -x^4 + 2x^2 - 2$.

Câu 6. (Mã đề 101 - BGD - 2019) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



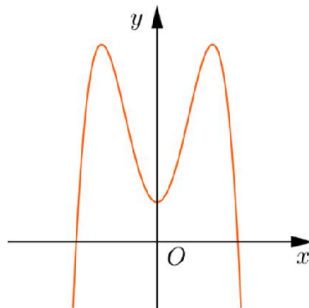
A. $y = x^3 - 3x^2 + 3$. B. $y = -x^3 + 3x^2 + 3$. C. $y = x^4 - 2x^2 + 3$. D. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

Câu 7. (Mã đề 101 BGD&ĐT NĂM 2018) Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



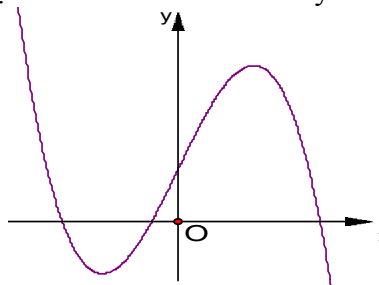
A. $y = x^3 - 3x^2 - 1$ B. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ C. $y = -x^4 + 3x^2 - 1$ D. $y = x^4 - 3x^2 - 1$

Câu 8. (Mã đề 104 - BGD - 2019) Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



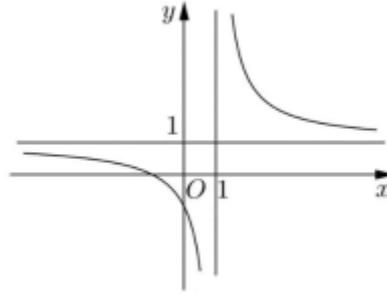
A. $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$ B. $y = -2x^3 + 3x + 1$ C. $y = 2x^3 - 3x + 1$ D. $y = -2x^4 + 4x^2 + 1$

Câu 9. (Mã 102 - BGD - 2019) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



A. $y = -x^3 + 3x + 1$. B. $y = x^3 - 3x + 1$. C. $y = x^4 - 2x^2 + 1$. D. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

Câu 10. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Đường con trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



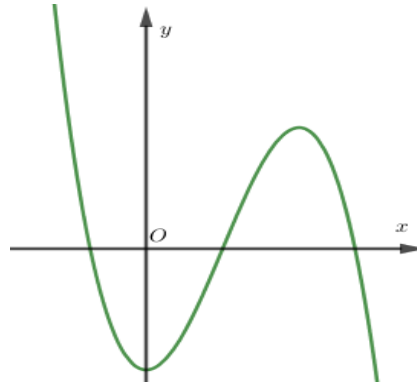
A. $y = \frac{2x-1}{x-1}$

B. $y = \frac{x+1}{x-1}$

C. $y = x^4 + x^2 + 1$

D. $y = x^3 - 3x - 1$

Câu 11. (Mã đề 104 BGD&ĐT NĂM 2018) Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



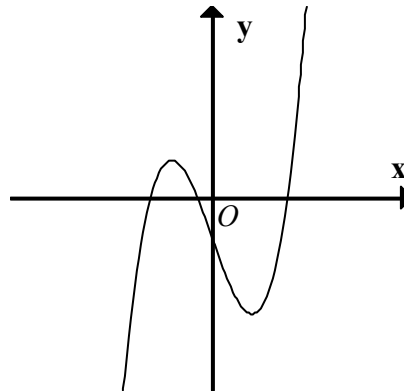
A. $y = x^4 - x^2 - 2$

B. $y = -x^4 + x^2 - 2$

C. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$

D. $y = x^3 - 3x^2 - 2$

Câu 12. (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2017-2018) Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



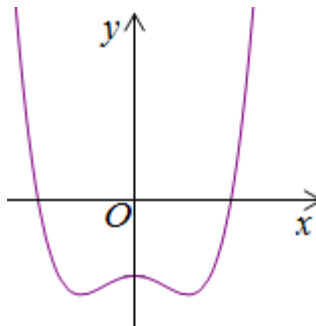
A. $y = x^3 - 3x - 1$

B. $y = x^4 - 3x^2 - 1$

C. $y = -x^3 - 3x - 1$

D. $y = -x^4 + x^2 - 1$

Câu 13. (MÃ ĐỀ 123 BGD&ĐT NĂM 2017) Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



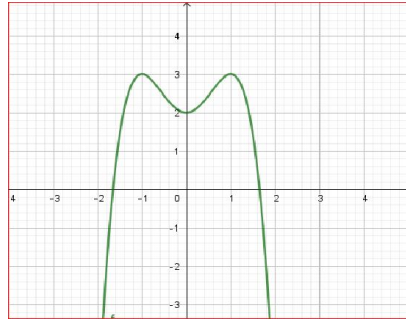
A. $y = x^4 - x^2 - 1$

B. $y = -x^4 + x^2 - 1$

C. $y = x^3 - x^2 - 1$

D. $y = -x^3 + x^2 - 1$

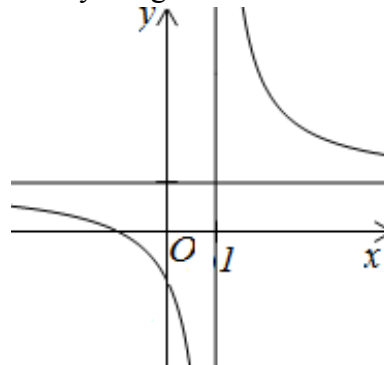
Câu 14. (ĐỀ THAM KHẢO BGD & ĐT 2018) Đường cong trong hình bên là của đồ thị hàm số nào dưới đây?



- A. $y = x^3 - 3x^2 + 2$ B. $y = -x^3 + 3x^2 + 2$ C. $y = -x^4 + 2x^2 + 2$ D. $y = x^4 - 2x^2 + 2$

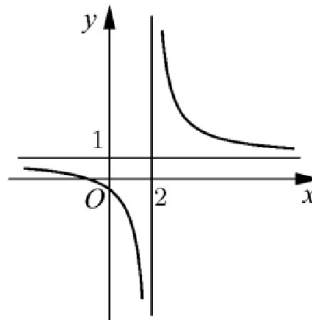
Câu 15...MẤT ĐỀ RỒI HAHA!

Câu 16. (MÃ ĐỀ 123 BGD&ĐT NĂM 2017) Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



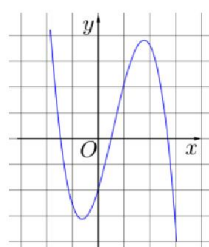
- A. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ B. $y' > 0, \forall x \neq 1$ C. $y' < 0, \forall x \neq 1$ D. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Câu 17. (MĐ 105 BGD&ĐT NĂM 2017) Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $y' > 0, \forall x \neq 1$ B. $y' < 0, \forall x \neq 1$ C. $y' < 0, \forall x \neq 2$ D. $y' > 0, \forall x \neq 2$

Câu 18. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



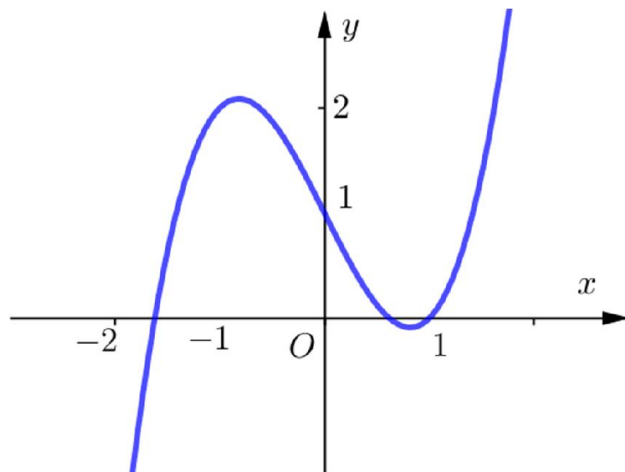
A. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$

B. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$

D. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

Câu 19. (THPT YÊN PHONG 1 BẮC NINH NĂM HỌC 2018-2019 LẦN 2) Hình vẽ sau đây là đồ thị của một trong bốn hàm số cho ở các đáp án A, B, C, D . Hỏi đó là hàm số nào?



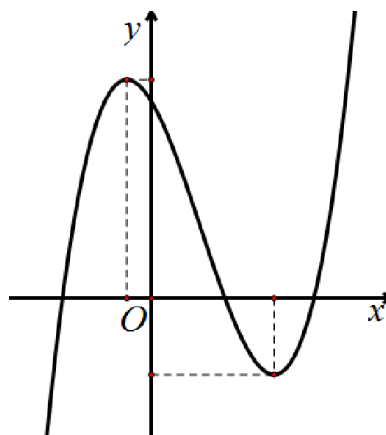
A. $y = x^3 + 2x + 1$.

B. $y = x^3 - 2x^2 + 1$.

C. $y = x^3 - 2x + 1$.

D. $y = -x^3 + 2x + 1$.

Câu 20. (THPT THIỆU HÓA – THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Chọn khẳng định đúng về dấu của a, b, c, d ?



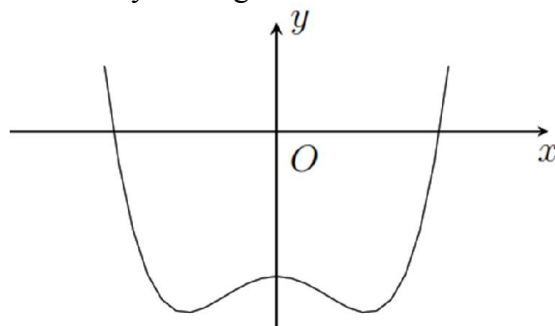
A. $a > 0, b > 0, d > 0, c > 0$

B. $a > 0, c > 0 > b, d < 0$

C. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

D. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$

Câu 21. (KSCL THPT NGUYỄN KHUYẾN LẦN 05 NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



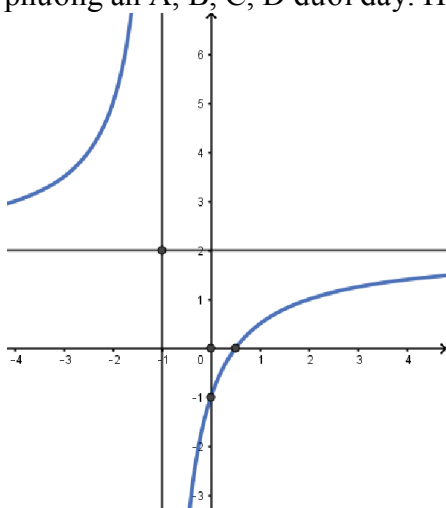
A. $a > 0, b < 0, c > 0$

B. $a > 0, b < 0, c < 0$

C. $a > 0, b > 0, c < 0$

D. $a < 0, b > 0, c < 0$

Câu 22. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2017) Cho đường cong hình vẽ bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?



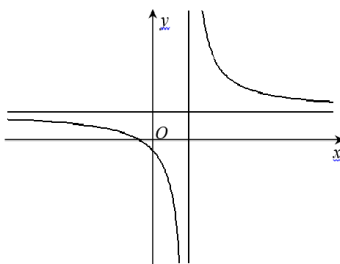
A. $y = \frac{2x+1}{x-1}$

B. $y = \frac{2x+3}{x+1}$

C. $y = \frac{2x-1}{x+1}$

D. $y = \frac{2x-2}{x-1}$

Câu 23. (CHUYÊN TRẦN PHÚ HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như sau.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

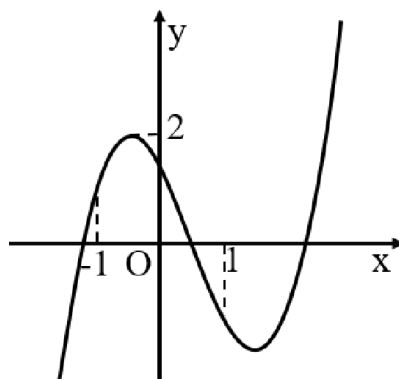
A. $ac > 0; bd > 0$

B. $ab < 0; cd < 0$

C. $bc > 0; ad < 0$

D. $ad > 0; bd < 0$

Câu 24. (CỤM LIÊN TRƯỜNG HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019) Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định nào là đúng?

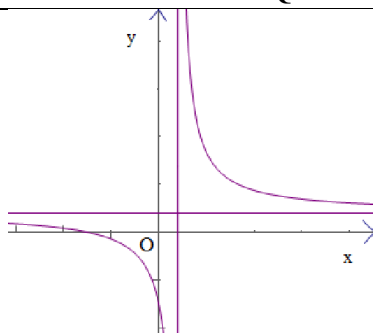
A. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0.$

B. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0.$

C. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0.$

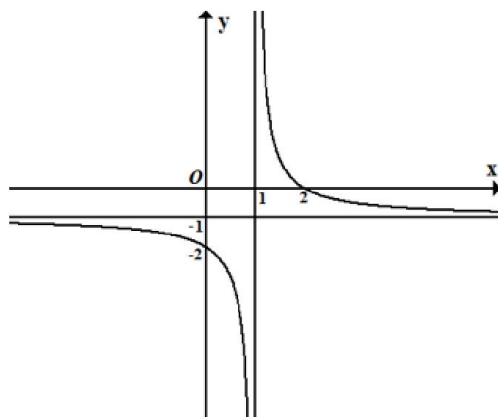
D. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0.$

Câu 25. (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ NĂM 2018 - 2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = \frac{(a-1)x+b}{(c-1)x+d}, d < 0$ có đồ thị như hình trên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



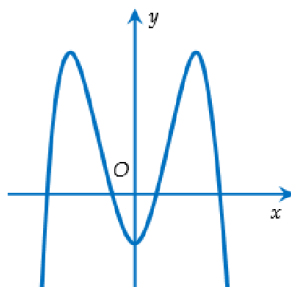
- A. $a > 1, b > 0, c < 1$. B. $a > 1, b < 0, c > 1$. C. $a < 1, b > 0, c < 1$. D. $a > 1, b > 0, c > 1$.

Câu 26. (THPT BA ĐÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên dưới, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $T = a + 2b + 3c$?



- A. $T = -8$. B. $T = 2$. C. $T = 6$. D. $T = 0$.

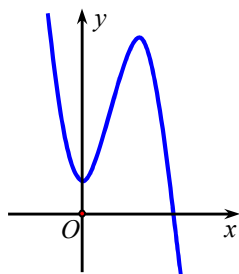
Câu 27. (SỞ GD&ĐT NINH BÌNH LẦN 01 NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a < 0, b > 0, c < 0$. B. $a < 0, b < 0, c > 0$.
C. $a < 0, b > 0, c > 0$. D. $a < 0, b < 0, c < 0$.

Câu 28. (THPT MINH CHÂU HÙNG YÊN NĂM 2018 – 2019) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

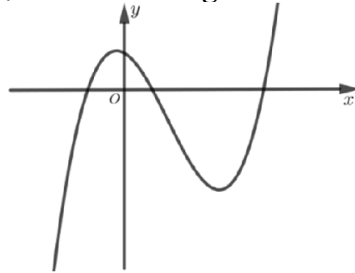
A. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$

B. $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$

C. $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$

D. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$

Câu 29. (GKI THPT VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?



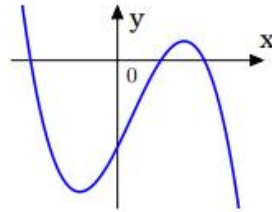
A. $ab < 0, bc > 0, cd < 0$

B. $ab < 0, bc < 0, cd > 0$

C. $ab > 0, bc > 0, cd < 0$

D. $ab > 0, bc > 0, cd > 0$

Câu 30. (GKI THPT LƯƠNG THẾ VINH HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?



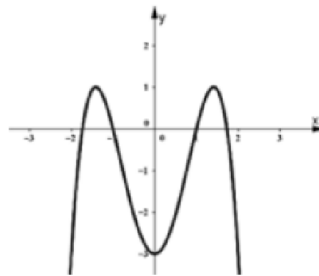
A. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$

B. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$

C. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$

D. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$

Câu 31. (THPT CHUYÊN BẮC NINH LẦN 01 NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a > 0, b < 0, c < 0$

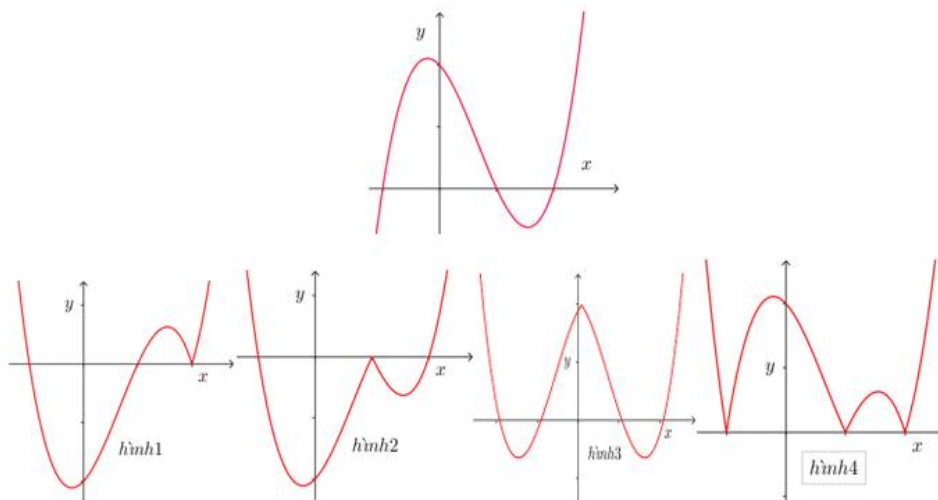
B. $a < 0, b < 0, c < 0$

C. $a < 0, b > 0, c < 0$

D. $a > 0, b < 0, c > 0$

Dạng 2. Đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

Câu 32. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2017) Hàm số $y = (x-2)(x^2-1)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = |x-2|(x^2-1)$?



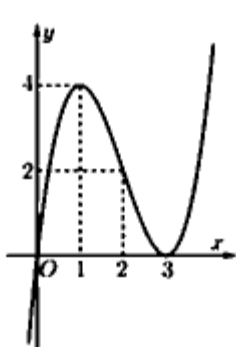
A. Hình 1

B. Hình 2

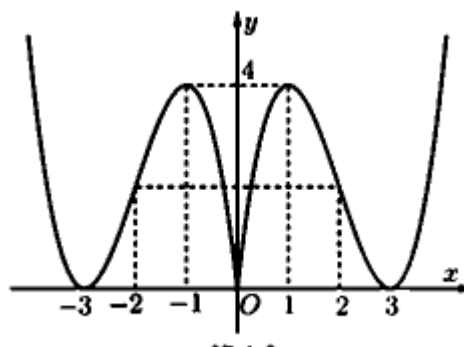
C. Hình 3

D. Hình 4

Câu 33. (THPT LÊ XOAY VĨNH PHÚC LẦN 1 NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là đồ thị hàm số nào dưới đây?



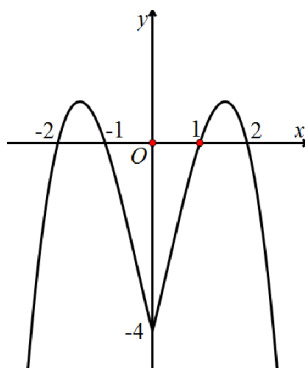
Hình 1



Hình 2

A. $y = |x|^3 - 6|x|^2 + 9|x|$. B. $|x|^3 - 6x^2 + 9|x| + 1$. C. $-x^3 + 6x^2 - 9x$. D. $|x^3 - 6x^2 + 9x|$.

Câu 34. (GKI THPT VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ như hình vẽ.



Chọn kết luận **đúng** trong các kết luận sau:

A. $f(x) = -x^3 + x^2 + 4x - 4$

B. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

C. $f(x) = -x^3 - x^2 + 4x - 4$

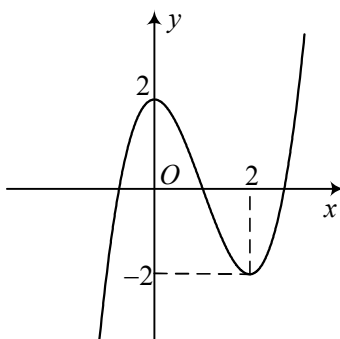
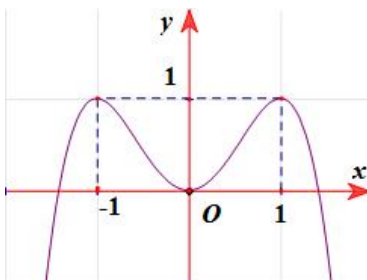
D. $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$.

Dạng 3. Bài toán tương giao**Dạng 3.1 Bài toán tương giao đồ thị thông qua đồ thị, bảng biến thiên****Câu 35. (Mã đề 101 - BGD - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			3		3			
	$-\infty$			-1			$-\infty$	

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là**A.** 2.**B.** 1.**C.** 4.**D.** 3.**Câu 36. (Mã 103 - BGD - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-1	2	$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là**A.** 3.**B.** 0.**C.** 1.**D.** 2.**Câu 37. (Mã đề 101 BGD&ĐT NĂM 2018)** Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$). Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) + 4 = 0$ là**A.** 2**B.** 0**C.** 1**D.** 3**Câu 38. (Mã đề 102 BGD&ĐT NĂM 2018)** Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$). Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên.

Số nghiệm của phương trình $4f(x) - 3 = 0$ là

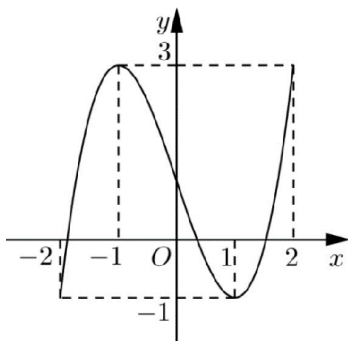
A. 2

B. 0

C. 4

D. 3

Câu 39. (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2017-2018) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 4 = 0$ trên đoạn $[-2; 2]$ là



A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Câu 40. (Mã 102 - BGD - 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	-1	2	-1	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 5 = 0$ là

A. 3.

B. 4.

C. 0.

D. 2.

Câu 41. (Mã đề 104 - BGD - 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là

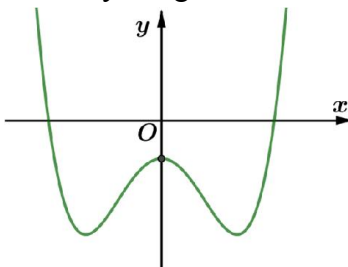
A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

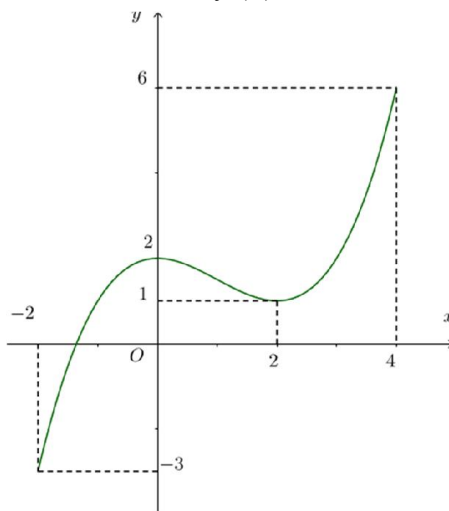
Câu 42. (MÃ ĐỀ 110 BGD&ĐT NĂM 2017) Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, với a, b, c là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



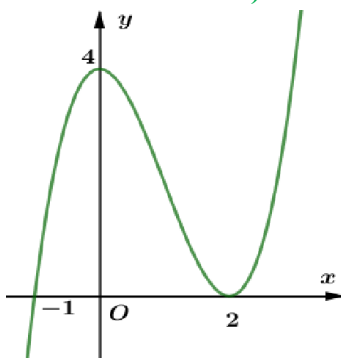
A. Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm trên tập số thực

- B. Phương trình $y' = 0$ có đúng một nghiệm thực
 C. Phương trình $y' = 0$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt
 D. Phương trình $y' = 0$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt

Câu 43. (Mã đề 104 BGD&ĐT NĂM 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 5 = 0$ trên đoạn $[-2; 4]$ là



- A. 2 B. 1 C. 0 D. 3
- Câu 44. (THPT CÙ HUY CẬN NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thực của phương trình $4f(x) - 7 = 0$

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.
- Câu 45. (THPT LÊ QUY ĐÔN ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2		3		$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	7		1		$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x) - 2 = 0$ là

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- Câu 47. (THPT YÊN PHONG 1 BẮC NINH NĂM HỌC 2018-2019 LẦN 2)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau đây.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	-	0	+	0	-
y	$+\infty$		3		$-\infty$

Hỏi phương trình $2.f(x) - 5 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Câu 48. (GKI THPT LƯƠNG THẾ VINH HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y			4			$+\infty$
	$-\infty$			-2		

Số nghiệm của phương trình $f(x) - 3 = 0$ là

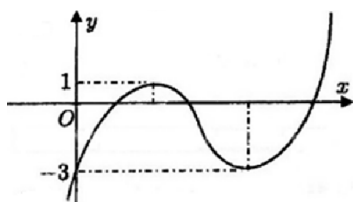
A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

Câu 49. (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình $|f(x)| = 2$ là

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 6.

Câu 50. (THPT - YÊN ĐỊNH THANH HÓA 2018 2019- LẦN 2) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm của phương trình $|f(x)| = 1$ trên đoạn $[-2; 2]$.

A. 3.

B. 5.

C. 6.

D. 4.

Câu 51. (MĐ 105 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho hàm số $y = (x - 2)(x^2 + 1)$ có đồ thị (C) . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (C) cắt trục hoành tại một điểm.B. (C) cắt trục hoành tại ba điểm.C. (C) cắt trục hoành tại hai điểm.D. (C) không cắt trục hoành.

Dạng 3.2 Bài toán tương giao đồ thị thông qua hàm số cho trước

Câu 52. (ĐỀ MINH HỌA GBD&ĐT NĂM 2017) Biết rằng đường thẳng $y = -2x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0

A. $y_0 = 4$

B. $y_0 = 0$

C. $y_0 = 2$

D. $y_0 = -1$

Câu 53. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2017) Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C) . Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.

A. 2

B. 3

C. 1

D. 0

Câu 54. (THPT YÊN KHÁNH - NINH BÌNH - 2018 - 2019) Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2$ có đồ thị (C) . Số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $y = 2$ là

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 4.

Câu 55. (CHUYÊN TRẦN PHÚ HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Biết rằng đường thẳng $y = 4x + 5$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x + 1$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0

A. $y_0 = 10$.

B. $y_0 = 13$.

C. $y_0 = 11$.

D. $y_0 = 12$.

Câu 56. (THPT - YÊN ĐỊNH THANH HÓA 2018 2019- LẦN 2) Gọi P là số giao điểm của hai đồ thị $y = x^3 - x^2 + 1$ và $y = x^2 + 1$. Tìm P .

A. $P = 0$.

B. $P = 2$.

C. $P = 1$.

D. $P = 3$.

Câu 57. (THPT YÊN PHONG 1 BẮC NINH NĂM HỌC 2018-2019 LẦN 2) Đồ thị của hàm số $y = -x^4 - 3x^2 + 1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bao nhiêu

A. -3.

B. 0.

C. 1.

D. -1.

Câu 58. (GKI THPT VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Số giao điểm của đường cong $y = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$ và đường thẳng $y = 1 - x$ là

A. 1

B. 2

C. 3

D. 0

Câu 59. (THPT QUANG TRUNG ĐỒNG ĐA HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^4 - 4} + 5$ và đường thẳng $y = x$

A. 3.

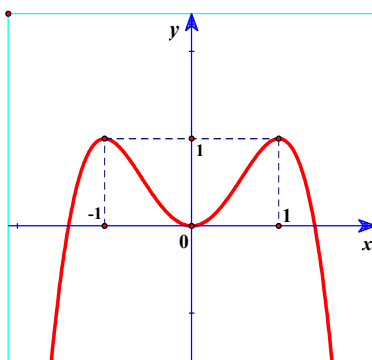
B. 0.

C. 2.

D. 1.

Dạng 3.3 Bài toán tìm m để phương trình $f(x) = f(m)$ thỏa mãn điều kiện cho trước khi biết đồ thị, BBT của $f(x)$

Câu 60. (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $-x^4 + 2x^2 = m$ có bốn nghiệm thực phân biệt.



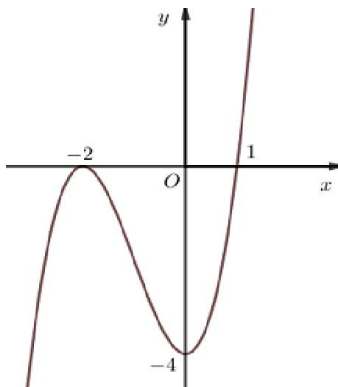
A. $m < 1$

B. $m > 0$

C. $0 \leq m \leq 1$

D. $0 < m < 1$

Câu 61. (THPT GANG THÉP THÁI NGUYÊN NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Tìm số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(x) = 1 + m^2$.

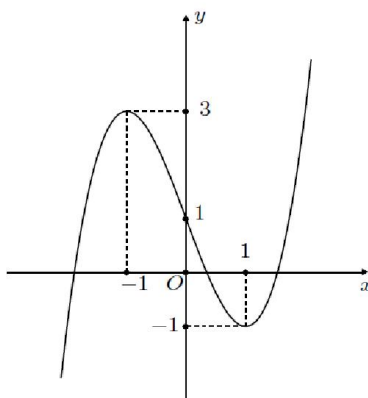
A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Câu 62. (CHUYÊN TRẦN PHÚ HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như sau.



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2f(x) + 3m - 3 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

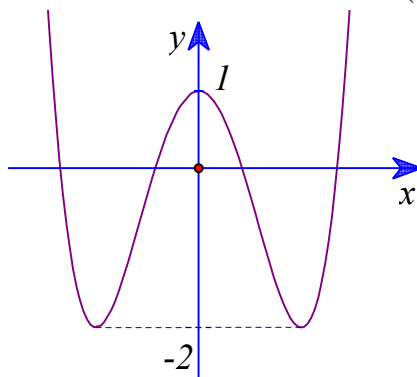
A. $-1 < m < \frac{5}{3}$

B. $-\frac{5}{3} < m < 1$

C. $-\frac{5}{3} \leq m \leq 1$

D. $-1 \leq m \leq \frac{5}{3}$

Câu 63. (HỌC MÃI NĂM 2018-2019-LẦN 02) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Khi đó, điều kiện đầy đủ của m để phương trình $f(x) = m$ có bốn nghiệm thực phân biệt là

A. $m \leq -2$.

B. $-2 < m < 1$.

C. $m = 1$.

D. $m > 1$.

Câu 64. (HSG BẮC NINH NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-3		-1		0		2		$+\infty$
y'		-		+		-		+		-	
y	$+\infty$		-5		0		-2		3		$-\infty$

Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $f(x) = m$ có 5 nghiệm phân biệt.

A. $-2 < m < 3$

B. $-5 < m < 3$

C. $-2 < m < 0$

D. $-2 \leq m \leq 0$

Câu 65. (SỞ GD&ĐT QUẢNG NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$		-1		0		-1		$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $f(x) - 1 = m$ có đúng hai nghiệm.

A. $m > 0, m = -1$.

B. $-2 < m < -1$.

C. $m \geq -1, m = -2$.

D. $m > -1, m = -2$.

Dạng 3.4 Bài toán tìm m để phương trình $|f(x)| = f(m)$ thỏa mãn điều kiện cho trước khi biết đồ thị, BBT $f(x)$

Câu 66. (CHUYÊN HẠ LONG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$		$-\frac{1}{4}$		2		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$

Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $|f(x)| = 3m$ có đúng 8 nghiệm phân biệt

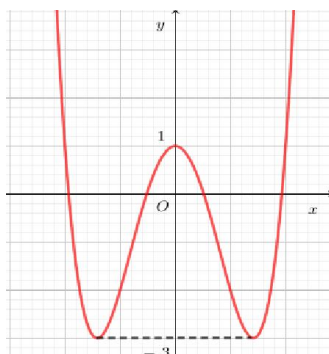
A. Vô số.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Câu 67. (THPT THIỆU HÓA – THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Hình vẽ bên là đồ thị của một hàm số trùng phương $y = f(x)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $|2f(x)| = m$ có 6 nghiệm thực phân biệt?



A. 5

B. 6

C. 7

D. 3

Dạng 3.5 Bài toán tương giao đường thẳng với đồ thị hàm số bậc 3

Câu 68. (MÃ ĐỀ 123 BGD&ĐT NĂM 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = mx - m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$ tại ba điểm A, B, C phân biệt sao $AB = BC$

- A. $m \in \left(-\frac{5}{4}; +\infty\right)$ B. $m \in (-2; +\infty)$ C. $m \in \mathbb{R}$ D. $m \in (-\infty; 0) \cup [4; +\infty)$

Câu 69. (MÃ ĐỀ 110 BGD&ĐT NĂM 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -mx$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - m + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB = BC$.

- A. $m \in (-\infty; -1)$ B. $m \in (-\infty; +\infty)$ C. $m \in (1; +\infty)$ D. $m \in (-\infty; 3)$

Câu 70. (THPT BẠCH ĐẰNG QUẢNG NINH NĂM 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt.

- A. $m \in (-\infty; -4)$. B. $m \in (-4; 0)$. C. $m \in (0; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.

Câu 71. (CHUYÊN BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 + 3x^2 - 2 = m$ có ba nghiệm phân biệt.

- A. $m \in (2; +\infty]$. B. $m \in (-\infty; -2]$. C. $m \in (-2; 2)$. D. $m \in [-2; 2]$.

Câu 72. (CỤM LIÊN TRƯỜNG HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (C) cắt đường thẳng $d: y = m(x - 1)$ tại ba điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 .

- A. $m > -2$. B. $m = -2$. C. $m > -3$. D. $m = -3$.

Câu 73. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 02) Đường thẳng Δ có phương trình $y = 2x + 1$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - x + 3$ tại hai điểm A và B với tọa độ được kí hiệu lần lượt là $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ trong đó $x_B < x_A$. Tìm $x_B + y_B$?

- A. $x_B + y_B = -5$ B. $x_B + y_B = -2$ C. $x_B + y_B = 4$ D. $x_B + y_B = 7$

Câu 74. (THPT BA ĐÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 - m^3$ có đồ thị (C_m) và đường thẳng $d: y = m^2x + 2m^3$. Biết rằng m_1, m_2 ($m_1 > m_2$) là hai giá trị thực của m để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 83$. Phát biểu nào sau đây là **đúng** về quan hệ giữa hai giá trị m_1, m_2 ?

- A. $m_1 + m_2 = 0$. B. $m_1^2 + 2m_2 > 4$. C. $m_2^2 + 2m_1 > 4$. D. $m_1 - m_2 = 0$.

Câu 75. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC LẦN 02 NĂM 2018-2019) Đường thẳng Δ có phương trình $y = 2x + 1$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - x + 3$ tại hai điểm A và B với tọa độ được kí hiệu lần lượt là $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ trong đó $x_B < x_A$. Tìm $x_B + y_B$?

- A. $x_B + y_B = -5$ B. $x_B + y_B = -2$ C. $x_B + y_B = 4$ D. $x_B + y_B = 7$

Câu 76. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3 - 3x^2 = 2m + 1$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

- A. $-\frac{1}{2}$. B. $-\frac{3}{2}$. C. $-\frac{5}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 77. (THPT MINH KHAI HÀ TĨNH NĂM 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -x + 5$ cắt đồ thị hàm số

$y = x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 5$ tại 3 điểm phân biệt.

- A. $\begin{cases} m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} m \neq \frac{2}{3} \\ m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{cases}$ C. $\begin{cases} m \neq \frac{2}{3} \\ m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{cases}$

Câu 78. (THPT LƯƠNG THẾ VINH HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 1) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ, đường thẳng d có phương trình $y = x - 1$. Biết phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm $x_1 < x_2 < x_3$. Giá trị của $x_1 x_3$ bằng

- A. -3 . B. $-\frac{7}{3}$. C. -2 . D. $-\frac{5}{2}$.

Câu 79. (CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2019]$ để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 3$ và đường thẳng $y = 3x + 1$ có duy nhất một điểm chung?

- A. 1. B. 2019. C. 4038. D. 2018.

Câu 80. (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Phương trình $x^3 - 6mx + 5 = 5m^2$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng khi

- A. $m = 0$. B. $m = -1 \vee m = 1$. C. $m = 1$. D. $m \in \emptyset$.

Dạng 3.6 Bài toán tương giao của đường thẳng với đồ thị hàm số nhất biến

Câu 81. (Mã đề 101 BGD&ĐT NĂM 2018) Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C) . Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C) , đoạn thẳng AB có độ dài bằng:

- A. $2\sqrt{3}$ B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{6}$

Câu 82. (Mã đề 102 BGD&ĐT NĂM 2018) Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C) . Xét tam giác đều IAB có hai đỉnh A, B thuộc (C) , đoạn thẳng AB có độ dài bằng

- A. 3 B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{3}$

Câu 83. (Mã đề 104 BGD&ĐT NĂM 2018) Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C) . Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C) , đoạn thẳng AB có độ dài bằng

- A. $\sqrt{6}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

Câu 84. Cho là đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$. Tìm k để đường thẳng $d: y = kx + 2k + 1$ cắt tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A đến trục hoành bằng khoảng cách từ B đến trục hoành.

- A. 1. B. $\frac{2}{5}$ C. -3 . D. -2 .

- Câu 85. (SỞ GD&ĐT HÀ NỘI NĂM 2018-2019)** Biết đường thẳng $y = x - 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt x_A, x_B . Khi đó giá trị của $x_A + x_B$ bằng
- A. 5. B. 3. C. 1. D. 2.
- Câu 86. (ĐỀ MẪU KSNL ĐHQG TP HCM NĂM 2018-2019)** Đường thẳng $y = x + 2m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi
- A. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \end{cases}$. D. $-3 < m < 1$.
- Câu 87. (GKI THPT LƯƠNG THẾ VINH HÀ NỘI NĂM 2018-2019)** Tìm điều kiện của m để đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt.
- A. $(-\infty; 0] \cup [16; +\infty)$ B. $(16; +\infty)$ C. $(-\infty; 0)$ D. $(-\infty; 0) \cup (16; +\infty)$
- Câu 88. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG TRỊ NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Gọi $M(a; b)$ là điểm trên đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x}$ sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $d: y = 2x + 6$ nhỏ nhất. Tính $(4a+5)^2 + (2b-7)^2$.
- A. 162. B. 2. C. 18. D. 0.
- Câu 89. (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ NĂM 2018 - 2019 LẦN 01)** Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y = \frac{x}{1-x}$ cắt đường thẳng $y = x - m$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng 60° (với O là gốc tọa độ)?
- A. 2 B. 1 C. 3 D. 0
- Câu 90. (THPT LÊ QUY ĐÔN ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Để đường thẳng $d: y = x - m + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho độ dài AB ngắn nhất thì giá trị của m thuộc khoảng nào?
- A. $m \in (-4; -2)$ B. $m \in (2; 4)$ C. $m \in (-2; 0)$ D. $m \in (0; 2)$
- Câu 91. (TRƯỜNG THPT LƯƠNG TÀI SỐ 2 NĂM 2018-2019)** Biết rằng đường thẳng $y = 2x + 2m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B với mọi giá trị của tham số m . Tìm hoành độ trung điểm của AB ?
- A. $m+1$ B. $-m-1$ C. $-2m-2$ D. $-2m+1$
- Câu 92. (CHUYÊN KHTN NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Tìm m để đường thẳng $y = 2x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ tại hai điểm M, N sao cho độ dài MN là nhỏ nhất.
- A. 3. B. -1. C. 2. D. 1.
- Câu 93. (THPT GIA LỘC HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Gọi (H) là đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$. Điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc (H) có tổng khoảng cách đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất, với $x_0 < 0$ khi đó $x_0 + y_0$ bằng

A. -1.

B. -2.

C. 3.

D. 0.

Câu 94. A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng

A. $4\sqrt{2}$.

B. 4.

C. $2\sqrt{2}$.D. $2\sqrt{2}$.

Dạng 3.7 Bài toán tương giao của đường thẳng với hàm số khác (chứa tham số)

Câu 95. (Mã đề 101 - BGD - 2019) (Mã đề 001) Cho hai hàm số $y = \frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1}$ và $y = |x+2| - x + m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $[2; +\infty)$.B. $(-\infty; 2)$.C. $(2; +\infty)$.D. $(-\infty; 2]$.

Câu 96. (Mã 103 - BGD - 2019) Cho hai hàm số $y = \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3}$ và $y = |x+2| - x - m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là $(C_1), (C_2)$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $(-2; +\infty)$.B. $(-\infty; -2]$.C. $[-2; +\infty)$.D. $(-\infty; -2)$.

Câu 97. (Mã 102 - BGD - 2019) Cho hai hàm số $y = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} + \frac{x+3}{x+4}$ và $y = |x+1| - x + m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biệt là

A. $(-\infty; 3]$.B. $(-\infty; 3)$.C. $[3; +\infty)$.D. $(3; +\infty)$.

Câu 98. (Mã đề 104 - BGD - 2019) Cho hai hàm số $y = \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2}$ và $y = |x+1| - x - m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $(-\infty; -3)$.B. $[-3; +\infty)$.C. $(-\infty; -3]$.D. $(-3; +\infty)$.

Câu 99. (SỞ GD&ĐT BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - 3x + 9} = 7 - m$ có nghiệm. Số phần tử của S là

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 5.

Câu 100. (CỤM LIÊN TRƯỜNG HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019) Tập tất cả các giá trị của m để phương trình $x^6 + 6x^4 - m^3x^3 + 3(5 - m^2)x^2 - 6mx + 10 = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ là $S = (a; b]$. Tính $T = 5a + 8b$.

A. $T = 18$.B. $T = 43$.C. $T = 30$.D. $T = 31$.

Câu 101. (HỌC MÃI NĂM 2018-2019-LẦN 02) Có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $\cos^3 x - 3\cos^2 x - m = 0$ có nghiệm?

A. Vô số.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Câu 102. (THPT THIẾU HÓA – THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $x^2(|x| - 3) + 2 - m^2(|m| - 3) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. 3

B. 12

C. $T = 7$

D. 5

Câu 103. (THPT QUỲNH LƯU 3 NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{|x^2-4x+3|} = m^4 - m^2 + 1$ có 4 nghiệm thực phân biệt

A. $m \leq 1$.B. $0 < m \leq 1$.C. $m \in (-1; 0) \cup (0; 1)$.D. $-1 \leq m \leq 1$.

Câu 104. (THPT QUỲNH LƯU 3 NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số $m \in \mathbb{R}$ sao cho phương trình $\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1$ có hai nghiệm thực.

A. $m > \frac{7}{12}$.B. $m \geq -\frac{7}{2}$.C. $m \geq \frac{3}{2}$.D. $m \geq \frac{9}{2}$.

Câu 105. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m$ có đồ thị là (C_m) . Tìm m để đường thẳng $d: y = -1$ cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

A. $-\frac{1}{3} < m < 1$ và $m \neq 0$ B. $-\frac{1}{2} < m < 1$ và $m \neq 0$ C. $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$ và $m \neq 0$ D. $-\frac{1}{3} < m < \frac{1}{2}$ và $m \neq 0$

Câu 106. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tập tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $m(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 3) + 2\sqrt{1-x^2} - 5 = 0$

Có đúng 2 nghiệm thực phân biệt là một nửa khoảng $(a; b]$. Tính $b - \frac{5}{7}a$.

A. $\frac{6-5\sqrt{2}}{7}$ B. $\frac{6-5\sqrt{2}}{35}$ C. $\frac{12-5\sqrt{2}}{35}$ D. $\frac{12-5\sqrt{2}}{7}$

Câu 107. (THPT NGÔ GIA TỰ VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho phương trình $x^3 - 3x^2 - 2x + m - 3 + 2\sqrt{2x^3 + 3x + m} = 0$. Tập S là tập các giá trị của m nguyên để phương trình có ba nghiệm phân biệt. Tính tổng các phần tử của tập S .

A. 15.

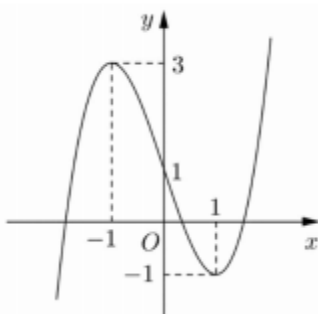
B. 9.

C. 0.

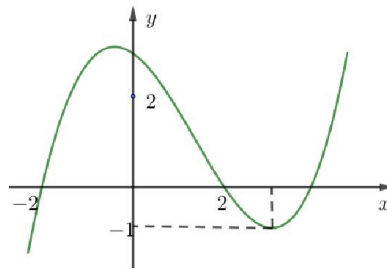
D. 3.

Dạng 3.8 Định m để hàm số $f(u)$ thỏa mãn điều kiện cho trước khi biết $f(x)$

Câu 108. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sin x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ là

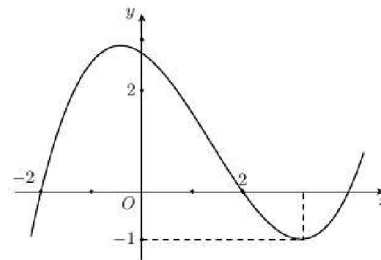
A. $(-1; 3)$ B. $[-1; 1)$ C. $[-1; 3)$ D. $(-1; 1)$

Câu 109. (Mã 103 - BGD - 2019) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f(x^3 - 3x)\right| = \frac{3}{2}$ là



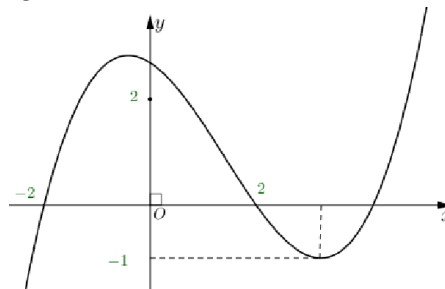
- A. 7. B. 3. C. 8. D. 4.

Câu 110. (Mã đề 104 - BGD - 2019) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f(x^3 - 3x)\right| = \frac{2}{3}$ là



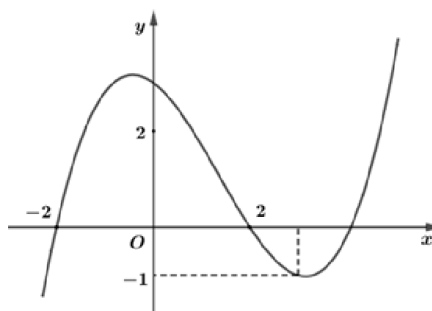
- A. 10 B. 3 C. 9 D. 6

Câu 111. (Mã đề 101 - BGD - 2019) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f(x^3 - 3x)\right| = \frac{4}{3}$ là



- A. 7. B. 4. C. 3. D. 8.

Câu 112. (Mã 102 - BGD - 2019) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f(x^3 - 3x)\right| = \frac{1}{2}$



A. 6.

B. 10.

C. 12.

D. 3.

Câu 113. (THPT GIA LỘC HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-2	1	-2	$+\infty$

Tìm m để phương trình $2f(x+2019) - m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

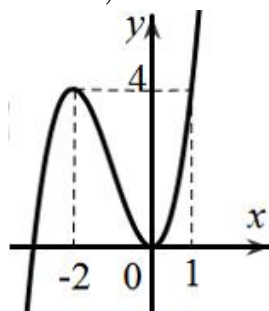
A. $m \in (0; 2)$.

B. $m \in (-2; 2)$.

C. $m \in (-4; 2)$.

D. $m \in (-2; 1)$.

Câu 114. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x^2 + 2x - 2) = 3m + 1$ có nghiệm thuộc khoảng $[0; 1]$.



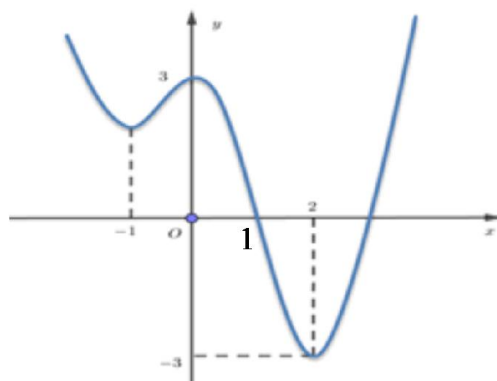
A. $[0; 4]$.

B. $[-1; 0]$.

C. $[0; 1]$.

D. $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$

Câu 115. (ĐỀ 01 ĐỀ PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(e^x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \ln 2)$.



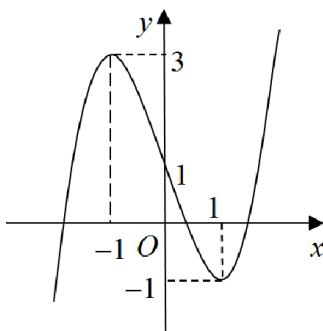
A. $(-3; 0)$.

B. $(-3; 3)$.

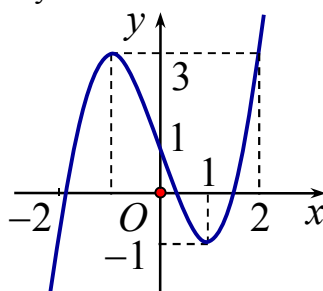
C. $(0; 3)$.

D. $[-3; 0]$

Câu 116. (THPT CÙ HUY CẬN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\ln^2 x) = m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $(1; e]$:

A. $[-1; 3)$.B. $[-1; 1)$.C. $(-1; 1)$.D. $(-1; 3)$.

Câu 117. (LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số các giá trị nguyên của tham số m không vượt quá 5 để phương trình $f(\pi^x) - \frac{m^2 - 1}{8} = 0$ có hai nghiệm phân biệt là

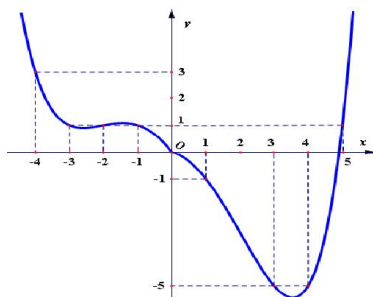
A. 5.

B. 4.

C. 7.

D. 6.

Câu 118. (TT HOÀNG HOA THÁM - 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2.f\left(3 - 3\sqrt{-9x^2 + 30x - 21}\right) = m - 2019$ có nghiệm.



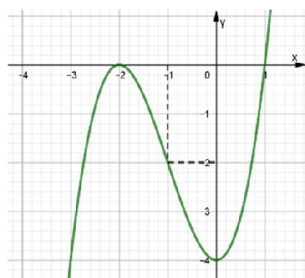
A. 15.

B. 11.

C. 10.

D. 13.

Câu 119. (THPT LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sqrt{4x - x^2} - 1) = m$ có nghiệm là



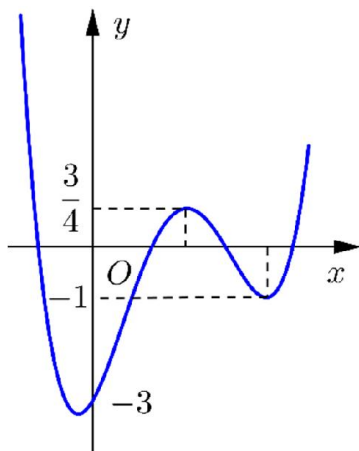
A. $[-2; 0]$.

B. $[-4; -2]$.

C. $[-4; 0]$.

D. $[-1; 1]$.

Câu 120. (SỞ GD&ĐT HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x+m|) = m$ có 4 nghiệm phân biệt là



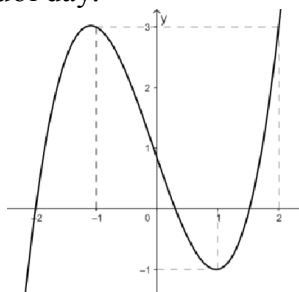
A. 2.

B. Vô số.

C. 1.

D. 0.

Câu 121. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sqrt{4-x^2}) = m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $[-\sqrt{2}; \sqrt{3})$ là:

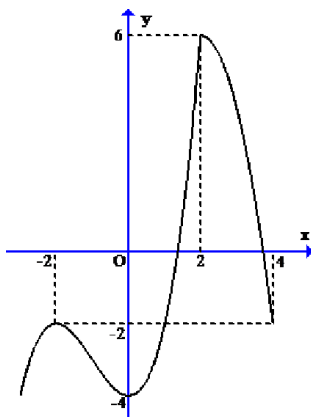
A. $[-1; 3]$.

B. $[-1; f(\sqrt{2})]$.

C. $(-1; f(\sqrt{2})]$.

D. $(-1; 3]$.

Câu 122. (THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}+1\right) + x = m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2; 2]$?

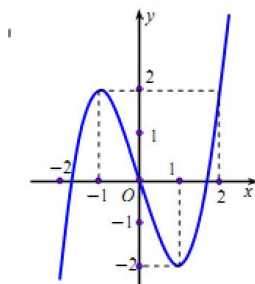
A. 11

B. 9

C. 8

D. 10

Câu 123. (SỞ GD&ĐT THANH HÓA NĂM 2018 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right) = m$ có nghiệm $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.



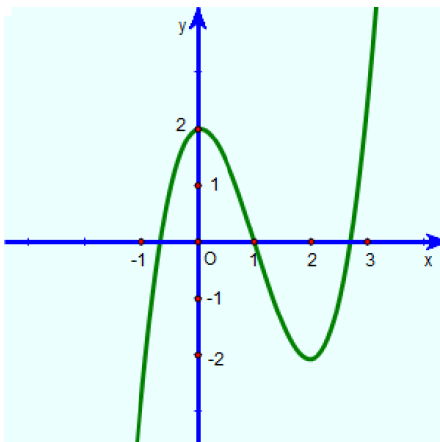
A. 5.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Câu 124. (THPT NGÔ GIA TỰ VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi m là số nghiệm của phương trình $f(f(x)) = 1$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

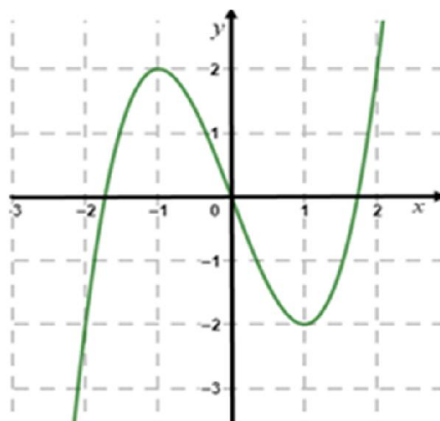
A. $m = 6$.

B. $m = 7$.

C. $m = 5$.

D. $m = 9$.

Câu 125. (TT THANH TƯỜNG NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình $f\left(f\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\right) = m$ có nghiệm là



A. $[-1; 2]$.

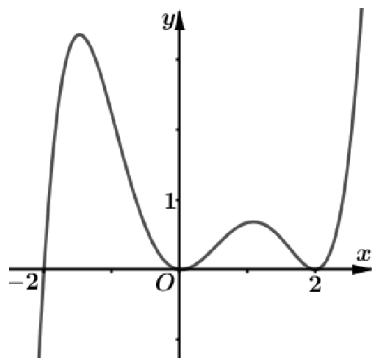
B. $[0; 2]$.

C. $[-1; 1]$.

D. $[-2; 2]$.

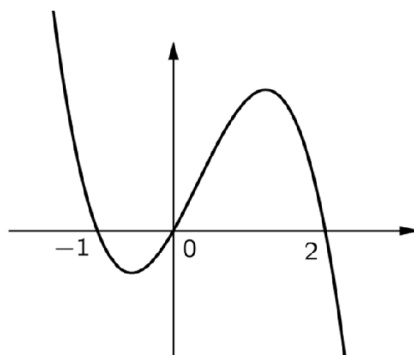
Dạng 3.9 Một số bài toán tương giao liên quan đến đồ thị $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$ khác.

Câu 126. (CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH YÊN BÁI LẦN 01 NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trơn (không bị gãy khúc), hình vẽ bên. Gọi hàm $g(x) = f[f(x)]$. Hỏi phương trình $g'(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?



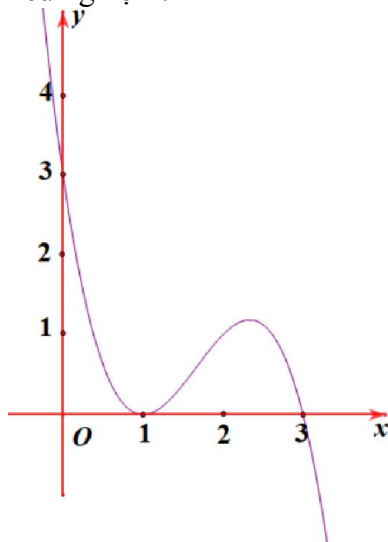
- A. 10. B. 12. C. 8. D. 14.

Câu 127. (THPT-THANG-LONG-HA-NOI-NAM-2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng



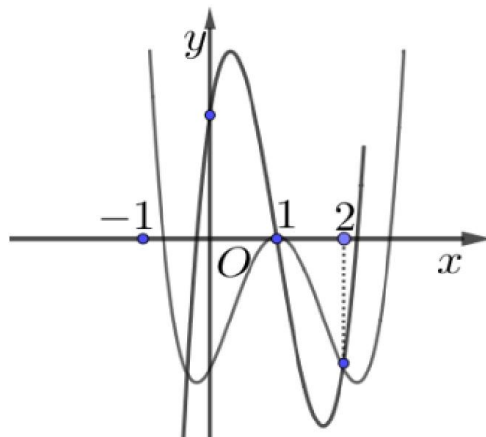
- A. $a + c > 0$. B. $a + b + c + d < 0$. C. $a + c < b + d$. D. $b + d - c > 0$.

Câu 128. (THPT CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0) = 0$ và $f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Phương trình $|f(|x|)| = m$ (với m là tham số) có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?



- A. 8 B. 6 C. 2 D. 4

Câu 129. (TT THANH TƯỜNG NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức với hệ số thực. Hình vẽ bên dưới là một phần đồ thị của hai hàm số: $y = f(x)$ và $y = f'(x)$.



Tập các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = me^x$ có hai nghiệm phân biệt trên $[0; 2]$ là nửa khoảng $[a; b)$. Tổng $a + b$ gần nhất với giá trị nào sau đây?

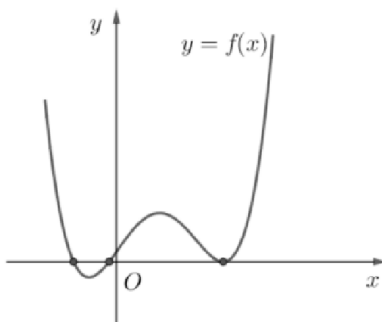
A. -0.81.

B. -0.54.

C. -0.27.

D. 0.27.

Câu 130. Cho $f(x)$ là một hàm đa thức bậc bốn có đồ thị như hình dưới đây.



Tập nghiệm của phương trình $[f'(x)]^2 = f(x) \cdot f''(x)$ có số phần tử là

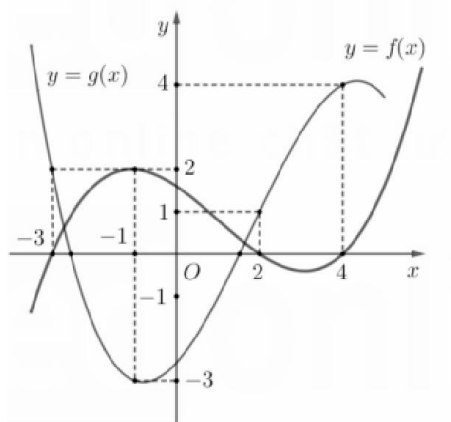
A. 1.

B. 2.

C. 6.

D. 0.

Câu 131. (ĐỀ THI THỬ VTED 03 NĂM HỌC 2018 - 2019) Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là các hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên (trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y = f(x)$). Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(1 - g(2x - 1)) = m$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$.



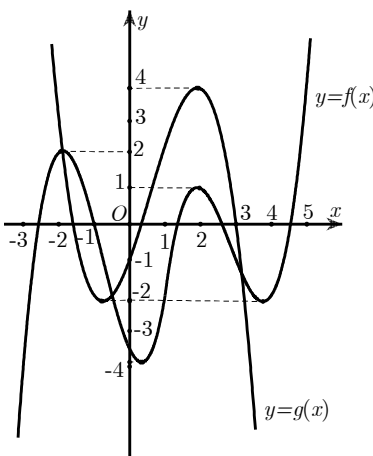
A. 8

B. 3

C. 6

D. 4

Câu 132. (KTNL GV THUẬN THÀNH 2 BẮC NINH NĂM 2018-2019) Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đồ thị như hình sau:



Khi đó tổng số nghiệm của hai phương trình $f(g(x)) = 0$ và $g(f(x)) = 0$ là

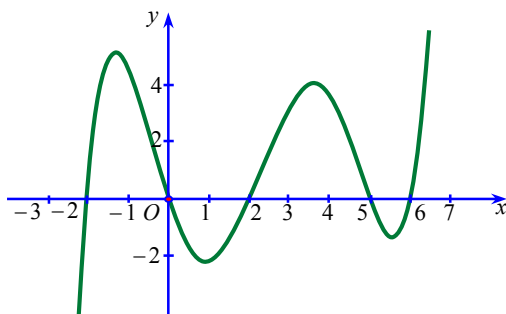
A. 25.

B. 22.

C. 21.

D. 26.

Câu 133. (THPT NGHĨA HƯNG ND- GK2 - 2018 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Số nghiệm thuộc đoạn $[-2; 6]$ của phương trình $f(x) = f(0)$ là

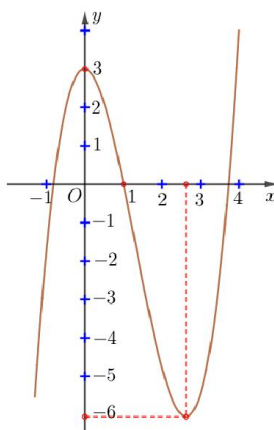
A. 5

B. 2

C. 3

D. 4

Câu 134. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới. Đặt $g(x) = f[f(x)]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.



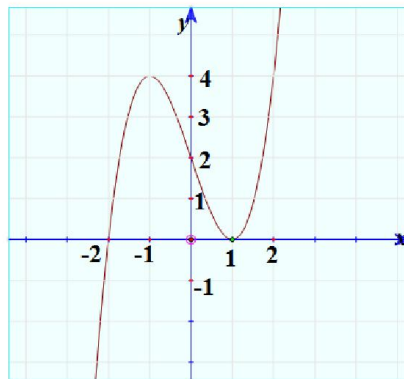
A. 2

B. 8

C. 4

D. 6

Câu 135. (THPT YÊN KHÁNH - NINH BÌNH - 2018 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ dưới đây.



Đặt $g(x) = f(f(x))$. Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là :

A. 6.

B. 5.

C. 8.

D. 7.

Dạng 4. Bài toán tiếp tuyến

Câu 136. (THPT HÙNG VƯƠNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3 + 3x^2 - 2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là

A. $y = 9x + 7$.B. $y = -9x - 7$.C. $y = -9x + 7$.D. $y = 9x - 7$.

Câu 137. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{-x+3}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = 0$ là

A. $y = -2x + 3$.B. $y = -2x - 3$.C. $y = 2x - 3$.D. $y = 2x + 3$.

Câu 138. (THPT THIỆU HÓA - THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = x^3 + 3x$ có đồ thị (C) . Hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 4 là:

A. $k = 0$ B. $k = -2$ C. $k = 6$ D. $k = 9$

Câu 139. (GKI THPT VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(1; 0)$ là

A. $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ B. $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ C. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ D. $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$

Câu 140. (ĐỀ THAM KHẢO BGD & ĐT 2018) Cho hàm số $y = \frac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a; 1)$.

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số a để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A . Tổng tất cả các giá trị các phần tử của S là

A. 1

B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

Câu 141. (Mã đề 102 BGD&ĐT NĂM 2018) Cho hàm số $y = \frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm A thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1); N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 3(x_1 - x_2)$.

A. 3

B. 1

C. 0

D. 2

Câu 142. (Mã đề 101 BGD&ĐT NĂM 2018) Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1); N(x_2; y_2)$ khác A thỏa mãn $y_1 - y_2 = 6(x_1 - x_2)$

A. 0

B. 3

C. 1

D. 2

Câu 143. (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2017-2018) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^4 - \frac{14}{3}x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 8(x_1 - x_2)$?

A. 0

B. 3

C. 1

D. 2

Câu 144. (THPT QUANG TRUNG ĐỒNG ĐA HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = 4x + 2 \cos 2x$ có đồ thị là (C) . Hoành độ của các điểm trên (C) mà tại đó tiếp tuyến của (C) song song hoặc trùng với trục hoành là

A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. B. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. C. $x = \pi + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. D. $x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 145. (CHUYÊN HƯNG YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 03) Tiếp tuyến tại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$.

A. Có hệ số góc bằng -1 .

B. Song song với trục hoành.

C. Có hệ số góc dương. D. Song song với đường thẳng $x = 1$.

Câu 146. (THPT YÊN PHONG 1 BẮC NINH NĂM HỌC 2018-2019 LẦN 2) Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 3$ tại điểm cực tiểu của đồ thị cắt đồ thị ở A, B khác tiếp điểm. Tính độ dài đoạn thẳng AB .

A. 2.

B. $\sqrt{2}$.

C. $2\sqrt{2}$.

D. $4\sqrt{2}$.

Câu 147. Từ BBT suy ra điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $M(0; 3)$.

Tiếp tuyến của đồ thị tại điểm cực tiểu là đường thẳng $y = 3$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và tiếp tuyến là:

$$-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 3 = 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(-2\sqrt{2}; 3); B(2\sqrt{2}; 3) \Rightarrow AB = 4\sqrt{2}.$$

Câu 148. (PEN I - THẦY LÊ ANH TUẤN - ĐỀ 3 - NĂM 2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{mx-2}{x-m+1}$ tiếp xúc với parabol $y = x^2 + 7$.

A. $m = 7$.

B. $m = \sqrt{7}$.

C. $m = 4$.

D. $m \in \mathbb{R}$.

Câu 149. (CHUYÊN BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho hàm số $y = \frac{x+b}{ax-2}$, ($ab \neq -2$). Biết rằng a, b là các giá trị thỏa mãn tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(1; -2)$ song song với đường thẳng $d: 3x + y - 4 = 0$. Khi đó giá trị của $a - 3b$ bằng

A. -2 .

B. 4.

C. -1 .

D. 5.

Câu 150. (CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tìm m để mọi tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m - 3)x - 1$ đều có hệ số góc dương.

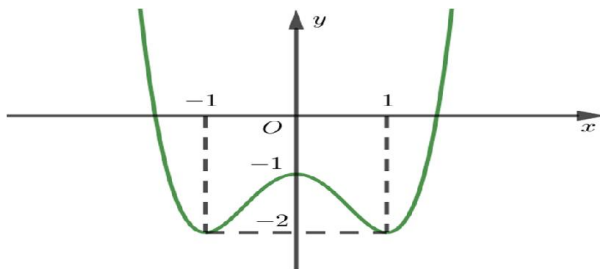
A. $m \neq 0$.

B. $m > 1$.

C. $m \neq 1$.

D. $m \in \emptyset$.

Câu 151. (THPT GIA LỘC HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu tiếp tuyến vuông góc với trục Oy .

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Câu 152. (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tiếp tuyến của đồ thị

$(C): y = \frac{1-x}{x+1}$ tại điểm có tung độ bằng 1 song song với đường thẳng

A. $(d): y = 2x - 1$.

B. $(d): y = -x + 1$.

C. $(d): y = x - 1$.

D. $(d): y = -2x + 2$.

Câu 153. (THPT GANG THẾP THÁI NGUYÊN NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$, gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng $m - 2$. Biết đường thẳng d cắt tiệm cận đứng của đồ thị hàm số tại điểm $A(x_1; y_1)$ và cắt tiệm cận ngang của đồ thị hàm số tại điểm $B(x_2; y_2)$. Gọi S là tập hợp các số m sao cho $x_2 + y_1 = -5$. Tính tổng bình phương các phần tử của S .

A. 10.

B. 9.

C. 0.

D. 4.

Câu 154. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ (1).

Đường thẳng $d: y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1). Biết d cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm A, B sao cho $\triangle OAB$ cân tại O . Khi đó $a + b$ bằng

A. -1.

B. 0.

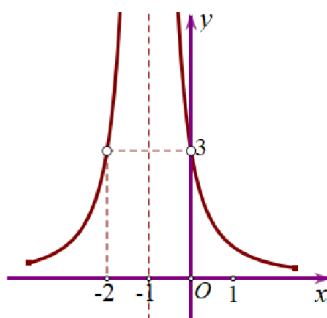
C. 2.

D. -3.

Câu 155. (CỤM LIÊN TRƯỜNG HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019) Cho hàm số

$y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}; c \neq 0, d \neq 0$) có đồ thị (C) . Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới

đây. Biết (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.



A. $x - 3y + 2 = 0$.

B. $x + 3y - 2 = 0$.

C. $x + 3y + 2 = 0$.

D. $x - 3y - 2 = 0$.

Câu 156. (THPT CHUYÊN VINH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 02) Gọi M, N là hai điểm di động trên đồ thị (C) của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - x + 4$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M và N luôn song song với nhau. Hỏi khi M, N thay đổi, đường thẳng MN luôn đi qua điểm nào trong các điểm dưới đây?

- A. Điểm $N(-1; -5)$ B. Điểm $M(1; -5)$ C. Điểm $Q(1; 5)$ D. Điểm $P(-1; 5)$

Câu 157. (PEN I - THẦY LÊ ANH TUẤN - ĐỀ 3 - NĂM 2019) Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$ đồ thị (C) . Gọi d là khoảng cách từ giao điểm hai tiệm cận của đồ thị (C) đến một tiếp tuyến của (C) . Giá trị lớn nhất của d có thể đạt được là

- A. $3\sqrt{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{2}$.

Câu 158. (HSG BẮC NINH NĂM 2018-2019) Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + m}{x + m}$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến của đồ thị tại hai điểm đó vuông góc với nhau.

- A. 5 B. 2 C. 0 D. 1

Câu 159. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 5(x_1 - x_2)$

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 160. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị $y = \frac{2x-3}{x+2}$ đi qua giao điểm của hai đường tiệm cận?

- A. 1. B. Không có. C. Vô số. D. 2.

PHẦN B. LỜI GIẢI THAM KHẢO

Dạng 1. Đọc đồ thị hàm số

Câu 1. Chọn D

Đồ thị hình vẽ là đồ thị hàm số bậc ba có hệ số $a > 0$ nên chỉ có hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ thỏa mãn điều kiện trên.

Câu 2. Chọn D

Dựa vào hình vẽ suy ra hàm số đã cho có 3 cực trị $\rightarrow$ loại C,

D.

Mặt khác nhánh bên tay phải của đồ thị hàm số đi lên suy ra hệ số $a > 0 \rightarrow$ Chọn D

Câu 3. Chọn B

Dựa vào đồ thị ta thấy đây là hình ảnh đồ thị của hàm số bậc ba nên loại đáp án B và C; Mặt khác dựa vào đồ thị ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ nên hệ số của x^3 dương nên ta chọn đáp án $y = x^3 - 3x^2 + 3$

Câu 4. Chọn A

Từ đồ thị : $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ và đây là đồ thị hàm bậc ba nên ta chọn phương án $y = x^3 - 3x + 1$.

Câu 5. Chọn B

Quan sát đồ thị ta thấy đây là đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a > 0$). Vậy chọn

B.

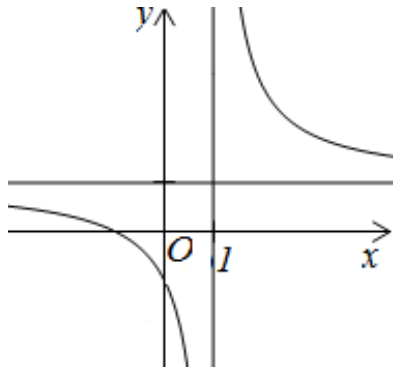
Câu 6. Chọn A

Dạng hàm bậc ba nên loại C

Từ đồ thị ta có $a > 0$. Do đó loại B,

D.**Câu 7. Chọn C**+ Nhìn đồ thị khẳng định đồ thị hàm trùng phương loại **B, C**+ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = -\infty$ nên chọn**D.****Câu 8. Chọn D**Dạng đồ thị hình bên là đồ thị hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có hệ số $a < 0$.Do đó, chỉ có đồ thị ở đáp án **B** là thỏa mãn.**Câu 9. Chọn A**Trong bốn hàm số đã cho thì chỉ có hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ (hàm số đa thức bậc ba với hệ số $a < 0$) có dạng đồ thị như đường cong trong hình.**Câu 10. Chọn B**Vì từ đồ thị ta suy ra đồ thị của hàm phân thức có tiệm cận đứng và ngang $x = 1; y = 1$ **Câu 11. Chọn C**Dựa trên hình dáng đồ thị, ta loại $y = x^3 - 3x^2 - 2$ và $y = x^4 - x^2 - 2$. Mặt khác từ đồ thị, ta thấy $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ nên loại $y = -x^4 + x^2 - 2$ **Câu 12. Chọn A**Đồ thị hàm số là đồ thị của hàm số bậc ba nên loại **A** và**B.**Đồ thị hàm số bậc ba có hệ số $a > 0$ nên **D** đúng.**Câu 13. Chọn A**Đây là hình dáng của đồ thị hàm bậc bốn trùng phương có hệ số $a > 0$ **Câu 14. Chọn C**Đồ thị hàm số trên là đồ thị hàm trùng phương có 3 cực trị và có $a < 0$ **Câu 15. Chọn C**

Ta có :



Dựa vào hình dáng của đồ thị ta được:

+ Điều kiện $x \neq 1$

+ Đây là đồ thị của hàm nghịch biến

Từ đó ta được $y' < 0, \forall x \neq 1$.**Câu 17. Chọn C**Dựa vào đồ thị ta nhận thấy tiệm cận đứng bằng 2, Hàm số nghịch biến vậy chọn **B****Câu 18. Chọn A**Dựa vào đồ thị suy ra hệ số $a < 0 \Rightarrow$ loại phương án **C** $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 trái dấu (do hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm hai phía với $Oy \Rightarrow 3ac < 0 \Rightarrow c > 0 \Rightarrow$ loại phương án**D.** Do $(C) \cap Oy = D(0; d) \Rightarrow d < 0$.**Câu 19.** Dựa vào đồ thị, ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, loại phương án **D**.

Xét phương án A có $y' = 3x^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, hàm số không có cực trị, loại phương án A .

Xét phương án B có $y' = 3x^2 - 6x$ và y' đổi dấu khi đi qua các điểm $x = 0, x = 2$ nên hàm số đạt cực trị tại $x = 0$ và $x = 2$, loại phương án B .

Vậy phương án đúng là C .

Câu 20.

lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta có $a > 0$, đồ thị cắt Oy tại 1 điểm có tung độ dương nên $d > 0$, đồ thị có 2 cực trị trái

dấu nên $x_1 \cdot x_2 < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow c < 0$. Vậy đáp án D

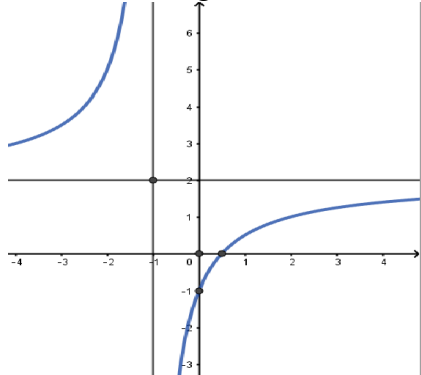
Câu 21. Chọn B

Ta có đồ thị có hình dạng như trên với hàm bậc bốn trùng phương có hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại nên $a > 0, b < 0$. Giá trị cực đại nhỏ hơn 0 nên $c < 0$.

Câu 22. Chọn C

Dựa vào đồ thị suy ra tiệm cận đứng $x = -1$ loại C, D

Đồ thị hàm số giao với trục hoành có hoành độ dương suy ra chọn B



Câu 23. Theo đồ thị:

Tiệm cận ngang: $y = \frac{a}{c} > 0$ (1)

Tiệm cận đứng: $x = -\frac{d}{c} > 0 \Rightarrow \frac{d}{c} < 0$ (2)

$y = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{b}{a} > 0$ (3)

Câu 24. + Dựa vào hình dạng đồ thị ta khẳng định được $a > 0$.

+ Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tọa độ $(0; d)$. Dựa vào đồ thị suy ra $d > 0$.

+ Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) trái dấu nên phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 trái dấu. Vì thế $3a \cdot c < 0$, nên suy ra $c < 0$.

+ Mặt khác từ đồ thị ta thấy $\begin{cases} x_1 > -1 \\ x_2 > 1 \end{cases}$ nên $x_1 + x_2 > 0$.

Mà $x_1 + x_2 = \frac{-2b}{3a}$ nên suy ra $\frac{-2b}{3a} > 0 \Rightarrow b < 0$.

Vậy $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

Câu 25. Theo bài ra, đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = -\frac{d}{c-1}$.

Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là: $y = \frac{a-1}{c-1}$.

Nhìn đồ thị ta thấy: $x = -\frac{d}{c-1} > 0$ mà $d < 0 \Rightarrow c-1 > 0 \Rightarrow c > 1$.

$$y = \frac{a-1}{c-1} > 0 \Rightarrow a-1 > 0 \Rightarrow a > 1.$$

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $\frac{b}{d} < 0 \Rightarrow b > 0$.

Câu 26. Từ đồ thị hàm số, ta suy ra

□ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=-1$.

□ Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(2;0)$, $B(0;-2)$.

Từ biểu thức hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ (vì đồ thị hàm số là đồ thị hàm nhất biến nên $ac-b \neq 0$), ta suy ra

□ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-c$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=a$.

□ Đồ thị hàm số đi qua $A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$, $B\left(0; \frac{b}{c}\right)$.

Đổi chiều lại, ta suy ra $c=-1$, $a=-1$, $b=2$.

$$\text{Vậy } T = a + 2b + 3c = (-1) + 2 \cdot 2 + 3(-1) = 0.$$

Câu 27. Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0;c)$, từ đồ thị suy ra $c < 0$

Mặt khác đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt, hay $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b) = 0$ có ba nghiệm phân biệt. Suy ra a, b trái dấu.

Mà $a < 0 \Rightarrow b > 0$

Câu 28.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đạo hàm: } y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

Từ hình dáng đồ thị suy ra:

Hệ số $a < 0$

$y' = 0$ có một nghiệm bằng $x_1 = 0$ và một nghiệm $x_2 > 0$.

$y' = 0$ có một nghiệm bằng $x_1 = 0 \Rightarrow c = 0$.

$$x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} \Rightarrow x_2 = -\frac{2b}{3a} > 0 \text{ mà } a < 0 \text{ nên } -b > 0 \Leftrightarrow b < 0$$

Câu 29. Chọn A

Từ dáng điệu của đồ thị ta có ngay được:

$$\oplus \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty \Rightarrow a > 0.$$

$\oplus$ Đồ thị hàm số cắt trục tung tại một điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

$$\text{Ta có: } y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

Mặt khác dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu và tổng hai nghiệm này luôn

$$\text{dương nên } \begin{cases} ac < 0 \\ -\frac{2b}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c < 0 \\ b < 0 \end{cases} \text{ (do } a > 0)$$

Do đó: $ab < 0, bc > 0, cd < 0$.

Câu 30. Chọn D

- Dựa vào hình dáng của đồ thị suy ra hệ số $a < 0$.

- Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tung độ âm nên $d < 0$.

- Ta thấy đồ thị như hình vẽ có hai điểm cực trị, hoành độ các điểm cực trị trái dấu suy ra phương trình $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 trái dấu kéo theo $3a.c < 0 \Rightarrow c > 0$.

- Mặt khác $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{3a} > 0 \Rightarrow b > 0$.

Câu 31. Chọn C

- Dựa vào hình dạng đồ thị suy ra $a < 0$
- Hàm số có 3 điểm cực trị nên $ab < 0 \Rightarrow b > 0$
- Giao điểm với trục tung nằm dưới trục hoành nên $c < 0$.

Dạng 2. Đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối**Câu 32. Chọn A**

$$y = |x - 2|(x^2 - 1) = \begin{cases} (x - 2)(x^2 - 1), & x \geq 2 \\ -(x - 2)(x^2 - 1), & x < 2 \end{cases} \quad \text{Đồ thị gồm 2 phần:}$$

+) Giữ nguyên phần đồ thị đã cho ứng với $x \geq 2$.

+) Lấy đối xứng phần đồ thị đã cho ứng với $x < 2$ qua trục Ox

Hình 1 nhận vì đồ thị là hàm $y = |x - 2|(x^2 - 1)$

Hình 2 loại vì đồ thị là hàm $y = (x - 2)|x - 1|(x + 1)$

Hình 3 loại vì đồ thị hàm số $y = (|x| - 2)(x^2 - 1)$

Hình 4 loại vì đồ thị hàm $y = |(x - 2)(x^2 - 1)|$

Câu 33. Cách 1:

+) Ta thấy Hình 2 có được là do ta giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ thuộc trục Oy và nằm bên phải của trục Oy và sau đó lấy đối xứng phần đồ thị này qua Oy . Do đó ta suy ra Hình 2 là đồ thị của hàm số $y = |x|^3 - 6|x|^2 + 9|x|$.

Ghi nhớ: Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, muốn vẽ đồ thị của hàm số $y = f(|x|)$ thì ta làm như sau:

Bước 1: Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ thuộc trục Oy (nếu có) và nằm bên phải trục Oy .

Bước 2: Ta lấy đối xứng phần đồ thị đó qua trục Oy .

Cách 2:

Từ hình 2 ta thấy đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng nên suy ra đây là đồ thị của hàm số chẵn, do đó ta loại được phương án C và **D**. Lại thấy đồ thị đi qua gốc tọa độ nên suy ra ta loại phương án **B**.

Vậy đáp án là **A**.

Câu 34. Chọn A

Do đồ thị giao với trục Oy tại điểm có tung độ bằng -4 và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$.

Dạng 3. Bài toán tương giao**Dạng 3.1 Bài toán tương giao đồ thị thông qua đồ thị, bảng biến thiên****Câu 35. Chọn C**

$$\text{Ta có } 2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{2}.$$

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \frac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên của $f(x)$ ta có số giao điểm của đồ thị

Câu 36. Chọn A

Ta có $2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{2}$ (1).

Số nghiệm thực của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = \frac{3}{2}$.

Từ bảng biến thiên đã cho của hàm số $f(x)$, ta thấy đường thẳng $y = \frac{3}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt.

Do đó phương trình (1) có ba nghiệm thực phân biệt.

Câu 37. Chọn D

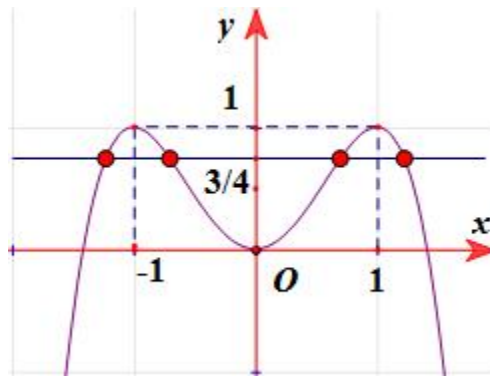
Ta có: $3f(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{4}{3}$ (*)

(*) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -\frac{4}{3}$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy (*) có 3 nghiệm.

Câu 38. Chọn C

Ta có $4f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{4}$



Đường thẳng $y = \frac{3}{4}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 4 điểm phân biệt nên phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 39. Chọn B

Ta có $3f(x) - 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{4}{3}$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy đường thẳng $y = \frac{4}{3}$ cắt $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 40. Chọn B

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
f'(x)	-	0	+	0	+
f(x)	$+\infty$	-1	2	-1	$+\infty$

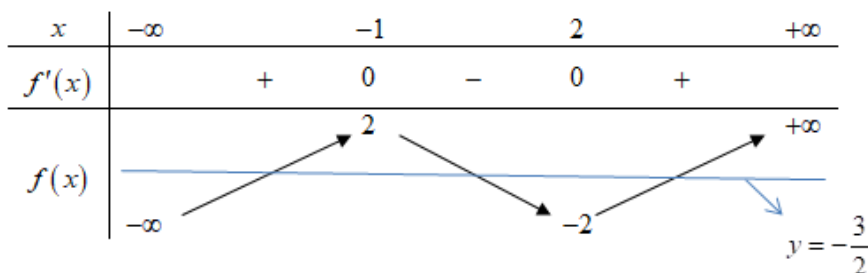
$y = 3/2$

Xét phương trình $3f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{5}{3}$.

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ và đường thẳng $d: y = \frac{5}{3}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt.

Câu 41. Chọn D



Ta có $2f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{3}{2}$.

Nhìn bảng biến thiên ta thấy phương trình này có 3 nghiệm.

Câu 42. Chọn D

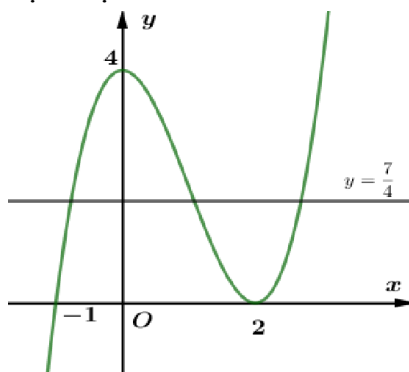
Dựa vào hình dáng của đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ta thấy đây là đồ thị của hàm số bậc bốn trùng phương có 3 điểm cực trị nên phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

Câu 43. Chọn D

Ta có $3f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{5}{3}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y = \frac{5}{3}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt thuộc đoạn $[-2; 4]$.

Do đó phương trình $3f(x) - 5 = 0$ có ba nghiệm thực.



Câu 44.

Ta có: $4f(x) - 7 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{7}{4}$. Do đường thẳng $y = \frac{7}{4}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Câu 45. Chọn C

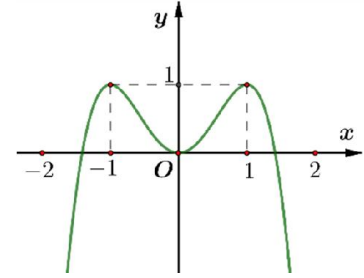
Xét phương trình $f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2$

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 2$

Từ bảng biến thiên ta thấy hai đồ thị cắt nhau tại ba điểm phân biệt hay phương trình có ba nghiệm.

Câu 46. (TRƯỜNG THPT LƯƠNG TÀI SỐ 2 NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $1 - 2.f(x) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

- A. 4
B. 3
C. Vô nghiệm
D. 2



Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét phương trình: } 1 - 2.f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \text{ (C)} \\ y = \frac{1}{2} \text{ (d)} \end{cases}$$

Số giao điểm của đường thẳng (d) và đường cong (C) ứng với số nghiệm của phương trình (1). Theo hình vẽ ta có 4 giao điểm $\Rightarrow$ phương trình (1) sẽ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 47. Phương trình $2.f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{5}{2} (*)$.

Số nghiệm của phương trình (*) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \frac{5}{2}$.

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy 2 đồ thị $y = f(x)$ và $y = \frac{5}{2}$ có 3 điểm chung.

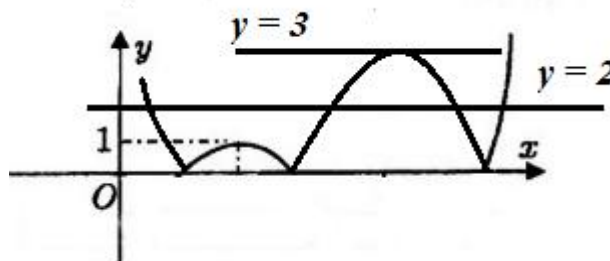
Vậy phương trình $2.f(x) - 5 = 0$ có 3 nghiệm thực.

Câu 48. Chọn A

Ta có: $f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 3$, theo bảng biến thiên ta có phương trình có 3 nghiệm.

Câu 49. *Đồ thị $y = |f(x)|$

- Bước 1: Giữ nguyên phần đồ thị của $y = f(x)$ nằm phía trên Ox
- Bước 2: Lấy đối xứng phần đồ thị của $y = f(x)$ nằm phía dưới Ox qua trục hoành.
- Bước 3: Xóa phần đồ thị của $y = f(x)$ nằm phía dưới trục hoành

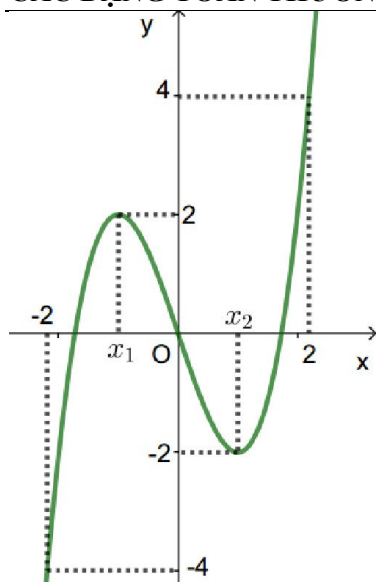


Số nghiệm của phương trình $|f(x)| = 2$ cũng chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ và đường thẳng $y = 2$. Dựa vào hình vẽ trên, ta thấy có 4 giao điểm.

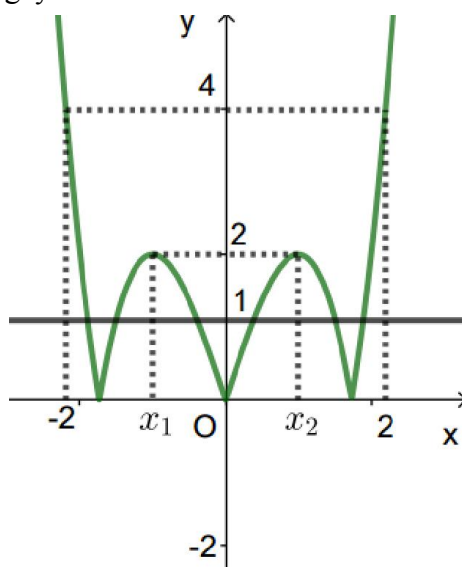
***Cách giải khác:**

$$|f(x)| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 \\ f(x) = -2 \end{cases}, \text{ dựa vào đồ thị suy ra phương trình đã cho có 4 nghiệm}$$

Câu 50.



Ta có số nghiệm của phương trình $|f(x)| = 1$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ với đường thẳng $y = 1$.



Từ hình vẽ ta thấy đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ tại 6 điểm. Vậy số nghiệm của phương trình $|f(x)| = 1$ là 6.

Dạng 3.2 Bài toán tương giao đồ thị thông qua hàm số cho trước

Câu 51. Chọn A

Để thấy phương trình $(x-2)(x^2+1)=0$ có 1 nghiệm $x=2 \Rightarrow (C)$ cắt trục hoành tại một điểm.

Câu 52. Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $-2x+2=x^3+x+2 \Leftrightarrow x^3+3x=0 \Leftrightarrow x=0$

Với $x_0=0 \Rightarrow y_0=2$.

Câu 53. Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành: $x^3-3x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$

Vậy số giao điểm của (C) và trục hoành là 3.

Câu 54. Số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $y=2$ là số nghiệm của phương trình sau:

$$x^4 - 3x^2 = 2 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \\ x^2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3 + \sqrt{17}}{2}}.$$

Phương trình hoành độ giao điểm có 2 nghiệm nên số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng là 2.

Câu 55. Phương trình hoành độ giao điểm là $x^3 + 2x + 1 = 4x + 5 \Leftrightarrow x^3 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Với $x = 2 \Rightarrow y = 13$. Vậy $y_0 = 13$

Câu 56. Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = x^3 - x^2 + 1$ và $y = x^2 + 1$:

$$x^3 - x^2 + 1 = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Với $x = 0 \Rightarrow y = 1$.

Với $x = 2 \Rightarrow y = 5$.

Nên hai đồ thị trên có hai giao điểm là $(0; 1)$ và $(2; 5)$.

Vậy $P = 2$.

Câu 57. Trục tung có phương trình: $x = 0$. Thay $x = 0$ vào $y = -x^4 - 3x^2 + 1$ được: $y = 1$.

Câu 58. Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 1 - x$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Câu 59. Cách 1: Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{x^4 - 4} + 5 = x \Leftrightarrow \sqrt{x^4 - 4} = x - 5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x^4 - 4 = (x - 5)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x^4 - x^2 + 10x - 29 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Do $x \geq 5$ nên $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) > 0$ và $10x - 29 > 0$. Vì vậy (*) vô nghiệm

Như vậy phương trình $\sqrt{x^4 - 4} + 5 = x$ vô nghiệm hay đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^4 - 4} + 5$ và đường thẳng $y = x$ không có giao điểm nào.

Cách 2:

Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{x^4 - 4} + 5 = x$. Ta có điều kiện xác định $\begin{cases} x \geq \sqrt{2} \\ x \leq -\sqrt{2} \end{cases}$

Với điều kiện trên ta có $\sqrt{x^4 - 4} + 5 = x \Leftrightarrow \sqrt{x^4 - 4} + 5 - x = 0$

Xét hàm số $h(x) = \sqrt{x^4 - 4} + 5 - x$. Ta có $h'(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4 - 4}} - 1$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 = \sqrt{x^4 - 4}$

Với $x \geq \sqrt{2}$ ta có $2x^3 > \sqrt{x^4 - 4}$. Với $x \leq -\sqrt{2}$ ta có $2x^3 < \sqrt{x^4 - 4}$

Ta có Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$h'(x)$	-		+	
$h(x)$	$+\infty$	$5+\sqrt{2}$	$5-\sqrt{2}$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^4 - 4} + 5 = x$ là số giao điểm của đồ thị $y = h(x) = \sqrt{x^4 - 4} + 5 - x$ và trục hoành $y = 0$. Dựa vào BBT ta thấy phương trình $\sqrt{x^4 - 4} + 5 = x$ vô nghiệm hay đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^4 - 4} + 5$ và đường thẳng $y = x$ không có giao điểm nào.

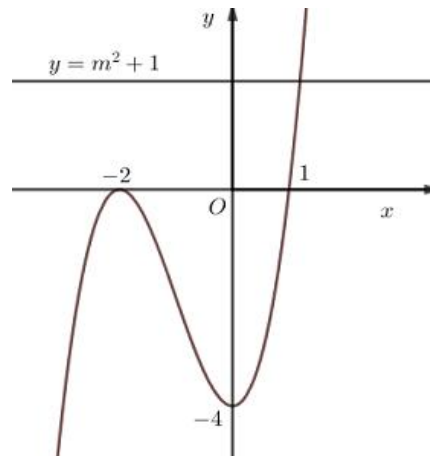
Dạng 3.3 Bài toán tìm m để phương trình $f(x) = f(m)$ thỏa mãn điều kiện cho trước khi biết đồ thị, BBT của $f(x)$

Câu 60. Chọn D

Số nghiệm thực của phương trình $-x^4 + 2x^2 = m$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ và đường thẳng $y = m$. Dựa vào đồ thị suy ra $-x^4 + 2x^2 = m$ có bốn nghiệm thực phân biệt khi $0 < m < 1$.

Câu 61. Số nghiệm của phương trình $f(x) = 1 + m^2$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 1 + m^2$. Mặt khác, $1 + m^2 \geq 1, \forall m$.

Do đó ta có đồ thị



Dựa vào đồ thị, ta thấy phương trình $f(x) = 1 + m^2$ luôn có một nghiệm thực với mọi giá trị của m . Vậy phương trình đã cho có một nghiệm thực.

Câu 62. $2f(x) + 3m - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{-3m + 3}{2}$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -1 < \frac{-3m + 3}{2} < 3 \Leftrightarrow -1 < m < \frac{5}{3}$

Câu 63. Số nghiệm của phương trình $f(x) = m$ bằng số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m$.

Khi đó, phương trình $y = f(x)$ có bốn nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow -2 < m < 1$.

Câu 64. Số nghiệm của phương trình $f(x) = m$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = m$ (song song hoặc trùng với Ox).

x	$-\infty$		-3		-1		0		2		$+\infty$
y'		-		+		-		+		-	
y	$+\infty$		-5		0		-2		3		$-\infty$

Để phương trình $f(x) = m$ có 5 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -2 < m < 0$.

Câu 65. Ta có $f(x) - 1 = m \Leftrightarrow f(x) = 1 + m$

Để phương trình có hai nghiệm thì $\begin{cases} m+1 = -1 \\ m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m > -1 \end{cases}$

Dạng 3.4 Bài toán tìm m để phương trình $|f(x)| = f(m)$ thỏa mãn điều kiện cho trước khi biết đồ thị, BBT $f(x)$

Câu 66. Lấy đối xứng phần đồ thị phía dưới Ox của hàm số $y = f(x)$ qua trục Ox .

Bỏ phần đồ thị $y = f(x)$ phía dưới Ox .

Khi đó ta có đồ thị hàm số $y = |f(x)|$.

x	$-\infty$	x_1	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	x_2	0	x_3	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	x_4	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$ f(x) $	$+\infty$	0	$\frac{1}{4}$	0	2	0	$\frac{1}{4}$	0	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $|f(x)| = 3m$ là số giao điểm của 2 đồ thị $y = |f(x)|$ và $y = m$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đồ thị $y = |f(x)|$ cắt đường thẳng $y = m$ tại 8 điểm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 2$.

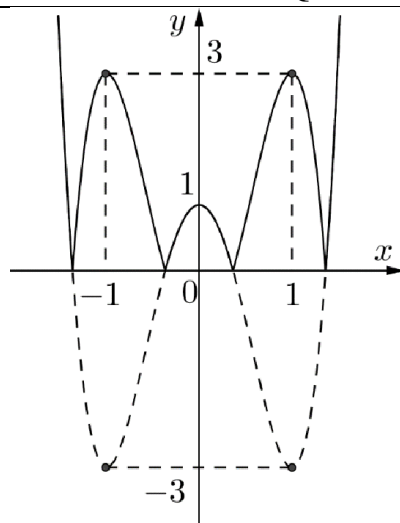
Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 1$.

Câu 67. Chọn D

Ta có $|2f(x)| = m \Leftrightarrow |f(x)| = \frac{m}{2} (*)$

Phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y = |f(x)|$ và đường thẳng $y = \frac{m}{2}$

Phần đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ và là đường nét liền.



Để phương trình $|2f(x)| = m$ có 6 nghiệm thực phân biệt thì $1 < \frac{m}{2} < 3 \Leftrightarrow 2 < m < 6$.

Mà $m \in \mathbb{Z}, m > 0 \Rightarrow m \in \{3; 4; 5\}$

Dạng 3.5 Bài toán tương giao đường thẳng với đồ thị hàm số bậc 3

Câu 68. Chọn B

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là:

$$x^3 - 3x^2 + x + 2 = mx - m + 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + x - mx + m + 1 = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - m - 1 = 0 \end{cases} \text{ Để đường thẳng cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân}$$

biệt thì phương trình $x^2 - 2x - m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1. Hay

$$\begin{cases} 1 + m + 1 > 0 \\ 1 - 2 - m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2. \text{ Với } m > -2 \text{ thì phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt là}$$

$1, x_1, x_2$ (x_1, x_2 là nghiệm của $x^2 - 2x - m - 1 = 0$). Mà $\frac{x_1 + x_2}{2} = 1$ suy ra điểm có hoành độ $x=1$ luôn là trung điểm của hai điểm còn lại. Nên luôn có 3 điểm A, B, C thỏa mãn $AB = BC$ Vậy $m > -2$.

Câu 69. Chọn D

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình

$$x^3 - 3x^2 - m + 2 = -mx \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x + m - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x + m - 2 = 0 \end{cases}$$

Đặt nghiệm $x_2 = 1$. Từ giả thiết bài toán trở thành tìm m để phương trình có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng.

Khi đó phương trình $x^2 - 2x + m - 2 = 0$ phải có 2 nghiệm phân biệt (vì theo Viet rõ ràng $x_1 + x_3 = 2 = 2x_2$)

Vậy ta chỉ cần $\Delta' = 1 - (m - 2) > 0 \Leftrightarrow m < 3$

Câu 70.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y = x^3 - 3x^2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		0		-4		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt khi $-4 < m < 0$

Câu 71. Xét hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$, $y' = 3x^2 + 6x$.

Lập bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		2		-2		$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $x^3 + 3x^2 - 2 = m$ (*) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ và đường thẳng $y = m$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra PT (*) có 3 nghiệm phân biệt khi $-2 < m < 2$.

Câu 72. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$x^3 - 3x^2 + 2 = m(x-1) \quad (1)$$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - mx + 2 + m = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - m - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ f(x) = x^2 - 2x - m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ f(x) = x^2 - 2x - m - 2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Phương trình (1) luôn có nghiệm $x = 1$, vậy để phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt thì phương trình (2) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 + m + 2 > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m > -3.$$

Vậy $m > -3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 73. Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và $y = x^3 - x + 3$:

$$x^3 - x + 3 = 2x + 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = -3 \\ x = 1 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } A(1;3); B(-2;-3) \Rightarrow x_B + y_B = -5$$

Câu 74. Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (C_m)

$$\begin{aligned} x^3 + 3mx^2 - m^3 &= m^2x + 2m^3 \\ \Leftrightarrow x^3 + 3mx^2 - m^2x - 3m^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^3 - m^2x) + (3mx^2 - 3m^3) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - m^2) + 3m(x^2 - m^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 3m)(x^2 - m^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3m \\ x = m \\ x = -m \end{cases}$$

Để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2, x_3 \Leftrightarrow m \neq 0$.

$$\text{Khi đó, } x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 83 \Leftrightarrow m^4 + (-m)^4 + (-3m)^4 = 83$$

$$\Leftrightarrow 83m^4 = 83 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

Vậy $m_1 = 1, m_2 = -1$ hay $m_1 + m_2 = 0$.

Câu 75. Chọn C

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình: $x^3 - x + 3 = 2x + 1$

$$\text{Giải phương trình ta được } \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vì $x_B < x_A$ Vậy $x_B = 1; y_B = 3 \Rightarrow x_B + y_B = 4$

Câu 76. Xét hàm số: $y = 2x^3 - 3x^2 \Rightarrow y' = 6x^2 - 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	0	-1	$+\infty$	

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của hai đồ thị:

$$\begin{cases} (C): y = 2x^3 - 3x^2 \\ d: y = 2m + 1 \end{cases}$$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy: Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 1 = -1 \\ 2m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow S = \left\{ -1; -\frac{1}{2} \right\}.$$

Vậy tổng các phần tử của S bằng $-1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$.

Câu 77. Phương trình hoành độ giao điểm chung là: $x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 5 = -x + 5$

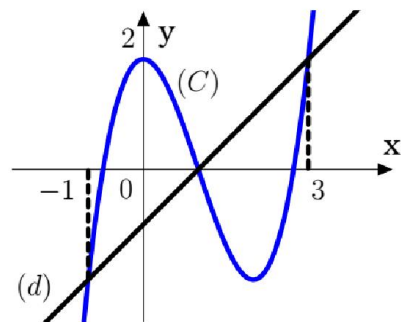
$$\Leftrightarrow x^3 + 2mx^2 + (3m-2)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2mx + 3m - 2 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Đường thẳng $y = -x + 5$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 5$ tại 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 3m + 2 > 0 \\ 3m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 1 \\ m \neq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{2}{3} \\ m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$$

Câu 78.



+Ta có: $f(x) = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

$f(x)$ là hàm bậc ba nên $f(x) - (x - 1) = a(x + 1)(x - 1)(x - 3)$

$$\Rightarrow f(x) = a(x + 1)(x - 1)(x - 3) + x - 1; f(0) = 2 \Leftrightarrow a = 1.$$

$$\Rightarrow f(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 3) + x - 1.$$

$$+ f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 = x_2 \\ (x + 1)(x - 3) + 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

x_1, x_3 là các nghiệm của (2) nên ta có $x_1 x_3 = -2$.

thẳng $y = \frac{5}{2}$ nên từ đồ thị ta có phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 79. Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 - 3mx + 3 = 3x + 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 3mx \Leftrightarrow 3m = \frac{x^3 - 3x + 2}{x} \quad (1).$$

$$\text{Xét hàm } f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x} = x^2 - 3 + \frac{2}{x}; f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	-
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$+\infty$ ↘	↗ $-\infty$	

Khi đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m < 0$. Mà m nguyên và $m \in [-2018; 2019]$ nên có 2018 giá trị thỏa mãn.

Câu 80. Phương trình đã cho tương đương: $x^3 - 6mx + 5 - 5m^2 = 0$.

Đặt $y = f(x) = x^3 - 6mx + 5 - 5m^2$ có $f'(x) = 3x^2 - 6m$; $f''(x) = 6x$.

PT đã cho có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow f'(x) = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \text{ thỏa mãn } f(x_1) \cdot f(x_2) < 0.$$

3 nghiệm đó lập thành cấp số cộng nên $x_2 - x_1 = x_3 - x_2$.

Suy ra, x_2 là hoành độ của tâm đối xứng hay là nghiệm của $f''(x) = 0$.

Cho $f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Với $x = 0$ ta có: $5 - 5m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Thử lại:

• Với $m = 1$ thì ta có $x^3 - 6x + 5 = 5 \Leftrightarrow x(x^2 - 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{6} \end{cases}$

• Với $m = -1$ thì ta có: $x^3 + 6x + 5 = 5 \Leftrightarrow x(x^2 + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Dạng 3.6 Bài toán tương giao của đường thẳng với đồ thị hàm số nhất biến

Câu 81. Chọn A

Cách 1:

Giả sử $A\left(a; \frac{a-1}{a+2}\right)$, $B\left(b; \frac{b-1}{b+2}\right)$, $I(-2; 1)$.

$$\overrightarrow{IA} = \left(a+2; -\frac{3}{a+2}\right), \overrightarrow{IB} = \left(b+2; -\frac{3}{b+2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{IA} = \left(a_1; -\frac{3}{a_1}\right), \overrightarrow{IB} = \left(b_1; -\frac{3}{b_1}\right).$$

Do tam giác ABI đều nên $\begin{cases} IA^2 = IB^2 = AB^2 = a_1^2 + \frac{9}{a_1^2} = b_1^2 + \frac{9}{b_1^2} \\ \cos(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a_1^2 - b_1^2) \left(1 - \frac{9}{a_1^2 b_1^2}\right) = 0 & (1) \\ a_1 b_1 + \frac{9}{a_1 b_1} = \frac{1}{2} \left(a_1^2 + \frac{9}{a_1^2}\right) & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -b_1 \\ a_1 = b_1 \\ a_1 b_1 = 3 \\ a_1 b_1 = -3 \end{cases}$$

Nếu $a_1 = -b_1$ thì (2) vô lý.

Nếu $a_1 = b_1$ thì $A \equiv B \Rightarrow$ Loại.

Nếu $a_1 b_1 = -3$ thì (2) vô lý.

Nếu $a_1 b_1 = 3$ thì (2) $\Rightarrow a_1^2 + \frac{9}{a_1^2} = 12 \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}$.

Vậy $AB = 2\sqrt{3}$.

Cách 2: $I(-2; 1)$

$$(C): y = \frac{x-1}{x+2} \stackrel{IXY}{\Rightarrow} (C): Y = -\frac{3}{X}.$$

Trong hệ trục tọa độ IXY (C) nhận đường thẳng $Y = -X$ làm trục đối xứng.

$$\triangle ABI \text{ đều nên } IA \text{ tạo với } IX \text{ một góc } 15^\circ \Rightarrow A \in d: Y = -\tan 15^\circ \cdot X \Rightarrow A \in d: Y = (\sqrt{3} - 2)X.$$

$$\Rightarrow A(X; (\sqrt{3} - 2)X).$$

$$\text{Mà } A \in (C) \Rightarrow (\sqrt{3}-2)X = -\frac{3}{X} \Rightarrow X^2 = \frac{3}{2-\sqrt{3}} = 3(2+\sqrt{3}).$$

$$\Rightarrow AB^2 = IA^2 = X^2 + \left[(\sqrt{3}-2)X \right]^2 = 12 \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}.$$

Câu 82. Chọn C

$$\text{Ta có } y = \frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}.$$

Đồ thị (C) có hai đường tiệm cận là $x = -1$ và $y = 1$. Do đó $I(-1; 1)$.

Giả sử A, B có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 .

Ta có:

$$IA^2 = (x_1+1)^2 + \frac{4}{(x_1+1)^2}; \quad IB^2 = (x_2+1)^2 + \frac{4}{(x_2+1)^2};$$

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + \left(\frac{2}{x_2+1} - \frac{2}{x_1+1} \right)^2 = \left[(x_2+1) - (x_1+1) \right]^2 + \frac{4 \left[(x_2+1) - (x_1+1) \right]^2}{(x_2+1)^2 \cdot (x_1+1)^2}$$

Do tam giác IAB đều nên ta có:

$$IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow (x_2+1)^2 - (x_1+1)^2 = \frac{4 \left[(x_2+1)^2 - (x_1+1)^2 \right]}{(x_2+1)^2 (x_1+1)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_2+1)^2 - (x_1+1)^2 = 0 \\ (x_2+1)^2 (x_1+1)^2 = 4 \end{cases}$$

$$(x_2+1)^2 - (x_1+1)^2 = 0 \Rightarrow AB = 0 \Rightarrow \text{Loại.}$$

$$(x_2+1)^2 (x_1+1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2+1 = \frac{2}{x_1+1} \\ x_2+1 = -\frac{2}{x_1+1} \end{cases}$$

$$+ x_2+1 = \frac{2}{x_1+1} :$$

$$\text{Khi đó } AB^2 = 2 \left[(x_2+1) - (x_1+1) \right]^2 = 2 \left[(x_2+1) - \frac{2}{(x_2+1)} \right]^2 = \frac{2}{(x_2+1)^2} \left[(x_2+1)^2 - 2 \right]^2$$

$$\text{Lại có } AB^2 = IB^2 \Leftrightarrow \frac{2}{(x_2+1)^2} \left[(x_2+1)^2 - 2 \right]^2 = (x_2+1)^2 + \frac{4}{(x_2+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x_2+1)^4 - 8(x_2+1)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x_2+1)^2 = 4 - 2\sqrt{3} \Rightarrow AB^2 = \frac{2(2-2\sqrt{3})^2}{4-2\sqrt{3}} = 8 \\ (x_2+1)^2 = 4 + 2\sqrt{3} \Rightarrow AB^2 = \frac{2(-2-2\sqrt{3})^2}{4+2\sqrt{3}} = 8 \end{cases}$$

$$+ x_2+1 = -\frac{2}{x_1+1} :$$

$$\text{Khi đó } AB^2 = 2 \left[(x_2+1) - (x_1+1) \right]^2 = 2 \left[(x_2+1) + \frac{2}{(x_2+1)} \right]^2 = \frac{2}{(x_2+1)^2} \left[(x_2+1)^2 + 2 \right]^2$$

$$\text{Lại có } AB^2 = IB^2 \Leftrightarrow \frac{2}{(x_2+1)^2} \left[(x_2+1)^2 + 2 \right]^2 = (x_2+1)^2 + \frac{4}{(x_2+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x_2 + 1)^4 + 8(x_2 + 1)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x_2 + 1)^2 = -4 - 2\sqrt{3} < 0 \\ (x_2 + 1)^2 = -4 + 2\sqrt{3} < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Loại}$$

Vậy $AB = 2\sqrt{2}$.

Câu 83. Chọn B

Tính tiền hệ trục theo vectơ $\overrightarrow{OI} = (-1; 1) \rightarrow I(0; 0)$ và $(C): Y = \frac{-3}{X}$.

Gọi $A\left(a; \frac{-3}{a}\right), B\left(b; \frac{-3}{b}\right) \in (C)$, điều kiện: $(a \neq b)$.

$$\text{Theo đề bài, ta có: } \begin{cases} IA = IB \\ \cos(\overrightarrow{IA}; \overrightarrow{IB}) = 60^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + \frac{9}{a^2} = b^2 + \frac{9}{b^2} & (1) \\ \frac{ab + \frac{9}{ab}}{AB^2} = \frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

Từ (2) $\rightarrow ab > 0$, do đó: $(1) \Leftrightarrow (a^2 - b^2)(a^2 b^2 - 9) = 0 \xrightarrow{ab > 0} ab = 3$.

Suy ra: $AB^2 = 2\left(3 + \frac{9}{3}\right) = 12 \rightarrow AB = 2\sqrt{3}$.

Câu 84. Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{2x+1}{x+1} = kx + 2k + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 (ld) \\ kx^2 + (3k-1)x + 2k = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Ycbt tương đương có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $|kx_1 + 2k + 1| = |kx_2 + 2k + 1|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = k^2 - 6k + 1 > 0 \\ k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k^2 - 6k + 1 > 0 \\ 1 - 3k + 4k + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k = -3.$$

Câu 85. Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = x - 2$ và đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ là:

$$x - 2 = \frac{2x+1}{x-1} \Leftrightarrow (x-2)(x-1) = 2x+1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 1 = 0 \quad (*)$$

Ta có x_A, x_B là nghiệm của phương trình (*), theo định lí Viét ta có $x_A + x_B = 5$

Câu 86. Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số đã cho

$$\frac{x-3}{x+1} = x + 2m \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2m)(x+1) = x-3 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + 2mx + 2m + 3 = 0 \quad (*). \text{ (vì khi } x = -1 \text{ thì phương trình trở}$$

thành $0 = -4$ vô lí).

Để đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì phương trình (*) phải có hai nghiệm

phân biệt. Khi đó m phải thỏa mãn $\Delta'_{(*)} > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases}$.

Vậy tập hợp các giá trị của tham số m là $\begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases}$.

Câu 87. Chọn D

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình: $\frac{x-3}{x+1} = mx+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = (mx+1)(x+1) \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + mx + 4 = 0 \quad (*) \\ x \neq -1 \end{cases}$$

Để đường thẳng $y = mx+1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ có hai

$$\text{nghiệm phân biệt khác } -1 \text{ hay } \begin{cases} \Delta > 0 \\ m(-1)^2 + m(-1) + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 16m > 0 \\ 4 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \in (-\infty; 0) \cup (16; +\infty).$$

Câu 88. Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d là: $\frac{x-2}{x} = 2x+6 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0 \quad (x \neq 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Suy ra đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $M_1(-2; 2), M_2\left(-\frac{1}{2}; 5\right)$.

Ta có $d(M; d) \geq 0, \forall M \Rightarrow \min d(M; d) = 0$ khi $M \in d$.

$$\text{Mà } M \in (C) \Rightarrow M = d \cap (C) \Rightarrow \begin{cases} M(-2; 2) \\ M\left(-\frac{1}{2}; 5\right) \end{cases}$$

$$\text{Với } M(-2; 2) \Rightarrow a = -2, b = 2 \Rightarrow (4a+5)^2 + (2b-7)^2 = 18.$$

$$\text{Với } M\left(-\frac{1}{2}; 5\right) \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = 5 \Rightarrow (4a+5)^2 + (2b-7)^2 = 18.$$

Câu 89. Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x}{1-x} = x-m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - mx + m = 0 \quad (*) \end{cases}$

Để có hai điểm phân biệt A, B thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\begin{cases} 1-m+m \neq 0 \\ m^2 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < 0 \end{cases}$$

Khi đó phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = m \end{cases}$$

Giả sử $A(x_1; x_1 - m), B(x_2; x_2 - m)$, suy ra: $\overline{OA}(x_1; x_1 - m), \overline{OB}(x_2; x_2 - m)$

Theo giả thiết góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng 60° suy ra:

$$\cos(\overline{OA}; \overline{OB}) = \cos 60^\circ \Leftrightarrow \frac{|x_1 x_2 + (x_1 - m)(x_2 - m)|}{\sqrt{x_1^2 + (x_1 - m)^2} \sqrt{x_2^2 + (x_2 - m)^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2x_1x_2 - m(x_1 + x_2) + m^2|}{\sqrt{x_1^2x_2^2 + (x_1x_2 - mx_2)^2 + x_1^2(x_1x_2 - m)^2 + [(x_1 - m)(x_2 - m)]^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2m - m^2 + m^2|}{\sqrt{m^2 + (m - mx_2)^2 + (m - mx_1)^2 + [x_1x_2 - m(x_1 + x_2) + m^2]^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2m|}{\sqrt{m^2 + (m - mx_2)^2 + (m - mx_1)^2 + [m - m^2 + m^2]^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{2 + (1 - x_2)^2 + (1 - x_1)^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 + (1 - x_2)^2 + (1 - x_1)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) = 12$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = -2 \end{cases}$$

Câu 90. Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) :

$$\frac{2x}{x-1} = x - m + 2 \Leftrightarrow x^2 - (m+1)x + m - 2 = 0 \quad (*) \quad (\text{vì } x=1 \text{ không phải là nghiệm}).$$

Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt:

$\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

$$\Leftrightarrow \Delta = (m+1)^2 - 4(m-2) = (m-1)^2 + 8 > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Theo định lý Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m+1 \\ x_1 \cdot x_2 = m-2 \end{cases}$

Khi đó $A(x_1; x_1 - m + 2), B(x_2; x_2 - m + 2)$.

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (x_2 - m + 2 - x_1 + m - 2)^2} = \sqrt{2(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{2} \sqrt{(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2}.$$

$$= \sqrt{2} \sqrt{(m-1)^2 + 8} \geq 4.$$

AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB = 4 \Leftrightarrow m = 1$.

Câu 91. Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$$\frac{x^2 + 3}{x+1} = 2x + 2m \Leftrightarrow x^2 + 2(1+m)x + 2m - 3 = 0 \quad (1), (x \neq -1).$$

Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (1+m)^2 - (2m-3) > 0 \\ (-1)^2 + 2(1+m) \cdot (-1) + 2m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4 > 0, \forall m \\ -4 \neq 0 \end{cases}.$$

Khi đó, gọi $A(x_1; 2x_1 + 2m); B(x_2; 2x_2 + 2m)$

Hoành độ trung điểm của AB là $x_I = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{2+2m}{2} = -m-1$.

Câu 92. Phương trình hoành độ giao điểm: $2x + m = \frac{x+3}{x+1}$

$$\Leftrightarrow (2x+m)(x+1) = x+3 \text{ (do } x=-1 \text{ không là nghiệm)}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + (m+1)x + m - 3 = 0 \quad (1).$$

Để có hai giao điểm thì pt(1) phải có hai nghiệm phân biệt. Điều này tương đương với

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 25 > 0 \text{ (luôn đúng)}.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Giả sử $M(x_1; 2x_1 + m), N(x_2; 2x_2 + m)$

Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned} MN^2 &= 5(x_1 - x_2)^2 = 5\left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right] = 5\left[\left(\frac{m+1}{2}\right)^2 - 4\frac{m-3}{2}\right] = \frac{5}{4}\left[(m-3)^2 + 14\right] \geq \frac{5}{4} \cdot 14 = \frac{35}{2}. \{ \\ &= \frac{5}{4}\left[(m-3)^2 + 16\right] \geq \frac{5}{4} \cdot 16 = 20. \} \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $m = 3$ nên MN nhỏ nhất khi $m = 3$.

Câu 93. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Để thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $d_1: x = -1$ và tiệm cận ngang $d_2: y = 2$.

$$\text{Do } M \in (H) \Rightarrow M\left(x_0; \frac{2x_0+3}{x_0+1}\right).$$

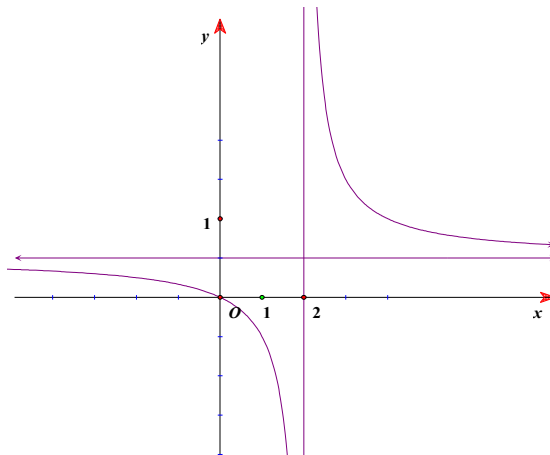
$$\text{Xét } d(M, d_1) + d(M, d_2) = |x_0 + 1| + \left|\frac{2x_0+3}{x_0+1} - 2\right| = |x_0 + 1| + \left|\frac{1}{x_0+1}\right| \geq 2.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } |x_0 + 1| = \left|\frac{1}{x_0+1}\right| \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{cases}.$$

Theo đề bài, ta có $x_0 < 0$ nên nhận $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 1$.

Vậy $x_0 + y_0 = -1$.

Câu 94. Chọn B



Hàm số $y = \frac{x}{x-2}$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Gọi $A\left(a; \frac{a}{a-2}\right)$ và $B\left(b; \frac{b}{b-2}\right)$ là hai điểm thuộc hai nhánh của (C) ($a < 2 < b$).

$$\text{Ta có: } \overline{AB} = \left(b-a; \frac{b}{b-2} - \frac{a}{a-2}\right) = \left(b-a; \frac{b-a}{(b-2)(2-a)}\right).$$

Áp dụng BĐT Côsi ta có: $(b-2)(2-a) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$.

$$\text{Suy ra: } AB^2 = (b-a)^2 + \frac{(b-a)^2}{[(b-2)(2-a)]^2} \geq (b-a)^2 + \frac{64}{(b-a)^2} \geq 16$$

$\Rightarrow AB \geq 4$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = 2 - \sqrt{2}$ và $b = 2 + \sqrt{2}$.

Vậy $AB_{\min} = 4$.

Dạng 3.7 Bài toán tương giao của đường thẳng với hàm số khác (chứa tham số)

Câu 95. Chọn A

$$\text{Xét phương trình } \frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} = |x+2| - x + m$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} - |x+2| + x = m \quad (1)$$

$$\text{Hàm số } p(x) = \frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} - |x+2| + x = \begin{cases} \frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} - 2 & \text{khi } x \geq -2 \\ \frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + 2x + 2 & \text{khi } x < -2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } p'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in (-2; +\infty) \setminus \{-1; 0; 1; 2\} \\ \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + 2 > 0, \forall x < -2 \end{cases}$$

nên hàm số $y = p(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 2)$, $(2; +\infty)$.

Mặt khác ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$.

Bảng biến thiên hàm số $y = g(x)$:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$g'(x)$		+	+	+	+	+	+
$g(x)$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	2

Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có 4 nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = p(x)$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m \geq 2$.

Câu 96. Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} = |x+2| - x - m \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} - |x+2| + x = -m \quad (1)$$

$$\text{Xét } f(x) = \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} - |x+2| + x, x \in D = \mathbb{R} \setminus \{-3; -2; -1; 0\}$$

$$\text{Ta có } f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} - 2, & x \in (-2; +\infty) \cup D = D_1 \\ \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} + 2x + 2, & x \in (-\infty; -2) \cup D = D_2 \end{cases}$$

$$\text{Có } f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2}, & \forall x \in D_1 \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + 2, & \forall x \in D_2 \end{cases}$$

Dễ thấy $f'(x) > 0, \forall x \in D_1 \cup D_2$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	-2	1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	+	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	2

Hai đồ thị cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 4 nghiệm phân biệt, từ bảng biến thiên ta có: $-m \geq 2 \Leftrightarrow m \leq -2$.

Câu 97. Chọn C

Điều kiện $x \neq -1; x \neq -2; x \neq -3$ và $x \neq -4$.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} + \frac{x+3}{x+4} &= |x+1| - x + m \\ \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) + \left(1 - \frac{1}{x+2}\right) + \left(1 - \frac{1}{x+3}\right) + \left(1 - \frac{1}{x+4}\right) &= |x+1| - x + m \\ \Leftrightarrow x - |x+1| + 4 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4}\right) &= m \end{aligned}$$

Đặt tập $D_1 = (-1; +\infty)$ và $D_2 = (-\infty; -4) \cup (-4; -3) \cup (-3; -2) \cup (-2; -1)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4}\right) = m, & \text{khi } x \in D_1 \\ 2x + 5 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4}\right) = m, & \text{khi } x \in D_2 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } f(x) = \begin{cases} 3 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4}\right), & \text{khi } x \in D_1 \\ 2x + 5 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4}\right), & \text{khi } x \in D_2 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} \right) > 0, & \text{khi } x \in D_1 \\ 2 + \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} \right) > 0, & \text{khi } x \in D_2 \end{cases}$$

Vậy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{nên ta có bảng biến thiên}$$

x	$-\infty$	-4	-3	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$		+	+	+	+	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	3

Do đó để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì $m \geq 3 \Rightarrow m \in [3; +\infty)$.

Câu 98. Chọn B

Xét phương trình hoành độ

$$\frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} = |x+1| - x - m \Leftrightarrow \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} - |x+1| + x = -m \quad (1)$$

Số nghiệm của (1) là số giao điểm của

$$F(x) = \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} - |x+1| + x = \begin{cases} \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} - 1, & x > -1 \\ \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + 2x + 1, & x < -1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}, & x \in (-1; +\infty) \setminus \{0; 1\} \\ \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + 2, & x \in (-\infty; -1) \setminus \{-2\} \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} F(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -2^-} F(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow -1^+} F(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow -1^-} F(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = +\infty$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+\infty$
$F'(x)$	+	+	+	+	+	
$F(x)$	$3 \nearrow +\infty$	$\nearrow +\infty$ $-\infty$	$\nearrow +\infty$ $-\infty$	$\nearrow +\infty$ $-\infty$	$\nearrow +\infty$ $-\infty$	$+\infty$

Để phương trình có 4 nghiệm thì $-m \leq 3 \Leftrightarrow m \geq -3$.

Câu 99. Xét phương trình $\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - 3x + 9} = 7 - m$ (*).

Đặt $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - 3x + 9}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có, $f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+9}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$	
y'		-	0	+
y	$+\infty$		$\sqrt{13}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \min_{\mathbb{R}} f(x) \leq 7 - m$.

$$\Rightarrow \sqrt{13} \leq 7 - m \Rightarrow m \leq 7 - \sqrt{13} \approx 3,39.$$

Mà $m \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow m \in \{1; 2; 3\}$.

Câu 100. $x^6 + 6x^4 - m^3x^3 + 3(5 - m^2)x^2 - 6mx + 10 = 0 \Leftrightarrow$

$$x^6 + 6x^4 - m^3x^3 + 15x^2 - 3m^2x^2 - 6mx + 10 = 0.$$

Đặt $u = x^2$ ($u \geq 0$); $v = mx \Rightarrow u^3 + 6u^2 - v^3 + 15u - 3v^2 - 6v + 10 = 0$

$$\Leftrightarrow u^3 + 6u^2 + 15u + 10 = v^3 + 3v^2 + 6v \Leftrightarrow (u+2)^3 + 3u + 2 = (v+1)^3 + 3v - 1$$

$$\Leftrightarrow (u+2)^3 + 3(u+2) = (v+1)^3 + 3(v+1) \quad (1).$$

Xét hàm $f(t) = t^3 + 3t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow f(u+2) = f(v+1) \Leftrightarrow u+2 = v+1 \Rightarrow x^2 + 2 = mx + 1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = m.$$

$$\text{Xét hàm } g(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}; g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in \left[\frac{1}{2}; 2\right] \\ x = -1 \notin \left[\frac{1}{2}; 2\right] \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{2}$	1	2
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{5}{2}$

Để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ thì $2 < m \leq \frac{5}{2}$.

Vậy $5a + 8b = 5 \cdot 2 + 8 \cdot \frac{5}{2} = 30$.

Câu 101. Ta có $\cos^3 x - 3\cos^2 x - m = 0 \Leftrightarrow \cos^3 x - 3\cos^2 x = m$.

Đặt $t = \cos x \Rightarrow t \in [-1; 1]$.

Yêu cầu bài toán trở thành tìm điều kiện của m để phương trình $t^3 - 3t^2 = m$ có nghiệm $t \in [-1; 1]$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t^2$, $t \in [-1; 1]$.

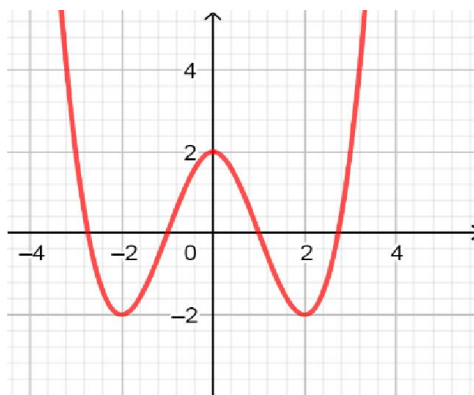
Ta có $f'(t) = 3t^2 - 6t$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \notin [-1; 1] \end{cases} \Rightarrow t = 0$ và $f'(-1) = -4$; $f'(1) = -2$; $f'(0) = 0$.

Phương trình $t^3 - 3t^2 = m$ có nghiệm $t \in [-1; 1] \Leftrightarrow \min_{t \in [-1; 1]} f(t) \leq m \leq \max_{t \in [-1; 1]} f(t) \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 0$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-4; -3; -2; -1; 0\}$.

Vậy có 5 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 102. Chọn A



Ta có $x^2(|x| - 3) + 2 - m^2(|m| - 3) = 0 \Leftrightarrow |x|^3 - 3|x|^2 + 2 = |m|^3 - 3|m|^2$ (*)

Xét hàm số: $y = f(x) = |x|^3 - 3|x|^2 + 2$ có đồ thị như hình vẽ:

Từ đồ thị của hàm số ta có: Phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow -2 < |m|^3 - 3|m|^2 < 2$

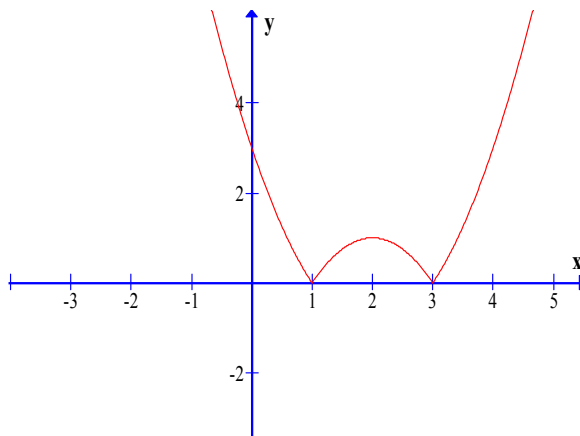
Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow |m|^3 - 3|m|^2 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m^2(|m| - 3) \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow m^2(|m| - 3) \in \{-1; 0; 1\} \Rightarrow \begin{cases} |m| = 3 \\ m = 0 \\ m = 1 \\ m = -1 \end{cases} \quad (l) \Rightarrow \begin{cases} m = \pm 3 \\ m = 0 \end{cases}$

Câu 103. Ta có: $\left(\frac{1}{5}\right)^{|x^2-4x+3|} = m^4 - m^2 + 1 \Leftrightarrow |x^2 - 4x + 3| = \log_{\frac{1}{5}}(m^4 - m^2 + 1) \quad (1)$

Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = \log_{\frac{1}{5}}(m^4 - m^2 + 1)$

Xét đồ thị $y = |x^2 - 4x + 3|$ có dạng như hình vẽ:



Dựa vào đồ thị ta thấy để phương trình (1) có 4 nghiệm khi hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = \log_{\frac{1}{5}}(m^4 - m^2 + 1)$ giao nhau tại 4 điểm phân biệt.

Khi đó $0 < \log_{\frac{1}{5}}(m^4 - m^2 + 1) < 1 \Leftrightarrow 1 > m^4 - m^2 + 1 > \frac{1}{5}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^4 - m^2 < 0 \\ m^4 - m^2 + \frac{1}{4} + \frac{11}{20} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2(m^2 - 1) < 0 \\ \left(m^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{20} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

Đồ thị nên có đánh dấu mốc trên trục tung $y = 1$ vì ta cần dùng mốc này để kết luận bài toán, cũng nên nói thêm $m^4 - m^2 + 1 > \frac{1}{5}$ luôn đúng

Câu 104. Cách 1 – Phan Văn Tài

Ta có: $\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1 \quad (1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ x^2 + mx + 2 = (2x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 3x^2 - (m - 4)x - 1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $-\frac{1}{2} \leq x_1 < x_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ \left(x_1 + \frac{1}{2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{2}\right) \geq 0 \\ \frac{x_1 + x_2}{2} > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m - 4)^2 + 12 > 0 \\ 2m - 9 \geq 0 \\ m - 4 > -3 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{9}{2}.$$

Vậy $m \geq \frac{9}{2}$.

Cách 2 - Nguyễn Văn Hậu

$$\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ x^2 + mx + 2 = (2x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 3x^2 + 4x - 1 = mx \end{cases} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow}$$

Vì $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên phương trình đã cho tương đương với phương trình sau:

$$\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2}, x \neq 0 \\ \frac{3x^2 + 4x - 1}{x} = m \end{cases}. \text{ Xét hàm số } f(x) = \frac{3x^2 + 4x - 1}{x} \text{ với } x \geq -\frac{1}{2}, x \neq 0.$$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2} > 0, \forall x \neq 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}$$

Bảng biến thiên

x	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	$\frac{9}{2}$	$+\infty$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình có hai nghiệm thực khi $m \geq \frac{9}{2}$.

Câu 105. Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và đường thẳng d là $x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m = -1$

$$\Leftrightarrow x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m + 1 = 0$$

Đặt $t = x^2, (t \geq 0)$, phương trình trở thành $t^2 - (3m + 2)t + 3m + 1 = 0$ (2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3m + 1 \end{cases}$$

Đường thẳng $d: y = -1$ cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2 khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $0 < t_1 < t_2 < 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 1 \neq 1 \\ 0 < 3m + 1 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\frac{1}{3} < m < 1 \end{cases}$$

Câu 106. Chọn D

$$m(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 3) + 2\sqrt{1-x^2} - 5 = 0 (*)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$$

Theo bất đẳng thức bunhiacovsky ta có: $t^2 = (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2 \leq (1+1)(1+x+1-x) = 4$

$$\Rightarrow 0 \leq t \leq 2$$

$$t^2 = (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \frac{t^2-2}{2} \quad (1) \text{ để phương trình có nghĩa } \sqrt{2} \leq t$$

$$(1) \Leftrightarrow 1-x^2 = \frac{t^4-4t^2+4}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{-t^4+4t^2}{4} \text{ để (1) có hai nghiệm thực phân biệt thì}$$

$$\begin{cases} \frac{-t^4+4t^2}{4} > 0 \\ t \geq \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2} \leq t < 2$$

$$\text{Lúc này pt (*)} \Leftrightarrow m(t+3) + t^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{7-t^2}{t+3}$$

$$\text{Đặt } f(t) = \frac{7-t^2}{t+3} \Rightarrow f'(t) = \frac{-t^2-6t-7}{(t+3)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 + \sqrt{2} \\ t = -3 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

t	$-\infty$	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$
$f'(t)$			-	
$f(t)$		$5(3-\sqrt{2})$		

$$\text{Suy ra } \frac{3}{5} < m \leq 5(3-\sqrt{2}) \Rightarrow b - \frac{5}{7}a = \frac{12-5\sqrt{2}}{7}$$

Câu 107. Chọn B

$$\text{Đặt } t = \sqrt[3]{2x^3+3x+m} \Rightarrow t^3 = 2x^3+3x+m$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} t^3 - 2x^3 = 3x + m \\ x^3 - 3x^2 - 2x + m - 3 + 2t = 0 \end{cases} \Rightarrow t^3 + 2t = (x+1)^3 + 2(x+1)$$

$$\text{Xét hàm số } y = f(u) = u^3 + 2u \Rightarrow f'(u) = 3u^2 + 2 > 0, \forall u \in \mathbb{R}.$$

Do đó hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow t = x+1 \Rightarrow 2x^3 + 3x + m = (x+1)^3 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 1 = -m$$

$$\text{Xét } g(x) = x^3 - 3x^2 - 1 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	-1	-5	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên suy ra $-5 < -m < -1 \Rightarrow 1 < m < 5 \Rightarrow m \in \{2; 3; 4\}$.

Vậy tổng các phân tử của S bằng 9.

Dạng 3.8 Định m để hàm số $f(u)$ thỏa mãn điều kiện cho trước khi biết $f(x)$

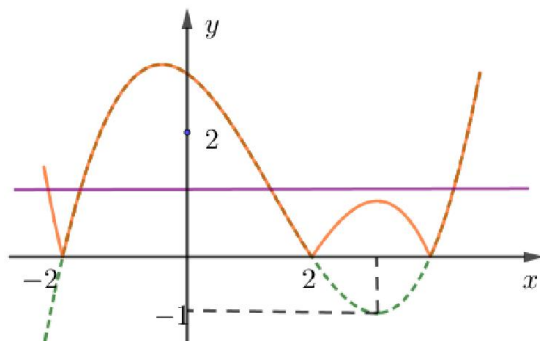
Câu 108. Chọn B

Đặt $t = \sin x \Rightarrow \forall x \in (0; \pi) \Rightarrow t \in (0; 1]$

Vậy phương trình trở thành $f(t) = m$. Dựa vào đồ thị hàm số suy ra $m \in [-1; 1]$.

Câu 109. Chọn C

Đặt $t = x^3 - 3x$ ta có phương trình $|f(t)| = \frac{3}{2}$ (*).



Từ đồ thị hàm số $y = |f(t)|$ và đường thẳng $y = \frac{3}{2}$ ta suy ra phương trình (*) có 4 nghiệm

$$t_1 < -2 < t_2 < 0 < t_3 < 2 < t_4$$

Xét hàm $t = x^3 - 3x$. Ta có $t' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
t'	$+$	0	$-$	0	$+$
t	$-\infty$	2	0	-2	$+\infty$

Với $t_1 < -2$ phương trình: $t_1 = x^3 - 3x$ cho ta 1 nghiệm.

Với $-2 < t_2 < 0$ phương trình: $t_2 = x^3 - 3x$ cho ta 3 nghiệm.

Với $0 < t_3 < 2$ phương trình: $t_3 = x^3 - 3x$ cho ta 3 nghiệm.

Với $2 < t_4$ phương trình: $t_4 = x^3 - 3x$ cho ta 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có tất cả 8 nghiệm. Chọn C

Câu 110. Chọn A

Đặt $t = g(x) = x^3 - 3x$ (1)

Ta có $g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x \pm 1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có với $t \in (-2; 2)$ cho ta 3 giá trị x thỏa mãn (1)

$t \in \{-2; 2\}$ cho ta 2 giá trị x thỏa mãn (1)

$t \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ cho ta 1 giá trị x thỏa mãn (1).

Phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \frac{2}{3}$ (2) trở thành

$$|f(t)| = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = \frac{2}{3} \\ f(t) = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta có:

+ Phương trình $f(t) = \frac{2}{3}$ có 3 nghiệm thỏa mãn $-2 < t_1 < t_2 < 2 < t_3 \Rightarrow$ có 7 nghiệm của phương trình (2).

+ Phương trình $f(t) = -\frac{2}{3}$ có 3 nghiệm thỏa mãn $t_4 < -2 < 2 < t_5 < t_6 \Rightarrow$ có 3 nghiệm của phương trình (2).

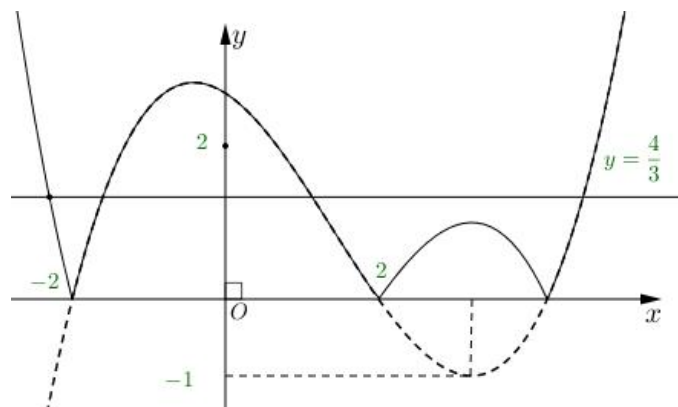
Vậy phương trình đã cho có 10 nghiệm.

Câu 111. Chọn D

Đặt $t = x^3 - 3x \Rightarrow t' = 3x^2 - 3$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
t'	$+$	0	$-$	0	$+$
t	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Khi đó $|f(t)| = \frac{4}{3}$ (1)



Dựa vào đồ thị hàm số $|f(t)|$ ta thấy phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $t_1 < -2$, $-2 < t_2 < 0$, $0 < t_3 < 2$, $t_4 > 2$.

Mỗi nghiệm t của phương trình (1), ta thay vào phương trình $t = x^3 - 3x$ để tìm nghiệm x .

Khi đó

+ $t_1 < -2 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 1 nghiệm.

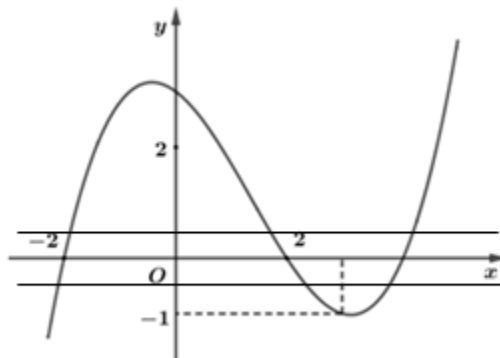
+ $-2 < t_2 < 0 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 3 nghiệm.

+ $0 < t_3 < 2 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 3 nghiệm.

+ $t_4 > 2 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \frac{4}{3}$ có 8 nghiệm.

Câu 112. Chọn B



$$\text{Ta có } |f(x^3 - 3x)| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x^3 - 3x) = \frac{1}{2} & (1) \\ f(x^3 - 3x) = -\frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

$$+) (1) \Leftrightarrow f(x^3 - 3x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x = \alpha_1 (-2 < \alpha_1 < 0) \\ x^3 - 3x = \alpha_2 (0 < \alpha_2 < 2) \\ x^3 - 3x = \alpha_3 (\alpha_3 > 2) \end{cases}$$

$$+) (2) \Leftrightarrow f(x^3 - 3x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x = \alpha_4 (x_4 < -2) \\ x^3 - 3x = \alpha_5 (\alpha_5 > 2) \\ x^3 - 3x = \alpha_6 (\alpha_6 > 2) \end{cases}$$

Xét hàm số $y = x^3 - 3x$, $D = \mathbb{R}$

Ta có $y' = 3x^2 - 3$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗ 2		↘ -2		↗ $+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có

Phương trình: $x^3 - 3x = \alpha_1$ có 3 nghiệm.

Phương trình: $x^3 - 3x = \alpha_2$ có 3 nghiệm.

Mỗi phương trình $x^3 - 3x = \alpha_3$, $x^3 - 3x = \alpha_4$, $x^3 - 3x = \alpha_5$, $x^3 - 3x = \alpha_6$ đều có một nghiệm

Từ đó suy ra phương trình $|f(x^2 - 3x)| = \frac{1}{2}$ có 10 nghiệm.

Câu 113. $2f(x+2019) - m = 0 \Leftrightarrow f(x+2019) = \frac{m}{2} \quad (*)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x) = f(x+2019)$ như sau:

x	$-\infty$	-2021		-2019		-2017		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$							$+\infty$

Phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt khi $-2 < \frac{m}{2} < 1 \Leftrightarrow -4 < m < 2$.

Câu 114. Đặt $t = x^2 + 2x - 2$. Với $x \in [0; 1] \Rightarrow t \in [-2; 1]$

Phương trình $f(x^2 + 2x - 2) = 3m + 1$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 1]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = 3m + 1$ có nghiệm thuộc $[-2; 1] \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq m \leq 1$.

Câu 115. Đặt $t = e^x$. Với $x \in (0; \ln 2) \Rightarrow t \in (1; 2)$

Phương trình $f(e^x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \ln 2)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(1; 2) \Leftrightarrow -3 < m < 0$.

Câu 116. Đặt $\ln^2 x = t$ với $x \in (1; e]$ khi đó $t' = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} > 0 \forall x \in (1; e]$ nên $t \in (0; 1]$.

ycbt $\Leftrightarrow f(t) = m$ có nghiệm trên nửa khoảng $(0; 1] \Leftrightarrow m \in [-1; 1]$.

Câu 117. $f(\pi^x) - \frac{m^2 - 1}{8} = 0 \Leftrightarrow f(\pi^x) = \frac{m^2 - 1}{8} \quad (1)$

Phương trình $\pi^x = k$ có nghiệm duy nhất khi $k > 0$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì đường thẳng $(d): y = \frac{m^2 - 1}{8}$ phải cắt đồ thị tại hai điểm

phân biệt có hoành độ dương $\Leftrightarrow -1 < \frac{m^2 - 1}{8} < 1 \Leftrightarrow -7 < m^2 < 9 \Leftrightarrow -3 < m < 3$

Theo yêu cầu bài toán thì có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 118. Ta có: $2.f(3 - 3\sqrt{-9x^2 + 30x - 21}) = m - 2019 \Leftrightarrow f(3 - 3\sqrt{-9x^2 + 30x - 21}) = \frac{m - 2019}{2}$.

Đặt $t = 3 - 3\sqrt{-9x^2 + 30x - 21}$, vì t xác định khi $x \in [1; \frac{7}{3}]$ nên $t \in [-3; 3]$.

Khi đó phương trình đã cho có nghiệm khi $\min_{[-3; 3]} f(t) \leq \frac{m - 2019}{2} \leq \max_{[-3; 3]} f(t)$.

Dựa vào đồ thị, ta có $-5 \leq \frac{m - 2019}{2} \leq 1 \Rightarrow 2009 \leq m \leq 2021 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{2009; 2010; \dots; 2021\}$.

Vậy có 13 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 119. Phương trình $f(\sqrt{4x-x^2}-1)=m$ có điều kiện $0 \leq x \leq 4$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$4x-x^2$		0	4	0	

Từ bảng biến thiên suy ra, với $0 \leq x \leq 4$ thì $-1 \leq \sqrt{4x-x^2}-1 \leq 1$. Đặt $t = \sqrt{4x-x^2}-1$, $-1 \leq t \leq 1$. (Có thể biến đổi $t = \sqrt{4-(x-2)^2}-1 \Rightarrow -1 \leq t \leq 1$).

Phương trình đã cho trở thành $f(t)=m$ (1). Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $t \in [-1;1]$
 $\Leftrightarrow -4 \leq m \leq 0$.

Câu 120. Đặt $t = |x+m| \geq 0$

Với $t=0 \Rightarrow x=m$

Với mỗi giá trị $t > 0$ sẽ ứng với 2 giá trị x

Ta có phương trình: $f(t)=m$ ($t \geq 0$) (*)

Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì (*) có 2 nghiệm phân biệt dương

Từ đồ thị của hàm số $y=f(t)$ trên miền $t \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{4} \\ m = -1 \end{cases}$

Vậy có 1 giá trị nguyên thỏa mãn

Câu 121. Đặt $t = g(x) = \sqrt{4-x^2}$ với $x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{3}]$.

Suy ra: $g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in [-\sqrt{2}; 3]$.

Ta có:

$g(0) = 2$, $g(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, $g(\sqrt{3}) = 1$.

Mà hàm số $g(x)$ liên tục trên $[-\sqrt{2}; \sqrt{3}]$

Suy ra, $t \in (1; 2]$.

Từ đồ thị, phương trình $f(t)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(1; 2]$ khi $m \in (-1; 3]$.

Câu 122. Chọn C

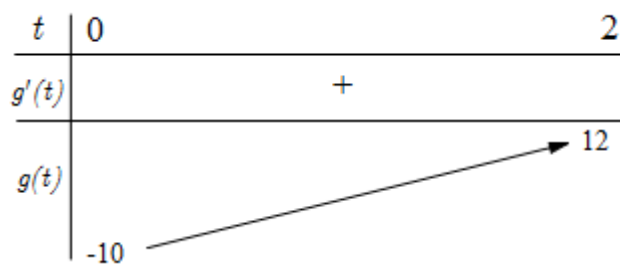
Đặt $t = \frac{x}{2} + 1$, khi $-2 \leq x \leq 2$ thì $0 \leq t \leq 2$.

Phương trình đã cho trở thành $\frac{1}{3}f(t) + 2t - 2 = m \Leftrightarrow f(t) + 6t - 6 = 3m$.

Xét hàm số $g(t) = f(t) + 6t - 6$ trên đoạn $[0; 2]$.

Ta có $g'(t) = f'(t) + 6$. Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ nên $f'(t) > 0, \forall t \in (0; 2) \Rightarrow g'(t) > 0, \forall t \in (0; 2)$ và $g(0) = -10$; $g(2) = 12$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(t)$ trên đoạn $[0; 2]$



Phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $[-2; 2]$ khi và chỉ khi phương trình $g(t) = 3m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 2]$ hay $-10 \leq 3m \leq 12 \Leftrightarrow -\frac{10}{3} \leq m \leq 4$.

Mặt khác m nguyên nên $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 8 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 123. Từ hình vẽ, đặt $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$). Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ O nên $d = 0$.

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} -a + b - c = 2 \\ a + b + c = -2 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \end{cases}. \text{ Do đó } f(x) = x^3 - 3x.$$

Đặt $t = \cos x, x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \Rightarrow t \in (-1; 0] \Rightarrow f(\cos x) = f(t) = t^3 - 3t$ với $t \in (-1; 0]$.

$f'(t) = 3t^2 - 3 < 0, \forall t \in (-1; 0] \Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $(-1; 0] \Rightarrow 2f(t) \in [2f(0); 2f(-1))$

hay $2f(t) \in [0; 4)$. Đặt $u = \sqrt{2f(t)} \Rightarrow u \in [0; 2) \Rightarrow m = f(u) = u^3 - 3u$ với $u \in [0; 2)$.

Ta có $f'(u) = 3u^2 - 3 \Rightarrow f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 1 \in [0; 2)$.

Bảng biến thiên của $f(u)$.

u	0	1	2
$f'(u)$	-	0	+
$f(u)$	0	-2	2

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -2 \leq m < 2$.

$$\Rightarrow \begin{cases} m \in [-2; 2) \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1\}.$$

Câu 124. Chọn B

Từ đồ thị hàm số và phương trình $f(x) = 1$ có ba số thực a, b, c thỏa $-1 < a < 1 < b < 2 < c$ sao cho $f(a) = f(b) = f(c) = 1$. Do đó,

$$f(f(x)) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a \\ f(x) = b \\ f(x) = c \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có:

Do $-1 < a < 1$ nên đường thẳng $y = a$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt. Do đó, $f(x) = a$ có 3 nghiệm phân biệt.

Ta lại có, $1 < b < 2$ nên đường thẳng $y = b$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt khác. Do đó, $f(x) = b$ có 3 nghiệm phân biệt khác các nghiệm trên.

Ngoài ra, $2 < c$ nên đường thẳng $y = c$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 1 điểm khác các điểm trên. Hay $f(x) = c$ có 1 nghiệm khác các nghiệm trên.

Từ đó, số nghiệm của phương trình $f(f(x)) = 1$ là $m = 7$.

Câu 125. Vì: $x^2 + 1 \geq 2|x| \Rightarrow \frac{2|x|}{x^2 + 1} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{2x}{x^2 + 1} \leq 1$

Từ đồ thị thấy

$$x \in [-1; 1] \Rightarrow f(x) \in [-2; 2]$$

$$x \in [-2; 2] \Rightarrow f(x) \in [-2; 2]$$

Xét phương trình

$$f\left(f\left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)\right) = m. \text{ Đặt } t = \frac{2x}{x^2 + 1}; u = f\left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right).$$

$$\text{Vì } t \in [-1; 1] \Rightarrow u \in [-2; 2] \Rightarrow f(u) \in [-2; 2]$$

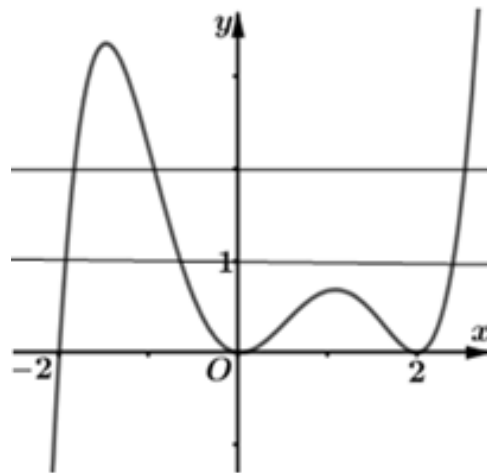
Vậy để phương trình ban đầu có nghiệm thì $f(u) = m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2; 2]$

nên $m \in [-2; 2]$.

Dạng 3.9 Một số bài toán tương giao liên quan đến đồ thị $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$ $f(u)$ khác.

Câu 126.

Lời giải



$$g(x) = f[f(x)] \Rightarrow g'(x) = f'(x) \cdot f'[f(x)].$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot f'[f(x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'[f(x)] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (-2; -1) \\ x = 0 \\ x = x_2 \in (1; 2) \\ x = 2 \\ f(x) = x_1 \in (-2; -1) \Leftrightarrow x = x_3 < -2 \\ f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2; 0; 2\} \\ f(x) = x_2 \in (1; 2) \Leftrightarrow x \in \{x_4; x_5; x_6\}, x_3 < x_4 < x_5 < 0 < 2 < x_6 \\ f(x) = 2 \Leftrightarrow x \in \{x_7; x_8; x_9\}, x_4 < x_7 < x_8 < x_5 < x_6 < x_9 \end{cases}$$

Kết luận phương trình $g'(x) = 0$ có 12 nghiệm phân biệt.

Câu 127. Nhận xét từ đồ thị $a < 0$.

Ta có $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d = 4ax(x-2)(x+1) = 4ax^3 - 4ax^2 - 8ax$.

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{4a}{3} \\ c = -4a \Rightarrow a + c = a - 4a = -3a > 0. \\ d = 0 \end{cases}$$

Câu 128. Chọn B

BBT của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		+	0	-	0	-	
y	$-\infty$		0		$f(3)$		$-\infty$

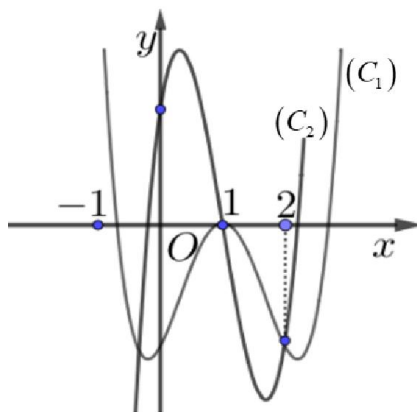
BBT của hàm số $y = f(|x|)$

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	0	-	
y	$-\infty$		$f(3)$		0		$f(3)$		$-\infty$

BBT của hàm số $y = |f(|x|)|$

x	$+\infty$		$f(3)$		$f(3)$		3
y		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		0		0		0	

Suy ra phương trình $|f(|x|)| = m$ có nhiều nhất là 6 nghiệm.



Câu 129.

Nhận xét: Đồ thị hàm $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại điểm x_0 thì x_0 là điểm cực trị của hàm $y = f(x)$. Dựa vào hai đồ thị đề bài cho, thì (C_1) là đồ thị hàm $y = f(x)$ và (C_2) là đồ thị hàm $y = f'(x)$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = me^x$ ta có:

$$f(x) = me^x \Leftrightarrow m = \frac{f(x)}{e^x}.$$

Đặt $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ ta có:

$$g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = x_0 \in (-1; 0) \end{cases}.$$

Dựa vào đồ thị của hai hàm số: $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ ta được:

x	0	1	2	
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	0	$\searrow \frac{f(2)}{e^2}$

Yêu cầu bài toán ta suy ra: $\frac{f(2)}{e^2} \leq m < 0$ (dựa vào đồ thị ta nhận thấy $f(0) = f(2) \approx -2$)

$$\Leftrightarrow -0,27 \leq m < 0.$$

Suy ra: $a = -0,27, b = 0$.

Vậy $a + b = -0,27$.

Câu 130. Chọn A

$$\text{Xét phương trình } [f'(x)]^2 = f(x) \cdot f''(x) \quad (1)$$

Do $f(x) = 0$ có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$) và $f'(x_3) = 0$ suy ra x_3 là một nghiệm của (1)

Ta có $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)^2, (a \neq 0)$

$$\text{Với } x \neq x_3 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)' = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \frac{2}{x - x_3} \right)' = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{(x-x_1)^2} - \frac{1}{(x-x_2)^2} - \frac{2}{(x-x_3)^2} = 0 \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, phương trình (1) có đúng một nghiệm $x = x_3$.

Câu 131. Chọn B

$$\text{Với } x \in \left[-1; \frac{5}{2}\right] \Rightarrow 2x-1 \in [-3; 4] \Rightarrow g(2x-1) \in [-3; 4] \Rightarrow t = 1 - g(2x-1) \in [-3; 4]$$

Vậy ta cần tìm m để phương trình $f(t) = m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-3; 4]$

$$\Leftrightarrow \min_{[-3; 4]} f(t) \leq m \leq \max_{[-3; 4]} f(t) \Leftrightarrow \min_{[-3; 4]} f(t) \leq m \leq 2 \text{ trong đó } \min_{[-3; 4]} f(t) \in (-1; 0). \text{ Vậy các số nguyên cần tìm}$$

$$\text{là } a \in \{0, 1, 2\}$$

Câu 132. Chọn B.

$$\text{Quan sát đồ thị ta thấy: } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 (-3 < x_1 < -2) \\ x = -1 \\ x = x_2 (1 < x_2 < 2) \\ x = x_3 (2 < x_3 < 3) \\ x = x_4 (4 < x_4 < 5) \end{cases}.$$

$$\text{Do đó: } f(g(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = x_1 (1) \\ g(x) = -1 (2) \\ g(x) = x_2 (3) \\ g(x) = x_3 (4) \\ g(x) = x_4 (5) \end{cases}$$

Phương trình (1) có đúng 1 nghiệm; Phương trình (2) có đúng 3 nghiệm; Phương trình (3) có đúng 3 nghiệm; Phương trình (4) có đúng 3 nghiệm; Phương trình (5) có đúng 1 nghiệm. Tất cả các nghiệm trên đều phân biệt nên phương trình $f(g(x)) = 0$ có đúng 11 nghiệm.

$$\text{Quan sát đồ thị ta thấy: } g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_5 (-2 < x_5 < -1) \\ x = x_6 (0 < x_6 < 1) \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } g(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x_5 (6) \\ f(x) = x_6 (7) \\ f(x) = 3 (8) \end{cases}$$

Phương trình (6) có 5 nghiệm; Phương trình (7) có 5 nghiệm; Phương trình (8) có 1 nghiệm.

Tất cả các nghiệm này đều phân biệt nên phương trình $g(f(x)) = 0$ có đúng 11 nghiệm.

Vậy tổng số nghiệm của hai phương trình $f(g(x)) = 0$ và $g(f(x)) = 0$ là 22 nghiệm.

Câu 133. Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$ ta có BBT

x	$-\infty$	-2	0	2	5	6	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$f(-2)$	$f(0)$	$f(2)$	$f(5)$	$f(6)$	$+\infty$

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x); y = 0; x = 0; x = 2$

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x); y = 0; x = 2; x = 5$

Gọi S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x); y = 0; x = 5; x = 6$

$$S_1 = -\int_0^2 f'(x) dx = f(0) - f(2); S_2 = \int_2^5 f'(x) dx = f(5) - f(2); S_3 = -\int_5^6 f'(x) dx = f(5) - f(6)$$

Từ đồ thị ta thấy $S_2 > S_1 \Rightarrow f(5) - f(2) > f(0) - f(2) \Rightarrow \boxed{f(5) > f(0)}$

và $S_1 + S_3 < S_2 \Rightarrow f(0) - f(2) + f(5) - f(6) < f(5) - f(2) \Rightarrow \boxed{f(6) > f(0)}$

Khi đó ta có BBT chính xác (dạng đồ thị chính xác) như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	5	6	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$f(-2)$	$f(0)$	$f(2)$	$f(5)$	$f(6)$	$+\infty$

Vậy phương trình $f(x) = f(0)$ có 2 nghiệm thuộc đoạn $[-2; 6]$

Câu 134. Ta có: $g'(x) = f'(x)f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'[f(x)] = 0 \end{cases} (*)$.

Theo đồ thị hàm số suy ra.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a_1 \end{cases}, \text{ với } 2 < a_1 < 3.$$

$$f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, (1) \\ f(x) = a_1, (2) \end{cases}.$$

Phương trình (1): $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khác nghiệm phương trình (*).

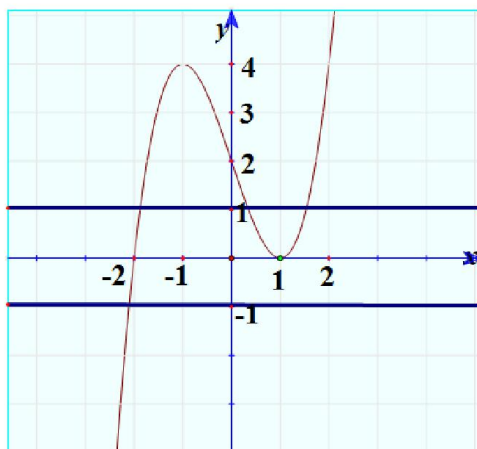
Phương trình (2): $f(x) = a_1$ có 3 nghiệm phân biệt khác nghiệm phương trình (1) và phương trình (*).

Vậy phương trình ban đầu có 8 nghiệm phân biệt.

Câu 135. Nhìn vào đồ thị hàm số đạt cực trị tại $x = 1; x = -1$. Hay $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

Ta có $g'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x))$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ f(x) = 1 \\ f(x) = -1 \end{cases}$$



Dựa vào đồ thị ta có:

+ đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số tại 3 điểm hay phương trình $f(x) = 1$ có 3 nghiệm.

+ đường thẳng $y = -1$ cắt đồ thị hàm số tại 1 điểm hay phương trình $f(x) = -1$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 6 nghiệm.

Dạng 4. Bài toán tiếp tuyến

Câu 136. Xét hàm $y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow f'(1) = 9$.

Ta có $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow M_0(1; 2)$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(1; 2)$ có dạng:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - 2 = 9(x - 1) \Leftrightarrow y = 9x - 7.$$

Câu 137. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ta có $y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{-x+3}{x-1}$.

Ta có $x_0 = 0$ thì $y_0 = -3$ nên $M(0; -3)$.

Mà $y'(0) = -2$.

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(0; -3)$ là $y = -2x - 3$.

Câu 138. Chọn C

Ta có hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến là nghiệm của phương trình $x^3 + 3x = 4 \Leftrightarrow x = 1$

Ta có $y' = 3x^2 + 3$

Hệ số góc của tiếp tuyến là $k = y'(1) = 6$.

Câu 139. Chọn B

Ta có $y' = \frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow y'(1) = \frac{1}{2}$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(1; 0)$ là

$$y = \frac{1}{2}(x-1) + 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Câu 140. Chọn C

$$\text{ĐK: } x \neq 1; y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

Đường thẳng d qua A có hệ số góc k là $y = k(x-a) + 1$

$$d \text{ tiếp xúc với } (C) \Leftrightarrow \begin{cases} k(x-a) + 1 = \frac{-x+2}{x-1} (1) \\ k = \frac{-1}{(x-1)^2} (2) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

$$\text{Thế (2) vào (1) ta có: } \frac{-1}{(x-1)^2}(x-a) + 1 = \frac{-x+2}{x-1} \Leftrightarrow -x+a+x^2-2x+1 = -x^2+3x-2, x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + a + 3 = 0 (3)$$

Để đồ thị hàm số có một tiếp tuyến qua A thì hệ là số nghiệm của hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ phương trình (3) có nghiệm duy nhất khác 1

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + a + 3 = 0 (3) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 9 - 2a - 6 = 0 \\ 1 - 6 + a + 3 \neq 0 \\ \Delta' = 9 - 2a - 6 > 0 \\ 2 - 6 + a + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\text{Cách 2: TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{1\}; y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

Giả sử tiếp tuyến đi qua $A(a;1)$ là tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = x_0$, khi đó phương trình tiếp tuyến có

$$\text{dạng: } y = \frac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{-x_0+2}{x_0-1} (d)$$

Vì $A \in d$ nên thay tọa độ điểm A vào phương trình đường thẳng d ta có:

$$1 = \frac{-1}{(x_0-1)^2}(a-x_0) + \frac{-x_0+2}{x_0-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^2 - 6x_0 + 3 + a = 0 (1) \\ x_0 \neq 1 \end{cases}$$

Để chỉ có một tiếp tuyến duy nhất đi qua A thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 9 - 2a - 6 = 0 \\ 1 - 6 + a + 3 \neq 0 \\ \Delta' = 9 - 2a - 6 > 0 \\ 2 - 6 + a + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ a = 1 \end{cases}$$

Câu 141. Chọn D

Phương trình đường thẳng MN có dạng $\frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{y-y_2}{y_1-y_2} \Rightarrow$ hệ số góc của đường thẳng MN là

$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 3.$$

Vậy tiếp tuyến tại $A\left(x_0; \frac{1}{8}x_0^4 - \frac{7}{4}x_0^2\right)$ có hệ số góc $k = 3 \Leftrightarrow f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_0^3 - \frac{7}{2}x_0 = 3$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x_0^3 - \frac{7}{2}x_0 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \\ x_0 = -2 \end{cases}.$$

+) Với $x_0 = -1 \Rightarrow A\left(-1; -\frac{13}{8}\right) \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y = 3x + \frac{11}{8}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2 = 3x + \frac{11}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2 - 3x - \frac{11}{8} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 + \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow$

$A\left(-1; -\frac{13}{8}\right)$ thỏa mãn đề bài.

+) Với $x_0 = 3 \Rightarrow A\left(3; -\frac{171}{8}\right) \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y = 3x - \frac{195}{8}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2 = 3x - \frac{195}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2 - 3x + \frac{195}{8} = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2(x^2 + 6x + 13) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow$ Tiếp tuyến cắt đồ thị tại một điểm $\Rightarrow A\left(3; -\frac{171}{8}\right)$ Không thỏa mãn.

+) Với $x_0 = -2 \Rightarrow A(-2; -5) \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến: $y = 3x + 1$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2 = 3x + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2 - 3x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2(x^2 - 4x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 + \sqrt{6} \\ x = 2 - \sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow A(-2; -5) \text{ Thỏa mãn đề bài.}$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 142. Chọn D

Ta có $A \in (C) \Rightarrow A\left(t; \frac{1}{4}t^4 - \frac{7}{2}t^2\right)$

$$y' = x^3 - 7x \Rightarrow y'(t) = t^3 - 7t$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại A là

$$y = (t^3 - 7t)(x - t) + \frac{1}{4}t^4 - \frac{7}{2}t^2 \Leftrightarrow y = (t^3 - 7t)x - \frac{3}{4}t^4 + \frac{7}{2}t^2$$

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2 = (t^3 - 7t)x - \frac{3}{4}t^4 + \frac{7}{2}t^2$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 14x^2 - 4(t^3 - 7t)x + 3t^4 - 14t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - t)^2(x^2 + 2tx + 3t^2 - 14) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ x^2 + 2tx + 3t^2 - 14 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Tiếp tuyến cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1); N(x_2; y_2)$ khác A khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác t

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - (3t^2 - 14) > 0 \\ t^2 + 2t^2 + 3t^2 - 14 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{7} < t < \sqrt{7} \\ t \neq \pm \frac{\sqrt{21}}{3} \end{cases} \quad (2)$$

Khi đó

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2t \\ x_1 x_2 = 3t^2 - 14 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} y_1 = (t^3 - 7t)x_1 - \frac{3}{4}t^4 + \frac{7}{2}t^2 \\ y_2 = (t^3 - 7t)x_2 - \frac{3}{4}t^4 + \frac{7}{2}t^2 \end{cases} \Rightarrow y_1 - y_2 = (t^3 - 7t)(x_1 - x_2)$$

$$\text{Ta có } y_1 - y_2 = 6(x_1 - x_2) \Leftrightarrow (t^3 - 7t)(x_1 - x_2) = 6(x_1 - x_2)$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 7t - 6 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t^2 - t - 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t+1=0 \\ t^2 - t - 6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \quad (n) \\ t=-2 \quad (n) \text{ (do (2))} \\ t=3 \quad (l) \end{cases}$$

$$\square \text{ Với } t = -1 \text{ ta có } A\left(-1; -\frac{13}{4}\right)$$

$$\square \text{ Với } t = -2 \text{ ta có } A(-2; -10)$$

$\Rightarrow$ có hai điểm thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 143. Chọn D

Cách 1:

Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại A.

$$y' = \frac{4}{3}x^3 - \frac{28}{3}x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{7} \\ x = 0 \\ x = \sqrt{7} \end{cases}$$

Do tiếp tuyến tại A cắt (C) tại M, N $\Rightarrow x_A \in (-\sqrt{7}; \sqrt{7})$.

$$\text{Ta có: } y_1 - y_2 = 8(x_1 - x_2) \Rightarrow \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 8 \Rightarrow k_d = 8. \text{ Suy ra } \frac{4}{3}x_A^3 - \frac{28}{3}x_A = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 3 \\ x_A = -1 \\ x_A = -2 \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện: $\begin{cases} x_A = -1 \\ x_A = -2 \end{cases}$. Vậy có 2 điểm A thỏa ycbt.

Cách 2:

Gọi $A\left(a; \frac{1}{3}a^4 - \frac{14}{3}a^2\right)$ là tọa độ tiếp điểm

$$\text{Phương trình tiếp tuyến tại A là } d: y = \left(\frac{4}{3}a^3 - \frac{28}{3}a\right)(x - a) + \frac{1}{3}a^4 - \frac{14}{3}a^2$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$$\frac{1}{3}x^4 - \frac{28}{3}x^2 = \left(\frac{4}{3}a^3 - \frac{28}{3}a\right)(x - a) + \frac{1}{3}a^4 - \frac{14}{3}a^2$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2(x^2+2ax+3a^2-14)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=a \\ x^2+2ax+3a^2-14=0(1) \end{cases}$$

Để (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác a

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 6a^2 - 14 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-\sqrt{7}; \sqrt{7}) \setminus \left\{ \pm \frac{\sqrt{7}}{3} \right\}.$$

Theo đề bài: $y_1 - y_2 = 8(x_1 - x_2) \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}a^3 - \frac{28}{3}a \right)(x_1 - x_2) = 8(x_1 - x_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}a^3 - \frac{28}{3}a = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=-1 \\ a=-2 \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện: $\begin{cases} a=-1 \\ a=-2 \end{cases}$. Vậy có 2 điểm A thỏa đề bài.

Câu 144. Ta có $y' = 4 - 4\sin 2x$.

Khi đó, hoành độ của các điểm trên (C) mà tại đó tiếp tuyến của (C) song song hoặc trùng với trục hoành là nghiệm của phương trình:

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4 - 4\sin 2x = 0$$

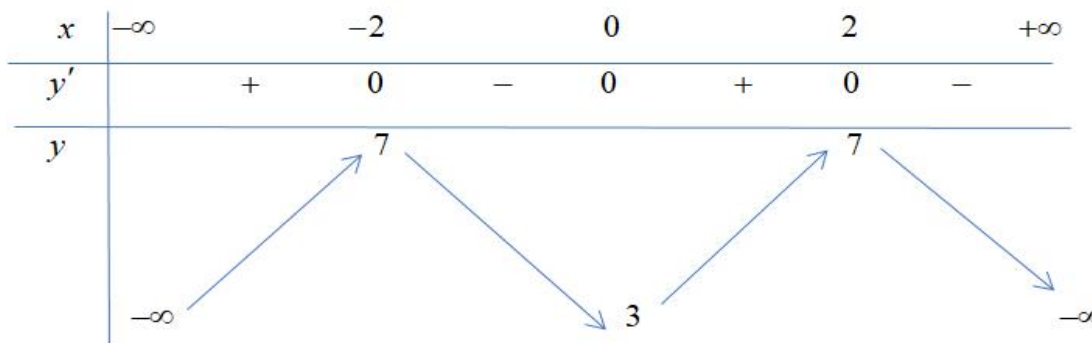
$$\Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 145. Gọi x_0 là hoành độ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số. Khi đó hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là: $y'(x_0) = 0$.

Vậy ta loại đáp án A, C, D và chọn đáp án **B**.

Câu 146. Ta có: $y' = -x^3 + 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 2 \end{cases}$.

BBT:



Câu 147. Chọn A

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi $m(1-m)+2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

Khi đó đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = m(\Delta)$.

(Δ) tiếp xúc với parabol $y = x^2 + 7 \Leftrightarrow m = 7$.

Câu 149. Có $y' = \frac{-ab-2}{(ax-2)^2}$.

Do $A(1; -2)$ thuộc đồ thị hàm số nên $\frac{1+b}{a-2} = -2 \Leftrightarrow b = 3 - 2a$.

Do tiếp tuyến tại $A(1; -2)$ song song với $d: 3x + y - 4 = 0$ nên $y'(1) = -3 \Leftrightarrow \frac{-ab-2}{(a-2)^2} = -3$

Thay $b = 3 - 2a$ ta được phương trình $-a(3 - 2a) - 2 = -3(a - 2)^2 \Leftrightarrow 5a^2 - 15a + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$.

Với $a = 2 \Rightarrow b = -1$ (loại, do $ab \neq -2$)

Với $a = 1 \Rightarrow b = 1$. Phương trình tiếp tuyến tại $A(-1; 2)$ là $y = -3(x + 1) + 2$ song song với d . Vậy $a = 1$, $b = 1$, suy ra $a - 3b = -2$.

Câu 150. Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m - 3)x - 1$ là

$$y' = 3x^2 - 2mx + 2m - 3$$

Vì hệ số góc dương với mọi x nên ta có

$$y' = 3x^2 - 2mx + 2m - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 6m + 9 < 0 \Leftrightarrow (m - 3)^2 < 0 \Rightarrow m \in \emptyset.$$

Câu 151. Từ đồ thị ta có hai tiếp tuyến vuông góc với trục Oy là $y = -1$; $y = -2$.

Câu 152. $y' = \frac{-2}{(x+1)^2}.$

Gọi $A(x_0; 1) \in (C)$ thì $\frac{1-x_0}{x_0+1} = 1 \Leftrightarrow x_0 = 0$.

Tiếp tuyến của (C) tại điểm A có phương trình: $y = y'(0)(x - 0) + y(0) = -2x + 1$.

Suy ra tiếp tuyến song song với $(d): y = -2x + 2$.

Câu 153. Điều kiện $m \neq 0$.

Phương trình tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số lần lượt là: $x + 2 = 0$ và $y - 1 = 0$. Phương

trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng $m - 2$ là: $(d): y = \frac{3x}{m^2} + \frac{m^2 - 6m + 6}{m^2}$. Đường

thẳng d cắt tiệm cận đứng của đồ thị hàm số tại điểm $A\left(-2; \frac{m-6}{m}\right)$ và cắt tiệm cận ngang của đồ thị hàm số tại điểm $B(2m - 2; 1)$

theo giả thiết ta có $2m - 2 + \frac{m-6}{m} = -5 \Rightarrow m = 1; m = -3$.

Vậy bằng tổng bình phương các phân tử của S bằng 10.

Câu 154. Tập xác định của hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

Ta có: $y' = \frac{-1}{(2x+3)^2} < 0, \forall x \in D$.

Mặt khác, ΔOAB cân tại $O \Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến là -1 .

Gọi tọa độ tiếp điểm $(x_0; y_0)$, với $x_0 \neq -\frac{3}{2}$.

Ta có: $y' = \frac{-1}{(2x_0+3)^2} = -1 \Leftrightarrow x_0 = -2 \vee x_0 = -1$.

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 1$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -x$ loại vì $A \equiv B \equiv O$.

Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -x - 2$ thỏa mãn.

Vậy $d: y = ax + b$ hay $d: y = -x - 2 \Rightarrow a = -1; b = -2 \Rightarrow a + b = -3$.

Câu 155. (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 nên với $x = 0$ có $f(0) = -2$

$$\Rightarrow \frac{b}{d} = -2 \Rightarrow b = -2d \quad (1).$$

Có $y = f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$ không xác định tại điểm duy nhất $x = -\frac{d}{c}$. Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ở trên

ta thấy hàm số $y = f'(x)$ không xác định tại điểm duy nhất $x = -1$. Vậy $-\frac{d}{c} = -1 \Rightarrow c = d \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} c = d \\ b = -2d = -2c \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{ax - 2c}{cx + c}$ và $f'(x) = \frac{ac + 2c^2}{(cx + c)^2} = \frac{a + 2c}{c(x + 1)^2}$.

Ta thấy đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục tung tại điểm $y = 3$ nên $x = 0 \Rightarrow f'(0) = 3$

$$\Rightarrow \frac{a + 2c}{c} = 3 \Rightarrow a = c \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{(x + 1)^2} \text{ và } f(x) = \frac{x - 2}{x + 1}$$

Giao điểm của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x) = \frac{x - 2}{x + 1}$ với trục hoành ứng với $y = 0 \Rightarrow x = 2$ và $f'(2) = \frac{1}{3}$

nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = \frac{1}{3}(x - 2) + 0 \Leftrightarrow x - 3y - 2 = 0$

Câu 156. Ta có $y' = -3x^2 + 6x - 1$; $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' + \frac{4}{3}x + \frac{11}{3}$. Suy ra phương trình đường thẳng đi qua

$$\text{hai điểm cực đại và cực tiểu là } \Delta: y = \frac{4}{3}x + \frac{11}{3}.$$

Do M, N là hai điểm di động trên đồ thị (C) của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - x + 4$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M và N luôn song song với nhau, nên ta xét trường hợp M, N là hai điểm cực trị của đồ thị, khi đó phương trình MN chính là phương trình đường thẳng Δ .

Thử trực tiếp ta được điểm $Q(1; 5) \in \Delta$, các điểm còn lại không thuộc Δ .

Câu 157. Chọn C

Tiệm cận đứng $d_1: x + 1 = 0$, tiệm cận ngang $d_2: y - 1 = 0 \Rightarrow$ tâm đối xứng là $I(-1; 1)$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M\left(a; \frac{a+2}{a+1}\right) \in (C)$ là: $y = \frac{-1}{(a+1)^2}(x - a) + \frac{a+2}{a+1} \quad (d)$.

$$\text{Khi đó } d(I, d) = \frac{\left| \frac{-1}{(a+1)^2}(-1 - a) + \frac{a+2}{a+1} \right|}{\sqrt{\frac{1}{(a+1)^4} + 1}} = \frac{\left| \frac{2}{a+1} \right|}{\sqrt{\frac{1}{(a+1)^4} + 1}} = \frac{2}{\sqrt{(a+1)^2 + \frac{1}{(a+1)^2}}} \leq \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Câu 158. $y = \frac{x^2 - 2mx + m}{x + m} = x - 3m + \frac{3m^2 + m}{x + m} \Rightarrow y' = 1 - \frac{3m^2 + m}{(x + m)^2}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục Ox .

$$\frac{x^2 - 2mx + m}{x + m} = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 2mx + m = 0 \quad (*) \quad (x \neq -m).$$

Để đồ thị hàm số đã cho cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến tại hai điểm đó vuông góc với nhau thì phương trình (*) phải có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác $-m$ và $y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m > 0 \\ f(-m) = 3m^2 + m \neq 0 \\ y'(x_1) \cdot y'(x_2) = \left(1 - \frac{3m^2 + m}{(x_1 + m)^2}\right) \left(1 - \frac{3m^2 + m}{(x_2 + m)^2}\right) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \\ m \neq 0 \\ m \neq -\frac{1}{3} \\ m = 0 \\ m = 5 \end{cases} \Leftrightarrow m = 5.$$

Câu 159.

Lời giải

Chọn B

$$y' = x^3 - 6x$$

Gọi $A(x_0; \frac{1}{4}x_0^4 - 3x_0^2)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến tại **A**. Phương trình tiếp tuyến tại A là đường thẳng

(d) có phương trình:

$$y = (x_0^3 - 6x_0)(x - x_0) + \frac{1}{4}x_0^4 - 3x_0^2$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C) là:

$$(x_0^3 - 6x_0)(x - x_0) + \frac{1}{4}x_0^4 - 3x_0^2 = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 \Leftrightarrow (x - x_0)^2(x^2 + 2x_0x + 3x_0^2 - 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = 0 \\ x^2 + 2x_0x + 3x_0^2 - 12 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

(d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt khác A khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác x_0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq \pm\sqrt{2} \\ -\sqrt{6} < x_0 < \sqrt{6} \end{cases} \quad (3)$$

Khi đó, phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ trong đó:

$$y_1 = (x_0^3 - 6x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{4}x_0^4 - 3x_0^2 \quad y_2 = (x_0^3 - 6x_0)(x_2 - x_0) + \frac{1}{4}x_0^4 - 3x_0^2$$

$$\Rightarrow y_1 - y_2 = (x_0^3 - 6x_0)(x_1 - x_2)$$

Từ giả thiết ta suy ra:

$$(x_0^3 - 6x_0)(x_1 - x_2) = 5(x_1 - x_2) \Leftrightarrow x_0^3 - 6x_0 = 5 \quad (\text{Vì } x_1 \neq x_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \\ x_0 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện (3) có hai giá trị x_0 thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \end{cases}$

Câu 160. Chọn B

Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = -\frac{d}{c} = -2$ làm tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = \frac{a}{c} = 2$ làm tiệm cận ngang.

Vậy $I(-2; 2)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận.

TXĐ: $D =$

$$y' = \frac{7}{(x+2)^2}$$

Gọi tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0)$ của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x+2}$ có dạng:

$$\Delta: y = y'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0 \text{ hay } \Delta: y = \frac{7}{(x_0+2)^2} \cdot (x - x_0) + \frac{2x_0-3}{x_0+2}$$

$$\text{Vì } \Delta \text{ đi qua } I(-2; 2) \Rightarrow 2 = \frac{7}{(x_0+2)^2} \cdot (-2 - x_0) + \frac{2x_0-3}{x_0+2}$$

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{-7}{(x_0+2)^2} \cdot (x_0+2) + \frac{2x_0-3}{x_0+2} \Leftrightarrow 2 = \frac{-7}{(x_0+2)} + \frac{2x_0-3}{x_0+2}$$

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{2x_0-10}{x_0+2} \Leftrightarrow 4 = -10, \text{ phương trình vô nghiệm.}$$

Vậy không tồn tại tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x+2}$ mà đi qua giao điểm của hai tiệm cận.