



QUAN HỆ Song Song



TÁC GIẢ
TOÁN TỪ TÂM



MỤC LỤC

Bài 1. ĐIỂM, ĐƯỜNG VÀ MẶT PHẪNG

A. Lý thuyết

1. Mặt phẳng.....	3
2. Điểm thuộc mặt phẳng.....	3
3. Hình biểu diễn của một hình không gian	4
4. Các tính chất thừa nhận	4
5. Các cách xác định mặt phẳng	5
6. Hình chóp và tứ diện.....	5

B. Các dạng bài tập

<i>↻</i> Dạng 1. Các tính chất được thừa nhận của hình học không gian	7
<i>↻</i> Dạng 2. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt cắt nhau	8
<i>↻</i> Dạng 3. Xác định giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng.....	11
<i>↻</i> Dạng 4. Ba điểm thẳng hàng – Ba đường đồng quy	14

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm	17
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai	18
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn.....	19

Bài 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A. Lý thuyết

1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian	21
2. Tính chất cơ bản về 2 đường thẳng song song.....	21

B. Các dạng bài tập

<i>↻</i> Dạng 1. Chứng minh hai đường song song	23
<i>↻</i> Dạng 2. Giao tuyến của 2 mặt chứa 2 đường thẳng song song.....	26
<i>↻</i> Dạng 3. Giao điểm sử dụng giao tuyến song song.....	29

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm	31
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai	32
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn.....	33

Bài 3. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG MẶT PHẪNG

A. Lý thuyết

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng trong không gian.....	35
2. Tính chất	35

B. Các dạng bài tập

<i>↻</i> Dạng 1. Chứng minh đường thẳng song song mặt phẳng.....	37
--	----



➤ Dạng 2. Giao tuyến của hai mặt chứa một đường song song với mặt.....	41
➤ Dạng 3. Thiết diện	44

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm	46
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai	48
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn.....	49

Bài 4. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

A. Lý thuyết

1. Định nghĩa	51
2. Tính chất.....	51
3. Định lý thales trong hình học không gian.....	52
4. Hình lăng trụ và hình hộp:.....	53
5. Hình chóp cụt.....	53

B. Các dạng bài tập

➤ Dạng 1. Chứng minh hai mặt song song.....	54
➤ Dạng 2. Tìm giao tuyến của 2 mặt, có 1 mặt song song với mặt khác.....	57
➤ Dạng 3. Định lý Thales trong không gian	59

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm	62
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai	64
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn.....	65

Bài 5. PHÉP CHIẾU SONG SONG

A. Lý thuyết

1. Phép chiếu song song.....	67
2. Tính chất của phép chiếu song song.	67
3. Hình biểu diễn của một số hình không gian trên mặt phẳng.....	67

B. Các dạng bài tập

➤ Dạng 1. Xác định ảnh qua phép chiếu song song.....	69
➤ Dạng 2. Xác định hình biểu diễn qua phép chiếu song song	71
➤ Dạng 3. Bài toán tổng hợp.....	73

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm	74
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai	76
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn.....	77



Chương 04

Bài 1.

ĐIỂM - ĐƯỜNG VÀ MẶT PHẪNG

A

Lý thuyết

1. Mặt phẳng

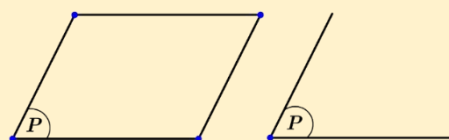


Định nghĩa:

» Hình ảnh mô phỏng trong thực tế ví dụ: mặt gương phẳng, mặt hồ phẳng lặng được xem là một phần của mặt phẳng.

** Chú ý :

- ✓ Mặt phẳng ko có bề dày và không bị giới hạn.
- ✓ Cách biểu diễn mặt phẳng lên mặt phẳng hình học: dùng hình bình hành hay một góc và ghi tên của mặt phẳng vào một góc của hình.
- ✓ Kí hiệu mặt phẳng:
 $mp(P), mp(Q), ...mp(\alpha), mp(\beta), ...$



2. Điểm thuộc mặt phẳng



Định nghĩa:

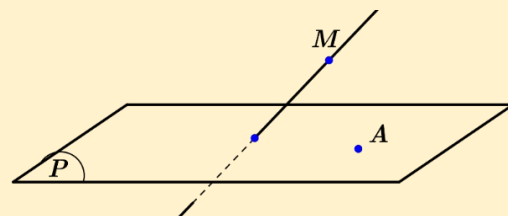
Cho điểm A và $mp(\alpha)$. Khi đó:

» Điểm A thuộc (α) hay A nằm trên (α) hay (α) chứa A hoặc đi qua A .

▪ Kí hiệu: $A \in (\alpha)$

» Điểm A nằm ngoài (α) hay (α) không chứa A hoặc không đi qua A .

▪ Kí hiệu: $A \notin (\alpha)$.





3. Hình biểu diễn của một hình không gian



Các nguyên tắc vẽ hình:

Khi vẽ một hình không gian lên bảng, lên giấy ta tuân thủ nguyên tắc sau:

- (1) Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.
- (2) Hình biểu diễn của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song, hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng cắt nhau.
- (3) Giữ nguyên quan hệ thuộc giữa điểm với đường thẳng.
- (4) Nét liền để vẽ đường nhìn thấy, nét đứt để vẽ đường bị che khuất.
- (5) Bảo toàn tỷ lệ giữa các đoạn thẳng song song, các đoạn thẳng cùng nằm trên một đường thẳng. Không bảo toàn về góc.
- (6) Một tam giác bất kỳ đều được coi là hình biểu diễn của tam giác có dạng tùy ý (vuông, cân, đều).
- (7) Hình bình hành là hình biểu diễn cho hình bình hành có dạng tùy ý (hình bình hành, vuông, chữ nhật, thoi) và kèm theo kí hiệu vuông, bằng nhau nếu là hình đặc biệt.

Các mặt phẳng:				
» Nhìn thấy	$(SAB), (SBC)$	$(SBC), (SCD)$	$(ABCD), (ADD'A'), (DCC'D')$	$(SAB), (SBC), (SCD)$
» Không nhìn thấy	$(SAC), (ABC)$	$(SAB), (SAD), (ABCD)$	$(A'B'C'D'), (ABB'A'), (BCC'B')$	$(SAD), (ABCD)$

4. Các tính chất thừa nhận

	Tính chất	Hình minh họa
01	☆ Có một và chỉ một đường thẳng đi qua 02 điểm phân biệt.	
02	☆ Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua 3 điểm không thẳng hàng. ▪ Kí hiệu: (ABC) .	
03	☆ Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó. $\begin{cases} A \in a \cap (\alpha) \\ B \in a \cap (\alpha) \end{cases} \Rightarrow AB \equiv a \subset (\alpha)$	



04	☆ Điểm M và đường thẳng AM đều nằm trong (ABC) vì M thuộc đường thẳng AB còn AM trùng với đường thẳng AB mà AB nằm trong (ABC).	
05	☆ Tồn tại 04 điểm không cùng thuộc 01 mặt phẳng.	
06	☆ Nếu hai mặt phẳng phân biệt có 01 điểm chung thì chúng còn có điểm chung khác nữa. $\Rightarrow$ Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng. $\Rightarrow$ Đường thẳng chung gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng.	
07	☆ Trong mỗi mặt phẳng, các kết quả của hình học phẳng đều đúng.	

5. Các cách xác định một mặt phẳng

	Mặt phẳng được xác định	Hình minh họa
01	☆ Khi biết nó đi qua 3 điểm không thẳng hàng cho trước. Kí hiệu: $mp(ABC)$ hoặc (ABC).	
02	☆ Khi biết nó đi qua một đường thẳng và một điểm không nằm trên đường thẳng đó. Kí hiệu: $mp(d; A)$ hoặc $mp(A; d)$.	
03	☆ Khi biết nó đi qua hai đường thẳng cắt nhau. Kí hiệu: $mp(a; b)$ hoặc $mp(b; a)$.	

6. Hình chóp và tứ diện



Định nghĩa:

Trong mặt phẳng (α) cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Lấy S nằm ngoài (α) .

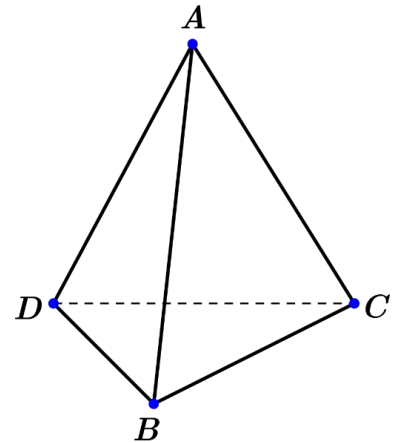
- » Lần lượt nối S với $A_1, A_2, ..., A_n$ được n tam giác: $\triangle SA_1A_2, \triangle SA_2A_3, ..., \triangle SA_nA_1$.
- » Hình gồm đa giác $A_1A_2...A_n$ và n tam giác: $\triangle SA_1A_2, \triangle SA_2A_3, ..., \triangle SA_nA_1$ gọi là hình chóp.
- **Kí hiệu:** $S.A_1A_2...A_n$.



01

☆ Hình tứ diện là hình được tạo thành từ bốn tam giác $\triangle ABC, \triangle ABD, \triangle ACD, \triangle BCD$ trong đó A, B, C, D không đồng phẳng.

- » Đỉnh: A, B, C, D
- » Mặt bên: $\triangle ABC; \triangle ABD; \triangle ACD$
- » Cạnh bên: $AB; AC; AD$
- » Mặt đáy: $\triangle BCD$
- » Cạnh đáy: $BC; BD; CD$
- » Cặp cạnh đối diện: $BC; AD$ và $BD; AC$ và $AB; DC$.
- » Đỉnh đối diện với mặt: đỉnh A đối diện (BCD) ; đỉnh B đối diện (ACD) ; đỉnh C đối diện (ABD) ; đỉnh D đối diện (ABC) .

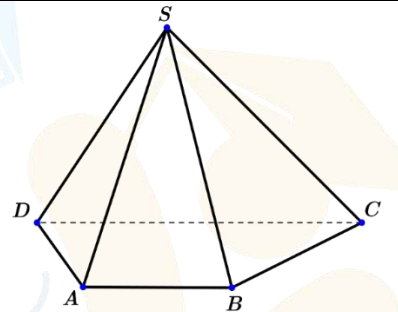


❖ **Lưu ý:** Tứ diện đều là hình tứ diện có bốn mặt là các tam giác đều.

02

☆ Các mặt bên, cạnh bên, cạnh đáy của hình chóp $S.ABCD$.

- » Mặt bên: $\triangle SBC; \triangle SAD; \triangle SCD; \triangle SAB$
- » Cạnh bên: $SA; SB; SC; SD$
- » Cạnh đáy: $AB; BC; AD; CD$



TOÁN TỪ TÂM



B

Các dạng bài tập

Dạng 1. Các tính chất được thừa nhận của hình học không gian



Phương pháp

- Chứng minh điểm M thuộc mặt phẳng (α)
 - » **Cách 1:** Điểm M có trong tên mặt phẳng.
 - » **Cách 2:** Điểm M thuộc một đường thẳng nằm trên mặt phẳng (α) .
- Chứng minh đường thẳng nằm trên mặt phẳng (α) :
Tìm hai điểm phân biệt thuộc đường thẳng nằm trên mặt phẳng



Ví dụ 1.1.

Cho chóp $S.ABC$; M là trung điểm AB . Chứng minh $M \in (ABC)$ và $MC \subset (ABC)$

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 1.2.

Cho hình chóp $S.ABC$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC . Gọi I là giao điểm của AN và MC . Chứng minh rằng:

(1) $M \in (ABC)$.

(2) $MN \subset (ABC)$.

(3) $SI \subset (SAN)$.

✎ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Dạng 2. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt cắt nhau



Phương pháp

□ **Giao tuyến** của hai mặt phẳng phân biệt là đường thẳng chung (đường thẳng đi qua ít nhất 2 điểm chung) của hai mặt phẳng đó.

□ Ta thường gặp:

Tình huống 01	Giả thiết	$M = d_1 \cap d_2; d_1 \subset (\alpha); d_2 \subset (\beta)$
	Kết luận	$M \in (\alpha) \cap (\beta)$
Tình huống 02	Giả thiết	$M \in (\alpha) \cap (\beta); N \in (\alpha) \cap (\beta)$
	Kết luận	$(\alpha) \cap (\beta) = MN$

□ **Kỹ thuật:** Nối các đoạn hoặc kéo dài các đoạn thẳng có trong mặt phẳng để tìm điểm chung và chú ý nét vẽ đứt hoặc liền.



Ví dụ 2.1.

Cho hình chóp $S.ABC$ có M là trung điểm của AB . Xác định giao tuyến của mặt phẳng (SMC) với mặt phẳng (ABC) .

 **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 2.2.

Cho hình chóp $S.ABC$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC . Xác định giao tuyến của mặt phẳng (SMC) với (SNA) .

 **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 2.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song, điểm M thuộc cạnh SA . Tìm giao tuyến của

(1) (SAC) và (SBD) .

(2) (SAC) và (MBD) .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 2.4.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB, AD với $AI = \frac{1}{2}AB, AJ = \frac{3}{2}JD$. Tìm giao tuyến của:

(1) $(ACD) \cap (CIJ)$

(2) $(CIJ) \cap (BCD)$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Cho S là một điểm không thuộc mặt phẳng (P) chứa tứ giác $ABCD$ có AB không song song CD ; BC không song song DA . Tìm giao tuyến của :

(4) $(SAC) \cap (SBD)$

[illegible]



Dạng 3. Xác định giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

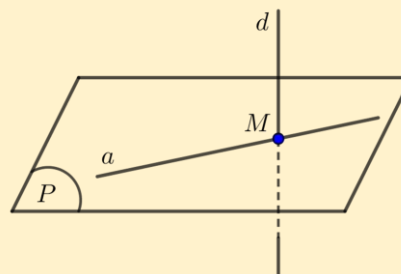


Phương pháp

□ **Bài toán:** Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

Giả thiết $d \not\subset (P), M \in d, M \in (P)$

Kết luận $M = d \cap (P)$



Ta có các trường hợp sau xảy ra.

Trường hợp 01

Trong (P) có sẵn đường thẳng a cắt d tại M

⇒ **Ta trình bày:** $a \cap d = M, a \subset (P) \Rightarrow d \cap (P) = M$.

Trong mặt phẳng (α) chưa có đường a cắt d . Khi đó

□ **Bước 1:** Chọn mặt phẳng phụ (P) chứa d .

□ **Bước 2:** Tìm giao tuyến a của (P) và (α) .

□ **Bước 3:** Trong (P) , cho a cắt d tại M , khi đó M thuộc d , M thuộc a mà a chứa trong (α) . Vậy M là điểm cần tìm.

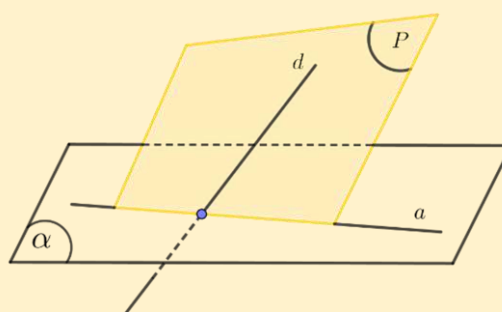
⇒ **Ta trình bày:**

□ Chọn (P) chứa d .

□ Tìm $(P) \cap (\alpha) = a$.

□ Trong (P) , $a \cap d = M \Rightarrow \begin{cases} M \in d \\ M \in a, a \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d \cap (\alpha) = M$

Trường hợp 02



Ví dụ 3.1.

Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC . Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$. Tìm giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP) .

⇒ **Lời giải**



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 3.2.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD ; G là trọng tâm tam giác BCD . Tìm giao điểm của đường thẳng EG và mặt phẳng (ACD) .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 3.3.

Trong mặt phẳng (α) , cho tứ giác $ABCD$. Gọi S là điểm không thuộc (α) , M là điểm nằm trong tam giác SCD . Xác định giao điểm của AM và mặt phẳng (SBD) .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 3.4.

Cho tứ giác $ABCD$ có AC và BD giao nhau tại O và một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đoạn SC lấy một điểm M không trùng với S và C . Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM) .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

TOÁN TỪ TÂM



Dạng 4. Ba điểm thẳng hàng - Ba đường đồng quy



Phương pháp

- **Bài toán:** chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng
-  Ta chứng minh ba điểm đó đồng thời thuộc (α) và (β)
- Suy ra A, B, C nằm trên giao tuyến của (α) và (β) nên chúng thẳng hàng.
-  Cơ sở
$$\begin{cases} A \in (\alpha) \cap (\beta) \\ B \in (\alpha) \cap (\beta) \\ C \in (\alpha) \cap (\beta) \end{cases} \Rightarrow AB \equiv AC = (\alpha) \cap (\beta)$$
- **Bài toán:** chứng minh ba đường a, b, c thẳng hàng
-  Ta chọn một mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a và b .
- Gọi $I = a \cap b$ chứng minh $I \in c$ (chứng minh ba điểm thẳng hàng như trên).



Ví dụ 4.1.

Cho 3 điểm A, B, C không thuộc mặt phẳng (P) , $BC \cap (P) = M$, $CA \cap (P) = N$, $AB \cap (P) = Q$. Chứng minh M, N, P thẳng hàng.

 **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 4.2.

Cho tứ diện $SABC$. Trên SA, SB và SC lấy các điểm D, E và F sao cho DE cắt AB tại I , EF cắt BC tại J , FD cắt CA tại K . Chứng minh rằng ba điểm I, J, K thẳng hàng.

 **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 4.3.

Cho tứ diện $SABC$. Gọi L, M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh SA, SB và AC sao cho LM không song song với AB , LN không song song với SC . Mặt phẳng (LMN) cắt các cạnh AB, BC, SC lần lượt tại K, I, J . Chứng minh rằng ba điểm M, I, J thẳng hàng.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 4.4.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ không phải là hình thang. Trên cạnh SC lấy điểm M . Gọi N là giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMB) . Chứng minh rằng ba đường thẳng AB, CD, MN đồng quy.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 4.5.

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD tương ứng tại các điểm M, N, P, Q . Chứng minh rằng: Các đường thẳng MP, NQ, SO đồng qui.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 4.6.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Mặt phẳng (α) qua MN cắt AD, BC lần lượt tại P và Q . Biết MP cắt NQ tại I . Chứng minh ba điểm I, B, D thẳng hàng.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

TOÁN TỪ TÂM



Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

- » **Câu 1.** Trong hình học không gian, cho trước một mặt phẳng (P) . Khẳng định nào đúng?
- A. Điểm luôn phải thuộc mặt phẳng (P) .
B. Điểm luôn không thuộc mặt phẳng (P) .
C. Điểm vừa thuộc, đồng thời vừa không thuộc mặt phẳng (P) .
D. Điểm có thể thuộc mặt phẳng (P) , có thể không thuộc mặt phẳng (P) .
- » **Câu 2.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?
- A. Qua 2 điểm phân biệt có duy nhất một mặt phẳng.
B. Qua 3 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.
C. Qua 3 điểm không thẳng hàng có duy nhất một mặt phẳng.
D. Qua 4 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.
- » **Câu 3.** Cho 2 đường thẳng a, b cắt nhau và không đi qua điểm A . Xác định được nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng bởi a, b và A ?
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4.
- » **Câu 4.** Một hình chóp có đáy là ngũ giác có số mặt và số cạnh là:
- A. 5 mặt, 5 cạnh. B. 6 mặt, 5 cạnh.
C. 6 mặt, 10 cạnh. D. 5 mặt, 10 cạnh.
- » **Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ ($AD // BC$). Gọi M là trung điểm CD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là:
- A. SI (I là giao điểm của AC và BM). B. SJ (J là giao điểm của AM và BD).
C. SO (O là giao điểm của AC và BD). D. SP (P là giao điểm của AB và CD).
- » **Câu 6.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là
- A. SO . B. SC . C. SD . D. SA .
- » **Câu 7.** Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC . Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$. Giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP) là giao điểm của
- A. CD và NP . B. CD và MN . C. CD và MP . D. NP và AP .
- » **Câu 8.** Trong mặt phẳng (α) cho tứ giác $ABCD$, điểm $E \notin (\alpha)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tạo bởi ba trong năm điểm A, B, C, D, E ?
- A. 7. B. 8. C. 9. D. 6.
- » **Câu 9.** Cho tứ diện $ABCD$. Các cạnh AC, BD, AB, CD, AD, BC có trung điểm lần lượt là M, N, P, Q, R, S . Bốn điểm nào sau đây **không** cùng thuộc một mặt phẳng?
- A. M, P, R, S . B. M, N, P, Q . C. M, R, S, N . D. P, Q, R, S .
- » **Câu 10.** Cho tứ diện $ABCD$. G là trọng tâm tam giác BCD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (GAB) là



- A. AN , N là trung điểm CD . B. AM , M là trung điểm AB .
C. AH , H là hình chiếu của B trên CD . D. AK , K là hình chiếu của C trên BD .
- » **Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M nằm trong tam giác SAB , N thuộc đoạn BC . Giao tuyến của (SMN) và (ABC) là
A. NA . B. NE với $E = SM \cap AB$.
C. NF với $F = SM \cap AC$. D. NK với K nằm trong tam giác ABC .
- » **Câu 12.** Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi H, K lần lượt là hai điểm trên hai cạnh $SA; SC$ ($H \neq A; H \neq S$ và $K \neq S, K \neq C$) sao cho HK không song song với AC . Gọi I là trung điểm của BC . Giao điểm của đường thẳng BK và mặt phẳng (SAI) là
A. J với $J = SI \cap BK$. B. J với $J = SI \cap BH$.
C. J với $J = SI \cap HK$. D. J với $J = SI \cap HK$.
- » **Câu 13.** Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M là trung điểm SA ; N và P lần lượt là điểm bất kì trên cạnh SB, SC (không trùng với trung điểm và hai đầu mút của đoạn thẳng tương ứng). Giao điểm của MN với (ABC) là
A. Giao điểm của MN với BC . B. Giao điểm của MP với BC .
C. Giao điểm của MN với AB . D. Giao điểm của MP với AC .
- » **Câu 14.** Cho tứ diện $ABCD$. Lấy điểm M sao cho $AM = 2BM$ và N là trung điểm AD . Gọi O là một điểm thuộc miền trong của $\triangle BCD$ và giả sử MN cắt DB tại F . Giao điểm của BC với (OMN) là
A. Giao điểm của BC với OM . B. Giao điểm của BC với MN .
C. Giao điểm của BC với OF . D. Giao điểm của BC với ON .
- » **Câu 15.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SC sao cho $SM = 3MC$, N là giao điểm của SD và (MAB) . Gọi O là giao điểm của AC và BD . Khi đó ba đường thẳng nào đồng quy?
A. AB, MN, CD . B. SO, BD, AM . C. SO, AM, BN . D. SO, AC, BN .

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

- » **Câu 16.** Cho tứ diện $SABC$. Gọi M và N lần lượt là hai điểm trên hai cạnh AB và BC sao cho MN không song song với AC . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đường thẳng MN cắt đường thẳng AC .		
(b)	Giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC) là giao điểm của MN và AC .		
(c)	Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là đường thẳng đi qua giao điểm của MN và AC .		
(d)	Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAN) và (SCM) là đường thẳng đi qua giao điểm của MN và AC .		

- » **Câu 17.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC , M là một điểm trên cạnh AB, N là một điểm trên cạnh AC sao cho MN không song song BC . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	ND là giao tuyến của hai mặt phẳng $(MND), (ADC)$.		
(b)	BI là giao tuyến của hai mặt phẳng $(BCI), (ABD)$.		



(c)	IJ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(IBC), (JAD)$.		
(d)	Giao tuyến của hai mặt phẳng $(IBC), (DMN)$ song song với đường thẳng IJ .		

» **Câu 18.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của AC và BD ; M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD ; P thuộc đoạn SC và không là trung điểm của SC . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO .		
(b)	Giao điểm E của đường thẳng SO và (MNP) là giao điểm của MN và SO .		
(c)	Giao điểm Q của đường thẳng SA và (MNP) là giao điểm của PE và SO .		
(d)	Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của QM và AB , QP và AC , QN và AD . Vậy I, J, K thẳng hàng.		

» **Câu 19.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB , O là giao điểm của AC và BD . Xét tính đúng sai các khẳng định sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Giao điểm của đường thẳng SA và $(ABCD)$ là điểm D .		
(b)	Giao điểm của đường thẳng BD và (SAC) là trung điểm của đoạn thẳng AC .		
(c)	Giao điểm của đường thẳng SO và $(ABNM)$ là điểm D .		
(d)	Gọi I giao điểm của SO và mặt phẳng $(MNCD)$. Khi đó $SI = 2IO$		

» **Câu 20.** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân ($AD \parallel BC, AD > BC$). I là giao điểm của AB và DC . O là giao điểm của AC và BD . M, K lần lượt là trung điểm của SC và AD . Xét tính đúng sai các khẳng định sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Ba điểm S, O, I thẳng hàng.		
(b)	Ba điểm K, O, I thẳng hàng.		
(c)	DM cắt mặt phẳng (SAB) tại J , khi đó S, J, I thẳng hàng		
(d)	Mặt phẳng (α) qua M cắt các cạnh SA, SB, SD lần lượt tại P, N, Q thì SO, MP, NQ đồng quy.		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 21.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G, J lần lượt là trọng tâm $\triangle ABD, \triangle ACD$. Gọi d là giao tuyến của mặt phẳng (AGJ) và (BCD) . Biết $\triangle BCD$ là tam giác đều cạnh bằng $\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ D đến đường thẳng d .

✎ Điền đáp số:



» **Câu 22.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M là trung điểm SC và I là giao điểm của AM và mặt phẳng (SBD) . Biết rằng $\triangle SAC$ vuông tại S và $AC = 6$. Tính độ dài đoạn OI .

» **Điền đáp số:**

» **Câu 23.** Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 1. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC, BC , K là một điểm trên cạnh BD sao cho $KB = 2KD$. Tính diện tích của thiết diện tạo bởi (IJK) và tứ diện $ABCD$. (làm tròn đến hàng phần trăm)

» **Điền đáp số:**

» **Câu 24.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh bằng a , $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$. Điểm M là trung điểm SC . Gọi N giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM) . Tỉ số $\frac{SN}{SD}$ bằng

» **Điền đáp số:**

» **Câu 25.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = 2$. Lấy điểm M là trung điểm SB , lấy điểm E đối xứng với B qua C , N là giao điểm của SC và BE . Lấy điểm F đối xứng với C qua A , đường thẳng NF cắt SA tại P . Trong mặt phẳng (SAB) đường thẳng MP cắt AB tại G . Khi đó độ dài $EG + GF$ bằng? (làm tròn đến hàng phần trăm)

» **Điền đáp số:**

» **Câu 26.** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . M, P lần lượt là trung điểm SA và SC , một mặt phẳng (α) qua MP cắt SB, SD lần lượt tại N và Q . Gọi I là giao điểm MP và NQ , khi đó tỉ số $\frac{SI}{IO}$ bằng?

» **Điền đáp số:**

TOÁN TỪ TÂM



Chương 04

Bài 2.

HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A

Lý thuyết

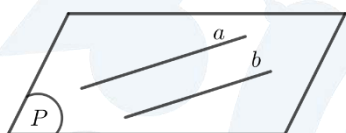
1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian



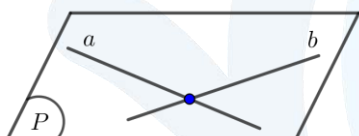
Định nghĩa:

Hai đường thẳng gọi là **đồng phẳng** nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng.
Chú ý:

- » Hai đường thẳng **chéo nhau** nếu chúng không đồng phẳng.
- » Hai đường thẳng **song song** nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung.
- » Có đúng một mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song.



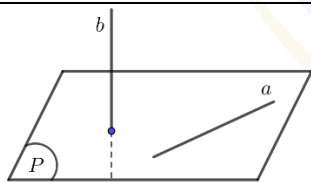
$a // b \Leftrightarrow a$ và b cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.



a cắt b hay $a \cap b \Leftrightarrow a$ và b cùng nằm trong một mặt phẳng và có một điểm chung duy nhất.



$a \equiv b \Leftrightarrow a$ và b cùng nằm trong một mặt phẳng và có từ hai điểm chung trở lên.



a chéo $b \Leftrightarrow a$ và b không cùng nằm trong một mặt phẳng.

2. Tính chất cơ bản về 2 đường thẳng song song



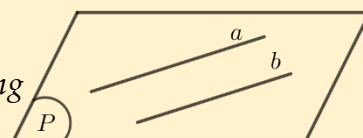
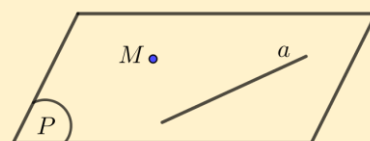
Định lý 1:

- » Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau

Nhận xét:

Ta có thêm một cách để xác định mặt phẳng như sau:

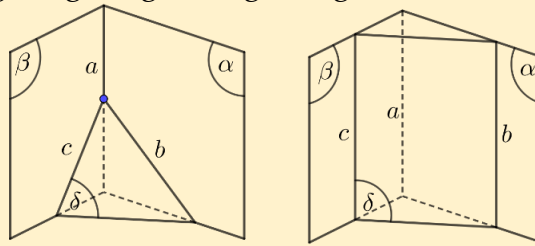
Hai đường thẳng song song a và b xác định nên một mặt phẳng ký hiệu (a, b) .





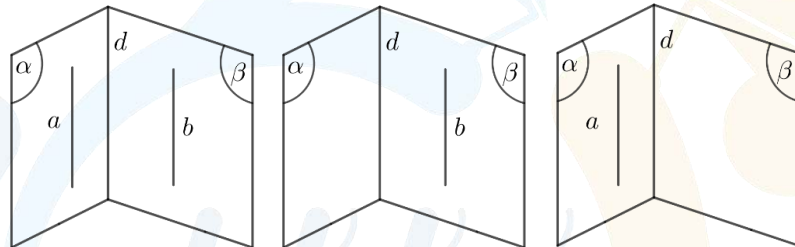
Định lý 2: Về giao tuyến 2 mặt phẳng

» Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song đường thẳng đã cho.



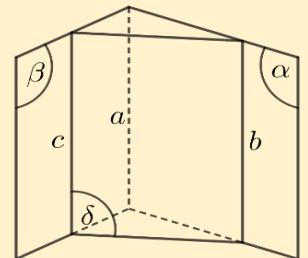
Hệ quả

Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



Định lý 3:

» Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.



TOÁN TỪ TÂM



B

Các dạng bài tập

Dạng 1. Chứng minh hai đường song song



Phương pháp

□ Ta có thể dùng một trong các cách sau

01	Xét mặt phẳng chứa a, b . Dùng các định lý đường trung bình, Định lý Thales đảo,... để chứng minh $a//b$.
02	Dùng định lý bắc cầu $\begin{cases} a//c \\ b//c \end{cases} \Rightarrow a//b$.
03	Dùng định lý $\begin{cases} a//b \\ a \subset (\alpha), b \subset (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a//b//c \\ a \equiv b \\ a \equiv c \end{cases}$



Ví dụ 1.1.

Cho tứ diện $ABCD$ có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, CD, BC, AD . Chứng minh rằng tứ giác $MPNQ$ là hình bình hành.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 1.2.

Cho tứ diện $ABCD$ có I, J lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC, ABD . Chứng minh rằng: $IJ//CD$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 1.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BC, SC, SD, AD sao cho $MN \parallel BS$, $NP \parallel CD$, $MQ \parallel CD$. Chứng minh $PQ \parallel SA$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 1.4.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD . Chứng minh $MPNQ$ là hình bình hành. Từ đó suy ra ba đoạn MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đoạn.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

TOÁN TỪ TÂM



Ví dụ 1.5.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy lớn AB . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB . Gọi P là giao điểm của SC và (ADN) , I là giao điểm của AN và DP . Chứng minh: $SI // CD$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

TOÁN TỪ TÂM

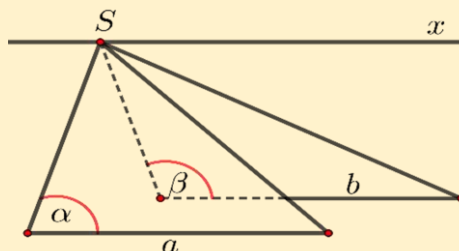


Dạng 2. Giao tuyến của 2 mặt chứa 2 đường thẳng song song



Phương pháp

- » **Bước 1:** Xác định điểm $S \in (\alpha) \cap (\beta)$ (S là một điểm chung của (α) và (β))
- » **Bước 2:** Xác định đường thẳng $a \subset (\alpha)$ và đường thẳng $b \subset (\beta)$ sao cho $a \parallel b$.
- » **Bước 3:** Kết luận $(\alpha) \cap (\beta) = Sx$ với Sx là đường thẳng đi qua điểm S và $Sx \parallel a \parallel b$.



Ví dụ 2.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 2.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy điểm M thuộc cạnh SA . Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và BC . Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và (SAC) .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

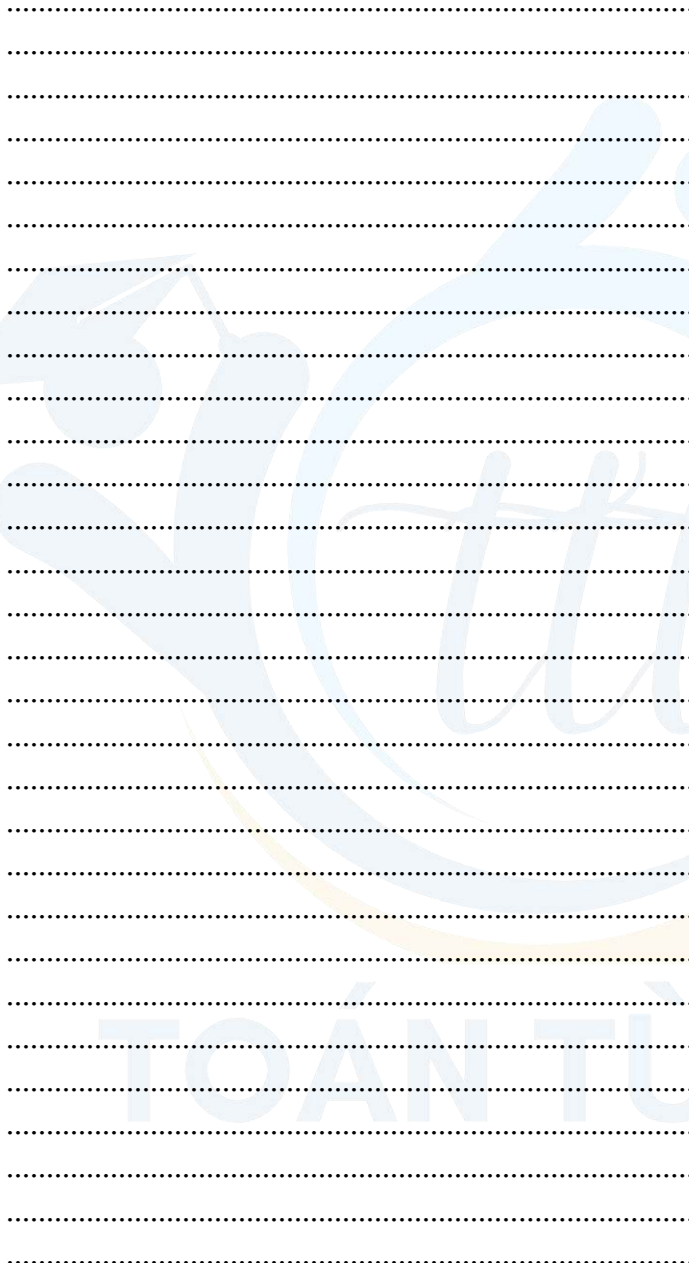
.....



Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA , điểm E và F lần lượt là trung điểm của AB và BC .

- (1) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .
- (2) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (SAD) .
- (3) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và (SAC) .

 **Lời giải**





Cho hình chóp $S.ABCD$. Mặt đáy là hình thang có cạnh đáy lớn AD , AB cắt CD tại K , điểm M thuộc cạnh SD .

-  **Lời giải**



Dạng 3. Giao điểm sử dụng giao tuyến song song



Phương pháp

» **Bước 1:** Xác định giao tuyến song song (Sx)

» **Bước 2:** Giao tuyến Sx cắt mặt đang xét tại 1 điểm.

» **Bước 3:** Kết luận giao điểm cần tìm.

**** Nhận xét:** Thông thường "S" sẽ nằm trong mặt phẳng còn lại



Ví dụ 3.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Trên đoạn SA lấy điểm M sao cho $SM = \frac{2}{3}SA$, trên đoạn SB lấy điểm N sao cho $SN = 2NB$. Điểm P nằm trên cạnh SC và không trùng với S .

(1) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SCD) .

(2) Tìm giao điểm của SD và (MNP)

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 3.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm thuộc cạnh SA ($M \neq A, M \neq S$). Tìm giao điểm K của BM với mặt phẳng (SCD) .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 3.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trên cạnh BC, AD, SD lần lượt lấy các điểm I, J, K sao cho $\frac{BI}{BC} = \frac{AJ}{AD} = \frac{SK}{SD}$. Tìm giao điểm của SC với mặt phẳng (IJK) .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

TOÁN TỪ TÂM



Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

- » **Câu 1.** Chọn khẳng định đúng
- A. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.
 - B. Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau thì song song.
 - C. Hai đường thẳng không cùng nằm trên một mặt phẳng thì chéo nhau.
 - D. Hai đường thẳng không có điểm chung thì song song với nhau.
- » **Câu 2.** Cho hình tứ diện $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. AB và CD cắt nhau.
 - B. AB và CD chéo nhau.
 - C. AB và CD song song.
 - D. Tồn tại một mặt phẳng chứa AB và CD .
- » **Câu 3.** Chọn khẳng định sai
- A. Hai đường chéo nhau thì không có điểm chung.
 - B. Hai đường thẳng không có điểm chung thì không chéo.
 - C. Hai đường thẳng chéo nhau thì không cùng nằm trên bất kì mặt nào.
 - D. Hai đường thẳng có từ 2 điểm chung thì trùng nhau.
- » **Câu 4.** Cho ba mặt phẳng phân biệt cắt nhau từng đôi một theo ba giao tuyến d_1, d_2, d_3 , biết d_1 song song với d_2 . Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A. d_1, d_3 chéo nhau.
 - B. d_1, d_3 cắt nhau.
 - C. d_1, d_3 song song với nhau.
 - D. d_1, d_3 trùng nhau.
- » **Câu 5.** Cho hai đường thẳng a, b chéo nhau. Một đường thẳng c song song với a . Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. b và c song song.
 - B. b và c chéo nhau hoặc cắt nhau
 - C. b và c cắt nhau.
 - D. b và c chéo nhau.
- » **Câu 6.** Cho hai đường thẳng phân biệt không có điểm chung cùng nằm trong một mặt phẳng thì hai đường thẳng đó
- A. song song.
 - B. chéo nhau.
 - C. cắt nhau.
 - D. trùng nhau.
- » **Câu 7.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi d là giao tuyến của mặt phẳng (SAD) và (SBC) . Tìm mệnh đề đúng
- A. d qua S và song song với BC
 - B. d qua S và song song với AB
 - C. d qua S và song song với DC
 - D. d qua S và song song với BD
- » **Câu 8.** Cho hình chóp $S.ABC$ Gọi M, N là trung điểm SA, SC, P nằm trên cạnh AB sao cho $AB = 3AP$. Gọi Q là giao điểm của BC và mặt phẳng (MNP) . Khi đó $BQ : CQ$ bằng
- A. 1:1.
 - B. 2:1.
 - C. 3:1.
 - D. 1:2.
- » **Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SC sao cho $SM = 3MC$, N là giao điểm của SD và (MAB) . Khi đó hai đường thẳng CD và MN là hai đường thẳng
- A. song song.
 - B. chéo nhau.
 - C. cắt nhau.
 - D. trùng nhau.
- » **Câu 10.** Cho các mệnh đề sau:



- (I) Hai đường thẳng song song với nhau thì đồng phẳng.
(II) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.
(III) Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.
(IV) Hai đường thẳng chéo nhau thì không đồng phẳng.
Có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 1. B. 3. C. 4. D. 2.

» **Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC . Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (BMN) và (ACD) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. d qua D và song song với AC . B. d qua B và song song với AC .
C. d qua hai điểm A và C . D. d qua hai điểm B và D .

» **Câu 12.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là một điểm trên cạnh SC ($M \neq S$ và $M \neq C$). Gọi d là đường thẳng qua điểm S và song song với AB , d' là đường thẳng qua điểm S và song song với AD . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. BM không cắt mặt phẳng (SAD) .
B. BM cắt mặt phẳng (SAD) tại một điểm thuộc SD .
C. BM cắt mặt phẳng (SAD) tại một điểm thuộc d .
D. BM cắt mặt phẳng (SAD) tại một điểm thuộc d' .

» **Câu 13.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD . Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào không song song với IJ ?

A. EF . B. DC . C. AD . D. AB .

» **Câu 14.** Cho tứ diện $ABCD$. Lấy điểm M thuộc cạnh BC sao cho $MC = 2MB$. Gọi N, P lần lượt là trung điểm của BD và AD . Gọi Q là giao điểm của AC với mặt phẳng (MNP) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{QC}{QA} = \frac{1}{2}$. B. $\frac{QC}{QA} = \frac{3}{2}$. C. $\frac{QC}{QA} = 2$. D. $\frac{QC}{QA} = \frac{5}{2}$.

» **Câu 15.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ABD . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases} IJ // AB \\ IJ = \frac{1}{3} AB \end{cases}$. B. $\begin{cases} IJ // AB \\ IJ = \frac{2}{3} AB \end{cases}$. C. $\begin{cases} IJ // CD \\ IJ = \frac{1}{3} CD \end{cases}$. D. $\begin{cases} IJ // CD \\ IJ = \frac{2}{3} CD \end{cases}$.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» **Câu 16.** Cho chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O , M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	MN song song với AB		
(b)	MN song song với CD		
(c)	MO và SD cắt nhau		
(d)	NO và SC cắt nhau		

» **Câu 17.** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O , I là trung điểm của SC . Xét các mệnh đề:

| Mệnh đề | Đúng | Sai



(a)	Đường thẳng IO song song với SA .		
(b)	Mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là một tứ giác.		
(c)	Giao điểm của đường thẳng AI với mặt phẳng (SBD) là trọng tâm của tam giác (SBD) .		
(d)	Giao tuyến của hai mặt phẳng (IBD) và (SAC) là IO .		

» **Câu 18.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trọng tâm của tam giác SAB . Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (IJG) .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng qua S và song song với AB		
(b)	Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là đường thẳng qua S và song song với AC		
(c)	Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (IJG) là đường thẳng qua G và song song với CD .		
(d)	M trên SD sao cho $SM = \frac{2}{3}SD$. Giao tuyến của (CGM) và (SBC) là đường thẳng CB .		

» **Câu 19.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	MN cắt mặt phẳng (SBD)		
(b)	SB cắt mặt phẳng (MCD)		
(c)	SD cắt mặt phẳng (MBC)		
(d)	BN cắt mặt phẳng (SAD)		

» **Câu 20.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có đáy lớn AB và $AB = 2CD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , I là trung điểm SA , G là trọng tâm ΔSBC và $E \in SD$ sao cho $3SE = 2SD$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau?

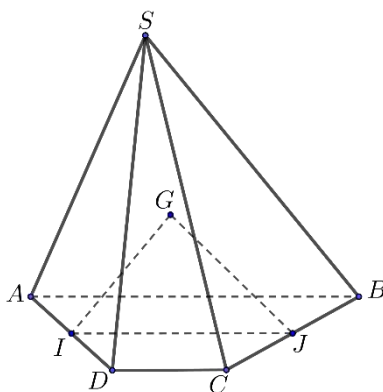
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đường thẳng SB cắt mặt phẳng (ICD)		
(b)	Đường thẳng GO cắt mặt phẳng (SCD)		
(c)	Đường thẳng SB cắt mặt phẳng (ACE)		
(d)	Đường thẳng BG cắt mặt phẳng (ACE)		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 21.** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang, $AB \parallel CD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trọng tâm tam giác SAB (tham khảo hình vẽ). Mặt



phẳng (GIJ) cắt SA, SB lần lượt tại M, N . Biết $AB = k.CD$, tìm k để $MNIJ$ là hình bình hành.



» Điền đáp số:

» **Câu 22.** Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 1. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC, BC . Gọi K là một điểm trên cạnh BD với $KB = 2KD$. Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (IJK) . Tính diện tích thiết diện (kết quả làm tròn đến hàng thứ nhất)

» Điền đáp số:

» **Câu 23.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 2, tâm O . Mặt bên SAB là tam giác đều. Ngoài ra $SAD = 90^\circ$. Gọi Dx là đường thẳng song song với SC . Gọi giao điểm I của Dx với (SAB) . Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (ACI) . Tính diện tích thiết diện (Kết quả được làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

» Điền đáp số:

» **Câu 24.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, K là trung điểm cạnh SB . Gọi E là điểm trên SC sao cho $\frac{SE}{SC} = \frac{1}{3}$, gọi H là giao điểm của KE và (SAD) . Tính tỉ số

$\frac{HE}{HK}$ (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)?

» Điền đáp số:

» **Câu 25.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của các cạnh CD, AC, BD . G là trung điểm NI . Giả sử giao điểm của GM và (ABD) là F . Tính tỉ số $\frac{FA}{FB}$?

» Điền đáp số:

» **Câu 26.** Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD ; điểm R nằm trên cạnh BC sao cho $BR = 2RC$. Gọi S là giao điểm của (PQR) và cạnh AD . Tính tỉ số

$\frac{SA}{SD}$.

» Điền đáp số:

----- Hết -----



Chương 04

Bài 3.

ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG MẶT PHẪNG

A

Lý thuyết

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng trong không gian



Định nghĩa:

Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng được xét theo số điểm chung của chúng

	d và (α) không có điểm chung. Khi đó ta nói d song song với (α) hay (α) song song với d » Kí hiệu là $d // (\alpha)$ hay $(\alpha) // d$.
	d và (α) có một điểm chung duy nhất M. Khi đó ta nói d và (α) cắt nhau tại điểm M » Kí hiệu là $d \cap (\alpha) = \{M\}$ hay $d \cap (\alpha) = M$.
	d và (α) có từ hai điểm chung trở lên. Khi đó ta nói d nằm trong (α) hay (α) chứa d » Kí hiệu là $d \subset (\alpha)$ hay $(\alpha) \supset d$

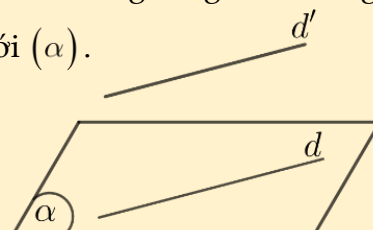
2. Tính chất



Định lý 1:

» Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d' nằm trong mặt phẳng (α) thì d song song với (α) .

» **Tóm tắt định lý:**
$$\begin{cases} d \not\subset (\alpha) \\ d // d' \\ d' \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d // (\alpha)$$

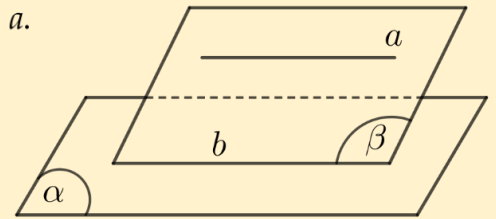




Định lý 2:

» Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) . Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a .

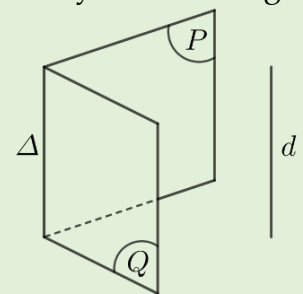
» **Tóm tắt định lý:**
$$\begin{cases} a // (\alpha) \\ a \subset (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = b \end{cases} \Rightarrow a // b$$



Hệ quả:

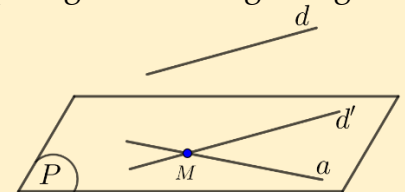
» Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng nếu có cũng song song với đường thẳng đó.

» **Tóm tắt:**
$$\begin{cases} (P) \cap (Q) = \Delta \\ (P) // d, (Q) // d \end{cases} \Rightarrow \Delta // d$$



Định lý 3:

» Cho hai đường thẳng chéo nhau, có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng còn lại.

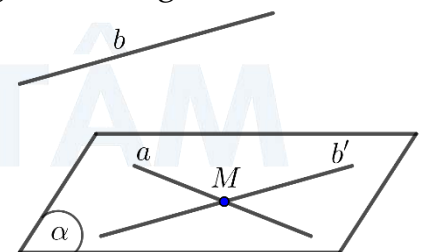


Chú ý

Cho a và b là hai đường thẳng chéo nhau.

Cách dựng mặt (α) chứa đường a và song song với đường b :

- Lấy M thuộc a .
- Qua M kẻ đường thẳng b' song song với b .
- Mặt phẳng (α) chứa a và b' .





B

Các dạng bài tập

Dạng 1. Chứng minh đường thẳng song song một phẳng



Phương pháp

□ Để chứng minh đường thẳng d song song với (α) , ta chứng minh

01

$$\text{Dùng } \begin{cases} a // b \\ b \subset (\alpha) \Rightarrow a // (\alpha) \\ a \not\subset (\alpha) \end{cases}$$

02

- » Xét mặt phẳng (β) chứa α .
- » Tìm giao tuyến $b = (\alpha) \cap (\beta)$.
- » Chứng minh $a // b \Rightarrow a // (\alpha)$



Ví dụ 1.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của đoạn AD .

- (1) Xác định mặt phẳng chứa SD và song song với BM .
- (2) Xác định mặt phẳng chứa CD và song song với SB .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 1.2.

Cho tứ diện $ABCD$. G là trọng tâm của $\triangle ABD$. M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh $MG // (ACD)$.

Lời giải



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 1.3.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và BCD . Chứng minh rằng $MN \parallel (ABD)$ và $MN \parallel (ACD)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 1.4.

Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong 1 mặt phẳng. Gọi O, O' lần lượt là tâm của $ABCD$ và $ABEF$. Chứng minh OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE) .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 1.5.

Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên các cạnh AE, BD sao cho $AM = \frac{1}{3}AE, BN = \frac{1}{3}BD$. Chứng minh MN song song với $(CDEF)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 1.5.

Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác ABD . Trên đoạn BC lấy điểm M sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh rằng đường thẳng MG song song với (ACD) .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 1.6.

Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$.

- (1) Tìm $(BDF) \cap (ACE)$
- (2) Chứng minh: $OO' \parallel (ADF)$ và $OO' \parallel (BCE)$.
- (3) Gọi M và N là trọng tâm $\triangle ABD$ và $\triangle ABF$. Chứng minh: $MN \parallel (DCFE)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

TOÁN TỪ TÂM



Dạng 2. Giao tuyến của hai mặt chứa một đường song song với mặt



Phương pháp

01

Dùng $\begin{cases} M = (\alpha) \cap (\beta) \\ a \subset (\alpha); b \subset (\beta) \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = Mx // a \\ a // b \end{cases}$

02

Dùng $\begin{cases} (P) // a \\ (Q) // a \\ (P) \cap (Q) = b \end{cases} \Rightarrow b // a$



Ví dụ 2.1.

Cho tứ diện $ABCD$ Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, AC . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (DBC) và (DMN) .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 2.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Điểm I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua I và song song với AB, SC .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 2.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn AD . Gọi I là trung điểm SB . Gọi (P) là mặt phẳng qua I , song song với SD, AC .

- (1) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và (SBD) .
- (2) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và $(ABCD)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 2.4.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD , M là một điểm trên đoạn IJ . Gọi (P) là mặt phẳng qua M , song song với AB và CD .

- (1) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ICD) .
- (2) Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (P) . Thiết diện là hình gì?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



TOÁN TỪ TÂM



Dạng 3. Thiết diện



Phương pháp

□ Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ và (α) .

- » Nếu (α) cắt hình chóp tại một mặt nào đó hình chóp thì sẽ cắt mặt phẳng này theo một đoạn thẳng gọi là *đoạn giao tuyến* của (α) và mặt đó.
- » Các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau tạo thành một đa giác phẳng gọi là *thiết diện*.
- » Như vậy muốn tìm thiết diện của hình chóp với (α) , ta tìm các giao tuyến (nếu có).
- » Đa giác tạo bởi các giao tuyến là thiết diện cần tìm.

**** Sử dụng định lý:**

Cho đường thẳng d song song với (α) .

Nếu (β) chứa d và cắt (α) theo giao tuyến d' thì $d' // d$



Ví dụ 3.1.

Cho tứ diện $ABCD$, điểm M thuộc AC . Mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD . Thiết diện của (α) với tứ diện $ABCD$ là hình gì?

 **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 3.2.

Cho tứ diện $ABCD$. Giả sử M thuộc đoạn thẳng BC . Một mặt phẳng (α) qua M song song với AB và CD . Thiết diện của (α) và hình tứ diện $ABCD$ là hình gì?

 **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 3.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , M là trung điểm của OC . Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với SA, BD . Tìm thiết diện của hình chóp với (α) .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 3.4.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA, SB . Điểm M bất kì thuộc cạnh BC . Tìm thiết diện của hình chóp với (MEF) .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



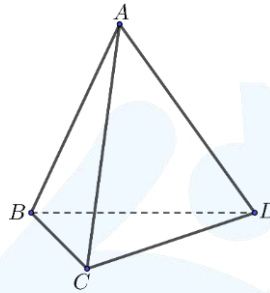
Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» **Câu 1.** Trong không gian, cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) . Có bao nhiêu vị trí tương đối giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) .

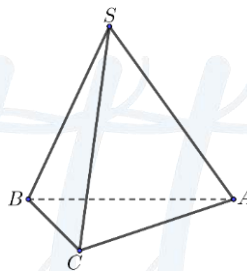
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

» **Câu 2.** Cho tứ diện $ABCD$. Vị trí tương đối giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (BCD) là.



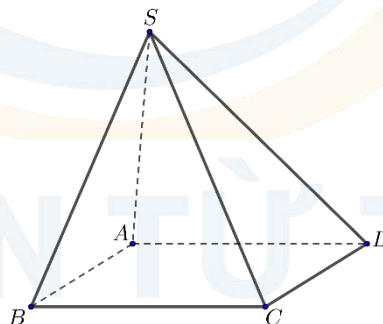
- A. $BC \parallel (BCD)$. B. $BC \subset (BCD)$. C. $BC \cap (BCD) = A$. D. $BC \cap (BCD) = D$.

» **Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABC$. Vị trí tương đối giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) là.



- A. $SB \parallel (ABC)$. B. $SB \subset (ABC)$. C. $SB \cap (ABC) = A$. D. $SB \cap (ABC) = B$.

» **Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Vị trí tương đối giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (SCD) là.



- A. $AB \cap (SCD) = B$. B. $AB \cap (SCD) = S$. C. $AB \subset (SCD)$. D. $AB \parallel (SCD)$.

» **Câu 5.** Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và song song với b ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

» **Câu 6.** Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) . Giả sử $b \not\subset (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Nếu $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$



B. Nếu b cắt (α) thì b cắt a .

C. Nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt cả a và b .

D. Nếu $b // a$ thì $b // (\alpha)$.

» **Câu 7.** Cho tứ diện $ABCD$. Cho các mệnh đề sau:

(1) $AD \subset (ABC)$

(2) $AD \cap (ABC) = C$.

(3) $AB \subset (ABC)$.

(4) $AC // (ABD)$.

Trong các mệnh đề đã cho, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

» **Câu 8.** Cho tứ diện $ABCD$, gọi G là trọng tâm tam giác ACD , M thuộc đoạn BC sao cho $CM = 2MB$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $MG // (ABC)$.

B. $MG // (ABD)$.

C. $MG // CD$.

D. $MG // BD$.

» **Câu 9.** Cho tam giác $A'B'C'$, dựng các đường thẳng $d_1 // d_2 // d_3$ sao cho chúng không thuộc mặt phẳng $(A'B'C')$ và lần lượt đi qua các điểm A', B', C' . Trên các đường d_1, d_2, d_3 lần lượt lấy các điểm A, B, C sao cho $AB // A'B', BC // B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $AA', B'C'$. Khi đó đường thẳng AB' song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. (BMN) .

B. $(C'MN)$.

C. $(A'CN)$.

D. $(A'BN)$.

» **Câu 10.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, H lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB, CD, SD . Gọi I, J lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng CN và SH . Trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

(i) $MN // (SBC)$

(ii) $AD // (SBC)$

(iii) $HN // (SBC)$

(iv) $IJ // (HMN)$

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

» **Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm hai đường chéo. Gọi M là trung điểm của SC . Đường thẳng OM song song với những mặt phẳng nào sau đây?

A. (SAD) và (SBC) .

B. (SAD) và (SBA) .

C. (SBA) và (SCD) .

D. (SAC) và $(ABCD)$.

» **Câu 12.** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O và M, N, E lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, CD, SA . Khẳng định nào sau đây là sai?

A. MN song song với hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) .

B. SB và SC song song với (MNE) .

C. ME song song với hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) .

D. EO song song với hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) .

» **Câu 13.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm tam giác SAB , I là trung điểm của AB và M là điểm trên cạnh AD sao cho $AM = \frac{1}{3}AD$. MG song song với mặt phẳng nào sau đây?



- A. (SBC). B. (SAD). C. (SBD). D. (SCD).

» **Câu 14.** Cho tứ diện $ABCD$, lấy điểm M là một điểm thuộc miền trong của tam giác BCD . Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với AC và BD . Hình tạo bởi các giao tuyến của (α) với các mặt của tứ diện $ABCD$ là hình gì?

- A. Hình bình hành. B. Hình thang. C. Hình vuông. D. Hình thoi.

» **Câu 15.** Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AD lấy trung điểm M , trên đoạn thẳng BC lấy điểm N . Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng MN và song song với CD và gọi (H) là hình tạo bởi các giao tuyến của (α) với các mặt của tứ diện. Xác định vị trí của điểm N trên đoạn BC sao cho (H) là một hình bình hành.

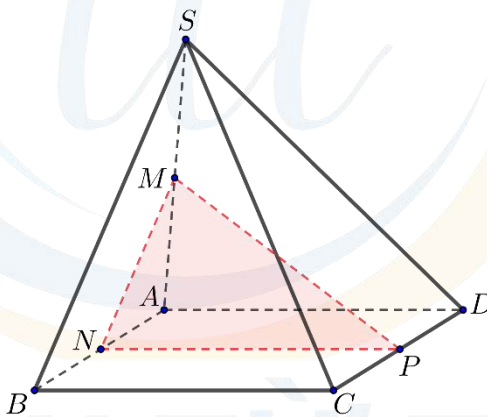
- A. $BN = \frac{1}{2}BC$. B. $BN = 2BC$ C. $BN = \frac{3}{2}BC$ D. $3BN = 2BC$

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» **Câu 16.** Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Nếu $a \cap (\alpha) = \emptyset$ thì $a // (\alpha)$		
(b)	Nếu $a // b$ và $b // (\alpha)$ thì $a // (\alpha)$		
(c)	Nếu a và (α) có 2 điểm chung thì $a \subset (\alpha)$.		
(d)	Nếu $a // b$ và $b \subset (\alpha)$ thì $a // (\alpha)$.		

» **Câu 17.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các điểm M, N, P lần lượt là các trung điểm của các đoạn SA, AB, CD như hình vẽ.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$SB // (MNP)$		
(b)	$AD // (MNP)$		
(c)	Giao tuyến của (SAD) và (MNP) là đường thẳng song song với AD		
(d)	Giao tuyến của (SAB) và (MNP) là đường thẳng song song với MN .		

» **Câu 18.** Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không đồng phẳng có tâm lần lượt là I và J .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$IJ // (ADF)$		



(b)	$IJ // (CEB)$		
(c)	$IJ // (CEA)$		
(d)	$IJ // (CDFE)$		

» **Câu 19.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	MN song song với mặt phẳng (SAB)		
(b)	MO song song với mặt phẳng (SBC)		
(c)	NO song song với mặt phẳng (SBD)		
(d)	CD song song với mặt phẳng (MNO)		

» **Câu 20.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $AB = 2CD$.

Trên các cạnh SA, SB, SD lấy các điểm M, N, P sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SD} = \frac{2}{3}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SMP) là đường thẳng đi qua S và song song với AD .		
(b)	Giao tuyến của hai mặt phẳng (SCD) và (SMN) là đường thẳng đi qua S và song song với AB .		
(c)	Giao tuyến của hai mặt phẳng (CPM) và $(ABCD)$ là đường thẳng CI với I là trung điểm của AB .		
(d)	Giao tuyến của hai mặt phẳng (CMN) và (PAB) là đường thẳng đi qua Q và song song với MN với $Q = PA \cap MD$.		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 21.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD và P là điểm trên cạnh AC sao cho $PA = 2PC$. Trong ba đường thẳng MN, NP, PM có bao nhiêu đường thẳng song song với mặt phẳng (BCD) ?

Điền đáp số:

» **Câu 22.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD . Đường thẳng MN song song với bao nhiêu mặt phẳng trong bốn mặt của tứ diện?

Điền đáp số:

» **Câu 23.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, SA . Có tất cả bao nhiêu cạnh của hình chóp song song với mặt phẳng (MNQ) .

Điền đáp số:

» **Câu 24.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm tam giác BCD và ACD . Khi đó đoạn thẳng G_1G_2 song song với bao nhiêu mặt của tứ diện $ABCD$.

Điền đáp số:



» **Câu 25.** Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M là trung điểm AB . Gọi (α) là mặt phẳng qua M , song song với hai đường thẳng BC và AD . Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (α) với các cạnh AC, CD và DB . Biết khi $AD = kBC$ thì $MNPQ$ là hình thoi. Hãy xác định giá trị của $k, (k \in \mathbb{R}, k > 0)$.

✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 26.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 10. M là điểm trên SA sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và CD , cắt hình chóp theo một tứ giác. Hãy xác định diện tích của tứ giác đó (làm tròn tới hàng phần trăm).

✎ **Điền đáp số:**

----- Hết -----

TOÁN TỪ TÂM



Chương 04

Bài 4.

HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

A

Lý thuyết

1. Định nghĩa



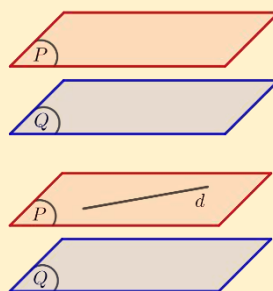
Định nghĩa:

» Hai mặt phẳng (P) và (Q) được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

Ký hiệu: $(P) // (Q)$ hoặc $(Q) // (P)$.

** Nhận xét:

Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì bất kỳ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này cũng song song với mặt phẳng kia.



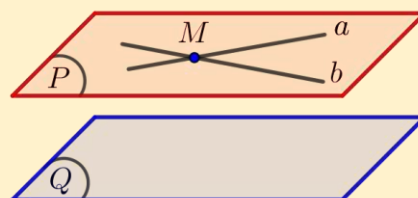
2. Tính chất



Định lý 1:

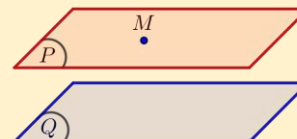
» Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q) .

» **Tóm tắt định lý:**
$$\begin{cases} a \subset (P); b \subset (P) \\ a \cap b = \{M\} \\ a // (Q) \\ b // (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) // (Q)$$



Định lý 2:

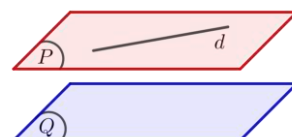
» Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.



** Từ định lý 2, ta có các hệ quả sau:

01

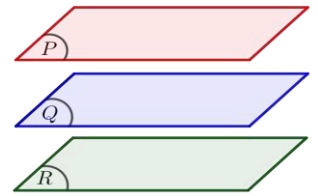
» Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (Q) thì qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (Q) .





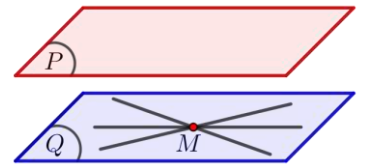
02

» Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.



03

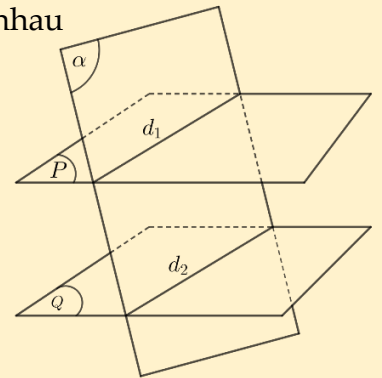
» Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (P) . Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (P) thì đều nằm trong mặt phẳng qua A song song với (P) là (Q) .



Định lý 3:

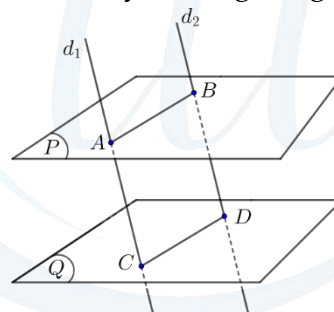
» Nếu một mặt phẳng thứ 3 cắt một trong hai mặt phẳng song song thì sẽ cắt mặt phẳng còn lại và hai giao tuyến của chúng song song với nhau

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \cap (P) = d_1 \\ (\alpha) \cap (Q) = d_2 \\ (P) \parallel (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow d_1 \parallel d_2$$



**** Từ định lý 3, ta có hệ quả sau:**

Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song những đoạn thẳng bằng nhau.



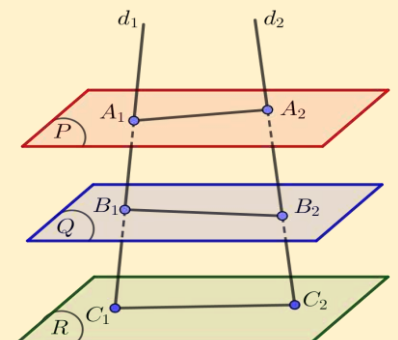
3. Định lý thales trong hình học không gian



Định lý:

» Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{C_1A_1}{C_2A_2}$$





4. Hình lăng trụ và hình hộp:



Định nghĩa:

» Cho $(P) // (Q)$.

Trên (P) cho đa giác $A_1A_2...A_n$.

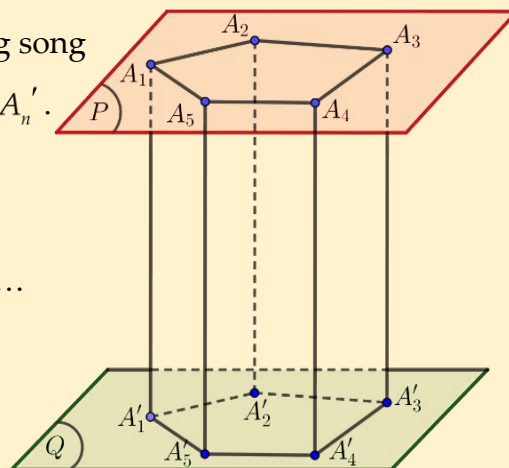
Qua các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta vẽ các đường thẳng song song với nhau và cắt (Q) lần lượt tại $A'_1, A'_2, ..., A'_n$.

» Hình lăng trụ gồm

- Hai đa giác $A_1A_2...A_n, A'_1A'_2...A'_n$
- Các hình bình hành $A_1A'_1A'_2A_2, A_2A'_2A'_3A_3, ...$

» Hình lăng trụ có

- Mặt đáy: $A_1A_2...A_n, A'_1A'_2...A'_n$
- Các cạnh bên: $A_1A'_1, A_2A'_2, ..., A_nA'_n$
- Mặt bên: $A_1A'_1A'_2A_2, A_2A'_2A'_3A_3, ..., A_nA'_nA'_1A_1$
- Các đỉnh: là các đỉnh của đáy.



5. Hình chóp cụt:



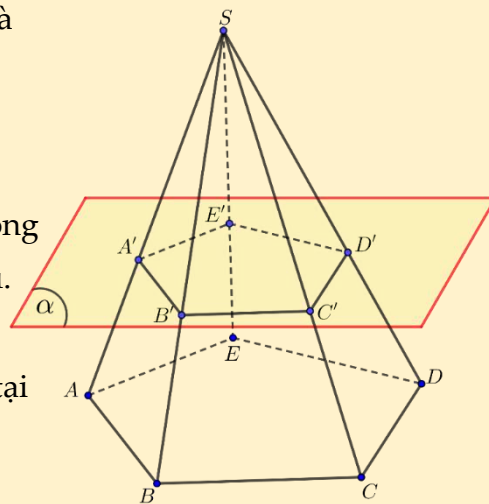
Định nghĩa:

» Cắt hình chóp bởi mặt phẳng song song với đáy và không đi qua đỉnh ta được hình chóp cụt.

Trên (P) cho đa giác $A_1A_2...A_n$.

» Tính chất:

- Hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song, các tỷ số các cặp cạnh tương ứng bằng nhau.
- Các mặt bên là những hình thang.
- Các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại một điểm.





B

Các dạng bài tập

Dạng 1. Chứng minh hai mặt song song



Phương pháp

□ Ta có thể dùng một trong các cách sau:

01

Trên mặt phẳng này có hai đường thẳng cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng còn lại

$$\begin{cases} a \subset (\alpha), b \subset (\beta), a \cap b \neq \emptyset \\ a // (\beta), b // (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$$

02

Hai mặt phẳng cùng song song với mặt phẳng thứ 3.

$$\begin{cases} (\alpha) \neq (\beta) \\ (\alpha) // (\gamma); (\beta) // (\gamma) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) // (\beta).$$



Ví dụ 1.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD . Chứng minh $(OMN) // (SBC)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 1.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$, $AD // BC$, $AD = 2BC$. Gọi E, F, I lần lượt là trung điểm của SA, AD, SD . Chứng minh $(EFB) // (SCD)$, từ đó suy ra $CI // (EFB)$.

 Lời giải

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. In the bottom right corner, there is a light blue decorative shape that resembles a stylized wave or a piece of paper folded over itself. The overall appearance is that of a clean, unused page from a notebook or a template for writing.

Ví dụ 1.3.

Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N' . Chứng minh:

(1) $(ADF) // (BCE)$.

(2) $(DEF) // (MM'N'N)$

 Lời giải

TOÁN TỰ



Ví dụ 1.4.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi E là điểm thuộc đoạn AC' , F là một điểm trên đoạn $B'D'$, G là một điểm thuộc đoạn CD' sao cho $AE = \frac{1}{3}AC'$, $D'F = \frac{1}{3}D'B$, $CG = \frac{1}{3}CD'$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh CD và $A'D'$.
Chứng minh rằng $(EFG) \parallel (AIJ)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

TOÁN TỪ TÂM

❑ Ta có thể dùng một trong các cách sau:

$$\left\{ \begin{array}{l} M \in (\alpha) \cap (\gamma) \\ (\alpha) // (\beta) \\ (\beta) \cap (\gamma) = b \end{array} \right. \Rightarrow (\alpha) \cap (\gamma) = Mx; Mx // b$$

Đưa về dạng thiết diện song song với đường thẳng $\left\{ \begin{array}{l} (\alpha) // (\beta) \\ a, b \subset (\beta) \end{array} \Rightarrow a, b // (\alpha) \right.$.

Như vậy thay vì tìm thiết diện song song với mặt phẳng (β) thì ta tìm thiết diện song song với các đường thẳng nằm trong

(1) Mặt phẳng (P) và $(ABCD)$.

(2) Mặt phẳng (P) và (SBC) .

 **Lời giải**

TOÁN TỰ



Ví dụ 2.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm bất kì trên cạnh AB , (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với (SBC) . Tìm giao tuyến của (α) với các mặt của hình chóp.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 2.3.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, AD, A'D'$. Xác định giao tuyến của (MNP) và $(A'B'C'D')$, $(AA'B'B)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Dạng 3. Định lý Thales trong không gian



Phương pháp

□ Ta có thể dùng một trong các cách sau:

01

$$\begin{cases} (\alpha) // (\beta) \\ d \cap (\alpha) = A, d \cap (\beta) = B \\ d' \cap (\alpha) = A', d' \cap (\beta) = B' \\ d // d' \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$$

02

$$\begin{cases} (\alpha) // (\beta) // (\gamma) \\ d \cap (\alpha) = A, d \cap (\beta) = B, d \cap (\gamma) = C \\ d' \cap (\alpha) = A', d' \cap (\beta) = B', d' \cap (\gamma) = C' \end{cases} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}.$$



Ví dụ 2.1.

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 12, SB = 15, SC = 17$. Trên cạnh SA lấy các điểm M, N sao cho $SM = 3, MN = 5, NA = 4$. Gọi $(P), (Q)$ là hai mặt phẳng song song với (ABC) lần lượt đi qua M, N . (P) cắt SB, SC tại M_1, M_2 và (Q) cắt SB, SC tại N_1, N_2 . Tính độ dài các đoạn thẳng M_1N_1 và M_2N_2 .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 2.2.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a . Các điểm M, N lần lượt trên AD', BD sao cho $AM = DN = x$ ($0 < x < a\sqrt{2}$).

(1) Chứng minh khi x biến thiên, đường thẳng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

(2) Chứng minh khi $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ thì $MN // A'C$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 2.3.

Cho tứ diện $ABCD$, M là một điểm lưu động trên cạnh AB ; N là điểm lưu động trên cạnh CD . Chứng tỏ rằng trung điểm I của đoạn MN thuộc một mặt phẳng cố định.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 2.4.

Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm trên hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC , BF lấy các điểm M , N sao cho $MC = 2AM$, $NF = 2BN$. Qua M , N lần lượt kẻ các đường thẳng song song với cạnh AB , cắt cạnh AD , AF theo thứ tự tại M_1 , N_1 . Chứng minh rằng

(1) $MN // DE$.

(2) $M_1N_1 // (DEF)$.

(3) $(MNM_1N_1) // (DEF)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 2.5.

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC , ACC' , $A'B'C'$. Chứng minh rằng $(IJK) // (BCC'B')$ và $(A'JK) // (AIB')$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

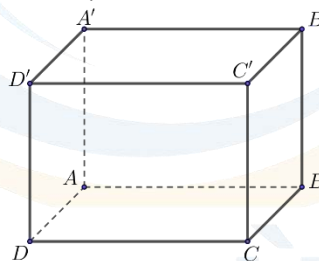
.....

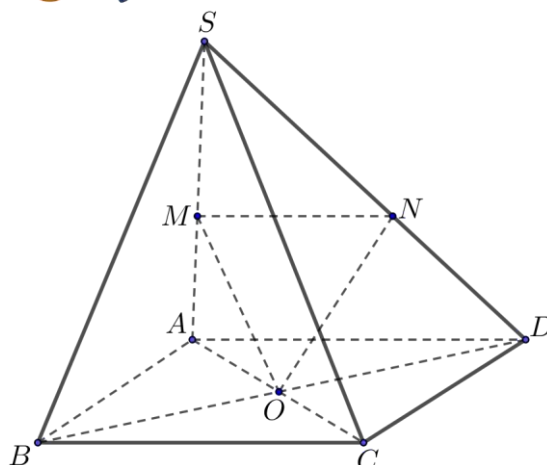


Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

- » **Câu 1.** Hai mặt phẳng được gọi là song song với nhau nếu
- A. chúng không có điểm chung. B. chúng có một đường thẳng chung.
C. chúng có đúng một điểm chung. D. chúng có ít nhất một điểm chung.
- » **Câu 2.** Mệnh đề nào sau đây là đúng?
- A. Hình hộp là hình tứ diện. B. Hình tứ diện là hình hộp.
C. Hình lập phương là hình hộp. D. Hình hộp là hình lập phương.
- » **Câu 3.** Mệnh đề nào sau đây là **sai**?
- A. Qua một điểm bất kỳ có một và chỉ một mặt phẳng song song với một mặt phẳng cho trước.
B. Hai mặt phẳng được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.
C. Ba mặt phẳng phân biệt đôi một song song với nhau chắn trên hai cát tuyến bất kỳ những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.
D. Hai mặt phẳng song song cắt mặt phẳng thứ ba theo hai giao tuyến song song với nhau.
- » **Câu 4.** Cho mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b và mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng c . Mệnh đề nào sau đây là đúng?
- A. Nếu $a // c$ thì $(P) // (Q)$.
B. Nếu $b // c$ thì $(P) // (Q)$.
C. Nếu $a // (Q)$ và $b // (Q)$ thì $(P) // (Q)$.
D. Nếu a, b cắt nhau, $a // (Q)$ và $b // (Q)$ thì $(P) // (Q)$.
- » **Câu 5.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?
- A. $(ABCD) // (A'B'C'D')$. B. $(ABB'A') // (DCC'D')$.
C. $(ACC'A') // (ABD)$. D. $(A'B'C') // (ABD)$.
- » **Câu 6.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh SA, SD .





Mặt phẳng (OMN) song song với mặt phẳng nào sau đây?

- A. (SAD) . B. (SAC) . C. (SBD) . D. (SBC) .

» Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm cạnh SC, SB, CD . Khẳng định nào đúng?

- A. $(OMN) \parallel (SBD)$. B. $(OME) \parallel (SBD)$. C. $(SCD) \parallel (SAB)$. D. $(OMN) \parallel (SAD)$.

» Câu 8. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$. Gọi O, M, N, P, Q lần lượt là trung điểm cạnh FD, FA, FC, EB, FB .

Khẳng định nào sai?

- A. $(OMN) \parallel (ABC)$. B. $(OMN) \parallel (ACD)$.
C. $(DMN) \parallel (ACP)$. D. $(DMN) \parallel (ACQ)$.

» Câu 9. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$. Gọi M, N, O lần lượt là trung điểm cạnh GH, GF, BD . Mặt phẳng (AFH) song song với mặt phẳng nào sau đây?

- A. (OMN) . B. (GBD) . C. (AMN) . D. (BCD) .

» Câu 10. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$. Gọi O, M, N lần lượt là tâm của các hình $ABCD, CGHD, EFGH$.

Khẳng định nào sai?

- A. $(OMN) \parallel (BFC)$. B. $(OMN) \parallel (CGF)$.
C. $(OMN) \parallel (ABE)$. D. $(OMN) \parallel (AEH)$.

» Câu 11. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, AC cắt BD tại O và $A'C'$ cắt $B'D'$ tại O' . Khi đó $(AB'D')$ sẽ song song mặt phẳng nào sau đây?

- A. $(A'OC')$. B. (BDA') . C. (BDC') . D. (BDC) .

» Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình thang $(AB \parallel CD)$ và $AB = 2CD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SB và AB . Mặt phẳng nào song song với mặt phẳng (SAD) ?

- A. (BCI) . B. (BIJ) . C. (CIJ) . D. (SJC) .

» Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SD . Mặt phẳng (OMN) song song với mặt phẳng nào sau đây?

- A. $(ABCD)$. B. (SBC) . C. (SAB) . D. (SCD) .



» **Câu 14.** Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABD, ACD, ABC và M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BD, CD, BC . Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A.** $(DIK) \parallel (ABC)$. **B.** $(IJK) \parallel (BCD)$. **C.** $(KMN) \parallel (ABC)$. **D.** $(IJK) \parallel (AMD)$.

» **Câu 15.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm $\triangle ABC, \triangle ACC'$ và $\triangle AB'C'$. Mặt phẳng nào sau đây song song với (IJK) ?

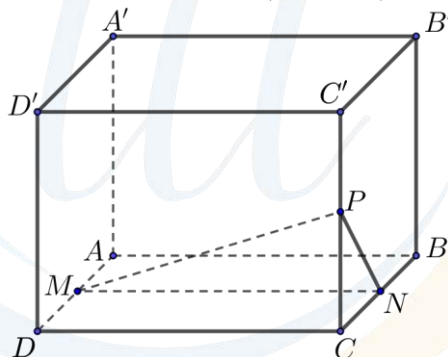
- A.** $(BC'A)$. **B.** (ABA') . **C.** $(BB'C)$. **D.** $(CC'A)$.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» **Câu 16.**

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Cho (α) và (β) là hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt (α) thì nó cũng cắt (β) .		
(b)	Hai mặt phẳng phân biệt chứa hai đường thẳng song song cắt nhau theo giao tuyến song song với hai đường thẳng đó.		
(c)	Một mặt phẳng cắt hai mặt phẳng song song cho trước theo hai giao tuyến thì hai giao tuyến song song với nhau.		
(d)	Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến thì ba giao tuyến đó phải đồng quy		

» **Câu 17.** Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có hai đáy là các hình bình hành. Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của cạnh AD, BC, CC' (hình vẽ).



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$A'B' \parallel (MNP)$.		
(b)	$(MNP) \parallel (BC'D')$.		
(c)	$(MNP) \parallel (B'C'D')$.		
(d)	DD' cắt (MNP) .		

» **Câu 18.** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có I, K, G lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC, A'B'C', ACC'$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$BB' \parallel (ACC'A')$		
(b)	$(ABC) \parallel (A'B'C')$		
(c)	IG cắt $(BCC'B')$		



(d) $(IKG) // (BCC'B')$

» **Câu 19.** Cho hình chóp $SABC$ có $SA = 9; SB = 12; SC = 15$. Trên cạnh SA lấy các điểm M, N sao cho $SM = 4; MN = 3; NA = 2$. Vẽ hai mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC) lần lượt đi qua M, N , cắt SB theo thứ tự tại $M'; N'$ và cắt SC theo thứ tự tại $M''; N''$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$SM' = 4$		
(b)	$M'N' = 4$		
(c)	$M'N' + M''N'' = 9$		
(d)	$N''C = \frac{10}{3}$		

» **Câu 20.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G_1, G_2 là trọng tâm của các tam giác $A'BD; B'D'C$. Khi đó :

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$A'D'CB$ là hình bình hành		
(b)	$(A'BD) // (B'D'C)$		
(c)	G_1, G_2 cùng thuộc AC'		
(d)	$G_1G_2 = \frac{2}{3} AC'$		

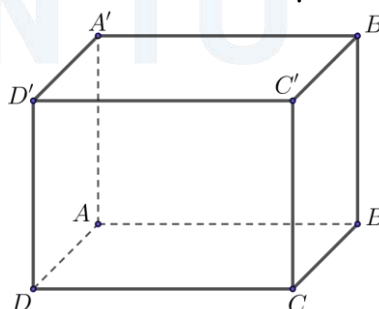
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 21.** Có bao nhiêu khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây:

- (1) Nếu hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng khác thì chúng song song với nhau.
- (2) Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến thì ba giao tuyến đó đồng quy
- (3) Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) thì a song song với một đường thẳng nào đó nằm trong (P) .
- (4) Cho hai đường thẳng a, b nằm trong mặt phẳng (P) và hai đường thẳng a', b' nằm trong mặt phẳng (Q) . Khi đó, nếu $a // a'; b // b'$ thì $(P) // (Q)$.
- (5) Hai mặt phẳng không cắt nhau thì song song.

Điền đáp số:

» **Câu 22.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Có bao nhiêu kết luận đúng



- (1) $AC // B'D'$
- (2) $(BB'D') // (ACC')$



(3) $(AA'D) // (BCC')$

(4) AD' cắt $(A'BC')$

(5) $(DD'C) // (AA'B)$

(6) $(ABCD) // (A'D'C'B')$

Điền đáp số:

» **Câu 23.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , $AB=8$. Hai cạnh bên $SA=SB=6$. Gọi (α) là mặt phẳng qua O và song song với (SAB) . Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) có diện tích bằng $a\sqrt{5}$. Khi đó a bằng bao nhiêu.

Điền đáp số:

» **Câu 24.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh bằng 2. Tam giác SBD đều. Một mặt phẳng (α) song song với (SBD) và qua trung điểm I của đoạn thẳng AO . Gọi S là diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và hình chóp. Tính S^2 .

Điền đáp số:

» **Câu 25.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, cạnh bên $BC=\sqrt{5}$, hai đáy $AB=11, CD=7$. Mặt phẳng (α) song song với $(ABCD)$ và cắt cạnh SO tại I sao cho $2SO=5SI$. Tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và hình chóp.

Điền đáp số:

» **Câu 26.** Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng 1 và G là trọng tâm của tam giác ABC . Cắt tứ diện bởi mặt phẳng (P) qua G và song song với mặt phẳng (BCD) . Tính diện tích thiết diện thu được (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Điền đáp số:

----- Hết -----

TOÁN TỪ TÂM



Chương 04

Bài 5.

PHÉP CHIẾU SONG SONG

A

Lý thuyết

1. Phép chiếu song song.



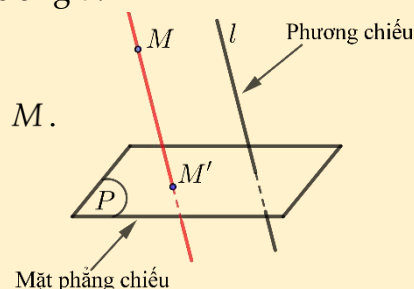
Định nghĩa:

Cho mặt phẳng (α) và một đường thẳng l cắt (P) .

- » Với mỗi điểm M trong không gian, vẽ đường thẳng qua M và song song hoặc trùng với l .
- » Phép cho tương ứng mỗi điểm M trong không gian với điểm M' trong (P) được gọi là phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương l .

*** **Trong đó:** Trên mặt phẳng (P) theo phương l :

- ✓ Điểm M' được gọi là hình chiếu song song của điểm M .
- ✓ Mặt phẳng (P) được gọi là mặt phẳng chiếu.
- ✓ l gọi là phương chiếu



2. Tính chất của phép chiếu song song.



Tính chất:

- » Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.
- » Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- » Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành đường thẳng song song hoặc trùng nhau.
- » Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

3. Hình biểu diễn của một số hình không gian trên mặt phẳng.



Định nghĩa:

- » Hình biểu diễn của một hình H trong không gian là hình chiếu song song của H trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.



Chú ý

Dựa theo tính chất của phép chiếu song song, ta tuân theo các quy tắc khi vẽ hình:

- Nếu trên H có hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau) thì chúng được biểu diễn bằng hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau).
→ *Tỉ số độ dài* của hai đoạn thẳng này phải **bằng** *tỉ số độ dài* của hai đoạn thẳng tương ứng trên H .
- Nếu hình phẳng nằm trong mặt phẳng không song song với phương chiếu thì:

Hình biểu diễn của một *đường tròn* thường là một *elip*.

Hình biểu diễn của một *tam giác* (vuông, cân, đều) là một *tam giác*.

Hình biểu diễn của *hình vuông*, *hình chữ nhật*, *hình thoi*, *hình bình hành* là *hình bình hành*.

TOÁN TỪ TÂM

Các dạng bài tập

Hình biểu diễn của hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành là hình bình hành

 **Lời giải**



TOÁN TỰ



Ví dụ 1.2.

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của AC . Tìm hình chiếu song song của điểm $C'M$ lên $(AA'B')$ theo phương chiếu CB ?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

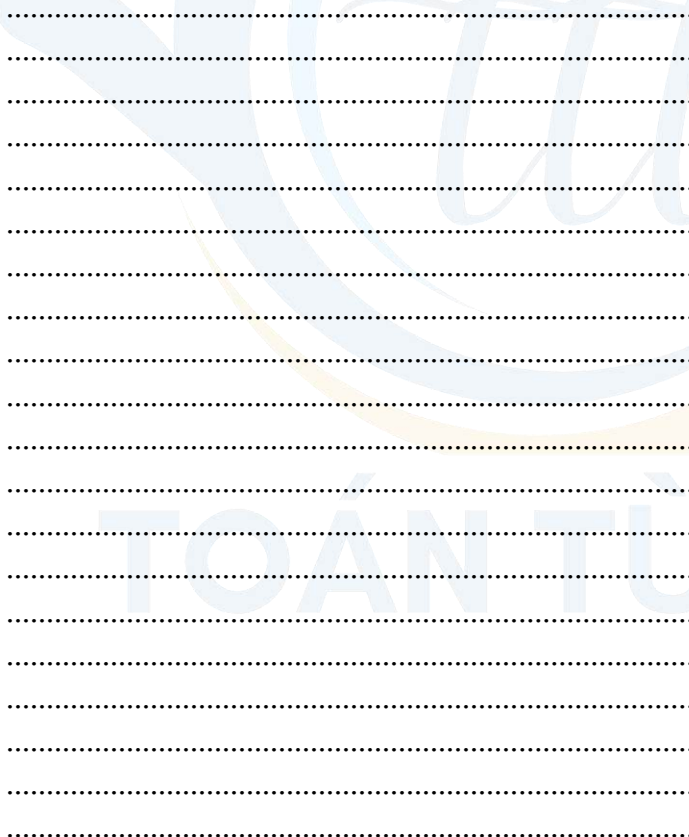
.....

.....

.....

TOÁN TỪ TÂM

 Lời giải





Ví dụ 2.2.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi $O = AC \cap BD$ và $O' = A'C' \cap B'D'$. Điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Qua phép chiếu song song theo phương AO' lên mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định hình chiếu của tam giác $C'MN$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

TOÁN TỪ TÂM



Dạng 3. Bài toán tổng hợp



Ví dụ 3.1.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và CC' . Gọi Δ là đường thẳng đi qua M đồng thời cắt AN và $A'B$. Gọi I, J lần lượt là giao điểm của Δ với AN và $A'B$. Hãy tính tỉ số $\frac{IM}{IJ}$.

 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 3.2.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định các điểm M, N tương ứng trên các đoạn $AC', B'D'$ sao cho MN song song với BA' và tính tỉ số $\frac{MA}{MC'}$.

 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

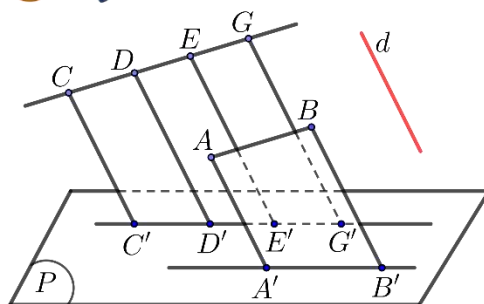
.....



Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

- » **Câu 1.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hình chiếu của tam giác $A'B'C'$ theo phương $B'B$ lên mặt phẳng ABC là hình nào?
A. ADC . **B.** ADB . **C.** BCD . **D.** ABC .
- » **Câu 2.** Khẳng định nào sau đây đúng?
A. Hình chiếu song song của một hình chóp cắt có thể là một hình tam giác.
B. Hình chiếu song song của một hình chóp cắt có thể là một đoạn thẳng.
C. Hình chiếu song song của một hình chóp cắt có thể là một hình chóp cắt.
D. Hình chiếu song song của một hình chóp cắt có thể là một điểm.
- » **Câu 3.** Qua phép chiếu song song, tính chất nào không được bảo toàn?
A. Chéo nhau. **B.** Đồng quy. **C.** Thẳng hàng. **D.** Song song.
- » **Câu 4.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?
A. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.
B. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau thì song song.
C. Hình chiếu song song của hai một hình vuông là một hình vuông.
D. Hình chiếu song song của một lục giác đều là một lục giác đều.
- » **Câu 5.** Qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) , hai đường thẳng a và b có hình chiếu là hai đường thẳng song song a' và b' . Khi đó:
A. a và b phải song song với nhau.
B. a và b phải cắt nhau.
C. a và b có thể chéo nhau hoặc song song với nhau.
D. a và b không thể song song.
- » **Câu 6.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACD . Hình chiếu G' của điểm G trên mặt phẳng (BCD) theo phương chiếu AB là:
A. Trọng tâm của tam giác BCD .
B. Trung điểm BC .
C. Trung điểm CD .
D. Trung điểm BI với I là trung điểm CD .
- » **Câu 7.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. A' hình chiếu của A trên $(A'B'C')$ qua phép chiếu song song theo phương là đường thẳng nào?
A. CC' . **B.** CA' . **C.** $C'A'$. **D.** $B'A'$.
- » **Câu 8.** Trên hình bên dưới, ta có phép chiếu song song theo phương d và mặt phẳng chiếu (P) ; $AB \parallel CG$ và $AB = DG$; A', B', C', D', E', G' lần lượt là hình chiếu của A, B, C, D, E, G qua phép chiếu nói trên.



Khi đó, có bao nhiêu khẳng định đúng trong các mệnh đề sau

- (i) $\frac{DG}{AB} = \frac{D'G'}{A'B'} = 1$. (ii) $\frac{C'D'}{D'E'} = \frac{CD}{DE}$. (iii) $D'G' = A'B'$.

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3

» Câu 9. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Qua phép chiếu song song đường thẳng AA' mặt phẳng chiếu là $(A'B'C')$ biến G thành G' . Tìm mệnh đề đúng?

- A. G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$. B. G' là trung điểm của $A'B'$.
C. G' là trực tâm tam giác $A'B'C'$. D. G' là trung điểm của $B'C'$.

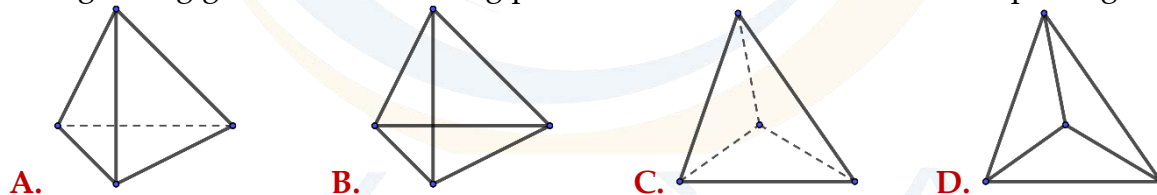
» Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O . Trên cạnh SB, SD lần lượt lấy điểm M, N sao cho $SM = 2MB$ và $SN = \frac{1}{3}SD$. Hình chiếu của M, N qua phép chiếu song song lên mặt phẳng chiếu $(ABCD)$ theo phương của đường thẳng SO lần lượt là P, Q . Tính tỉ số $\frac{OP}{OQ}$.

A. 2. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{2}{3}$.

» Câu 11. Hình biểu diễn của hình chữ nhật trong không gian không thể là hình nào trong các hình sau?

- A. Hình thang B. Hình bình hành C. Hình chữ nhật D. Hình thoi

» Câu 12. Trong không gian, hình nào không phải là hình biểu diễn của hình chóp tam giác?



» Câu 13. Hình biểu diễn của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ lên $(BC'D)$ theo phương AB là:

- A. Một tam giác. B. Một hình bình hành
C. Một ngũ giác. D. Một lục giác.

» Câu 14. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hình biểu diễn của $\triangle A'C'D'$ qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương $A'B$ là

- A. Một tam giác ABC .
B. Một tam giác BCI , với I là điểm sao cho C là trung điểm của DI .
C. Một tam giác ACD .
D. Một tam giác DCM , với M là điểm sao cho C là trung điểm của BM .



» **Câu 15.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB \parallel CD$, $AB = 3CD$. Gọi M , N theo thứ tự là trung điểm SB, SC và K là giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMN) . Tính tỷ số $\frac{SK}{SD}$.

- A. $\frac{SK}{SD} = \frac{3}{5}$. B. $\frac{SK}{SD} = \frac{1}{2}$. C. $\frac{SK}{SD} = \frac{4}{7}$. D. $\frac{SK}{SD} = \frac{2}{3}$.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» **Câu 16.** Xét tính đúng/sai của các mệnh đề sau?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng cắt nhau.		
(b)	Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự giữa các điểm.		
(c)	Cho mặt phẳng (P) , đường thẳng l cắt (P) và điểm M không nằm trên đường thẳng l . Gọi điểm M' là ảnh của điểm M lên mặt phẳng (P) theo phương chiếu l của phép chiếu song song. Khi đó MM' song song l .		
(d)	Phép chiếu song song làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.		

» **Câu 17.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xét phép chiếu song song theo phương chiếu AA' .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hình chiếu của C' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là C .		
(b)	Hình chiếu của B lên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ là A' .		
(c)	Gọi O và O' lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Hình chiếu của O lên mặt phẳng $(ABCD)$ là O' .		
(d)	Hình chiếu của AC lên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ là $A'C'$.		

» **Câu 18.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Xét các mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hình chiếu của C lên $(A'B'C')$ theo phương chiếu DA' trong phép chiếu song song là điểm C' .		
(b)	Gọi O và O' lần lượt là tâm của $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Hình chiếu của điểm A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ theo phương chiếu OO' trong phép chiếu song song là điểm A' .		
(c)	Gọi I và I' lần lượt là trung điểm của AB và $A'B'$. Hình chiếu của I lên mặt phẳng $(A'B'C')$ theo phương chiếu AI' trong phép chiếu song song là điểm A' .		
(d)	Gọi G là trọng của $\triangle ABC$. Gọi G' là hình chiếu của G lên $(A'B'C'D')$ theo phương chiếu II' trong phép chiếu song song. Khi đó G' là trọng tâm $\triangle A'B'C'$.		

» **Câu 19.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$; I và I' lần lượt là trung điểm của đoạn AB và $A'B'$.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$AI' // IB'$		
(b)	Hình chiếu song song của I trên mặt phẳng $(A'B'C')$ phương AI' là điểm C' .		
(c)	Trong $(A'B'C')$, vẽ hình bình hành $A'C'MI'$. Suy ra $ACMI'$ là hình bình hành.		
(d)	$\triangle MAA'$ là hình chiếu song song của $\triangle CAA'$ theo phương AI' trên $(A'B'C')$		

» Câu 20. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$ADC'B'$ là hình bình hành		
(b)	Hình chiếu song song của A lên mặt phẳng $(BCC'B')$ qua phép chiếu song song theo phương của đường thẳng $C'D$ là B'		
(c)	Hình chiếu song song của $\triangle AB'D'$ trên mặt phẳng $(BCC'B')$ qua phép chiếu song song theo phương của đường thẳng $C'D'$ là $\triangle BB'C'$		
(d)	Hình chiếu của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ lên mặt phẳng $(BC'D)$ theo phương AB là một hình tam giác		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 21. Số mệnh đề nào trong các mệnh đề sau

- (a) Phép chiếu song song biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- (b) Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng cắt nhau.
- (c) Phép chiếu song song biến tam giác đều thành tam giác cân.
- (d) Phép chiếu song song biến hình vuông thành hình bình hành.

✎ Điền đáp số:

» Câu 22. Cho tứ diện $ABCD$, M là trọng tâm của tam giác ABC . Gọi N là hình chiếu song song của điểm M theo phương CD lên mặt phẳng (ABD) . Khi đó $\frac{EN}{ED}$ bằng bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trăm)

✎ Điền đáp số:

» Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O . Trên cạnh SB , SD lần lượt lấy điểm M , N sao cho $SM = 2MB$ và $SN = \frac{1}{3}SD$. Hình chiếu của M , N qua phép chiếu song song đường thẳng SO lên mặt phẳng chiếu $(ABCD)$ lần lượt là P , Q . Tính tỉ số $\frac{OP}{OQ}$.

✎ Điền đáp số:



» **Câu 24.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, gọi I là trung điểm AB . Gọi S, S' lần lượt là diện tích của tam giác $\triangle ABC$ và hình chiếu của tam giác $AA'C'$ lên mặt phẳng $(A'B'C')$ theo phương IB' . Khi đó tỉ số $\frac{S'}{S}$ bằng

✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 25.** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông tâm O cạnh 2. Trên cạnh SB, SD lần lượt lấy điểm M, N sao cho $SM = 2MB$ và $SN = \frac{1}{3}SD$. Diện tích hình chiếu song song của tam giác $\triangle AMN$ lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương của đường thẳng SO bằng

✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 26.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $MA = 2MS$. Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$. Một phép chiếu song song theo phương MO lên mặt phẳng $(ABCD)$ biến điểm S thành điểm N . Tỉ số $\frac{CN}{CA}$ bằng

✎ **Điền đáp số:**

----- Hết -----

TOÁN TỪ TÂM



QUAN HỆ Song Song



TÁC GIẢ
TOÁN TỪ TÂM



MỤC LỤC

Bài 1. ĐIỂM, ĐƯỜNG VÀ MẶT PHẪNG

A. Lý thuyết

1. Mặt phẳng	3
2. Điểm thuộc mặt phẳng	3
3. Hình biểu diễn của một hình không gian	4
4. Các tính chất thừa nhận	4
5. Các cách xác định mặt phẳng	5
6. Hình chóp và tứ diện	5

B. Các dạng bài tập

✎ Dạng 1. Các tính chất được thừa nhận của hình học không gian	7
✎ Dạng 2. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt cắt nhau	8
✎ Dạng 3. Xác định giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng	11
✎ Dạng 4. Ba điểm thẳng hàng – Ba đường đồng quy	14

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm	17
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai	23
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn	29

Bài 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A. Lý thuyết

1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian	34
2. Tính chất cơ bản về 2 đường thẳng song song	35

B. Các dạng bài tập

✎ Dạng 1. Chứng minh hai đường song song	36
✎ Dạng 2. Giao tuyến của 2 mặt chứa 2 đường thẳng song song	39
✎ Dạng 3. Giao điểm sử dụng giao tuyến song song	42

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm	44
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai	49
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn	56

Bài 3. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG MẶT PHẪNG

A. Lý thuyết

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng trong không gian	61
2. Tính chất	61

B. Các dạng bài tập

✎ Dạng 1. Chứng minh đường thẳng song song mặt phẳng	63
--	----



➤ Dạng 2. Giao tuyến của hai mặt chứa một đường song song với mặt.....	67
➤ Dạng 3. Thiết diện.....	70

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm.....	72
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai.....	80
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn.....	85

Bài 4. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

A. Lý thuyết

1. Định nghĩa.....	89
2. Tính chất	89
3. Định lý thales trong hình học không gian.....	90
4. Hình lăng trụ và hình hộp:	91
5. Hình chóp cụt:.....	91

B. Các dạng bài tập

➤ Dạng 1. Chứng minh hai mặt song song.....	92
➤ Dạng 2. Tìm giao tuyến của 2 mặt, có 1 mặt song song với mặt khác	95
➤ Dạng 3. Định lý Thales trong không gian	97

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm.....	101
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai.....	107
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn.....	113

Bài 5. PHÉP CHIẾU SONG SONG

A. Lý thuyết

1. Phép chiếu song song.	118
2. Tính chất của phép chiếu song song.....	118
3. Hình biểu diễn của một số hình không gian trên mặt phẳng.....	118

B. Các dạng bài tập

➤ Dạng 1. Xác định ảnh qua phép chiếu song song.....	120
➤ Dạng 2. Xác định hình biểu diễn qua phép chiếu song song	122
➤ Dạng 3. Bài toán tổng hợp	124

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm.....	125
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai.....	131
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn.....	136



Chương 04

Bài 1.

ĐIỂM - ĐƯỜNG VÀ MẶT PHẪNG

A

Lý thuyết

1. Mặt phẳng

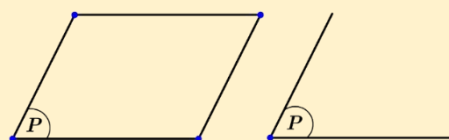


Định nghĩa:

» Hình ảnh mô phỏng trong thực tế ví dụ: mặt gương phẳng, mặt hồ phẳng lặng được xem là một phần của mặt phẳng.

** Chú ý :

- ✓ Mặt phẳng ko có bề dày và không bị giới hạn.
- ✓ Cách biểu diễn mặt phẳng lên mặt phẳng hình học: dùng hình bình hành hay một góc và ghi tên của mặt phẳng vào một góc của hình.
- ✓ Kí hiệu mặt phẳng:
 $mp(P), mp(Q), ...mp(\alpha), mp(\beta), ...$



2. Điểm thuộc mặt phẳng



Định nghĩa:

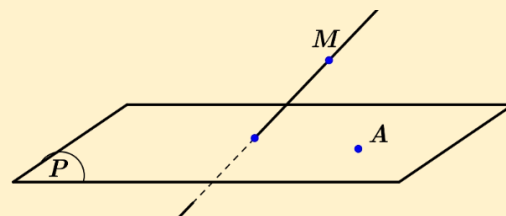
Cho điểm A và $mp(\alpha)$. Khi đó:

» Điểm A thuộc (α) hay A nằm trên (α) hay (α) chứa A hoặc đi qua A .

▪ Kí hiệu: $A \in (\alpha)$

» Điểm A nằm ngoài (α) hay (α) không chứa A hoặc không đi qua A .

▪ Kí hiệu: $A \notin (\alpha)$.





3. Hình biểu diễn của một hình không gian



Các nguyên tắc vẽ hình:

Khi vẽ một hình không gian lên bảng, lên giấy ta tuân thủ nguyên tắc sau:

- (1) Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.
- (2) Hình biểu diễn của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song, hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng cắt nhau.
- (3) Giữ nguyên quan hệ thuộc giữa điểm với đường thẳng.
- (4) Nét liền để vẽ đường nhìn thấy, nét đứt để vẽ đường bị che khuất.
- (5) Bảo toàn tỷ lệ giữa các đoạn thẳng song song, các đoạn thẳng cùng nằm trên một đường thẳng. Không bảo toàn về góc.
- (6) Một tam giác bất kỳ đều được coi là hình biểu diễn của tam giác có dạng tùy ý (vuông, cân, đều).
- (7) Hình bình hành là hình biểu diễn cho hình bình hành có dạng tùy ý (hình bình hành, vuông, chữ nhật, thoi) và kèm theo kí hiệu vuông, bằng nhau nếu là hình đặc biệt.

Các mặt phẳng:				
» Nhìn thấy	$(SAB), (SBC)$	$(SBC), (SCD)$	$(ABCD), (ADD'A'), (DCC'D')$	$(SAB), (SBC), (SCD)$
» Không nhìn thấy	$(SAC), (ABC)$	$(SAB), (SAD), (ABCD)$	$(A'B'C'D'), (ABB'A'), (BCC'B')$	$(SAD), (ABCD)$

4. Các tính chất thừa nhận

	Tính chất	Hình minh họa
01	☆ Có một và chỉ một đường thẳng đi qua 02 điểm phân biệt.	
02	☆ Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua 3 điểm không thẳng hàng. ▪ Kí hiệu: (ABC) .	
03	☆ Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó. $\begin{cases} A \in a \cap (\alpha) \\ B \in a \cap (\alpha) \end{cases} \Rightarrow AB \equiv a \subset (\alpha)$	



04	☆ Điểm M và đường thẳng AM đều nằm trong (ABC) vì M thuộc đường thẳng AB còn AM trùng với đường thẳng AB mà AB nằm trong (ABC).	
05	☆ Tồn tại 04 điểm không cùng thuộc 01 mặt phẳng.	
06	☆ Nếu hai mặt phẳng phân biệt có 01 điểm chung thì chúng còn có điểm chung khác nữa. $\Rightarrow$ Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng. $\Rightarrow$ Đường thẳng chung gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng.	
07	☆ Trong mỗi mặt phẳng, các kết quả của hình học phẳng đều đúng.	

5. Các cách xác định một mặt phẳng

	Mặt phẳng được xác định	Hình minh họa
01	☆ Khi biết nó đi qua 3 điểm không thẳng hàng cho trước. Kí hiệu: $mp(ABC)$ hoặc (ABC).	
02	☆ Khi biết nó đi qua một đường thẳng và một điểm không nằm trên đường thẳng đó. Kí hiệu: $mp(d; A)$ hoặc $mp(A; d)$.	
03	☆ Khi biết nó đi qua hai đường thẳng cắt nhau. Kí hiệu: $mp(a; b)$ hoặc $mp(b; a)$.	

6. Hình chóp và tứ diện



Định nghĩa:

Trong mặt phẳng (α) cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Lấy S nằm ngoài (α) .

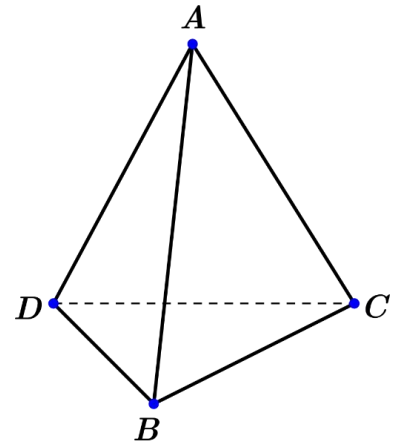
- » Lần lượt nối S với $A_1, A_2, ..., A_n$ được n tam giác: $\triangle SA_1A_2, \triangle SA_2A_3, ..., \triangle SA_nA_1$.
- » Hình gồm đa giác $A_1A_2...A_n$ và n tam giác: $\triangle SA_1A_2, \triangle SA_2A_3, ..., \triangle SA_nA_1$ gọi là hình chóp.
- **Kí hiệu:** $S.A_1A_2...A_n$.



01

☆ Hình tứ diện là hình được tạo thành từ bốn tam giác $\triangle ABC, \triangle ABD, \triangle ACD, \triangle BCD$ trong đó A, B, C, D không đồng phẳng.

- » Đỉnh: A, B, C, D
- » Mặt bên: $\triangle ABC; \triangle ABD; \triangle ACD$
- » Cạnh bên: $AB; AC; AD$
- » Mặt đáy: $\triangle BCD$
- » Cạnh đáy: $BC; BD; CD$
- » Cặp cạnh đối diện: $BC; AD$ và $BD; AC$ và $AB; DC$.
- » Đỉnh đối diện với mặt: đỉnh A đối diện (BCD) ; đỉnh B đối diện (ACD) ; đỉnh C đối diện (ABD) ; đỉnh D đối diện (ABC) .

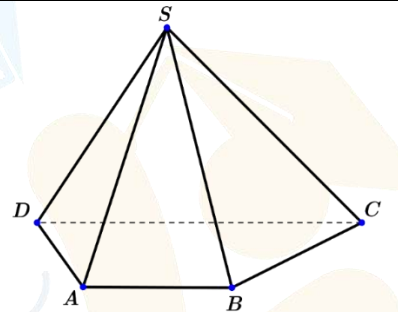


❖❖ **Lưu ý:** Tứ diện đều là hình tứ diện có bốn mặt là các tam giác đều.

02

☆ Các mặt bên, cạnh bên, cạnh đáy của hình chóp $S.ABCD$.

- » Mặt bên: $\triangle SBC; \triangle SAD; \triangle SCD; \triangle SAB$
- » Cạnh bên: $SA; SB; SC; SD$
- » Cạnh đáy: $AB; BC; AD; CD$



TOÁN TỪ TÂM



Các dạng bài tập

Dạng 1. Các tính chất được thừa nhận của hình học không gian



Phương pháp

- Chứng minh điểm M thuộc mặt phẳng (α)
 - » **Cách 1:** Điểm M có trong tên mặt phẳng.
 - » **Cách 2:** Điểm M thuộc một đường thẳng nằm trên mặt phẳng (α) .
- Chứng minh đường thẳng nằm trên mặt phẳng (α) :
Tìm hai điểm phân biệt thuộc đường thẳng nằm trên mặt phẳng



Ví dụ 1.1.

Cho chóp $S.ABC$; M là trung điểm AB . Chứng minh $M \in (ABC)$ và $MC \subset (ABC)$

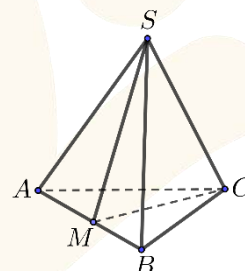
Lời giải

Ta có $\begin{cases} A \in (ABC) \\ B \in (ABC) \end{cases} \Rightarrow AB \subset (ABC)$

Mà $M \in AB \Rightarrow M \in (ABC)$.

Lại có $C \in (ABC)$

Nên $MC \subset (ABC)$.



Ví dụ 1.2.

Cho hình chóp $S.ABC$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC . Gọi I là giao điểm của AN và MC . Chứng minh rằng:

(1) $M \in (ABC)$.

(2) $MN \subset (ABC)$.

(3) $SI \subset (SAN)$.

Lời giải

(1) AN .

Ta có $AB \subset (ABC)$ Mà $M \in AB \Rightarrow M \in (ABC)$ (1)

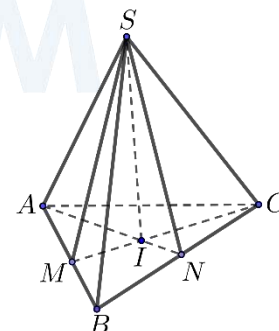
(2) MC .

$N \in BC \subset (ABC)$ (vì $B \in (ABC); C \in (ABC)$) nên $N \in (ABC)$

Từ (1) và (2) suy ra $MN \subset (ABC)$.

(3) $M \in (ABC)$.

Ta có $\begin{cases} I \in AN \subset (SAN) \\ S \in (SAN) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I \in (SAN) \\ S \in (SAN) \end{cases} \Rightarrow SI \subset (SAN)$.





➤ Dạng 2. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt cắt nhau



Phương pháp

❑ **Giao tuyến** của hai mặt phẳng phân biệt là đường thẳng chung (đường thẳng đi qua ít nhất 2 điểm chung) của hai mặt phẳng đó.

❑ Ta thường gặp:

Tình huống 01	Giả thiết	$M = d_1 \cap d_2; d_1 \subset (\alpha); d_2 \subset (\beta)$
	Kết luận	$M \in (\alpha) \cap (\beta)$
Tình huống 02	Giả thiết	$M \in (\alpha) \cap (\beta); N \in (\alpha) \cap (\beta)$
	Kết luận	$(\alpha) \cap (\beta) = MN$

❑ **Kỹ thuật:** Nối các đoạn hoặc kéo dài các đoạn thẳng có trong mặt phẳng để tìm điểm chung và chú ý nét vẽ đứt hoặc liền.



Ví dụ 2.1.

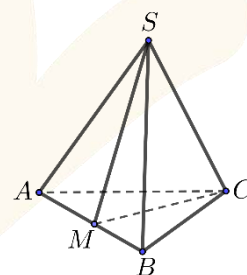
Cho hình chóp $S.ABC$ có M là trung điểm của AB . Xác định giao tuyến của mặt phẳng (SMC) với mặt phẳng (ABC) .

✎ Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} M \in (SMC) \\ M \in AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow M \in (SMC) \cap (ABC) \quad (1)$$

$$\text{Và } \begin{cases} C \in (SMC) \\ C \in (ABC) \end{cases} \Rightarrow C \in (SMC) \cap (ABC) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(SMC) \cap (ABC) = MC$.



Ví dụ 2.2.

Cho hình chóp $S.ABC$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC . Xác định giao tuyến của mặt phẳng (SMC) với (SNA) .

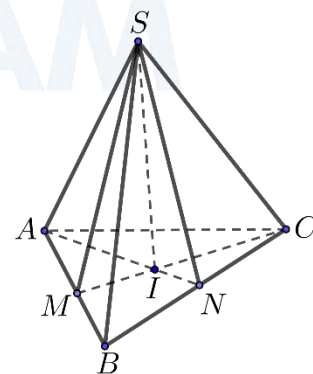
✎ Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} S \in (SMC) \\ S \in (SNA) \end{cases} \Rightarrow S \in (SMC) \cap (SNA) \quad (1)$$

Trong mặt phẳng (ABC) , gọi $I = AN \cap CM$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} I \in MC \subset (SMC) \\ I \in AN \subset (SNA) \end{cases} \Rightarrow I \in (SMC) \cap (SNA) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(SMC) \cap (SNA) = SI$.





Ví dụ 2.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song, điểm M thuộc cạnh SA . Tìm giao tuyến của

(1) (SAC) và (SBD) .

(2) (SAC) và (MBD) .

Lời giải

(1) (SAC) và (SBD) .

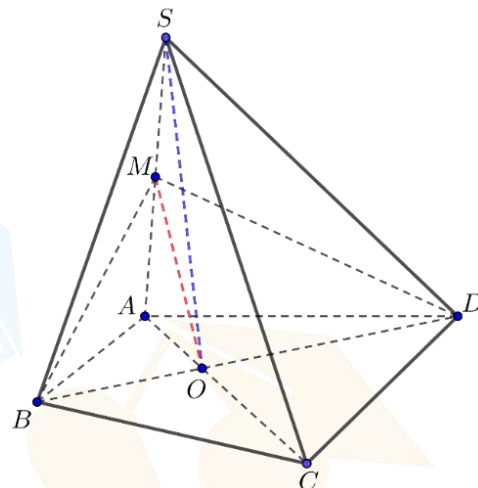
$$\begin{aligned} \text{Gọi } O = AC \cap BD &\Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases} \\ &\Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD) \end{aligned}$$

$$\text{Lại có } S \in (SAC) \cap (SBD) \Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD).$$

(2) (SAC) và (MBD) .

$$\begin{aligned} O = AC \cap BD &\Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (MBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (MBD). \end{aligned}$$

$$\text{Và } M \in (SAC) \cap (MBD) \Rightarrow OM = (SAC) \cap (MBD).$$



Ví dụ 2.4.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB, AD với $AI = \frac{1}{2}AB, AJ = \frac{3}{2}JD$. Tìm giao tuyến của:

(1) (ACD) và (CIJ)

(2) (CIJ) và (BCD)

Lời giải

(1) (ACD) và (CIJ)

$$\text{Có: } C \in (ACD) \cap (CIJ) \quad (1).$$

$$J \in AD, AD \subset (ACD) \Rightarrow J \in (ACD) \cap (CIJ) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow (ACD) \cap (CIJ) = CJ.$$

(2) (CIJ) và (BCD)

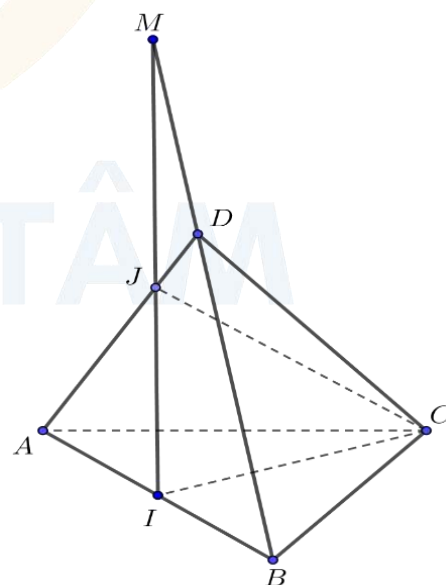
$$\text{Có: } C \in (CIJ) \cap (BCD) \quad (1).$$

Trong (ABD) có BD và IJ không song song.

$$\text{Gọi } M = BD \cap IJ.$$

$$\begin{cases} M \in BD, BD \subset (BCD) \\ M \in IJ, IJ \subset (CIJ) \end{cases} \Rightarrow M \in (BCD) \cap (CIJ) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow (CIJ) \cap (BCD) = CM$$





Ví dụ 2.5.

Cho S là một điểm không thuộc mặt phẳng (P) chứa tứ giác $ABCD$ có AB không song song CD ; BC không song song DA . Tìm giao tuyến của :

(1) $(SAB) \cap (SBC)$

(2) $(SAB) \cap (SCD)$

(3) $(SAD) \cap (SBC)$

(4) $(SAC) \cap (SBD)$

Lời giải

(1) $(SAB) \cap (SBC)$

Hai mặt phẳng $(SAB), (SBC)$ có SB chung.

Suy ra SB là giao tuyến,

Kí hiệu: $(SAB) \cap (SBC) = SB$.

(2) $(SAB) \cap (SCD)$

Có: $S \in (SAB) \cap (SBC)$ (1).

Trong $(ABCD)$ có AB và CD không song song.

Gọi $F = AB \cap CD$.

$$\begin{cases} F \in AB, AB \subset (SAB) \\ F \in CD, CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow F \in (SAB) \cap (SCD) \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = SF$.

(3) $(SAD) \cap (SBC)$

Có: $S \in (SAD) \cap (SBC)$ (1).

Trong $(ABCD)$ có AD và BC không song song. Gọi $H = AD \cap BC$.

$$\begin{cases} H \in AD, AD \subset (SAD) \\ H \in BC, BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow H \in (SAD) \cap (SBC) \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = SH$.

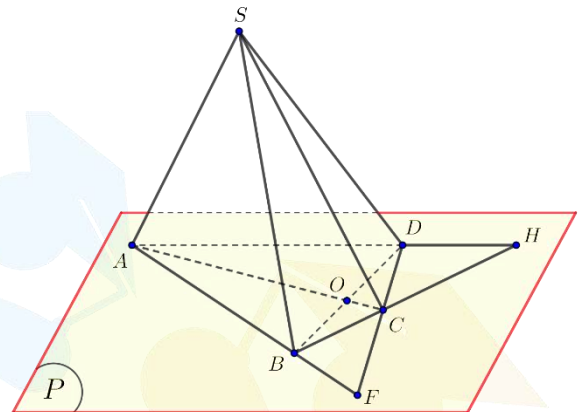
(4) $(SAC) \cap (SBD)$

Có: $S \in (SAC) \cap (SBD)$ (1).

Trong $(ABCD)$ có AC và BD không song song. Gọi $O = AC \cap BD$.

$$\begin{cases} O \in AC, AC \subset (SAC) \\ O \in BD, BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD) \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow (SAC) \cap (SBD) = SO$.





Dạng 3. Xác định giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng



Phương pháp

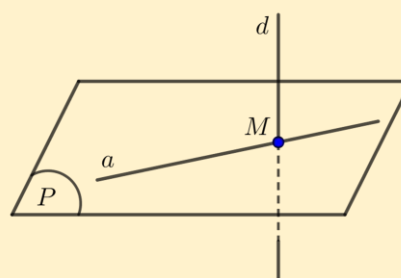
□ **Bài toán:** Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

Giả thiết

$$d \not\subset (P), M \in d, M \in (P)$$

Kết luận

$$M = d \cap (P)$$



Ta có các trường hợp sau xảy ra.

Trường hợp 01

Trong (P) có sẵn đường thẳng a cắt d tại M

☞ **Ta trình bày:** $a \cap d = M, a \subset (P) \Rightarrow d \cap (P) = M$.

Trong mặt phẳng (α) chưa có đường a cắt d . Khi đó

□ **Bước 1:** Chọn mặt phẳng phụ (P) chứa d .

□ **Bước 2:** Tìm giao tuyến a của (P) và (α) .

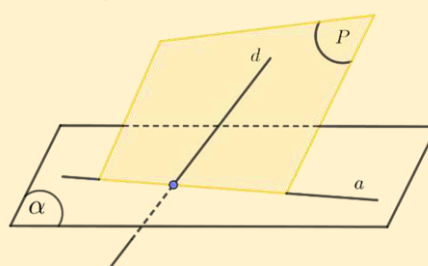
□ **Bước 3:** Trong (P) , cho a cắt d tại M , khi đó M thuộc d , M thuộc a mà a chứa trong (α) . Vậy M là điểm cần tìm.

☞ **Ta trình bày:**

□ Chọn (P) chứa d .

□ Tìm $(P) \cap (\alpha) = a$.

□ Trong (P) , $a \cap d = M \Rightarrow \begin{cases} M \in d \\ M \in a, a \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d \cap (\alpha) = M$



Ví dụ 3.1.

Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC . Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$. Tìm giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP) .

☞ **Lời giải**



» Cách 1.

Xét mặt phẳng BCD chứa CD .

Do NP không song song CD nên NP cắt CD tại E .

Điểm $E \in NP \Rightarrow E \in (MNP)$.

Vậy $CD \cap (MNP)$ tại E .

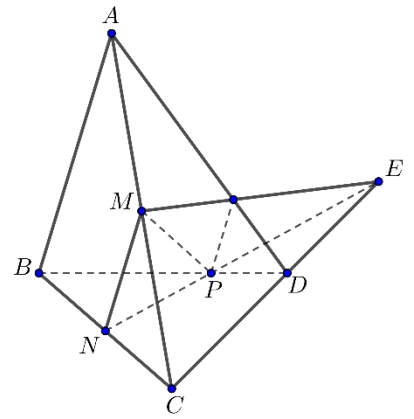
» Cách 2.

Ta có $\begin{cases} N \in BC \\ P \in BD \end{cases} \Rightarrow NP \subset (BCD)$ suy ra NP, CD đồng phẳng.

Gọi $E = NP \cap CD$

Mà $NP \subset (MNP)$ suy ra $CD \cap (MNP) = E$.

Vậy giao điểm của CD và (MNP) là giao điểm E của NP và CD .



Ví dụ 3.2.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD ; G là trọng tâm tam giác BCD . Tìm giao điểm của đường thẳng EG và mặt phẳng (ACD) .

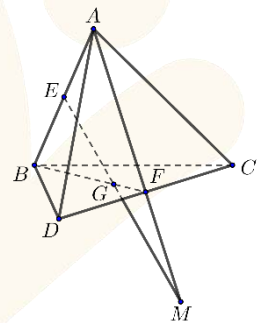
Lời giải

Vì G là trọng tâm $\triangle BCD$ và F là trung điểm của CD
 $\Rightarrow G \in (ABF)$.

Ta có E là trung điểm của $AB \Rightarrow E \in (ABF)$.

Gọi $M = EG \cap AF$ mà $AF \subset (ACD)$ suy ra $M \in (ACD)$.

Vậy giao điểm của EG và (ACD) là giao điểm $M = EG \cap AF$.



Ví dụ 3.3.

Trong mặt phẳng (α) , cho tứ giác $ABCD$. Gọi S là điểm không thuộc (α) , M là điểm nằm trong tam giác SCD . Xác định giao điểm của AM và mặt phẳng (SBD) .

Lời giải

Gọi $N = SM \cap CD$; $E = AN \cap BD$

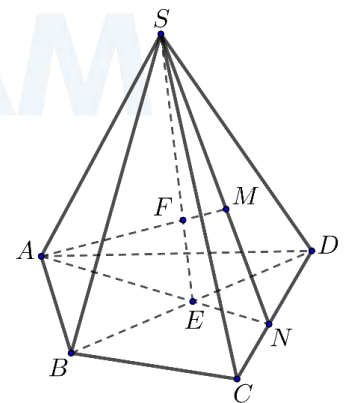
Ta có: $\begin{cases} E \in AN \subset (SAM) \\ E \in BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow E \in (SAM) \cap (SBD)$

$S \in (SAM) \cap (SBD)$

Suy ra: $SE = (SAM) \cap (SBD)$.

Trong (SAN) , gọi $F = AM \cap SE$

Khi đó: $\begin{cases} AM \subset (SAM) \\ (SAM) \cap (SBD) = SE \Rightarrow F \in AM \cap (SBD). \\ F \in AM \cap SE \subset (SAM) \end{cases}$





Ví dụ 3.4.

Cho tứ giác $ABCD$ có AC và BD giao nhau tại O và một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đoạn SC lấy một điểm M không trùng với S và C . Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM) .

Lời giải

- Chọn mặt phẳng phụ (SBD) chứa SD .
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBD) và (ABM) .

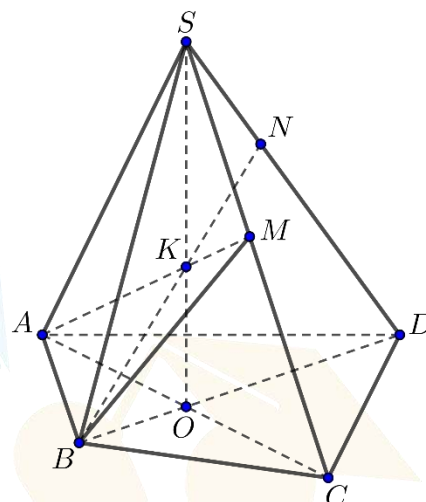
Ta có B là điểm chung thứ nhất của (SBD) và (ABM) .

Trong $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$.

Trong (SAC) , gọi $K = AM \cap SO$.

Khi đó $(SBD) \cap (ABM) = BK$.

Trong (SBD) lấy $N = BK \cap SD$ thì $N = SD \cap (ABM)$.



TOÁN TỪ TÂM



Dạng 4. Ba điểm thẳng hàng - Ba đường đồng quy



Phương pháp

- **Bài toán:** chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng
- ☞ Ta chứng minh ba điểm đó đồng thời thuộc (α) và (β)
Suy ra A, B, C nằm trên giao tuyến của (α) và (β) nên chúng thẳng hàng.
- ☞ Cơ sở
$$\begin{cases} A \in (\alpha) \cap (\beta) \\ B \in (\alpha) \cap (\beta) \\ C \in (\alpha) \cap (\beta) \end{cases} \Rightarrow AB \equiv AC = (\alpha) \cap (\beta)$$
- **Bài toán:** chứng minh ba đường a, b, c thẳng hàng
- ☞ Ta chọn một mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a và b .
Gọi $I = a \cap b$ chứng minh $I \in c$ (chứng minh ba điểm thẳng hàng như trên).



Ví dụ 4.1.

Cho 3 điểm A, B, C không thuộc mặt phẳng (P) , $BC \cap (P) = M$, $CA \cap (P) = N$, $AB \cap (P) = Q$. Chứng minh M, N, P thẳng hàng.

✎ Lời giải

$$BC \cap (P) = M \Rightarrow M \in (ABC) \cap (P) \quad (1)$$

$$CA \cap (P) = N \Rightarrow N \in (ABC) \cap (P) \quad (2)$$

$$AB \cap (P) = Q \Rightarrow Q \in (ABC) \cap (P) \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow M, N, Q$ thẳng hàng.



Ví dụ 4.2.

Cho tứ diện $SABC$. Trên SA, SB và SC lấy các điểm D, E và F sao cho DE cắt AB tại I , EF cắt BC tại J , FD cắt CA tại K . Chứng minh rằng ba điểm I, J, K thẳng hàng.

✎ Lời giải

Ta có $I = DE \cap AB$, $DE \subset (DEF) \Rightarrow I \in (DEF)$;

$$AB \subset (ABC) \Rightarrow I \in (ABC) \quad (1).$$

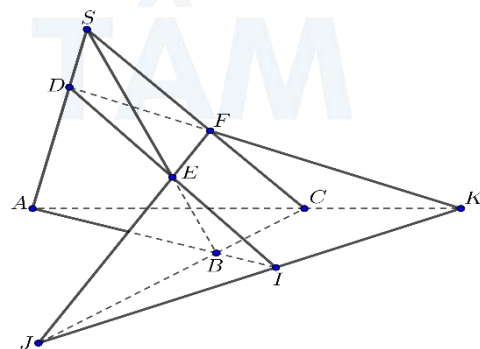
Tương tự $J = EF \cap BC$

$$\Rightarrow \begin{cases} J \in EF \subset (DEF) \\ J \in BC \subset (ABC) \end{cases} \quad (2)$$

$$K = DF \cap AC$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K \in DF \subset (DEF) \\ K \in AC \subset (ABC) \end{cases} \quad (3)$$

Từ (2) & (3) ta có I, J, K là điểm chung của (ABC) và (DEF) nên chúng thẳng hàng.





Ví dụ 4.3.

Cho tứ diện $SABC$. Gọi L, M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh SA, SB và AC sao cho LM không song song với AB , LN không song song với SC . Mặt phẳng (LMN) cắt các cạnh AB, BC, SC lần lượt tại K, I, J . Chứng minh rằng ba điểm M, I, J thẳng hàng.

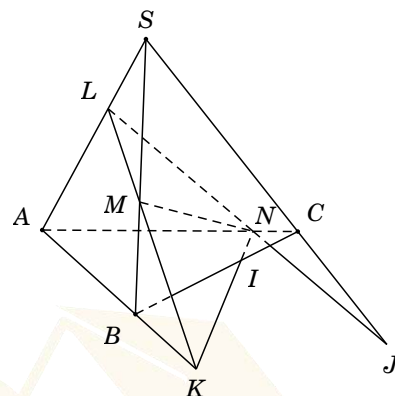
Lời giải

Ta có: $M \in SB$ suy ra M là điểm chung của (LMN) và (SBC) .

I là điểm chung của (LMN) và (SBC) .

J là điểm chung của (LMN) và (SBC) .

Vậy M, I, J thẳng hàng vì cùng thuộc giao tuyến của (LMN) và (SBC) .



Ví dụ 4.4.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ không phải là hình thang. Trên cạnh SC lấy điểm M . Gọi N là giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMB) . Chứng minh rằng ba đường thẳng AB, CD, MN đồng quy.

Lời giải

Gọi $I = AD \cap BC$.

Trong (SBC) , gọi $K = BM \cap SI$.

Trong (SAD) , gọi $N = AK \cap SD$.

Khi đó N là giao điểm của đường thẳng SD với (AMB) .

Gọi $O = AB \cap CD$.

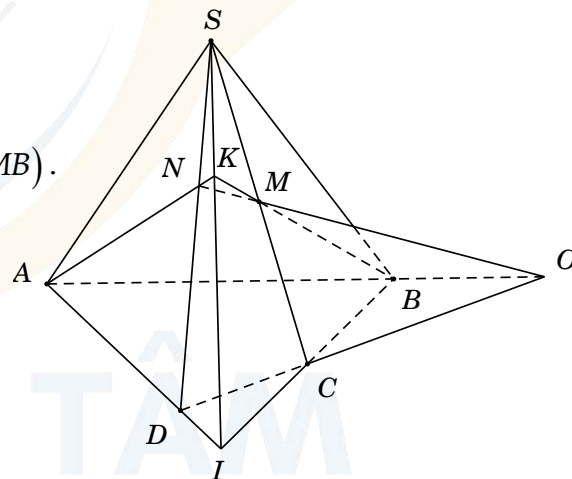
Ta có:

- $O \in AB$ mà $AB \subset (AMB)$ suy ra $O \in (AMB)$.
- $O \in CD$ mà $CD \subset (SCD)$ suy ra $O \in (SCD)$.

Do đó $O \in (AMB) \cap (SCD)$ (1)

Mà $(AMB) \cap (SCD) = MN$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $O \in MN$. Vậy ba đường thẳng AB, CD, MN đồng quy.



Ví dụ 4.5.

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD tương ứng tại các điểm M, N, P, Q . Chứng minh rằng: Các đường thẳng MP, NQ, SO đồng qui.

Lời giải



Trong mặt phẳng $(MNPQ)$ gọi $I = MP \cap NQ$.

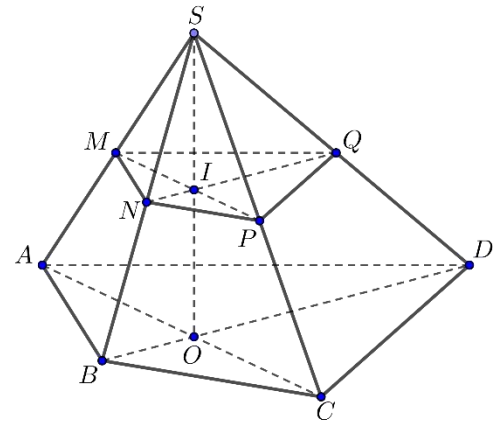
Ta sẽ chứng minh $I \in SO$.

Để thấy $SO = (SAC) \cap (SBD)$.

$$\begin{cases} I \in MP \subset (SAC) \\ I \in NQ \subset (SBD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in (SAC) \\ I \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in SO$$

Vậy MP, NQ, SO đồng quy tại I .



Ví dụ 4.6.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Mặt phẳng (α) qua MN cắt AD, BC lần lượt tại P và Q . Biết MP cắt NQ tại I . Chứng minh ba điểm I, B, D thẳng hàng.

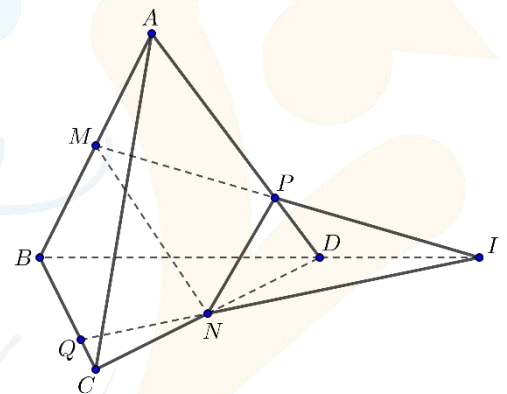
Lời giải

Ta có $(ABD) \cap (BCD) = BD$.

$$\text{Lại có } \begin{cases} I \in MP \subset (ABD) \\ I \in NQ \subset (BCD) \end{cases}$$

$\Rightarrow I$ thuộc giao tuyến của (ABD) và (BCD)

$\Rightarrow I \in BD \Rightarrow I, B, D$ thẳng hàng.



TOÁN TỪ TÂM



Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Trong hình học không gian, cho trước một mặt phẳng (P) . Khẳng định nào đúng?

- A. Điểm luôn phải thuộc mặt phẳng (P) .
- B. Điểm luôn không thuộc mặt phẳng (P) .
- C. Điểm vừa thuộc, đồng thời vừa không thuộc mặt phẳng (P) .
- D. Điểm có thể thuộc mặt phẳng (P) , có thể không thuộc mặt phẳng (P) .

» Lời giải

Chọn D

Điểm có thể nằm trên mặt phẳng đã cho hoặc không nằm trên mặt phẳng đó.

» Câu 2. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. Qua 2 điểm phân biệt có duy nhất một mặt phẳng.
- B. Qua 3 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.
- C. Qua 3 điểm không thẳng hàng có duy nhất một mặt phẳng.
- D. Qua 4 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.

» Lời giải

Chọn C

- A sai. Qua 2 điểm phân biệt, tạo được 1 đường thẳng, khi đó chưa đủ điều kiện để lập một mặt phẳng xác định. Có vô số mặt phẳng đi qua 2 điểm đã cho.
- B sai. Trong trường hợp 3 điểm phân biệt thẳng hàng thì chỉ tạo được đường thẳng, khi đó có vô số mặt phẳng đi qua 3 điểm phân biệt thẳng hàng.
- D sai. Trong trường hợp 4 điểm phân biệt thẳng hàng thì có vô số mặt phẳng đi qua 4 điểm đó hoặc trong trường hợp 4 điểm mặt phẳng không đồng phẳng thì sẽ tạo không tạo được mặt phẳng nào đi qua cả 4 điểm.

» Câu 3. Cho 2 đường thẳng a, b cắt nhau và không đi qua điểm A . Xác định được nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng bởi a, b và A ?

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4.

» Lời giải

Chọn C

Xác định được 3 mặt phẳng gồm $(a, b), (A, a), (B, b)$.

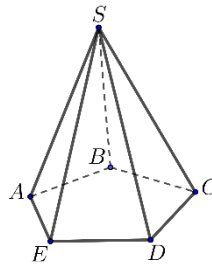
» Câu 4. Một hình chóp có đáy là ngũ giác có số mặt và số cạnh là:

- A. 5 mặt, 5 cạnh.
- B. 6 mặt, 5 cạnh.
- C. 6 mặt, 10 cạnh.
- D. 5 mặt, 10 cạnh.

» Lời giải

Chọn C

Hình chóp ngũ giác có 5 mặt bên + 1 mặt đáy. 5 cạnh bên và 5 cạnh đáy.



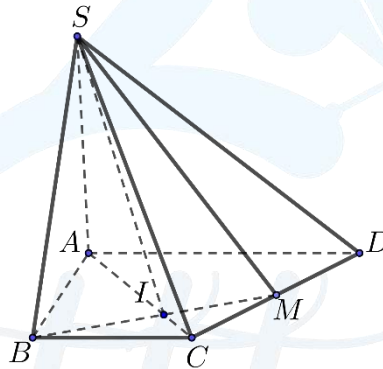
» **Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Gọi M là trung điểm CD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là:

- A.** SI (I là giao điểm của AC và BM). **B.** SJ (J là giao điểm của AM và BD).
C. SO (O là giao điểm của AC và BD). **D.** SP (P là giao điểm của AB và CD).

Lời giải

Chọn A

Ta có $(MSB) \cap (SAC) = SI$.

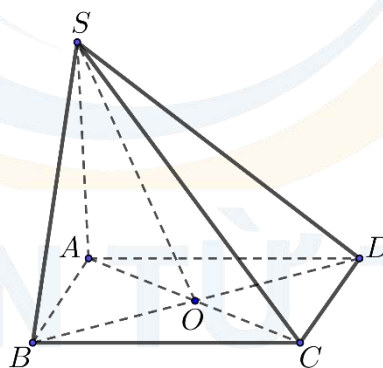


» **Câu 6.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là

- A.** SO . **B.** SC . **C.** SD . **D.** SA .

Lời giải

Chọn A



Ta có $S \in (SAC) \cap (SBD)$ (1).

Lại có $\begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases}$ nên $O \in (SAC) \cap (SBD)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO .

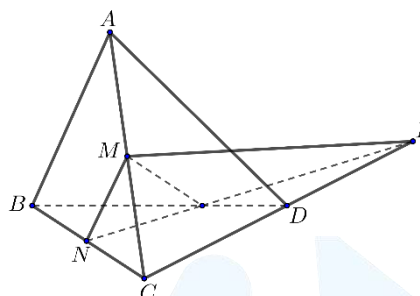


» **Câu 7.** Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC . Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$. Giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP) là giao điểm của

- A. CD và NP . B. CD và MN . C. CD và MP . D. NP và AP .

» *Lời giải*

Chọn A



Xét mặt phẳng BCD chứa CD .

Do NP không song song CD nên NP cắt CD tại I .

Điểm $I \in NP \Rightarrow I \in (MNP)$.

Vậy CD cắt (MNP) tại I là giao điểm của CD và NP .

» **Câu 8.** Trong mặt phẳng (α) cho tứ giác $ABCD$, điểm $E \notin (\alpha)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tạo bởi ba trong năm điểm A, B, C, D, E ?

- A. 7. B. 8. C. 9. D. 6.

» *Lời giải*

Chọn A

Điểm E và 2 điểm bất kì trong 4 điểm A, B, C, D tạo thành $C_4^2 = 6$ mặt phẳng.

Bốn điểm A, B, C, D tạo thành 1 mặt phẳng.

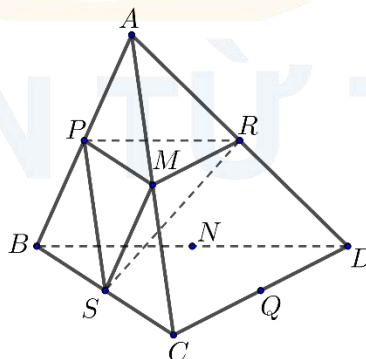
Vậy có tất cả 7 mặt phẳng.

» **Câu 9.** Cho tứ diện $ABCD$. Các cạnh AC, BD, AB, CD, AD, BC có trung điểm lần lượt là M, N, P, Q, R, S . Bốn điểm nào sau đây **không** cùng thuộc một mặt phẳng?

- A. M, P, R, S . B. M, N, P, Q . C. M, R, S, N . D. P, Q, R, S .

» *Lời giải*

Chọn A



Ta có: $R \in AD, AD \notin (ABC) \Rightarrow R \notin (ABC)$.



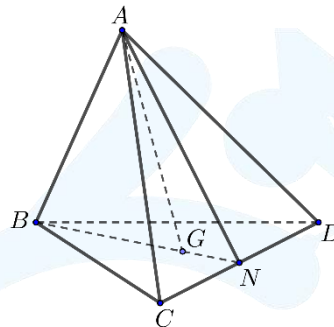
Mà $\begin{cases} M \in AC, AC \subset (ABC) \\ P \in AB, AB \subset (ABC) \\ S \in BC, BC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow M, P, S \in (ABC)$ nên M, P, R, S không cùng thuộc mặt phẳng.

» **Câu 10.** Cho tứ diện $ABCD$. G là trọng tâm tam giác BCD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (GAB) là

- A.** AN , N là trung điểm CD . **B.** AM , M là trung điểm AB .
C. AH , H là hình chiếu của B trên CD . **D.** AK , K là hình chiếu của C trên BD .

» **Lời giải**

Chọn A



A là điểm chung thứ nhất của (ACD) và (GAB)

G là trọng tâm tam giác BCD , N là trung điểm CD nên $N \in BG$ nên N là điểm chung thứ hai của (ACD) và (GAB) .

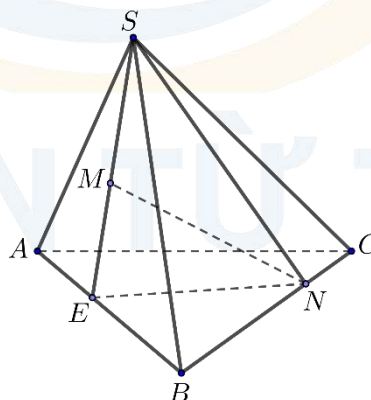
Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (GAB) là AN .

» **Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M nằm trong tam giác SAB , N thuộc đoạn BC . Giao tuyến của (SMN) và (ABC) là

- A.** NA . **B.** NE với $E = SM \cap AB$.
C. NF với $F = SM \cap AC$. **D.** NK với K nằm trong tam giác ABC .

» **Lời giải**

Chọn B



Trong mặt phẳng (SAB) , gọi $E = SM \cap AB$.

Ta có: $\begin{cases} E \in SM \subset (SMN) \\ E \in AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow E \in (SMN) \cap (ABC) \quad (1);$



$$\text{Và } \begin{cases} N \in (SMN) \\ N \in BC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow N \in (SMN) \cap (ABC) \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $NE = (SMN) \cap (ABC)$.

» **Câu 12.** Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi H, K lần lượt là hai điểm trên hai cạnh $SA; SC$ ($H \neq A; H \neq S$ và $K \neq S, K \neq C$) sao cho HK không song song với AC . Gọi I là trung điểm của BC . Giao điểm của đường thẳng BK và mặt phẳng (SAI) là

A. J với $J = SI \cap BK$.

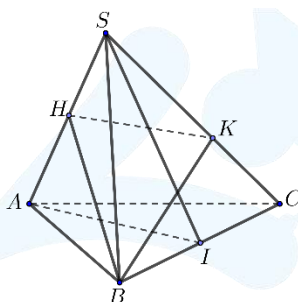
B. J với $J = SI \cap BH$.

C. J với $J = SI \cap HK$.

D. J với $J = SI \cap HK$.

» **Lời giải**

Chọn A



Trong mặt phẳng (SBC) , gọi $J = BK \cap SI$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} J \in BK \subset (BHK) \\ J \in SI \end{cases} \Rightarrow J = SI \cap (BHK).$$

» **Câu 13.** Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M là trung điểm SA ; N và P lần lượt là điểm bất kì trên cạnh SB, SC (không trùng với trung điểm và hai đầu mút của đoạn thẳng tương ứng). Giao điểm của MN với (ABC) là

A. Giao điểm của MN với BC .

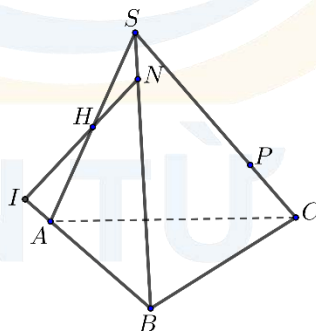
B. Giao điểm của MP với BC .

C. Giao điểm của MN với AB .

D. Giao điểm của MP với AC .

» **Lời giải**

Chọn C



Trong mặt phẳng (SAB) , gọi $MN \cap AB = I$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} I \in MN \\ I \in AB \Rightarrow I \in (ABC) \end{cases} \Rightarrow I = MN \cap (ABC).$$

» **Câu 14.** Cho tứ diện $ABCD$. Lấy điểm M sao cho $AM = 2BM$ và N là trung điểm AD . Gọi O là một điểm thuộc miền trong của $\triangle BCD$ và giả sử MN cắt DB tại F . Giao điểm của BC với (OMN) là

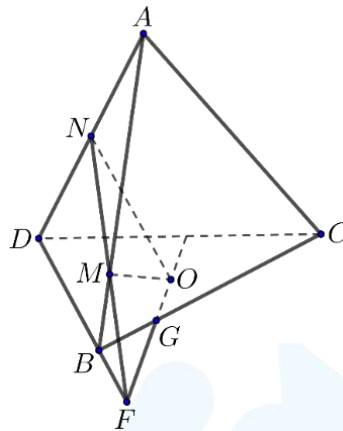


- A.** Giao điểm của BC với OM .
C. Giao điểm của BC với OF .

- B.** Giao điểm của BC với MN .
D. Giao điểm của BC với ON .

Lời giải

Chọn C



$$\text{Ta có: } \begin{cases} F \in MN \subset (MNO) \Rightarrow F \in (MNO) \\ F \in BD \subset (BDC) \Rightarrow F \in (BDC) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NF \subset (MNO) \\ FO \subset (BDC); FO \subset (MNO) \end{cases}$$

Trong mặt phẳng (BDC) , gọi $FO \cap BC = G$.

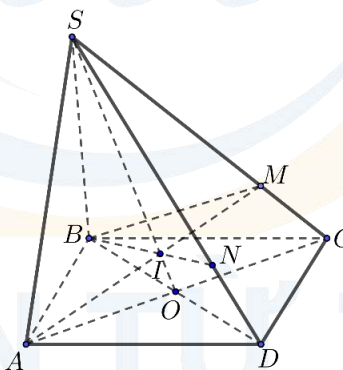
$$\text{Khi đó: } \begin{cases} G \in BC \\ G \in FO \subset (MNO) \end{cases} \Rightarrow G = BC \cap (MNO).$$

» **Câu 15.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SC sao cho $SM = 3MC$, N là giao điểm của SD và (MAB) . Gọi O là giao điểm của AC và BD . Khi đó ba đường thẳng nào đồng quy?

- A.** AB, MN, CD . **B.** SO, BD, AM . **C.** SO, AM, BN . **D.** SO, AC, BN .

Lời giải

Chọn C



$$\text{Gọi } I = BN \cap AM \text{ nên } \begin{cases} I \in BN \subset (SBD) \\ I \in AM \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow I \in (SBD) \cap (SAC) \quad (1).$$

$$\text{Mà } \begin{cases} O \in BD \subset (SBD) \\ O \in AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow O \in (SBD) \cap (SAC) \quad (2).$$

$$\text{Mà } (SBD) \cap (SAC) = SO \quad (3).$$

Vậy ba đường thẳng SO, AM, BN đồng quy.

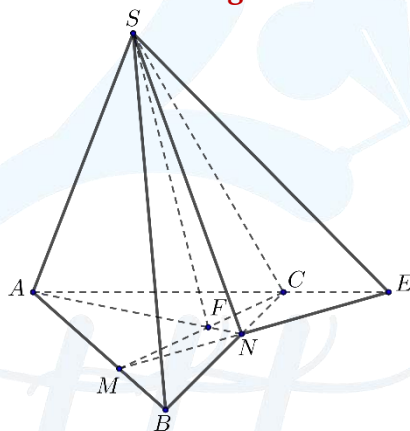


B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» **Câu 16.** Cho tứ diện $SABC$. Gọi M và N lần lượt là hai điểm trên hai cạnh AB và BC sao cho MN không song song với AC . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đường thẳng MN cắt đường thẳng AC .		
(b)	Giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC) là giao điểm của MN và AC .		
(c)	Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là đường thẳng đi qua giao điểm của MN và AC .		
(d)	Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAN) và (SCM) là đường thẳng đi qua giao điểm của MN và AC .		

» **Lời giải**



(a) Đường thẳng MN cắt đường thẳng AC .

Trong mặt phẳng (ABC) , vẽ giao điểm E của MN và AC .

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC) là giao điểm của MN và AC .

Trong mặt phẳng (ABC) , vẽ giao điểm E của MN và AC .

Ta có $E \in AC$, suy ra $E \in (SAC)$.

Vậy E là giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC) .

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là đường thẳng đi qua giao điểm của MN và AC .

Ta có S và E là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) .

Suy ra $(SMN) \cap (SAC) = SE$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAN) và (SCM) là đường thẳng đi qua giao điểm của MN và AC .

Trong mặt phẳng (ABC) , vẽ giao điểm F của AN và MC .

Ta có S và F là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SAN) và (SCM) .

Suy ra $(SAN) \cap (SCM) = SF$.

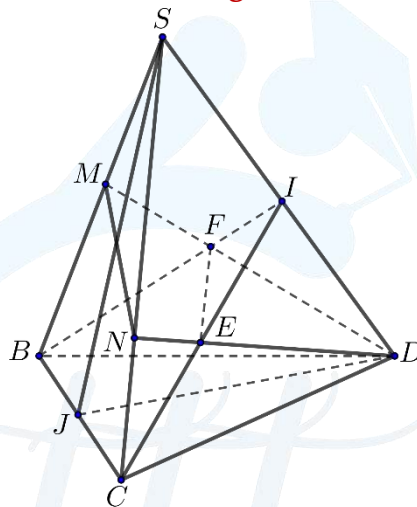


» Chọn SAI.

» **Câu 17.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC , M là một điểm trên cạnh AB, N là một điểm trên cạnh AC sao cho MN không song song BC . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	ND là giao tuyến của hai mặt phẳng $(MND), (ADC)$.		
(b)	BI là giao tuyến của hai mặt phẳng $(BCI), (ABD)$.		
(c)	IJ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(IBC), (JAD)$.		
(d)	Giao tuyến của hai mặt phẳng $(IBC), (DMN)$ song song với đường thẳng IJ .		

» **Lời giải**



(a) ND là giao tuyến của hai mặt phẳng $(MND), (ADC)$.

Ta có: N và D là hai điểm chung của hai mặt phẳng (MND) và (ADC) .

Suy ra $(MND) \cap (ADC) = ND$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) BI là giao tuyến của hai mặt phẳng $(BCI), (ABD)$.

Ta có: B và I là hai điểm chung của hai mặt phẳng (BCI) và (ABD) .

Suy ra $(BCI) \cap (ABD) = BI$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) IJ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(IBC), (JAD)$.

Ta có: $I \in AD, AD \subset (JAD) \Rightarrow I \in (JAD) \Rightarrow IJ \subset (JAD)$;

$J \in BC, BC \subset (IBC) \Rightarrow J \in (IBC) \Rightarrow IJ \subset (IBC)$. Vậy $(IBC) \cap (JAD) = IJ$.

» Chọn ĐÚNG.

(d) Giao tuyến của hai mặt phẳng $(IBC), (DMN)$ song song với đường thẳng IJ .

Gọi $E = DN \cap CI$ (trong $mp(ACD)$) và $F = DM \cap BI$ (trong $mp(ABD)$).

Ta có:
$$\begin{cases} E \in DN, DN \subset (DMN) \\ E \in IC, IC \subset (IBC) \end{cases}$$



$$\Rightarrow E \in (DMN) \cap (IBC) (1).$$

$$\text{Tương tự: } \begin{cases} F \in DM, DM \subset (DMN) \\ F \in BI, BI \subset (IBC) \end{cases} \Rightarrow F \in (DMN) \cap (IBC) (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $(DMN) \cap (IBC) = EF$.

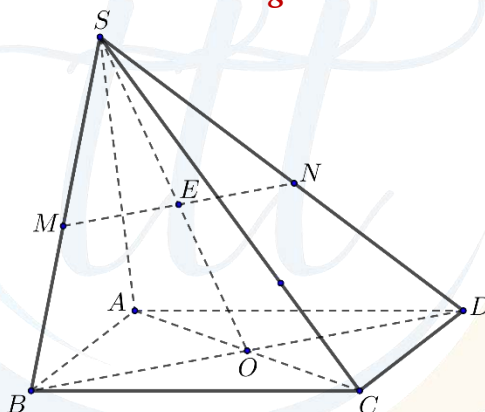
Khi đó EF cắt IJ .

» **Chọn SAI.**

» **Câu 18.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của AC và BD ; M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD ; P thuộc đoạn SC và không là trung điểm của SC . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO .		
(b)	Giao điểm E của đường thẳng SO và (MNP) là giao điểm của MN và SO .		
(c)	Giao điểm Q của đường thẳng SA và (MNP) là giao điểm của PE và SO .		
(d)	Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của QM và AB , QP và AC , QN và AD . Vậy I, J, K thẳng hàng.		

» **Lời giải**



(a) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} S \in (SAC) \cap (SBD) \\ O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD).$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Giao điểm E của đường thẳng SO và (MNP) là giao điểm của MN và SO .

Trong (SBD) : $SO \cap MN = E$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} E \in SO \\ E \in MN \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow E \in SO \cap (MNP).$$

» **Chọn ĐÚNG.**

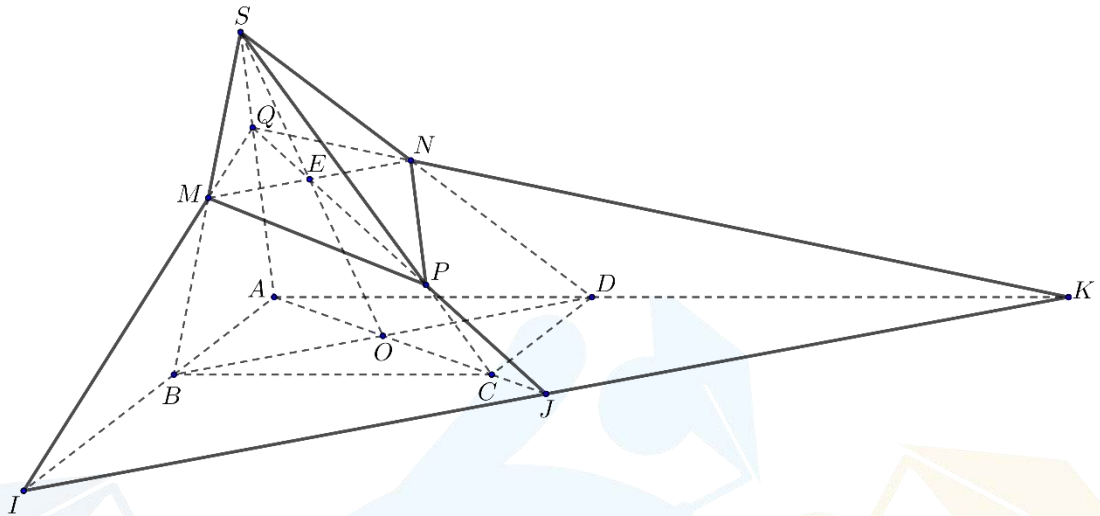
(c) Giao điểm Q của đường thẳng SA và (MNP) là giao điểm của PE và SO .



Trong $(SAC): PE \cap SA = Q$.

Ta có $\begin{cases} Q \in SA \\ Q \in PE \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow Q \in SA \cap (MNP)$.

» Chọn SAI.



(d) Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của QM và AB , QP và AC , QN và AD . Vậy I, J, K thẳng hàng.

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} I \in QM \subset (MNP) \\ J \in QP \subset (MNP) \\ K \in QN \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow I, J, K \in (MNP) \quad (1)$

Mặt khác $\begin{cases} I \in AB \subset (ABCD) \\ J \in AC \subset (ABCD) \\ K \in AD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow I, J, K \in (ABCD) \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $I, J, K \in (MNP) \cap (ABCD)$.

Suy ra I, J, K thẳng hàng.

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB , O là giao điểm của AC và BD . Xét tính đúng sai các khẳng định sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Giao điểm của đường thẳng SA và $(ABCD)$ là điểm D .		
(b)	Giao điểm của đường thẳng BD và (SAC) là trung điểm của đoạn thẳng AC .		
(c)	Giao điểm của đường thẳng SO và $(ABNM)$ là điểm D .		
(d)	Gọi I giao điểm của SO và mặt phẳng $(MNCD)$. Khi đó $SI = 2IO$		

» Lời giải

(a) Giao điểm của đường thẳng SA và $(ABCD)$ là điểm D .

Giao điểm $SA \cap (ABCD) = \{A\}$.

» Chọn SAI.

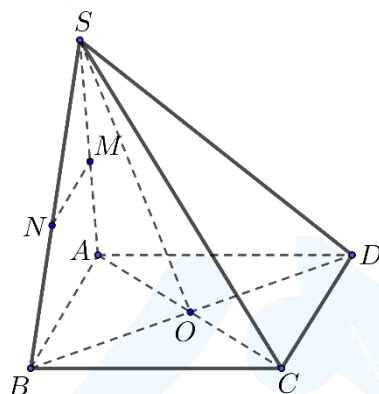


(b) Giao điểm của đường thẳng BD và (SAC) là trung điểm của đoạn thẳng AC .

Ta có $\begin{cases} O \in BD \\ O \in AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow BD \cap (SAC) = \{O\}$, với O là trung điểm của đoạn thẳng AC

» **Chọn ĐÚNG.**

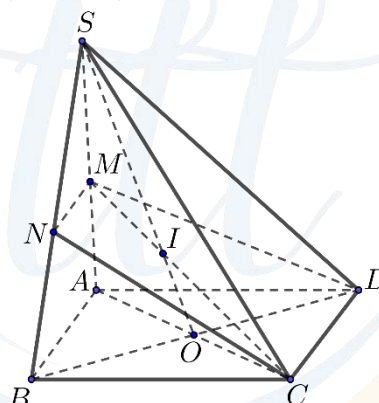
(c) Giao điểm của đường thẳng SO và $(ABNM)$ là điểm D .



Ta có $\begin{cases} S \in SO \\ S \in AM \subset (ABNM) \end{cases} \Rightarrow SO \cap (ABNM) = \{S\}$.

» **Chọn SAI.**

(d) Gọi I giao điểm của SO và mặt phẳng $(MNCD)$. Khi đó $SI = 2IO$.



Gọi $I = SO \cap CM \Rightarrow \begin{cases} I \in SO \\ I \in CM \subset (MNCD) \end{cases} \Rightarrow I = SO \cap (MNCD)$.

Ta lại có O, M lần lượt là trung điểm $BD, SA \Rightarrow I$ trọng tâm $\triangle SAC \Rightarrow SI = 2IO$.

» **Chọn ĐÚNG.**

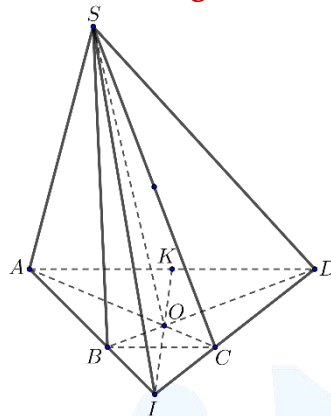
» **Câu 20.** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân ($AD \parallel BC, AD > BC$). I là giao điểm của AB và DC . O là giao điểm của AC và BD . M, K lần lượt là trung điểm của SC và AD . Xét tính đúng sai các khẳng định sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Ba điểm S, O, I thẳng hàng.		
(b)	Ba điểm K, O, I thẳng hàng.		
(c)	DM cắt mặt phẳng (SAB) tại J , khi đó S, J, I thẳng hàng		



- (d) Mặt phẳng (α) qua M cắt các cạnh SA, SB, SD lần lượt tại P, N, Q thì SO, MP, NQ đồng quy.

Lời giải



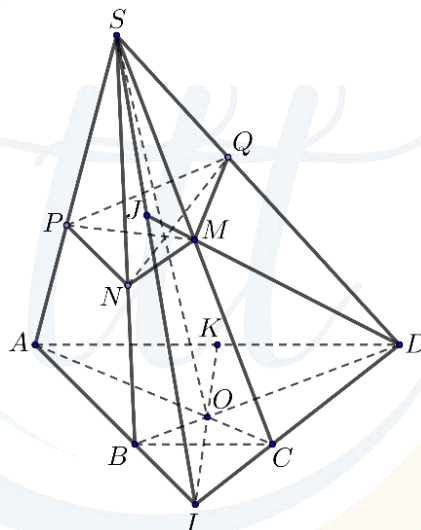
- (a) Ba điểm S, O, I thẳng hàng.

Dễ thấy S, O, I không cùng thuộc 1 mặt phẳng nên không thể thẳng hàng.

» **Chọn SAI.**

- (b) Ba điểm K, O, I thẳng hàng.

» **Chọn ĐÚNG.**



- (c) DM cắt mặt phẳng (SAB) tại J , khi đó S, J, I thẳng hàng

Dễ thấy S, J, I là điểm chung 2 mặt phẳng phân biệt (SAB) và (SCD) .

Suy ra S, J, I thẳng hàng, vì cùng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng.

» **Chọn ĐÚNG.**

- (d) Mặt phẳng (α) qua M cắt các cạnh SA, SB, SD lần lượt tại P, N, Q thì SO, MP, NQ đồng quy.

Khi đó SO, MP, NQ là các giao tuyến của các cặp mặt phẳng của ba mặt phẳng phân biệt $(SBD), (SAC), (MNPQ)$.

Mà hai giao tuyến MP, NQ cắt nhau. Suy ra SO, MP, NQ đồng quy.

» **Chọn ĐÚNG.**

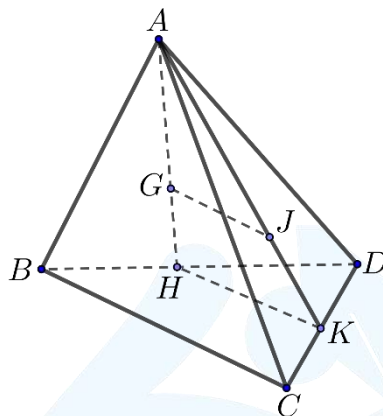


C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 21.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G, J lần lượt là trọng tâm $\triangle ABD, \triangle ACD$. Gọi d là giao tuyến của mặt phẳng (AGJ) và (BCD) . Biết $\triangle BCD$ là tam giác đều cạnh bằng $\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ D đến đường thẳng d .

🔗 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0,75**



Gọi H, K lần lượt là trung điểm BD, CD .

Ta có:
$$\begin{cases} H \in AG \subset (AGJ) \\ H \in BD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow H \in (BCD) \cap (AGJ) \quad (1)$$

Tương tự:
$$\begin{cases} K \in AJ \subset (AGJ) \\ K \in CD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow K \in (BCD) \cap (AGJ) \quad (2)$$

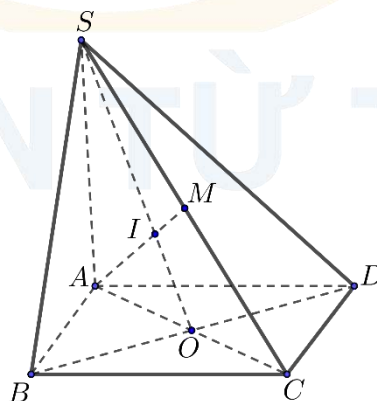
Từ (1) và (2) $\Rightarrow (BCD) \cap (AGJ) = HK \equiv d$.

$\triangle BCD$ đều nên $\Rightarrow d(D, d) = d(D, HK) = \frac{1}{2} \cdot d(D, BC) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,75$.

» **Câu 22.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M là trung điểm SC và I là giao điểm của AM và mặt phẳng (SBD) . Biết rằng $\triangle SAC$ vuông tại S và $AC = 6$. Tính độ dài đoạn OI .

🔗 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 1**



Trong (SAC) , gọi $I = AM \cap SO$

Ta có:
$$\begin{cases} I \in AM \\ I \in SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I = AM \cap (SBD)$$



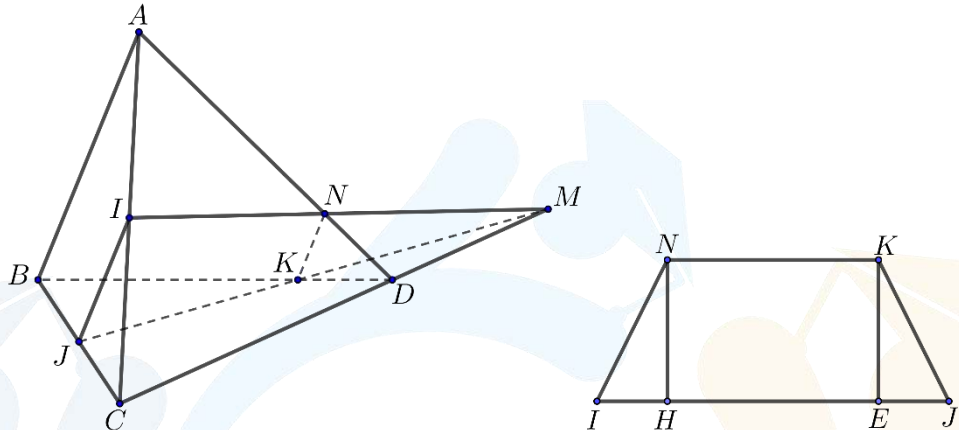
Vì I là giao điểm của SO và AM là hai trung tuyến của $\triangle SAC$ nên suy ra I là trọng tâm $\triangle SAC$

$$\text{Suy ra } OI = \frac{1}{3}SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 = 1$$

» **Câu 23.** Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 1. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC, BC , K là một điểm trên cạnh BD sao cho $KB = 2KD$. Tính diện tích của thiết diện tạo bởi (IJK) và tứ diện $ABCD$. (làm tròn đến hàng phần trăm)

✍ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0,25**



Trong (BCD) : gọi $M = JK \cap CD$.

Trong (ACD) : gọi $N = IM \cap AD$.

Ta có:

$$(IJK) \cap (ABC) = IJ.$$

$$(IJK) \cap (BCD) = JK.$$

$$(IJK) \cap (ABD) = KN.$$

$$(IJK) \cap (ACD) = NI.$$

Suy ra thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (IJK) là tứ giác $(IJKN)$.

Ta có I, J lần lượt là trung điểm của AC, BC .

Suy ra IJ là đường trung bình của $\triangle ABC$.

Do đó $IJ \parallel AB$.

$$\text{Mà } (IJK) \cap (ABD) = KN.$$

Vì vậy $KN \parallel AB \parallel IJ$ (1)

$$\text{Áp dụng định lý Thales, ta có } \frac{AN}{DA} = \frac{BK}{DB} = \frac{2}{3}.$$

Mà $BD = AD$ (do $ABCD$ là tứ diện đều).

Suy ra $AN = BK$.

Ta có $\triangle AIN = \triangle BJK$ (c.g.c).

Suy ra $IN = JK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $IJKN$ là hình thang cân.

Kẻ $NH \perp IJ$ tại H và $KE \perp IJ$ tại E .



Ta có $IJ = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}$; $NK = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}$; $BJ = \frac{BC}{2} = \frac{1}{2}$ và $BK = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3}$.

Ta có $IH = EJ$ và $NK = HE$.

$$\text{Suy ra } IH = \frac{IJ - NK}{2} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{12}.$$

$$\text{Ta có } JK^2 = BJ^2 + BK^2 - 2BJ \cdot BK \cdot \cos JBK = \frac{a^2}{4} + \frac{4a^2}{9} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2a}{3} \cdot \cos 60^\circ = \frac{13}{36}$$

$$\text{Suy ra } NI = JK = \frac{\sqrt{13}}{6}.$$

Tam giác NIH vuông tại H :

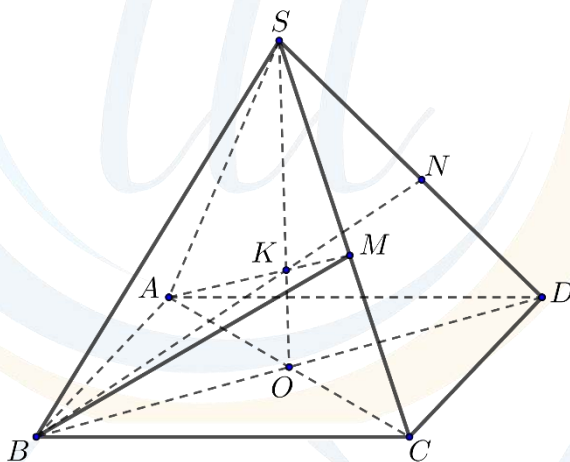
$$NH = \sqrt{NI^2 - IH^2} = \sqrt{\frac{13}{36} - \frac{1}{144}} = \frac{\sqrt{51}}{12}$$

$$\text{Diện tích hình thang } IJKN \text{ là: } S = \frac{NH \cdot (NK + IJ)}{2} = \frac{\frac{\sqrt{51}}{12} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{5\sqrt{51}}{144} \approx 0,25$$

» **Câu 24.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh bằng a , $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$. Điểm M là trung điểm SC . Gọi N giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM) . Tỉ số $\frac{SN}{SD}$ bằng

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0,5**



Chọn mặt phẳng phụ (SBD) chứa SD .

Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBD) và (ABM) .

Ta có B là điểm chung thứ nhất của (SBD) và (ABM) .

Trong $(ABCD)$, ta có $O = AC \cap BD$.

Trong (SAC) , gọi $K = AM \cap SO$.

Khi đó $(SBD) \cap (ABM) = BK$.

Trong (SBD) lấy $N = BK \cap SD$ thì $N = SD \cap (ABM)$.

Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a nên $AC = BD = a\sqrt{2}$

Do đó: $\triangle SAC$ và $\triangle SBD$ là các tam giác đều.



Mà $K = AM \cap SO \Rightarrow K$ là trọng tâm $\triangle SAC$

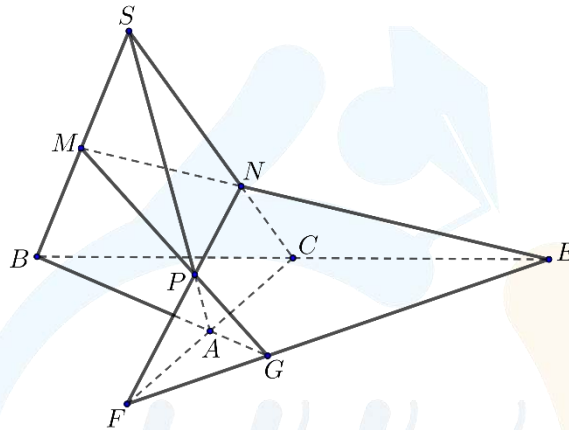
$\Rightarrow K$ là trọng tâm $\triangle SBD \Rightarrow BN$ là trung tuyến của $\triangle SBD \Rightarrow N$ là trung điểm SD

$$\Rightarrow \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2} = 0,5$$

» **Câu 25.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = 2$. Lấy điểm M là trung điểm SB , lấy điểm E đối xứng với B qua C , N là giao điểm của SC và BE . Lấy điểm F đối xứng với C qua A , đường thẳng NF cắt SA tại P . Trong mặt phẳng (SAB) đường thẳng MP cắt AB tại G . Khi đó độ dài $EG + GF$ bằng? (làm tròn đến hàng phần trăm)

🔗 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 6,32**



Ta có: $\begin{cases} E \in (MEF) \\ E \in BC \subset (ABC) \Rightarrow E \in (ABC) \end{cases} \Rightarrow E \in (MEF) \cap (ABC) (1)$

$\begin{cases} F \in (MEF) \\ F \in AC \subset (ABC) \Rightarrow F \in (ABC) \end{cases} \Rightarrow F \in (MEF) \cap (ABC) (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow EF = (MEF) \cap (ABC)$

Mặt khác $\begin{cases} G \in MP \subset (MEF) \Rightarrow G \in (MEF) \\ G \in AB \subset (ABC) \Rightarrow G \in (ABC) \end{cases} \Rightarrow G \in (MEF) \cap (ABC)$

$\Rightarrow G \in EF \Rightarrow G, E, F$ thẳng hàng $\Rightarrow EG + GF = EF$

Vì E đối xứng với B qua $C \Rightarrow CE = BC = 2\sqrt{2}$

F đối xứng với C qua $A \Rightarrow AF = AC = 2 \Rightarrow CF = 4$

$\triangle ABC$ vuông cân tại $A \Rightarrow \angle FCE = 135^\circ$

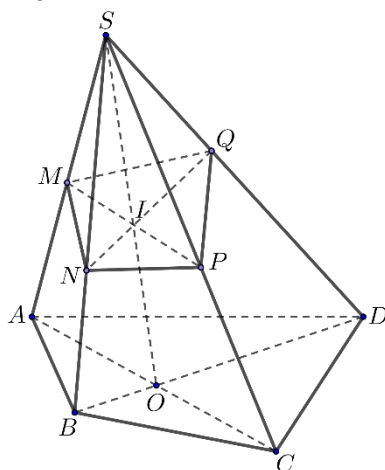
Áp dụng định lý cosin cho tam giác $\triangle CEF$ ta có:

$$EF = \sqrt{CE^2 + CF^2 - 2CE \cdot CF \cdot \cos \angle FCE} = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ} = 2\sqrt{10} \approx 6,32$$

» **Câu 26.** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . M, P lần lượt là trung điểm SA và SC , một mặt phẳng (α) qua MP cắt SB, SD lần lượt tại N và Q . Gọi I là giao điểm MP và NQ , khi đó tỉ số $\frac{SI}{IO}$ bằng?

🔗 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 1**



Ta có $S \in (SAC) \cap (SBD)$

Mặt khác $\begin{cases} O \in AC, AC \subset (SAC) \\ O \in BD, BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$

$\Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD)$ (1)

Mặt khác: $\begin{cases} I \in MP, MP \subset (SAC) \\ I \in NQ, NQ \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAC) \cap (SBD)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $I \in SO$ hay các đường thẳng MP, NQ, SO đồng quy tại điểm I .

Ta có M, P lần lượt là trung điểm $SA, SC \Rightarrow \frac{MP}{AC} = \frac{1}{2}$

Mà $\begin{cases} I \in SO \\ I \in MP \end{cases} \Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{MP}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow I \text{ là trung điểm } SO \Rightarrow \frac{SI}{IO} = 1$

Hết

TOÁN TỪ TÂM



Chương 04

Bài 2.

HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A

Lý thuyết

1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian



Định nghĩa:

Hai đường thẳng gọi là **đồng phẳng** nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng.

Chú ý:

- » Hai đường thẳng **chéo nhau** nếu chúng không đồng phẳng.
- » Hai đường thẳng **song song** nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung.
- » Có đúng một mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song.

	$a // b \Leftrightarrow a$ và b cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.
	a cắt b hay $a \cap b \Leftrightarrow a$ và b cùng nằm trong một mặt phẳng và có một điểm chung duy nhất.
	$a \equiv b \Leftrightarrow a$ và b cùng nằm trong một mặt phẳng và có từ hai điểm chung trở lên.
	a chéo $b \Leftrightarrow a$ và b không cùng nằm trong một mặt phẳng.

TOÁN TỪ TÂM



2. Tính chất cơ bản về 2 đường thẳng song song



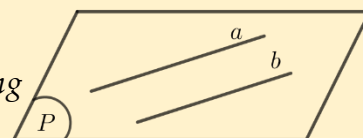
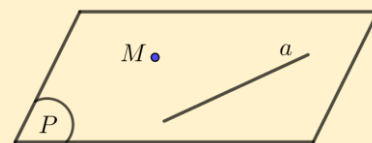
Định lý 1:

- » Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau

Nhận xét:

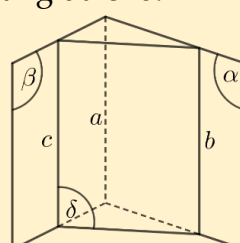
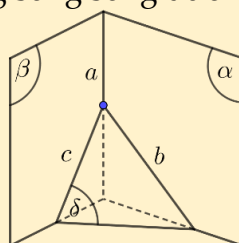
Ta có thêm một cách để xác định mặt phẳng như sau:

Hai đường thẳng song song a và b xác định nên một mặt phẳng ký hiệu (a, b) .



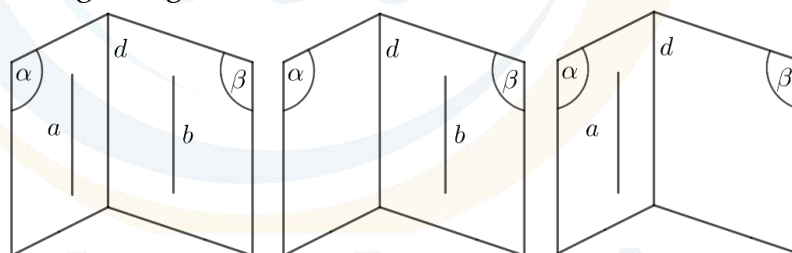
Định lý 2: Về giao tuyến 2 mặt phẳng

- » Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.



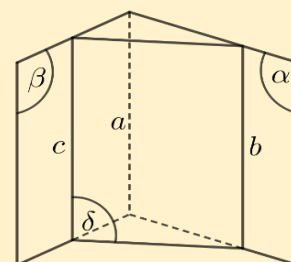
Hệ quả

Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



Định lý 3:

- » Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.





B

Các dạng bài tập

Dạng 1. Chứng minh hai đường song song



Phương pháp

□ Ta có thể dùng một trong các cách sau

01

Xét mặt phẳng chứa a, b .

Dùng các định lý đường trung bình, Định lý Thales đảo,... để chứng minh $a//b$.

02

Dùng định lý bắc cầu $\begin{cases} a//c \\ b//c \end{cases} \Rightarrow a//b$.

03

Dùng định lý $\begin{cases} a//b \\ a \subset (\alpha), b \subset (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a//b//c \\ a \equiv b \\ a \equiv c \end{cases}$



Ví dụ 1.1.

Cho tứ diện $ABCD$ có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, CD, BC, AD . Chứng minh rằng tứ giác $MPNQ$ là hình bình hành.

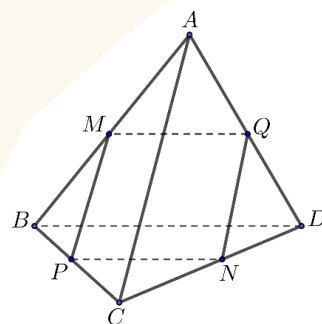
Lời giải

Trong $\triangle ABC$ có MP là đường trung bình nên $MP//AC$ và $MP = \frac{1}{2}AC$ (1).

Trong $\triangle ACD$ có QN là đường trung bình nên $QN//AC$ và $QN = \frac{1}{2}AC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $MP//QN$ và $MP = QN$.

Do đó tứ giác $MPNQ$ là hình bình hành.



Ví dụ 1.2.

Cho tứ diện $ABCD$ có I, J lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC, ABD . Chứng minh rằng: $IJ//CD$.

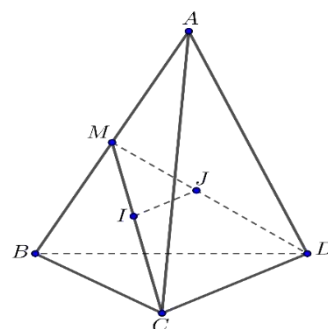
Lời giải

Gọi M là trung điểm của AB

Xét $\triangle ABC$ có: $\frac{MI}{MC} = \frac{1}{3}$ và xét $\triangle ABD$ có: $\frac{MJ}{MD} = \frac{1}{3}$

Do $\frac{MI}{MC} = \frac{MJ}{MD} = \frac{1}{3}$

Nên $IJ//CD$





Ví dụ 1.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BC, SC, SD, AD sao cho $MN \parallel BS$, $NP \parallel CD$, $MQ \parallel CD$. Chứng minh $PQ \parallel SA$.

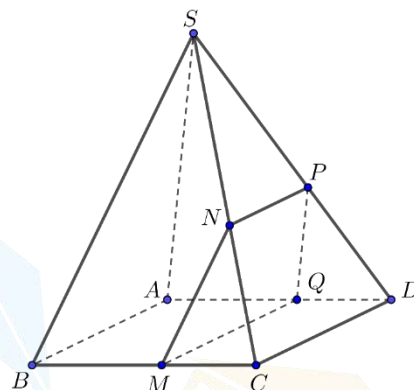
Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} MN \parallel BS \\ MQ \parallel CD \Rightarrow MQ \parallel AB \end{cases}$$

$$\Rightarrow (MNPQ) \parallel (SAB)$$

$$\text{Mặt khác: } \begin{cases} (MNPQ) \cap (SAD) = PQ \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases}$$

$$\Rightarrow PQ \parallel SA.$$



Ví dụ 1.4.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD . Chứng minh $MPNQ$ là hình bình hành. Từ đó suy ra ba đoạn MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đoạn.

Lời giải

MQ là đường trung bình của $\triangle ABD$

$$\Rightarrow \begin{cases} MQ \parallel DB \\ MQ = \frac{1}{2} BD \end{cases} \quad (1)$$

NP là đường trung bình của $\triangle BCD$

$$\Rightarrow \begin{cases} PN \parallel BD \\ PN = \frac{1}{2} BD \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1); (2) $\Rightarrow PN \parallel QM$ và $PN = QM$

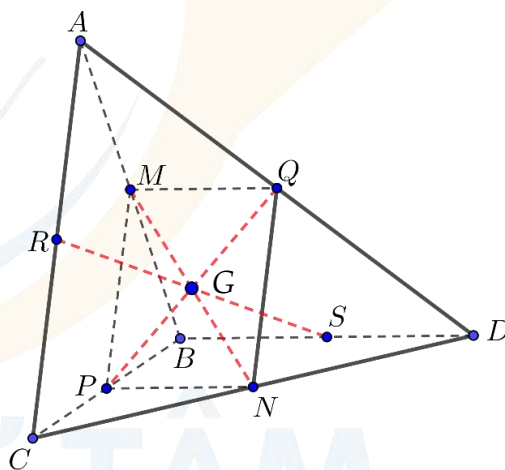
Vậy $MPNQ$ là hình bình hành.

$\Rightarrow MN$ và PQ cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đường.

Chứng minh tương tự, ta có: $QRPS$ là hình bình hành

$\Rightarrow QP$ và RS cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đường.

Vậy MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đoạn.





Ví dụ 1..

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy lớn AB . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB . Gọi P là giao điểm của SC và (ADN) , I là giao điểm của AN và DP . Chứng minh: $SI // CD$.

Lời giải

Gọi $E = AD \cap BC \Rightarrow E \in (ADN) \cap (SBC)$

Mặt khác $N \in (ADN) \cap (SBC)$

Suy ra $EN = (ADN) \cap (SBC)$

Nên $P = EN \cap SC$

Theo giả thiết $I = AN \cap DP$

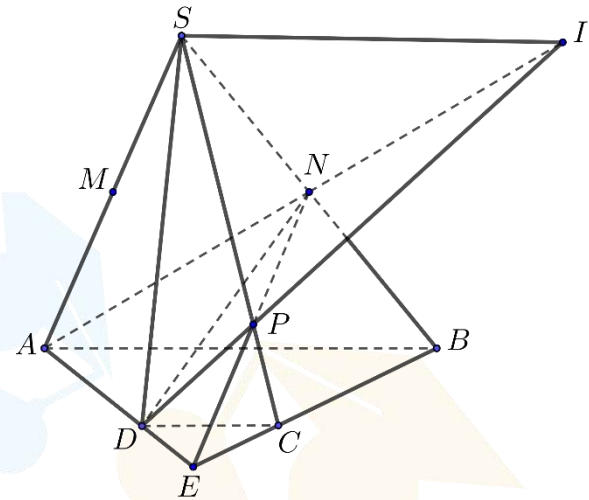
Suy ra $I \in (SDC) \cap (SAB)$

Mà $S \in (SDC) \cap (SAB)$

Và $AB // CD$

Suy ra $SI = (SDC) \cap (SAB), SI // CD // AB$

Vậy: $SI // CD$.



TOÁN TỪ TÂM

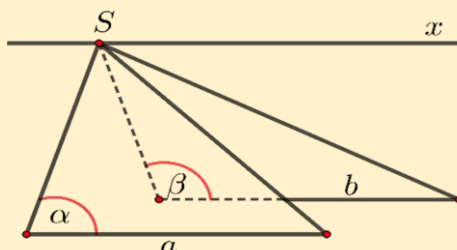


Dạng 2. Giao tuyến của 2 mặt chứa 2 đường thẳng song song



Phương pháp

- » **Bước 1:** Xác định điểm $S \in (\alpha) \cap (\beta)$ (S là một điểm chung của (α) và (β))
- » **Bước 2:** Xác định đường thẳng $a \subset (\alpha)$ và đường thẳng $b \subset (\beta)$ sao cho $a // b$.
- » **Bước 3:** Kết luận $(\alpha) \cap (\beta) = Sx$ với Sx là đường thẳng đi qua điểm S và $Sx // a // b$.



Ví dụ 2.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

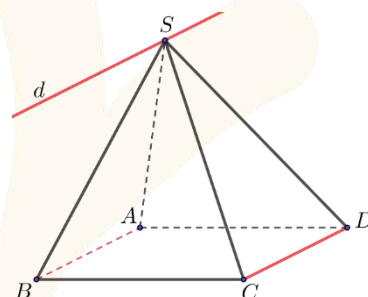
Lời giải

Ta có: $S \in (SAB) \cap (SCD)$.

Mà $AB \subset (SAB)$, $CD \subset (SCD)$

và $AB // CD$ (do $ABCD$ là hình bình hành).

Vậy $(SAB) \cap (SCD) = d$ với d là đường thẳng đi qua điểm S và $d // AB // CD$.



Ví dụ 2.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy điểm M thuộc cạnh SA . Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và BC . Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và (SAC) .

Lời giải

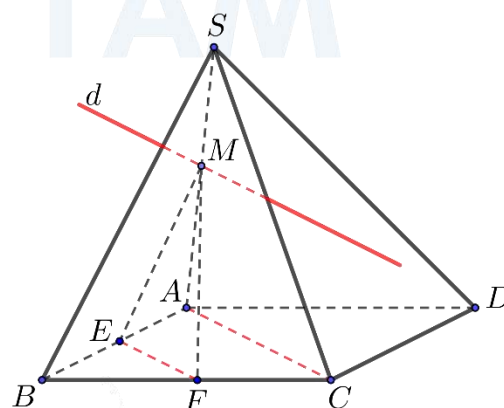
Ta có: $M \in SA$ mà $SA \subset (SAC)$ nên $M \in (SAC)$.

→ $M \in (MEF) \cap (SAC)$.

Mà $\begin{cases} EF \subset (MEF) \\ AC \subset (SAC) \end{cases}$ và $EF // AC$ (do EF là đường

trung bình của $\triangle ABC$).

Vậy $(MEF) \cap (SAC) = d$ với d là đường thẳng đi qua điểm M và $d // EF // AC$.





Ví dụ 2.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA , điểm E và F lần lượt là trung điểm của AB và BC .

- (1) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .
- (2) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (SAD) .
- (3) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và (SAC) .

Lời giải

- (1) Xác định $(SAB) \cap (SCD)$.

Ta có:
$$\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (SAB); CD \subset (SCD) \\ AB \parallel CD \end{cases}$$

 $\Rightarrow Sx = (SAB) \cap (SCD)$ với $Sx \parallel AB \parallel CD$

- (2) Xác định $(MBC) \cap (SAD)$.

Lại có:
$$\begin{cases} M \in SA \subset (SAD) \\ M \in (MBC) \end{cases} \Rightarrow M \in (MBC) \cap (SAD)$$

Ta có:
$$\begin{cases} M \in (MBC) \cap (SAD) \\ BC \subset (MBC); AD \subset (SAD) \\ BC \parallel AD \end{cases}$$

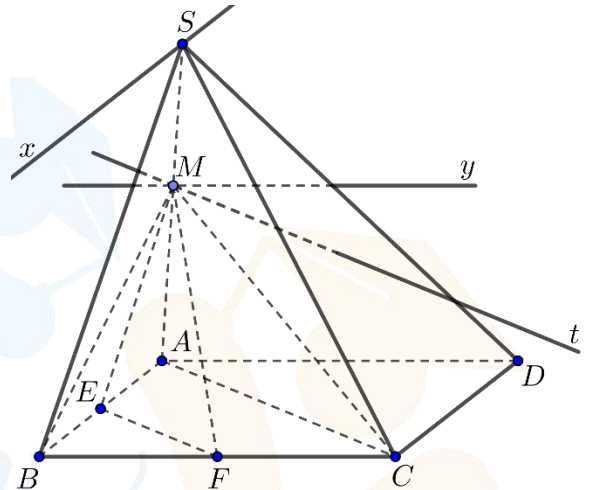
 $\Rightarrow My = (MBC) \cap (SAD)$ với $My \parallel BC \parallel AD$

- (3) Xác định $(MEF) \cap (SAC)$.

Ta có:
$$\begin{cases} M \in SA \subset (SAC) \\ M \in (MEF) \end{cases} \Rightarrow M \in (MEF) \cap (SAC)$$

Xét $\triangle ABC$ có: EF là đường trung bình $\Rightarrow EF \parallel AC$

Do
$$\begin{cases} M \in (MEF) \cap (SAC) \\ EF \subset (MEF); AC \subset (SAC) \\ EF \parallel AC \end{cases} \Rightarrow Mt = (MEF) \cap (SAC)$$
 với $EF \parallel AC \parallel Mt$.



Ví dụ 2.4.

Cho hình chóp $S.ABCD$. Mặt đáy là hình thang có cạnh đáy lớn AD , AB cắt CD tại K , điểm M thuộc cạnh SD .

- (1) Xác định giao tuyến (d) của (SAD) và (SBC) .
- (2) Tìm giao điểm N của KM và (SBC) .
- (3) Chứng minh rằng: $AM, BN, (d)$ đồng quy.

Lời giải

(1) Xác định $d = (SAD) \cap (SBC)$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \subset (SAD); BC \subset (SBC) \Rightarrow Sx = (SAD) \cap (SBC) \\ AD // BC \end{cases}$$

với $Sx//AD//BC$

$$\Rightarrow (d) \equiv Sx$$

(2) Tìm giao điểm N của KM và (SBC) .

Trong (SCD) gọi $N = KM \cap SC$

$$\Rightarrow \begin{cases} N \in KM \\ N \in SC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow N = KM \cap (SBC)$$

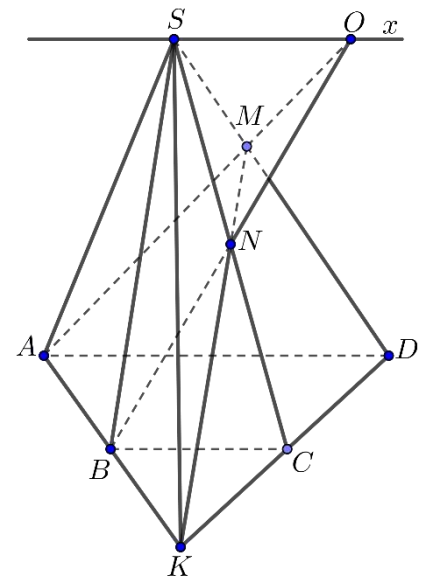
(3) Chứng minh rằng: $AM, BN, (d)$ đồng quy.

Ta có: $(d) = (SAD) \cap (SBC)$

Trong (AMK) gọi O là giao điểm của AM và BN

$$\Rightarrow \begin{cases} O \in AM \subset (SAD) \\ O \in BN \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow O \in (d)$$

Vậy ba đường thẳng (d) ; BN ; AM đồng quy tại O .





Dạng 3. Giao điểm sử dụng giao tuyến song song



Phương pháp

- » **Bước 1:** Xác định giao tuyến song song (Sx)
- » **Bước 2:** Giao tuyến Sx cắt mặt đang xét tại 1 điểm.
- » **Bước 3:** Kết luận giao điểm cần tìm.

**** Nhận xét:** Thông thường "S" sẽ nằm trong mặt phẳng còn lại



Ví dụ 3.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Trên đoạn SA lấy điểm M sao cho $SM = \frac{2}{3}SA$, trên đoạn SB lấy điểm N sao cho $SN = 2NB$. Điểm P nằm trên cạnh SC và không trùng với S .

- (1) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SCD) .
- (2) Tìm giao điểm của SD và (MNP)

Lời giải

- (1) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SCD) .

Ta có $SN = 2NB$ suy ra $SN = \frac{2}{3}SB$

Mà giả thiết có $SM = \frac{2}{3}SA$

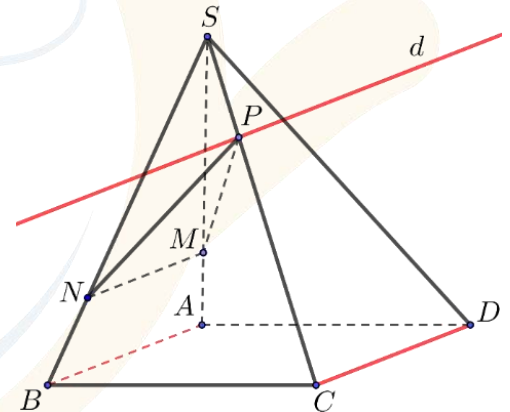
Nên $\frac{SM}{SN} = \frac{SA}{SB}$ suy ra $MN \parallel AB$.

Mà $ABCD$ là hình bình thoi thì $AB \parallel CD$.

Suy ra $MN \parallel CD$.

Mặt khác $P \in (MNP) \cap (SCD)$

Vậy $Px = (MNP) \cap (SCD), Px \parallel MN \parallel CD$.



- (2) Tìm giao điểm của SD và (MNP)

Trong (SCD) : gọi $E = Px \cap SD \Rightarrow \begin{cases} E \in SD \\ E \subset Px \subset (MNP) \Rightarrow E = Px \cap (MNP) \\ SD \not\subset (MNP) \end{cases}$



Ví dụ 3.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm thuộc cạnh SA ($M \neq A, M \neq S$). Tìm giao điểm K của BM với mặt phẳng (SCD) .

Lời giải



Qua điểm M kẻ đường thẳng $Mx // AD$

Trong (SAD) : gọi $N = Mx \cap SD$

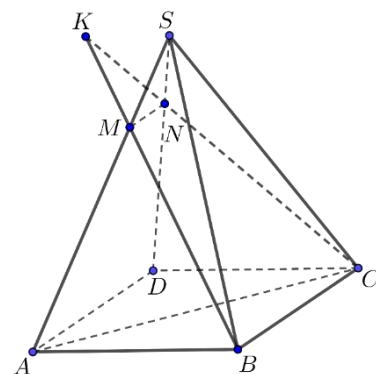
$$\Rightarrow MN = (BMN) \cap (SAD).$$

Mà $AB // BC \Rightarrow MN // AD // BC$.

Mặt khác $M \neq A, M \neq S$

$\Rightarrow MN < AD = BC$ do đó tứ giác $MNCB$ là hình thang.

$$\begin{cases} K = BN \cap CN \\ CN \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow K = BN \cap (SCD)$$



Ví dụ 3.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trên cạnh BC, AD, SD lần lượt lấy các điểm I, J, K sao cho $\frac{BI}{BC} = \frac{AJ}{AD} = \frac{SK}{SD}$. Tìm giao điểm của SC với mặt phẳng (IJK) .

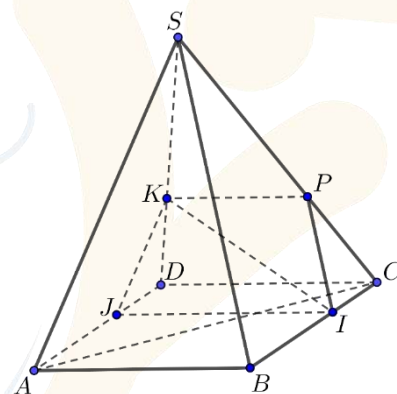
Lời giải

Theo giả thiết ta có: $\frac{BI}{BC} = \frac{AJ}{AD} = \frac{SK}{SD} \Rightarrow \begin{cases} JK // SA \\ IJ // CD \end{cases}$.

$$\begin{cases} p = (IJK) \cap (SCD) \\ ((IJK) \supset IJ // CD \subset (SCD)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (IJK) \cap (SCD) = d // CD (K \in d).$$

$$\text{Gọi } P = d \cap SC \Rightarrow \begin{cases} P \in SC \\ P \subset Kd \subset (IJK) \Rightarrow P = SC \cap (IJK). \\ SC \not\subset (IJK) \end{cases}$$



TOÁN TỪ TÂM



Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» **Câu 1.** Chọn khẳng định đúng

- A. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.
- B. Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau thì song song.
- C. Hai đường thẳng không cùng nằm trên một mặt phẳng thì chéo nhau.
- D. Hai đường thẳng không có điểm chung thì song song với nhau.

» **Lời giải**

Chọn C

Do theo định nghĩa, hai đường thẳng không cùng nằm trên một mặt phẳng thì chéo nhau.

» **Câu 2.** Cho hình tứ diện $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. AB và CD cắt nhau.
- B. AB và CD chéo nhau.
- C. AB và CD song song.
- D. Tồn tại một mặt phẳng chứa AB và CD .

» **Lời giải**

Chọn B

Do $ABCD$ là hình tứ diện nên bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng $\Rightarrow AB$ và CD chéo nhau.

» **Câu 3.** Chọn khẳng định sai

- A. Hai đường chéo nhau thì không có điểm chung.
- B. Hai đường thẳng không có điểm chung thì không chéo.
- C. Hai đường thẳng chéo nhau thì không cùng nằm trên bất kì mặt nào.
- D. Hai đường thẳng có từ 2 điểm chung thì trùng nhau.

» **Lời giải**

Chọn B

Do 2 đường thẳng không có điểm chung có thể song song hoặc chéo nhau.

» **Câu 4.** Cho ba mặt phẳng phân biệt cắt nhau từng đôi một theo ba giao tuyến d_1, d_2, d_3 , biết d_1 song song với d_2 . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. d_1, d_3 chéo nhau.
- B. d_1, d_3 cắt nhau.
- C. d_1, d_3 song song với nhau.
- D. d_1, d_3 trùng nhau.

» **Lời giải**

Chọn C

Ba mặt phẳng cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến đó hoặc đôi một song song hoặc đồng quy. Mà d_1 song song với d_2 nên d_1, d_3 song song với nhau.

» **Câu 5.** Cho hai đường thẳng a, b chéo nhau. Một đường thẳng c song song với a . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. b và c song song.
- B. b và c chéo nhau hoặc cắt nhau
- C. b và c cắt nhau.
- D. b và c chéo nhau.

» **Lời giải**



Chọn B

Cho hai đường thẳng a, b chéo nhau. Một đường thẳng c song song với a .

Khi $S.ABCD$ và SC cùng nằm trong một mặt phẳng thì chúng cắt nhau. Còn IO và SA không cùng nằm trong một mặt phẳng thì chúng chéo nhau.

» **Câu 6.** Cho hai đường thẳng phân biệt không có điểm chung cùng nằm trong một mặt phẳng thì hai đường thẳng đó

- A.** song song. **B.** chéo nhau. **C.** cắt nhau. **D.** trùng nhau.

» **Lời giải**

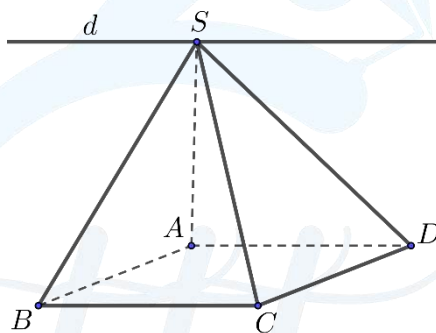
Chọn A

» **Câu 7.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi d là giao tuyến của mặt phẳng (SAD) và (SBC) . Tìm mệnh đề đúng

- A.** d qua S và song song với BC **B.** d qua S và song song với AB
C. d qua S và song song với DC **D.** d qua S và song song với BD

» **Lời giải**

Chọn A



$$\text{Ta có: } \begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD // BC \\ AD \subset (SAD); BC \subset (SBC) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sx // AD // BC$$

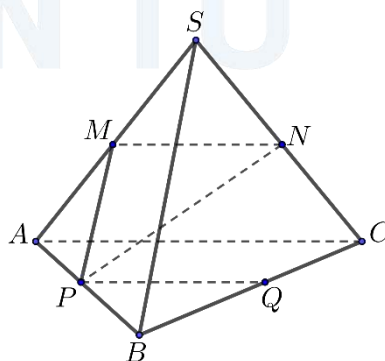
Khi đó đường thẳng d cần tìm chính là đường thẳng Sx .

» **Câu 8.** Cho hình chóp $S.ABC$ Gọi M, N là trung điểm SA, SC, P nằm trên cạnh AB sao cho $AB = 3AP$. Gọi Q là giao điểm của BC và mặt phẳng (MNP) . Khi đó $BQ : CQ$ bằng

- A.** 1:1. **B.** 2:1. **C.** 3:1. **D.** 1:2.

» **Lời giải**

Chọn B



$$\text{Ta có } PQ // AC (Q \in BC) \Rightarrow PQ // MN \Rightarrow Q \in (MNP) \Rightarrow Q = BC \cap (MNP).$$



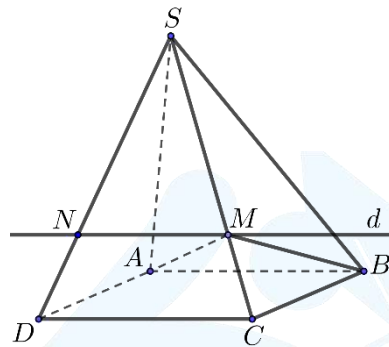
$$\Rightarrow \frac{BQ}{CQ} = \frac{BP}{PA} = \frac{2}{1}.$$

» **Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SC sao cho $SM = 3MC$, N là giao điểm của SD và (MAB) . Khi đó hai đường thẳng CD và MN là hai đường thẳng

- A.** song song. **B.** chéo nhau. **C.** cắt nhau. **D.** trùng nhau.

✎ **Lời giải**

Chọn A



Xét mặt phẳng (MAB) và (SCD) có

$$AB \subset (MAB); CD \subset (SCD); AB \parallel CD; M \in (MAB) \cap (SCD).$$

$$N = SD \cap (MAB) \Rightarrow N \in (SCD) \cap (MAB).$$

$$\Rightarrow MN \parallel CD.$$

» **Câu 10.** Cho các mệnh đề sau:

- (I) Hai đường thẳng song song với nhau thì đồng phẳng.
(II) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.
(III) Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.
(IV) Hai đường thẳng chéo nhau thì không đồng phẳng.
Có bao nhiêu mệnh đề đúng?

- A.** 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

✎ **Lời giải**

Chọn B

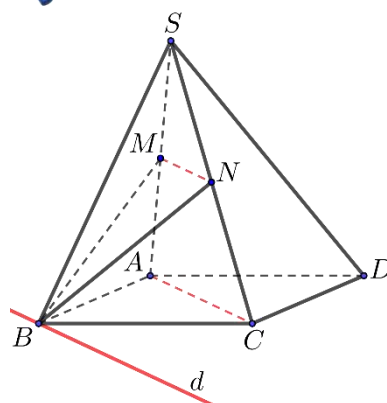
- Ta có (I) Hai đường thẳng song song với nhau thì đồng phẳng. Là đúng.
(II) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau. Là sai vì có thể song song.
(III) Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung. Là đúng.
(IV) Hai đường thẳng chéo nhau thì không đồng phẳng. Là đúng.

» **Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC . Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (BMN) và (ACD) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** d qua D và song song với AC . **B.** d qua B và song song với AC .
C. d qua hai điểm A và C . **D.** d qua hai điểm B và D .

✎ **Lời giải**

Chọn B



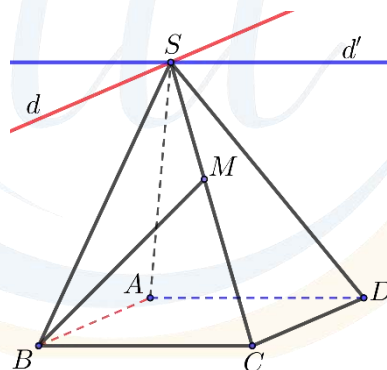
Ta có $(ACD) \equiv (ABCD)$ và MN song song AC (do MN là đường trung bình ΔSAC).
Hai mặt phẳng (BMN) và $(ABCD)$ có điểm chung B và lần lượt chứa hai đường thẳng song song là MN, AC
Nên giao tuyến của chúng là đường thẳng d đi qua B và song song với MN, AC .

» **Câu 12.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là một điểm trên cạnh SC ($M \neq S$ và $M \neq C$). Gọi d là đường thẳng qua điểm S và song song với AB , d' là đường thẳng qua điểm S và song song với AD . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** BM không cắt mặt phẳng (SAD) .
- B.** BM cắt mặt phẳng (SAD) tại một điểm thuộc SD .
- C.** BM cắt mặt phẳng (SAD) tại một điểm thuộc d .
- D.** BM cắt mặt phẳng (SAD) tại một điểm thuộc d' .

» **Lời giải**

Chọn D



Chọn mặt phẳng phụ (SBC) chứa BM .

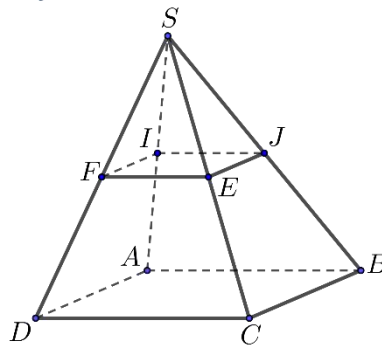
Vì (SBC) và (SAD) có điểm chung và lần lượt chứa hai đường thẳng song song là BC, AD nên giao tuyến của chúng là đường thẳng d' đi qua S và song song với BC, AD .
Suy ra BM và d' cùng thuộc mặt phẳng (SBC) và không song song nên chúng cắt nhau tại một điểm.

» **Câu 13.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD . Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào không song song với IJ ?

- A.** EF .
- B.** DC .
- C.** AD .
- D.** AB .

» **Lời giải**

Chọn C



Ta có IJ là đường trung bình tam giác SAB nên $IJ \parallel AB$.

$ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel CD$. Suy ra $IJ \parallel CD$.

EF là đường trung bình tam giác SCD nên $EF \parallel CD \rightarrow IJ \parallel EF$.

Vậy IJ không song song với đường thẳng AD . Chọn đáp án C.

» **Câu 14.** Cho tứ diện $ABCD$. Lấy điểm M thuộc cạnh BC sao cho $MC = 2MB$. Gọi N, P lần lượt là trung điểm của BD và AD . Gọi Q là giao điểm của AC với mặt phẳng (MNP) .

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{QC}{QA} = \frac{1}{2}$.

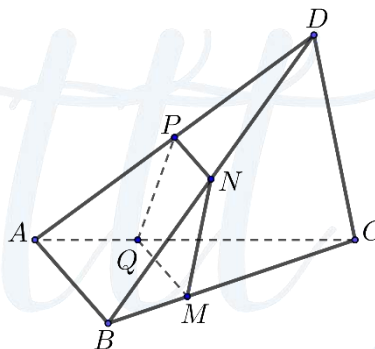
B. $\frac{QC}{QA} = \frac{3}{2}$.

C. $\frac{QC}{QA} = 2$.

D. $\frac{QC}{QA} = \frac{5}{2}$.

✎ **Lời giải**

Chọn C



Từ giả thiết suy ra $PN \parallel AB$.

Chọn mặt phẳng phụ (ABC) chứa AC .

Hai mặt phẳng (ABC) và (MNP) có điểm chung M và lần lượt chứa hai đường thẳng song song là AB, PN nên giao tuyến của chúng là đường thẳng d đi qua M và song song với AB, PN . Trong mặt phẳng (ABC) , có $d \cap AC = Q$.

Suy ra $MQ \parallel AB \Rightarrow \frac{QC}{QA} = \frac{MC}{MB} = 2$.

» **Câu 15.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ABD . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases} IJ \parallel AB \\ IJ = \frac{1}{3} AB \end{cases}$.

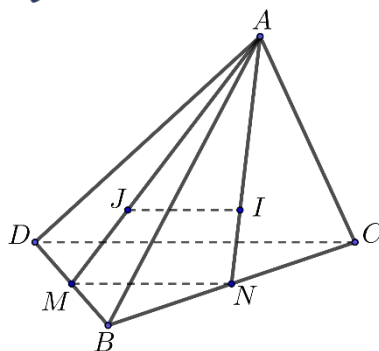
B. $\begin{cases} IJ \parallel AB \\ IJ = \frac{2}{3} AB \end{cases}$.

C. $\begin{cases} IJ \parallel CD \\ IJ = \frac{1}{3} CD \end{cases}$.

D. $\begin{cases} IJ \parallel CD \\ IJ = \frac{2}{3} CD \end{cases}$.

✎ **Lời giải**

Chọn C



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD, BC .

Suy ra $MN \parallel CD$ và $MN = \frac{1}{2}CD$ (1).

Từ giả thiết, ta có: $\frac{AI}{AN} = \frac{AJ}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} IJ \parallel MN \\ IJ = \frac{2}{3}MN \end{cases}$ (2).

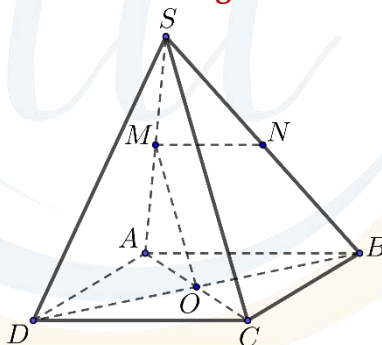
Từ (1) và (2), suy ra $IJ \parallel CD$ và $IJ = \frac{1}{3}CD$.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» **Câu 16.** Cho chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O , M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	MN song song với AB		
(b)	MN song song với CD		
(c)	MO và SD cắt nhau		
(d)	NO và SC cắt nhau		

» **Lời giải**



(a) MN song song với AB .

M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB nên MN song song với AB

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) MN song song với CD .

MN song song với AB , mà AB song song với CD , nên MN song song với CD

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) MO và SD cắt nhau.

$MO \subset (SAC)$, $(SAC) \cap (SDC) = SC$, mà $MO \parallel SC$ nên MO và SD không cắt nhau

» **Chọn SAI.**

(d) NO và SC cắt nhau.

Tương tự câu (c)

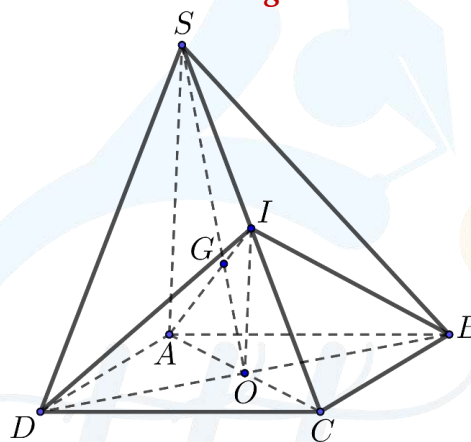


» Chọn SAI.

» **Câu 17.** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O , I là trung điểm của SC . Xét các mệnh đề:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đường thẳng IO song song với SA .		
(b)	Mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là một tứ giác.		
(c)	Giao điểm của đường thẳng AI với mặt phẳng (SBD) là trọng tâm của tam giác (SBD) .		
(d)	Giao tuyến của hai mặt phẳng (IBD) và (SAC) là IO .		

» **Lời giải**



(a) Đường thẳng IO song song với SA .

O, I lần lượt là trung điểm của AC, SC nên IO song song với SA .

» Chọn ĐÚNG.

(b) Mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là một tứ giác.

Từ hình vẽ ta thấy mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là $\triangle IBD$

» Chọn SAI.

(c) Giao điểm của đường thẳng AI với mặt phẳng (SBD) là trọng tâm của tam giác (SBD) .

O, I lần lượt là trung điểm của AC, SC nên AI cắt SO tại trọng tâm tam giác SBD

» Chọn ĐÚNG.

(d) Giao tuyến của hai mặt phẳng (IBD) và (SAC) là IO .

Từ hình vẽ ta thấy giao tuyến của hai mặt phẳng (IBD) và (SAC) là IO .

» Chọn ĐÚNG.

» **Câu 18.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trọng tâm của tam giác SAB . Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (IJG) .

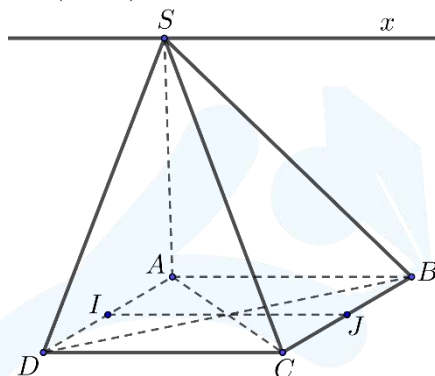
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng qua S và song song với AB		



(b)	Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là đường thẳng qua S và song song với AC		
(c)	Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (IJG) là đường thẳng qua G và song song với CD .		
(d)	M trên SD sao cho $SM = \frac{2}{3}SD$. Giao tuyến của (CGM) và (SBC) là đường thẳng CB .		

Lời giải

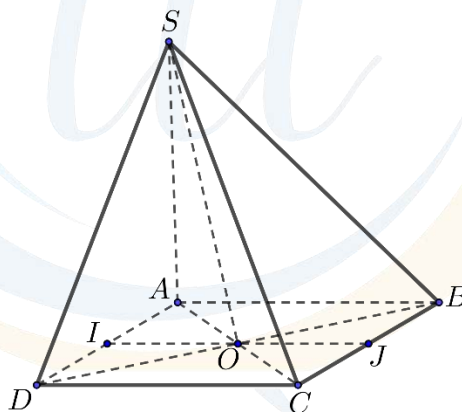
(a) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng qua S và song song với AB



$$(SAB) \text{ và } (SCD) \text{ có } \begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB // CD \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = S_x // AB$$

» **Chọn ĐÚNG.**

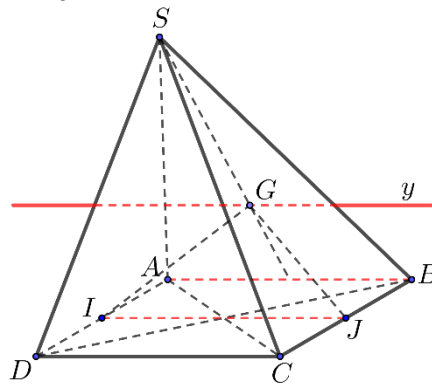
(b) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là đường thẳng qua S và song song với AC



$$(SAC) \text{ và } (SBD) \text{ có } \begin{cases} S \in (SAC) \cap (SBD) \\ AC \cap BD = O \end{cases} \Rightarrow (SAC) \cap (SBD) = SO$$

» **Chọn SAI.**

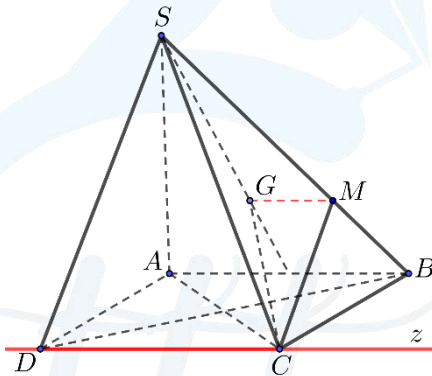
(c) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (IJG) là đường thẳng qua G và song song với CD .



$$(SAB) \text{ và } (IJG) \text{ có } \begin{cases} G \in (SAB) \cap (IJG) \\ IJ \parallel AB \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (IJG) = G_y \parallel AB \parallel CD$$

» Chọn ĐÚNG.

(d) M trên SB sao cho $SM = \frac{2}{3}SB$. Giao tuyến của (CGM) và (SDC) là đường thẳng CB.



Vì $SM = \frac{2}{3}SD$ và G là trọng tâm tam giác SAB, nên $GM \parallel AB$

$$(CGM) \text{ và } (SDC) \text{ có } \begin{cases} C \in (CGM) \cap (SDC) \\ GM \parallel AB \parallel CD \end{cases} \Rightarrow (CGM) \cap (SBC) = C_z \parallel AD \parallel CB$$

$$\Rightarrow (CGM) \cap (SBC) = CB$$

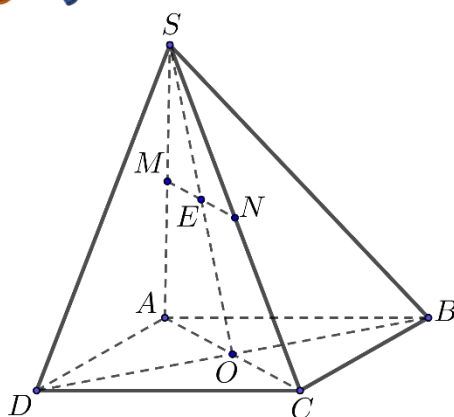
» Chọn ĐÚNG

» Câu 19. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	MN cắt mặt phẳng (SBD)		
(b)	SB cắt mặt phẳng (MCD)		
(c)	SD cắt mặt phẳng (MBC)		
(d)	BN cắt mặt phẳng (SAD)		

✎ Lời giải

(a) MN cắt mặt phẳng (SBD)

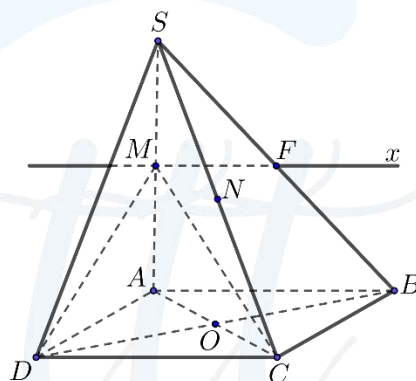


Ta có: $SO = (SAC) \cap (SBC) \Rightarrow \begin{cases} SO \subset (SAC) \\ MN \subset (SAC) \end{cases}$, gọi $E = MN \cap SO$

Thì $\begin{cases} E \in MN \\ E \in SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow E \in (SBD) \Rightarrow E = MN \cap (SBD)$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) SB cắt mặt phẳng (MCD)



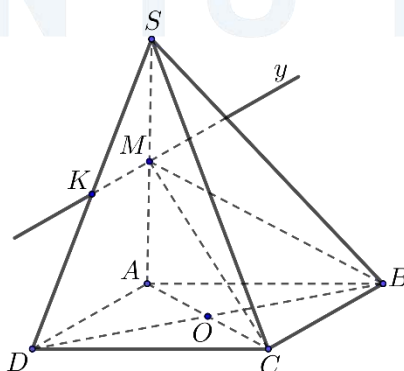
Chọn (SAB) chứa SB, tìm giao tuyến của (SAB) và (MCD)

Ta có: $\begin{cases} M \in (SAB) \cap (MCD) \\ AB // CD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Mx = (SAB) \cap (MCD) \\ Mx // AB // CD \end{cases}$,

Trong (SAB), gọi $F = SB \cap Mx \Rightarrow \begin{cases} F \in SB \\ F \in Mx \subset (MCD) \end{cases} \Rightarrow F \in (MCD) \Rightarrow F = SB \cap (MCD)$

» **Chọn ĐÚNG**

(c) SD cắt mặt phẳng (MBC)



Chọn (SAD) chứa SD, tìm giao tuyến của (SAD) và (MBC)



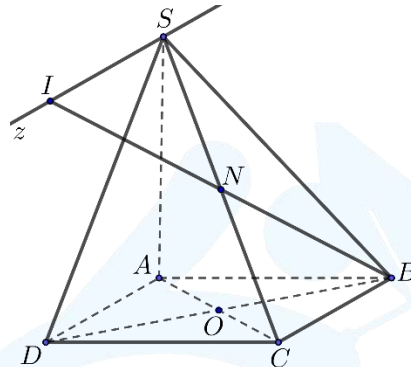
$$\text{Ta có: } \begin{cases} M \in (SAD) \cap (MBC) \\ AD // BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} My = (SAD) \cap (MBC) \\ My // AD // BC \end{cases},$$

Trong (SAD) , gọi $K = My \cap SD$

$$\text{Với } \begin{cases} K \in SD \\ K \in My \subset (MBC) \end{cases} \Rightarrow K \in (MBC) \Rightarrow K = SD \cap (MBC)$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) BN cắt mặt phẳng (SAD)



Chọn (SBC) chứa BN , tìm giao tuyến (SBC) và (SAD)

$$\text{Ta có: } \begin{cases} S \in (SBC) \cap (SAD) \\ BC // AD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Sz = (SBC) \cap (SAD) \\ Sz // BC // AD \end{cases}, \text{ trong } (SBC) \text{ gọi } I = BN \cap Sz$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in BN \\ I \in Sz \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAD) \Rightarrow I = BN \cap (SAD)$$

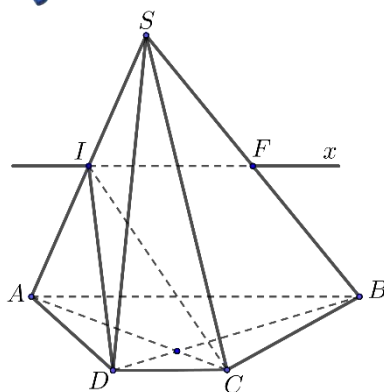
» **Chọn ĐÚNG**

» **Câu 20.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có đáy lớn AB và $AB = 2CD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , I là trung điểm SA , G là trọng tâm ΔSBC và $E \in SD$ sao cho $3SE = 2SD$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đường thẳng SB cắt mặt phẳng (ICD)		
(b)	Đường thẳng GO cắt mặt phẳng (SCD)		
(c)	Đường thẳng SB cắt mặt phẳng (ACE)		
(d)	Đường thẳng BG cắt mặt phẳng (ACE)		

» **Lời giải**

(a) Đường thẳng SB cắt mặt phẳng (ICD)



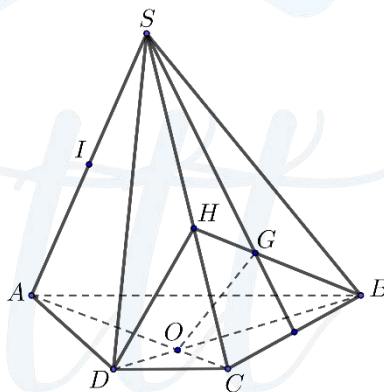
Chọn mặt phẳng (SAB) chứa SB , tìm giao tuyến của (SAB) và (ICD)

Ta có: $\begin{cases} I \in (ICD) \cap (SAB) \\ CD // AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ix = (SAB) \cap (ICD) \\ Ix // CD // AB \end{cases}$, trong mặt (SAB) gọi $F = Ix \cap SB$

$$\Rightarrow \begin{cases} F \in SB \\ F \in Ix \subset (ICD) \Rightarrow F \in (ICD) \end{cases} \Rightarrow F = SB \cap (ICD)$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Đường thẳng GO cắt mặt phẳng (SCD)



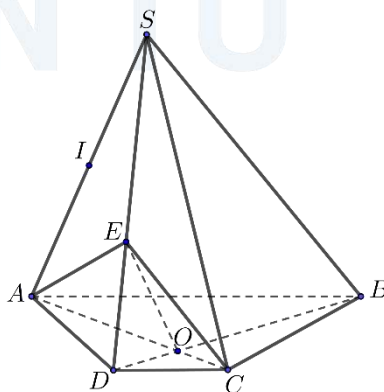
Gọi $H = BG \cap SC \Rightarrow H$ là trung điểm của SC

Xét $\triangle BHD$ có $\frac{BG}{BH} = \frac{2}{3}$, dễ thấy $\triangle OCD \sim \triangle OAB$ (g - g) nên $\frac{CD}{AB} = \frac{OD}{OB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BO}{BD} = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \frac{BG}{BH} = \frac{BO}{BD} = \frac{2}{3} \Rightarrow OG // DH \text{ mà } DH \subset (SCD) \Rightarrow OG // (SCD)$$

» **Chọn SAI**

(c) Đường thẳng SB cắt mặt phẳng (ACE)

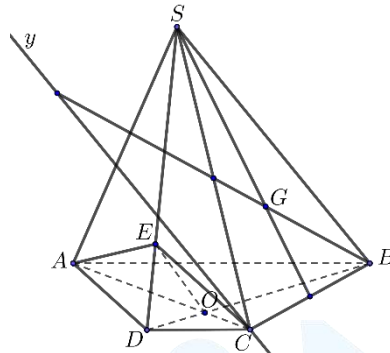




Xét $\triangle SBD$ có $\frac{DE}{DS} = \frac{DO}{DB} = \frac{1}{3} \Rightarrow OE \parallel SB$ mà $OE \subset (ACE) \Rightarrow SB \parallel (ACE)$

» Chọn SAI

(d) Đường thẳng BG cắt mặt phẳng (ACE)



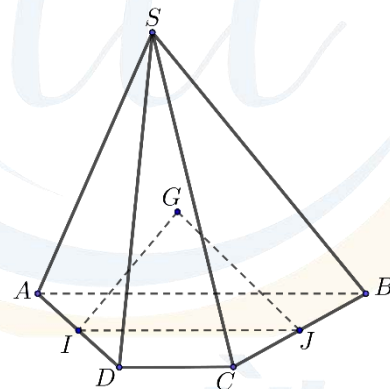
Ta có: $\begin{cases} C \in (AEC) \cap (SBC) \\ OE \parallel SB \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Cy = (ACE) \cap (SBC) \\ Cy \parallel OE \parallel SB \end{cases},$

Trong (SBC) , gọi $J = BG \cap Cy \Rightarrow \begin{cases} J \in BG \\ J \in Cy \subset (ACE) \Rightarrow J \in (ACE) \end{cases} \Rightarrow J = BG \cap (ACE)$

» Chọn ĐÚNG

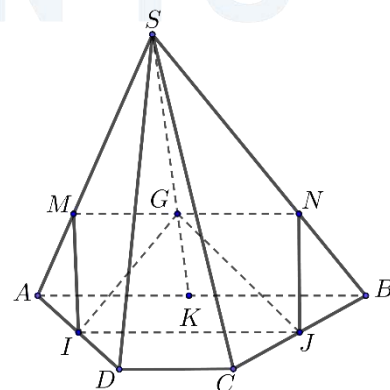
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang, $AB \parallel CD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trọng tâm tam giác SAB (tham khảo hình vẽ). Mặt phẳng (GIJ) cắt SA, SB lần lượt tại M, N . Biết $AB = k.CD$, tìm k để $MNIJ$ là hình bình hành.



» Lời giải

✓ Trả lời: 3





Để thấy giao tuyến của hai (GIJ) và (SAB) là đường thẳng Gx đi qua G và song song với các đường thẳng AB, IJ .

Giao tuyến Gx cắt SA tại M và cắt SB tại N .

Khi đó, tứ giác $IJNM$ là hình thang vì $IJ \parallel MN$, với IJ là đường trung bình của hình thang

$$ABCD \text{ nên ta có: } IJ = \frac{AB+CD}{2} = \frac{kCD+CD}{2} = \frac{k+1}{2}CD.$$

$$\text{Mặt khác, } G \text{ là trọng tâm } \triangle SAB \text{ nên } MN = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3}kCD.$$

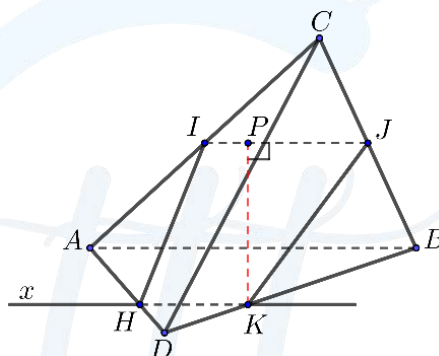
Để $IJNM$ là hình bình hành ta cần phải có $IJ = MN$

$$\Leftrightarrow \frac{k+1}{2}CD = \frac{2}{3}kCD \Leftrightarrow \frac{k+1}{2} = \frac{2k}{3} \Leftrightarrow k = 3.$$

» **Câu 22.** Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 1. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC, BC . Gọi K là một điểm trên cạnh BD với $KB = 2KD$. Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (IJK) . Tính diện tích thiết diện (kết quả làm tròn đến hàng thứ nhất)

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 12,5**



$$\text{Ta có: } \begin{cases} AB \in (ABD) \\ IJ \in (IJK) \\ AB \parallel IJ \\ (ABD) \cap (IJK) = Kx \end{cases} \Rightarrow Kx \parallel AB \parallel IJ$$

Giả sử Kx cắt AD tại H do đó thiết diện là hình thang $IJKH$.

Mặt khác, ta thấy $\triangle AIH = \triangle BJK \Rightarrow IH = JK$. Vậy thiết diện $IJKH$ là hình thang cân.

$$\text{Trong tam giác } ABC \text{ ta có } IJ = \frac{1}{2}AB = 3.1 = 3.$$

$$\text{Trong tam giác } ABD \text{ ta có } \frac{HK}{AB} = \frac{KD}{BD} = \frac{1}{3} \Rightarrow HK = \frac{1}{3}AB = 2.2 = 4.$$

$$\text{Trong tam giác } BJK \text{ ta có } BJ = 3.1 = 3, BK = 4.1 = 4.$$

$$JK^2 = BJ^2 + BK^2 - 2.BJ.BK.\cos KBJ = 9.1^2 + 16.1^2 - 2.3.4.\cos 60^\circ = 13.1^2 \Rightarrow JK = \sqrt{13}.$$

Xét hình thang $IJKH$ hạ đường cao KP , ta có:

$$KP = \sqrt{JK^2 - PJ^2} = \sqrt{JK^2 - \left(\frac{IJ - HK}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{51}}{2}.$$

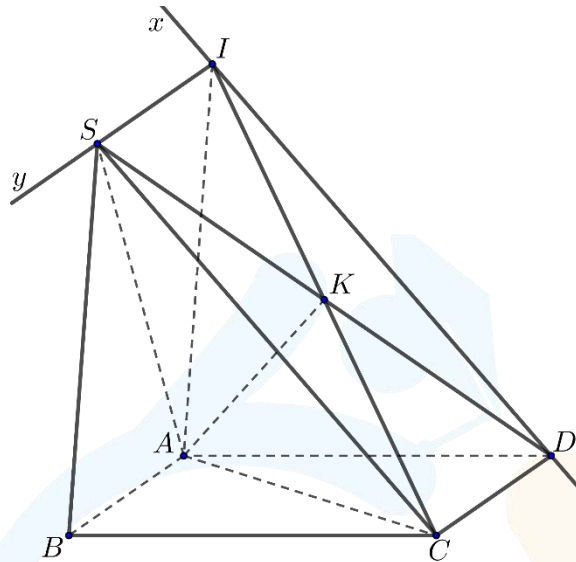
$$\text{Suy ra } S_{IJKH} = \frac{1}{2}(IJ + HK).KP = \frac{1}{2}(3 + 4) \cdot \frac{\sqrt{51}}{2} \approx 12,5.$$



» **Câu 23.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 2, tâm O . Mặt bên SAB là tam giác đều. Ngoài ra $SAD = 90^\circ$. Gọi Dx là đường thẳng song song với SC . Gọi giao điểm I của Dx với (SAB) . Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (ACI) . Tính diện tích thiết diện (Kết quả được làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 1,32**



$$\text{Ta có } \begin{cases} AB \in (SAB) \\ CD \in (SCD) \\ AB \parallel CD \\ (SAB) \cap (SCD) = Sy \end{cases} \Rightarrow Sy \parallel AB \parallel CD$$

Mặt khác $Dx \subset (SCD)$. Gọi $I = Dx \cap Sy \Rightarrow I = Dx \cap (SAB)$.

Do $\begin{cases} CD \parallel SI \\ SC \parallel DI \end{cases} \Rightarrow SCDI$ là hình bình hành nên $SI = CD$

Từ đó suy ra $SI = CD = AB, SI \parallel AB \Rightarrow SBAI$ là hình bình hành nên $SB \parallel AI$

Trong mặt phẳng (SCD) kẻ $CI \cap SD = K$ suy ra thiết diện là tam giác ACK .

$$\text{Ta có } AC = \sqrt{2}, SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow AK = \frac{1}{2}SD = \sqrt{2}.$$

$$\text{Mặt khác trong tam giác } ACI \text{ ta có: } AK^2 = \frac{AC^2 + AI^2}{2} - \frac{CI^2}{4} \Leftrightarrow \frac{CI^2}{4} = \frac{AC^2 + AI^2}{2} - AK^2.$$

$$\Rightarrow CI^2 = 2(AC^2 + AI^2) - 4AK^2 = 2(2 \cdot 2^2 + 2^2) - 4 \cdot \frac{2^2}{2} = 4 \cdot 2^2 = 16 \Rightarrow CI = 4 \Rightarrow CK = 2.$$

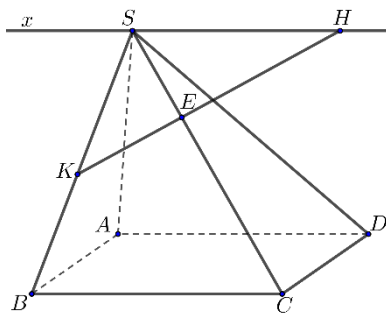
$$S_{\Delta ACK} = \sqrt{p(p-AC)(p-AK)(p-CK)} = \frac{2^2 \sqrt{7}}{8} = \frac{\sqrt{7}}{2} \approx 1,32.$$

» **Câu 24.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, K là trung điểm cạnh SB . Gọi E là điểm trên SC sao cho $\frac{SE}{SC} = \frac{1}{3}$, gọi H là giao điểm của KE và (SAD) . Tính tỉ số

$$\frac{HE}{HK} \quad (\text{Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai})$$

✎ **Lời giải**

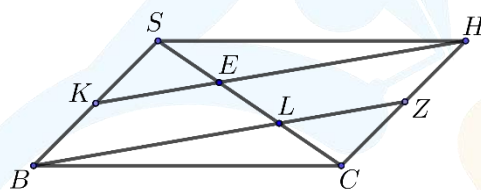
✓ Trả lời: 0,67



$$\text{Ta có: } \begin{cases} S \in (SBC) \cap (SAD) \\ BC // AD \\ BC \subset (SBC), AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (SBC) \cap (SAD) = Sx(Sx // BC // AD).$$

Gọi $H = KE \cap Sx(KE, Sx \subset (SBC)) \Rightarrow H = KE \cap (SAD)$.

Vẽ lại mặt phẳng (SBC) như sau:



Gọi L là trung điểm EC , KE là đường trung bình tam giác SBL nên $KE = \frac{1}{2}BL$ (1)

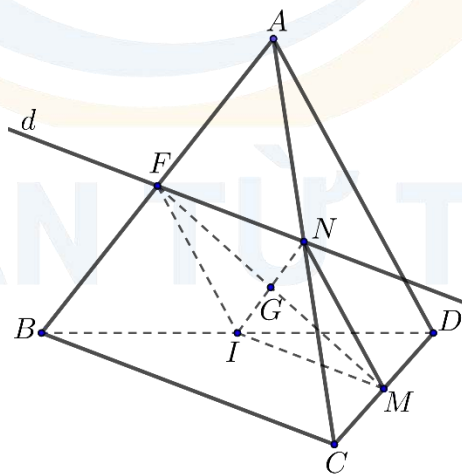
Ta có: $\Delta SEH = \Delta CLB(g.c.g) \Rightarrow BL = HE(2)$

Từ (1) và (2), ta có: $\frac{HE}{HK} = \frac{2}{3} \approx 0,67$

» **Câu 25.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của các cạnh CD, AC, BD . G là trọng tâm của tam giác BCD . Đường thẳng GM cắt AB tại F . Tính tỉ số $\frac{FA}{FB}$?

 **Lời giải**

✓ *Trả lời: 1*



$$\text{Ta có } \begin{cases} N \in (MNI) \cap (ABC) \\ IM // BC \end{cases} \Rightarrow (MNI) \cap (ABC) = d$$

Với d là đường thẳng đi qua N và song song với BC .



Gọi $\{F\} = AB \cap d$.

Xét tứ giác $MIFN$ có $\begin{cases} MI // NF \\ MI = NF \end{cases} \Rightarrow MIFN$ là hình bình hành.

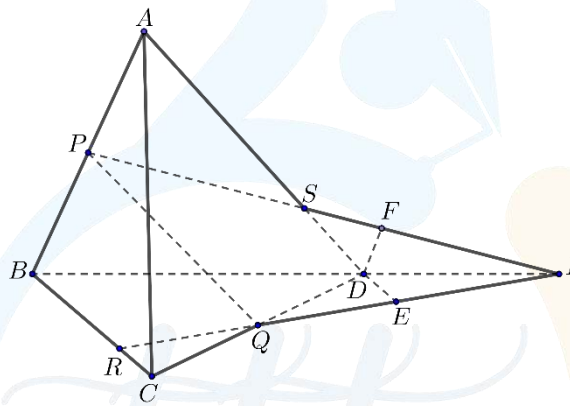
Mà G là trung điểm của NI nên M, G, F thẳng hàng.

Vậy $MG \cap (ABD) = \{F\} \in AB$ và F là trung điểm AB nên $\frac{FA}{FB} = 1$

» **Câu 26.** Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD ; điểm R nằm trên cạnh BC sao cho $BR = 2RC$. Gọi S là giao điểm của (PQR) và cạnh AD . Tính tỉ số $\frac{SA}{SD}$.

Lời giải

✓ **Trả lời: 2**



Trong (BCD) , gọi $I = RQ \cap BD$.

Trong (ABD) , gọi $S = PI \cap AD \Rightarrow S = AD \cap (PQR)$.

Trong (BCD) , dựng $DE // BC \Rightarrow DE$ là đường trung bình của $\triangle IBR$.
 $\Rightarrow D$ là trung điểm của BI .

Trong (ABD) , dựng $DF // AB \Rightarrow \frac{DF}{BP} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{DF}{PA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SA}{SD} = 2$.

Hết

TOÁN TỪ TÂM



Chương 04

Bài 3.

ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG MẶT PHẪNG

A

Lý thuyết

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng trong không gian



Định nghĩa:

Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng được xét theo số điểm chung của chúng

	d và (α) không có điểm chung. Khi đó ta nói d song song với (α) hay (α) song song với d » Kí hiệu là $d // (\alpha)$ hay $(\alpha) // d$.
	d và (α) có một điểm chung duy nhất M Khi đó ta nói d và (α) cắt nhau tại điểm M » Kí hiệu là $d \cap (\alpha) = \{M\}$ hay $d \cap (\alpha) = M$.
	d và (α) có từ hai điểm chung trở lên. Khi đó ta nói d nằm trong (α) hay (α) chứa d » Kí hiệu là $d \subset (\alpha)$ hay $(\alpha) \supset d$

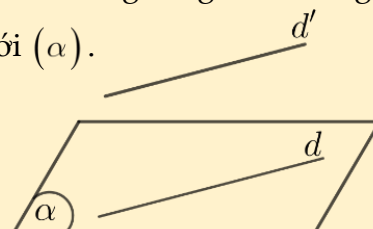
2. Tính chất



Định lý 1:

» Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d' nằm trong mặt phẳng (α) thì d song song với (α) .

» **Tóm tắt định lý:**
$$\begin{cases} d \not\subset (\alpha) \\ d // d' \\ d' \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d // (\alpha)$$

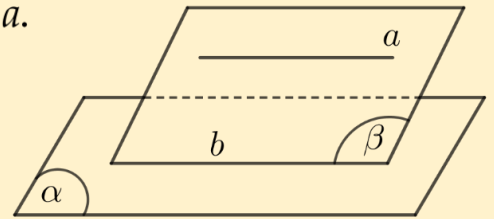




Định lý 2:

» Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) . Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a .

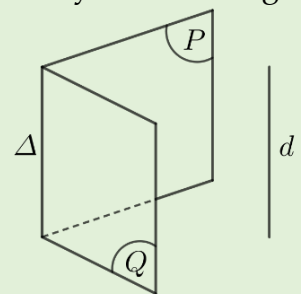
» **Tóm tắt định lý:**
$$\begin{cases} a // (\alpha) \\ a \subset (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = b \end{cases} \Rightarrow a // b$$



Hệ quả:

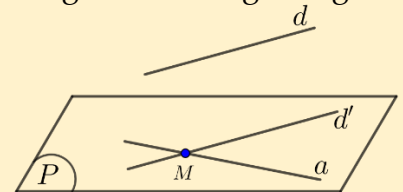
» Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng nếu có cũng song song với đường thẳng đó.

» **Tóm tắt:**
$$\begin{cases} (P) \cap (Q) = \Delta \\ (P) // d, (Q) // d \end{cases} \Rightarrow \Delta // d$$



Định lý 3:

» Cho hai đường thẳng chéo nhau, có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng còn lại.

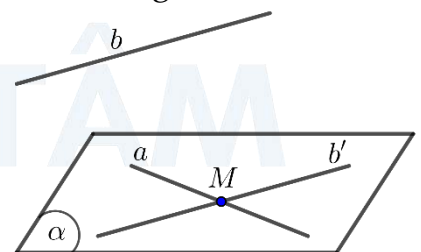


Chú ý

Cho a và b là hai đường thẳng chéo nhau.

Cách dựng mặt (α) chứa đường a và song song với đường b :

- Lấy M thuộc a .
- Qua M kẻ đường thẳng b' song song với b .
- Mặt phẳng (α) chứa a và b' .





B

Các dạng bài tập

Dạng 1. Chứng minh đường thẳng song song mặt phẳng



Phương pháp

□ Để chứng minh đường thẳng d song song với (α) , ta chứng minh

01

Dùng $\begin{cases} a // b \\ b \subset (\alpha) \Rightarrow a // (\alpha) \\ a \not\subset (\alpha) \end{cases}$

02

» Xét mặt phẳng (β) chứa a .
» Tìm giao tuyến $b = (\alpha) \cap (\beta)$.
» Chứng minh $a // b \Rightarrow a // (\alpha)$



Ví dụ 1.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của đoạn AD .

- (1) Xác định mặt phẳng chứa SD và song song với BM .
- (2) Xác định mặt phẳng chứa CD và song song với SB .

Lời giải

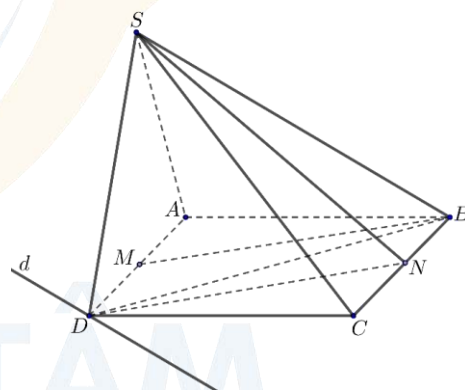
- (1) Xác định mặt phẳng chứa SD và song song với BM .

Gọi N là trung điểm BC ,
 $\Rightarrow ND // BM$ (do $BMDN$ là hình bình hành) và
 $BM \not\subset (SDN)$.

Vậy mặt phẳng chứa SD và song song với BM là (SDN)

- (2) Xác định mặt phẳng chứa CD và song song với SB .

Trong (SBD) , kẻ d qua D và song song với SB .
Vậy mặt phẳng chứa CD và song song với SB là mặt phẳng (CD, d) .



Ví dụ 1.2.

Cho tứ diện $ABCD$. G là trọng tâm của $\triangle ABD$. M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh $MG // (ACD)$.

Lời giải



Gọi E là trung điểm cạnh BC .

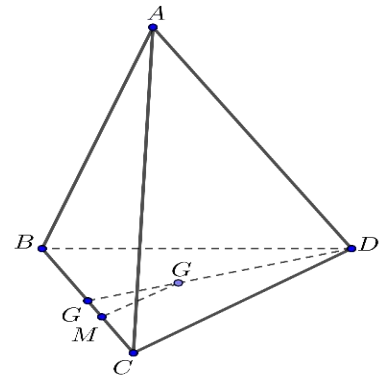
Do G là trọng tâm $\triangle BCD$,

Nên ta có $GD = \frac{2}{3}ED$ (1).

Mặt khác $3MC = BC \Rightarrow 3MC = 2EC \Rightarrow \frac{MC}{EC} = \frac{2}{3}$ (2).

Từ (1)&(2), suy ra $MG \parallel CD$,

Mà $CD \subset (ACD)$ nên $MG \parallel (ACD)$.



Ví dụ 1.3.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và BCD . Chứng minh rằng $MN \parallel (ABD)$ và $MN \parallel (ACD)$.

Lời giải

Gọi H là trung điểm của BC , ta có: $M \in AH, N \in DH$.

Xét tam giác ADH , ta có:

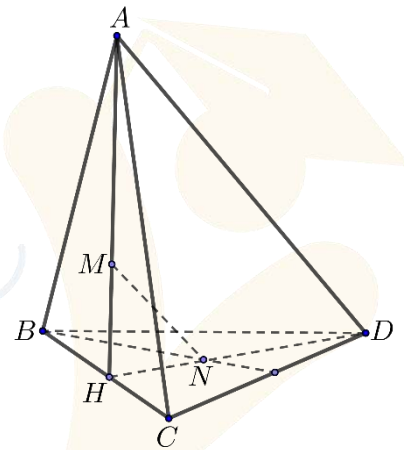
$$\frac{HM}{HA} = \frac{HN}{HD} = \frac{1}{3} \text{ (tính chất trọng tâm tam giác)}$$

$\Rightarrow MN \parallel AD$ (hệ quả định lý Thales).

Như vậy:

$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel AD \\ AD \subset (ABD) \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel (ABD);$$

$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel AD \\ AD \subset (ACD) \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel (ACD).$$



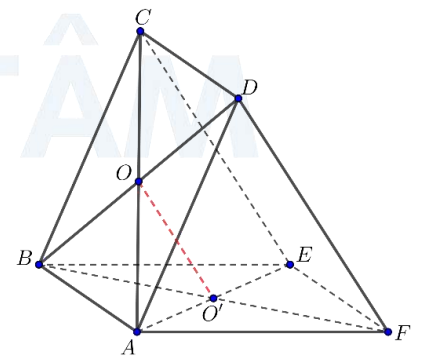
Ví dụ 1.4.

Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong 1 mặt phẳng. Gọi O, O' lần lượt là tâm của $ABCD$ và $ABEF$. Chứng minh OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE) .

Lời giải

$$\text{Ta có } \left\{ \begin{array}{l} BO = \frac{1}{2}BD \\ BO' = \frac{1}{2}BF \end{array} \right. \Rightarrow OO' \parallel DF.$$

Mà $DF \subset (ADF) \Rightarrow OO' \parallel (ADF)$.





Ví dụ 1.5.

Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên các cạnh AE, BD sao cho $AM = \frac{1}{3}AE, BN = \frac{1}{3}BD$. Chứng minh MN song song với $(CDEF)$.

Lời giải

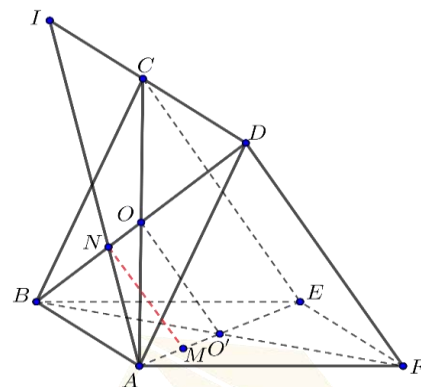
Trong $(ABCD)$, gọi $I = AN \cap CD$

Do $AB \parallel CD$

$$\text{Nên } \frac{AN}{AI} = \frac{BN}{BD} \Rightarrow \frac{AN}{AI} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Lại có } \frac{AM}{AE} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AN}{AI} = \frac{AM}{AE} \Rightarrow MN \parallel IE.$$

$$\text{Mà } I \in CD \Rightarrow IE \subset (CDEF) \Rightarrow MN \parallel (CDEF).$$



Ví dụ 1.5.

Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác ABD . Trên đoạn BC lấy điểm M sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh rằng đường thẳng MG song song với (ACD) .

Lời giải

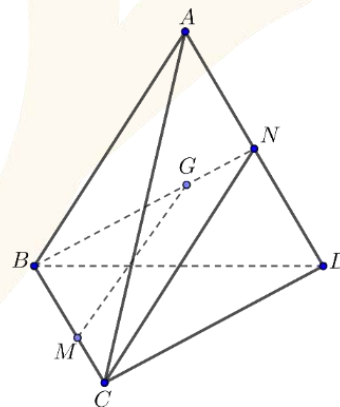
Gọi N là trung điểm của AD .

$$\text{Ta có: } \frac{BG}{BN} = \frac{2}{3} \text{ (G là trọng tâm } \triangle ABD)$$

$$\text{Theo giả thiết, ta có: } MB = 2MC \Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Tam giác } BCN \text{ có } \frac{BG}{BN} = \frac{BM}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow MG \parallel CN$$

$$\text{Mà } MG \subset (ACD), CN \subset (ACD) \Rightarrow MG \parallel (ACD)$$



Ví dụ 1.6.

Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$.

(1) Tìm $(BDF) \cap (ACE)$

(2) Chứng minh: $OO' \parallel (ADF)$ và $OO' \parallel (BCE)$.

(3) Gọi M và N là trọng tâm $\triangle ABD$ và $\triangle ABF$. Chứng minh: $MN \parallel (DCFE)$.

Lời giải

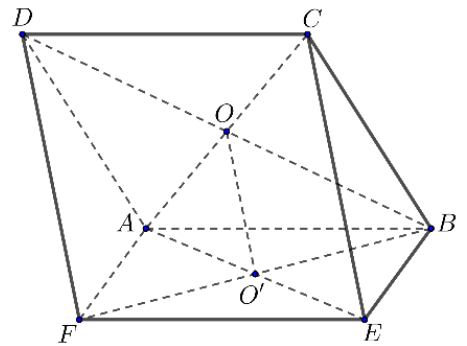


(1) Tìm $(BDF) \cap (ACE)$

Ta có $\begin{cases} O \in BD \subset (BDF) \\ O \in AC \subset (ACE) \end{cases} \Rightarrow O \in (BDF) \cap (ACE).$

Lại có $\begin{cases} O' \in BF \subset (BDF) \\ O' \in AE \subset (ACE) \end{cases} \Rightarrow O' \in (BDF) \cap (ACE).$

Vậy $OO' = (BDF) \cap (ACE).$



(2) Chứng minh: $(BDF) \cap (ACE)$ và $OO' \parallel (BCE).$

OO' là đường trung bình $\triangle BDF$ nên $OO' \parallel DF.$

Ta có $\begin{cases} OO' \parallel DF \\ DF \in (ADF) \Rightarrow OO' \parallel (ADF) \\ OO' \not\subset (ADF) \end{cases}$

Chứng minh tương tự ta có $OO' \parallel (BCE).$

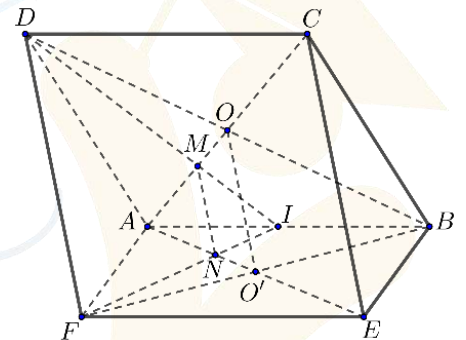
(3) Gọi M và N là trọng tâm $\triangle ABD$ và $\triangle ABF$. Chứng minh: $MN \parallel (DCFE).$

Gọi I là trung điểm AB .

Ta có $\frac{IM}{ID} = \frac{IN}{IF} = \frac{1}{3}$ (M, N lần lượt là trọng tâm $\triangle ABD$ và $\triangle ABF$).

$\Rightarrow MN \parallel DF.$

Ta có $\begin{cases} MN \parallel DF \\ DF \subset (DCFE) \Rightarrow MN \parallel (DCFE) \\ MN \not\subset (DCFE) \end{cases}$



TOÁN TỪ TÂM



➤ Dạng 2. Giao tuyến của hai mặt chứa một đường song song với mặt



Phương pháp

01

Dùng $\begin{cases} M = (\alpha) \cap (\beta) \\ a \subset (\alpha); b \subset (\beta) \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = Mx // a \\ a // b \end{cases}$

02

Dùng $\begin{cases} (P) // a \\ (Q) // a \Rightarrow b // a \\ (P) \cap (Q) = b \end{cases}$

Ví dụ 2.1.

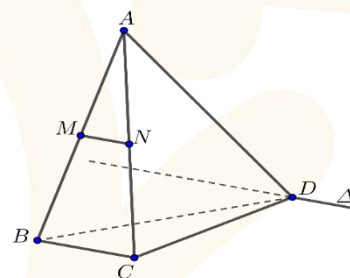
Cho tứ diện $ABCD$ Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, AC . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (DBC) và (DMN) .

✎ Lời giải

MN là đường trung bình của $\triangle ABC$
Nên $MN // BC$.

Ta có $\begin{cases} MN // BC \\ MN \subset (DMN) \Rightarrow (DMN) \cap (BCD) = \Delta, \\ BC \subset (BCD) \end{cases}$

với Δ đi qua $D, \Delta // BC$.



Ví dụ 2.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Điểm I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua I và song song với AB, SC .

✎ Lời giải

$AB // (P)$ khi đó $(P) \cap (ABCD) = d_1$ với d_1 đi qua I và $d_1 // AB$.

Gọi $M = d_1 \cap BC, N = d_1 \cap AD$.

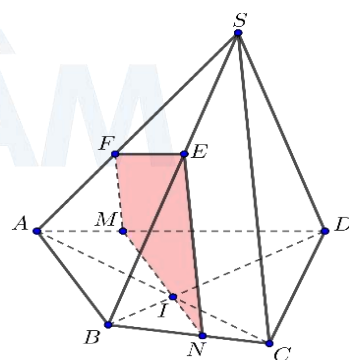
$SC // (P)$ khi đó $(P) \cap (SBC) = d_2$, với d_2 đi qua N và $d_2 // SC$.

Gọi $E = d_2 \cap SB$.

$AB // (P)$ khi đó $(P) \cap (SAB) = d_3$, với d_3 đi qua E và $d_3 // AB$.

Gọi $F = d_3 \cap SA$.

Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (P) là tứ giác $AMEF$





Ví dụ 2.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn AD . Gọi I là trung điểm SB . Gọi (P) là mặt phẳng qua I , song song với SD, AC .

- (1) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và (SBD) .
- (2) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và $(ABCD)$.

Lời giải

- (1) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và (SBD) .

$$\text{Ta có } \begin{cases} I \in (P) \cap (SBD) \\ (P) // SD \\ SD \subset (SBD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (P) \cap (SBD) = l_x \text{ trong đó } l_x // SD.$$

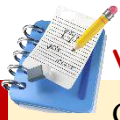
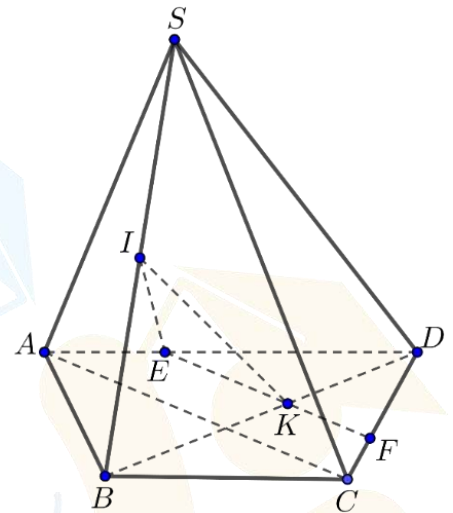
$$\text{Gọi } l_x \cap BD = K \Rightarrow (P) \cap (SBD) = IK.$$

- (2) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và $(ABCD)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} K \in (P) \cap (ABCD) \\ (P) // AC \\ AC \subset (ABCD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (P) \cap (SBD) = K_y \text{ trong đó } K_y // AC.$$

$$\text{Gọi } K_y \cap AD = E, K_y \cap CD = F \Rightarrow (P) \cap (SBD) = EF.$$



Ví dụ 2.4.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD , M là một điểm trên đoạn IJ . Gọi (P) là mặt phẳng qua M , song song với AB và CD .

- (1) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ICD) .
- (2) Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (P) . Thiết diện là hình gì?

Lời giải

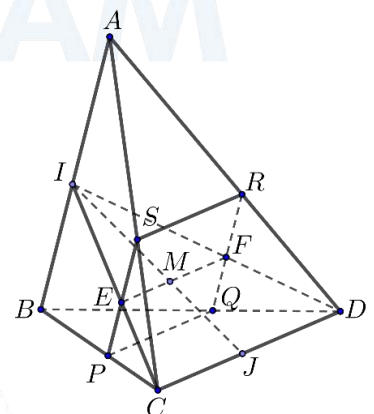
- (1) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ICD) .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} CD // (P) \\ CD \subset (ICD) \\ M \in (P) \cap (ICD) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (ICD) = Mx // CD.$$

Trong (ICD) ta có Mx cắt IC tại E và cắt ID tại F .

$$\text{Suy ra } EF = (P) \cap (ICD).$$

- (2) Xác định thiết diện của tứ diện với (P) . Thiết diện là hình gì?





$$\left. \begin{array}{l} AB // (P) \\ \text{Ta có: } AB \subset (ABC) \\ E \in (P) \cap (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow (P) \cap (ABC) = Ey // AB.$$

$$\text{Trong } (ABC) \text{ ta có } \begin{cases} Ey \cap BC = P \\ Ey \cap AC = S \end{cases} \Rightarrow PS = (P) \cap (ABC).$$

$$\left. \begin{array}{l} AB // (P) \\ \text{Ta có: } AB \subset (ABD) \\ F \in (P) \cap (ABD) \end{array} \right\} \Rightarrow (P) \cap (ABD) = Ft // AB.$$

$$\text{Trong } (ABD) \text{ ta có } \begin{cases} Ft \cap BD = Q \\ Ft \cap AD = R \end{cases} \Rightarrow QR = (P) \cap (ABD).$$

$$\text{Khi đó: } PQ = (P) \cap (BCD) \text{ và } RS = (P) \cap (ACD).$$

Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác PQRS.

Theo chứng minh trên ta suy ra: $PS // AB$, $QR // AB$ nên $PS // QR$. (1)

$$\left. \begin{array}{l} CD // (P) \\ CD \subset (ACD) \\ RS = (P) \cap (ACD) \end{array} \right\} \Rightarrow RS // CD$$

$$\left. \begin{array}{l} CD // (P) \\ CD \subset (BCD) \\ PQ = (P) \cap (BCD) \end{array} \right\} \Rightarrow PQ // CD$$

$$\left. \begin{array}{l} RS // CD \\ PQ // CD \end{array} \right\} \Rightarrow RS // PQ. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra thiết diện PQRS là hình bình hành.

TOÁN TỪ TÂM



Dạng 3. Thiết diện



Phương pháp

□ Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ và (α) .

- » Nếu (α) cắt hình chóp tại một mặt nào đó hình chóp thì sẽ cắt mặt phẳng này theo một đoạn thẳng gọi là *đoạn giao tuyến* của (α) và mặt đó.
- » Các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau tạo thành một đa giác phẳng gọi là *thiết diện*.
- » Như vậy muốn tìm thiết diện của hình chóp với (α) , ta tìm các giao tuyến (nếu có).
- » Đa giác tạo bởi các giao tuyến là thiết diện cần tìm.

** Sử dụng định lý:

Cho đường thẳng d song song với (α) .

Nếu (β) chứa d và cắt (α) theo giao tuyến d' thì $d' \parallel d$



Ví dụ 3.1.

Cho tứ diện $ABCD$, điểm M thuộc AC . Mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD . Thiết diện của (α) với tứ diện $ABCD$ là hình gì?

🔗 **Lời giải**

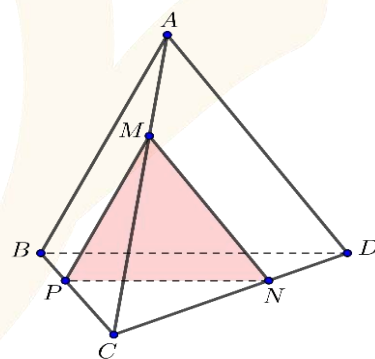
$(\alpha) \parallel AB$

Nên giao tuyến của (α) với (ABC) là đường thẳng qua M , song song với AB , cắt BC tại P .

$(\alpha) \parallel AD$

Nên giao tuyến của (α) với (ADC) là đường thẳng qua M , song song với AD cắt DC tại N .

Vậy thiết diện là tam giác MNP .



Ví dụ 3.2.

Cho tứ diện $ABCD$. Giả sử M thuộc đoạn thẳng BC . Một mặt phẳng (α) qua M song song với AB và CD . Thiết diện của (α) và hình tứ diện $ABCD$ là hình gì?

🔗 **Lời giải**

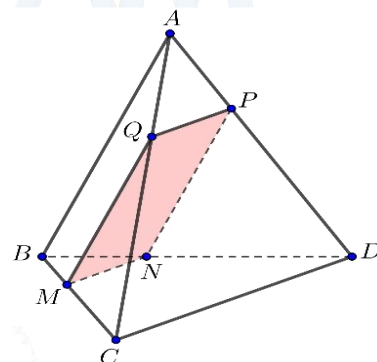
» $(\alpha) \parallel AB$

Nên $(\alpha) \cap (ABC)$ là đường thẳng đi qua M và song song với AB và cắt AC tại Q .

» $(\alpha) \parallel CD$

Nên $(\alpha) \cap (BCD)$ là đường thẳng đi qua M và song song với CD và cắt BD tại N .

» $(\alpha) \parallel AB$





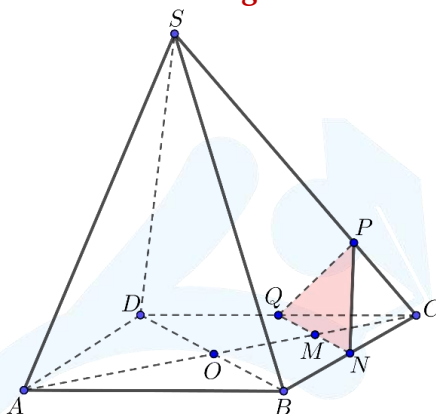
Nên $(\alpha) \cap (ABD)$ là đường thẳng đi qua N và song song với AB và cắt AD tại P .
Ta có $MN \parallel PQ \parallel CD, MQ \parallel PN \parallel AB$. Vậy thiết diện là hình bình hành $MNPQ$.



Ví dụ 3.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , M là trung điểm của OC . Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với SA, BD . Tìm thiết diện của hình chóp với (α) .

Lời giải



Trong $(ABCD)$ qua M kẻ đường thẳng song song BD , cắt BC tại Q , cắt CD tại N .

Trong (SAC) qua M kẻ đường thẳng song song SA , cắt SC tại P .

Khi đó ta có: $(\alpha) \cap (ABCD) = NQ$, $(\alpha) \cap (SBC) = NP$, $(\alpha) \cap (SCD) = PQ$.

Do đó mặt phẳng (α) cắt hình chóp theo thiết diện là tam giác MNP .

Vậy thiết diện cần tìm là tam giác MNP .



Ví dụ 3.4.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA, SB . Điểm M bất kì thuộc cạnh BC . Tìm thiết diện của hình chóp với (MEF) .

Lời giải

Dễ thấy $EF \parallel AB$,

Trong $(ABCD)$ qua M kẻ đường thẳng song song với AB cắt AD tại N .

Ta có:

$$(MEF) \cap (SBC) = MF.$$

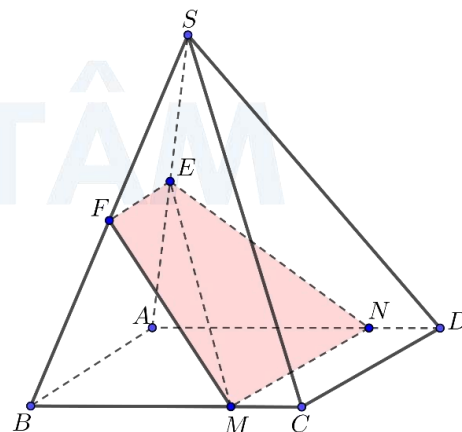
$$(MEF) \cap (SAB) = EF.$$

$$(MEF) \cap (SAD) = EN.$$

$$(MEF) \cap (ABCD) = MN.$$

$$\text{Do đó } (MEF) \cap S.ABCD = MNEF.$$

Vậy thiết diện là hình thang $MNEF$, đáy là MN và EF .





Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» **Câu 1.** Trong không gian, cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) . Có bao nhiêu vị trí tương đối giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) .

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

🔗 **Lời giải**

Chọn C

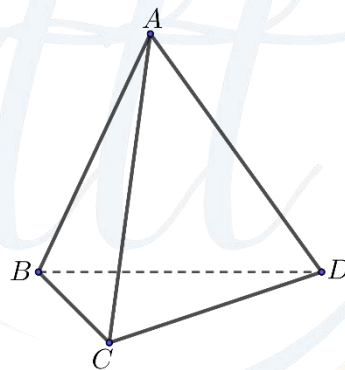
Có 3 vị trí tương đối giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) .

Trường hợp 1: Đường thẳng a và mặt phẳng (P) có từ hai điểm chung phân biệt trở lên, ta nói a nằm trong (P) .

Trường hợp 2: Đường thẳng a và mặt phẳng (P) có một điểm chung duy nhất A , ta nói a cắt (P) tại A .

Trường hợp 3: Đường thẳng a và mặt phẳng (P) không có điểm chung nào, ta nói a song song với (P) .

» **Câu 2.** Cho tứ diện $ABCD$. Vị trí tương đối giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (BCD) là.



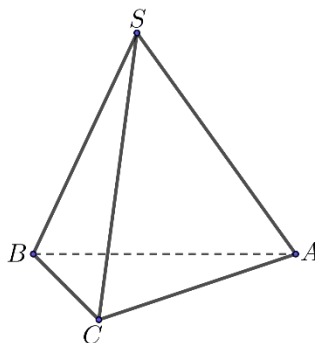
- A. $BC \parallel (BCD)$. B. $BC \subset (BCD)$. C. $BC \cap (BCD) = A$. D. $BC \cap (BCD) = D$.

🔗 **Lời giải**

Chọn B

Đường thẳng BC có hai điểm chung B và C với mặt phẳng (BCD) , suy ra $BC \subset (BCD)$.

» **Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABC$. Vị trí tương đối giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) là.





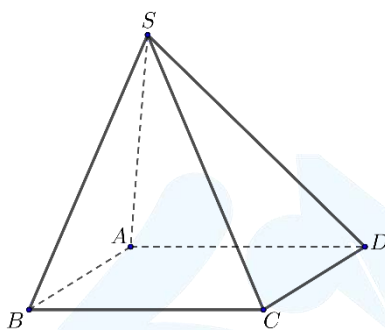
- A. $SB \parallel (ABC)$. B. $SB \subset (ABC)$. C. $SB \cap (ABC) = A$. D. $SB \cap (ABC) = B$.

✎ *Lời giải*

Chọn D

Đường thẳng SB có điểm chung duy nhất B với mặt phẳng (ABC) , suy ra SB cắt mặt phẳng (ABC) tại B .

- » **Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Vị trí tương đối giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (SCD) là.



- A. $AB \cap (SCD) = B$. B. $AB \cap (SCD) = S$. C. $AB \subset (SCD)$. D. $AB \parallel (SCD)$.

✎ *Lời giải*

Chọn D

Ta có $AB \not\subset (SCD)$.

$AB \parallel CD$ (do $ABCD$ là hình bình hành).

$CD \subset (SCD)$.

Suy ra $AB \parallel (SCD)$.

- » **Câu 5.** Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và song song với b ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

✎ *Lời giải*

Chọn B

Theo lý thuyết: Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau thì qua a có một và chỉ một mặt phẳng song song với b .

- » **Câu 6.** Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) . Giả sử $b \not\subset (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Nếu $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$.
B. Nếu b cắt (α) thì b cắt a .
C. Nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt cả a và b .
D. Nếu $b \parallel a$ thì $b \parallel (\alpha)$.

✎ *Lời giải*

Chọn D



$$\text{Ta có } \begin{cases} b // a \\ a \subset (\alpha) \Rightarrow b // (\alpha) \\ b \not\subset (\alpha) \end{cases}$$

» **Câu 7.** Cho tứ diện $ABCD$. Cho các mệnh đề sau:

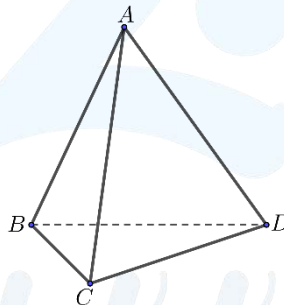
- (1) $AD \subset (ABC)$
- (2) $AD \cap (ABC) = C$.
- (3) $AB \subset (ABC)$.
- (4) $AC // (ABD)$.

Trong các mệnh đề đã cho, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A



Ta có $AD \cap (ABC) = A \Rightarrow$ mệnh đề (1) sai

$AC \cap (ABD) = A \Rightarrow$ mệnh đề (2) sai

$AB \subset (ABC) \Rightarrow$ mệnh đề (3) đúng

$AC \cap (ABD) = A \Rightarrow$ mệnh đề (4) sai.

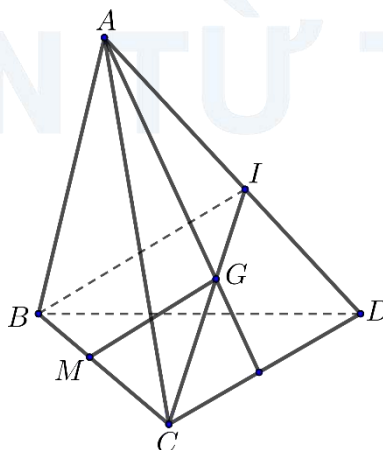
Vậy trong 4 mệnh đề đã cho có 1 mệnh đề đúng

» **Câu 8.** Cho tứ diện $ABCD$, gọi G là trọng tâm tam giác ACD , M thuộc đoạn BC sao cho $CM = 2MB$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A.** $MG // (ABC)$. **B.** $MG // (ABD)$. **C.** $MG // CD$. **D.** $MG // BD$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của AD .



Trong (IBC) , ta có:

$CG = 2GI$ (Vì G là trọng tâm của tam giác ACD)

$CM = 2MB$ (gt)

$$\text{hay } \frac{CG}{GI} = \frac{CM}{MB} = 2$$

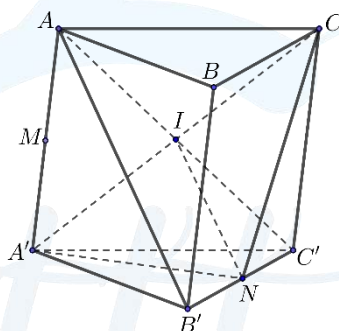
$$\Rightarrow MG \parallel BI, BI \subset (ABD)$$

Vậy $MG \parallel (ABD)$.

- » **Câu 9.** Cho tam giác $A'B'C'$, dựng các đường thẳng $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$ sao cho chúng không thuộc mặt phẳng $(A'B'C')$ và lần lượt đi qua các điểm A', B', C' . Trên các đường d_1, d_2, d_3 lần lượt lấy các điểm A, B, C sao cho $AB \parallel A'B', BC \parallel B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $AA', B'C'$. Khi đó đường thẳng AB' song song với mặt phẳng nào sau đây?
- A.** (BMN) . **B.** $(C'MN)$. **C.** $(A'CN)$. **D.** $(A'BN)$.

🔗 **Lời giải**

Chọn C



Gọi I là tâm của hình bình hành $ACC'A'$.

Trong $(AB'C')$, ta có:

$AI = IC'$ (Vì I là tâm của hình bình hành $ACC'A'$)

$B'N = NC'$ (Vì N là trung điểm của $B'C'$)

$$\Rightarrow AB' \parallel IN, IN \subset (A'NC)$$

Vậy $AB' \parallel (A'NC)$.

- » **Câu 10.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, H lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB, CD, SD . Gọi I, J lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng CN và SH . Trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?
- (i) $MN \parallel (SBC)$ (ii) $AD \parallel (SBC)$ (iii) $HN \parallel (SBC)$ (iv) $IJ \parallel (HMN)$

A. 1.

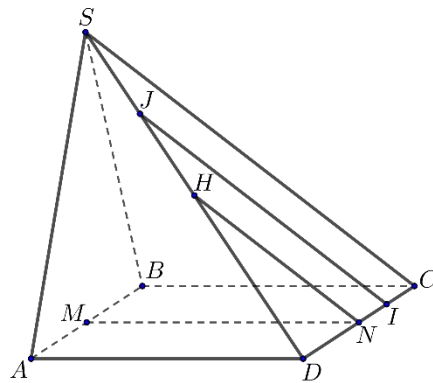
B. 3.

C. 4.

D. 2.

🔗 **Lời giải**

Chọn C



Ta có M, N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB, CD và $ABCD$ là hình bình hành

$$\Rightarrow MN \parallel BC \text{ mà } BC \subset (SBC).$$

$$\Rightarrow MN \parallel (SBC)$$

Ta có $AD \parallel BC$ (Vì $ABCD$ là hình bình hành) mà $BC \subset (SBC)$.

$$\Rightarrow AD \parallel (SBC)$$

Ta có H, N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng SD, CD

$$\Rightarrow HN \parallel SC \text{ mà } SC \subset (SBC).$$

$$\Rightarrow HN \parallel (SBC)$$

Ta có I, J lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng SH, CN

$$\Rightarrow IJ \parallel SC \text{ mà } SC \subset (SBC).$$

$$\Rightarrow HN \parallel (SBC)$$

Vậy ta có 4 khẳng định đúng.

» **Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm hai đường chéo. Gọi M là trung điểm của SC . Đường thẳng OM song song với những mặt phẳng nào sau đây?

A. (SAD) và (SBC) .

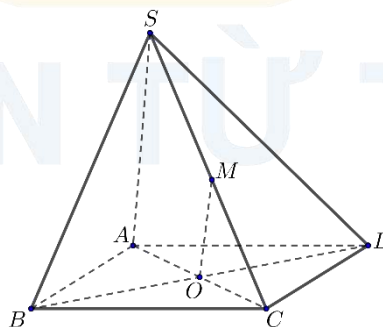
B. (SAD) và (SBA) .

C. (SBA) và (SCD) .

D. (SAC) và $(ABCD)$.

🔗 **Lời giải**

Chọn B



Ta có $OM \parallel SA$ (vì OM là đường trung bình của ΔSAC).

$$SA \subset (SAB), OM \not\subset (SAB) \Rightarrow OM \parallel (SAB).$$

$$SA \subset (SAD), OM \not\subset (SAD) \Rightarrow OM \parallel (SAD).$$

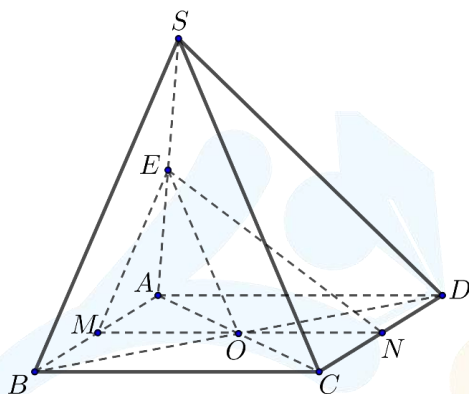


» **Câu 12.** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O và M, N, E lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, CD, SA . Khẳng định nào sau đây là sai?

- A.** MN song song với hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) .
B. SB và SC song song với (MNE) .
C. ME song song với hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) .
D. EO song song với hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) .

» **Lời giải**

Chọn C



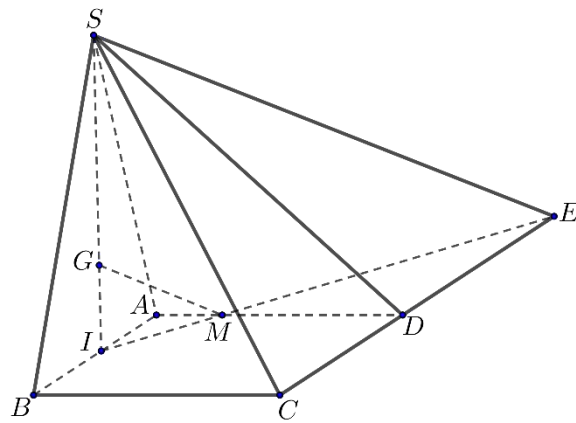
- » Ta có $\begin{cases} MN \parallel BC \\ BC \subset (SBC) \\ MN \not\subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (SBC)$, và $\begin{cases} MN \parallel AD \\ AD \subset (SAD) \\ MN \not\subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (SAD)$.
 » Ta có $\begin{cases} SB \parallel MN \\ MN \subset (MNE) \\ SB \not\subset (MNE) \end{cases} \Rightarrow SB \parallel (MNE)$, và $\begin{cases} SC \parallel EO \\ EO \subset (MNE) \\ SC \not\subset (MNE) \end{cases} \Rightarrow SC \parallel (MNE)$.
 » $ME \subset (SAB)$ nên ME không song song với (SAB) .
 » Ta có $\begin{cases} EO \parallel SC \\ SC \subset (SBC) \\ EO \not\subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow EO \parallel (SBC)$, và $\begin{cases} EO \parallel SC \\ SC \subset (SCD) \\ EO \not\subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow EO \parallel (SCD)$.

» **Câu 13.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm tam giác SAB , I là trung điểm của AB và M là điểm trên cạnh AD sao cho $AM = \frac{1}{3}AD$. MG song song với mặt phẳng nào sau đây?

- A.** (SBC) . **B.** (SAD) . **C.** (SBD) . **D.** (SCD) .

» **Lời giải**

Chọn D



Gọi $E = IM \cap CD \Rightarrow SE \subset (SCD)$.

Do G là trọng tâm tam giác SAB nên $\frac{IG}{IS} = \frac{1}{3}$.

Ta có tam giác MIA đồng dạng với tam giác MED nên $\frac{MI}{ME} = \frac{MA}{MD}$.

Mà $AM = \frac{1}{3}AD$ nên $\frac{MA}{MD} = \frac{1}{2}$, suy ra $\frac{MI}{ME} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{IM}{IE} = \frac{1}{3}$.

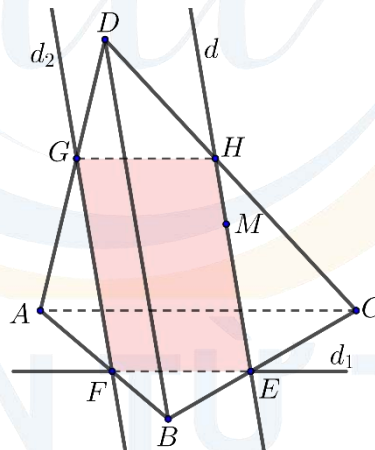
Vậy $\frac{IG}{IS} = \frac{IM}{IE} \Rightarrow GM \parallel SE$ mà $SE \subset (SCD), GM \not\subset (SCD)$. Vậy $GM \parallel (SCD)$.

» **Câu 14.** Cho tứ diện $ABCD$, lấy điểm M là một điểm thuộc miền trong của tam giác BCD . Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với AC và BD . Hình tạo bởi các giao tuyến của (α) với các mặt của tứ diện $ABCD$ là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Hình thang. **C.** Hình vuông. **D.** Hình thoi.

» **Lời giải**

Chọn A



» Xét (α) và (BCD) .

Ta có M là điểm chung của hai mặt phẳng.

$(\alpha) \parallel BD, BD \subset (BCD)$. Khi đó $(\alpha) \cap (BCD) = d$ với d đi qua M và $d \parallel BD$.

Gọi $E = d \cap BC, H = d \cap DC$.

» Xét (α) và (ABC) .

Ta có E là điểm chung của hai mặt phẳng.

$(\alpha) \parallel AC, AC \subset (ABC)$. Khi đó $(\alpha) \cap (ABC) = d_1$ với d_1 đi qua E và $d_1 \parallel AC$.



Gọi $F = d_1 \cap AB$.

» Xét (α) và (ABD) .

Ta có F là điểm chung của hai mặt phẳng.

$(\alpha) \parallel BD, BD \subset (ABD)$. Khi đó $(\alpha) \cap (ABD) = d_1$ với d_1 đi qua F và $d_1 \parallel BD$.

Gọi $G = d_1 \cap AD$.

Vậy các giao tuyến của (α) với các mặt của tứ diện gồm có

$$\begin{cases} (\alpha) \cap (ABC) = EF \\ (\alpha) \cap (ABD) = FG \\ (\alpha) \cap (ADC) = GH \\ (\alpha) \cap (DBC) = EH \end{cases} \text{ . Vậy hình tạo bởi các giao tuyến là tứ giác } EFGH.$$

Mặt khác $HE \parallel GF, EF \parallel GH$ nên $EFGH$ là hình bình hành.

» **Câu 15.** Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AD lấy trung điểm M , trên đoạn thẳng BC lấy điểm N . Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng MN và song song với CD và gọi (H) là hình tạo bởi các giao tuyến của (α) với các mặt của tứ diện. Xác định vị trí của điểm N trên đoạn BC sao cho (H) là một hình bình hành.

A. $BN = \frac{1}{2} BC$.

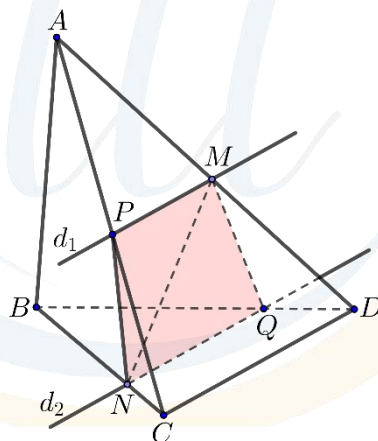
B. $BN = 2BC$

C. $BN = \frac{3}{2} BC$

D. $3BN = 2BC$

» **Lời giải**

Chọn A



» Xét (α) và (ACD)

Ta có M là điểm chung của hai mặt phẳng

$(\alpha) \parallel CD, CD \subset (ACD)$. Khi đó $(\alpha) \cap (ACD) = d_1$ với d_1 đi qua M và $d_1 \parallel CD$.

Gọi $P = d_1 \cap AC$.

» Xét (α) và (BCD)

Ta có N là điểm chung của hai mặt phẳng

$(\alpha) \parallel CD, CD \subset (BCD)$. Khi đó $(\alpha) \cap (BCD) = d_2$ với d_2 đi qua N và $d_2 \parallel CD$.

Gọi $Q = d_2 \cap BD$.

Vậy các giao tuyến của (α) với các mặt của tứ diện gồm có



$$\begin{cases} (\alpha) \cap (ABC) = PN \\ (\alpha) \cap (BCD) = NQ \\ (\alpha) \cap (ABD) = QM \\ (\alpha) \cap (ACD) = MP \end{cases} \cdot \text{Vậy hình tạo bởi các giao tuyến là tứ giác } MPNQ.$$

Mặt khác $PM \parallel NQ$ nên $MPNQ$ là hình thang.

Ta có: $PM \parallel CD$, $MP = \frac{1}{2}CD$ (vì PM là đường trung bình của tam giác ACD)

Để $MPNQ$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \begin{cases} PM \parallel NQ \\ PM = NQ \end{cases}$, vậy $NQ \parallel CD$, $NQ = \frac{1}{2}CD$

Khi đó N là trung điểm BC , hay $BN = \frac{1}{2}BC$.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» **Câu 16.** Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Nếu $a \cap (\alpha) = \emptyset$ thì $a \parallel (\alpha)$		
(b)	Nếu $a \parallel b$ và $b \parallel (\alpha)$ thì $a \parallel (\alpha)$		
(c)	Nếu a và (α) có 2 điểm chung thì $a \subset (\alpha)$.		
(d)	Nếu $a \parallel b$ và $b \subset (\alpha)$ thì $a \parallel (\alpha)$.		

» **Lời giải**

(a) Nếu $a \cap (\alpha) = \emptyset$ thì $a \parallel (\alpha)$.

Nếu $a \cap (\alpha) = \emptyset$ thì $a \parallel (\alpha)$ đúng do định nghĩa.

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Nếu $a \parallel b$ và $b \parallel (\alpha)$ thì $a \parallel (\alpha)$.

Nếu $a \parallel b$ và $b \parallel (\alpha)$ thì $a \parallel (\alpha)$ là mệnh đề sai vì a có thể nằm trong (α) .

» **Chọn SAI.**

(c) Nếu a và (α) có 2 điểm chung thì $a \subset (\alpha)$.

Nếu a và (α) có 2 điểm chung thì $a \subset (\alpha)$ đúng.

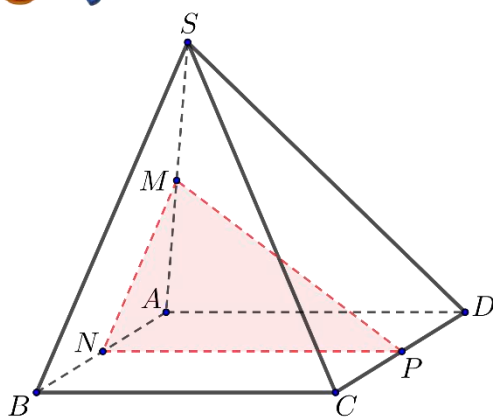
» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Nếu $a \parallel b$ và $b \subset (\alpha)$ thì $a \parallel (\alpha)$.

Nếu $a \parallel b$ và $b \subset (\alpha)$ thì $a \parallel (\alpha)$ là mệnh đề sai vì a có thể nằm trong (α) .

» **Chọn SAI.**

» **Câu 17.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các điểm M, N, P lần lượt là các trung điểm của các đoạn SA, AB, CD như hình vẽ.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$SB // (MNP)$		
(b)	$AD // (MNP)$		
(c)	Giao tuyến của (SAD) và (MNP) là đường thẳng song song với AD		
(d)	Giao tuyến của (SAB) và (MNP) là đường thẳng song song với MN .		

Lời giải

(a) $SB // (MNP)$.

$$\begin{cases} SB \not\subset (MNP) \\ SB // MN \\ MN \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow SB // (MNP).$$

» Chọn ĐÚNG.

(b) $AD // (MNP)$.

$$\text{Tương tự, } \begin{cases} AD // NP \\ NP \subset (MNP) \\ AD \not\subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow AD // (MNP)$$

» Chọn ĐÚNG.

(c) Giao tuyến của (SAD) và (MNP) là đường thẳng song song với AD .

$$\text{Ta có } \begin{cases} AD // (MNP) \\ AD \subset (SAD) \\ M \in (MNP) \cap (SAD) \end{cases} \text{ nên giao tuyến của } (SAD) \text{ và } (MNP) \text{ là đường thẳng qua } M \text{ và song song với } AD.$$

» Chọn ĐÚNG.

(d) Giao tuyến của (SAB) và (MNP) là đường thẳng song song với MN .

Giao tuyến của (SAB) và (MNP) là đường thẳng MN .

» Chọn SAI.

» Câu 18. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không đồng phẳng có tâm lần lượt là I và J .

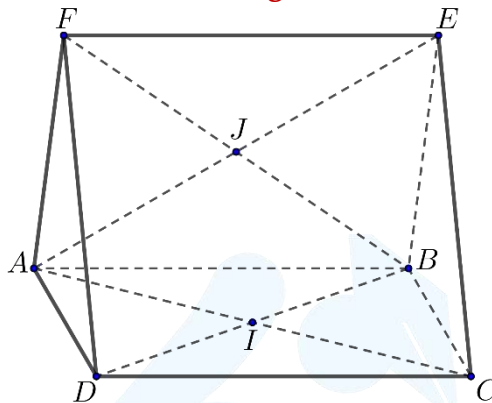
Mệnh đề

Đúng Sai



(a)	$IJ // (ADF)$		
(b)	$IJ // (CEB)$		
(c)	$IJ // (CEA)$		
(d)	$IJ // (CDFE)$		

Lời giải



(a) $IJ // (ADF)$.

Do I và J là trung điểm của BD và BF nên $IJ // DF$, mà $DF \subset (ADF) \Rightarrow IJ // (ADF)$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) $IJ // (CEB)$.

Do I và J là trung điểm của AC và AE , nên $IJ // EC$, mà $EC \subset (CBE) \Rightarrow IJ // (CEB)$

» Chọn ĐÚNG.

(c) $IJ // (CEA)$

$IJ \subset (CEA)$

» Chọn SAI.

(d) $IJ // (CDFE)$.

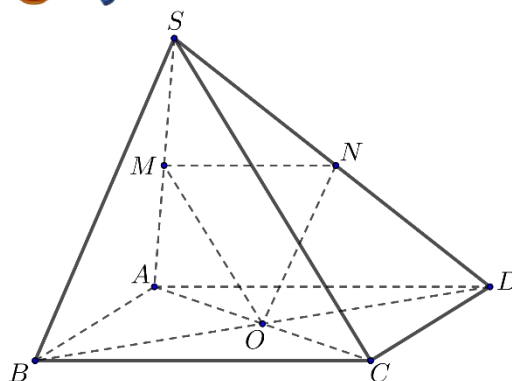
Ta có $IJ // CE$, mà $CE \subset (CDEF)$ nên $IJ // (CDFE)$.

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	MN song song với mặt phẳng (SAB)		
(b)	MO song song với mặt phẳng (SBC)		
(c)	NO song song với mặt phẳng (SBD)		
(d)	CD song song với mặt phẳng (MNO)		

Lời giải



(a) MN song song với mặt phẳng (SAB) .

Ta có $M \in SA, N \in SB$ nên $MN \subset (SAB)$.

» Chọn SAI.

(b) MO song song với mặt phẳng (SBC) .

Ta có M là trung điểm SA , O là trung điểm AC

$\Rightarrow MO$ là đường trung bình của $\Delta SAC \Rightarrow MO \parallel SC$

Mà $SC \subset (SBC) \Rightarrow MO \parallel (SBC)$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) NO song song với mặt phẳng (SBD) .

Ta có $N \in SB, O \in BD$ nên $NO \subset (SBD)$.

» Chọn SAI.

(d) CD song song với mặt phẳng (MNO) .

Ta có M, N là lần lượt là trung điểm của SA, SB nên $MN \parallel AB$

mà $AB \parallel CD \Rightarrow MN \parallel CD$

Lại có $MN \subset (MNO) \Rightarrow CD \parallel (MNO)$.

» Chọn ĐÚNG.

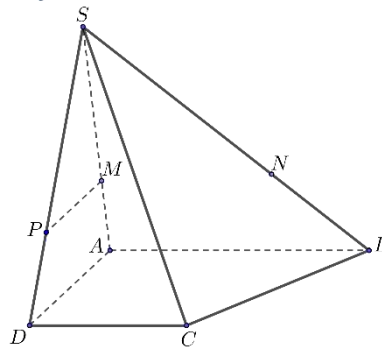
» Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $AB = 2CD$.

Trên các cạnh SA, SB, SD lấy các điểm M, N, P sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SD} = \frac{2}{3}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SMP) là đường thẳng đi qua S và song song với AD .		
(b)	Giao tuyến của hai mặt phẳng (SCD) và (SMN) là đường thẳng đi qua S và song song với AB .		
(c)	Giao tuyến của hai mặt phẳng (CPM) và $(ABCD)$ là đường thẳng CI với I là trung điểm của AB .		
(d)	Giao tuyến của hai mặt phẳng (CMN) và (PAB) là đường thẳng đi qua Q và song song với MN với $Q = PA \cap MD$.		

» Lời giải

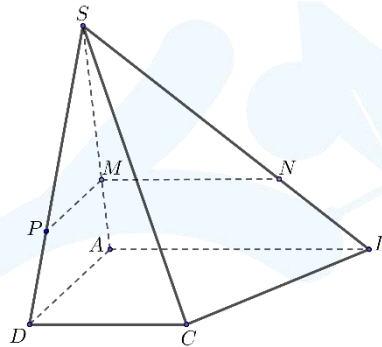
(a) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SMP) là đường thẳng đi qua S và song song với AD .



Ta có $(SAD) \equiv (SMP)$.

» Chọn SAI.

(b) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SCD) và (SMN) là đường thẳng đi qua S và song song với AB .



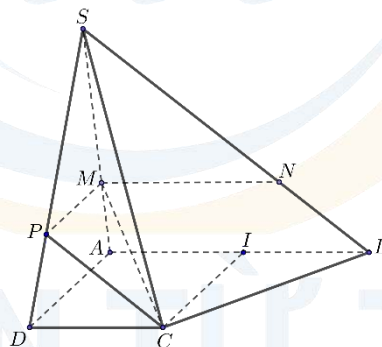
Ta có $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} \Rightarrow MN \parallel AB$ mà $AB \parallel CD \Rightarrow MN \parallel CD$.

Mà $S \in (SMN) \cap (SCD)$

$\Rightarrow (SMN) \cap (SCD) = Sx$ với $Sx \parallel AB \parallel CD \parallel MN$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) Giao tuyến của hai mặt phẳng (CPM) và $(ABCD)$ là đường thẳng CI với I là trung điểm AB .



Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow AI = CD = \frac{AB}{2}$ và $CD \parallel AI$

$\Rightarrow ADCI$ là hình bình hành $\Rightarrow AD \parallel CI$ (1)

Ta có $C \in (CPM) \cap (ABCD)$.

Lại có $\frac{SM}{SA} = \frac{SP}{SD} \Rightarrow MP \parallel AD$

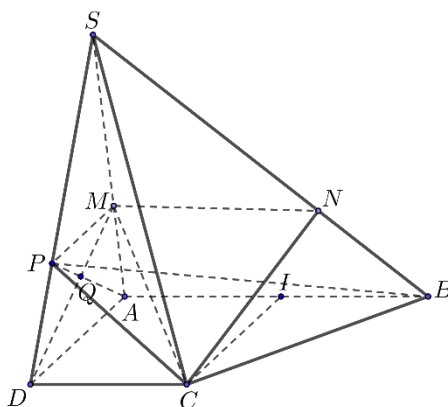
$\Rightarrow Ct = (CPM) \cap (ABCD)$ với $Ct \parallel AD$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $I \in Ct$.

» Chọn ĐÚNG.



(d) Giao tuyến của hai mặt phẳng (CMN) và (PAB) là đường thẳng đi qua Q và song song với MN với $Q = PA \cap MD$.



Ta có $MN \parallel CD \Rightarrow D \in (CMN)$.

Gọi $Q = AP \cap MD$. Khi đó $Q \in (CMN) \cap (PAB)$.

Mặt khác $MN \parallel AB \Rightarrow Q \in (CMN) \cap (PAB)$ với $Q \in MN \parallel AB$.

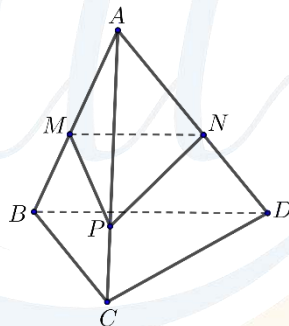
» **Chọn ĐÚNG.**

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 21.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD và P là điểm trên cạnh AC sao cho $PA = 2PC$. Trong ba đường thẳng MN, NP, PM có bao nhiêu đường thẳng song song với mặt phẳng (BCD) ?

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 1**



Ta có $\begin{cases} MN \parallel BD \\ BD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (BCD)$.

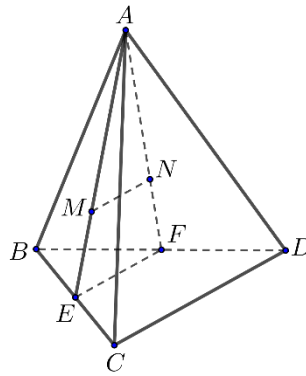
Trong (ABC) , hai đường thẳng phân biệt MP và BC không song song nên cắt nhau tại một điểm, do đó MP có điểm chung với mặt phẳng (BCD) .

Trong (ACD) , hai đường thẳng phân biệt PN và CD không song song nên cắt nhau tại một điểm, do đó PN có điểm chung với mặt phẳng (BCD) .

» **Câu 22.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD . Đường thẳng MN song song với bao nhiêu mặt phẳng trong bốn mặt của tứ diện?

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 2**



Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC và BD .

Ta có $\frac{AM}{AE} = \frac{AN}{AF} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN \parallel EF$, mà $EF \subset (BCD)$ suy ra $MN \parallel (BCD)$.

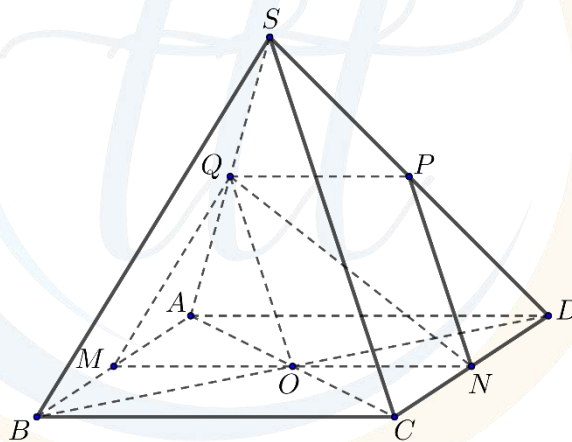
Ta lại có $MN \parallel EF$ và $EF \parallel CD$ suy ra $MN \parallel CD$ do đó $MN \parallel (ACD)$.

Ta có MN cắt (ABC) tại M và cắt mặt phẳng (ABD) tại N , nên MN không song song với hai mặt phẳng này.

» **Câu 23.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, SA . Có tất cả bao nhiêu cạnh của hình chóp song song với mặt phẳng (MNQ) .

🔗 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 4**



Ta có 3 cạnh của hình chóp là AB, CD, SA đều có điểm chung với mặt phẳng (MNQ) nên không thể song song với mặt phẳng này.

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD , và P là trung điểm của SD .

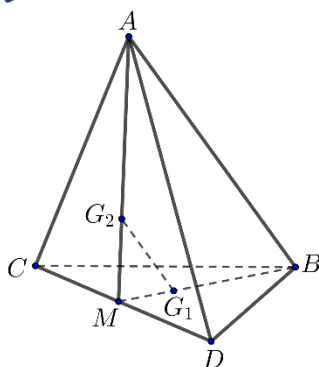
- Ta có $BC \parallel MN \parallel AD$ nên BC và AD đều song song với mặt phẳng (MNQ) .
- Ta lại có $SB \parallel MQ \Rightarrow SB \parallel (MNQ)$ và $SC \parallel OQ \Rightarrow SC \parallel (MNQ)$.
- Vì SD cắt mặt phẳng (MNQ) tại trung điểm P của SD .

Vậy có tất cả 4 cạnh của hình chóp song song với mặt phẳng (MNQ) .

» **Câu 24.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm tam giác BCD và ACD . Khi đó đoạn thẳng G_1G_2 song song với bao nhiêu mặt của tứ diện $ABCD$.

🔗 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 2**



Gọi M trung điểm CD .

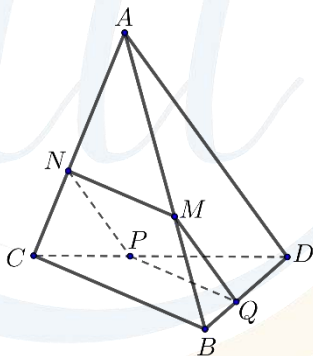
$$\text{Xét tam giác } ABM \text{ có } \begin{cases} \frac{MG_2}{AM} = \frac{1}{3} \\ \frac{MG_1}{BM} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow G_1G_2 // AB.$$

$$\text{Mà } \begin{cases} AB \subset (ABC) \Rightarrow G_1G_2 // (ABC) \\ AB \subset (ABD) \Rightarrow G_1G_2 // (ABD) \end{cases}.$$

» **Câu 25.** Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M là trung điểm AB . Gọi (α) là mặt phẳng qua M , song song với hai đường thẳng BC và AD . Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (α) với các cạnh AC, CD và DB . Biết khi $AD = kBC$ thì $MNPQ$ là hình thoi. Hãy xác định giá trị của $k, (k \in \mathbb{R}, k > 0)$.

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 1**



$$\text{Ta có: } \begin{cases} (MNPQ) \cap (ABC) = MN \\ BC // (MNPQ) \end{cases} \Rightarrow MN // BC$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (MNPQ) \cap (BCD) = PQ \\ BC // (MNPQ) \end{cases} \Rightarrow BC // PQ$$

Vậy $MN // PQ$.

Chứng minh tương tự ta có: $NP // MQ$.

Vậy $MNPQ$ là hình bình hành.

Để hình bình hành $MNPQ$ là hình thoi thì ta cần $MQ = PQ$.

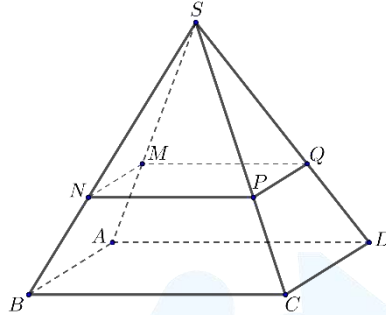
$$\text{Để } MQ = PQ \Rightarrow \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} BC \Rightarrow AD = 1 \cdot BC.$$



» **Câu 26.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 10. M là điểm trên SA sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và CD , cắt hình chóp theo một tứ giác. Hãy xác định diện tích của tứ giác đó (làm tròn tới hàng phần trăm).

✍ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 44,44**



Ta có $\begin{cases} AB // (\alpha) \\ CD // (\alpha) \end{cases}$

Giả sử (α) cắt các mặt bên (SAB) , (SBC) , (SCD) , (SDA) lần lượt tại các điểm N, P, Q với $N \in SB$, $P \in SC$, $Q \in SD$ suy ra $(\alpha) \equiv (MNPQ)$.

Ta có: $\begin{cases} (MNPQ) \cap (SAB) = MN \\ AB // (MNPQ) \end{cases} \Rightarrow MN // AB \Rightarrow \frac{SM}{SA} = \frac{MN}{AB} = \frac{2}{3}$.

Tương tự, ta có được $\frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{QM}{DA} = \frac{2}{3}$ và $MNPQ$ là hình vuông.

Suy ra $S_{MNPQ} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 S_{ABCD} = \frac{4}{9} S_{ABCD} = \frac{4}{9} \cdot 10 \cdot 10 = \frac{400}{9} \approx 44,44$

----- Hết -----

TOÁN TỪ TÂM



Chương 04

Bài 4.

HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

A

Lý thuyết

1. Định nghĩa



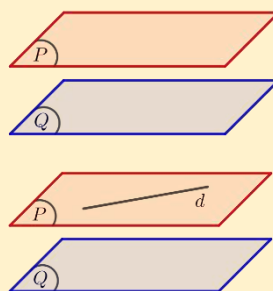
Định nghĩa:

» Hai mặt phẳng (P) và (Q) được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

Ký hiệu: $(P) // (Q)$ hoặc $(Q) // (P)$.

** Nhận xét:

Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì bất kỳ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này cũng song song với mặt phẳng kia.



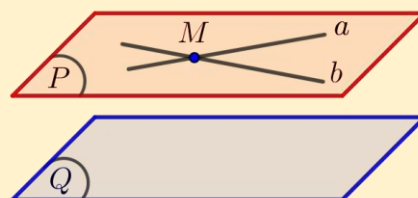
2. Tính chất



Định lý 1:

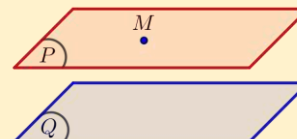
» Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q) .

» **Tóm tắt định lý:**

$$\begin{cases} a \subset (P); b \subset (P) \\ a \cap b = \{M\} \\ a // (Q) \\ b // (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) // (Q)$$


Định lý 2:

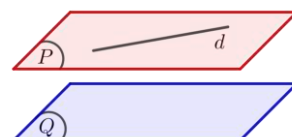
» Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.



** Từ định lý 2, ta có các hệ quả sau:

01

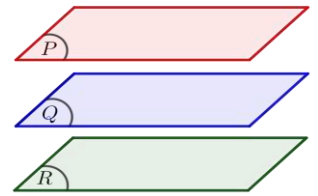
» Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (Q) thì qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (Q) .





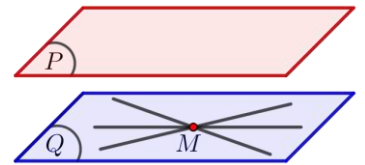
02

» Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.



03

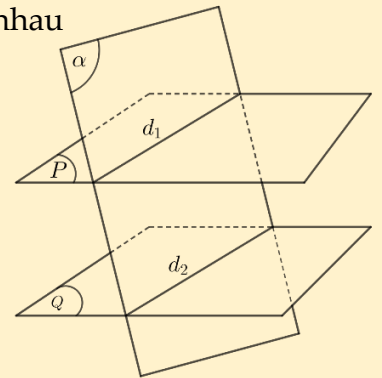
» Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (P) . Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (P) thì đều nằm trong mặt phẳng qua A song song với (P) là (Q) .



Định lý 3:

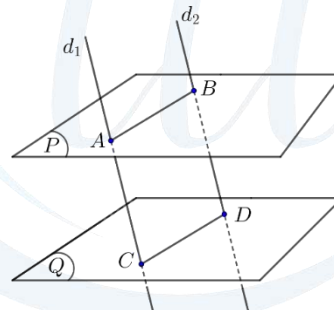
» Nếu một mặt phẳng thứ 3 cắt một trong hai mặt phẳng song song thì sẽ cắt mặt phẳng còn lại và hai giao tuyến của chúng song song với nhau

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \cap (P) = d_1 \\ (\alpha) \cap (Q) = d_2 \\ (P) \parallel (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow d_1 \parallel d_2$$



**** Từ định lý 3, ta có hệ quả sau:**

Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song những đoạn thẳng bằng nhau.



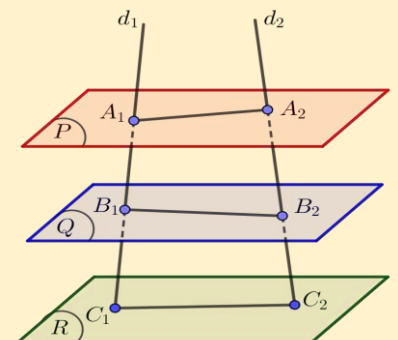
3. Định lý thales trong hình học không gian



Định lý:

» Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{C_1A_1}{C_2A_2}$$





4. Hình lăng trụ và hình hộp:



Định nghĩa:

» Cho $(P) // (Q)$.

Trên (P) cho đa giác $A_1A_2...A_n$.

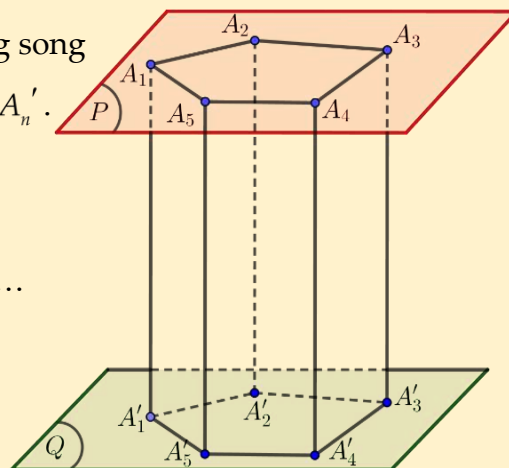
Qua các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta vẽ các đường thẳng song song với nhau và cắt (Q) lần lượt tại $A'_1, A'_2, ..., A'_n$.

» Hình lăng trụ gồm

- Hai đa giác $A_1A_2...A_n, A'_1A'_2...A'_n$
- Các hình bình hành $A_1A'_1A'_2A_2, A_2A'_2A'_3A_3, ...$

» Hình lăng trụ có

- Mặt đáy: $A_1A_2...A_n, A'_1A'_2...A'_n$
- Các cạnh bên: $A_1A'_1, A_2A'_2, ..., A_nA'_n$
- Mặt bên: $A_1A'_1A'_2A_2, A_2A'_2A'_3A_3, ..., A_nA'_nA'_1A_1$
- Các đỉnh: là các đỉnh của đáy.



5. Hình chóp cụt:



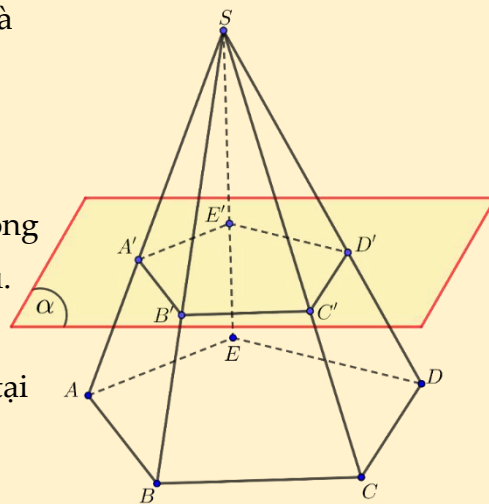
Định nghĩa:

» Cắt hình chóp bởi mặt phẳng song song với đáy và không đi qua đỉnh ta được hình chóp cụt.

Trên (P) cho đa giác $A_1A_2...A_n$.

» Tính chất:

- Hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song, các tỷ số các cặp cạnh tương ứng bằng nhau.
- Các mặt bên là những hình thang.
- Các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại một điểm.





B

Các dạng bài tập

Dạng 1. Chứng minh hai mặt song song



Phương pháp

□ Ta có thể dùng một trong các cách sau:

01

Trên mặt phẳng này có hai đường thẳng cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng còn lại

$$\begin{cases} a \subset (\alpha), b \subset (\beta), a \cap b \neq \emptyset \\ a // (\beta), b // (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$$

02

Hai mặt phẳng cùng song song với mặt phẳng thứ 3.

$$\begin{cases} (\alpha) \neq (\beta) \\ (\alpha) // (\gamma); (\beta) // (\gamma) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) // (\beta).$$



Ví dụ 1.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD . Chứng minh $(OMN) // (SBC)$.

Lời giải

Ta có M, O lần lượt là trung điểm của SA, AC

Nên OM là đường trung bình $\triangle SAC$

Do đó $OM // SC$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} OM // SC \\ SC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow OM // (SBC) \quad (1).$$

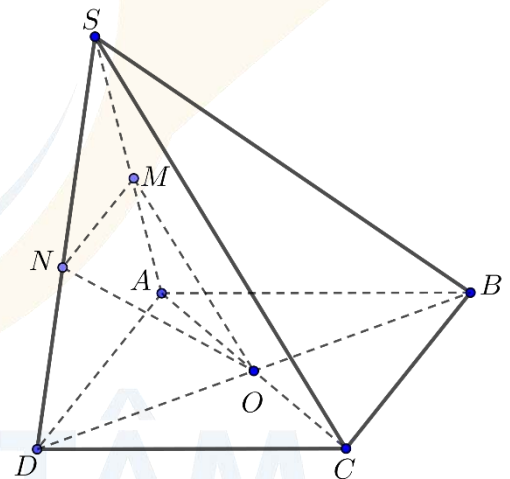
Tương tự, N, O lần lượt là trung điểm của SD, BD

Nên ON là đường trung bình $\triangle SBD$

Do đó $ON // SB$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} ON // SB \\ SB \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow ON // (SBC) \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \begin{cases} OM // (SBC) \\ ON // (SBC) \\ OM \cap ON = O \end{cases} \Rightarrow (OMN) // (SBC).$$





Ví dụ 1.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$. Gọi E, F, I lần lượt là trung điểm của SA, AD, SD . Chứng minh $(EFB) \parallel (SCD)$, từ đó suy ra $CI \parallel (EFB)$.

Lời giải

Ta có E và F lần lượt là trung điểm của SA và AD
Nên EF là đường trung bình trong $\triangle SAD$
 $\Rightarrow EF \parallel SD$, mà $SD \subset (SCD) \Rightarrow EF \parallel (SCD)$.

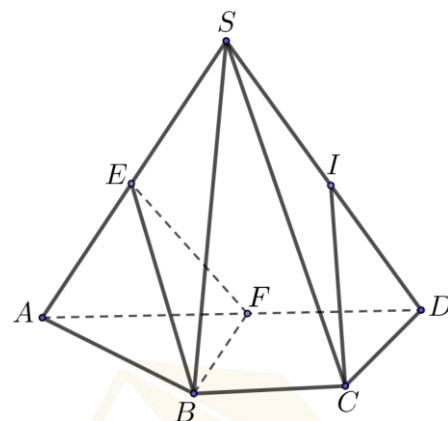
Ta có F là trung điểm của $AD \Rightarrow FD = \frac{1}{2}AD$

Và $BC = \frac{1}{2}AD \Rightarrow FD = BC$.

Xét tứ giác $BCDF$ có $FD = BC$ và $FD \parallel BC$ (vì $F \in AD, AD \parallel BC$), suy ra $BCDF$ là hình bình hành,
Suy ra $BF \parallel CD$ mà $CD \subset (SCD) \Rightarrow BF \parallel (SCD)$.

Ta có $\begin{cases} EF \parallel (SCD) \\ BF \parallel (SCD) \\ EF \cap BF = F \\ EF \subset (EBF), BF \subset (EBF) \end{cases} \Rightarrow (EBF) \parallel (SCD)$.

Mặt khác, $CI \subset (SCD) \Rightarrow CI \parallel (EBF)$.



Ví dụ 1.3.

Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N' . Chứng minh:

(1) $(ADF) \parallel (BCE)$.

(2) $(DEF) \parallel (MM'N'N)$

Lời giải

(1) $(ADF) \parallel (BCE)$.

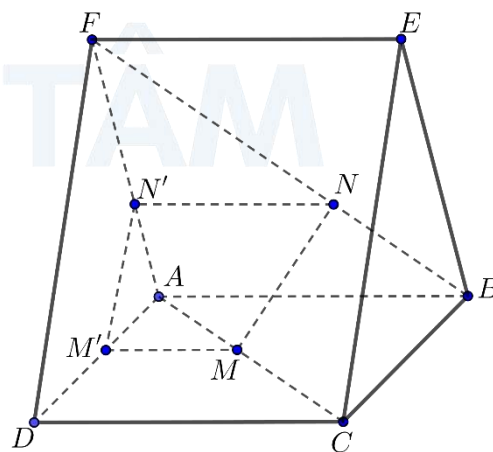
Ta có $\begin{cases} AD \parallel BC \\ BC \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AD \parallel (BCE)$

Tương tự $\begin{cases} AF \parallel BE \\ BE \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AF \parallel (BCE)$.

Mà $\begin{cases} AD \subset (ADF) \\ AF \subset (ADF) \end{cases} \Rightarrow (ADF) \parallel (BCE)$.

(2) $(DEF) \parallel (MM'N'N)$.

Vì $ABCD$ và $ABEF$ là các hình vuông nên $AC = BF$ (1).





Ta có $MM' \parallel CD \Rightarrow \frac{AM'}{AD} = \frac{AM}{AC}$ (2)

$NN' \parallel AB \Rightarrow \frac{AN'}{AF} = \frac{BN}{BF}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta được $\frac{AM'}{AD} = \frac{AN'}{AF} \Rightarrow M'N' \parallel DF$
 $\Rightarrow DF \parallel (MM'N'N)$.

Lại có $NN' \parallel AB \Rightarrow NN' \parallel EF \Rightarrow EF \parallel (MM'N'N)$.

Vậy $\begin{cases} DF \parallel (MM'N'N) \\ EF \parallel (MM'N'N) \end{cases} \Rightarrow (DEF) \parallel (MM'N'N)$.



Ví dụ 1.4.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi E là điểm thuộc đoạn AC' , F là một điểm trên đoạn $B'D'$, G là một điểm thuộc đoạn CD' sao cho $AE = \frac{1}{3}AC'$, $D'F = \frac{1}{3}D'B$, $CG = \frac{1}{3}CD'$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh CD và $A'D'$. Chứng minh rằng $(EFG) \parallel (AIJ)$.

❧ Lời giải

Gọi O là tâm của hình bình hành $CDD'C'$ thì O là trung điểm của CD' và $C'D$.

Lại có $\frac{CG}{CD'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{CG}{CO} = \frac{2}{3} \Rightarrow G$ là trọng tâm của $\triangle C'CD$.

Suy ra $\frac{C'G}{C'I} = \frac{2}{3}$ (do I là trung điểm của CD).

Ta có $\frac{AE}{AC'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{C'E}{C'A} = \frac{2}{3}$,

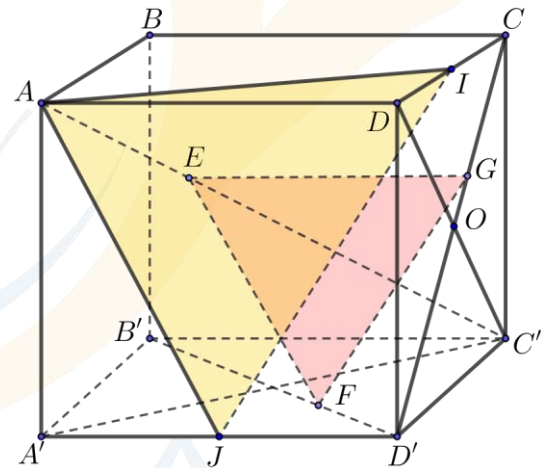
Trong $\triangle C'AI$ có $\frac{C'E}{C'A} = \frac{C'G}{C'I} = \frac{2}{3} \Rightarrow EG \parallel AI$,

Mà $AI \subset (AIJ) \Rightarrow EG \parallel (AIJ)$.

Tương tự ta cũng có F là trọng tâm của $\triangle A'C'D'$, suy ra $\frac{C'F}{C'J} = \frac{2}{3} = \frac{C'E}{C'A} \Rightarrow EF \parallel AJ$

Mà $AJ \subset (AIJ) \Rightarrow EF \parallel (AIJ)$.

Ta có $EG \subset (EFG), EF \subset (EFG) \Rightarrow (EFG) \parallel (AIJ)$.





➤ Dạng 2. Tìm giao tuyến của 2 mặt, có 1 mặt song song với mặt khác



Phương pháp

□ Ta có thể dùng một trong các cách sau:

01

$$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (\gamma) \\ (\alpha) // (\beta) \\ (\beta) \cap (\gamma) = b \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (\gamma) = Mx; Mx // b$$

02

Đưa về dạng thiết diện song song với đường thẳng $\begin{cases} (\alpha) // (\beta) \\ a, b \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow a, b // (\alpha).$

Như vậy thay vì tìm thiết diện song song với mặt phẳng (β) thì ta tìm thiết diện song song với các đường thẳng nằm trong



Ví dụ 2.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm H . Mặt phẳng (P) đi qua H và song song với (SAB) . Tìm giao tuyến của

(1) Mặt phẳng (P) và $(ABCD)$.

(2) Mặt phẳng (P) và (SBC) .

✎ Lời giải

(1) Mặt phẳng (P) và $(ABCD)$.

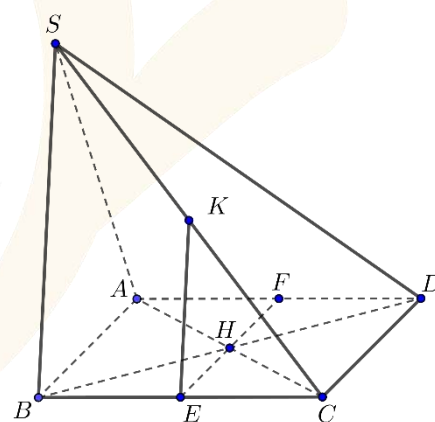
$$\begin{cases} (P) // (SAB) \\ (ABCD) \cap (SAB) = AB \\ H \in (P) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (ABCD) = Hx // AB.$$

Gọi $E = Hx \cap BC$, $F = Hx \cap AD \Rightarrow (P) \cap (ABCD) = EF // AB$.

(2) Mặt phẳng (P) và (SBC) .

$$\begin{cases} (P) // (SAB) \\ (SBC) \cap (SAB) = SB \\ E \in (P) \cap (SBC) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (SBC) = Ey // SB.$$

Gọi $K = Ey \cap SC \Rightarrow (P) \cap (SBC) = EK$.



Ví dụ 2.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm bất kì trên cạnh AB , (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với (SBC) . Tìm giao tuyến của (α) với các mặt của hình chóp.

✎ Lời giải

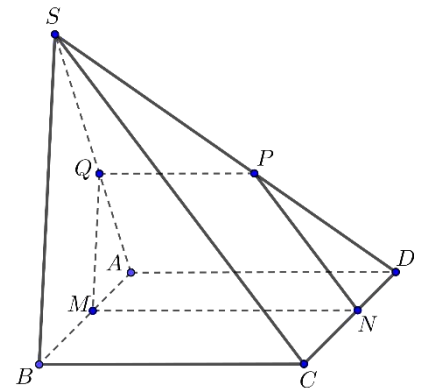


$$\text{Ta có } \begin{cases} (\alpha) // (SBC) \\ (SBC) \cap (ABCD) = BC \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = MN // BC \\ M \in (\alpha) \cap (ABCD) \end{cases}$$

với $N \in CD$.

$$\begin{cases} (\alpha) // (SBC) \\ (SBC) \cap (SCD) = SC \Rightarrow (\alpha) \cap (SCD) = NP // SC \text{ với } P \in SD. \\ N \in (\alpha) \cap (SCD) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\alpha) // (SBC) \\ (SBC) \cap (SAB) = SB \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = MQ // SB \text{ với } Q \in SA. \\ M \in (\alpha) \cap (SAB) \end{cases}$$



Ví dụ 2.3.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, AD, A'D'$. Xác định giao tuyến của (MNP) và $(A'B'C'D')$, $(AA'B'B)$.

Lời giải

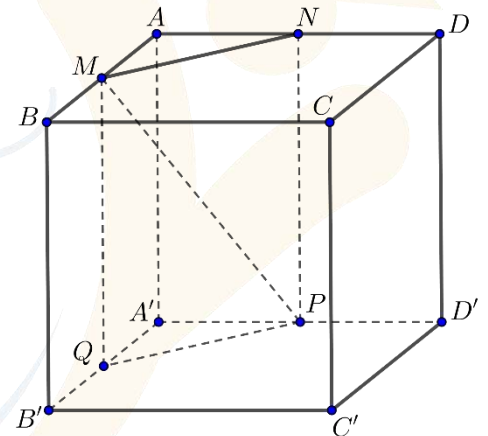
Ta có M, N, P lần lượt là trung điểm $AB, AD, A'D'$

$$\text{Nên } \begin{cases} MN // BD // B'D' \\ NP // AA' // DD' \end{cases} \Rightarrow (MNP) // (BDD'B').$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} (MNP) // (BDD'B') \\ (BDD'B') \cap (A'B'C'D') = B'D' \\ P \in (MNP) \cap (A'B'C'D') \end{cases}$$

$$\Rightarrow (MNP) \cap (A'B'C'D') = PQ // B'D' \text{ với } Q \in A'B'.$$

$$\text{Suy ra } (MNP) \cap (ABB'A') = MQ.$$



TOÁN TỪ TÂM



Dạng 3. Định lý Thales trong không gian



Phương pháp

□ Ta có thể dùng một trong các cách sau:

01

$$\begin{cases} (\alpha) // (\beta) \\ d \cap (\alpha) = A, d \cap (\beta) = B \\ d' \cap (\alpha) = A', d' \cap (\beta) = B' \\ d // d' \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$$

02

$$\begin{cases} (\alpha) // (\beta) // (\gamma) \\ d \cap (\alpha) = A, d \cap (\beta) = B, d \cap (\gamma) = C \\ d' \cap (\alpha) = A', d' \cap (\beta) = B', d' \cap (\gamma) = C' \end{cases} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$



Ví dụ 2.1.

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 12, SB = 15, SC = 17$. Trên cạnh SA lấy các điểm M, N sao cho $SM = 3, MN = 5, NA = 4$. Gọi $(P), (Q)$ là hai mặt phẳng song song với (ABC) lần lượt đi qua M, N . (P) cắt SB, SC tại M_1, M_2 và (Q) cắt SB, SC tại N_1, N_2 . Tính độ dài các đoạn thẳng M_1N_1 và M_2N_2 .

Lời giải

♦ Áp dụng định lý Thales trong không gian ta có

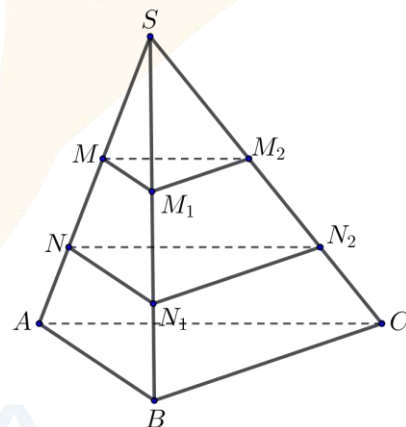
$$\frac{SM}{SM_1} = \frac{MN}{M_1N_1} = \frac{NA}{N_1B} \quad (1) \text{ và } .$$

$$\text{♦ Từ (1) cho ta } \frac{SM}{SM_1} = \frac{MN}{M_1N_1} = \frac{NA}{N_1B} = \frac{SM + MN + NA}{SM_1 + M_1N_1 + N_1B} = \frac{12}{15}$$

$$\Rightarrow M_1N_1 = \frac{5 \cdot 15}{12} = \frac{25}{4}.$$

$$\text{♦ Từ (2) cho ta } \frac{SM}{SM_2} = \frac{MN}{M_2N_2} = \frac{NA}{N_2C} = \frac{SM + MN + NA}{SM_2 + M_2N_2 + N_2C} = \frac{12}{17}$$

$$\Rightarrow M_2N_2 = \frac{5 \cdot 17}{12} = \frac{85}{12}.$$



Ví dụ 2.2.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a . Các điểm M, N lần lượt trên AD', BD sao cho $AM = DN = x$ ($0 < x < a\sqrt{2}$).

(1) Chứng minh khi x biến thiên, đường thẳng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

(2) Chứng minh khi $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ thì $MN // A'C$.

Lời giải



(1) Chứng minh khi x biến thiên, đường thẳng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

Gọi (P) qua AD và song song với $(A'D'CB)$.

Gọi (Q) qua M và song song với $(A'D'CB)$.

Giả sử (Q) cắt BD tại điểm N' .

Theo định lí Thales ta có $\frac{AM}{AD'} = \frac{DN'}{DB}$ (1)

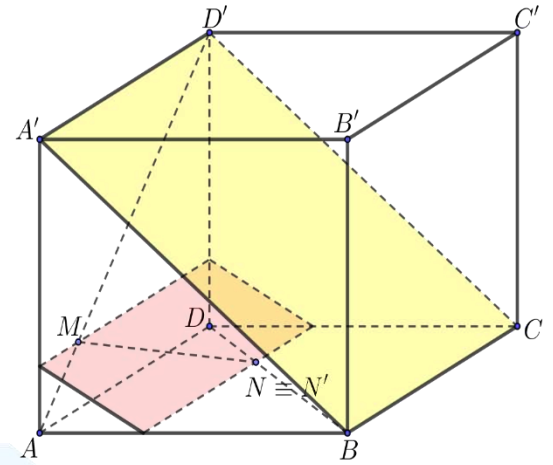
Vì các mặt của hình hộp là hình vuông cạnh a nên $AD' = DB = a\sqrt{2}$.

Từ (1) ta có $AM = DN'$, mà

$DN = AM \Rightarrow DN' = DN \Rightarrow N' \equiv N \Rightarrow MN \subset (Q)$.

Mà $\begin{cases} (Q) \parallel (A'D'CB) \\ MN \subset (Q) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (A'D'CB)$.

Vậy MN luôn song song với mặt phẳng cố định $(A'D'CB)$.



(2) Chứng minh khi $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ thì $MN \parallel A'C$.

Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có

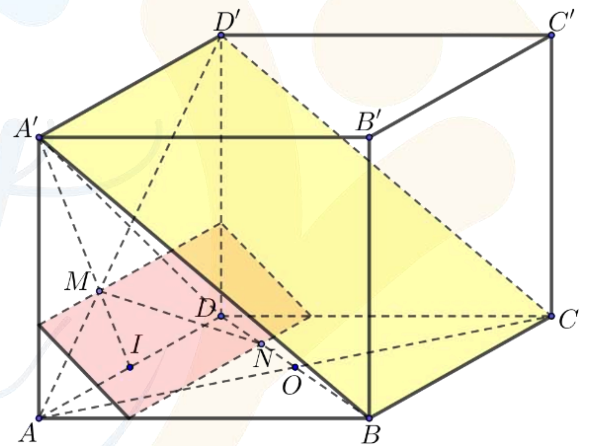
$$DN = x = \frac{a\sqrt{2}}{3}, DO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow DN = \frac{2}{3} DO$$

Suy ra N là trọng tâm của tam giác ACD .

Tương tự M là trọng tâm của tam giác $A'AD$.

Gọi I là trung điểm của AD ta có

$$\frac{IN}{IC} = \frac{1}{3}, \frac{IM}{IA'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{IN}{IC} = \frac{IM}{IA'} \Rightarrow MN \parallel A'C$$



Ví dụ 2.3.

Cho tứ diện $ABCD$, M là một điểm lưu động trên cạnh AB ; N là điểm lưu động trên cạnh CD . Chứng tỏ rằng trung điểm I của đoạn MN thuộc một mặt phẳng cố định.

Lời giải

Kẻ $IK \parallel AB \Rightarrow K$ là trung điểm BN (do I là trung điểm MN).

Qua K kẻ đường thẳng song song với CD , cắt BC tại P , cắt BD tại Q

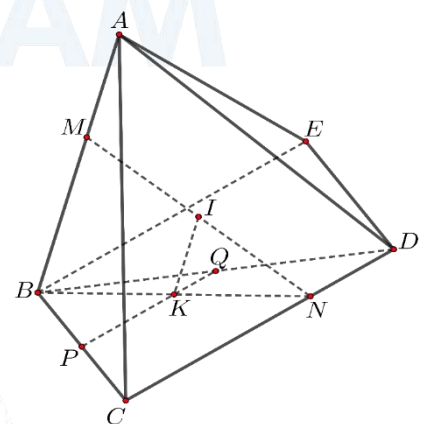
$\Rightarrow P$ là trung điểm BC , Q là trung điểm BD

$\Rightarrow P, Q$ cố định.

Kẻ hình bình hành $BEDC \Rightarrow BE \parallel CD \parallel PQ \Rightarrow PQ \parallel (ABE)$ (1)

$IK \parallel AB \Rightarrow IK \parallel (ABE)$ (2)

$\xrightarrow{(1) \& (2)} (PQI) \parallel (ABE)$





- ♦ Do (ABE) là mặt phẳng cố định, PQ cố định $\Rightarrow (PQI)$ cố định.
- ♦ Vậy I thuộc mặt phẳng cố định qua PQ và song song (ABE) .

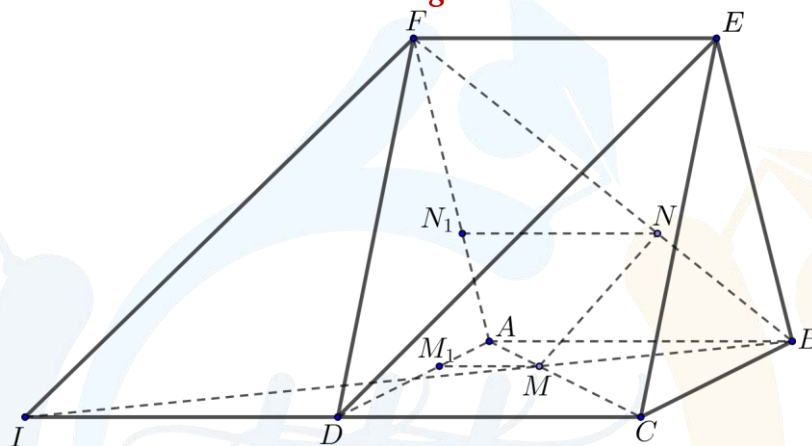


Ví dụ 2.4.

Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm trên hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC , BF lấy các điểm M , N sao cho $MC = 2AM$, $NF = 2BN$. Qua M , N lần lượt kẻ các đường thẳng song song với cạnh AB , cắt cạnh AD , AF theo thứ tự tại M_1 , N_1 . Chứng minh rằng

- (1) $MN // DE$. (2) $M_1N_1 // (DEF)$. (3) $(MNM_1N_1) // (DEF)$.

Lời giải



- (1) $MN // DE$.

Gọi I là giao điểm của BM với CD .

Khi đó ta có $\frac{BM}{MI} = \frac{AM}{MC} = \frac{1}{2}$. Mặt khác $\frac{BN}{NF} = \frac{1}{2}$.

Khi đó $MN // IF$.

Theo trên $\frac{AM}{MC} = \frac{1}{2}$ nên $\frac{AB}{CI} = \frac{1}{2}$. Suy ra $DI = CD = AB$.

Lại có $DI // EF$. Do đó $DEFI$ là hình bình hành, hay $FI // DE$.

Vậy $MN // DE$.

- (2) $M_1N_1 // (DEF)$.

Theo giả thiết thì $MM_1 // NN_1$ (vì cùng song song với AB) nên M, M_1, N, N_1 đồng phẳng.

Lại có $MM_1 // (DEF)$ (vì $MM_1 // CD // AB$) và theo câu trên thì $MN // DE$ nên

$MN // (DEF)$

- (3) $(MNM_1N_1) // (DEF)$.

Vậy $(MNM_1N_1) // (DEF)$, suy ra $M_1N_1 // (DEF)$.

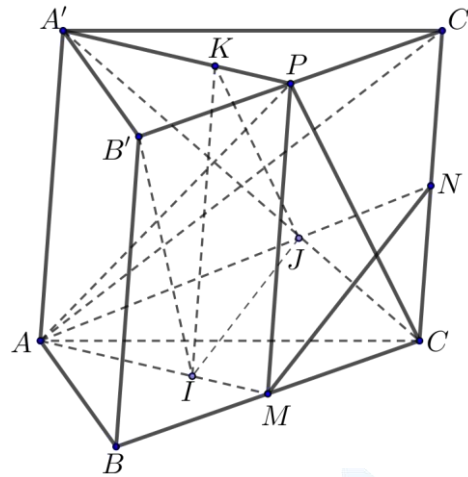


Ví dụ 2.5.

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC , ACC' , $A'B'C'$. Chứng minh rằng $(IJK) // (BCC'B')$ và $(A'JK) // (AIB')$.



Lời giải



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CC' và $B'C'$.

Theo tính chất trọng tâm của tam giác ta có: $\frac{AI}{AM} = \frac{AJ}{AN} \Rightarrow IJ \parallel MN$.

Tứ giác $AMPA'$ là hình bình hành và có $\frac{AI}{AM} = \frac{AK}{AP} = \frac{2}{3} \Rightarrow IK \parallel MP$.

Vậy $(IJK) \parallel (BCC'B')$.

Chú ý rằng mặt phẳng (AIB') chính là mặt phẳng (AMB') .

Mặt phẳng $(A'JK)$ chính là mặt phẳng $(A'CP)$.

Vì $AM \parallel A'P$, $MB' \parallel CP$ (do tứ giác $B'MCP$ là hình bình hành).

Vậy ta có $(A'JK) \parallel (AIB')$.

TOÁN TỪ TÂM



Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» **Câu 1.** Hai mặt phẳng được gọi là song song với nhau nếu

- A. chúng không có điểm chung. **B.** chúng có một đường thẳng chung.
C. chúng có đúng một điểm chung. **D.** chúng có ít nhất một điểm chung.

» *Lời giải*

Chọn A

Hai mặt phẳng được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

» **Câu 2.** Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hình hộp là hình tứ diện. **B.** Hình tứ diện là hình hộp.
C. Hình lập phương là hình hộp. **D.** Hình hộp là hình lập phương.

» *Lời giải*

Chọn C

Hình lập phương là hình hộp có tất cả các mặt là hình vuông.

» **Câu 3.** Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- A. Qua một điểm bất kỳ có một và chỉ một mặt phẳng song song với một mặt phẳng cho trước.
B. Hai mặt phẳng được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.
C. Ba mặt phẳng phân biệt đôi một song song với nhau chắn trên hai cát tuyến bất kỳ những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.
D. Hai mặt phẳng song song cắt mặt phẳng thứ ba theo hai giao tuyến song song với nhau.

» *Lời giải*

Chọn A

Qua một điểm bất kỳ nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với một mặt phẳng đó.

» **Câu 4.** Cho mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b và mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng c .

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

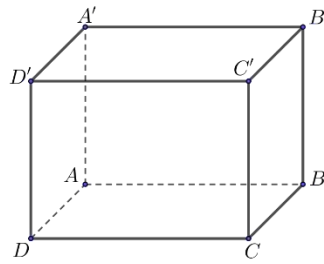
- A. Nếu $a // c$ thì $(P) // (Q)$.
B. Nếu $b // c$ thì $(P) // (Q)$.
C. Nếu $a // (Q)$ và $b // (Q)$ thì $(P) // (Q)$.
D. Nếu a, b cắt nhau, $a // (Q)$ và $b // (Q)$ thì $(P) // (Q)$.

» *Lời giải*

Chọn D

Mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau, $a // (Q)$ và $b // (Q)$ thì $(P) // (Q)$.

» **Câu 5.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?



A. $(ABCD) // (A'B'C'D')$.

B. $(ABB'A') // (DCC'D')$.

C. $(ACC'A') // (ABD)$.

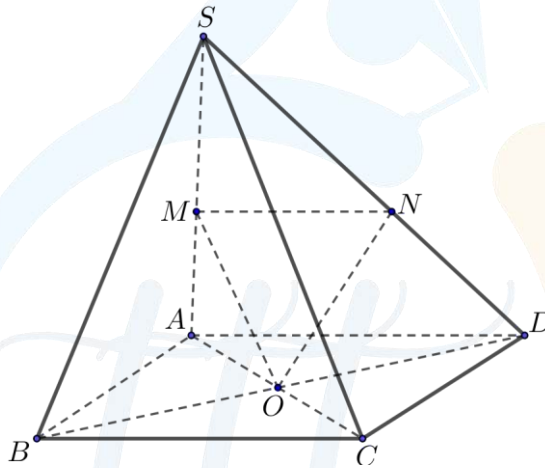
D. $(A'B'C') // (ABD)$.

Lời giải

Chọn C

Do $(ACC'A')$, (ABD) có điểm chung là A .

» **Câu 6.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M , N lần lượt là trung điểm cạnh SA , SD .



Mặt phẳng (OMN) song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. (SAD) .

B. (SAC) .

C. (SBD) .

D. (SBC) .

Lời giải

Chọn D

Ta có $M, N \in (OMN) \cap (SAD)$ nên $(OMN) // (SAD)$ là Sai.

Ta có $O \in (OMN) \cap (SAC)$ nên $(OMN) // (SAC)$ là Sai.

Ta có $O \in (OMN) \cap (SBD)$ nên $(OMN) // (SBD)$ là Sai.

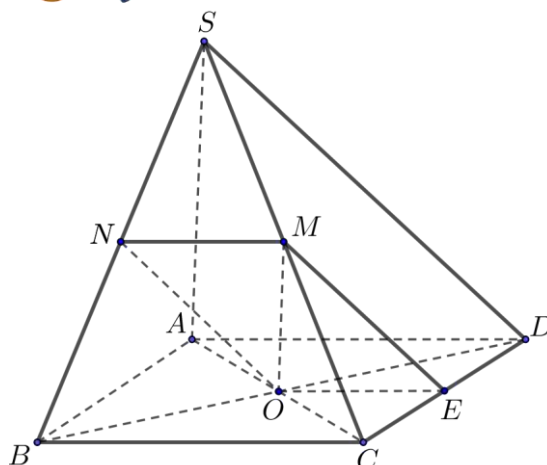
Trong mặt phẳng (OMN) chứa hai đường thẳng MN , OM cắt nhau và hai đường thẳng đó cùng song song với mặt phẳng (SBC) nên $(OMN) // (SBC)$. Do đó $(OMN) // (SBC)$ là Đúng.

» **Câu 7.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M , N , E lần lượt là trung điểm cạnh SC , SB , CD . Khẳng định nào đúng?

A. $(OMN) // (SBD)$. **B.** $(OME) // (SBD)$. **C.** $(SCD) // (SAB)$. **D.** $(OMN) // (SAD)$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $O \in (OMN) \cap (SBD)$ nên $(OMN) \parallel (SBD)$ là Sai.

Ta có $O \in (OME) \cap (SBD)$ nên $(OME) \parallel (SBD)$ là Sai.

Ta có $S \in (SCD) \cap (SAB)$ nên $(SCD) \parallel (SAB)$ là Sai.

Trong mặt phẳng (OMN) chứa hai đường thẳng OM, MN cắt nhau và hai đường thẳng đó cùng song song với mặt phẳng (SAD) nên $(OMN) \parallel (SAD)$. Do đó $(OMN) \parallel (SAD)$ là Đúng.

» **Câu 8.** Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$. Gọi O, M, N, P, Q lần lượt là trung điểm cạnh FD, FA, FC, EB, FB .

Khẳng định nào sai?

A. $(OMN) \parallel (ABC)$.

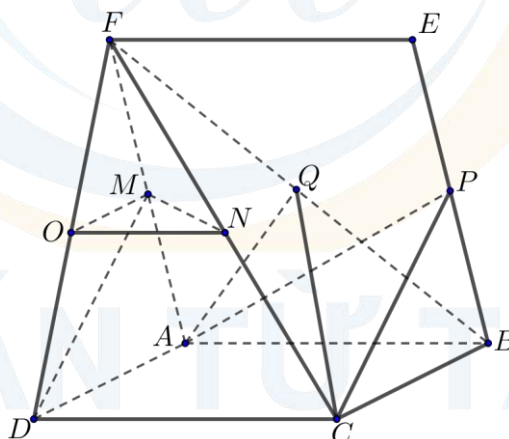
B. $(OMN) \parallel (ACD)$.

C. $(DMN) \parallel (ACP)$.

D. $(DMN) \parallel (ACQ)$.

» **Lời giải**

Chọn D



Ta có $MN \parallel AC, OM \parallel BC \Rightarrow (OMN) \parallel (ABC)$. Do đó $(OMN) \parallel (ABC)$ là Đúng.

Ta có $MN \parallel AC, OM \parallel AD \Rightarrow (OMN) \parallel (ACD)$. Do đó $(OMN) \parallel (ACD)$ là Đúng.

Ta có $MN \parallel AC, DM \parallel CP \Rightarrow (DMN) \parallel (ACP)$. Do đó $(DMN) \parallel (ACP)$ là Đúng.

Ta có $DM \cap CQ, DM \subset (DMN), CQ \subset (ACQ) \Rightarrow (DMN) \cap (ACQ)$.

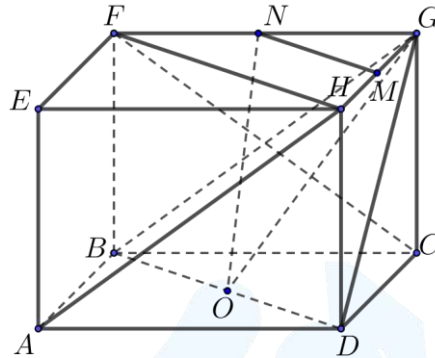
Vậy $(DMN) \parallel (ACQ)$ là Sai.



- » **Câu 9.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$. Gọi M, N, O lần lượt là trung điểm cạnh GH, GF, BD . Mặt phẳng (AFH) song song với mặt phẳng nào sau đây?
- A.** (OMN) . **B.** (GBD) . **C.** (AMN) . **D.** (BCD) .

» *Lời giải*

Chọn B



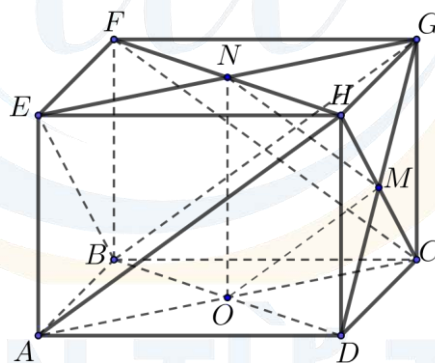
Trong mặt phẳng (AFH) chứa hai đường thẳng FH, AH cắt nhau và hai đường thẳng đó đều song song với mặt phẳng (GBD) nên $(AFH) \parallel (GBD)$.

Vậy $(AFH) \parallel (GBD)$.

- » **Câu 10.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$. Gọi O, M, N lần lượt là tâm của các hình $ABCD, CGHD, EFGH$. Khẳng định nào sai?
- A.** $(OMN) \parallel (BFC)$. **B.** $(OMN) \parallel (CGF)$.
C. $(OMN) \parallel (ABE)$. **D.** $(OMN) \parallel (AEH)$.

» *Lời giải*

Chọn C



Ta có $MN \parallel FC, ON \parallel BF \Rightarrow (OMN) \parallel (BFC)$. Do đó $(OMN) \parallel (BFC)$ là Đúng.

Ta có $MN \parallel CF, ON \parallel CG \Rightarrow (OMN) \parallel (CGF)$. Do đó $(OMN) \parallel (CGF)$ là Đúng.

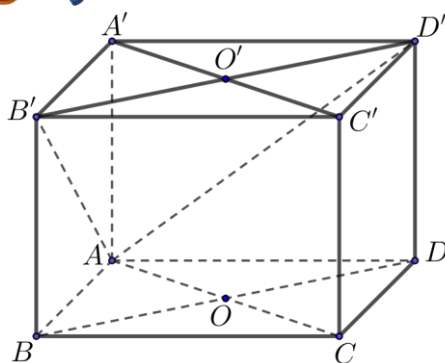
Ta có $OM \parallel AH, ON \parallel AE \Rightarrow (OMN) \parallel (AEH)$. Do đó $(OMN) \parallel (AEH)$ là Đúng.

Vậy $(OMN) \parallel (ABE)$ là Sai.

- » **Câu 11.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, AC cắt BD tại O và $A'C'$ cắt $B'D'$ tại O' . Khi đó $(AB'D')$ sẽ song song mặt phẳng nào sau đây?
- A.** $(A'OC')$. **B.** (BDA') . **C.** (BDC') . **D.** (BDC) .

» *Lời giải*

Chọn C



Ta có:

$$+ \begin{cases} BD // B'D' \\ BD \subset (C'BD) \end{cases} \Rightarrow B'D' // (C'BD).$$

$$+ \begin{cases} AC' // AD' \\ AC' \subset (C'BD) \end{cases} \Rightarrow AD' // (C'BD).$$

$$+ \begin{cases} AD' // (C'BD) \\ B'D' // (C'BD) \\ AD' \cap B'D' = D' \text{ trong } (AB'D') \end{cases} \Rightarrow (C'BD) // (AB'D').$$

» **Câu 12.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình thang ($AB \parallel CD$) và $AB = 2CD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SB và AB . Mặt phẳng nào song song với mặt phẳng (SAD) ?

A. (BCI) .

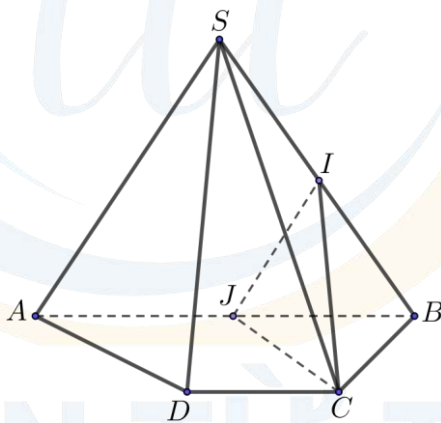
B. (BIJ) .

C. (CIJ) .

D. (SJC) .

Lời giải

Chọn C



Ta có:

+ I, J lần lượt là trung điểm $SB, AB \Rightarrow IJ$ là đường trung bình $\triangle SAB \Rightarrow IJ \parallel SA$.

$$+ \begin{cases} AJ = \frac{1}{2} AB = CD \\ AJ \parallel CD \end{cases} \Rightarrow AJCD \text{ là hình bình hành} \Rightarrow JC \parallel AD.$$

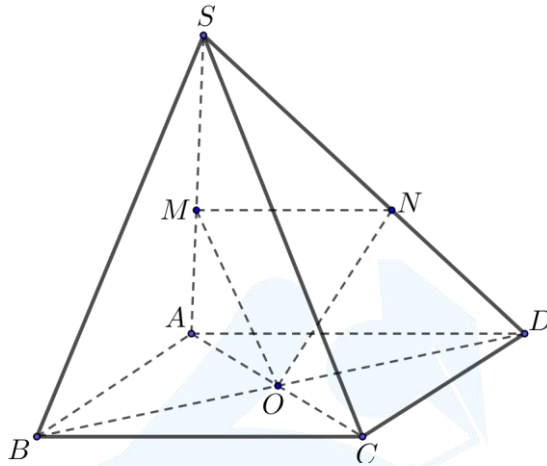
$$+ \begin{cases} SA // (IJC) \left(SA // IJ, IJ \subset (IJC) \right) \\ AD // (IJC) \left(AD // JC, JC \subset (IJC) \right) \\ SA \cap AD = A \text{ trong } (SAD) \end{cases} \Rightarrow (SAD) // (IJC).$$



- » **Câu 13.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SD . Mặt phẳng (OMN) song song với mặt phẳng nào sau đây?
A. $(ABCD)$. **B.** (SBC) . **C.** (SAB) . **D.** (SCD) .

🔗 *Lời giải*

Chọn B



Ta có:

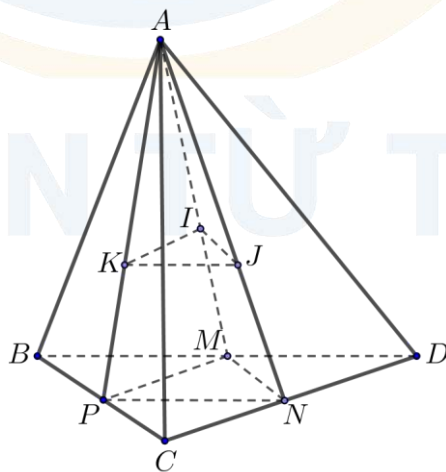
- + M, O lần lượt là trung điểm $SA, AC \Rightarrow MO$ là đường trung bình $\triangle SCA \Rightarrow MN \parallel SC$.
- + O, N lần lượt là trung điểm $BD, SD \Rightarrow ON$ là đường trung bình $\triangle SBD \Rightarrow ON \parallel SB$.
- + $\begin{cases} OM \parallel (SBC) \quad (OM \parallel SC, SC \subset (SBC)) \\ ON \parallel (SBC) \quad (ON \parallel SB, SB \subset (SBC)) \\ OM \cap ON = O \text{ trong } (OMN) \end{cases} \Rightarrow (OMN) \parallel (SBC).$

- » **Câu 14.** Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABD, ACD, ABC và M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BD, CD, BC . Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A.** $(DIK) \parallel (ABC)$. **B.** $(IJK) \parallel (BCD)$. **C.** $(KMN) \parallel (ABC)$. **D.** $(IJK) \parallel (AMD)$.

🔗 *Lời giải*

Chọn B



Ta có:

$$+ \frac{AK}{AP} = \frac{JA}{AN} = \frac{2}{3} \Rightarrow KJ \parallel PN. \text{ Mà } PN \subset (BCD) \Rightarrow KJ \parallel (BCD).$$



$$+ \frac{AI}{AM} = \frac{JA}{AN} = \frac{2}{3} \Rightarrow JI \parallel MN. \text{ Mà } MN \subset (BCD) \Rightarrow JI \parallel (BCD).$$

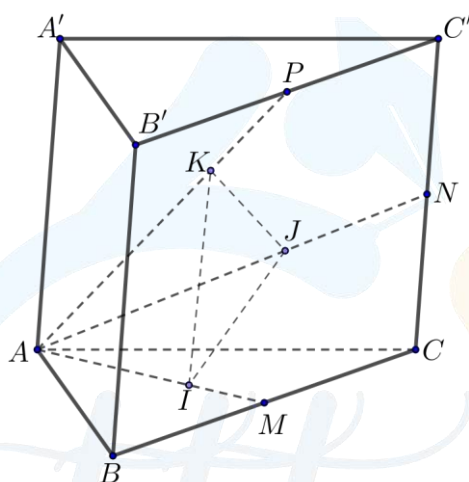
$$+ \begin{cases} KJ \parallel (BCD) \\ JI \parallel (BCD) \\ KJ \cap JI = J \text{ trong } (KIJ) \end{cases} \Rightarrow (BCD) \parallel (KIJ).$$

» **Câu 15.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm $\triangle ABC, \triangle ACC'$ và $\triangle AB'C'$. Mặt phẳng nào sau đây song song với (IJK) ?

- A.** $(BC'A)$. **B.** (ABA') . **C.** $(BB'C)$. **D.** $(CC'A)$.

» **Lời giải**

Chọn C



Gọi P, N, M lần lượt là trung điểm của $B'C', CC', BC$.

Ta có:

$$+ \frac{AK}{AP} = \frac{JA}{AN} = \frac{2}{3} \Rightarrow KJ \parallel PN. \text{ Mà } PN \subset (BB'C) \Rightarrow KJ \parallel (BB'C).$$

$$+ \frac{AK}{AP} = \frac{AI}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow KI \parallel PM. \text{ Mà } PM \subset (BB'C) \Rightarrow KI \parallel (BB'C).$$

$$+ \begin{cases} KJ \parallel (BB'C) \\ KI \parallel (BB'C) \\ KI \cap KJ = K \text{ trong } (KIJ) \end{cases} \Rightarrow (KIJ) \parallel (BB'C).$$

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» **Câu 16.**

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Cho (α) và (β) là hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt (α) thì nó cũng cắt (β) .		
(b)	Hai mặt phẳng phân biệt chứa hai đường thẳng song song cắt nhau theo giao tuyến song song với hai đường thẳng đó.		
(c)	Một mặt phẳng cắt hai mặt phẳng song song cho trước theo hai giao tuyến thì hai giao tuyến song song với nhau.		
(d)	Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến thì ba giao tuyến đó phải đồng quy		



Lời giải

(a) Cho (α) và (β) là hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt (α) thì nó cũng cắt (β) .

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Hai mặt phẳng phân biệt chứa hai đường thẳng song song cắt nhau theo giao tuyến song song với hai đường thẳng đó.

Giao tuyến có thể trùng với một trong hai đường thẳng đó.

» **Chọn SAI.**

(c) Một mặt phẳng cắt hai mặt phẳng song song cho trước theo hai giao tuyến thì hai giao tuyến song song với nhau.

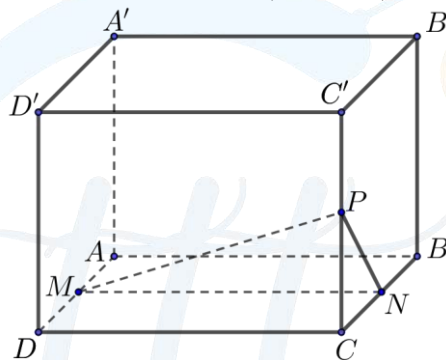
» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến thì ba giao tuyến đó phải đồng quy.

Ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

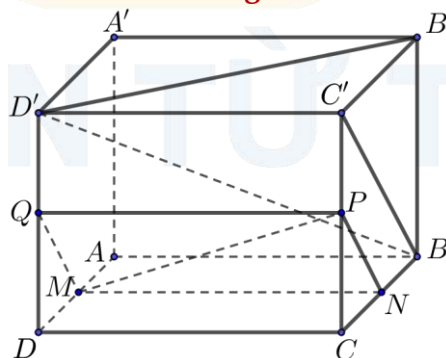
» **Chọn SAI.**

» **Câu 17.** Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có hai đáy là các hình bình hành. Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của cạnh AD, BC, CC' (hình vẽ).



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$A'B' // (MNP)$.		
(b)	$(MNP) // (BC'D')$.		
(c)	$(MNP) // (B'C'D')$.		
(d)	DD' cắt (MNP) .		

Lời giải



(a) $A'B' // (MNP)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} A'B' // AB \\ AB // MN \end{cases} \Rightarrow A'B' // MN \Rightarrow A'B' // (MNP).$$



» **Chọn ĐÚNG.**

(b) $(MNP) // (BC'D')$.

Ta có $\begin{cases} MN // C'D' \\ NP // BC' \end{cases} \Rightarrow (MNP) // (BC'D')$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) $(MNP) // (B'C'D')$.

Ta có $\begin{cases} (MNP) \cap (ABCD) = MN \\ (B'C'D') // (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (MNP) \text{ cắt } (B'C'D').$

» **Chọn SAI.**

(d) DD' cắt (MNP) .

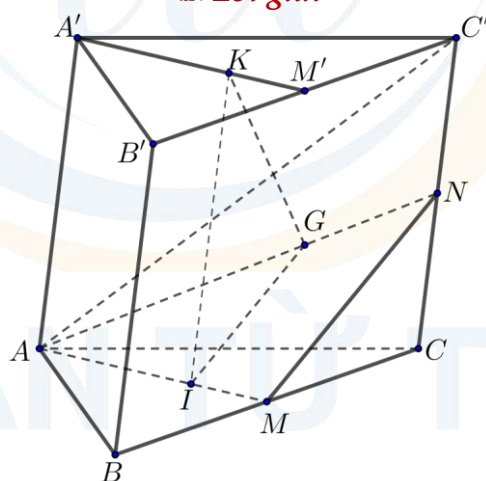
Ta có $\begin{cases} (MNP) // (BC'D') \\ DD' \cap (BC'D') = D' \end{cases} \Rightarrow DD' \cap (MNP) = Q \text{ (hình vẽ)}.$

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 18.** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có I, K, G lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC, A'B'C', ACC'$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$BB' // (ACC'A')$		
(b)	$(ABC) // (A'B'C')$		
(c)	IG cắt $(BCC'B')$		
(d)	$(IKG) // (BCC'B')$		

» **Lời giải**



(a) $BB' // (ACC'A')$.

Ta có: $\begin{cases} BB' // AA' \\ AA' \subset (ACC'A') \end{cases} \Rightarrow BB' // (ACC'A').$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) $(ABC) // (A'B'C')$.



Ta có: $(ABC) // (A'B'C')$ (do $(ABC), (A'B'C')$ là hai mặt phẳng chứa hai đáy của lăng trụ nên song song với nhau).

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) IG cắt $(BCC'B')$.

Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của $BC, B'C'$.

Gọi N là trung điểm của CC' ,

$$\Delta AMN \text{ có } \frac{AI}{AM} = \frac{AG}{AN} = \frac{2}{3} \text{ (tính chất trọng tâm)}$$

Suy ra $IG // MN$ mà $MN \subset (BCC'B')$ nên $IG // (BCC'B')$. (1)

» **Chọn SAI.**

(d) $(IKG) // (BCC'B')$.

MM' là đường trung bình của hình bình hành $BCC'B'$ nên

$$\begin{cases} MM' // BB' \\ MM' = BB' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MM' // AA' \\ MM' = AA' \end{cases} \Rightarrow AMM'A' \text{ là hình bình hành.}$$

Vì I, K theo thứ tự là trọng tâm các tam giác $ABC, A'B'C'$ nên

$$IM = KM' = \frac{1}{3} A'M' = \frac{1}{3} AM, \text{ mà } IM // KM' \text{ nên } IKM'M \text{ là hình bình hành.}$$

Suy ra $IK // MM', MM' \subset (BCC'B') \Rightarrow IK // (BCC'B')$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(IKG) // (BCC'B')$.

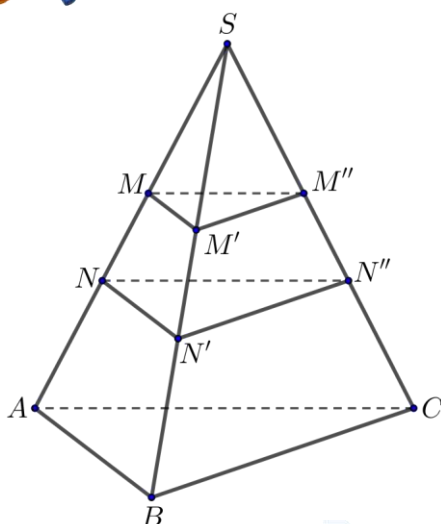
» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 19.** Cho hình chóp $SABC$ có $SA = 9; SB = 12; SC = 15$. Trên cạnh SA lấy các điểm M, N sao cho $SM = 4; MN = 3; NA = 2$. Vẽ hai mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC) lần lượt đi qua M, N , cắt SB theo thứ tự tại $M'; N'$ và cắt SC theo thứ tự tại $M''; N''$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$SM' = 4$		
(b)	$M'N' = 4$		
(c)	$M'N' + M''N'' = 9$		
(d)	$N''C = \frac{10}{3}$		

» **Lời giải**

TOÁN TỪ TÂM



(a) $SM' = 4$.

Ta có: $(MM'N'N'') \parallel (NN'N'') \parallel (ABC)$

Áp dụng định lý Thales trong không gian, ta được:

$$\frac{SM}{SA} = \frac{SM'}{SB} = \frac{SM''}{SC} \Rightarrow \frac{4}{9} = \frac{SM'}{12} = \frac{SM''}{15} \Rightarrow SM' = \frac{16}{3}$$

» Chọn SAI.

(b) $M'N' = 4$.

$$\frac{4}{9} = \frac{SM'}{12} = \frac{SM''}{15} \Rightarrow SM'' = \frac{20}{3}$$

Áp dụng định lý Thales trong không gian, ta được:

$$\frac{SM}{MN} = \frac{SM'}{M'N'} = \frac{SM''}{M''N''} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{\frac{16}{3}}{M'N'} = \frac{\frac{20}{3}}{M''N''} \Rightarrow M'N' = 4; M''N'' = 5.$$

» Chọn ĐÚNG.

(c) $M'N' + M''N'' = 9$.

$$M'N' + M''N'' = 4 + 5 = 9.$$

» Chọn ĐÚNG.

(d) $N''C = \frac{10}{3}$.

$$N''C = SC - SM'' - M''N'' = 15 - \frac{20}{3} - 5 = \frac{10}{3}.$$

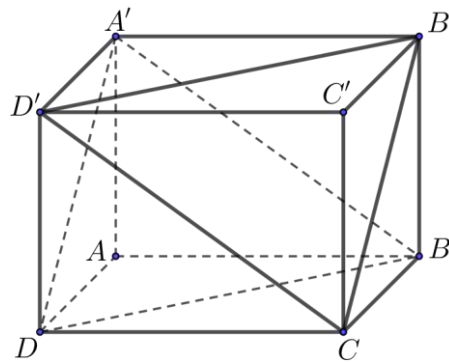
» Chọn ĐÚNG.

» Câu 20. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G_1, G_2 là trọng tâm của các tam giác $A'BD; B'D'C$.

Khi đó :

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$A'D'CB$ là hình bình hành		
(b)	$(A'BD) \parallel (B'D'C)$		
(c)	G_1, G_2 cùng thuộc AC'		
(d)	$G_1G_2 = \frac{2}{3} AC'$		

» Lời giải



(a) $A'D'CB$ là hình bình hành.

Vì $ABCD \cdot A'B'C'D'$ là hình hộp nên $\begin{cases} A'D' \parallel BC \\ A'D' = BC \end{cases} \Rightarrow A'D'CB$ là hình bình hành.

» Chọn ĐÚNG.

(b) $(A'BD) \parallel (B'D'C)$.

$A'D'CB$ là hình bình hành $\Rightarrow A'B \parallel CD' \Rightarrow A'B \parallel (B'D'C)$. (1)

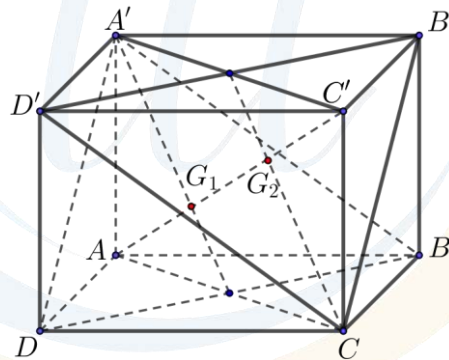
Tương tự, ta có: $\begin{cases} A'B' \parallel CD \\ A'B' = CD \end{cases} \Rightarrow A'B'CD$ là hình bình hành.

Suy ra $A'D \parallel B'C \Rightarrow A'D \parallel (B'D'C)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(A'BD) \parallel (B'D'C)$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) G_1, G_2 cùng thuộc AC' .



Vì G_1 là trọng tâm $\triangle A'BD$ nên $\frac{A'G_1}{A'O} = \frac{2}{3} \Rightarrow G_1$ là trọng tâm $\triangle A'AC$

$\Rightarrow G_1 = AI \cap A'O$. (3)

Tương tự, G_2 là trọng tâm $\triangle B'D'C$ nên $\frac{CG_2}{CO'} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow G_2$ là trọng tâm $\triangle A'C'C$, suy ra $G_2 = C'I \cap CO'$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra G_1, G_2 cùng thuộc AC' .

» Chọn ĐÚNG.

(d) $G_1G_2 = \frac{2}{3}AC'$.

Ta có: $\frac{AG_1}{AI} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AG_1}{AC'} = \frac{1}{3}; \frac{C'G_2}{C'I} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{C'G_2}{AC'} = \frac{1}{3}$.



Do vậy $AG_1 \doteq G_1G_2 = G_2C' = \frac{1}{3}AC'$.

Vậy G_1, G_2 cùng thuộc AC' , đồng thời chia AC' thành ba phần bằng nhau.

» Chọn SAI.

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 21. Có bao nhiêu khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây:

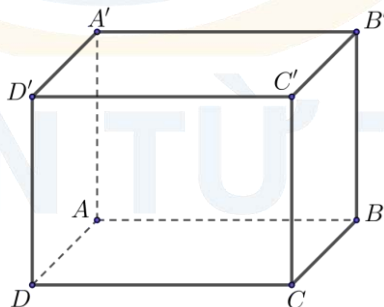
- (1) Nếu hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng khác thì chúng song song với nhau.
- (2) Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến thì ba giao tuyến đó đồng quy
- (3) Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) thì a song song với một đường thẳng nào đó nằm trong (P) .
- (4) Cho hai đường thẳng a, b nằm trong mặt phẳng (P) và hai đường thẳng a', b' nằm trong mặt phẳng (Q) . Khi đó, nếu $a // a'; b // b'$ thì $(P) // (Q)$.
- (5) Hai mặt phẳng không cắt nhau thì song song.

» Lời giải

✓ Trả lời: 1

- (1) Sai vì hai mặt phẳng đó có thể trùng nhau.
- (2) Sai vì ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến thì ba giao tuyến đó hoặc đồng quy hoặc đôi một song song hoặc trùng nhau.
- (3) Đúng, ta chọn mặt phẳng (α) chứa a và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến d thì $d \subset (P)$ và $a // d$.
- (4) Sai vì ta có thể lấy hai mặt phẳng (P) và (Q) thỏa a, b nằm trong mặt phẳng (P) ; a', b' nằm trong mặt phẳng (Q) với $a // b // a' // b'$ mà hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau.
- (5) Sai vì trong không gian, hai mặt phẳng có 3 vị trí tương đối: trùng nhau, cắt nhau, song song với nhau. Vì vậy, 2 mặt phẳng không cắt nhau thì có thể song song hoặc trùng nhau

» Câu 22. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Có bao nhiêu kết luận đúng



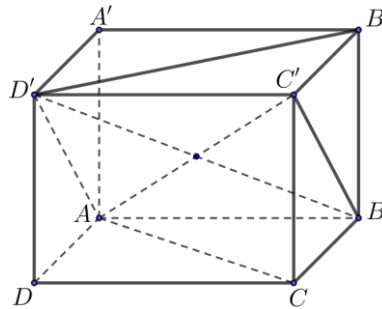
- (1) $AC // B'D'$
- (2) $(BB'D') // (ACC')$
- (3) $(AA'D') // (BCC')$
- (4) AD' cắt $(A'BC')$
- (5) $(DD'C) // (AA'B)$



(6) $(ABCD) // (A'D'C'B')$

Lời giải

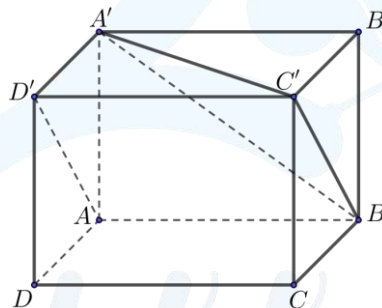
✓ Trả lời: 3



(1) $AC // B'D'$: Sai vì AC và $B'D'$ là hai đường chéo nhau.

(2) $(BB'D') // (ACC')$: Sai vì $BD' \cap AC'$ trong $(AD'C'B)$

(3) $(AA'D) // (BCC')$: Đúng do $AA' // (BCC')$, $D'A' // (BCC')$ nên $(AA'D) // (BCC')$.



(4) AD' cắt $(A'BC')$: Sai vì $\begin{cases} AD' // BC' \\ BC' \subset (A'BC') \end{cases} \Rightarrow AD' // (A'BC')$

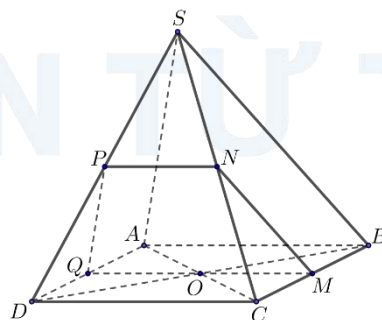
(5) $(DD'C) // (AA'B)$: Đúng do $DD' // (AA'B)$, $D'C // (AA'B)$ nên $(DD'C) // (AA'B)$.

(6) $(ABCD) // (A'D'C'B')$: Đúng do hai mặt đối của hình hộp song song nhau.

» Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , $AB=8$. Hai cạnh bên $SA=SB=6$. Gọi (α) là mặt phẳng qua O và song song với (SAB) . Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) có diện tích bằng $a\sqrt{5}$. Khi đó a bằng bao nhiêu.

Lời giải

✓ Trả lời: 6



Ta dựng được thiết diện $MNPQ$ như hình vẽ.

Trong đó: $MN // SB$; $MQ // AB$; $PQ // SA$.

Dễ dàng chứng minh được M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của BC, SC, SD, AD .

Suy ra $MQ // PN$ (do cùng song song CD). (1)



$$MN = PQ \text{ (do cùng bằng } \frac{SA}{2}, \frac{SB}{2} \text{)}. (2)$$

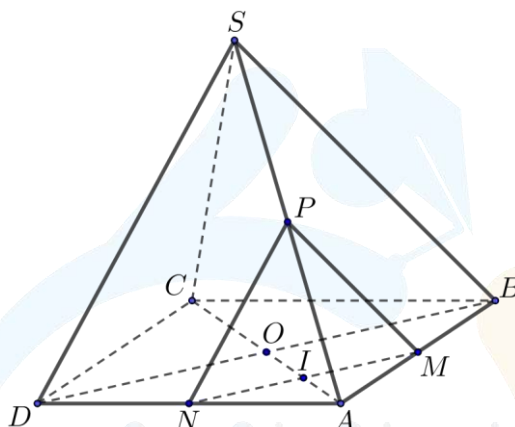
Từ (1) và (2) suy ra $MNPQ$ là hình thang cân.

Ta có $MQ = AB = 8$, $PN = \frac{AB}{2} = 4$, $MN = PQ = \frac{SA}{2} = 3$ nên tính được $S_{MNPQ} = 6\sqrt{5}$.

» **Câu 24.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh bằng 2. Tam giác SBD đều. Một mặt phẳng (α) song song với (SBD) và qua trung điểm I của đoạn thẳng AO . Gọi S là diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và hình chóp. Tính S^2 .

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 3**



Gọi $M = (\alpha) \cap AB$, $N = (\alpha) \cap AD$, $P = (\alpha) \cap SA$, ta có:

$$\begin{cases} (\alpha) \parallel (SBD) \\ (\alpha) \cap (ABCD) = MN \\ (SBD) \cap (ABCD) = BD \end{cases} \Rightarrow MN \parallel BD \Rightarrow \frac{MN}{BD} = \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD} \quad (1).$$

Chứng minh tương tự, ta được: $\begin{cases} MP \parallel SB \\ NP \parallel SD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{MP}{SB} = \frac{AM}{AB} \\ \frac{NP}{SD} = \frac{AN}{AD} \end{cases} \quad (2)$

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra: $\frac{MN}{BD} = \frac{MP}{SB} = \frac{NP}{SD}$.

Mà tam giác SBD đều nên $BD = SB = SD$.

Suy ra: $MN = MP = NP$. Do đó tam giác MNP đều.

Ta lại có:

$$\begin{cases} I \in AC, AC \subset (ABCD) \\ I \in (\alpha) \end{cases} \Rightarrow I \in (\alpha) \cap (ABCD) \Leftrightarrow I \in MN.$$

Mà I là trung điểm AO và $MN \parallel BD$ (chứng minh trên)

Nên MN là đường trung bình của $\triangle ABD$

Suy ra: $MN = \frac{BD}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

Do đó diện tích thiết diện cần tìm là: $S = S_{\triangle MNP} = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$.

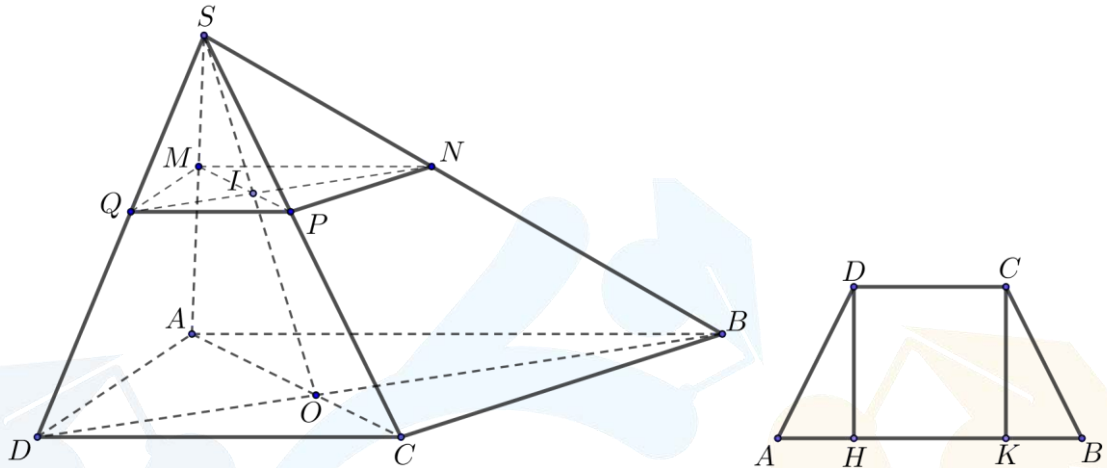


Vậy $S^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$.

» **Câu 25.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, cạnh bên $BC = \sqrt{5}$, hai đáy $AB = 11, CD = 7$. Mặt phẳng (α) song song với $(ABCD)$ và cắt cạnh SO tại I sao cho $2SO = 5SI$. Tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và hình chóp.

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 1,44**



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của D, C lên AB .

Vì $ABCD$ là hình thang cân nên $AH = BK = \frac{AB - HK}{2} = \frac{AB - CD}{2} = \frac{11 - 7}{2} = 4$.

Ta có $CK = \sqrt{BC^2 - BK^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = 1$.

Suy ra diện tích hình thang $ABCD$ là $S_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \cdot CK}{2} = \frac{(11 + 7) \cdot 1}{2} = 9$.

Gọi M, N, P, Q lần lượt là giao điểm của (α) và các cạnh SA, SB, SC, SD .

Vì (α) song song với $(ABCD)$

Nên theo định lý Thales, ta có $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = \frac{SQ}{SD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{5}$.

Vậy diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và hình chóp là

$$S_{MNPQ} = k^2 \cdot S_{ABCD} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot 9 = 1,44.$$

» **Câu 26.** Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng 1 và G là trọng tâm của tam giác ABC . Cắt tứ diện bởi mặt phẳng (P) qua G và song song với mặt phẳng (BCD) . Tính diện tích thiết diện thu được (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0,19**



Thiết diện cần tìm là tam giác HKI .

$$\text{Do đó: } S_{\Delta KHI} = k^2 \cdot S_{\Delta BCD} = \frac{4}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{9} \approx 0,19.$$

Hết



Chương 04

Bài 5.

PHÉP CHIẾU SONG SONG

A

Lý thuyết

1. Phép chiếu song song.



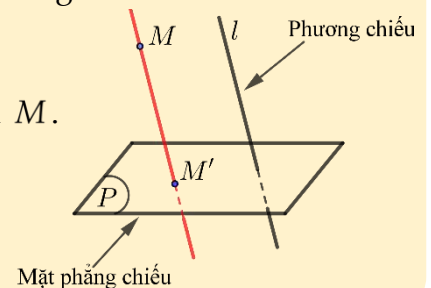
Định nghĩa:

Cho mặt phẳng (α) và một đường thẳng l cắt (P) .

- » Với mỗi điểm M trong không gian, vẽ đường thẳng qua M và song song hoặc trùng với l .
- » Phép cho tương ứng mỗi điểm M trong không gian với điểm M' trong (P) được gọi là phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương l .

** **Trong đó:** Trên mặt phẳng (P) theo phương l :

- ✓ Điểm M' được gọi là hình chiếu song song của điểm M .
- ✓ Mặt phẳng (P) được gọi là mặt phẳng chiếu.
- ✓ l gọi là phương chiếu



2. Tính chất của phép chiếu song song.



Tính chất:

- » Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.
- » Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- » Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành đường thẳng song song hoặc trùng nhau.
- » Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

3. Hình biểu diễn của một số hình không gian trên mặt phẳng.



Định nghĩa:

- » Hình biểu diễn của một hình H trong không gian là hình chiếu song song của H trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.



Chú ý

Dựa theo tính chất của phép chiếu song song, ta tuân theo các quy tắc khi vẽ hình:

- Nếu trên H có hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau) thì chúng được biểu diễn bằng hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau).
→ *Tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng này phải **bằng** tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng tương ứng trên H .*

- Nếu hình phẳng nằm trong mặt phẳng không song song với phương chiếu thì:

Hình biểu diễn của một *đường tròn* thường là một *elip*.

Hình biểu diễn của một *tam giác* (vuông, cân, đều) là một *tam giác*.

Hình biểu diễn của *hình vuông*, *hình chữ nhật*, *hình thoi*, *hình bình hành* là hình *bình hành*.

TOÁN TỪ TÂM



B

Các dạng bài tập

Dạng 1. Xác định ảnh qua phép chiếu song song



Phương pháp

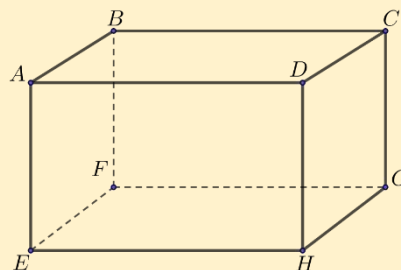
Dựa theo tính chất của phép chiếu song song, ta tuân theo các quy tắc khi vẽ hình:

- Nếu trên H có hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau) thì chúng được biểu diễn bằng hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau).
 $\longrightarrow$ Tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng này phải **bằng** tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng tương ứng trên H .
- Nếu hình phẳng nằm trong mặt phẳng không song song với phương chiếu thì:
 Hình biểu diễn của một đường tròn thường là một elíp.
 Hình biểu diễn của một tam giác (vuông, cân, đều) là một tam giác.
 Hình biểu diễn của hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành là hình bình hành.



Ví dụ 1.1.

Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Xác định hình chiếu của điểm A trên mặt phẳng $(CDHG)$ theo phương BC và theo phương BG .



Lời giải

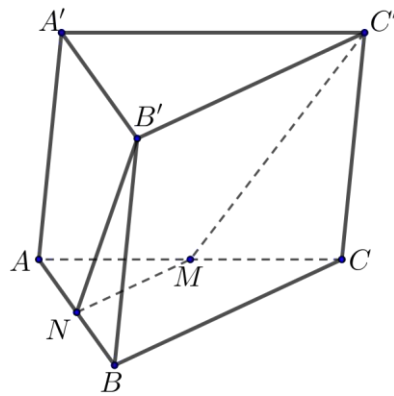
- » Vì $ABCD.EFGH$ là hình hộp nên $AD // BC$.
- » Vì $D \in (CDHG)$ nên D là hình chiếu của điểm A trên $(CDHG)$ theo phương BC .
- » Vì $ABCD.EFGH$ là hình hộp nên các mặt của nó đều là các hình bình hành.
 Do đó, $ABCD$ và $CDHG$ là các hình bình hành.
 $\Rightarrow AB // CD, AB = CD$ và $CD // HG, CD = HG$
 Nên $AB // HG$ và $AB = HG$,
 $\Rightarrow ABGH$ là hình bình hành nên $AH // BG$.
- » Vì $H \in (CDHG)$ nên H là hình chiếu của điểm A trên $(CDHG)$ theo phương BG .



Ví dụ 1.2.

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của AC . Tìm hình chiếu song song của điểm $C'M$ lên $(AA'B')$ theo phương chiếu CB ?

Lời giải



Ta có: $C'B' \parallel CB$

Nên hình chiếu song song của điểm C' lên $(AA'B')$ theo phương chiếu CB là điểm B' .

Gọi N là trung điểm của AB .

Ta có: $MN \parallel CB$

Nên hình chiếu song song của điểm M lên $(AA'B')$ theo phương chiếu CB là điểm N .

Vậy hình chiếu song song của điểm $C'M$ lên $(AA'B')$ theo phương chiếu CB là $B'N$

TOÁN TỪ TÂM



➤ Dạng 2. Xác định hình biểu diễn qua phép chiếu song song



Phương pháp

Cho hình H trong không gian.

- Ta gọi tập hợp P' các ảnh M' của tất cả những điểm M thuộc H qua phép chiếu song song theo phương l là hình chiếu song song của H lên mặt phẳng (P) .
- Để tìm hình chiếu của một đường thẳng ta tìm hình chiếu của 2 điểm phân biệt trên đường thẳng, hình chiếu là đường thẳng đi qua hai điểm vừa tìm được.
- Để tìm hình chiếu của một đa giác ta tìm hình chiếu của các đỉnh.



Ví dụ 2.1.

Cho hình chóp $S.ABC$. I là trung điểm AB .

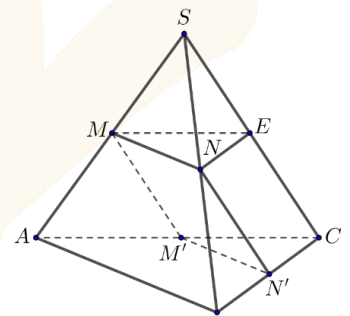
- (1) Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC . Tìm ảnh của $\triangle MNE$ trong phép chiếu song song trên (ABC) theo phương SC .
- (2) Tìm ảnh của tam giác MNE trong phép chiếu song song trên (ABC) theo phương trung tuyến SI của $\triangle SAB$.

🔗 Lời giải

- (1) Tìm ảnh của $\triangle MNE$ trong phép chiếu song song trên (ABC) theo phương SC .

Gọi $M'; N'$ lần lượt là trung điểm của CA và CB .

$\Rightarrow$ Ảnh của $\triangle MNE$ trong phép chiếu song song trên (ABC) theo phương SC là $\triangle M'N'C$.

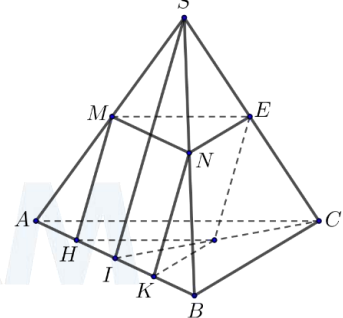


- (2) Tìm ảnh của tam giác MNE trong phép chiếu song song trên (ABC) theo phương trung tuyến SI của $\triangle SAB$

Từ M, N, E ta dựng các đường thẳng song song với SI cắt AB tại H, K cắt CI tại F .

Suy ra H, K, F lần lượt là trung điểm của AI, BI, CI .

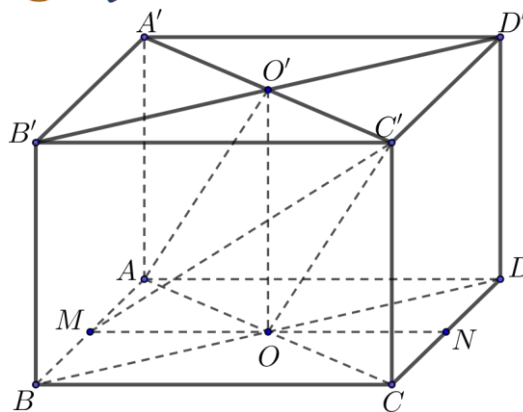
Ảnh của $\triangle MNE$ trong phép chiếu song song trên (ABC) theo phương trung tuyến SI là $\triangle HKF$.



Ví dụ 2.2.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi $O = AC \cap BD$ và $O' = A'C' \cap B'D'$. Điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Qua phép chiếu song song theo phương AO' lên mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định hình chiếu của tam giác $C'MN$.

🔗 Lời giải



Ta có: $O'C' = AO$ và $O'C' \parallel AO$ nên tứ giác $O'C'OA$ là hình bình hành $\Rightarrow O'A \parallel C'O$.

Do đó hình chiếu của điểm O' qua phép chiếu song song theo phương $O'A$ lên $(ABCD)$ là điểm O .

Mặt khác điểm M và N thuộc $(ABCD)$

Nên hình chiếu của M và N qua phép chiếu song song theo phương $O'A$ lên mặt phẳng $(ABCD)$ lần lượt là điểm M và N .

Vậy qua phép chiếu song song theo phương AO' lên $(ABCD)$ thì hình chiếu của $\triangle C'MN$ là đoạn thẳng MN .

TOÁN TỪ TÂM



Dạng 3. Bài toán tổng hợp



Ví dụ 3.1.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và CC' . Gọi Δ là đường thẳng đi qua M đồng thời cắt AN và $A'B$. Gọi I, J lần lượt là giao điểm của Δ với AN và $A'B$. Hãy tính tỉ số $\frac{IM}{IJ}$.

Lời giải

» Xét phép chiếu song song lên $(ABCD)$ theo phương chiếu $A'B$.

» Khi đó J, I, M lần lượt có hình chiếu là B, I', M .

» Do J, I, M thẳng hàng.

Nên B, I', M cũng thẳng hàng.

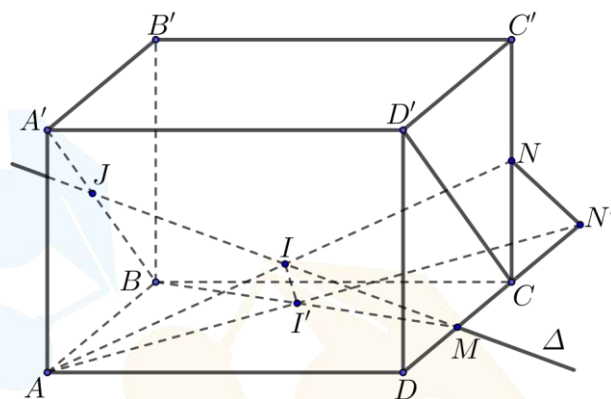
» Gọi N' là hình chiếu của N thì AN' là hình chiếu của AN .

» Vì $I \in AN \Rightarrow I' \in AN' \Rightarrow I' = BM \cap AN'$.

» Ta có $MC = CN'$ suy ra $MN' = CD = AB$.

» Do đó I' là trung điểm của BM .

» Mặt khác $II' \parallel JB$ nên II' là đường trung bình của $\triangle MBJ \Rightarrow IM = IJ \Rightarrow \frac{IM}{IJ} = 1$.



Ví dụ 3.2.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định các điểm M, N tương ứng trên các đoạn $AC', B'D'$ sao cho MN song song với BA' và tính tỉ số $\frac{MA}{MC'}$.

Lời giải

» Xét phép chiếu song song lên $(A'B'C'D')$ theo phương chiếu BA' .

» Ta có N là ảnh của M hay M chính là giao điểm của $B'D'$ và ảnh AC' qua phép chiếu này.

» Do đó ta xác định M, N như sau:

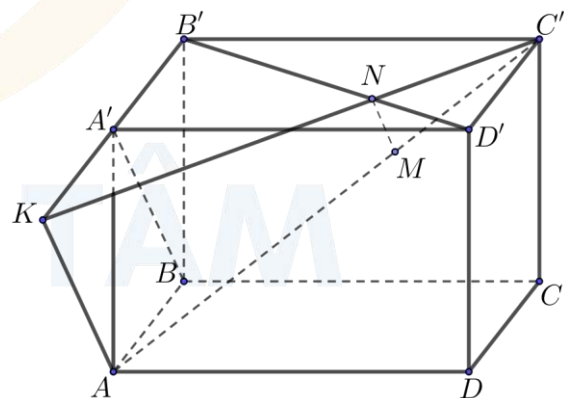
» Trên $A'B'$ kéo dài lấy điểm K sao cho $A'K = B'A'$ thì $ABA'K$ là hình bình hành nên $AK \parallel BA'$ suy ra K là ảnh của A trên AC' qua phép chiếu song song.

» Gọi $N = B'D' \cap KC'$.

Đường thẳng qua N và song song với AK cắt AC' tại M .

Ta có M, N là các điểm cần xác định.

» Theo định lý Thales, ta có $\frac{MA}{MC'} = \frac{NK}{NC'} = \frac{KB'}{C'D'} = 2$.





Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» **Câu 1.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hình chiếu của tam giác $A'B'C'$ theo phương $B'B$ lên mặt phẳng ABC là hình nào?

A. ADC .

B. ADB .

C. BCD .

D. ABC .

» **Lời giải**

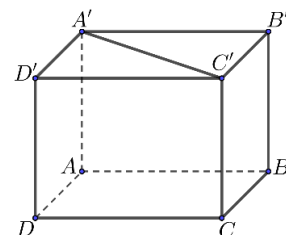
Chọn A

Do $A'A \parallel B'B$ nên hình chiếu của A' theo phương $B'B$ là A .

$D'D \parallel B'B$ nên hình chiếu của D' theo phương $B'B$ là D .

$C'C \parallel B'B$ nên hình chiếu của C' theo phương $B'B$ là C .

Vậy hình chiếu của tam giác $A'B'C'$ theo phương $B'B$ là tam giác ADC .



» **Câu 2.** Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hình chiếu song song của một hình chóp cắt có thể là một hình tam giác.

B. Hình chiếu song song của một hình chóp cắt có thể là một đoạn thẳng.

C. Hình chiếu song song của một hình chóp cắt có thể là một hình chóp cắt.

D. Hình chiếu song song của một hình chóp cắt có thể là một điểm.

» **Lời giải**

Chọn A

Qua phép chiếu song song chỉ có thể biến hình chóp cắt thành một đa giác.

Loại B - chỉ là một đoạn thẳng.

Loại C - phép chiếu song song không thể là một khối đa diện.

Loại D - chỉ là một điểm.

Chọn A - hình chiếu là một đa giác.

» **Câu 3.** Qua phép chiếu song song, tính chất nào không được bảo toàn?

A. Chéo nhau.

B. Đồng quy.

C. Thẳng hàng.

D. Song song.

» **Lời giải**

Chọn A

Do hai đường thẳng qua phép chiếu song song ảnh của chúng sẽ cùng thuộc một mặt phẳng.

Suy ra tính chất chéo nhau không được bảo toàn.

» **Câu 4.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.

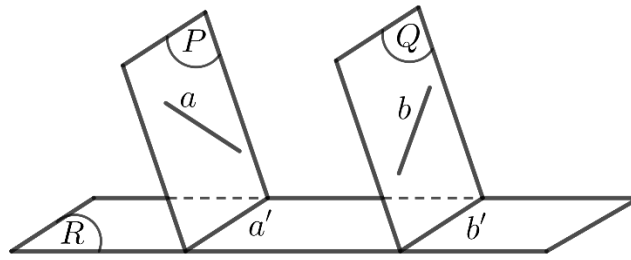
B. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau thì song song.

C. Hình chiếu song song của hai một hình vuông là một hình vuông.

D. Hình chiếu song song của một lục giác đều là một lục giác đều.

» **Lời giải**

Chọn A



Dựng mặt phẳng (P) qua a và song song với b .

Dựng mặt phẳng (Q) qua b và song song với a .

Giả sử (P) song song với (Q) .

Ta chọn phương chiếu d song song với (P) và mặt phẳng chiếu (R) sao cho (R) cắt (P) và (Q) lần lượt theo hai giao tuyến a' và b' .

Khi đó hình chiếu a', b' song song với nhau.

» **Câu 5.** Qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) , hai đường thẳng a và b có hình chiếu là hai đường thẳng song song a' và b' . Khi đó:

- A.** a và b phải song song với nhau.
- B.** a và b phải cắt nhau.
- C.** a và b có thể chéo nhau hoặc song song với nhau.
- D.** a và b không thể song song.

✎ **Lời giải**

Chọn C

Nếu $a' // b'$ thì $mp(a, a') // mp(b, b')$. Bởi vậy a và b có thể song song hoặc chéo nhau.

» **Câu 6.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACD . Hình chiếu G' của điểm G trên mặt phẳng (BCD) theo phương chiếu AB là:

- A.** Trọng tâm của tam giác BCD .
- B.** Trung điểm BC .
- C.** Trung điểm CD .
- D.** Trung điểm BI với I là trung điểm CD .

✎ **Lời giải**

Chọn A

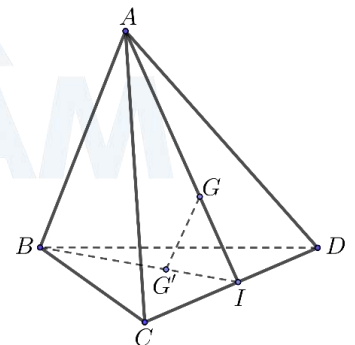
» Gọi I là trung điểm của CD .

Qua phép chiếu song song phương AB thì IB là hình chiếu của IA trên (BCD) .

» Vì phép chiếu song song bảo toàn tính thẳng hàng và thứ tự ba điểm A, G, I nên hình biểu diễn G' của G nằm trên BI và ở giữa B và I .

$$\text{Trong tam giác } IAB, \text{ ta có: } \left. \begin{array}{l} \frac{IG}{IA} = \frac{IG'}{IB} \\ \frac{IG}{IA} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{IG'}{IB} = \frac{1}{3}.$$

Suy ra G' là trọng tâm của tam giác BCD .



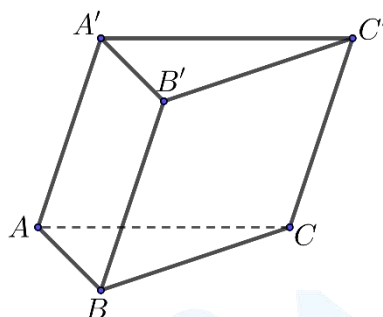


» **Câu 7.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. A' hình chiếu của A trên $(A'B'C')$ qua phép chiếu song song theo phương là đường thẳng nào?

- A.** CC' . **B.** CA' . **C.** $C'A'$. **D.** $B'A'$.

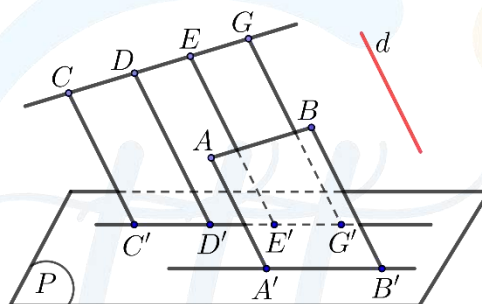
» **Lời giải**

Chọn A



A' hình chiếu của A trên $(A'B'C')$ qua phép chiếu song song theo phương CC' .

» **Câu 8.** Trên hình bên dưới, ta có phép chiếu song song theo phương d và mặt phẳng chiếu (P) ; $AB \parallel CG$ và $AB = DG$; A', B', C', D', E', G' lần lượt là hình chiếu của A, B, C, D, E, G qua phép chiếu nói trên.



Khi đó, có bao nhiêu khẳng định đúng trong các mệnh đề sau

- (i) $\frac{DG}{AB} = \frac{D'G'}{A'B'}$. (ii) $\frac{C'D'}{D'E'} = \frac{CD}{DE}$. (iii) $D'G' = A'B'$.

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3

» **Lời giải**

Chọn D

Theo tính chất của phép chiếu song song, ta thấy (i) và (ii) đúng.

Từ (i) đúng $\frac{DG}{AB} = \frac{D'G'}{A'B'} = 1$, suy ra $D'G' = A'B'$, nên câu (iii) đúng.

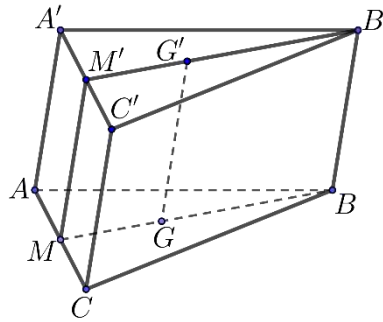
Vậy có 3 khẳng định đúng.

» **Câu 9.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Qua phép chiếu song song đường thẳng AA' mặt phẳng chiếu là $(A'B'C')$ biến G thành G' . Tìm mệnh đề đúng?

- A.** G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$. **B.** G' là trung điểm của $A'B'$.
C. G' là trực tâm tam giác $A'B'C'$. **D.** G' là trung điểm của $B'C'$.

» **Lời giải**

Chọn A



Gọi M là trung điểm của AC ; M' là trung điểm của $A'C'$.

Do $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ $\Rightarrow B'B \parallel A'A$; $C'C \parallel A'A$; $MM' \parallel A'A$,

Nên qua phép chiếu song song AA' : biến B thành B' , biến C thành C' , biến M thành M' .

Theo đầu bài G là trọng tâm $\triangle ABC$.

$\Rightarrow B, M, G$ thẳng hàng và $\frac{BG}{BM} = \frac{2}{3}$ nên B', M', G' thẳng hàng và $\frac{B'G'}{B'M'} = \frac{2}{3}$.

$\Rightarrow G'$ là trọng tâm của $\triangle A'B'C'$.

» **Câu 10.** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O . Trên cạnh SB, SD lần lượt lấy điểm M, N sao cho $SM = 2MB$ và $SN = \frac{1}{3}SD$. Hình chiếu của M, N qua phép chiếu song song lên mặt phẳng chiếu $(ABCD)$ theo phương của đường thẳng SO lần lượt là P, Q . Tính tỉ số $\frac{OP}{OQ}$.

A. 2.

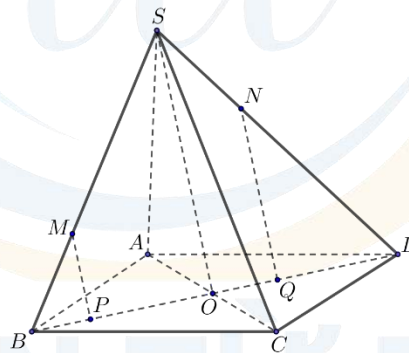
B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Do P là HCSS của M qua phép chiếu đường thẳng $SO \Rightarrow \frac{OP}{OB} = \frac{MS}{SB} = \frac{2}{3}$ (1).

Do Q là HCSS của N qua phép chiếu đường thẳng $SO \Rightarrow \frac{OQ}{OD} = \frac{NS}{SD} = \frac{1}{3}$ (2)

Do $ABCD$ là hình bình hành tâm O nên $BO = DO$ (3).

Từ (1); (2); (3) suy ra $\frac{OP}{OQ} = \frac{\frac{2}{3}OB}{\frac{1}{3}OD} = 2$.

» **Câu 11.** Hình biểu diễn của hình chữ nhật trong không gian không thể là hình nào trong các hình sau?



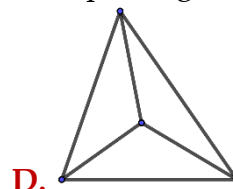
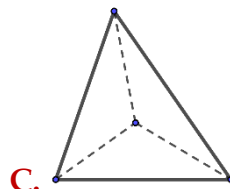
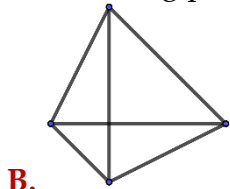
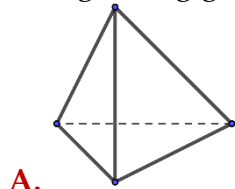
- A. Hình thang B. Hình bình hành C. Hình chữ nhật D. Hình thoi

🔗 *Lời giải*

Chọn A

Do phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau, nên đáp án A sai.

» **Câu 12.** Trong không gian, hình nào không phải là hình biểu diễn của hình chóp tam giác?



🔗 *Lời giải*

Chọn B

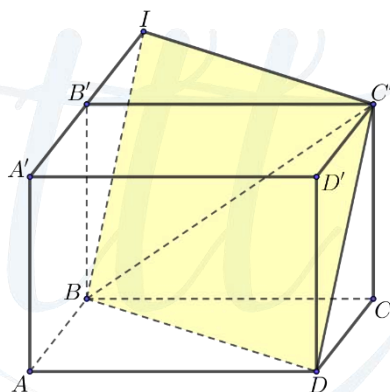
Phương án B sai vì là hình vẽ tứ giác có 2 đường chéo cắt nhau, nên không là hình biểu diễn của hình chóp tam giác gồm 4 cạnh có điểm chung tại đỉnh.

» **Câu 13.** Hình biểu diễn của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ lên $(BC'D)$ theo phương AB là:

- A. Một tam giác. B. Một hình bình hành
C. Một ngũ giác. D. Một lục giác.

🔗 *Lời giải*

Chọn B



+ Gọi I là điểm đối xứng của A' qua B' .

+ Xét phép chiếu song theo phương AB lên mặt phẳng $(BC'D)$, ta có:

Hình chiếu của D, B, C' thành chính nó;

Hình chiếu của A thành B ;

Hình chiếu của A', B' thành I ;

Hình chiếu của D' thành C' .

+ Do đó, hình chiếu của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ lên $(BC'D)$ theo phương AB là hình bình hành $BDC'I$.

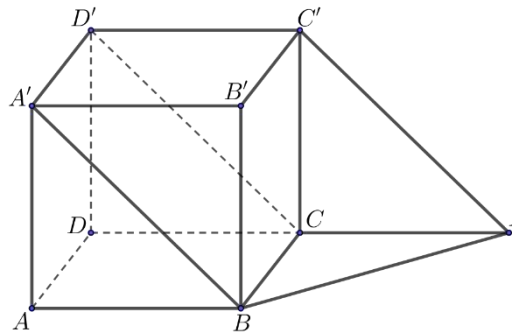
» **Câu 14.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hình biểu diễn của $\triangle A'C'D'$ qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương $A'B$ là

- A. Một tam giác ABC .
B. Một tam giác BCI , với I là điểm sao cho C là trung điểm của DI .
C. Một tam giác ACD .
D. Một tam giác DCM , với M là điểm sao cho C là trung điểm của BM .



Lời giải

Chọn B



Gọi f là phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương $A'B$. Khi đó, f biến

+ điểm A' thành điểm B ,

+ điểm D' thành điểm C

+ điểm C' thành điểm I , với I là điểm sao cho C là trung điểm của DI .

Vì vậy, ảnh của tam giác $A'C'D'$ qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương $A'B$ là tam giác BCI .

» **Câu 15.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB \parallel CD$, $AB = 3CD$. Gọi M , N theo thứ tự là trung điểm SB, SC và K là giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMN) . Tính tỷ số $\frac{SK}{SD}$.

A. $\frac{SK}{SD} = \frac{3}{5}$.

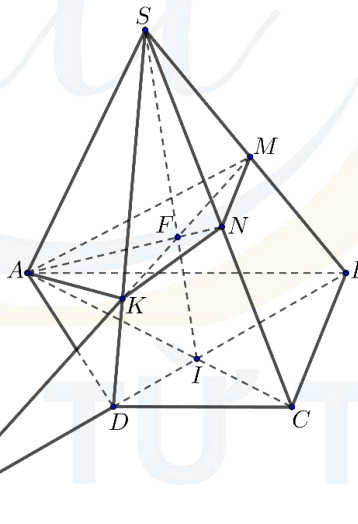
B. $\frac{SK}{SD} = \frac{1}{2}$.

C. $\frac{SK}{SD} = \frac{4}{7}$.

D. $\frac{SK}{SD} = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $I = AC \cap BD$ và $F = AN \cap SI$.

Gọi $K = MF \cap SD$, ta có $MF \subset (AMN)$ đồng thời $MF \cap SD = K \Rightarrow K = SD \cap (AMN)$.

Ta có $\triangle DIC$ đồng dạng $\triangle BIA \Leftrightarrow \frac{DI}{BI} = \frac{CI}{AI} = \frac{CD}{AB} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{DI}{DB} = \frac{1}{4}$.

Tương tự ta có $\frac{AC}{AI} = \frac{4}{3}$.

Gọi $H = BD \cap MK$.



$$\text{Xét } \triangle SIC \text{ ta có } \frac{NS}{NC} \cdot \frac{AC}{AI} \cdot \frac{FI}{FS} = 1 \Leftrightarrow 1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{FI}{FS} = 1 \Leftrightarrow \frac{FI}{FS} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Xét } \triangle SIB \text{ ta có } \frac{FS}{FI} \cdot \frac{HI}{HB} \cdot \frac{MB}{MS} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{3} \cdot \frac{HI}{HB} \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{HI}{HB} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Gọi } HD = a; \text{ cạnh } DI = x \text{ ta có } \Leftrightarrow \frac{HI}{HB} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{a+x}{a+4x} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow a = 8x \Leftrightarrow \frac{HD}{HI} = \frac{8}{9}$$

$$\text{Xét } \triangle SDI \text{ ta có } \frac{KS}{KD} \cdot \frac{HD}{HI} \cdot \frac{FI}{FS} = 1 \Leftrightarrow \frac{KS}{KD} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{3}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{KS}{KD} = \frac{3}{2}.$$

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» **Câu 16.** Xét tính đúng/sai của các mệnh đề sau?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng cắt nhau.		
(b)	Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự giữa các điểm.		
(c)	Cho mặt phẳng (P) , đường thẳng l cắt (P) và điểm M không nằm trên đường thẳng l . Gọi điểm M' là ảnh của điểm M lên mặt phẳng (P) theo phương chiếu l của phép chiếu song song. Khi đó MM' song song l .		
(d)	Phép chiếu song song làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.		

» Lời giải

(a) Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng cắt nhau.

Theo tính chất 2: Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

» **Chọn SAI.**

(b) Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự giữa các điểm.

Theo tính chất 3

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Cho mặt phẳng (P) , đường thẳng l cắt (P) và điểm M không nằm trên đường thẳng l . Gọi điểm M' là ảnh của điểm M lên mặt phẳng (P) theo phương chiếu l của phép chiếu song song. Khi đó MM' song song l .

Theo khái niệm phép chiếu song song.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Phép chiếu song song làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

Theo tính chất 3: Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

» **Chọn SAI.**

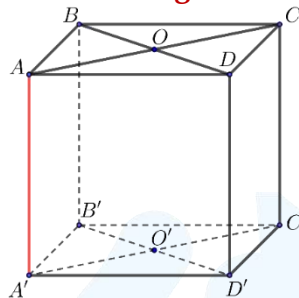
» **Câu 17.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xét phép chiếu song song theo phương chiếu AA' .

Mệnh đề	Đúng	Sai
---------	------	-----



(a)	Hình chiếu của C' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là C .		
(b)	Hình chiếu của B lên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ là A' .		
(c)	Gọi O và O' lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Hình chiếu của O lên mặt phẳng $(ABCD)$ là O' .		
(d)	Hình chiếu của AC lên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ là $A'C'$.		

Lời giải



(a) Hình chiếu của C' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là C .

Do $\begin{cases} C \in (ABCD) \\ C'C // A'A \end{cases}$ nên hình chiếu của C' lên $(ABCD)$ là C .

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Hình chiếu của B lên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ là A' .

Do $\begin{cases} B' \in (A'B'C'D') \\ B'B // A'A \end{cases}$ nên hình chiếu của B lên $(A'B'C'D')$ là B' .

» **Chọn SAI.**

(c) Gọi O và O' lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Hình chiếu của O lên mặt phẳng $(ABCD)$ là O' .

Do $O \in (ABCD)$ nên hình chiếu của O lên $(ABCD)$ cũng là O .

» **Chọn SAI.**

(d) Hình chiếu của AC lên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ là $A'C'$.

Do $AA' \cap (A'B'C'D') = A'$ nên hình chiếu của A lên $(A'B'C'D')$ là A' .

Do $\begin{cases} C' \in (A'B'C'D') \\ C'C // A'A \end{cases}$ nên hình chiếu của C lên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ là C' .

Suy ra hình chiếu của AC lên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ là $A'C'$.

» **Chọn ĐÚNG.**

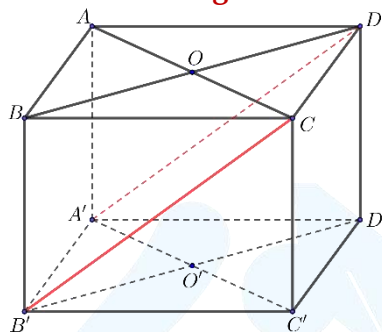
» **Câu 18.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Xét các mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hình chiếu của C lên $(A'B'C')$ theo phương chiếu DA' trong phép chiếu song song là điểm C' .		
(b)	Gọi O và O' lần lượt là tâm của $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Hình chiếu của điểm A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ theo phương chiếu OO' trong phép chiếu song song là điểm A' .		



- (c) Gọi I và I' lần lượt là trung điểm của AB và $A'B'$. Hình chiếu của I lên mặt phẳng $(A'B'C')$ theo phương chiếu AI' trong phép chiếu song song là điểm A' .
- (d) Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Gọi G' là hình chiếu của G lên $(A'B'C'D')$ theo phương chiếu II' trong phép chiếu song song. Khi đó G' là trọng tâm $\triangle A'B'C'$.

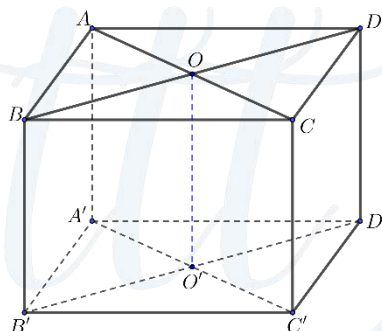
» **Lời giải**



(a) Hình chiếu của C lên $(A'B'C')$ theo phương chiếu DA' trong phép chiếu song song là điểm C' .

Do $\begin{cases} B' \in (A'B'C') \\ CB' \parallel DA' \end{cases}$ nên hình chiếu của C lên $(A'B'C')$ là B' .

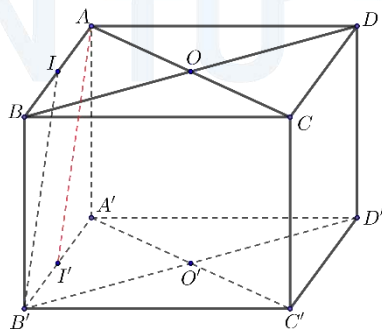
» **Chọn SAI.**



(b) Gọi O và O' lần lượt là tâm của $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Hình chiếu của điểm A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ theo phương chiếu OO' trong phép chiếu song song là điểm A' .

Do $\begin{cases} A' \in (A'B'C') \\ AA' \parallel OO' \end{cases}$ nên hình chiếu của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là A' .

» **Chọn ĐÚNG.**

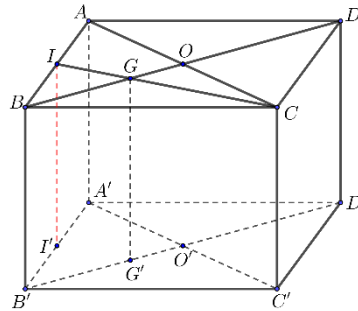


(c) Gọi I và I' lần lượt là trung điểm của AB và $A'B'$. Hình chiếu của I lên mặt phẳng $(A'B'C')$ theo phương chiếu AI' trong phép chiếu song song là điểm A' .



Do $\begin{cases} B' \in (A'B'C') \\ IB' // AI' \end{cases}$ nên hình chiếu của I lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là B' .

» Chọn SAI.



(d) Gọi G là trọng của $\triangle ABC$. Gọi G' là hình chiếu của G lên $(A'B'C'D')$ theo phương chiếu II' trong phép chiếu song song. Khi đó G' là trọng tâm $\triangle A'B'C'$.

Ta có I', G', C' lần lượt là ảnh của I, G, C qua phép chiếu song song lên $(A'B'C'D')$ theo phương chiếu.

Mặt khác G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $CG = \frac{2}{3}CI$

Theo tính chất 3 thì $C'G' = \frac{2}{3}C'I'$

Mà I' là trung điểm $A'B'$

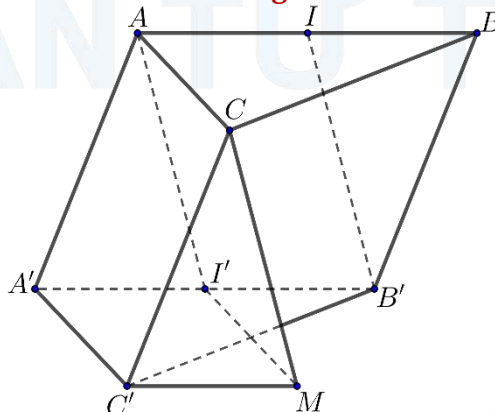
Nên G' là trọng tâm $\triangle A'B'C'$.

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 19. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$; I và I' lần lượt là trung điểm của đoạn AB và $A'B'$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$AI' // IB'$		
(b)	Hình chiếu song song của I trên mặt phẳng $(A'B'C')$ phương $A'I$ là điểm C' .		
(c)	Trong $(A'B'C')$, vẽ hình bình hành $A'C'MI'$. Suy ra $ACMI'$ là hình bình hành.		
(d)	$\triangle MAA'$ là hình chiếu song song của $\triangle CAA'$ theo phương AI' trên $(A'B'C')$		

» Lời giải



(a) $AI' // IB'$



Ta có $\begin{cases} AI // B'I' \\ AI = B'I' = \frac{AB}{2} \end{cases} \Rightarrow AIB'I'$ là hình bình hành, do đó $AI' // IB'$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Hình chiếu song song của I trên mặt phẳng $(A'B'C')$ phương AI là điểm C' .

Vì $AI' // IB'$ nên hình chiếu song song của I trên $(A'B'C')$ phương AI là điểm B'

» **Chọn SAI.**

(c) Trong $(A'B'C')$, vẽ hình bình hành $A'C'MI'$. Suy ra $ACMI'$ là hình bình hành.

Trong mặt phẳng $(A'B'C')$, vẽ hình bình hành $A'C'MI'$

Vì $\begin{cases} MI' // A'C', MI' = A'C' \\ A'C' // AC, A'C' = AC \end{cases} \Rightarrow MI' // AC, MI' = AC.$

Suy ra $ACMI'$ là hình bình hành.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) $\triangle MAA'$ là hình chiếu song song của $\triangle CAA'$ theo phương AI' trên $(A'B'C')$.

Vì $ACMI'$ là hình bình hành nên $AI' // CM$, mà $M \in (A'B'C')$

Nên M chính là hình chiếu song song của C theo phương AI' trên $(A'B'C')$.

I' chính là hình chiếu song song của A theo phương AI' trên mặt phẳng $(A'B'C')$.

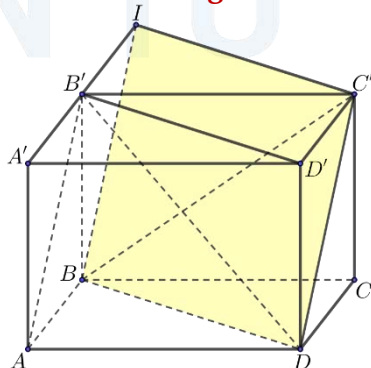
Vậy hình chiếu song song của $\triangle CAA'$ theo phương AI' trên $(A'B'C')$ là $\triangle MI'A'$.

» **Chọn SAI.**

» **Câu 20.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$ADC'B'$ là hình bình hành		
(b)	Hình chiếu song song của A lên mặt phẳng $(BCC'B')$ qua phép chiếu song song theo phương của đường thẳng $C'D$ là B'		
(c)	Hình chiếu song song của $\triangle AB'D'$ trên mặt phẳng $(BCC'B')$ qua phép chiếu song song theo phương của đường thẳng $C'D'$ là $\triangle BB'C'$		
(d)	Hình chiếu của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ lên mặt phẳng $(BC'D)$ theo phương AB là một hình tam giác		

» **Lời giải**



(a) $ADC'B'$ là hình bình hành.



$$\text{Vì } \begin{cases} AD // B'C' (// A'D') \\ AD = B'C' (= A'D') \end{cases} \Rightarrow ADC'B' \text{ là hình bình hành.}$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Hình chiếu song song của A lên mặt phẳng $(BCC'B')$ qua phép chiếu song song theo phương của đường thẳng $C'D$ là B' .

Vì $ADC'B'$ là hình bình hành nên $AB' // C'D$.

Do đó điểm B' là hình chiếu song song của A lên mặt phẳng $(BCC'B')$ qua phép chiếu song song theo đường thẳng $C'D$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Hình chiếu song song của $\triangle AB'D'$ trên mặt phẳng $(BCC'B')$ qua phép chiếu song song theo phương của đường thẳng $C'D'$ là $\triangle BB'C'$.

Ta có $B' \in (BCC'B')$ và $AB // C'D'$ nên qua phép chiếu song song theo phương $C'D'$ lên mặt phẳng $(BCC'B')$ biến $\triangle AB'D'$ thành $\triangle BB'C'$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Hình chiếu của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ lên mặt phẳng $(BC'D)$ theo phương AB là một hình tam giác.

Gọi I là điểm đối xứng của A' qua B' .

Khi đó, ta chứng minh được $C'I // D'B' // DB, C'I = DB$

Nên $(DC'B)$ mở rộng thành $(DBIC')$ và $DBIC'$ là hình bình hành.

Xét phép chiếu song song theo phương AB lên $(BC'D)$ ta có:

Hình chiếu của D, B, C' là chính nó;

Hình chiếu của A là B ; Hình chiếu của A', B' là I ;

Hình chiếu của D' là C' , hình chiếu của C là D .

Do đó, hình chiếu của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ lên $(BC'D)$ theo phương AB là hình bình hành $DBIC'$.

» **Chọn SAI.**

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 21.** Số mệnh đề nào trong các mệnh đề sau

(a) Phép chiếu song song biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

(b) Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng cắt nhau.

(c) Phép chiếu song song biến tam giác đều thành tam giác cân.

(d) Phép chiếu song song biến hình vuông thành hình bình hành.

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 2**

Mệnh đề (a) là mệnh đề đúng.

Mệnh đề (b) là mệnh đề sai vì phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

Mệnh đề (c) là mệnh đề sai vì phép chiếu song song biến tam giác đều thành một tam giác bất kì.

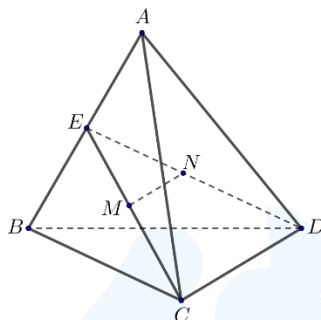


Mệnh đề (d) là mệnh đề đúng.

» **Câu 22.** Cho tứ diện $ABCD$, M là trọng tâm của tam giác ABC . Gọi N là hình chiếu song song của điểm M theo phương CD lên mặt phẳng (ABD) . Khi đó $\frac{EN}{ED}$ bằng bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trăm)

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0,33**



Gọi E là trung điểm của AB , M, N lần lượt là trọng tâm của $\triangle ABC, \triangle ABD$ suy ra $MN \parallel CD$.

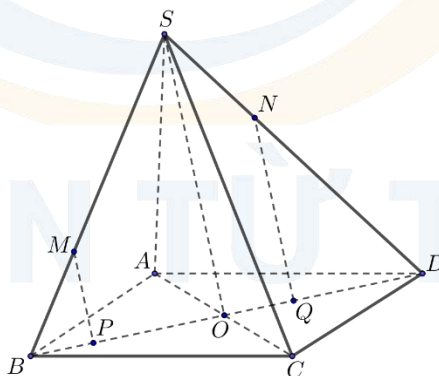
Vậy hình chiếu song song của điểm M theo phương CD lên (ABD) là trọng tâm của $\triangle ABD$.

Vì M, N lần lượt là trọng tâm của $\triangle ABC, \triangle ABD$ nên suy ra $\frac{EM}{EC} = \frac{EN}{ED} = \frac{1}{3}$.

» **Câu 23.** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O . Trên cạnh SB, SD lần lượt lấy điểm M, N sao cho $SM = 2MB$ và $SN = \frac{1}{3}SD$. Hình chiếu của M, N qua phép chiếu song song đường thẳng SO lên mặt phẳng chiếu $(ABCD)$ lần lượt là P, Q . Tính tỉ số $\frac{OP}{OQ}$.

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 2**



Do P là hình chiếu song song của M qua phép chiếu đường thẳng $SO \Rightarrow \frac{BM}{BS} = \frac{BP}{BO}$.

Mà $SM = 2MB$ nên $\frac{BM}{BO} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{OP}{OB} = \frac{2}{3}$ (1)

Do Q là hình chiếu song song của N qua phép chiếu đường thẳng $SO \Rightarrow \frac{BN}{BS} = \frac{BQ}{BO}$.



Mà $SN = \frac{1}{3}SD$ nên $\frac{OQ}{OD} = \frac{1}{3}$ (2)

Do $ABCD$ là hình bình hành tâm O nên $BO = DO$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \frac{OP}{OQ} = 2$

» **Câu 24.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, gọi I là trung điểm AB . Gọi S, S' lần lượt là diện tích của tam giác $\triangle ABC$ và hình chiếu của tam giác $AA'C'$ lên mặt phẳng $(A'B'C')$ theo phương IB' . Khi đó tỉ số $\frac{S'}{S}$ bằng

Lời giải

✓ **Trả lời: 0,5**

Lấy I' là trung điểm $A'B'$

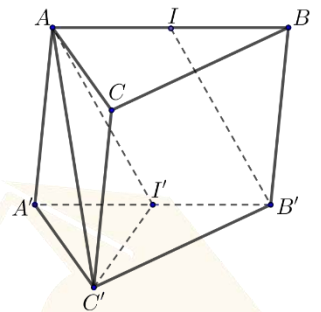
Ta có $\begin{cases} AI \parallel I'B' \\ AI = I'B' = \frac{1}{2}AB \end{cases} \Rightarrow AIB'I' \text{ là hình bình hành}$

$\Rightarrow AI' \parallel IB' \Rightarrow$ hình chiếu song song của A lên $(A'B'C')$ theo phương IB' là I' .

$\Rightarrow$ hình chiếu của $\triangle AA'C'$ lên $(A'B'C')$ theo phương IB' là $\triangle I'A'C'$

Vì I' là trung điểm $A'B'$ nên $S' = S_{\triangle I'A'C'} = \frac{1}{2}S_{\triangle A'B'C'} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}S$

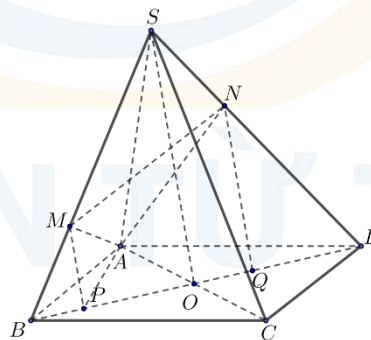
$\Rightarrow \frac{S'}{S} = \frac{1}{2} = 0,5$



» **Câu 25.** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông tâm O cạnh 2. Trên cạnh SB, SD lần lượt lấy điểm M, N sao cho $SM = 2MB$ và $SN = \frac{1}{3}SD$. Diện tích hình chiếu song song của tam giác $\triangle AMN$ lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương của đường thẳng SO bằng

Lời giải

✓ **Trả lời: 1**



Trong (SBD) vẽ $MP \parallel SO \Rightarrow P$ là hình chiếu song song của M lên $(ABCD)$ theo phương SO

Trong (SBD) vẽ $NQ \parallel SO \Rightarrow Q$ là hình chiếu song song của N lên $(ABCD)$ theo phương SO

$\Rightarrow$ Hình chiếu song song của tam giác $\triangle AMN$ lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương của đường thẳng SO là $\triangle APQ$



$$+ \text{ Vì } MP // SO \Rightarrow \frac{BM}{BS} = \frac{BP}{BO}$$

$$+ \text{ Ta có } SM = 2MB \Rightarrow BM = \frac{1}{3}BS \Rightarrow \frac{BM}{BS} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{BP}{BO} = \frac{1}{3} \Rightarrow OP = \frac{2}{3}OB \Rightarrow OP = \frac{1}{3}BD = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (1).$$

$$\text{Vì } NQ // SO \Rightarrow \frac{DN}{DS} = \frac{DQ}{DO}$$

$$\text{Ta có } SN = \frac{1}{3}SD \Rightarrow ND = \frac{2}{3}SD \Rightarrow \frac{ND}{SD} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{DQ}{DO} = \frac{2}{3} \Rightarrow DQ = \frac{2}{3}DO \Rightarrow OQ = \frac{1}{3}DO = \frac{1}{6}BD = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad (2).$$

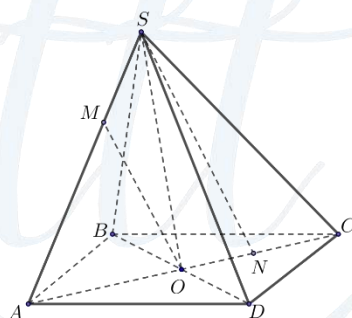
$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } PQ = OP + OQ = \sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow S_{\Delta APQ} = \frac{1}{2}AO.PQ = \frac{1}{2}\sqrt{2}.\sqrt{2} = 1$$

» **Câu 26.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $MA = 2MS$. Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$. Một phép chiếu song song theo phương MO lên mặt phẳng $(ABCD)$ biến điểm S thành điểm N . Tỉ số $\frac{CN}{CA}$ bằng

✎ **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0,25**



Trong mặt phẳng (SAC) kẻ SN song song OM với N thuộc AC .

Khi đó $N \in (ABCD)$ nên N là hình chiếu song song của S lên $(ABCD)$ theo phương OM .

$$\text{Xét } \Delta SAN \text{ ta có } OM // SN \Rightarrow \frac{AM}{AS} = \frac{AO}{AN} = \frac{2}{3} \quad (\text{định lý Thalès}).$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}AC}{AN} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AC}{AN} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{CN}{CA} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

----- Hết -----