

HỌC SINH:

LỚP:.....



TOÁN 12



VỞ BÀI HỌC

GIẢI TÍCH

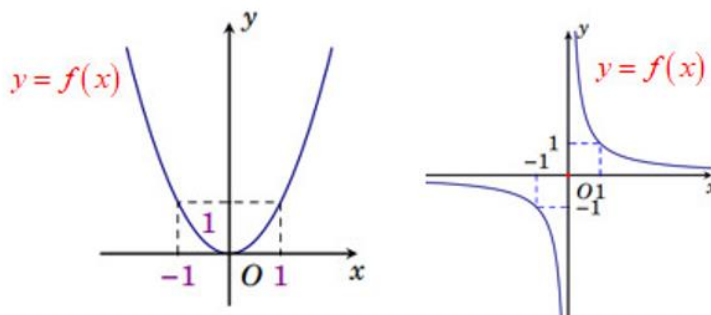


GIẢI TÍCH 12 – CHƯƠNG 1
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ
§1. SỰ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

A. PHẦN KIẾN THỨC CHÍNH
I. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

1. Hoạt động khởi động

* Trò chơi “Quan sát hình ảnh”. Mỗi nhóm viết lên giấy A4 các khoảng đồng biến, nghịch biến của của các hàm số tương ứng từ đồ thị sau:



2. Nhắc lại định nghĩa

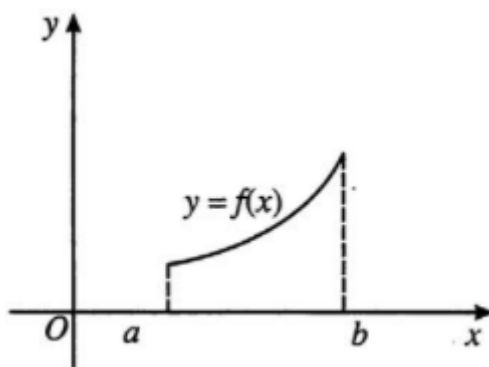
Kí hiệu K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng. Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên K .

$y = f(x)$ đồng biến trên $K \Leftrightarrow x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

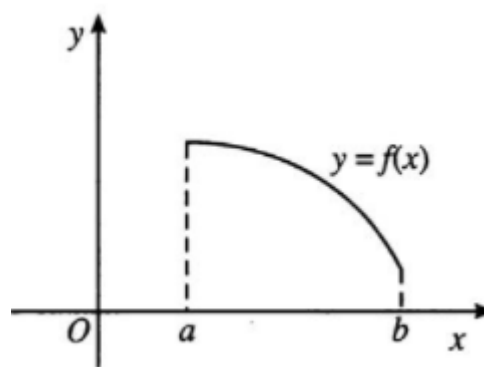
$y = f(x)$ nghịch biến trên $K \Leftrightarrow x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên khoảng K được gọi chung là hàm số đơn điệu trên K

*Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị của nó đi lên từ trái sang phải (Hình a), nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị của nó đi xuống từ trái sang phải (Hình b).



Hình a



Hình b

3. Tính đơn điệu và dấu của đạo hàm

Định lý: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K .

- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì $y = f(x)$ đồng biến trên K .
- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì $y = f(x)$ nghịch biến trên K .
- Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì $y = f(x)$ không đổi trên K .

*** Chú ý:** Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K . Nếu $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), $\forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến (nghịch biến) trên K .

4. Ví dụ: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số:

a) $y = 2x - 1$

b) $y = -x^2 + 2x$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

II. QUY TẮC XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1. Quy tắc

1. Tìm tập xác định. Tính $f'(x)$.
2. Tìm các điểm tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.
3. Sắp xếp các điểm đó theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
4. Kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

2. Ví dụ

Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

a) $y = x^3 - 3x + 2$

b) $y = \frac{x-1}{x+1}$

c) $y = x^4 - 2x^2 + 2$

d) $y = \frac{-x^2 + x - 7}{x - 2}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

[illegible]

I. Bài tập SGK

Bài 3/10. Chứng minh rằng hàm số: $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 1. [Mức độ 1] Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1			0	1			$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	-1			4	-1			$+\infty$

A. $(-\infty; -1)$. **B.** $(0; 1)$. **C.** $(-1; 1)$. **D.** $(-1; 0)$.

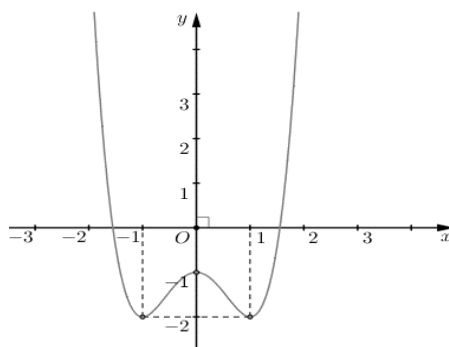
Câu 2. (Mức độ 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$		
y'			+		0		-		0		+

Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Câu 3. (Mức độ 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(-\infty; -1)$.
- B. $(-1; 1)$.
- C. $(-1; 0)$.
- D. $(0; 1)$.

Câu 4. (Mức độ 2) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x + 3 \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

- A. 5.
- B. 4.
- C. 3.
- D. 2.

Câu 5. (Mức độ 2) Cho hàm số $y = \frac{mx+9}{x+m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .

- A. 4.
- B. Vô số.
- C. 3.
- D. 5.

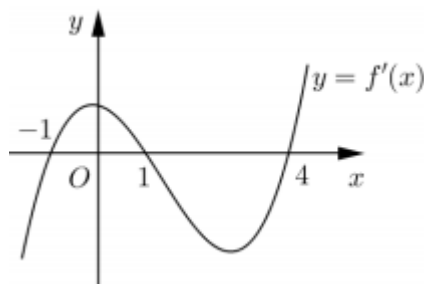
Câu 6. (Mức độ 2) Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx-4}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ là

- A. $(-2; 1]$.
- B. $(-2; 2)$.
- C. $(-2; -1]$.
- D. $(-2; -1)$.

Câu 7. (Mức độ 2) Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = \frac{x+4}{2x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-3; 4)$

- A. 1. B. 2. C. 3. D. Vô số.

Câu 8. (Mức độ 3) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng



- A. $(2; +\infty)$. B. $(-2; 1)$. C. $(-\infty; -2)$. D. $(1; 3)$.

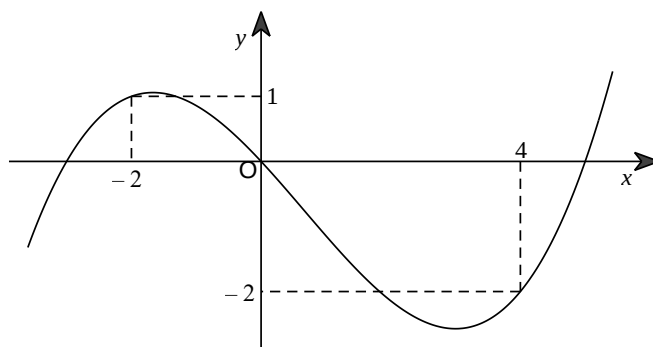
Câu 9. (Mức độ 3) Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Hàm số $y = 3f(x+2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; 0)$. C. $(0; 2)$. D. $(1; +\infty)$.

Câu 10. (Mức độ 3) Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = f(1-2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?



- A. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. B. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. C. $(-2; -1)$. D. $(2; 3)$.

Câu 11. (Mức độ 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'		-	0	+

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $(-1; +\infty)$. D. $(-\infty; -1)$.

Câu 12. (Mức độ 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-2		3		-2		$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

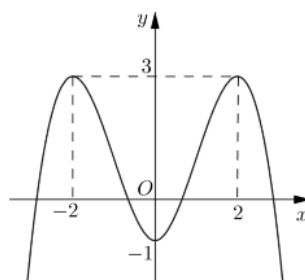
- A. $(-1; 0)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(0; 1)$.

Câu 13. (Mức độ 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$
y	$-\infty$	$+\infty$	4	$-\infty$

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
 B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
 C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
 D. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ và $(3; +\infty)$.

Câu 14. (Mức độ 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?



- A. $(-2; 0)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(-2; 2)$. D. $(0; 2)$.

Câu 15. (Mức độ 1) Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
 B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Câu 16. (Mức độ 1) Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. $y = x^4 + 3x^2$.

B. $y = \frac{x-2}{x+1}$.

C. $y = 3x^3 + 3x - 2$.

D. $y = 2x^3 - 5x + 1$.

Câu 17. (Mức độ 1) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 18. (Mức độ 2) Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. Không có giá trị m thỏa mãn.

B. $m \neq 1$.

C. $m = 1$.

D. Luôn thỏa mãn với mọi m .

Câu 19. (Mức độ 2) Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2-m}{x+1}$ nghịch biến trên các khoảng mà nó xác định?

A. $m \leq 1$.

B. $m \leq -3$.

C. $m < -3$.

D. $m < 1$.

Câu 20. (Mức độ 2) Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x+4}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -7)$ là

A. $[4; 7)$.

B. $(4; 7]$.

C. $(4; 7)$.

D. $(4; +\infty)$.

Câu 21. (Mức độ 2) Xác định các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - m$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$?

A. $m \geq 0$.

B. $m < \frac{1}{2}$.

C. $m \leq 0$.

D. $m \geq \frac{1}{2}$.

Câu 22. (Mức độ 2) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)^3$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1; 3)$.

B. $(-1; 0)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(-2; 0)$.

Câu 23. (Mức độ 2) Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = x^2$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên $(0; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Câu 24. (Mức độ 3) Cho hàm số $f(x)$ có bảng dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Hàm số $y = f(5 - 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

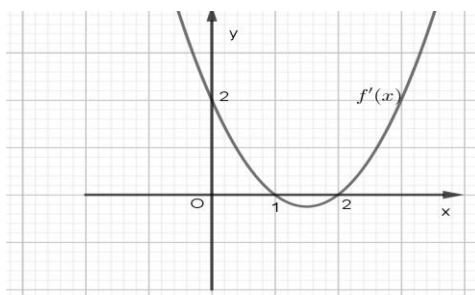
A. $(3; 5)$.

B. $(5; +\infty)$.

C. $(2; 3)$.

D. $(0; 2)$.

Câu 25. (Mức độ 3) Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $y = f(2 - x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(-\infty; 0)$.

B. $(0; 1)$.

C. $(1; 2)$.

D. $(0; +\infty)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

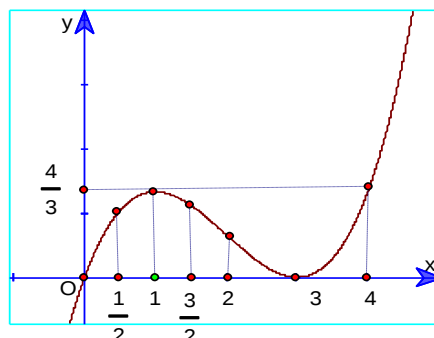
.....

GIẢI TÍCH 12 – CHƯƠNG 1

§2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

I. KHÁI NIỆM CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU

Cho đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{3}x(x-3)^2$ có hình vẽ



Dựa vào đồ thị, hãy chỉ ra các điểm tại đó hàm số có giá trị lớn nhất trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$?

.....

.....

.....

Dựa vào đồ thị, hãy chỉ ra các điểm tại đó hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; 4\right)$?

.....

.....

.....

Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$) và $x_0 \in (a; b)$.

Nếu tồn tại số h sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0 .

Nếu tồn tại số h sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

Chú ý:

Nếu $f'(x_0) \neq 0$ thì x_0 không phải là điểm cực trị.

Hãy học cho chính bản thân mình vì đây là năm học quyết định cho tương lai

Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0 , thì x_0 được gọi là một **điểm cực đại của hàm số** $f(x)$, $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại của hàm số** $f(x)$.

Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 , x_0 được gọi là một **điểm cực tiểu của hàm số** $f(x)$, $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu của hàm số** $f(x)$.

- Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị của hàm số** và điểm cực trị phải là một điểm trong tập xác định K.
- Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **giá trị cực trị (hay cực trị)**.

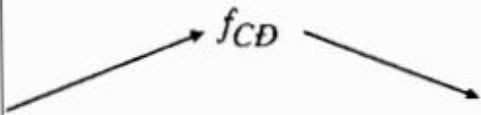
II - ĐIỀU KIỆN ĐỦ ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ

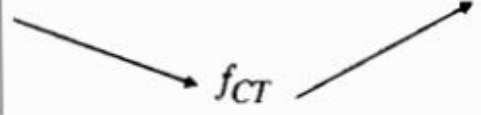
ĐỊNH LÝ 1

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $K = (x_0 - h; x_0 + h)$ và có đạo hàm trên K hoặc trên $K \setminus x_0$, với $h > 0$.

a) Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

b) Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$			

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$			

Ví dụ 1: Tìm các điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - x^2 - x + 3$.

.....

.....

.....

.....

III - QUY TẮC TÌM CỰC TRỊ

Áp dụng Định lý 1, ta có quy tắc tìm cực trị sau đây.

QUY TẮC I

Bước 1. Tìm tập xác định.

Bước 2. Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 3. Lập bảng biến thiên.

Bước 4. Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

Ví dụ 2: Tìm cực trị của các hàm số sau :

1) $y = x^3 - 3x + 1$ 2) $y = -x^4 + 4x^2 + 2$ 3) $y = \frac{x+1}{2x-3}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ĐỊNH LÝ 2

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$, với $h > 0$. Khi đó :

a) Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu :

b) Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.

Áp dụng Định lý 2, ta có quy tắc sau đây để tìm các điểm cực trị của một hàm số.

QUY TẮC II

1. Tìm tập xác định.
2. Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ và kí hiệu $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ là các nghiệm của nó.
3. Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.
4. Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i .

Ví dụ: Tìm cực trị của hàm số $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 6$.

.....

.....

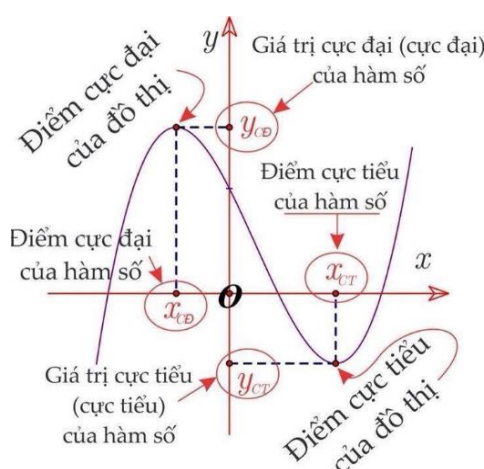
.....

.....

.....

CHÚ Ý

- Giá trị cực đại (cực tiểu) $f(x_0)$ của hàm số f nói chung không phải là giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) của hàm số f trên tập xác định K mà $f(x_0)$ chỉ là giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) của hàm số f trên khoảng $a, b \subset K$ và a, b chứa x_0 .
- Nếu $f'(x)$ không đổi dấu trên tập xác định K của hàm số f thì hàm số f không có cực trị.
- Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì người ta nói rằng hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 và điểm có tọa độ $x_0; f(x_0)$ được gọi là **điểm cực trị của đồ thị hàm số f** .



B. BÀI TẬP

DẠNG 1

1. Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y = -x^3 + 3x - 4$.

Ví dụ 2. Tìm cực trị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

Ví dụ 3. Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{x^2 + 4}{x}$.

Ví dụ 4. Tìm cực trị của hàm số $y = x + \sqrt{2x - x^2}$.

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giá trị cực đại y_{CD} của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ là?

- A. $y_{CD} = 4$. B. $y_{CD} = 1$. C. $y_{CD} = 0$. D. $y_{CD} = -1$.

Câu 2: Tìm điểm cực trị x_0 của hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$.

- A. $x_0 = -3$ hoặc $x_0 = -\frac{1}{3}$. B. $x_0 = 0$ hoặc $x_0 = \frac{10}{3}$.

C. $x_0 = 0$ hoặc $x_0 = -\frac{10}{3}$. **D.** $x_0 = 3$ hoặc $x_0 = \frac{1}{3}$.

Câu 3: Tìm điểm cực đại x_0 của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.

A. $x_0 = -1$. **B.** $x_0 = 0$. **C.** $x_0 = 1$. **D.** $x_0 = 2$.

Câu 4: Tìm các điểm cực trị của đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2$.

A. $(0; 0)$ hoặc $(1; -2)$. **B.** $(0; 0)$ hoặc $(2; 4)$.
C. $(0; 0)$ hoặc $(2; -4)$. **D.** $(0; 0)$ hoặc $(-2; -4)$.

Câu 5: Biết rằng hàm số $y = x^3 + 4x^2 - 3x + 7$ đạt cực tiểu tại x_{CT} . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_{CT} = \frac{1}{3}$. **B.** $x_{CT} = -3$. **C.** $x_{CT} = -\frac{1}{3}$. **D.** $x_{CT} = 1$.

Câu 6: Gọi y_{CD} , y_{CT} lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $y_{CT} = 2y_{CD}$. **B.** $y_{CT} = \frac{3}{2}y_{CD}$. **C.** $y_{CT} = y_{CD}$. **D.** $y_{CT} = -y_{CD}$.

Câu 7: Gọi y_1 , y_2 lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$. Tính $P = y_1 \cdot y_2$.

A. $P = -302$. **B.** $P = -82$. **C.** $P = -207$. **D.** $P = 25$.

Câu 8: Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 3$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.** Đồ thị hàm số có 1 điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.
B. Đồ thị hàm số có 1 điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.
C. Đồ thị hàm số có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.
D. Đồ thị hàm số có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại.

DẠNG 2

1. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ với bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
y	$+\infty$					$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** Hàm số có ba giá trị cực trị. **B.** Hàm số có ba điểm cực trị.
C. Hàm số có hai điểm cực trị. **D.** Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$.

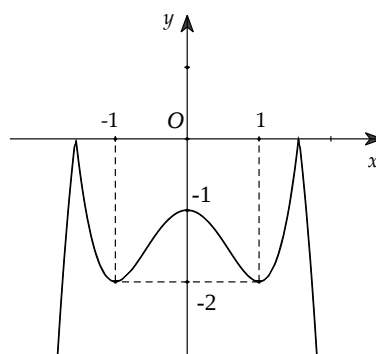
Ví dụ 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	x_0	x_1	x_2	$+\infty$
y'	$-$	$+$	0	$-$	$+$
y	$+\infty$			$-\infty$	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

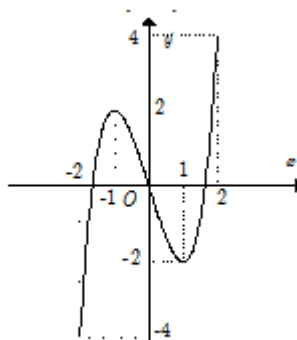
- A.** Hàm số có hai điểm cực đại, một điểm cực tiểu.
B. Hàm số có một điểm cực đại, không có điểm cực tiểu.
C. Hàm số có một điểm cực đại, hai điểm cực tiểu.
D. Hàm số có một điểm cực đại, một điểm cực tiểu.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?



- A.** 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

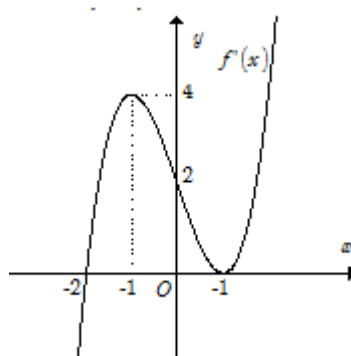


- A. $x = -2$. B. $x = -1$. C. $x = 1$. D. $x = 2$.

Ví dụ 6: Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^5$. Hỏi hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



- A. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -1$.
- B. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.
- C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = -2$.
- D. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -2$.

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{x_1\}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
y'		+	-	+
y				

$-\infty$ $\nearrow$ $f(x_2)$ $\nearrow$ $+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** Hàm số đã cho có một điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.
- B.** Hàm số đã cho không có cực trị.
- C.** Hàm số đã cho có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.
- D.** Hàm số đã cho có một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.

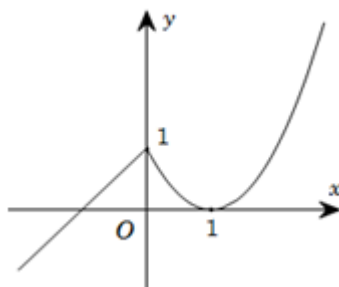
Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			5		1		$+\infty$
	$-\infty$						

Hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

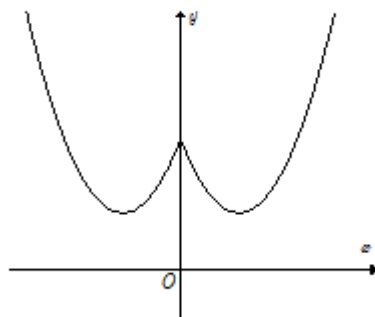
- A.** 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?



- A.** 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

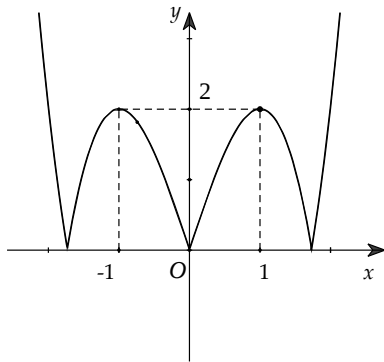
Câu 4: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?



- A.** 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

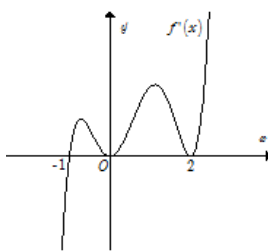
Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

Hãy học cho chính bản thân mình vì đây là năm học quyết định cho tương lai



- A.** 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 6: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng K . Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên khoảng K . Hỏi hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

DẠNG 3

1. Các ví dụ

Ví dụ 1: Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại điểm $x = 3$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3mx^2 + (m-1)x + 2$. Tìm m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Ví dụ 3. Tìm m để hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị đó, tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 3$.

Ví dụ 4. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + 3m-2$ có ba điểm cực trị.

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 6mx + m$ có hai điểm cực trị.

- A.** $m \in (0; 2)$. **B.** $m \in (-\infty; 0) \cup (8; +\infty)$.
C. $m \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. **D.** $m \in (0; 8)$.

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 + x^2 + x + 2017$ có cực trị.

- A.** $m \in (-\infty; 1]$. **B.** $m \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$.

C. $m \in (-\infty; 0) \cup (0; 1]$.

D. $m \in (-\infty; 1)$.

Câu 3: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = (m-3)x^3 - 2mx^2 + 3$ không có cực trị.

A. $m = 3$.

B. $m = 0, m = 3$.

C. $m = 0$.

D. $m \neq 3$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(3m+2)x^2 + (2m^2+3m+1)x - 4$. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị là $x = 3$ và $x = 5$.

A. $m = 0$.

B. $m = 1$.

C. $m = 2$.

D. $m = 3$.

Câu 5: Biết rằng hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx$ ($a \neq 0$) nhận $x = -1$ là một điểm cực trị. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a + c = b$.

B. $2a - b = 0$.

C. $3a + c = 2b$.

D. $3a + 2b + c = 0$.

Câu 6: Biết rằng hàm số $y = 3x^3 - mx^2 + mx - 3$ có một điểm cực trị $x_1 = -1$. Tìm điểm cực trị còn lại x_2 của hàm số.

A. $x_2 = \frac{1}{4}$.

B. $x_2 = \frac{1}{3}$.

C. $x_2 = -\frac{1}{3}$.

D. $x_2 = -2m - 6$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 5$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -1$.

A. $m = 1$.

B. $m = -3$.

C. $m = 1, m = -3$.

D. $-3 \leq m \leq 1$.

DẠNG 4

1. Các ví dụ

Ví dụ 1. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(-1; 1)$ và vuông góc với đường thẳng đi qua điểm cực trị của (C): $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 3m(m+2)x - 1$ (1) (m là tham số thực).

1) Tìm m để hàm số (1) có hai cực trị cùng dấu.

2) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị, hãy viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị đó.

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 + 1$.

A. $y = x - 1$.

B. $y = x + 1$.

C. $y = -x + 1$.

D. $y = -x - 1$.

Câu 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

A. $y = -8x + m$.

B. $y = -8x + m - 3$.

C. $y = -8x + m + 3$.

D. $y = -8x - m + 3$.

Câu 3: Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (2m-1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

A. $m = -\frac{1}{2}$.

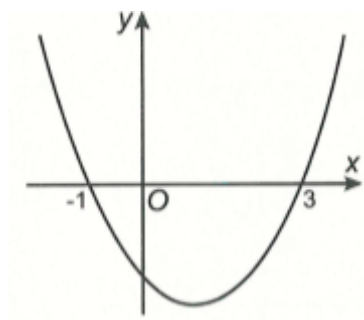
B. $m = \frac{3}{2}$.

C. $m = \frac{1}{4}$.

D. $m = \frac{3}{4}$.

A. DẠNG 5. BÀI TẬP DÀNH CHO HỌC SINH ĐIỂM 8+, 9+

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(3-x^2)$ đạt cực tiểu tại điểm

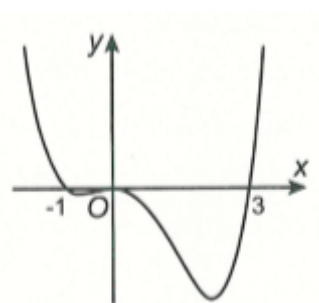
A. $x = 0$.

B. $x = 2$.

C. $x = \pm 2$.

D. $x = -2$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số cực trị của hàm số $h(x) = f(x^2 - 2x)$ là

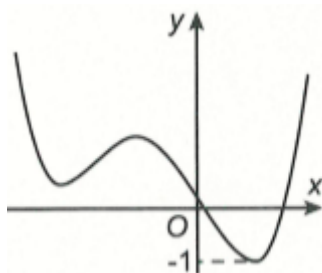
A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x-2)$ có đồ thị như hình dưới. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là



A. 1.

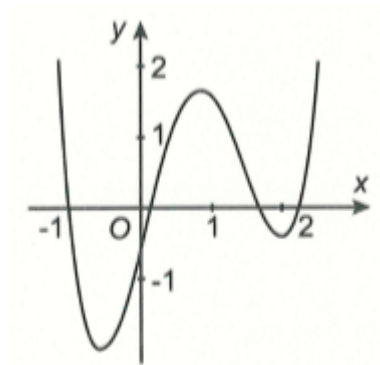
B. 2.

C. 0.

D. 3.

Hãy học cho chính bản thân mình vì đây là năm học quyết định cho tương lai

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y = f'(x-2)$ như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y = 2f(x-3) - 4$ là



A.4.

B. 5.

C.3.

D. 2.

This image shows a full page of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

GIẢI TÍCH 12 – CHƯƠNG 1
§3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

A. PHẦN KIỂM TRA KIẾN THỨC

B. PHẦN KIẾN THỨC CHÍNH

I. ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

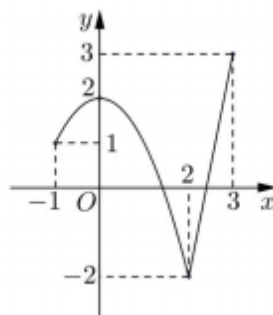
a) Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \leq M$ với mọi x thuộc D và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.

Kí hiệu $M = \max_D f(x)$

b) Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \geq m$ với mọi x thuộc D và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$.

Kí hiệu $m = \min_D f(x)$

➤ **VD1:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của $M - m$ bằng



A. 1.

B. 4.

C. 5.

D. 0.

.....

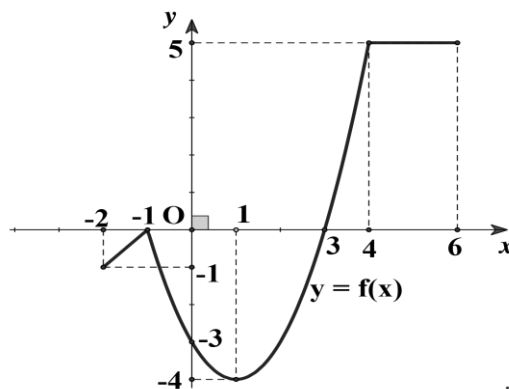
.....

.....

.....

.....

➤ **VD2:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 6]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2; 6]$. Giá trị của $P = M - m$ bằng

- A.** $P = 9$. **B.** $P = -8$. **C.** $P = -9$. **D.** $P = 8$.

.....

.....

.....

.....

.....

II. CÁCH TÍNH GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT TRÊN MỘT ĐOẠN

1. Định lý

Mọi hàm số liên tục trên một đoạn đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

2. Quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số liên tục trên một đoạn

Bước 1: Tìm các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ trên khoảng $(a; b)$,

tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 2: Tính $f(a); f(b); f(x_1); f(x_2); \dots; f(x_n)$.

Bước 3: Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên.

Bước 4: Kết luận $M = \max_{[a;b]} f(x); m = \min_{[a;b]} f(x)$.

2.1. Nhận xét

a) Nếu đạo hàm $f'(x)$ giữ nguyên dấu trên đoạn $[a; b]$ thì hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên cả đoạn. Do đó, $f(x)$ đạt được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất tại các đầu mút của đoạn $[a; b]$.

b) Nếu chỉ có một số hữu hạn các điểm $x_i (x_i < x_{i+1})$ mà tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc không xác định thì hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên mỗi khoảng $(x_i; x_{i+1})$. Rõ ràng giá trị lớn nhất (giá trị

nhỏ nhất) của hàm số trên đoạn $[a;b]$ là số lớn nhất (số nhỏ nhất) trong các giá trị của hàm số tại hai đầu mút a, b và tại các điểm x_i nói trên.

c) Hàm số liên tục trên một khoảng có thể không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó.

3. Ví dụ

➤ **VD3:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 10x^2 + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

- A.** 2. **B.** -23. **C.** -22. **D.** -7.

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **VD4:** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-3; 3]$ là

- A.** 4. **B.** -16. **C.** 20. **D.** 0.

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **VD5:** Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \frac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0; 2]$

Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$y = \frac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0; 2]$. Tính giá trị của $P = M.m$ bằng

- A.** $P = -\frac{5}{3}$. **B.** $P = \frac{1}{3}$. **C.** $P = -5$. **D.** $M = -\frac{14}{3}$

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **VD6:** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{4 - x^2}$ trên tập xác định.

A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 1.

.....

.....

.....

.....

.....

III. ỨNG DỤNG GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT TRÊN KHOẢNG, ĐOẠN CHO TRƯỚC

1. BÀI TOÁN. ĐỊNH GIÁ TRỊ THAM SỐ ĐỂ GTLN-GTNN CỦA HÀM SỐ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

- Bước 1.** Tìm nghiệm $x_i (i = 1, 2, \dots)$ của $y' = 0$ thuộc $[a; b]$
- Bước 2.** Tính các giá trị $f(x_i); f(a); f(b)$ theo tham số
- Bước 3.** So sánh các giá trị, suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.
- Bước 4.** Biện luận m theo giả thuyết đề để kết luận.

Lưu ý:

- a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a; b]$ thì
- $$\text{Max}_{[a;b]} f(x) = f(b); \text{Min}_{[a;b]} f(x) = f(a)$$
- b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[a; b]$ thì
- $$\text{Max}_{[a;b]} f(x) = f(a); \text{Min}_{[a;b]} f(x) = f(b)$$

2. Ví dụ

➤ **VD7:** Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ (Với m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[2;4]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m > 4$. **B.** $3 < m \leq 4$. **C.** $m < -1$. **D.** $1 \leq m < 3$.

.....

.....

.....

.....

.....

- **VD8:** Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (Với m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $m > 4$. **B.** $2 < m \leq 4$. **C.** $m \leq 0$. **D.** $0 < m \leq 2$.

.....

.....

.....

.....

.....

- **VD9:** Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - m$ (với m là tham số thực). Trên $[-1;1]$ hàm số có giá trị nhỏ nhất là -1 . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m ?

- A.** $m = -6$. **B.** $m > -3$. **C.** $m = -4$. **D.** $1 < m \leq 3$.

.....

.....

.....

.....

.....

- **VD10:** Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A.** 243 (m/s). **B.** 27 (m/s). **C.** 144 (m/s). **D.** 36 (m/s).

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

I. TỰ LUẬN

Bài 1: Tính giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

- a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên các đoạn $[-4;4]$ và $[0;5]$;
- b) $y = x^4 - 3x^2 + 2$ trên các đoạn $[0;3]$ và $[2;5]$;

c) $y = \frac{2-x}{1-x}$ trên các đoạn $[2;4]$ và $[-3;-2]$;

d) $y = \sqrt{5-4x}$ trên đoạn $[-1;1]$.

Bài 2: Trong số các hình chữ nhật cùng có chu vi 16 cm, hãy tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

Bài 3: Trong tất cả các hình chữ nhật cùng có diện tích 48 m^2 , hãy xác định hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất.

Bài 4: Tính giá trị lớn nhất của các hàm số sau:

a) $y = \frac{4}{1+x^2}$;

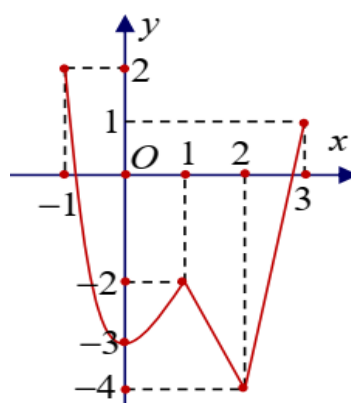
b) $y = 4x^3 - 3x^4$;

c) $y = |x|$;

d) $y = x + \frac{4}{x} (x > 0)$.

II. TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M - m$ là



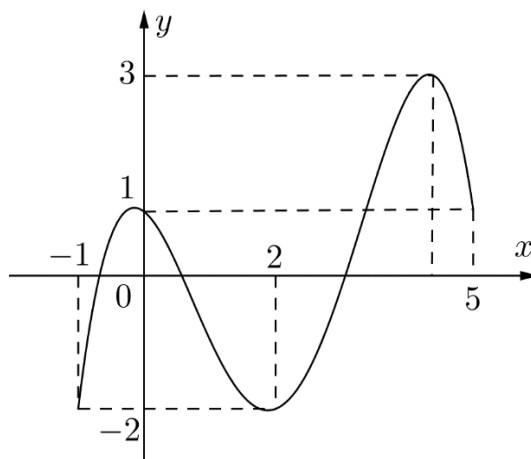
A. 2.

B. 4.

C. 6.

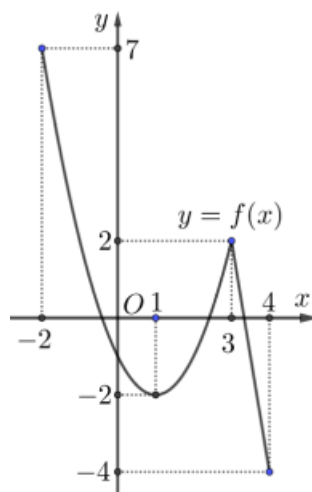
D. 5.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;5]$ và có đồ thị trên đoạn $[-1;5]$ như hình vẽ bên dưới. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;5]$ bằng



- A. -1. B. 4. C. 1. D. 2.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị trên đoạn $[-2; 4]$ như hình vẽ bên. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 4]$ bằng



- A. 5. B. 3. C. 0. D. -2.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1; 3]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

x	-1	0	2	3	
y'	+	0	-	0	+
y	0	5	1	4	

- A. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(0)$. B. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(3)$. C. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(2)$. D. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(-1)$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như sau. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$. Tính $M + m$.

x	-3	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	3	0	2	1

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 4$ trên đoạn $[0; 2]$.

- A. $\min_{[0;2]} y = 2$. B. $\min_{[0;2]} y = 0$. C. $\min_{[0;2]} y = 1$. D. $\min_{[0;2]} y = 4$.

Câu 7. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 18$ trên đoạn $[-1; 3]$ bằng

- A. 2. B. 11. C. 27. D. 1.

Câu 8. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - 4x}{2x + 1}$ trên đoạn $[0; 3]$.

- A. $\min_{[0;3]} y = 0$. B. $\min_{[0;3]} y = -\frac{3}{7}$. C. $\min_{[0;3]} y = -4$. D. $\min_{[0;3]} y = -1$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Kí hiệu $M = \max_{[0;2]} f(x)$, $m = \min_{[0;2]} f(x)$. Khi đó $M + m$ bằng:

- A. $\frac{-4}{3}$. B. $\frac{-2}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. 1.

Câu 10. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x - 4\sqrt{6-x}$ trên $[-3; 6]$. Tổng $M + m$ có giá trị là

- A. -12. B. -6. C. 18. D. -4.

Câu 11. Cho hàm số $y = x^3 + 2(m^2 + 1)x + 3 + m$ (với m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có $\max_{[0;1]} y - 3\min_{[0;1]} y = 9$. Tổng các phần tử của S là

- A. 2. B. -3. C. 1. D. -1.

Câu 12. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2} + m$ là $3\sqrt{2}$. Giá trị của m là

- A. $m = \sqrt{2}$. B. $m = 2\sqrt{2}$. C. $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $m = -\sqrt{2}$.

Câu 13. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{3\sin x + 2}{\sin x + 1}$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Khi đó giá trị của $M^2 + m^2$ là

- A. $\frac{31}{2}$. B. $\frac{11}{2}$. C. $\frac{41}{4}$. D. $\frac{61}{4}$.

Câu 14. Ông A dự định sử dụng hết $5 m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $1,01\text{ m}^3$. **B.** $0,96\text{ m}^3$. **C.** $1,33\text{ m}^3$. **D.** $1,51\text{ m}^3$.

A. $t=1$. **B.** $t=4$. **C.** $t=2$. **D.** $t=0$.

This image shows a full page of white paper designed for handwriting practice. It features approximately 20 evenly spaced horizontal dotted lines running from left to right across the entire width of the page. There are no margins, text, or other markings present.

GIẢI TÍCH 12 – CHƯƠNG 1

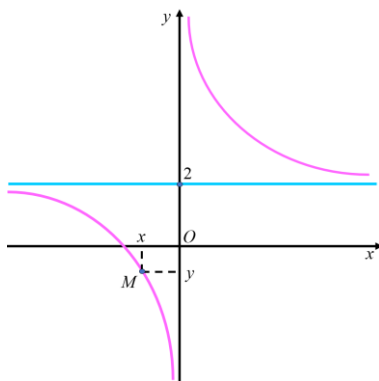
§4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN

A. PHÂN KIẾN THỨC CHÍNH

I. ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG

1. Định nghĩa

➤ **VD MỞ ĐẦU:** Quan sát đồ thị (C) của hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ ở hình vẽ dưới đây:



Nêu nhận xét về khoảng cách từ điểm $M(x; y) \in (C)$ đến đường thẳng $\Delta: y = 2$ khi $|x| \rightarrow +\infty$ và kiểm tra nhận xét trên bằng cách tính giới hạn.

.....

.....

.....

.....

.....

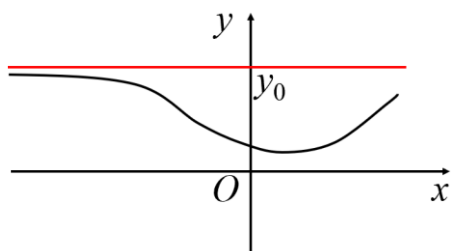
➤ **Định nghĩa:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$$

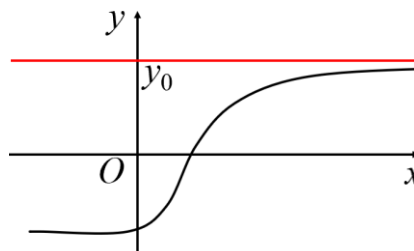
➤ **Chú ý:** Nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ thì ta viết chung là $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$.

➤ **Minh họa**

Khi $x \rightarrow -\infty$



Khi $x \rightarrow +\infty$



2. Ví dụ

➤ **VD1:** Tìm các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-2}$?

.....

.....

.....

.....

.....

II. ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐỨNG

1. Định nghĩa:

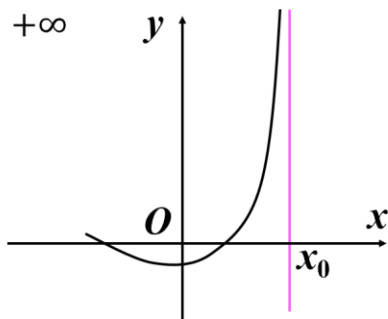
Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

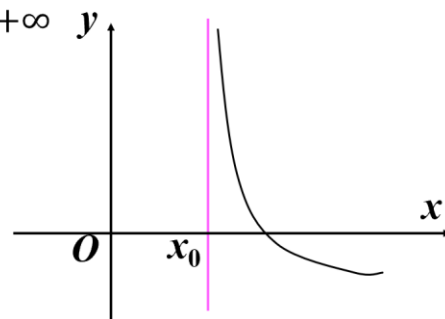
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$

➤ **Minh họa:**

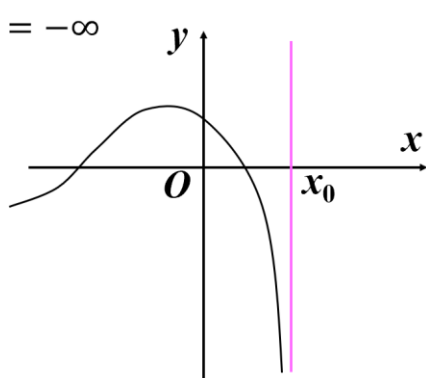
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$



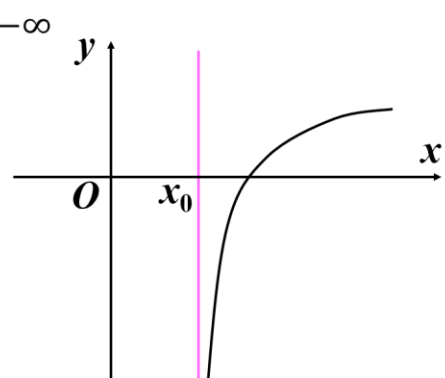
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$



2. Ví dụ

➤ **VD1:** Tìm các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x+2}$?

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **VD2:** Tìm số đường tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số

$$y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}?$$

.....

.....

.....

.....

B. LUYỆN TẬP

I. Chữa bài tập SGK

Bài 1 trang 30 -SGK: Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số:

- a) $y = \frac{x}{2-x}$;
- b) $y = \frac{-x+7}{x+1}$;
- c) $y = \frac{2x-5}{5x-2}$;
- d) $y = \frac{7}{x} - 1$.

Bài 2 trang 30 - SGK: Tìm các tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số:

- a) $y = \frac{2-x}{9-x^2}$;
- b) $y = \frac{x^2+x+1}{3-2x-5x^2}$;
- c) $y = \frac{x^2-3x+2}{x+1}$;
- d) $y = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$.

II. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. [Mức độ 1] Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một tiệm cận ngang là trục hoành.

B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một tiệm cận đứng là đường thẳng $y = 0$.

D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ nằm phía trên trục hoành.

Câu 2. [Mức độ 1] Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{5}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình?

A. $y = 5$.

B. $x = 0$.

C. $x = 1$.

D. $y = 0$.

Câu 3. [Mức độ 2] Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x + 2}{-5x^2 - 2x + 3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Câu 4. [Mức độ 2] Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 - 1}}$ bằng

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Câu 5. [Mức độ 3] Khoảng cách từ điểm $A(-5;1)$ đến đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+2x}$ là:

A. 5.

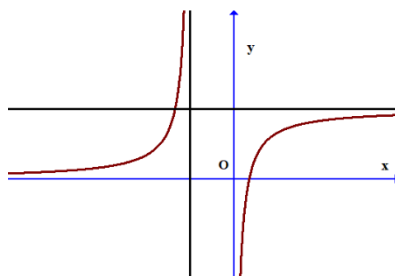
B. $\sqrt{26}$.

C. 9.

D. 1.

Câu 6. Cho đồ thị một hàm số có hình vẽ như hình dưới đây.

Hỏi đồ thị trên có bao nhiêu đường tiệm cận?



A. 3.

B. 4.

C. 0.

D. 2.

Câu 1. [Mức độ 1] Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là $x = 1$ và $x = -1$.

B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = -1$.

Câu 2. [Mức độ 1] Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là

A. $x = 2$ và $y = 1$.

B. $x = 1$ và $y = -3$.

C. $x = -1$ và $y = 2$.

D. $x = 1$ và $y = 2$.

Câu 3. [Mức độ 2] Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A.** 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2

Câu 4. [Mức độ 2] Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x^2-2x-3}$. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

- A.** 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 5. [Mức độ 3] Có bao nhiêu số nguyên m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2 + 2mx + 3m^2 - m - 1}$ có ba đường tiệm cận?

- A.** 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 7.

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

GIẢI TÍCH 12 – CHƯƠNG 1

§5. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

A. PHẦN KIẾN THỨC CHÍNH

Kiểm tra bài cũ:

I. SƠ ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ

1. Tập xác định

2. Sự biến thiên

- Tính y' .
- Tìm các điểm tại đó $y' = 0$ hoặc y' không xác định.
- Tìm các giới hạn đặc biệt và tiệm cận (nếu có).
- Lập bảng biến thiên.
- Ghi kết quả về khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số.

3. Đồ thị

- Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ.
- Xác định tính đối xứng của đồ thị (nếu có).
- Xác định tính tuần hoàn (nếu có) của hàm số.
- Dựa vào bảng biến thiên và các yếu tố xác định ở trên để vẽ.

II. KHẢO SÁT MỘT SỐ HÀM ĐA THỨC, HÀM PHÂN THỨC HỮU TỶ

➤ **Dạng ❶:** Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$

1. Ví dụ

- **VD 1:** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$

Lời giải

+ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

+ Đạo hàm: $y' = 3x^2 + 6x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$$

+ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

+ BBT

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y		$-\infty$	$\nearrow$ 0	$\searrow$ -4	$\nearrow$	$+\infty$

+ Khoảng đơn điệu:

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -2), (0; +\infty)$

Hàm số nghịch biến trên $(-2; 0)$

+ Cực trị:

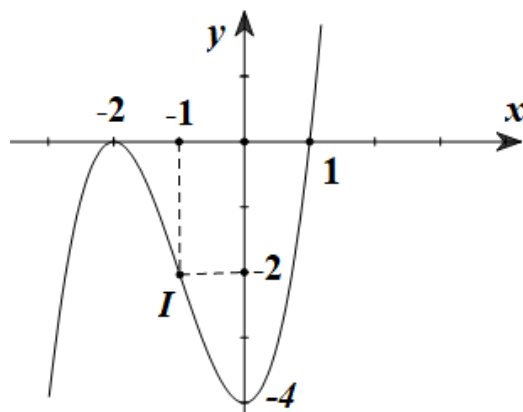
Hàm số đạt CĐ tại $x = -2$ với $y_{CD} = 0$

Hàm số đạt CT tại $x = 0$ với $y_{CT} = -4$

+ Đồ thị:

Giao với trục Oy: $(0; -4)$

Giao với trục hoành: $(-2; 0); (1; 0)$



➤ **Ví dụ 2:** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 2$;

Lời giải

+ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

+ Đạo hàm: $y' = -3(x-1)^2 - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

+ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$

+ BBT

x	$-\infty$	$+\infty$
y'	-	
y	$+\infty$	$-\infty$

+ Khoảng đơn điệu:

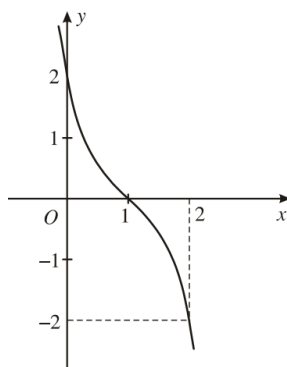
Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

+ Cực trị: Hàm số không có cực trị.

+ Đồ thị:

Giao với trục Oy: $(0; 2)$

Giao với trục hoành: $(1; 0)$



➤ **Ví dụ 3:** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + 1$

Lời giải

+ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

+ Đạo hàm: $y' = x^2 - 2x + 1 \geq 0, \forall x \neq 1$

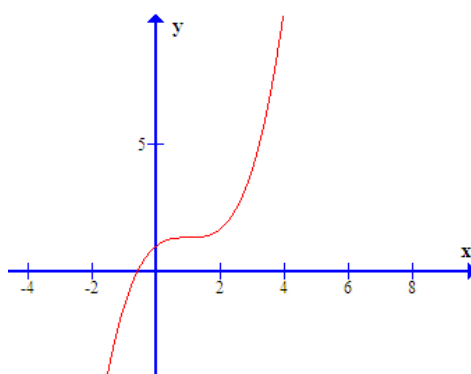
$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

+ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

+ BBT:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+	0	+
y	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$

+ Đồ thị:



➤ **Ví dụ 4:** Bảng biến thiên dưới đây là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D?

Hãy học cho chính bản thân mình vì đây là năm học quyết định cho tương lai

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		-1		3		$-\infty$

- A.** $y = -x^3 + 3x - 1$. **B.** $y = x^3 - 3x + 1$. **C.** $y = x^3 - 3x^2 - 1$. **D.** $y = x^3 + 3x + 1$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

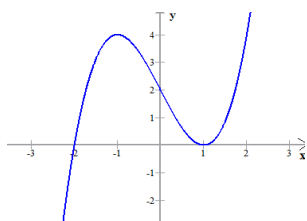
.....

.....

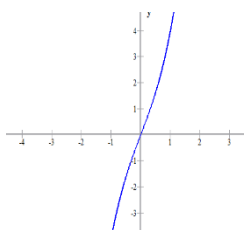
.....

➤ **Ví dụ 5:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$. Đồ thị của hàm số là hình vẽ nào bên dưới?

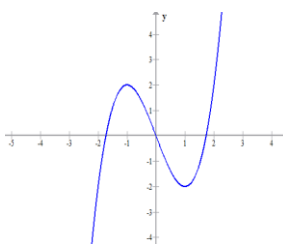
A.



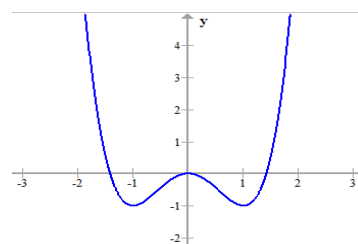
B.



C.



D.



.....

.....

.....

.....

.....

2. Minh hoạ đồ thị của hàm số bậc 3

	$a > 0$	$a < 0$
$y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = b^2 - 3ac > 0$		
$y' = 0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = b^2 - 3ac = 0$		
$y' = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = b^2 - 3ac < 0$		

Chú ý: Điểm đối xứng của hàm bậc 3 là:.....

3. Bài tập củng cố:

Câu 1. Bảng biến thiên dưới đây là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D?

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	20	-7	$+\infty$	

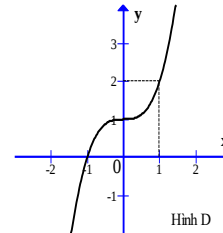
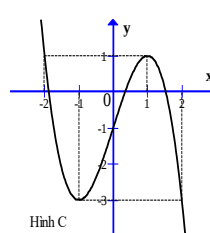
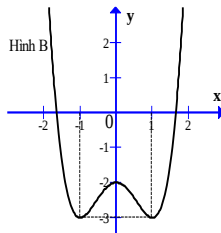
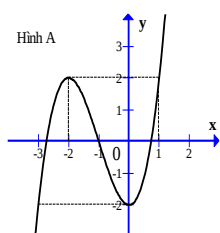
A. $y = -2x^3 - 3x^2 + 12x$.

B. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$.

C. $y = -2x^4 - 3x^2 + 12$.

D. $y = 2x^3 - 3x^2 + 12$.

Câu 2. Trong 4 đồ thị được cho trong 4 hình A, B, C, D dưới đây, đồ thị nào là đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$?



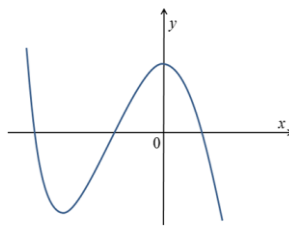
A. Hình A.

B. Hình B.

C. Hình C.

D. Hình D.

Câu 3. Đồ thị trong hình là của một hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C và D . Hàm số đó là hàm số nào ?



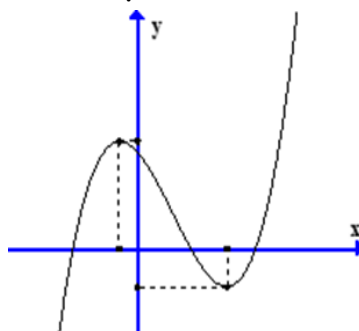
A. $f(x) = -x^3 - 3x^2 - 3$.

B. $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 3$.

C. $f(x) = -x^4 - 3x^2 + 3$.

D. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

Câu 4. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

B. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

D. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$, $f(1) = -3$ và đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2. Tính $T = a + b + c$

A. $T = 9$.

B. $T = 1$.

C. $T = -2$.

D. $T = -4$.

Câu 6. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		x_1		x_2		$+\infty$
y'		-		-	0	+	0	-	
y									

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $b < 0, c > 0$.

B. $b > 0, c < 0$.

C. $b > 0, c > 0$.

D. $b < 0, c < 0$.

➤ **Dạng ❷:** Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$).

1. Ví dụ

➤ **VD 1:** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

Lời giải:

+ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

+ Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 4x$

Hãy học cho chính bản thân mình vì đây là năm học quyết định cho tương lai

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

+ Giới hạn tại vô cực: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

+ BBT:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	-	0	+	0	-	+
y	$+\infty$		-3		$+\infty$	

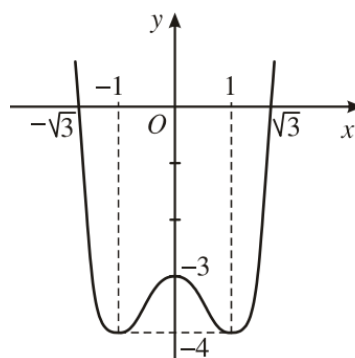
The graph shows the derivative y' as a function of x . The curve is a W-shape with a local maximum at $x=0$ ($y=-3$) and local minima at $x=-1$ and $x=1$ ($y=-4$). Arrows indicate the direction of the function y : from $+\infty$ down to -4 at $x=-1$, up to -3 at $x=0$, down to -4 at $x=1$, and up to $+\infty$ as x approaches $+\infty$.

+ Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$

Hàm số đồng biến trên $(-1; 0), (1; +\infty)$

+ Cực trị: CT $(\pm 1; -4)$ CĐ $(0; -3)$

+ Đồ thị:



➤ **VD 2:** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = -\frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{3}{2}$.

Lời giải:

+ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

+ Đạo hàm: $y' = -2x^3 - 2x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

+ Giới hạn tại vô cực: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = -\infty$

+ BBT:

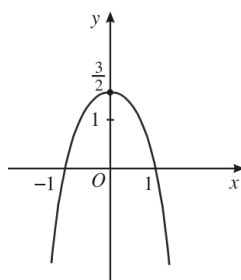
Hãy học cho chính bản thân mình vì đây là năm học quyết định cho tương lai

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	+	0	-
y	$-\infty \nearrow \frac{3}{2} \searrow -\infty$		

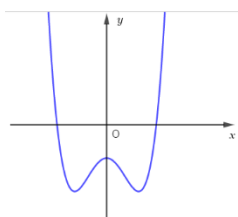
+ Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$

+ Cực trị: CĐ $(0; \frac{3}{2})$

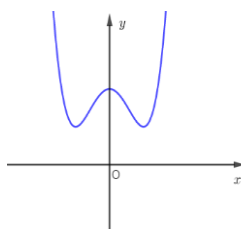
+ Đồ thị:



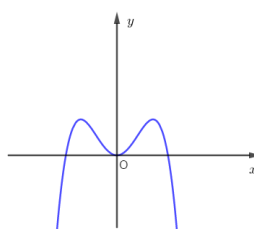
➤ **VD 3:** Hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$ có dạng đồ thị nào trong các đồ thị sau đây ?



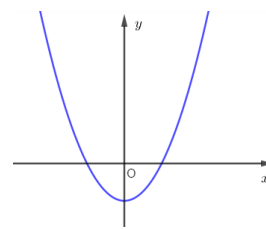
A.



B.



C.



D.

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **VD 4:** Bảng biến thiên sau là của hàm số nào?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-
y	$+\infty$	-2	-1	-2	$+\infty$

A. $y = x^4 - 2x^2 + 1$ **B.** $y = -x^4 + 2x^2 - 1$

C. $y = x^4 - 2x^2 - 1$ **D.** $y = x^4 - x^2 - 1$

.....

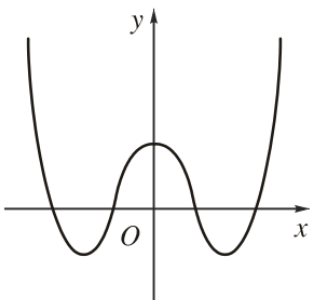
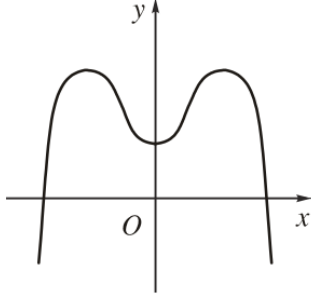
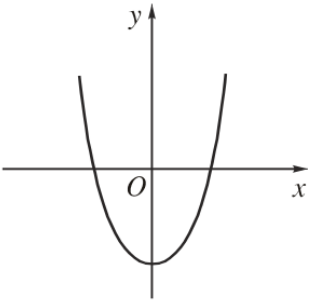
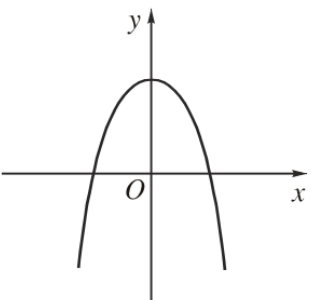
.....

.....

.....

.....

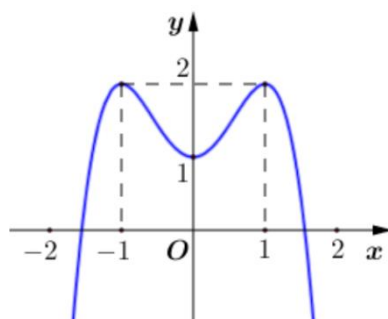
2. Minh hoạ đồ thị của hàm số bậc 4 trùng phương

	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có một ng nghiệm		

➤ **Chú ý:** Hàm số trùng phương là hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.

3. Bài tập củng cố

Câu 1. Đồ thị hình bên dưới là của hàm số nào?



A. $y = -x^4 + 3x^2 + 1$.

B. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

C. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

D. $y = x^4 + 3x^2 + 1$.

Câu 2. Bảng biến thiên bên dưới là của hàm số nào?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			-3				$+\infty$

B. $y = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^2 - 3.$

D. $y = x^4 + 2x^2 - 3$.

A. $(-\infty; 0)$. **B.** $(-1; 0)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(0; +\infty)$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$					$+\infty$

A. $P = 3$. **B.** $P = 5$. **C.** $P = -2$. **D.** $P = 2$.

GIẢI TÍCH 12 – CHƯƠNG 1

§5. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ (Tiếp)

A. PHẦN KIẾN THỨC CHÍNH

➤ **Dạng ❸:** Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$)

1. Kiểm tra bài cũ:

2. VD MỞ ĐẦU:

➤ **VD1:** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = \frac{x-1}{x+2}$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ Đạo hàm: $y' = \frac{3}{(x+2)^2} > 0, \forall x \in D$.

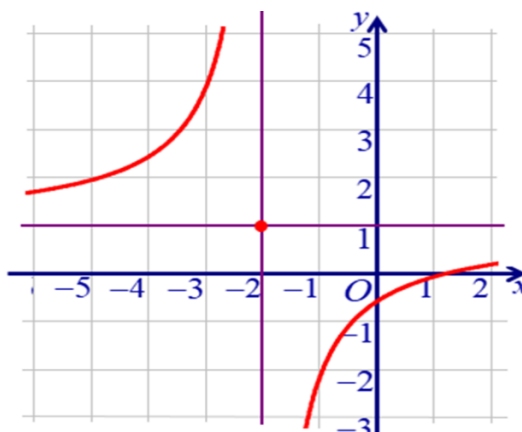
Tiệm cận đứng $x = -2$ vì $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x-1}{x+2} = +\infty, \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x-1}{x+2} = -\infty$

Tiệm cận ngang $y = 1$ vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x+2} = 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		+		+	
y			$+\infty$		1
	1		$-\infty$		

+ Đồ thị



➤ **VD2:** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = \frac{-x+2}{x+1}$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; Đạo hàm: $y' = \frac{-3}{(x+1)^2} < 0, \forall x \in D$.

Tiệm cận đứng $x = -1$ vì $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{-x+2}{x+1} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{-x+2}{x+1} = +\infty$

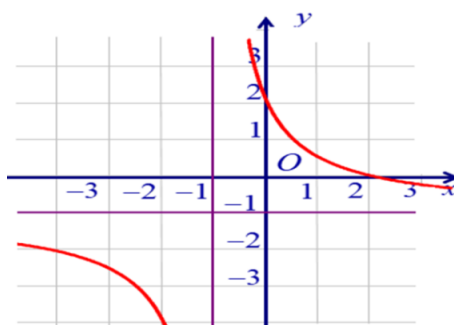
Tiệm cận ngang $y = -1$ vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x+2}{x+1} = -1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'			
y	-1		-1

Diagram showing the variation of the function $y = \frac{-x+2}{x+1}$. The horizontal axis represents x with values $-\infty$, -1 , and $+\infty$. The vertical axis represents y with values -1 and $+\infty$. The function is decreasing on both intervals $(-\infty, -1)$ and $(-1, +\infty)$. As $x \rightarrow -1^-$, $y \rightarrow -\infty$. As $x \rightarrow -1^+$, $y \rightarrow +\infty$. As $x \rightarrow \pm\infty$, $y \rightarrow -1$.

Đồ thị



2. Tính chất và dạng đồ thị.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$

Đạo hàm: $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

Nếu $ad-bc > 0$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định. Đồ thị nằm góc phần tư 2 và 4.

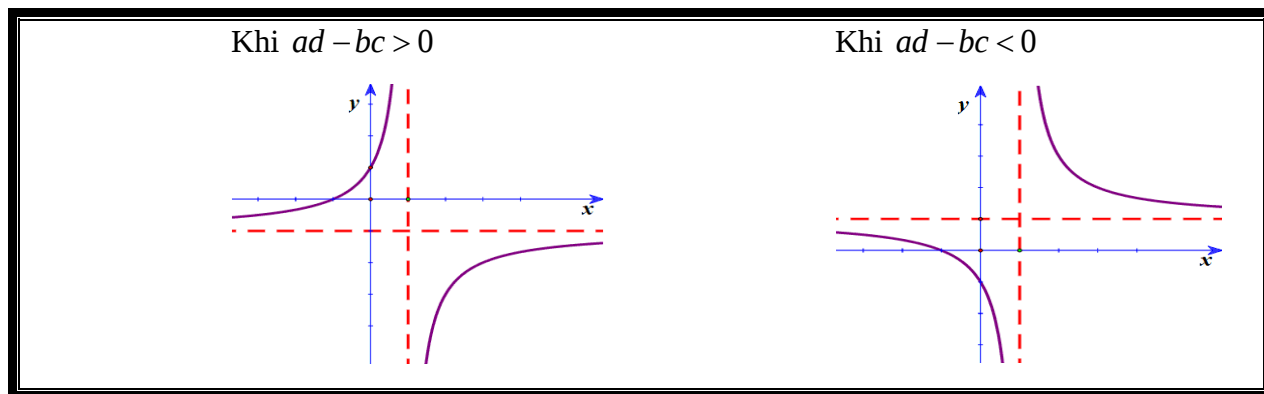
Nếu $ad-bc < 0$ hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định. Đồ thị nằm góc phần tư 1 và 3.

Đồ thị hàm số có: TCD: $x = -\frac{d}{c}$ và TCN: $y = \frac{a}{c}$

Giao với trục Oy tại điểm $\left(0; \frac{b}{d} \right)$.

Đồ thị có tâm đối xứng: $I \left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c} \right)$

Dạng đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, ($c \neq 0; ab-bc \neq 0$)



B. LUYỆN TẬP

I. Chữa bài tập SGK:

Bài 6 trang 44 SGK: Cho hàm số $y = \frac{mx-1}{2x+m}$

- Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m , hàm số luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.
- Xác định m để tiệm cận đứng của đồ thị đi qua điểm $A(-1; \sqrt{2})$
- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với $m = 2$

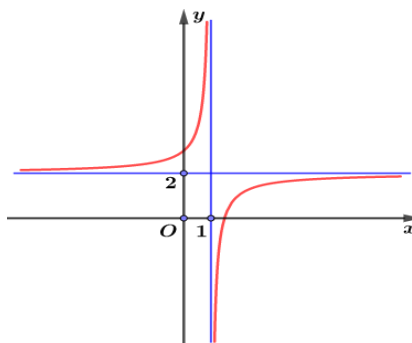
II. Bài tập trắc nghiệm củng cố:

Câu 1. Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như hình vẽ ?

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$+$		$+$
y	$2 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 2$

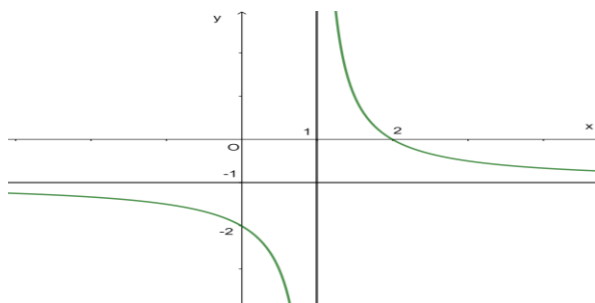
- A.** $y = -x^4 + 3x^2 + 1$.
 B. $y = \frac{x+3}{x+1}$.
 C. $x^3 + 3x^2 + 4$.
 D. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

Câu 2. Đường cong dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



- A.** $y = \frac{2x+3}{x-1}$.
 B. $y = \frac{2x-1}{x-1}$.
 C. $y = \frac{x-3}{x-2}$.
 D. $y = \frac{2x-3}{x-1}$.

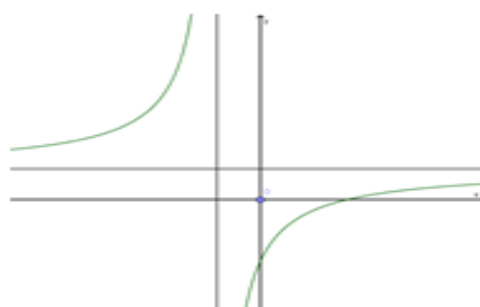
Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ như hình vẽ.



Khẳng định nào dưới đây là **đúng**?

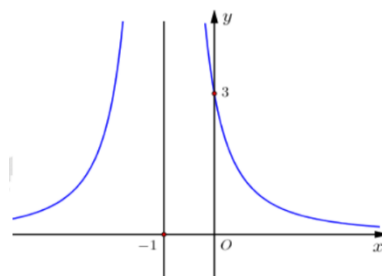
- A.** $0 < a < b$. **B.** $b < 0 < a$. **C.** $0 < b < a$. **D.** $b < a < 0$.

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào trong các mệnh đề dưới đây là **đúng**?



- A.** $ac > 0, ab > 0$ **B.** $ad < 0, bc > 0$.
C. $cd < 0, bd > 0$. **D.** $ad > 0, bc < 0$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như trong hình vẽ dưới đây:



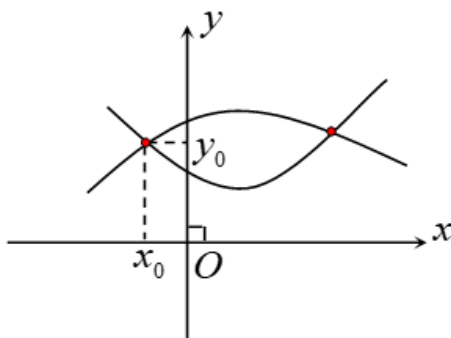
Biết rằng đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $A(0; 4)$. Khẳng định nào dưới đây là **đúng**?

- A.** $f(1) = 6$. **B.** $f(2) = \frac{11}{2}$. **C.** $f(1) = \frac{7}{2}$. **D.** $f(2) = 2$.

III. SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA CÁC ĐỒ THỊ

1. Lý thuyết:

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) và $y = g(x)$ có đồ thị (C_2) .



Tọa độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là $f(x) = g(x)$ (1).

Số nghiệm đơn của (1) đúng bằng số giao điểm của (C_1) và (C_2)

2. Phương pháp tìm tọa độ giao điểm hoặc số giao điểm của của hai đồ thị

- Lập phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị: $f(x) = g(x)$ (1)
- Giải phương trình (1)
- Khi đó:
 - Số giao điểm của (C_1) và (C_2) bằng với số nghiệm đơn của phương trình (1).
 - Nghiệm x_0 của phương trình (1) chính là hoành độ x_0 của giao điểm.
- **Chú ý:** Nếu x_0 là nghiệm kép của (1) thì x_0 là hoành độ tiếp điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$.
- Để tính tung độ y_0 của giao điểm, ta thay hoành độ x_0 vào $y = f(x)$ hoặc $y = g(x)$.
- Điểm $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của (C_1) và (C_2) .

2. Ví dụ

➤ **VD1:** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + 1$ và đồ thị hàm số $y = x^2 - x + 1$ là

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **VD2:** CMR đồ thị (C) của hs $y = \frac{x-1}{x+1}$ luôn cắt đường thẳng (d) $y = m - x$ với mọi m .

.....

.....

.....

.....

.....

b) Sử dụng đồ thị biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình $x^3 + 3x^2 - 2 = m$

[illegible]

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$								

$-\infty \nearrow 3 \searrow -1 \nearrow 3 \searrow -\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

.....

.....

.....

.....

.....

B. LUYỆN TẬP

I. Chữa bài tập SGK:

Bài 5 trang 44 SGK:

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) hàm số : $y = -x^3 + 3x + 1$

b) Dựa vào đồ thị (C), biện luận về số nghiệm của phương trình sau: $x^3 - 3x + m = 0$ (1)

II. Bài tập trắc nghiệm củng cố:

Câu 1. Đồ thị hàm số nào sau đây cắt trục tung tại điểm có tung độ âm?

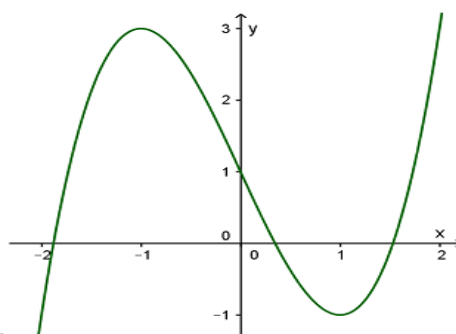
A. $y = \frac{4x+1}{x+2}$.

B. $y = \frac{-2x+3}{x+1}$.

C. $y = \frac{2x-3}{x-1}$.

D. $y = \frac{3x+4}{x-1}$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ



Số nghiệm phân biệt của phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ là:

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Câu 3. Đường thẳng $y = 4x - 2$ và đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 3x$ có tất cả bao nhiêu giao điểm?

A. 2.

B. 0.

C. 3.

D. 1.

Câu 4. Đường thẳng $y = 2x - 1$ có bao nhiêu điểm chung với đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$.

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

- Câu 5.** Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x-1}$ (C) và đường thẳng $d_m: y = -x + m$. Đường thẳng d_m cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho độ dài AB ngắn nhất thì giá trị của m là:
- A.** $m = 2$. **B.** Không tồn tại m. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 0$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

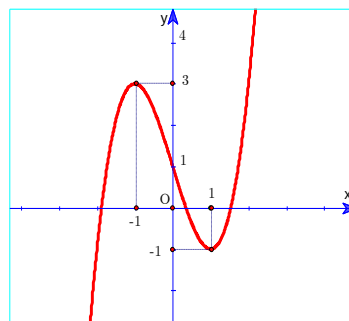
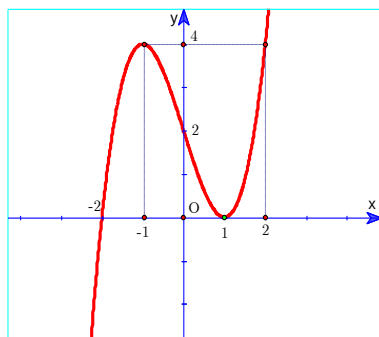
- Câu 1.** Bảng biến thiên sau đây là của một trong 4 hàm số được liệt kê dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	+	0	-	+
y	$-\infty$	↗ CĐ	↘ CT	$+\infty$

- A.** $y = -x^3 - 3x^2 + 2$. **B.** $y = x^3 - 3x^2 + 2$.
C. $y = x^3 + 3x^2 - 2$. **D.** $y = -x^3 + 3x^2 + 2$.
- Câu 2.** Bảng biến thiên sau đây là của một trong 4 hàm số được liệt kê dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?

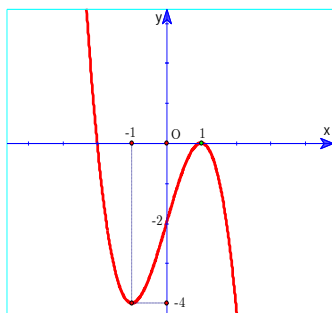
x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+	0	+
y	$-\infty$	↗ 1	$+\infty$

- A.** $y = -x^3 - 3x^2 - 3x$. **B.** $y = -x^3 + 3x^2 - 3x$.
C. $y = x^3 + 3x^2 - 3x$. **D.** $y = x^3 - 3x^2 + 3x$.
- Câu 3.** Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ là hình nào trong 4 hình dưới đây?

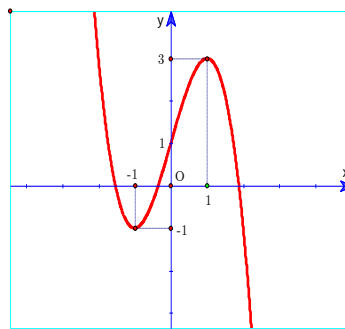


A. Hình 1.

B. Hình 2.

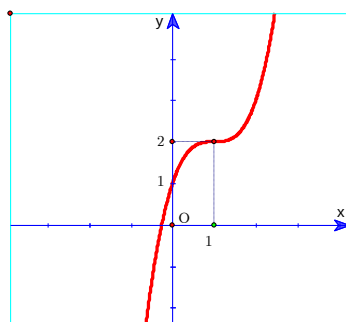


C. Hình 3.



D. Hình 4.

Câu 4. Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = x^3 - 3x + 1$.

B. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

C. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$.

D. $y = -x^3 - 3x^2 - 1$.

Câu 5. Bảng biến thiên ở hình bên dưới là bảng biến thiên của một trong bốn hàm số ở các đáp án A, B, C, D. Hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	-		
y	2	$+\infty$	2

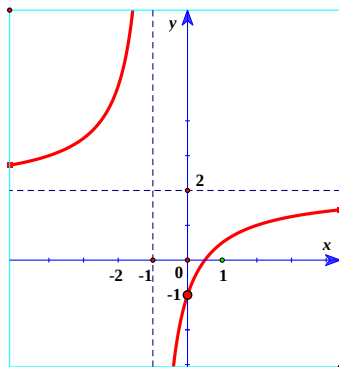
A. $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

B. $y = \frac{2x-3}{x-1}$.

C. $y = \frac{x+1}{2x-1}$.

D. $y = \frac{2x-5}{x+1}$.

Câu 6. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



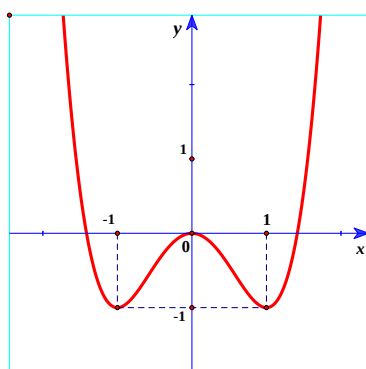
A. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

B. $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

C. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

D. $y = \frac{1-2x}{x-1}$.

Câu 7. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



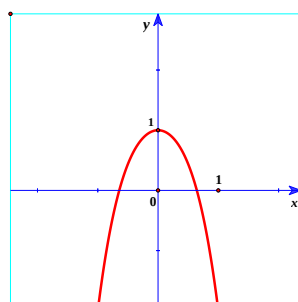
A. $y = x^4 - 3x^2 + 1$

B. $y = x^4 + 2x^2$.

C. $y = x^4 - 2x^2$.

D. $y = -x^4 - 2x^2$.

Câu 8. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



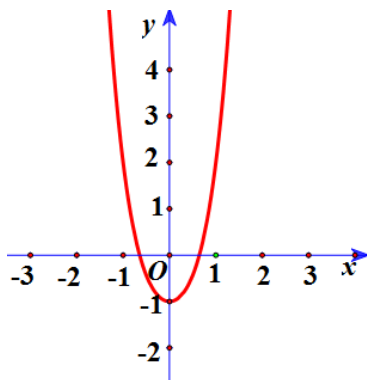
A. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

B. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

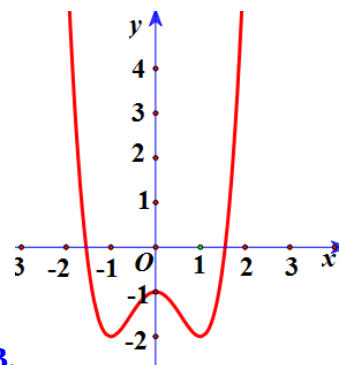
C. $y = x^4 - 3x^2 + 1$.

D. $y = -x^4 - 2x^2 + 1$.

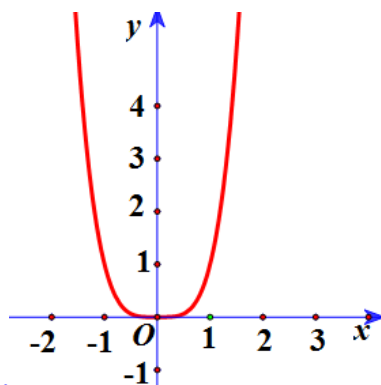
Câu 9. Cho hàm số (C): $y = x^4 + 2x^2 - 1$. Đồ thị hàm số (C) là đồ thị nào trong các đồ thị sau?



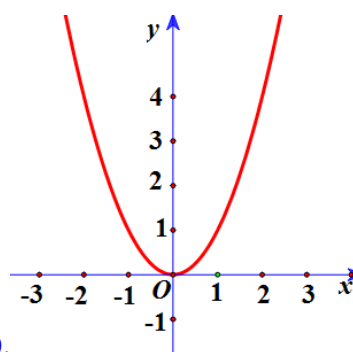
A.



B.



C.



D.

Câu 10. Giả sử đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$ là (C) , khi tịnh tiến (C) theo Ox qua trái 1 đơn vị thì sẽ được đồ thị của một hàm số trong 4 hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = x^4 - 2x^2$.

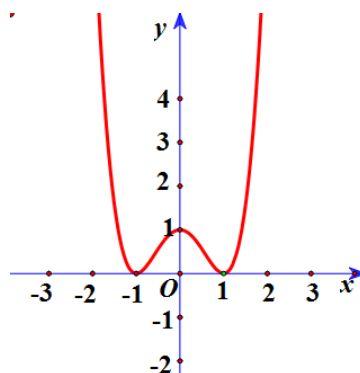
B. $y = (x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 1$.

C. $y = x^4 - 2x^2 - 2$.

D. $y = (x+1)^4 - 2(x+1)^2 - 1$.

HOẠT ĐỘNG 4: VẬN DỤNG PHIẾU HỌC TẬP 2

Câu 11. Giả sử hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



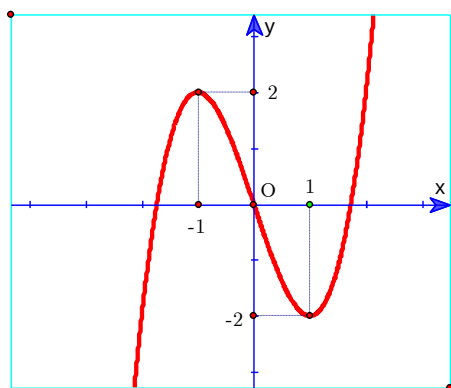
A. $a < 0, b > 0, c = 1$.

B. $a > 0, b > 0, c = 1$.

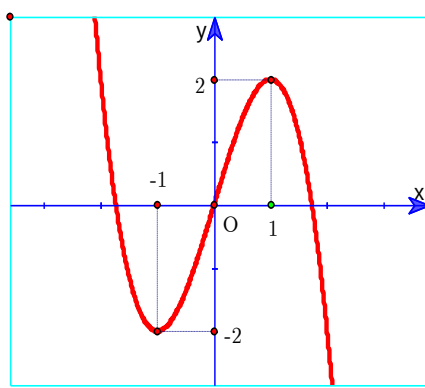
C. $a > 0, b < 0, c = 1$.

D. $a > 0, b > 0, c > 0$.

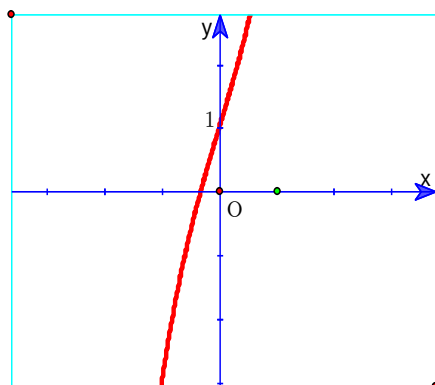
Câu 12. Cho hàm số bậc 3 có dạng: $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.



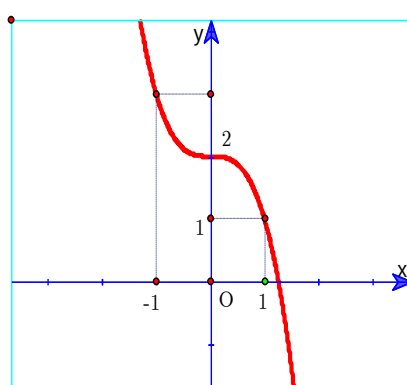
I)



II)



(III)

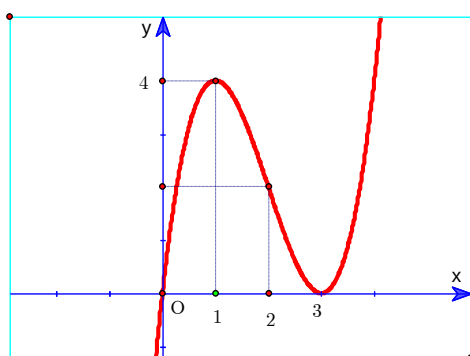


(IV)

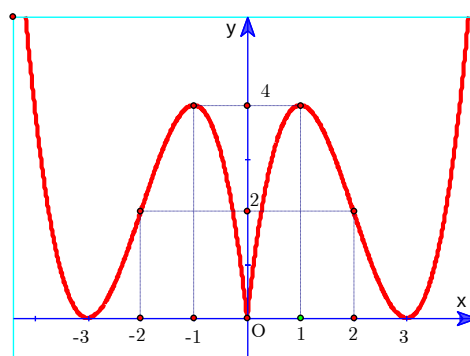
Hãy chọn đáp án đúng?

- A. Đồ thị (IV) xảy ra khi $a > 0$ và $f'(x) = 0$ có nghiệm kép.
- B. Đồ thị (II) xảy ra khi $a \neq 0$ và $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.
- C. Đồ thị (I) xảy ra khi $a < 0$ và $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.
- D. Đồ thị (III) xảy ra khi $a > 0$ và $f'(x) = 0$ vô nghiệm.

Câu 13. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



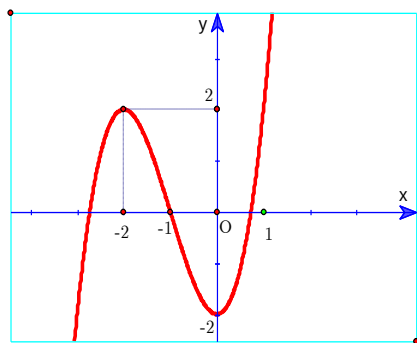
Hình 1



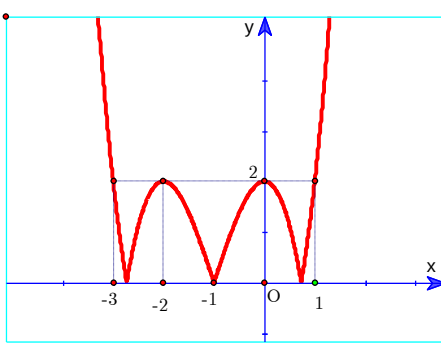
Hình 2

- A. $y = |x|^3 + 6|x|^2 + 9|x|$.
- B. $y = |x|^3 - 6x^2 + 9|x|$.
- C. $y = |x^3 - 6x^2 + 9x|$.
- D. $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$.

Câu 14. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

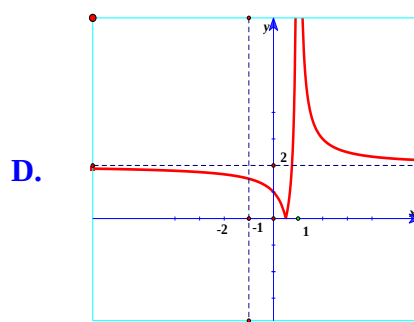
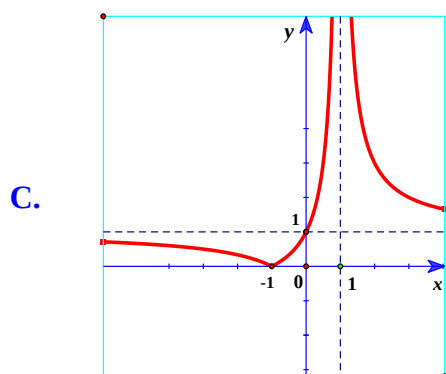
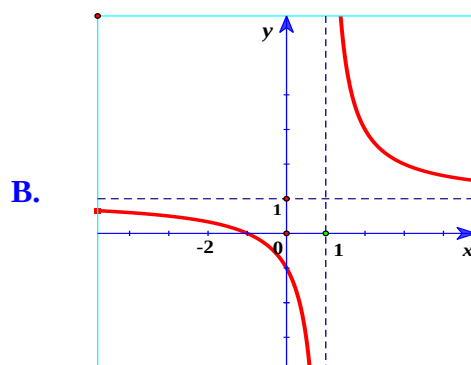
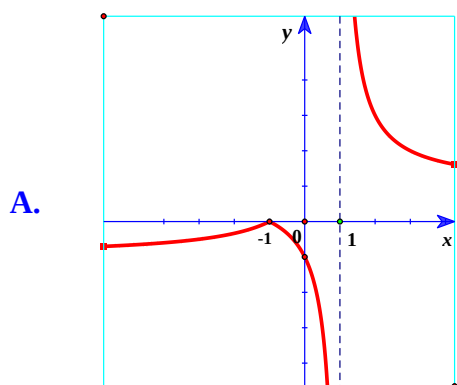
A. $y = -x^3 - 3x^2 + 2.$

B. $y = |x|^3 + 3|x|^2 - 2.$

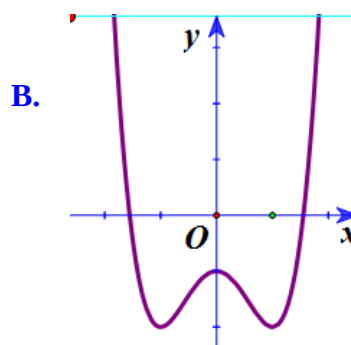
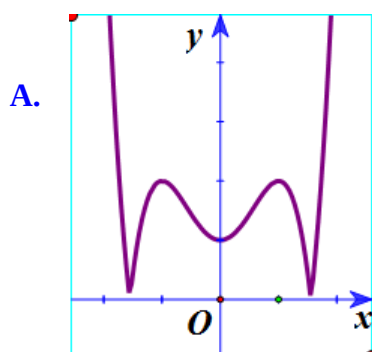
C. $y = |x|^3 + 3x^2 - 2.$

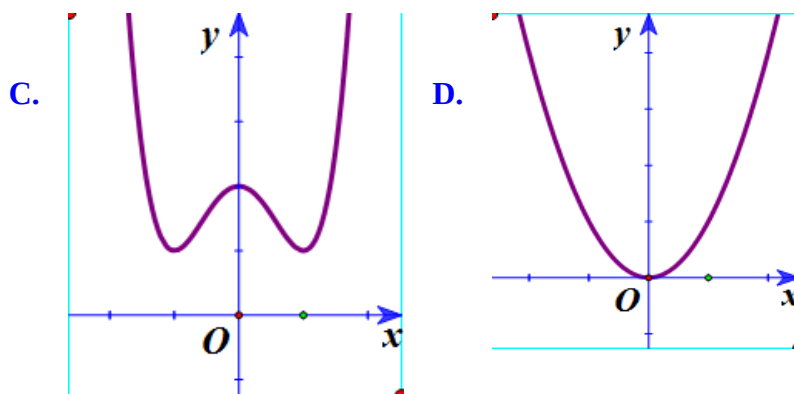
D. $y = |x^3 + 3x^2 - 2|.$

Câu 15. Đồ thị hàm số $y = \frac{|x+1|}{x-1}$ là hình vẽ nào trong các hình vẽ sau:

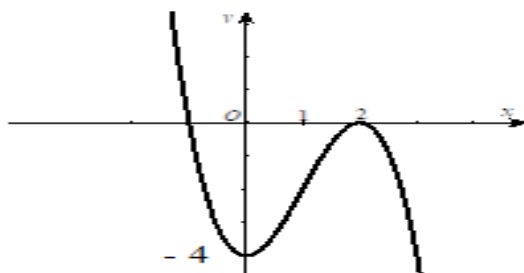


Câu 16. Đồ thị của hàm số $y = |x^4 - 2x^2 - 1|$ là đồ thị nào trong các đồ thị sau





Câu 17. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có $x^3 - 3x^2 + 4 + m = 0$ nghiệm duy nhất lớn hơn 2. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ là hình bên.



A. $m > 0$. B. $m \leq -4$. C. $m < -4$. D. $m \leq -4$ hoặc $m \geq 0$.

Câu 18. Tất cả giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 2x^2 - m + 3 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt là

A. $2 < m < 3$. B. $2 \leq m \leq 3$. C. $m \geq 2$. D. $m > 2$.

Câu 19. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = x + m$. Giá trị của tham số

m để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = \sqrt{10}$ là

A. $m = 0$ hoặc $m = 6$. B. $m = 0$. C. $m = 6$. D. $0 \leq m \leq 6$.

Câu 20. Cho đồ thị (C): $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ và đường thẳng $d: y = m$. Tất cả các giá trị tham số m

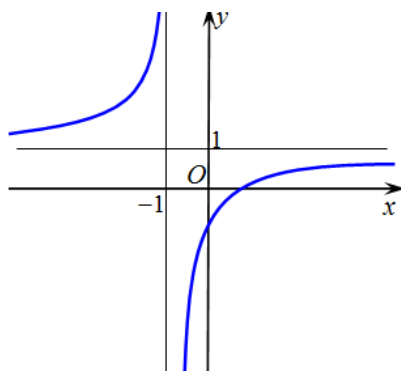
để (C) cắt d tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = \sqrt{2}$ là

A. $m = 1 + \sqrt{6}$. B. $m = 1 - \sqrt{6}$ hoặc $m = 1 + \sqrt{6}$.

C. $m = 1 - \sqrt{6}$. D. $m < 1$ hoặc $m > 3$.

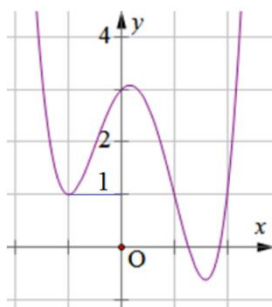
PHIẾU HỌC TẬP

Câu 1. PHIẾU HỌC TẬP 3 Đường cong hình dưới là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = x^3 - 3x^2 + 2$. B. $y = \frac{x+1}{x-1}$. C. $y = x^4 - 2x^2 - 1$. D. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

- Câu 2.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như đường cong hình dưới. Phương trình $f(x) = 1$ có bao nhiêu nghiệm ?



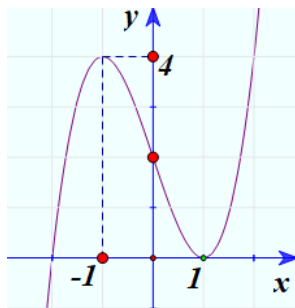
- Câu 3.** Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	$-$		$-$
y	2	$+\infty$	2

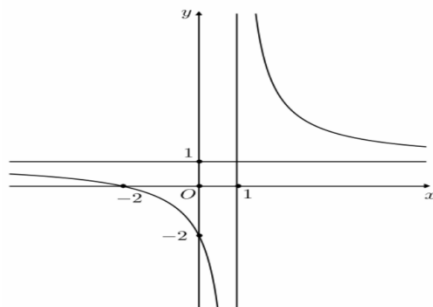
- Câu 4.** Biết rằng đường thẳng $y = -2x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt; hoành độ các giao điểm là

- Câu 5.** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - x + 4$ với đường thẳng $y = 4$ là

- Câu 6.** Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị thực m để phương trình $f(x) + 1 = m$ có ba nghiệm phân biệt.

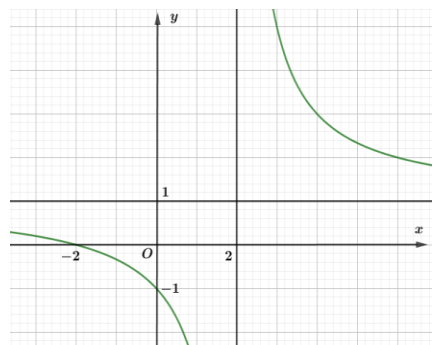


- Câu 7.** Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A.** $b < 0 < a$. **B.** $a < b < 0$. **C.** $a < 0; b < 0$. **D.** $0 < b < a$.

Câu 8. Đường cong ở hình bên là đồ thị hàm số $y = \frac{ax+2}{cx+b}$ với a, b, c là các số thực.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

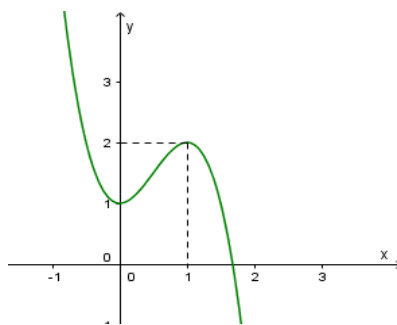
- A.** $(C); b = -2; c = 1$. **B.** $a = 1; b = 2; c = 1$.
C. $a = 1; b = 1; c = -1$. **D.** $a = 2; b = 2; c = -1$.

Câu 9. Tất cả các giá trị của m để đường thẳng $y = 4m$ cắt đồ thị hàm số (C)

$y = x^4 - 8x^2 + 3$ tại 4 phân biệt là.

- A.** $-\frac{13}{4} < m < \frac{3}{4}$. **B.** $-\frac{13}{4} \leq m \leq \frac{3}{4}$. **C.** $-13 < m < 3$. **D.** $-13 \leq m \leq 3$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Số nghiệm của phương trình $2|f(x-1)| - 3 = 0$ là:

- A.** 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

.....

.....

.....

.....

.....

GIẢI TÍCH 12 – CHƯƠNG I

BÀI TẬP SGK - BÀI 5: KHẢO SÁT HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT

B. LUYỆN TẬP

I. Chữa bài tập SGK

Bài 1 trang 43 SGK: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số hàm bậc 3 sau.

a. $y = 2 + 3x - x^3$

Bài 2/SGK/T43: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số hàm bậc 4 sau.

a. $y = -x^4 + 8x^2 - 1$. b. $y = \frac{1}{2}x^4 + x^2 - \frac{3}{2}$ c. $y = x^4 - 2x^2 + 2$ d. $y = -2x^2 - x^4 + 3$.

Bài 3 trang 43 SGK: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số hàm phân thức:

a. $y = \frac{x+3}{x-1}$ b. $y = \frac{1-2x}{2x-4}$ c. $y = \frac{-x+2}{2x+1}$

Bài 4 trang 44 SGK

Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + m$.

a) Với giá trị nào của tham số m , đồ thị của hàm số đi qua điểm $(-1; 1)$?

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 1$.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng $\frac{7}{4}$

Bài 5 trang 44 SGK:

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm (C) của hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$

b. Dựa vào đồ thị hàm số (C) biện luận số nghiệm phương trình sau theo tham số m
 $x^3 - 3x + m = 0$

Bài 6 trang 44 SGK: Cho hàm số $y = \frac{mx-1}{2x+m}$

a. Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

b. Xác định m để tiệm cận đứng của đồ thị đi qua $A(-1; \sqrt{2})$

c. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 2$

Bài 8 trang 44 SGK:

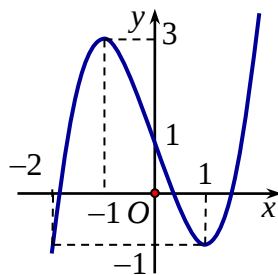
Cho hàm số $y = x^3 + (m+3)x^2 + 1 - m$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m) .

a) Xác định m để hàm số có điểm cực đại là $x = -1$.

b) Xác định m để đồ thị (Cm) cắt trục hoành tại $x = -2$.

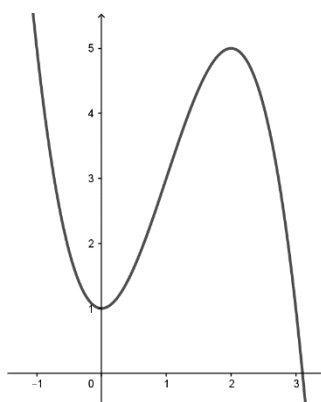
II. BÀI TẬP TỰ LUYỆN (phần này không làm PPT)

Câu 1. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



- A.** $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. **B.** $y = x^3 - 3x - 1$. **C.** $y = x^3 - 3x + 1$. **D.** $y = -x^3 - 3x^2 - 1$.

Câu 2. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

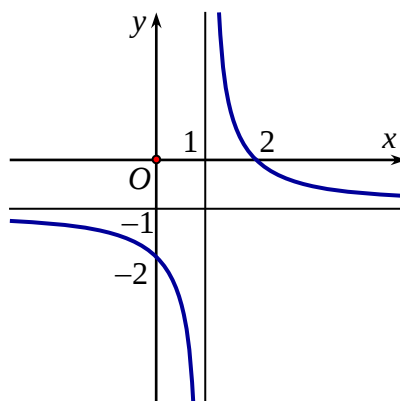


- A.** $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$. **B.** $y = x^3 - 3x^2 + 1$. **C.** $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. **D.** $y = -x^3 - 3x^2 + 1$.

Câu 3. Đường thẳng $y = 2x - 1$ có bao nhiêu điểm chung với đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$.

- A.** 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{ax - b}{x - 1}$ có đồ thị như hình dưới.



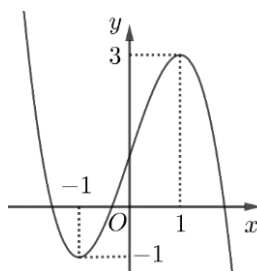
Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A.** $b < 0 < a$. **B.** $0 < b < a$. **C.** $b < a < 0$. **D.** $0 < a < b$.

Câu 5. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2ax + b$ có điểm cực tiểu $A(2; -2)$. Khi đó $a + b$ bằng

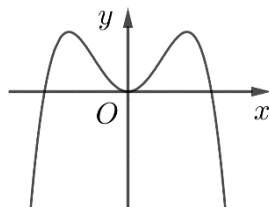
- A.** 4. **B.** 2. **C.** -4. **D.** -2.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 4 = 0$ là



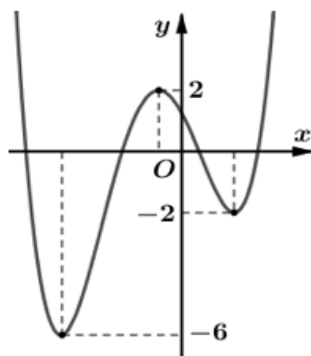
- A.** 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 7. Đồ thị hàm số sau đây là đồ thị của hàm số nào?



- A.** $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. **B.** $y = -x^4 + 2x^2$. **C.** $y = x^4 - 2x^2$. **D.** $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(x) - 1 = 0$ có mấy nghiệm?

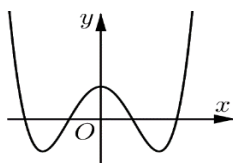


- A.** 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ 4 điểm phân biệt

- A.** $2 < m < 3$. **B.** $1 < m < 2$. **C.** $m < 2$. **D.** $m > 2$.

Câu 10. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



- A.** $a > 0, b < 0, c < 0$. **B.** $a > 0, b < 0, c > 0$. **C.** $a < 0, b > 0, c > 0$. **D.** $a > 0, b > 0, c > 0$.

GIẢI TÍCH 12 – CHƯƠNG I

BÀI 5 - KHẢO SÁT HÀM SỐ & ỨNG DỤNG - TƯƠNG GIAO

A. LÝ THUYẾT

I. GIAO ĐIỂM CỦA HAI ĐỒ THỊ

Cho hai hàm số $y = f(x)$ (C_1) và $y = g(x)$ (C_2)

Để tìm hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) ta giải phương trình $f(x) = g(x)$ (1)

Giả sử phương trình (1) có các nghiệm là $x_0; x_1; \dots$

Khi đó, các giao điểm là $M_0(x_0; f(x_0)); M_1(x_1; f(x_1)); \dots$

➤ NHẬN XÉT

Phương trình (1) được gọi là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2).

Số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của (C_1) và (C_2).

➤ **VD 1:** Tìm hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số

a) $y = x^3 - 3x^2 + 5$ (C_1) và $y = -2x^3 + 2x^2 - 3$ (C_2).

b) $y = \frac{2x-4}{x-1}$ (C_1) và $y = -x^2 + 2x + 4$ (C_2).

c) $y = \frac{x^2}{x-1}$ (C_1) và $y = -3x + 1$ (C_2).

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

II. BIỆN LUẬN SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẰNG ĐỒ THỊ

Xét phương trình $F(x, m) = 0$ (1).

➤ Biến đổi (1) về dạng $f(x) = g(m)$ (2).

➤ Khi đó (2) là phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị (C): $y = f(x)$ và (d): $y = g(m)$.

Trong đó: $y = f(x)$ thường là hàm đã được khảo sát và vẽ đồ thị, (d) là đường thẳng cùng phương với trục hoành.

➤ Dựa vào đồ thị (C), từ số giao điểm của (C) và (d) ta suy ra số nghiệm của phương trình (2) cũng chính là số nghiệm của phương trình (1).

➤ **VD2:**

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$.

b) Tìm m để phương trình $x^3 + 3x^2 - 2 = m$ có

i. 1 nghiệm.

ii. 2 nghiệm.

iii. 3 nghiệm.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Gọi M và N là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ và đường cong $y = x^2 - 3x + 1$. Khi đó hoành độ của điểm I là trung điểm đoạn thẳng MN bằng

- A. $\frac{5}{2}$. B. 2. C. $\frac{3}{2}$. D. 35.

Câu 2. Gọi x_1, x_2, x_3 là hoành độ các giao điểm của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 2$ và đường thẳng $y = x + 10$. Tính $T = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$.

- A. 27. B. 19. C. 8. D. 35.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm của phương trình $|f(x)| = 1$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	-4	$+\infty$	

- A. 4. B. 6. C. 5. D. 0.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$. Phương trình $f(f(x)) = 2$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

- A. 5. B. 2. C. 4. D. 6.

Câu 5. Đường thẳng $y = m$ không cắt đồ thị hàm số $y = -2x^4 + 4x^2 + 2$ khi và chỉ khi

- A. $0 < m < 4$. B. $m > 4$. C. $m < 2$. D. $2 < m \leq 4$.

Câu 6. Tập hợp các tham số thực m để đồ thị hàm số $y = x^3 + (m - 4)x + 2m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt là

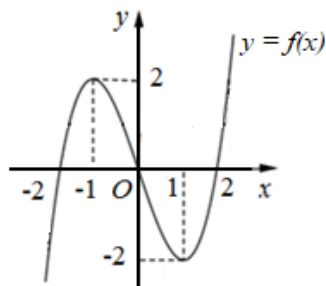
- A. $(-\infty; 1] \setminus \{-8\}$. B. $(-\infty; 1]$. C. $(-\infty; 1)$. D. $(-\infty; 1) \setminus \{-8\}$.

Câu 7. Đồ thị hàm số $(C): y = \frac{2x-3}{x+1}$ cắt đường thẳng $(d): y = -x + 4$ tại hai điểm phân biệt A, B . Diện tích tam giác OAB với O là gốc tọa độ bằng

- A. $8\sqrt{2}$. B. $4\sqrt{29}$. C. $2\sqrt{29}$. D. $\frac{3}{2}$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = -1$ là

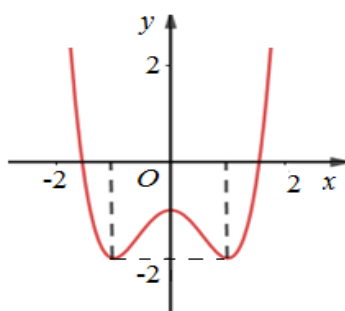


- A. 3. B. 1. C. 0. D. 2.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Số nghiệm của phương trình $f(x) + 1 = 0$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.



Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
y'	+	0	-	+
y	$-\infty$	2	-1	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x) - 1 = 0$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 4. Cho hàm số $y = x^4 + 4x^2$ có đồ thị (C) . Tìm số giao điểm của đồ thị (C) và trục hoành.

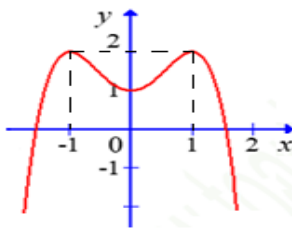
- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 5. Biết rằng đường thẳng $y = -2x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại điểm duy nhất có tọa độ $(x_0; y_0)$. Tìm y_0 .

- A. $y_0 = 0$. B. $y_0 = 4$. C. $y_0 = 2$. D. $y_0 = -1$.

Câu 6. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ với đường thẳng $y = 2x + 3$ là

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.



A. Vô nghiệm. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm phân biệt.

A. $m < -2$. **B.** $-2 < m < 4$. **C.** $-2 \leq m \leq 4$. **D.** $m > 4$.

This image shows a full page of a document template designed for handwritten notes or essays. It features approximately 28 evenly spaced, thin grey horizontal lines across the entire width of the page. The margins are consistent on all sides, providing ample space for writing. There are no vertical lines, headers, footers, or other markings present.

GIẢI TÍCH 12 – CHƯƠNG 2

§1. LŨY THỪA

A. PHẦN KIẾN THỨC CHÍNH

I. KHÁI NIỆM LŨY THỪA

1. Lũy thừa với số mũ nguyên

Với n là một số nguyên dương:

$$a^n = \underbrace{a.a \dots a}_{n \text{ số } a};$$

$$a^0 = 1; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

Chú ý: 0^0 và 0^{-n} không có nghĩa

➤ **VD 1:** Tính giá trị biểu thức

$$A = \left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \cdot 27^{-3} + (0,2)^{-4} \cdot 25^{-2} + 128^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-9}$$

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **VD 2:** Rút gọn biểu thức sau

$$B = \left[\frac{a\sqrt{2}}{(1+a^2)^{-1}} - \frac{2\sqrt{2}}{a^{-1}} \right] \cdot \frac{a^{-3}}{1-a^{-2}}, \quad (a \neq 0; a \neq \pm 1)$$

.....

.....

.....

.....

.....

2. Phương trình $x^n = b$

➤ **Ví dụ mở đầu:**

Học sinh làm việc theo nhóm, viết lời giải vào bảng phụ. Giáo viên quan sát học sinh làm việc, nhắc nhở học sinh không tích cực, giải đáp nếu các em có thắc mắc.

NỘI DUNG		GỢI Ý
Nhóm 1 + 3:	Cho hàm số $y = x^3$.	nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của hai

	a) Vẽ đồ thị của hàm số. b) Biện luận theo b số nghiệm của phương trình $x^3 = b$ c) Tìm x để $x^3 = 1; x^3 = 2x^3 = 1; x^3 = 2$	đồ thị của hai hàm số $y = x^n$ và $y = b$.
--	---	--

➤ **Nhận xét**

- Nếu n lẻ thì phương trình có nghiệm duy nhất với mọi b .
- Nếu n chẵn thì:
 - + $b < 0$: phương trình vô nghiệm
 - + $b = 0$: phương trình có nghiệm $x = 0$
 - + $b > 0$: phương trình có hai nghiệm đối nhau

3. Căn bậc n

Xét phương trình $a^n = b$ với n nguyên dương

+ Cho a tính b . Chẳng hạn $n = 4, a = 2$ tính b ?

+ Ngược lại cho b tính a . Chẳng hạn $n = 4, b = 16$, tính a ?

a) Khái niệm:

Cho số thực b và số nguyên dương $n; (n \geq 2)$. Số a được gọi là căn bậc n của b nếu $a^n = b$.

	Phương trình $x^n = b$	Căn bậc n
n lẻ $b \in \mathbb{R}$	Với mọi số thực b , phương trình có nghiệm duy nhất.	Có duy nhất một căn bậc n của b , kí hiệu là $\sqrt[n]{b}$
n chẵn $b \in \mathbb{R}$	Với $b < 0$, phương trình vô nghiệm	Không tồn tại căn bậc n của b
	Với $b = 0$, phương trình có một nghiệm $x = 0$	Có một căn bậc n của b là số 0
	phương trình có 2 nghiệm đối nhau.	Có hai căn trái dấu, kí hiệu giá trị dương là $\sqrt[n]{b}$, còn giá trị âm là $-\sqrt[n]{b}$.

b) Tính chất:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{khi } n \text{ lẻ} \\ |a|, & \text{khi } n \text{ chẵn} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

➤ **VD 3:** Tính

a) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{-8} = \sqrt[5]{-32} = -2$

b) $\sqrt[3]{3\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(\sqrt{3})^3} = \sqrt{3}$

➤ **VD 4:** Tìm nghiệm của các phương trình sau:

a) $x^{2019} = -2020$

b) $x^{2020} = 0$

c) $x^{2020} = 2021$

d) $x^{2020} = -2021$

.....

4. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Khái niệm: Cho số thực $a > 0$ và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$, trong đó $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Khi đó

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Nhận xét: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ (ĐK: $a > 0; n \in \mathbb{Z}; n \geq 2$)

➤ **VD 5:** Tính

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

$$4^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{4^{-3}} = \frac{1}{\sqrt{4^3}} = \frac{1}{8}$$

➤ **VD 6:** Rút gọn biểu thức

$$C = \frac{x^{\frac{5}{4}} \cdot y + x \cdot y^{\frac{5}{4}}}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}} \quad (\text{Đk: } x > 0, y > 0)$$

.....

.....

.....

.....

.....

5. Lũy thừa với số mũ vô tỉ

Khái niệm: Cho số thực $a > 0$, α là một số vô tỉ và (r_n) là một dãy số hữu tỉ sao cho $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \alpha$

Khi đó: $a^\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n}$.

Nhận xét: $1^\alpha = 1$ với mọi α .

II. TÍNH CHẤT CỦA LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

➤ **Tính chất 1:**

Cho hai số thực dương a, b và các số $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Khi đó:

$$1 / a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$$

$$2 / \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{m-\beta}$$

$$3 / (a^\alpha)^\beta = a^{m \cdot \beta} = (a^\beta)^\alpha$$

$$4 / (ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$$

$$5 / \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$$

➤ **VD 7:** Rút gọn biểu thức

$$\text{a) } E = \frac{a^{\sqrt{7}+1} \cdot a^{2-\sqrt{7}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}} \quad (a > 0) \quad \text{b) } F = \frac{(a^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3} \cdot a^{4-\sqrt{5}}} \quad (a > 0)$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **Tính chất 2:**

α, β là số thực

So sánh cùng số mũ α :

Khi $\alpha > 0$ thì: $0 < a < b \Leftrightarrow a^\alpha < b^\alpha$.

Khi $\alpha < 0$ thì: $0 < a < b \Leftrightarrow a^\alpha > b^\alpha$.

So sánh cùng cơ số a .

Khi $0 < a < 1$ thì: $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

Khi $a > 1$ thì: $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$.

➤ **VD 8:** So sánh : a) $5^{2\sqrt{3}}$ và $5^{3\sqrt{2}}$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{8}}$ và $\left(\frac{3}{4}\right)^3$

c) 5^π và 2^{-e}

.....

.....

.....

.....

.....

B. LUYỆN TẬP

I. Chữa bài tập SGK

Bài 1 trang 55 SGK : Tính

$$\text{a) } 9^{\frac{2}{5}} \cdot 27^{\frac{2}{5}} = (9 \cdot 27)^{\frac{2}{5}} = (3^2 \cdot 3^3)^{\frac{2}{5}} = 3^{\frac{5 \cdot 2}{5}} = 9.$$

$$\text{b) } 144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}} = (144 : 9)^{\frac{3}{4}} = (16)^{\frac{3}{4}} = 2^3 = 8.$$

$$\text{c) } \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + 0,25^{-\frac{5}{2}} = 2^{(-4) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)} + 2^{(-2) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)} = 2^3 + 2^5 = 40$$

$$d) (0,04)^{-1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}} = 5^{(-2)(-1,5)} - 2^{(-3)\left(-\frac{2}{3}\right)} = 5^3 - 2^2 = 121$$

Bài 2 trang 55 SGK: Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ

$$a) a^{\frac{1}{3}}\sqrt{a} = a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}}$$

$$b) b^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}\sqrt[6]{b} = b^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}} = b$$

$$c) a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a} = a^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = a$$

Bài 4 trang 56 SGK: Rút gọn các biểu thức sau

$$a) \text{Ta có } \frac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)} = \frac{a^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}}(a^{-1}+1)}{a^{\frac{1}{4}}a^{\frac{3}{4}}(1+a^{-1})} = a$$

$$b) \text{Ta có } \frac{a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}} = \frac{(ab)^{-\frac{1}{3}}\left[a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}\right]}{a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{ab}}$$

Bài 5 trang 56 SGK: Chứng minh rằng

$$\text{Ta có } 0 < \frac{1}{3} < 1 : \left(\frac{1}{3}\right)^{2\sqrt{5}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2\sqrt{5} > 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{20} > \sqrt{18} \text{ (luôn đúng).}$$

$$\text{Ta có } 7 > 1 : 7^{6\sqrt{3}} > 7^{3\sqrt{6}} \Leftrightarrow 6\sqrt{3} > 3\sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{108} > \sqrt{54} \text{ (luôn đúng).}$$

II. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. [Mức độ 1] Giá trị biểu thức $P = \left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \cdot 27^{-3}$ bằng

- A.** $P = 30$. **B.** $P = 10$. **C.** $P = 3$. **D.** $P = 9$.

Câu 2. [Mức độ 2] Biết $P = (5 - 2\sqrt{6})^{2020} (5 + 2\sqrt{6})^{2021}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $P \in (9; 10)$. **B.** $P \in (0; 1)$. **C.** $P \in (7; 8)$. **D.** $P \in (3; 4)$.

Câu 3. [Mức độ 2] Rút gọn biểu thức: $P = a^{\sqrt{3}+2} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{3}-1}$ với $a > 0$.

- A.** $P = a^3$ **B.** $P = a^{\sqrt{3}+1}$ **C.** $P = a^{2\sqrt{3}+1}$ **D.** $P = a$

Câu 4. [Mức độ 1] Cho phương trình $x^{2n} = 3$ với n là số nguyên dương. Mệnh đề nào sau đây SAI.

- A.** Phương trình có hai nghiệm đối nhau. **B.** Phương trình có duy nhất một nghiệm.
C. Phương trình có một nghiệm dương là $\sqrt[2n]{3}$. **D.** Phương trình có một nghiệm âm là $-\sqrt[2n]{3}$.

Câu 5. [Mức độ 1] Biểu thức $\sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x}}$ với $x > 0$ được viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ là

A. $x^{\frac{1}{12}}$.

B. $x^{\frac{3}{4}}$.

C. $x^{\frac{1}{3}}$.

D. $x^{\frac{7}{12}}$.

Câu 6. [Mức độ 2] Cho a, b là các số thực dương, rút gọn biểu thức $P = \frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$ ta được

A. $P = ab$.

B. $P = a + b$.

C. $P = a^4b + ab^4$.

D. $P = a^2b + ab^2$.

Câu 7. [Mức độ 2] Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $(\sqrt{11} - \sqrt{2})^6 > (\sqrt{11} - \sqrt{2})^7$.

B. $(4 - \sqrt{2})^3 < (4 - \sqrt{2})^4$.

C. $(2 - \sqrt{2})^3 < (2 - \sqrt{2})^4$.

D. $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^4 < (\sqrt{3} - \sqrt{2})^5$.

Câu 8. [Mức độ 1] So sánh hai số m, n nếu $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^m > \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

A. $m < n$.

B. $m = n$.

C. $m > n$.

D. $m = -n$.

Câu 9. [Mức độ 3] Biết $2^x + 2^{-x} = 5$. Giá trị của biểu thức $A = 4^x + 4^{-x} + 3$ bằng

A. 26.

B. 25.

C. 5.

D. $\sqrt{26}$.

Câu 10. [Mức độ 3] Cho biểu thức $E = (a+1)^{-1} + (b+1)^{-1}$. Với $a = (2 + \sqrt{3})^{-1}$, $b = (2 - \sqrt{3})^{-1}$ thì giá trị của biểu thức E là

A. $3 + \sqrt{3}$.

B. 2.

C. $3 - \sqrt{3}$.

D. 1.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

PHIẾU HỌC TẬP

Câu 1. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{12^{5+\sqrt{3}}}{2^{5+2\sqrt{3}} \cdot 3^{7+\sqrt{3}}}$.

A. 288.

B. $\frac{32}{9}$.

C. $\frac{2}{9}$.

D. 18.

Câu 2. Cho $a > 0$, rút gọn biểu thức $P = \frac{(a^{\sqrt{5}-2})^{\sqrt{5}+2}}{a^{1-\sqrt{3}} \cdot a^{\sqrt{3}-2}}$.

A. $P = 1$.

B. $P = a$.

C. $P = \frac{1}{a}$.

D. $P = a^2$.

Câu 3. Cho a là số thực dương, viết biểu thức $P = a \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ.

A. $P = a^{\frac{5}{3}}$.

B. $P = a^{\frac{5}{6}}$.

C. $P = a^{\frac{11}{6}}$.

D. $P = a^2$.

- Câu 4.** Cho a, b là các số dương. Rút gọn biểu thức $P = \frac{\left(\sqrt[4]{a^3 \cdot b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12} \cdot b^6}}}$ được kết quả là
- A.** $P = ab^2$. **B.** $P = a^2b$. **C.** $P = ab$. **D.** $P = a^2b^2$.
- Câu 5.** Cho a, b là các số thực dương. Giá trị của biểu thức $E = \frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}} - \sqrt[3]{ab}$ là
- A.** $E = -2$. **B.** $E = -1$. **C.** $E = 1$. **D.** $E = 0$.
- Câu 6.** Cho số thực dương $a > 0$ và $a \neq 1$. Rút gọn biểu thức $C = \frac{a^{\frac{3}{4}}\left(a^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{4}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a - a^{\frac{5}{6}}\right)}$ ta được
- A.** $C = a$. **B.** $C = a^5$. **C.** $C = a^{\frac{7}{2}}$. **D.** $C = a^{\frac{3}{2}}$.
- Câu 7.** Nếu $\left(2\sqrt{3}-1\right)^{a+2} < 2\sqrt{3}-1$ thì
- A.** $a < -1$. **B.** $a < 1$. **C.** $a > -1$. **D.** $a \geq -1$.
- Câu 8.** Kết luận nào sau đây đúng về số thực a nếu $\left(2-a\right)^{\frac{3}{4}} > \left(2-a\right)^2$.
- A.** $1 < a < 2$. **B.** $a < 1$. **C.** $a > 1$. **D.** $0 < a < 1$.
- Câu 9.** Rút gọn $P = \frac{a^{-1} + (b+c)^{-1}}{a^{-1} - (b+c)^{-1}} \cdot \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \cdot (a+b+c)^{-2}$ ta được
- A.** $P = \frac{1}{2ab}$. **B.** $P = \frac{1}{ac}$. **C.** $P = \frac{1}{2ac}$. **D.** $P = \frac{1}{2bc}$.
- Câu 10.** Cho $9^x + 9^{-x} = 23$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{5+3^x+3^{-x}}{1-3^x-3^{-x}}$ ta được
- A.** -2 . **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{5}{2}$.
- Câu 11.** Tìm tất cả các số thực m sao cho $\frac{4^a}{4^a + m} + \frac{4^b}{4^b + m} = 1$ với mọi $a+b=1$.
- A.** $m = \pm 2$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 8$.
- Câu 12.** Cho hàm số $f(x) = \frac{2^x}{2^x + 2}$. Tổng $f(0) + f\left(\frac{1}{10}\right) + \dots + f\left(\frac{18}{10}\right) + f\left(\frac{19}{10}\right)$ bằng
- A.** $\frac{59}{6}$. **B.** 10 . **C.** $\frac{19}{2}$. **D.** $\frac{28}{3}$.

GIẢI TÍCH 12 – CHƯƠNG 2
§2. HÀM SỐ LŨY THỪA

A. PHẦN KIẾN THỨC CHÍNH

I. KHÁI NIỆM

1. Định nghĩa

➤ **ĐN:** Hàm số $y = x^\alpha$ với $\alpha \in \mathbb{R}$ được gọi là **hàm số lũy thừa**.

➤ **Chú ý:**

Tập xác định của hàm số $y = x^\alpha$ tùy thuộc vào giá trị của α :

- Nếu α là số nguyên dương: $D = \mathbb{R}$.
- Nếu α nguyên âm hoặc α bằng 0: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Nếu α không nguyên: $D = (0; +\infty)$.

2. Ví dụ

➤ **VD1:** Tìm tập xác định của hàm số: $y = (6x^2 - x - 5)^3$

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **VD2:** Tìm tập xác định của hàm số: $y = (6 - x)^{-3}$

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **VD3:** Tìm tập xác định của hàm số: $y = (x^2 - x - 2)^\pi$

.....

.....

.....

.....

.....

II. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LŨY THỪA

1. Định lý

➤ **DL:** Hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ với $\alpha \in \mathbb{R}$ có đạo hàm với mọi $x > 0$ và $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

➤ **Đạo hàm:** Công thức tính đạo hàm hàm hợp: $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$.

2. Ví dụ

➤ **VD1:** Tính đạo hàm của các hàm số:

a) $y = x^{-5}$.

b) $y = x^{\pi+2}$.

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **VD2:** Tính đạo hàm của hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{3}}$ tại điểm $x = 2$

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **VD3:** Tính đạo hàm của các hàm số:

a) $y = (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$.

b) $y = (3x^2 + 2x + 1)^{\frac{4}{3}}$.

.....

.....

.....

.....

.....

III. KHẢO SÁT HÀM SỐ LŨY THỪA $y = x^\alpha$

1. Khảo sát hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$

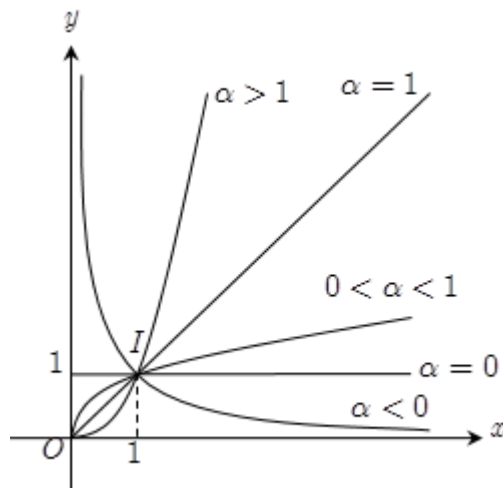
+ TXĐ: $D = (0; +\infty)$.

+ Đạo hàm : $y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

+ Sự biến thiên :

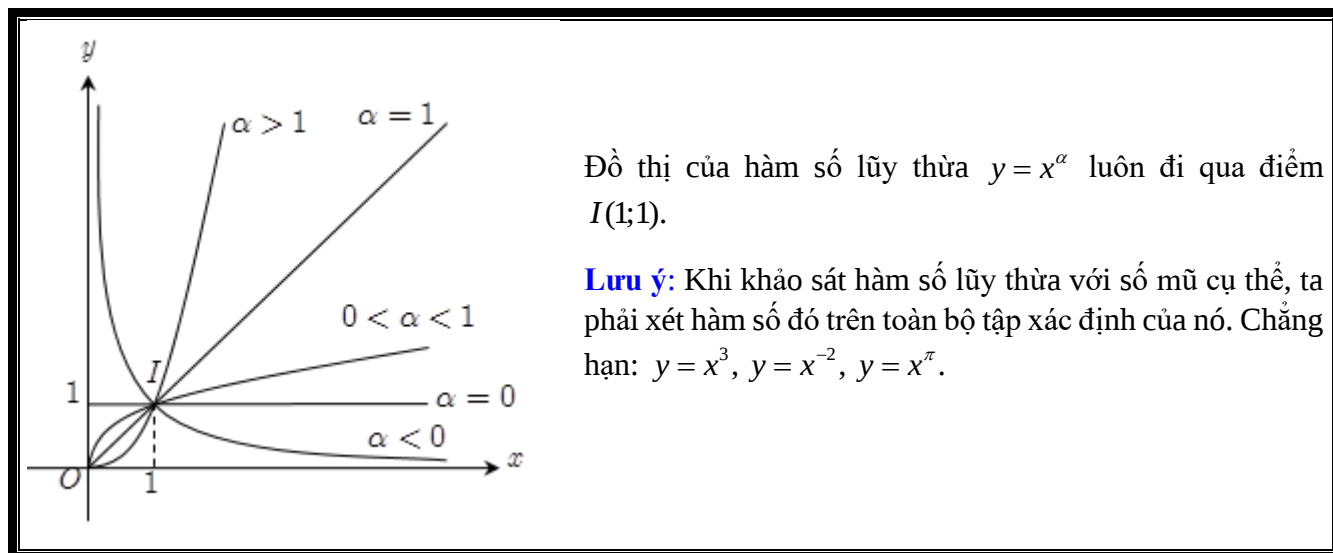
Đồng biến trên D nếu $\alpha > 0$, nghịch biến trên D nếu $\alpha < 0$

+ Đồ thị : Luôn đi qua điểm $(1;1)$.



2. Bảng tóm tắt các tính chất của hàm số lũy thừa

$y = x^\alpha, \alpha > 0$	$y = x^\alpha, \alpha < 0$																														
A. Tập khảo sát: $(0; +\infty)$.	A. Tập khảo sát: $(0; +\infty)$.																														
B. Sự biến thiên: $y' = \alpha x^{\alpha-1} > 0, \forall x > 0$. - Giới hạn đặc biệt: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$. Tiệm cận: Không có	B. Sự biến thiên: $y' = \alpha x^{\alpha-1} < 0, \forall x > 0$. - Giới hạn đặc biệt: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$. Tiệm cận: Trục Ox là tiệm cận ngang. Trục Oy là tiệm cận đứng.																														
C. Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td></td><td>0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td></td><td>$+$</td><td></td></tr><tr><td>y</td><td></td><td></td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x		0		$+\infty$	y'			$+$		y				$+\infty$	C. Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td></td><td>0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td></td><td>$-$</td><td></td></tr><tr><td>y</td><td></td><td>$+\infty$</td><td></td><td>0</td></tr></table>	x		0		$+\infty$	y'			$-$		y		$+\infty$		0
x		0		$+\infty$																											
y'			$+$																												
y				$+\infty$																											
x		0		$+\infty$																											
y'			$-$																												
y		$+\infty$		0																											
D. Đồ thị:																															



B. LUYỆN TẬP

I. Chữa bài tập SGK

Bài 1 trang 61 - SGK: Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = (1-x)^{-\frac{1}{3}}$; b) $y = (2-x^2)^{\frac{5}{3}}$; c) $y = (x^2-1)^{-2}$; d) $y = (x^2-x-2)^{\sqrt{7}}$.

Bài 2 trang 62 - SGK: Tính đạo hàm của các hàm số:

a) $y = (2x^2 - x + 1)^{\frac{1}{3}}$; b) $y = (4 - x^2 - x)^{\frac{1}{4}}$; c) $y = (3x+1)^{\frac{\pi}{2}}$; d) $y = (5-x)^{\sqrt{3}}$.

Bài 4 trang 62 - SGK: So sánh các số sau với số 1

a) $(4,1)^{2,7}$. b) $(0,2)^{0,3}$. c) $(0,7)^{3,2}$. d) $(\sqrt{3})^{0,4}$.

Bài 5 trang 62 - SGK: Hãy so sánh các cặp số sau:

a) $(3,1)^{7,2}$ và $(4,3)^{7,2}$; b) $\left(\frac{10}{11}\right)^{2,3}$ và $\left(\frac{12}{11}\right)^{2,3}$ c) $(0,3)^{0,3}$ và $(0,2)^{0,3}$.

II. Bài tập trắc nghiệm

ĐỀ BÀI

Câu 1: [Mức độ 1] Tập xác định của hàm số $y = x^{-2}$ là

A. $\mathbb{R}$. B. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. C. $(0; +\infty)$. D. $(0;1) \cup (1; +\infty)$.

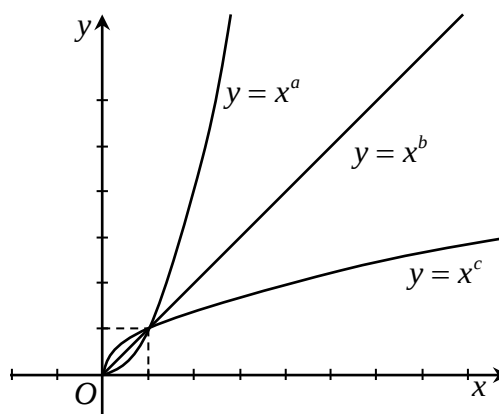
Câu 2: [Mức độ 1] Đạo hàm của hàm số $y = x^{-5}$ là

A. $y' = x^{-6}$. B. $y' = -5x^{-4}$. C. $y' = -5x^{-6}$. D. $y' = -5x^6$.

Câu 3: [Mức độ 1] Tập xác định của hàm số $y = (x-1)^{\frac{2}{3}}$ là

A. $(1; +\infty)$. B. $(0; +\infty)$. C. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. D. $\mathbb{R}$.

Câu 4: [Mức độ 2] Hình vẽ bên là đồ thị các hàm số $y = x^a$, $y = x^b$, $y = x^c$ trên miền $(0; +\infty)$.



Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây:

A. $a > c > b$.

B. $x + y = 2(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3})$.

C. $b > c > a$.

D. $c > b > a$.

Câu 5: [Mức độ 2] Đạo hàm của hàm số $y = (1-x)^{\frac{4}{3}}$ là

A. $y' = \frac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}}$.

B. $y' = -\frac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}}$.

C. $y' = \frac{4}{3}(1-x)^{\frac{7}{3}}$.

D. $y' = (1-x)^{\frac{1}{3}}$.

Câu 6: [Mức độ 2] Đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - 2x)^{\frac{1}{4}}$ là

A. $y' = \frac{1}{2}(x-1)\sqrt[4]{(x^2-2x)^3}$.

B. $y' = \frac{1}{4\sqrt[4]{(x^2-2x)^3}}$.

C. $y' = \frac{1}{2\sqrt[4]{(x^2-2x)^3}}$.

D. $y' = \frac{x-1}{2\sqrt[4]{(x^2-2x)^3}}$.

Câu 7: [Mức độ 2] Tập xác định của hàm số $y = \left(\frac{x-1}{3x+2}\right)^{\sqrt{2}}$ là

A. $y' = (1; +\infty)$.

B. $y' = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}; 1\right\}$.

C. $y' = \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

D.

$y' = \left(-\frac{2}{3}; 1\right)$.

Câu 8: [Mức độ 2] Cho hàm số $y = x^\pi$. Tính $y''(1)$.

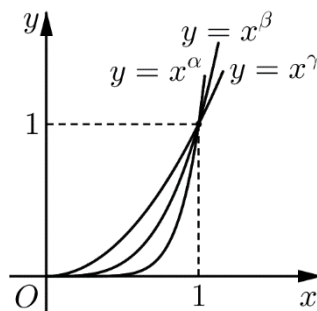
A. $y''(1) = \ln^2 \pi$.

B. $y''(1) = \pi \ln \pi$.

C. $y''(1) = 0$.

D. $y''(1) = \pi(\pi-1)$.

Câu 9: [Mức độ 3] Cho các hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$, $y = x^\beta$, $y = x^\gamma$ trên $(0; +\infty)$ có đồ thị như hình vẽ.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $\gamma < \beta < \alpha < 0$. **B.** $0 < \gamma < \beta < \alpha < 1$. **C.** $1 < \gamma < \beta < \alpha$. **D.** $0 < \alpha < \beta < \gamma < 1$.

Câu 10: [Mức độ 3] Tập xác định của hàm số $y = (2x - \sqrt{x+3})^{\sqrt{2}}$ là:

- A.** $[-3; +\infty)$. **B.** $(-\frac{3}{4}; 1)$. **C.** $(1; +\infty)$. **D.** $(-\infty; -\frac{3}{4}) \cup (1; +\infty)$

C. TÓM TẮT BÀI HỌC

TẬP XÁC ĐỊNH	ĐẠO HÀM	ĐỒ THỊ
$\alpha \in \mathbb{N}$ và $\alpha \neq 0: D = \mathbb{R}$. $\alpha \in \mathbb{Z}$ và $\alpha < 0$ hoặc $\alpha = 0: D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\alpha \notin \mathbb{Z}: D = (0; +\infty)$.	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$	

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

ĐỀ BÀI

Câu 1: [Mức độ 1] Tập xác định của hàm số $y = (2x - x^2)^\pi$ là

- A.** $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. **B.** $(0; 2)$. **C.** $[0; 2]$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 2: [Mức độ 1] Đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + x + 1)^{\frac{3}{2}}$ là

- A.** $\frac{3}{2}(x^2 + x + 1)^{\frac{1}{2}}$. **B.** $3(2x + 1)(x^2 + x + 1)^{\frac{1}{2}}$.
C. $\frac{3}{2}(2x)^{\frac{1}{2}}$. **D.** $\frac{3}{2}(2x + 1)(x^2 + x + 1)^{\frac{1}{2}}$.

Câu 3: [Mức độ 1] Cho hàm số $y = (2x^2 + 4x + 1)^{\sqrt{3}}$. Khi đó đạo hàm $y'(0)$ bằng

- A.** $4\sqrt{3}$. **B.** 0. **C.** $12\sqrt{3}$. **D.** $28\sqrt{3}$.

Câu 4: [Mức độ 1] Tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 4)^{-3}$ là

- A.** $[0; +\infty)$. **B.** $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$ **C.** $[2; +\infty)$ **D.** $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Câu 5: [Mức độ 2] Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$ là

- $$\text{A. } y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}. \qquad \text{B. } y' = (x^2+1)^{\frac{1}{3}} \ln(x^2+1).$$

- C.** $y' = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}.$

D. $y' = \frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}.$

Câu 6: [Mức độ 2] Tìm tập xác định D của hàm số $y = \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right)^{\frac{1}{3}} + x - 2$.

- A.** $D = (-1; 1)$. **B.** $D = (-1; 0) \cup (1; +\infty)$.

- C.** $(-\infty - 1;) \cup (1; +\infty)$. **D.** $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

Câu 7: [Mức độ 2] Tìm điều kiện của số thực dương a để đường thẳng $x = a$ ($a > 0$) cắt đồ thị hàm số $y = x^{\frac{1}{4}}$ và $y = x^{\frac{1}{5}}$ lần lượt tại hai điểm A, B . Biết rằng tung độ điểm A bé hơn tung độ điểm B .

- A.** $0 < a < 1$. **B.** $a > 1$. **C.** $\frac{1}{5} < a < 4$. **D.** $\frac{1}{4} < a < 5$.

Câu 8: [Mức độ 2] Đạo hàm của hàm số $y = f(x) = \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x^3}}$ với $x > 0$ là

- A.** $\sqrt[9]{x}$. **B.** $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$. **C.** $\frac{6}{7\sqrt[7]{x}}$. **D.** $\frac{7}{6}\sqrt[6]{x}$.

Câu 9: [Mức độ 3] Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-2020; 2020)$ để hàm số $y = (x^2 - 2x - m + 1)^{\sqrt{3}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

- A.** 4038. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2021.

Câu 10: [Mức độ 3] Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (x^2 - 2(m-1)x + m + 5)^{\frac{1}{3}}$ xác định trên $\mathbb{R}$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

- A.** 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

[illegible]

GIẢI TÍCH 12 – CHƯƠNG 2

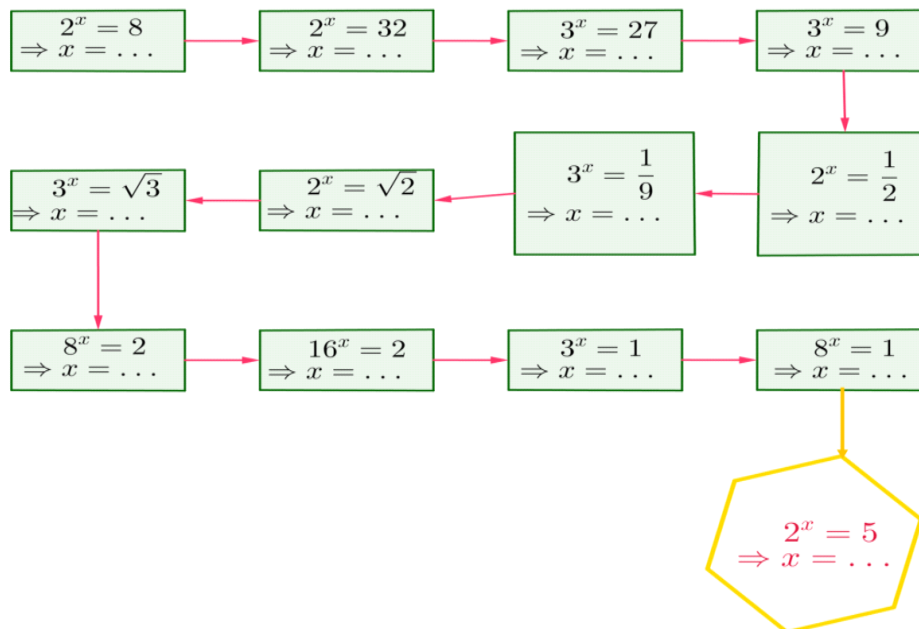
§3. LOGARIT

A. PHẦN KIẾN THỨC CHÍNH

I. ĐỊNH NGHĨA

1. Định nghĩa

➤ VD MỞ ĐẦU:



➤ **ĐN:** Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là logarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$. Ta có $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$

➤ **Chú ý:** Không có logarit của số âm và số 0.

2. Ví dụ

➤ **VD1:** Tính a) $\log_2 8$. b) $\log_{\frac{1}{3}} 9$. c) $\log_2 \frac{1}{4}$. d) $\log_3 \sqrt{3}$. e) $\log_\pi 1$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

II. Tính chất

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$, ta có các tính chất sau:

1. $\log_a 1 = 0$

2. $\log_a a = 1$

3. $a^{\log_a b} = b$

4. $\log_a (a^\alpha) = \alpha$

➤ **VD2:** Tính

a) $3^{2\log_3 5}$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 8$

c) $4^{\log_2 \frac{1}{7}}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

III. Quy tắc tính logarit

Cho các số dương a, b, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có quy tắc sau:

$$\log_a b_1 b_2 = \log_a b_1 + \log_a b_2$$

Chú ý có thể mở rộng cho tích của n số dương

$$\log_a (b_1 b_2 \dots b_n) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \dots + \log_a b_n \quad (a, b_1, b_2, \dots, b_n > 0, a \neq 1)$$

$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$$

Đặc biệt $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$

$$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$$

Đặc biệt $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$

➤ **VD3:** Tính

a) $\log_6 9 + \log_6 4$

b) $\log_2 120 - \log_2 15$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{8}$

d) $\log_7 35 - \log_7 30 + \log_7 6$

e) $\log_2 4^{\frac{1}{7}}$

f) $\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2} \log_5 15$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B. LUYỆN TẬP

I. Chữa bài tập SGK

Bài 1 trang 71 – SGK: Không sử dụng máy tính, hãy tính:

a) $\log_2 \frac{1}{8}$ b) $\log_{\frac{1}{4}} 2$ c) $\log_3 \sqrt[4]{3}$ d) $\log_{0,5} 0,125$

Bài 2 trang 71 – SGK: Tính: a) $4^{\log_2 3}$. b) $27^{\log_9 2}$. c) $9^{\log_{\sqrt{3}} 2}$. d) $4^{\log_8 27}$.

C. Bài tập trắc nghiệm

DẠNG 1. TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC – MỆNH ĐỀ ĐÚNG SAI

ĐỀ BÀI

Câu 1: [Mức độ 1] Tính giá trị của biểu thức $P = \log_2 8 + \log_3 27 - \log_5 5^3$.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 2: [Mức độ 1] Cho $a, b, c > 0; a \neq 1; b \neq 1$. , Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\log_a a = 1$. B. $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$.
C. $\log_{a^c} b = c \log_a b$. D. $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$.

Câu 3: [Mức độ 2] Với các số thực dương a, b bất kì, $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right)$ biểu diễn theo $\log_2 a$ và $\log_2 b$ là

- A. $1 + 3\log_2 a - \log_2 b$. B. $1 + \frac{1}{3}\log_2 a - \log_2 b$.
C. $1 + 3\log_2 a + \log_2 b$. D. $1 + \frac{1}{3}\log_2 a + \log_2 b$.

Câu 4: [Mức độ 2] Tính $\log_{2^{2021}} 4 - \frac{1}{1010} + \ln e^{2021}$.

- A. 2021. B. 2019. C. 2022. D. 2020.

Câu 5: [Mức độ 2] Tính giá trị của biểu thức $P = \log_a \left(a \cdot \sqrt[3]{a\sqrt{a}} \right)$ với $0 < a \neq 1$.

- A. $P = \frac{1}{3}$. B. $P = \frac{3}{2}$. C. $P = \frac{2}{3}$. D. $P = 3$.

Câu 6: [Mức độ 3] Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \log(\tan 1^\circ) + \log(\tan 2^\circ) + \log(\tan 3^\circ) + \dots + \log(\tan 89^\circ).$$

- A. $P = 0$. B. $P = 2$. C. $P = \frac{1}{2}$. D. $P = 1$.

A. PHẦN KIẾN THỨC CHÍNH

IV. Đổi cơ số

Cho ba số dương a, b, c với $a \neq 1, c \neq 1$, ta có $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Từ điều trên ta rút ra các công thức đặc biệt:

$$\log_c b = \log_c a \cdot \log_a b; \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad \log_a b \cdot \log_b a = 1, \quad (b \neq 1); \quad \log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b, \quad (\alpha \neq 0)$$

➤VD4: Tính:

a) $\frac{\log_5 3 + \log_5 2}{\log_5 6}$. b) $\log_3 5 \cdot \log_2 3 \cdot \log_5 2$. c) $2^{\log_4 15}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

➤VD5: (VD7 sgk) Cho $a = \log_2 20$. Hãy tính $\log_2 5$ và $\log_{20} 5$ theo a .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **VD6: (VD8 SGK)** Rút gọn biểu thức $A = \log_{\frac{1}{3}} 7 + 2 \log_9 49 - \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{7}$

.....

.....

.....

.....

.....

V. Logarit thập phân, logarit tự nhiên

Logarit thập phân là logarit cơ số 10, $\log_{10} b$ thường được viết là $\log b$ hoặc $\lg b$.

Logarit tự nhiên (logarit Neper): Logarit cơ số e được gọi là logarit tự nhiên, $\log_e b$ ($N > 0$), được viết là $\ln b$.

Với $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $e \approx 2,718\ 281\ 828\ 459\ 045$

➤ **Chú ý**

Muốn tính $\log_a b$ với $a \neq 10$ và $a \neq e$, bằng MTBT, ta có thể sử dụng công thức đổi cơ số.

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}; \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Chẳng hạn $\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,584\ 962\ 501$

B. LUYỆN TẬP

I. Chữa bài tập SGK

Bài 3 trang 71 – SGK: Rút gọn biểu thức:

a) $\log_3 6 \cdot \log_8 9 \cdot \log_6 2$

b) $\log_a b^2 + \log_{a^2} b^4$

Bài 5 trang 71 – SGK:

a) Cho $a = \log_{30} 3$, $b = \log_{30} 5$. Hãy tính $\log_{30} 1350$ theo a, b .

b) Cho $c = \log_{15} 3$. Hãy tính $\log_{25} 15$ theo c .

C. Bài tập trắc nghiệm

DẠNG 2. BIỂU DIỄN LOGARIT

❖ Phương pháp:

Cho $\alpha = \log_a b$. Biểu diễn $\log_m n$ theo α .

- ♦ Nếu $(a, b) = 1$ thì $\log_m n = \frac{\log_a n}{\log_a m}$ và sử dụng công thức tích, thương, lũy thừa biến đổi tiếp.
- ♦ Nếu $(a, b) \neq 1$ thì biến đổi $\log_a b = k \cdot \log_p q$ trong đó $(p, q) = 1$ sau đó $\log_m n = \frac{\log_p n}{\log_p m}$ và sử dụng công thức tích, thương, lũy thừa biến đổi tiếp.

ĐỀ BÀI

- Câu 1:** [Mức độ 1] Cho $\log_2 5 = a$. Giá trị của $\log_8 25$ theo a bằng
- A. $3a$. B. $2a$. C. $\frac{3}{2}a$. D. $\frac{2}{3}a$.
- Câu 2:** [Mức độ 1] Đặt $\log 4 = a$, khi đó $\log 4000$ biểu thị theo a là
- A. $3 + a$. B. $4 + a$. C. $3 + 2a$. D. $4 + 2a$.
- Câu 3:** [Mức độ 2] Cho $\log_2 x = a$. Tính giá trị của biểu thức $A = \log_2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^3 + \log_4 x$ theo a .
- A. $\frac{a}{2}$. B. $-\frac{a}{2}$. C. a . D. $-a$.
- Câu 4:** [Mức độ 2] Cho $\log_2 5 = a$; $\log_3 5 = b$. Khi đó $\log_6 5$ tính theo a và b là.
- A. $\frac{ab}{a+b}$. B. $\frac{1}{a+b}$. C. $a^2 + b^2$. D. $a + b$.
- Câu 5:** [Mức độ 3] Với mọi số $a, b > 0$ thỏa mãn $9a^2 + b^2 = 10ab$ thì đẳng thức đúng là.
- A. $2\log(3a+b) = \log a + \log b$. B. $\frac{\log(3a+b)}{4} = \frac{\log a + \log b}{2}$.
- C. $\log a + \log(b+1) = 1$. D. $\log \frac{3a+b}{4} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN (phần này không làm PPT)

ĐỀ BÀI

- Câu 1:** [Mức độ 1] Cho $a, b, c > 0$ và $a, b \neq 1$, Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?
- A. $a^{\log_a b} = b$. B. $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$.
- C. $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$. D. $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$.
- Câu 2:** [Mức độ 1] Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2(a^2)$ biểu diễn theo $\log_2 a$ là
- A. $2\log_2 a$. B. $\frac{1}{2} + \log_2 a$. C. $2 + \log_2 a$. D. $\frac{1}{2}\log_2 a$.
- Câu 3:** [Mức độ 1] Giá trị biểu thức $A = 2^{\log_2 15 - \log_2 5}$ là:

- A. $A=3$. B. $A=15$. C. $A=5$. D. $A=10$.

Câu 4: [Mức độ 1] Giá trị biểu thức $P = \log_5 3 \cdot \log_2 5 - \frac{\ln 9}{\ln 4}$ là

- A. 0. B. 2. C. 1. D. -1.

Câu 5: [Mức độ 2] Cho hai số thực dương a và b với $a \neq 1$, $\log_{a^2}(ab)$ biểu diễn theo $\log_a b$ là

A. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2} \log_a b$. B. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{4} \log_a b$.

C. $\log_{a^2}(ab) = 2 + 2 \log_a b$. D. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_a b$.

Câu 6: [Mức độ 2] Biểu thức $P = \frac{1}{\log_{49} 5} - \frac{1}{\log_7 5}$ bằng.

- A. $\log_7 5$. B. 2. C. $\log_5 7$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 7: [Mức độ 2] Cho $\log 2 = a$ Tính $\log \frac{125}{4}$ theo a ?

- A. $4(1+a)$. B. $2(a+5)$. C. $3-5a$. D. $6+7a$.

Câu 8: [Mức độ 3] Cho hai số a, b thỏa mãn $\log_4 a + \log_9 b^2 = 5$ và $\log_4 a^2 + \log_9 b = 4$. Giá trị ab là:

- A. 48. B. 256. C. 144. D. 324.

Câu 9: [Mức độ 3] Cho $\log_6 9 = a$. Tính $\log_3 2$ theo a .

- A. $\frac{a+2}{a}$. B. $\frac{a-2}{a}$. C. $\frac{2-a}{a}$. D. $\frac{a}{2-a}$.

Câu 10: [Mức độ 4] Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $b > 1$ và $\sqrt{a} \leq b < a$. Giá trị nhỏ nhất của

biểu thức $P = \log_{\frac{a}{b}} a + 2 \log_{\sqrt{b}} \left(\frac{a}{b} \right)$ là

- A. 4. B. 3. C. 5. D. 7.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

GIẢI TÍCH 12 – CHƯƠNG 2

§4. HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LOGARIT

A. PHẦN KIẾN THỨC CHÍNH

I. Hàm số mũ

Đặt vấn đề

Câu hỏi 1: Diện tích rừng nước ta năm 2014 là 13,8 triệu ha, giả sử sau mỗi năm diện tích rừng nước ta tăng thêm x phần trăm diện tích hiện có. Hỏi sau 10 năm, diện tích rừng nước ta sẽ là bao nhiêu phần trăm diện tích hiện nay?

Câu hỏi 2: Anh An muốn mua xe Ford Fiesta trị giá 584 triệu theo phương thức trả trước 150 triệu, còn lại 434 triệu sẽ vay ngân hàng theo hình thức trả góp hàng tháng 10 triệu với lãi suất 7%/năm. Hỏi sau bao nhiêu năm thì anh An trả hết nợ?

Câu hỏi 3: Năm 2019 dân số Việt Nam có 96,2 triệu người với tỉ lệ gia tăng tự nhiên là 1,08%. Hỏi đến năm 2030 dân số Việt Nam là bao nhiêu nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi?

VD MỞ ĐẦU

Nêu bài toán “lãi kép”

Bài toán 1: Ông A gửi số tiền P đồng vào một ngân hàng với lãi suất r /năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Sau n năm, số tiền được lĩnh (còn gọi là vốn tích lũy) của ông A là P_n

Hãy điền vào bảng sau:

Sau năm thứ k	Tiền lãi	Số tiền lĩnh được (vốn tích lũy)
$k = 1$	$T_1 = P.r$	$P_1 = P + T_1 = P + P.r = P(1+r)$
$k = 2$	$T_2 = \dots$	$P_2 = \dots$
$\dots$		$\dots$
$k = n$	$T_n = \dots$	$P_n = \dots$

1. Định nghĩa:

Cho số thực dương $a \neq 1$. Hàm số $y = a^x$ được gọi là hàm số mũ cơ số a .

➤ **Chú ý:** cơ số a là số dương khác 1.

➤ **VD1.** Học sinh lấy ví dụ về hàm số mũ, xác định cơ số trong các trường hợp đó.

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **VD2.** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số mũ? Cơ số là bao nhiêu?

A. $y = (\sqrt{3})^x$.

B. $y = x^{\frac{1}{3}}$.

C. $y = x^{-4}$.

D. $y = 4^{-x}$.

.....

.....

.....

.....

.....

2. Đạo hàm của hàm số mũ

Thừa nhận kết quả: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$.

➤ **Định lí 1.** Hàm số $y = e^x$ có đạo hàm tại mọi x và

$(e^x)' = e^x$	Tổng quát ta có	$(e^u)' = u' \cdot e^u$
----------------	-----------------	-------------------------

➤ **VD3.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = e^{2x+1}$

b) $y = e^{\frac{x+1}{2x-3}}$

c) $y = 3^x$

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **Định lí 2.** Hàm số $y = a^x (0 < a \neq 1)$ có đạo hàm tại mọi điểm x và $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	Tổng quát ta có	$(a^u)' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$
----------------------------	-----------------	-------------------------------------

➤ **VD 4.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 8^x$

b) $y = 3^{2x^2-x+1}$

c) $y = 5^{2\sin x - 4}$

.....

.....

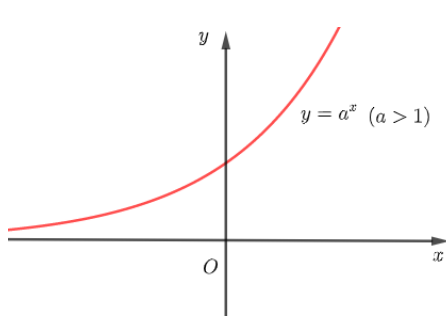
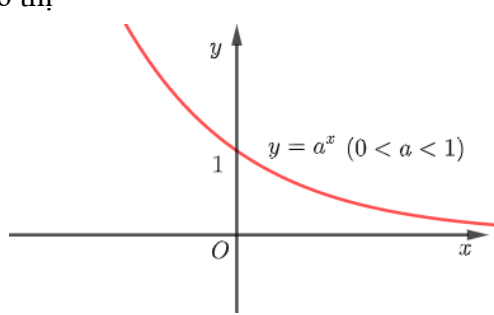
.....

.....

.....

3. Khảo sát hàm số mũ

Hàm số $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$).	
$a > 1$	$0 < a < 1$

1. Tập xác định $\mathbb{R}$ 2. Sự biến thiên $y' = a^x \cdot \ln a > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ Tiệm cận: Trục Ox là tiệm cận ngang.	1. Tập xác định $\mathbb{R}$ 2. Sự biến thiên $y' = a^x \cdot \ln a < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ Tiệm cận: Trục Ox là tiệm cận ngang.																														
Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td>0</td><td>1</td><td>a</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	y'		+	+	+	y		0	1	a	Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td></td><td>1</td><td>a</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	y'		-	-	-	y	$+\infty$		1	a
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$																											
y'		+	+	+																											
y		0	1	a																											
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$																											
y'		-	-	-																											
y	$+\infty$		1	a																											
Đồ thị 	Đồ thị 																														

II. Hàm số logarit

1. Định nghĩa

Cho số thực dương a khác 1. Hàm số $y = \log_a x$ được gọi là **hàm số logarit cơ sở a** .

➤ **Chú ý:** Hàm số $y = \log_a x$ với điều kiện $0 < a \neq 1$ có tập xác định $D = (0; +\infty)$.

➤ **VD 1:** Học sinh lấy ví dụ về hàm số logarit

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **VD 2.** Trong các hàm số sau, hàm nào là hàm số logarit? Cơ sở bao nhiêu?

A. $y = 2^x$.

B. $\ln x$.

C. $y = \frac{1}{x}$.

D. $y = \sqrt{x}$.

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **VD3:** Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = \log_2(2x+1)$

b) $y = \log_3(x^2 - 3x + 2)$

c) $y = \ln \frac{-x-1}{x-1}$

d) $y = \log(x^2 + x + 1)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Đạo hàm của hàm số logarit

➤ **Định lý 3.** Hàm số $y = \log_a x$, ($0 < a \neq 1$) có đạo hàm tại mọi $x > 0$ và

Tổng quát ta có

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Đặc biệt

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}.$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

➤ **VD 4.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \ln(x^2 + x + 1).$

b) $y = \log_3(x^2 - 2x).$

c) $y = 5x^2 - 2x \log_2 x.$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

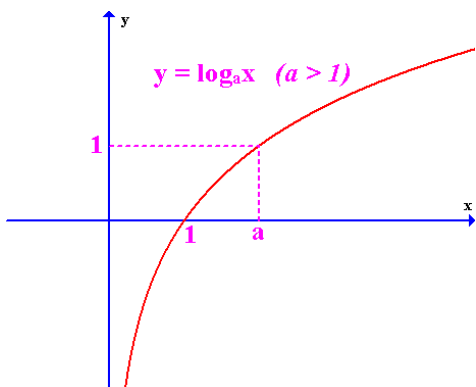
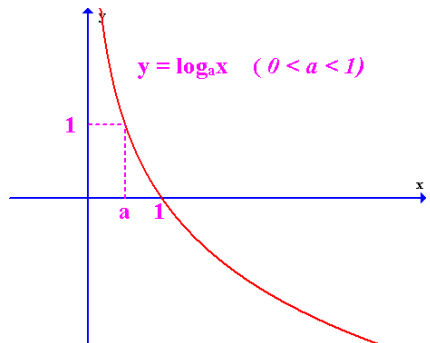
.....

.....

.....

.....

3. Khảo sát hàm số logarit

Hàm số $y = \log_a x \quad (0 < a \neq 1).$																															
$a > 1$	$0 < a < 1$																														
1. Tập xác định $(0; +\infty)$	1. Tập xác định $(0; +\infty)$																														
2. Sự biến thiên $y' = \frac{1}{x \ln a} > 0, \forall x \in (0; +\infty)$ $\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$ Tiệm cận: Trục Oy là tiệm cận đứng.	2. Sự biến thiên $y' = \frac{1}{x \ln a} < 0, \forall x \in (0; +\infty)$ $\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$ Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$ Tiệm cận: Trục Oy là tiệm cận đứng.																														
Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>a</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	0	1	a	$+\infty$	y'		+	+	+	y	$-\infty$		0	$+\infty$	Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>a</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td></td><td>0</td><td>$-\infty$</td></tr></table>	x	0	a	1	$+\infty$	y'		-	-	-	y	$+\infty$		0	$-\infty$
x	0	1	a	$+\infty$																											
y'		+	+	+																											
y	$-\infty$		0	$+\infty$																											
x	0	a	1	$+\infty$																											
y'		-	-	-																											
y	$+\infty$		0	$-\infty$																											
Đồ thị 	Đồ thị 																														

➤ **VD:** Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số sau trên cùng một hệ trục tọa độ $y = \log_3 x$ và

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **Nhận xét:** Đồ thị các hàm số $y = \log_a x$ và $y = a^x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

Tóm tắt bảng đạo hàm của hàm số mũ và hàm số logarit

Bảng đạo hàm của các hàm số lũy thừa, mũ, logarit

Hàm sơ cấp	Hàm hợp
$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u}$ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(e^u)' = u' \cdot e^u$ $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$

B. LUYỆN TẬP

I. Chữa bài tập SGK

Bài 1 trang 77 – SGK: Vẽ đồ thị hàm số (giao nhiệm vụ cho các nhóm)

a) $y = 4^x$

b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

Bài 2 trang 77 – SGK: Tính đạo hàm của các hàm số

a) $y = 2xe^x + 3\sin 2x$. b) $y = 5x^2 - 2^x \cos x$. c) $y = \frac{x+1}{3^x}$.

Bài 3 trang 77 – SGK: Tìm tập xác định của các hàm số sau (giao nhiệm vụ cho các nhóm)

a) $\log_2(5-2x)$. b) $\log_3(x^2-2x)$. c) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-4x+3)$. d) $\log_{0,4} \frac{3x+2}{1-x}$.

Bài 5 trang 78 – SGK: Tính đạo hàm của các hàm số

a) $y = 3x^2 - \ln x + 4\sin x$. b) $y = \log(x^2 + x + 1)$. c) $y = \frac{\log_3 x}{x}$.

II. Bài tập trắc nghiệm

ĐỀ BÀI

Câu 1: [Mức độ 1] Tập xác định của hàm số $y = 5^x$ là

A. $\mathbb{R}$. B. $[0; +\infty)$. C. $(0; +\infty)$. D. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Câu 2: [Mức độ 2] Hàm số $f(x) = 2^{2x-x^2}$ có đạo hàm là

A. $f'(x) = (2x-2) \cdot 2^{2x-x^2} \cdot \ln 2$. B. $f'(x) = \frac{(2x-2) \cdot 2^{2x-x^2}}{\ln 2}$.
C. $f'(x) = (1-x) \cdot 2^{1+2x-x^2} \cdot \ln 2$. D. $f'(x) = \frac{(1-x) \cdot 2^{2x-x^2}}{\ln 2}$.

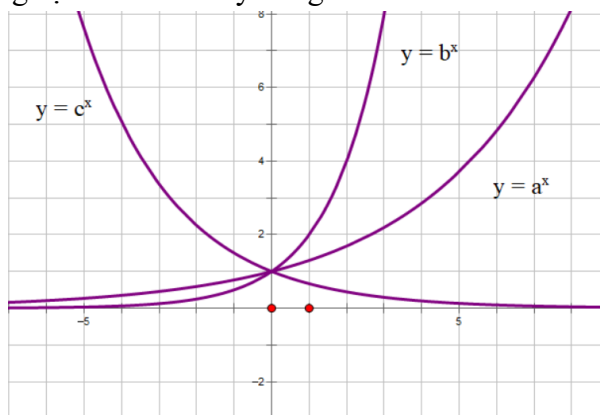
Câu 3: [Mức độ 1] Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$. B. $y = 2^x$. C. $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$. D. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Câu 4: [Mức độ 2] Hàm số $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$ có đạo hàm

A. $f'(x) = (x^2 + 4x + 2)e^{-x}$. B. $f'(x) = (2x + 2)e^{-x}$.
C. $f'(x) = (-2x - 2)e^{-x}$. D. $f'(x) = (-x^2 + 2)e^{-x}$.

Câu 5: [Mức độ 3] Hình bên là đồ thị hàm số $y = a^x, y = b^x, y = c^x$ ($0 < a, b, c \neq 1$) được vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $a > b > c$. B. $c > b > a$. C. $a > c > b$. D. $b > a > c$.

Câu 6: [Mức độ 1] Tập xác định của hàm số $y = \log_5(x-2)$ là

- A. $(2; +\infty)$. B. $[2; +\infty)$. C. $\mathbb{R}$. D. $(-\infty; 2)$.

Câu 7: [Mức độ 2] Tìm tập xác định D của hàm số $y = \ln \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

- A. $D = (1; 2)$. B. $D = (2; +\infty)$.
C. $D = (-\infty; 1)$. D. $D = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

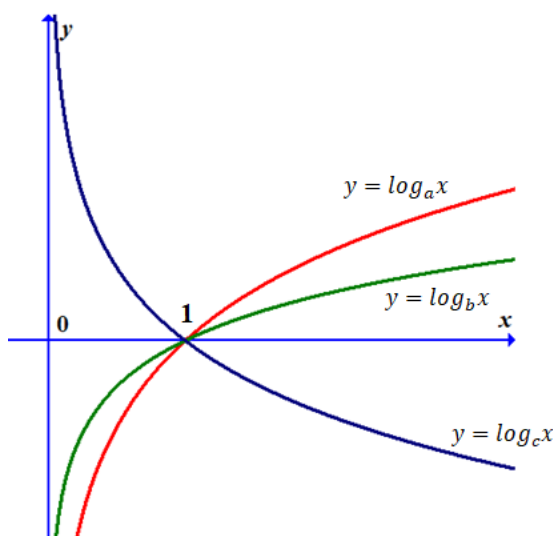
Câu 8: [Mức độ 2] Đạo hàm của hàm số $y = \ln(x^2 + 2021)$ là

- A. $y' = \frac{2x}{x^2 + 2021}$. B. $y' = \frac{x}{x^2 + 2021}$.
C. $y' = \frac{1}{x^2 + 2021}$. D. $y' = \frac{2x}{(x^2 + 2021) \log e}$.

Câu 9: [Mức độ 2] Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - mx + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$?

- A. 5. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 10: [Mức độ 3] Cho các số $a, b, c > 0$ và $a, b, c \neq 1$. Đồ thị của các hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$ và $y = \log_c x$ được cho bởi hình vẽ



Mệnh đề nào dưới đây đúng

- A. $c < b < a$. B. $b < a < c$. C. $c < a < b$. D. $a < b < c$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN (phần này không làm PPT) ĐỀ BÀI

Câu 1: [Mức độ 1] Tập xác định của hàm số $y = \log_2 x$ là

- A. $[0; +\infty)$. B. $(-\infty; +\infty)$. C. $(0; +\infty)$. D. $[2; +\infty)$.

Câu 2: [Mức độ 1] Tập xác định của hàm số $y = \log_5 x$ là

- A. $[0; +\infty)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(0; +\infty)$. D. $(-\infty; +\infty)$.

Câu 3: [Mức độ 2] Tìm tập xác định của hàm số $y = \log_{2018}(3x - x^2)$.

- A. $D = \mathbb{R}$. B. $D = (0; +\infty)$.

C. $D = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

D. $D = (0; 3)$.

Câu 4: [Mức độ 2] Tìm tập xác định của hàm số: $y = 2^{\sqrt{x}} + \log(3-x)$

A. $[0; +\infty)$.

B. $(0; 3)$.

C. $(-\infty; 3)$.

D. $[0; 3)$.

Câu 5: [Mức độ 2] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log(x^2 - 2x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m \leq 2$.

B. $m > 2$.

C. $m \geq 0$.

D. $m < 0$.

Câu 6: [Mức độ 1] Tìm đạo hàm của hàm số $y = \log x$.

A. $y' = \frac{\ln 10}{x}$.

B. $y' = \frac{1}{x \ln 10}$.

C. $y' = \frac{1}{10 \ln x}$.

D. $y' = \frac{1}{x}$.

Câu 7: [Mức độ 2] Hàm số $y = 2^{x^2-x}$ có đạo hàm là

A. $2^{x^2-x} \cdot \ln 2$.

B. $(2x-1) \cdot 2^{x^2-x} \cdot \ln 2$.

C. $(x^2-x) \cdot 2^{x^2-x-1}$.

D. $(2x-1) \cdot 2^{x^2-x}$.

Câu 8: [Mức độ 2] Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{4^x}$

A. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$.

B. $y' = \frac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$.

C. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$.

D. $y' = \frac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$.

Câu 9: [Mức độ 2] Hàm số $f(x) = \log_2(x^2 - 2x)$ có đạo hàm

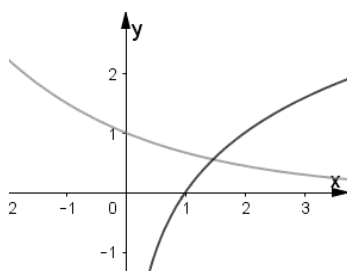
A. $f'(x) = \frac{\ln 2}{x^2 - 2x}$.

B. $f'(x) = \frac{1}{(x^2 - 2x)\ln 2}$.

C. $f'(x) = \frac{(2x-2)\ln 2}{x^2 - 2x}$.

D. $f'(x) = \frac{2x-2}{(x^2 - 2x)\ln 2}$.

Câu 10: [Mức độ 2] Cho đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = \log_b x$ như hình vẽ.



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $0 < a < \frac{1}{2} < b$.

B. $0 < a < 1 < b$.

C. $0 < b < 1 < a$.

D. $0 < a < 1, 0 < b < \frac{1}{2}$.

Câu 11: [Mức độ 2] Trong các hàm số sau hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

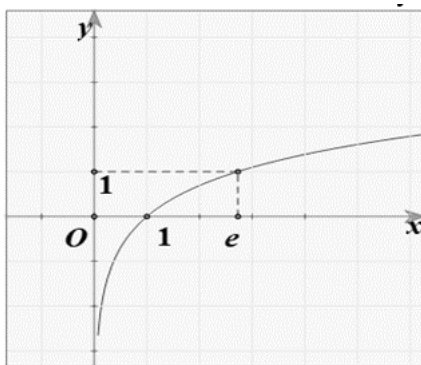
A. $\log_3 x^2$.

B. $y = \log(x^3)$.

C. $y = \left(\frac{e}{4}\right)^x$.

D. $y = \left(\frac{2}{5}\right)^{-x}$.

Câu 12: [Mức độ 2] Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- A. $y = -e^x$. B. $y = |\ln x|$. C. $y = \ln x$. D. $y = e^x$.

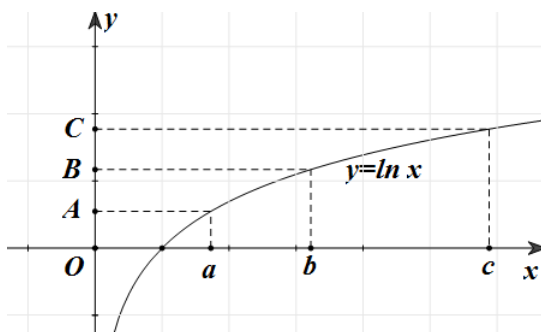
Câu 13: [Mức độ 3] Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \ln(-x^2 + mx + 2m + 1)$ xác định với mọi $x \in (1; 2)$.

- A. $m \geq -\frac{1}{3}$. B. $m \geq \frac{3}{4}$. C. $m > \frac{3}{4}$. D. $m < -\frac{1}{3}$.

Câu 14: [Mức độ 3] Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 + 1) - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

- A. $B(5; +\infty)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $[-1; 1]$. D. $(-\infty; -1]$.

Câu 15: [Mức độ 3] Trong hình dưới đây, điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AC . Khẳng định nào sau đây là đúng?



- A. $a + c = 2b$. B. $ac = b^2$. C. $ac = 2b^2$. D. $ac = b$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

GIẢI TÍCH 12 – CHƯƠNG 2

§5. PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

A. PHẦN KIẾN THỨC CHÍNH

I. PHƯƠNG TRÌNH MŨ

1. Phương trình mũ cơ bản

➤ VD MỞ ĐẦU:

Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 8,4%/năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi sau bao nhiêu năm người đó thu được gấp đôi số tiền ban đầu?

➤ Định nghĩa: Phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x = b$ ($a > 0, a \neq 1$)

➤ Chú ý:

Với $b > 0$, ta có $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$

Với $b \leq 0$, phương trình vô nghiệm.

Ví dụ

➤ VD1: Giải phương trình $2^{2x+3} = 7$

.....

.....

.....

➤ VD2: Giải phương trình $2^{2x-1} + 4^{x+1} = 5$

.....

.....

.....

.....

.....

2. Cách giải một số phương trình mũ đơn giản

a) Đưa về cùng cơ số: Bằng cách đưa về dạng $a^{A(x)} = a^{B(x)}$ và giải phương trình $A(x) = B(x)$.

Ví dụ:

➤ VD3: Giải phương trình $6^{2x-3} = 1$

.....

.....

.....

➤ VD4: Giải phương trình $1,5^{5x-7} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$.

.....

.....

.....

.....
.....

b) Đặt ẩn phụ

➤ **VD5:** Giải phương trình $9^x - 4.3^x - 45 = 0$.

.....
.....
.....
.....
.....

c) Lôgarit hoá

➤ **VD6:** Giải phương trình $3^x.2^{x^2} = 1$.

.....
.....
.....
.....
.....

II – Phương trình logarit

Phương trình logarit là phương trình có chứa ẩn số trong biểu thức dưới dấu logarit.

Chẳng hạn, có phương trình

$$\log_{\frac{1}{2}} x = 4,$$

$$\log_4^2 x - 2\log_4 x + 1 = 0$$

là những phương trình logarit.

1. Phương trình logarit cơ bản

Phương trình logarit cơ bản có dạng $\log_a x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

Phương trình $\log_a x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$) luôn có nghiệm duy nhất $x = a^b$ với mọi b .

➤ **VD1:** Giải phương trình $\log_4 (x-1) = 3$

.....
.....
.....
.....
.....

➤ **VD2:** Giải phương trình $\log_2 (x^2 - 1) = 3$

.....

.....

.....

.....

.....

2. Cách giải một số phương trình logarit đơn giản

Người ta thường sử dụng các phương pháp sau để giải một số phương trình logarit.

a) Đưa về cùng cơ số

➤ **VD3:** Giải phương trình

$$\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 11.$$

.....

.....

.....

.....

.....

b) Đặt ẩn phụ

➤ **VD4:** Giải phương trình

$$\frac{1}{5 - \log x} + \frac{2}{1 + \log x} = 1.$$

.....

.....

.....

.....

.....

c) Mũ hóa

➤ **VD5:** Giải phương trình $\log_2 (9 - 2^x) = 3$.

.....

.....

.....

.....

.....

B. LUYỆN TẬP

I. Chữa bài tập SGK

1. Phương trình mũ

Bài 1 trang 84 – SGK:

$$a) (0,3)^{3x-2} = 1 \Leftrightarrow (0,3)^{3x-2} = (0,3)^0 \Leftrightarrow 3x-2=0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$b) \left(\frac{1}{5}\right)^x = 25 \Leftrightarrow 5^{-x} = 5^2 \Leftrightarrow x = -2$$

$$c) 2^{x^2-3x+2} = 4 \Leftrightarrow 2^{x^2-3x+2} = 2^2 \Leftrightarrow x^2-3x+2=2 \Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(x-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{0; 3\}$.

$$d) (0,5)^{x+7} \cdot (0,5)^{1-2x} = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x+7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1-2x} = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{8-x} = 2 \Leftrightarrow 2^{x-8} = 2^1 \Leftrightarrow x-8=1 \Leftrightarrow x=9$$

Bài 2 trang 84 – SGK:

$$a) 3^{2x-1} + 3^{2x} = 108 \Leftrightarrow 3^{2x-1} + 3^{2x-1} \cdot 3 = 108 \Leftrightarrow 4 \cdot 3^{2x-1} = 108 \Leftrightarrow 3^{2x-1} = 27 \Leftrightarrow 3^{2x-1} = 3^3 \\ \Leftrightarrow 2x-1=3 \Leftrightarrow x=2.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=2$.

$$b) 2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 28$$

$$\Leftrightarrow 2^{x-1} \cdot 2^2 + 2^{x-1} + 2^{x-1} \cdot 2 = 28 \Leftrightarrow 2^{x-1} \cdot (2^2 + 1 + 2) = 28 \Leftrightarrow 2^{x-1} \cdot 7 = 28$$

$$\Leftrightarrow 2^{x-1} = 4 \Leftrightarrow 2^{x-1} = 2^2 \Leftrightarrow x-1=2 \Leftrightarrow x=3.$$

$$c) 64^x - 8^x - 56 = 0 \Leftrightarrow (8^x)^2 - 8^x - 56 = 0 \text{ (Phương trình bậc hai ẩn } 8^x \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8^x = -7(L) \\ 8^x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow 8^x = 8 \Leftrightarrow x=1$$

$$d) 3 \cdot 4^x - 2 \cdot 6^x = 9^x$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 4^x - 2 \cdot 6^x - 9^x = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{4^x}{9^x} - 2 \cdot \frac{6^x}{9^x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - 1 = 0$$

Đặt $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t > 0$, phương trình trở thành:

$$3 \cdot t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-\frac{1}{3}(L) \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x=0$$

2) Phương trình logarit

Bài 3 trang 84 – SGK: Giải các phương trình logarit:

$$a) \log_3(5x+3) = \log_3(7x+5); \quad b) \log(x-1) - \log(2x-11) = \log 2;$$

c) $\log_2(x-5) + \log_2(x+2) = 3$; d) $\log(x^2 - 6x + 7) = \log(x-3)$.

Bài 4 trang 84 – SGK: Giải các phương trình logarit:

a) $\frac{1}{2} \log(x^2 + x - 5) = \log 5x + \log \frac{1}{5x}$;

b) $\frac{1}{2} \log(x^2 - 4x - 1) = \log 8x - \log 4x$;

c) $\log_{\sqrt{2}} x + 4 \log_4 x + \log_8 x = 13$.

II. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: [Mức độ 1] Tìm tập nghiệm S của phương trình $2^{x+1} = 8$.

- A. $S = \{1\}$. B. $S = \{-1\}$. C. $S = \{4\}$. D. $S = \{2\}$.

Câu 2: [Mức độ 1] Tìm nghiệm của phương trình $2^{x-3} = 2$.

- A. $x = 1$. B. $x = 2$. C. $x = 4$. D. $x = 3$.

Câu 3: [Mức độ 1] Số nghiệm của phương trình $2^{x^2-x} = 1$ là

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 4: [Mức độ 1] Cho phương trình $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$. Khi đặt $t = 2^x$, ta được phương trình nào dưới đây?

- A. $t^2 + 2t - 3 = 0$. B. $4t - 3 = 0$. C. $t^2 + t - 3 = 0$. D. $2t^2 - 3t = 0$.

Câu 5: [Mức độ 2] Số nghiệm của phương trình: $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 6: [Mức độ 2] Phương trình $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$ có tổng các nghiệm là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 7: [Mức độ 2] Cho phương trình $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình trên. Khi đó, tích $x_1 \cdot x_2$ bằng

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 8: [Mức độ 3] Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$9^{1+\sqrt{1-x^2}} - (m+3)3^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2m+1 = 0$$
 có nghiệm thực?

- A. 5. B. 7. C. Vô số. D. 3.

Câu 9: [Mức độ 3] Gọi a là một nghiệm của phương trình $4 \cdot 2^{2 \log x} - 6^{\log x} - 18 \cdot 3^{2 \log x} = 0$. Khẳng định nào sau đây đúng khi đánh giá về a ?

- A. $(a-10)^2 = 1$. B. a cũng là nghiệm của phương trình $\left(\frac{3}{2}\right)^{\log x} = \frac{9}{4}$.
C. $a^2 + a + 1 = 2$. D. $a = 10^{-2}$.

Câu 10: Giải phương trình $\log_2(x^2 - x + 2) = 1$.

- A. $x = 0$ v $x = 1$. B. $x = 0$ v $x = 2$. C. $x = 0$ v $x = -1$. D. Vô nghiệm.

Câu 11: Tập nghiệm của phương trình $\log_2(3x - 7) = 3$ là

- A. $\{1\}$. B. $\{-2\}$. C. $\{5\}$. D. $\{-3\}$

Câu 12: Phương trình $\log_2(x^2 + 2x + 1) = 0$ có bao nhiêu nghiệm âm ?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3

Câu 13: Tập nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{3}}|x+1| = 2$ là

- A. $\{-3, 2\}$. B. $\{-4, 2\}$. C. $\{3\}$. D. $\{-10, 2\}$.

Câu 14: Tập nghiệm của phương trình: $\log_2(2^x - 1) = -2$ là

- A. $\{2 - \log_2 5\}$. B. $\{-2 + \log_2 5\}$. C. $\{\log_2 5\}$. D. $\{2 + \log_2 5\}$.

Câu 15: Phương trình: $\ln x + \ln(3x - 2) = 0$ có mấy nghiệm?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3

Câu 16: Tìm số nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{3}} x \cdot \log_3 x \cdot \log_9 x = 8$.

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Câu 17: Tìm số nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{5}}(x+2) = \log_5(4x+6)$.

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 18: Phương trình $\log_2(x+2) + \log_4 x^2 = 3$ có nghiệm là

- A. $x = -2, x = 4$. B. $x = 2, x = 4$. C. $x = 2$. D. $x = 0$.

Câu 19: Biết rằng phương trình $\left[\log_{\frac{1}{3}}(9x)\right]^2 + \log_3 \frac{x^2}{81} - 7 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Tính $P = x_1 x_2$.

- A. $P = \frac{1}{9^3}$. B. $P = 3^6$. C. $P = 9^3$. D. $P = 3^8$.

Câu 20: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) = 1$.

- A. $S = \left\{\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$. B. $S = \{3\}$.
C. $S = \{2-\sqrt{5}; 2+\sqrt{5}\}$. D. $S = \{2+\sqrt{5}\}$.

Câu 21: [Mức độ 1] Số nghiệm của phương trình $2^{x^2-x} = 1$ là

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 22: [Mức độ 1] Nghiệm của phương trình $2^{2x} = 2^{x+2018}$ bằng

- A. 1008 B. 2017 C. 1009 D. 2018

Câu 23: [Mức độ 1] Phương trình $3^{2x+1} - 28.3^x + 9 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) Tính giá trị $T = x_1 - 2x_2$

- A. $T = -3$. B. $T = 0$. C. $T = 4$. D. $T = -5$.

Câu 24: [Mức độ 2] Nghiệm của phương trình $9^{\sqrt{x-1}} = e^{\ln 81}$ là

- A. $x = 5$. B. $x = 4$. C. $x = 6$. D. $x = 17$.

Câu 25: [Mức độ 2] Giải phương trình $4^x - 2^{x+1} + 1 = 0$ trên tập số thực $\mathbb{R}$.

- A. $x = 1$. B. $x = 0$. C. $x = \frac{1}{2}$. D. $x = 0$.

Câu 26: [Mức độ 2] Nghiệm của phương trình $4^{2x-m} = 8^x$ (m tham số) là

- A. $x = -m$. B. $x = -2m$. C. $x = 2m$. D. $x = m$.

Câu 27: [Mức độ 3] Phương trình $4^{x+1} - 2.6^x + m.9^x = 0$ có 2 nghiệm thực phân biệt nếu

- A. $m > 0$. B. $m < 0$. C. $0 < m < \frac{1}{4}$. D. $m < \frac{1}{4}$.

Câu 28: [Mức độ 3] Tìm số giá trị nguyên của m để phương trình

$$4^{x+1} + 4^{1-x} = (m+1)(2^{2+x} - 2^{2-x}) + 16 - 8m$$
 có nghiệm trên $[0;1]$?

- A. 2. B. 5. C. 4. D. 3.

Câu 29: Tập nghiệm của phương trình $\log_3(3-x) + \log_3(1-x) = 1$ là

- A. $\{4\}$. B. $\emptyset$. C. $\{0\}$. D. $\{0;4\}$.

Câu 30: Phương trình $\log_3(4x-2) + \log_{\frac{1}{3}}(x^2+1) = 0$ có hai nghiệm $x_1 < x_2$. Tính $x_1 + 2x_2$

- A. 0. B. 7. C. 4. D. 5.

Câu 31: Phương trình $\log_2 x + \log_2(x^2) = \log_2(4x)$ là

- A. $\{0; -2; 2\}$. B. $\{0; 2\}$. C. $\{-2; 2\}$. D. $\{2\}$.

Câu 32: Số nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^3 - 2x^2 - 3x + 4) + \log_2(x-1) = 0$ là

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

GIẢI TÍCH 12 – CHƯƠNG 2

§6. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

A. PHẦN KIẾN THỨC CHÍNH.

I. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ.

1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ CƠ BẢN

a) ĐỊNH NGHĨA:

Bất phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x > b$ (hoặc $a^x \geq b$, $a^x < b$, $a^x \leq b$) với $a > 0$, $a \neq 1$.

b) TÍNH CHẤT

Xét BPT $a^x > b$ (1)

+ Nếu $b \leq 0$ thì tập nghiệm của (1): $T = \mathbb{R}$

+ Nếu $b > 0$, $a > 1$ thì tập nghiệm của (1): $T = (\log_a b; +\infty)$ hay $x > \log_a b$

+ Nếu $b > 0$, $0 < a < 1$ thì tập nghiệm của (1): $T = (-\infty; \log_a b)$ hay $x < \log_a b$

➤ **VD1:** Tập nghiệm bất phương trình: $2^x > 8$ là

A. $(-\infty; 3)$.

B. $[3; +\infty)$.

C. $(3; +\infty)$.

D. $(-\infty; 3]$.

➤ **VD2:** Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 9$ trên tập số thực là

A. $(2; +\infty)$.

B. $(-\infty; -2)$.

C. $(-\infty; 2)$.

D. $(-2; +\infty)$.

2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ ĐƠN GIẢN

2.1: ĐƯA VỀ CÙNG CƠ SỐ: $a^{f(x)} > a^{g(x)}$

+ Nếu $a > 1$ thì $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

+ Nếu $0 < a < 1$ thì $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

2.2: ĐẶT ẨN PHỤ VÀ GIẢI BPT BẬC HAI:

Xét BPT $m.a^{2f(x)} + n.a^{f(x)} + p > 0$, đặt $t = a^{f(x)}, t > 0$

BPT trở thành: $m.t^2 + n.t + p > 0$

➤ **VD3:** Tập nghiệm của bất phương trình $4^{x+1} \leq 8^{x-2}$ là

- A. $[8; +\infty)$. B. $\emptyset$. C. $(0; 8)$. D. $(-\infty; 8]$.

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **VD4:** Bất phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên dương $9^x - 4.3^x + 3 < 0$.

- A. 3. B. 1. C. 0. D. 2.

.....

.....

.....

.....

.....

II. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT CƠ BẢN

A) ĐỊNH NGHĨA: Bất phương trình logarit cơ bản có dạng $\log_a x > b$ (hoặc $\log_a x \geq b$, $\log_a x < b$, $\log_a x \leq b$) với $a > 0$, $a \neq 1$.

B) TÍNH CHẤT:

Xét BPT $\log_a x > b$

+ Nếu $a > 1$ thì $x > a^b$

+ Nếu $0 < a < 1$ thì $0 < x < a^b$

➤ **VD5:** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1) > 3$ là

- A. $(9; +\infty)$. B. $(4; +\infty)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(10; +\infty)$.

.....

.....

.....

.....
.....
➤ **VD6:** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x < 0$ là

- A.** $(0;1)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(0;+\infty)$.
-
.....
.....
.....
.....

2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT ĐƠN GIẢN

2.1: ĐƯA VỀ CÙNG CƠ SỐ: $\log_a f(x) > \log_a g(x)$

- | |
|--|
| + Nếu $a > 1$ thì $f(x) > g(x) > 0$
+ Nếu $0 < a < 1$ thì $0 < f(x) < g(x)$ |
|--|

2.2: ĐẶT ẨN PHỤ VÀ GIẢI BPT BẬC 2:

Xét BPT $m.\log_a^2 x + n.\log_a x + p > 0$, đặt $t = \log_a x$. BPT trở thành: $m.t^2 + n.t + p > 0$

➤ **VD7:** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-4) \geq \log_{\frac{1}{2}} 5$.

- A.** $S = (4;9]$. **B.** $S = [4;9]$. **C.** $S = (-\infty;9]$. **D.** $S = [9;+\infty)$.
-
.....
.....
.....
.....

➤ **VD8:** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 \geq 0$.

- A.** $S = (-\infty;1] \cup [4;+\infty)$. **B.** $S = [2;16]$.
C. $S = (0;2] \cup [16;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2] \cup [16;+\infty)$.
-
.....
.....
.....
.....

.....

B. LUYỆN TẬP.

- Câu 1:** [Mức độ 1] (THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019) Tập nghiệm bất phương trình: $2^x < 8$ là
 A. $(-\infty; 3)$. B. $[3; +\infty)$. C. $(3; +\infty)$. D. $(-\infty; 3]$.
- Câu 2:** [Mức độ 1] (SGD Hưng Yên 2019) Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x+1} > 1$ là
 A. $(-\infty; 0)$. B. $(0; +\infty)$. C. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$. D. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
- Câu 3:** [Mức độ 1] (THPT Chuyên ĐHS - Hà Nội - Lần 1 năm 2017 – 2018) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5} x > \log_{0,5} 2$ là
 A. $(1; 2)$. B. $(-\infty; 2)$. C. $(2; +\infty)$. D. $(0; 2)$.
- Câu 4:** [Mức độ 1] (SGD Bắc Ninh – Lần 2 - năm 2017-2018) Tập hợp nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1) < 3$ là
 A. $S = (-\infty; 10)$. B. $S = (-\infty; 9)$. C. $S = (1; 9)$. D. $S = (1; 10)$.
- Câu 5:** [Mức độ 2] (SGD Hà Nội-lần 11 năm 2017-2018) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 7) > 0$ là
 A. $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$. B. $(-\infty; 2)$. C. $(2; 3)$. D. $(3; +\infty)$.
- Câu 6:** [Mức độ 2] (THPT Đặng Thúc Hứa-Nghệ An-lần 1 năm 2017-2018) Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $4^x < 2^{x+1}$
 A. $S = (1; +\infty)$. B. $S = (-\infty; 1)$. C. $S = (0; 1)$. D. $S = (-\infty; +\infty)$.
- Câu 7:** [Mức độ 2] (SGD Quảng Nam – năm 2017 – 2018) Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4$.
 A. $S = (3; 7]$. B. $S = [3; 7]$. C. $S = (-\infty; 7]$. D. $S = [7; +\infty)$.
- Câu 8:** [Mức độ 2] (THPT Chuyên ĐH Vinh – Lần 2 – năm 2017 – 2018) Tập nghiệm của bất phương trình $2^{\sqrt{x}} < 2$ là
 A. $[0; 1)$. B. $(-\infty; 1)$. C. (R) . D. $(1; +\infty)$.
- Câu 9:** [Mức độ 2] (THPT Chuyên Nguyễn Quang Diệu – Đồng Tháp – Lần 5 năm 2017 – 2018) Tìm tập nghiệm D của bất phương trình $9^x < 3^{x+4}$.
 A. $D = (0; 6)$. B. $D = (-\infty; 4)$. C. $D = (0; 4)$. D. $D = (4; +\infty)$.

Câu 10: [Mức độ 2] (THPT Chuyên Thái Bình – Thái Bình – Lần 5 năm 2017 – 2018) Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{x-1} < 5^{x+3}$ là

- A. $(-\infty; -5)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(-5; +\infty)$. D. $(0; +\infty)$.

Câu 11: [Mức độ 2] (THPT Chuyên Lương Thế Vinh - Hà Nội – Lần 2 năm 2017 – 2018) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,2}(x-3) \geq -1$ là

- A. $(3; 5)$. B. $[5; +\infty)$. C. $(-\infty; 5)$. D. $(3; 5]$.

Câu 12: [Mức độ 2] (TT Diệu Hiền-Cần Thơ-tháng 10-năm 2017-2018) Nghiệm của bất phương trình

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{9x^2-17x+11} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{7-5x} \text{ là}$$

- A. $x = \frac{2}{3}$. B. $x > \frac{2}{3}$. C. $x \neq \frac{2}{3}$. D. $x \leq \frac{2}{3}$.

Câu 13: [Mức độ 2] (TT Diệu Hiền-Cần Thơ-tháng 10-năm 2017-2018) Tập nghiệm của bất phương trình $2\log_2(x-1) \leq \log_2(5-x) + 1$ là

- A. $(1; 5)$. B. $(1; 3]$. C. $[1; 3]$. D. $[3; 5]$.

Câu 14: [Mức độ 2] (Trường BDVH218LTT-khoa 1-năm 2017-2018) Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(4x-9) > \log_{\frac{1}{2}}(x+10)$.

- A. 6. B. 4. C. 0. D. Vô số.

Câu 15: [Mức độ 2] (THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa-ần 1-năm 2017-2018) Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x-8) \geq -4$.

- A. $(-4; 2)$. B. $[-6; 4)$. C. $[-6; -4] \cup [2; 4]$. D. $[-6; -4) \cup (2; 4]$.

Câu 16: [Mức độ 2] (THPT Lê Văn Thịnh-Bắc Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Giải bất phương trình sau $\log_{\frac{1}{5}}(3x-5) > \log_{\frac{1}{5}}(x+1)$

- A. $\frac{5}{3} < x < 3$. B. $-1 < x < 3$. C. $-1 < x < \frac{5}{3}$. D. $x > 3$.

Câu 17: [Mức độ 2] (THPT Hà Huy Tập-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{2}{5}}(x-4) + 1 > 0$.

- A. $\left(-\infty; \frac{13}{2}\right)$. B. $\left[\frac{13}{2}; +\infty\right)$. C. $(4; +\infty)$. D. $\left(4; \frac{13}{2}\right)$.

Câu 18: [Mức độ 2] (THPT Phan Châu Trinh-DakLak-lần 2 năm 2017-2018) Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$.

A. $S = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$. **B.** $S = (-1; 2)$. **C.** $S = (2; +\infty)$. **D.** $S = (-\infty; 2)$.

Câu 19: [Mức độ 2] (THPT Lê Quý Đôn-Quảng Trị-lần 1 năm 2017-2018) Bất phương trình $\log_4(x+7) > \log_2(x+1)$ có tập nghiệm là

A. $(5; +\infty)$. **B.** $(-1; 2)$. **C.** $(2; 4)$. **D.** $(-3; 2)$.

Câu 20: [Mức độ 2] Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x - 5\log_2 x - 6 \leq 0$ là

A. $S = \left[\frac{1}{2}; 64\right]$. **B.** $S = \left(0; \frac{1}{2}\right]$.
C. $S = [64; +\infty)$. **D.** $S = \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup [64; +\infty)$.

Câu 21: [Mức độ 2] (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh 2019) Bất phương trình $3^{2x+1} - 7 \cdot 3^x + 2 > 0$ có tập nghiệm là

A. $(-\infty; -1) \cup (\log_2 3; +\infty)$. **B.** $(-\infty; -2) \cup (\log_2 3; +\infty)$.
C. $(-\infty; -1) \cup (\log_3 2; +\infty)$. **D.** $(-\infty; -2) \cup (\log_3 2; +\infty)$.

Câu 22: [Mức độ 2] (Chuyên Vĩnh Phúc 2019) Tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x}$ là

A. $S = (-\infty; 2)$. **B.** $S = (-\infty; 1)$. **C.** $S = (1; +\infty)$. **D.** $S = (2; +\infty)$.

Câu 23: [Mức độ 3] (THPT Can Lộc-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Giải bất phương trình $\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x)$ được tập nghiệm là $(a; b)$. Hãy tính tổng $S = a + b$.

A. $S = \frac{11}{5}$. **B.** $S = \frac{31}{6}$. **C.** $S = \frac{28}{15}$. **D.** $S = \frac{8}{3}$.

Câu 24: [Mức độ 3] (THPT Lê Quý Đôn-Hải Phòng lần 1 năm 2017-2018) Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}} \left[\log_2 \left(\frac{4x+1}{x-1} \right) \right] < -1$.

A. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. **B.** $(1; +\infty)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

Câu 25: [Mức độ 3] (THPT Nguyễn Trãi-Đà Nẵng-lần 1 năm 2017-2018) Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}} < \left(\frac{1}{2}\right)^4$ là

A. $S = (2; +\infty)$. **B.** $S = (-\infty; 0)$. **C.** $S = (0; 1)$. **D.** $S = \left(1; \frac{5}{4}\right)$.

Câu 26: [Mức độ 3] (THPT Chuyên Thái Bình-lần 4 năm 2017-2018) Tập nghiệm của bất phương trình $3\log_2(x+3) - 3 \leq \log_2(x+7)^3 - \log_2(2-x)^3$ là $S = (a; b)$. Tính $P = b - a$.

- A. 2. B. 3. C. 5. D. 1.

Câu 27: [Mức độ 3] (THPT Nguyễn Khuyến-TPHCM-năm 2017-2018) Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x-3) < \log_{\frac{1}{2}}(5-2x)$ có tập nghiệm là $(a;b)$. Tính giá trị của $S = a + b$.

- A. $S = \frac{7}{2}$. B. $S = \frac{9}{2}$. C. $S = \frac{11}{2}$. D. $S = \frac{13}{2}$.

Câu 28: [Mức độ 1] (Đề Tham Khảo 2017) Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+1} - \frac{1}{5} > 0$.

- A. $S = (-\infty; -2)$. B. $S = (1; +\infty)$. C. $S = (-1; +\infty)$. D. $S = (-2; +\infty)$.

Câu 29: [Mức độ 2] (THPT Cù Huy Cận 2019) Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2+2x} \leq 8$ là

- A. $(-\infty; -3]$. B. $[-3; 1]$. C. $(-3; 1)$. D. $(-3; 1]$.

Câu 30: [Mức độ 2] (Chuyên Vĩnh Phúc 2019) Tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x}$ là

- A. $S = (-\infty; 2)$. B. $S = (-\infty; 1)$. C. $S = (1; +\infty)$. D. $S = (2; +\infty)$.

Câu 31: [Mức độ 2] (THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019) Tập nghiệm bất phương trình $2^{x^2-3x} < 16$ là

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(4; +\infty)$. C. $(-1; 4)$. D. $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.

Câu 32: [Mức độ 2] (Chuyên Quốc Học Huế 2019) Tìm tập nghiệm S của bất phương trình

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x} < \frac{1}{4}.$$

- A. $S = [1; 2]$. B. $S = (-\infty; 1)$. C. $S = (1; 2)$. D. $S = (2; +\infty)$.

Câu 33: [Mức độ 2] (Đề Tham Khảo 2019) Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-2x} < 27$ là

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(3; +\infty)$. C. $(-1; 3)$. D. $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Câu 34: [Mức độ 2] (THPT Hà Huy Tập-Hà Tĩnh-lần 2 năm 2017-2018) Tập tất cả các nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x) \geq -1$ là

- A. $[-1; 2]$. B. $[-1; 0) \cup (1; 2]$. C. $(-\infty; -1] \cup (2; +\infty]$. D. $(-1; 2)$.

Câu 35: [Mức độ 1] (THPT Kinh Môn-Hải Dương lần 1 năm 2017-2018) Nghiệm của bất phương trình $3^{2x+1} > 3^{3-x}$ là

- A. $x > -\frac{2}{3}$. B. $x > \frac{3}{2}$. C. $x > \frac{2}{3}$. D. $x < \frac{2}{3}$.

Câu 36: [Mức độ 2] (THPT Quỳnh Lưu 1 – Nghệ An – Lần 2 năm 2017 – 2018) Tập nghiệm của bất phương trình $4^x > 2^{x+8}$ là

- A. $[8; +\infty)$. B. $(-\infty; 8)$. C. $(0; 8)$. D. $(8; +\infty)$.

- Câu 37: [Mức độ 2]** (SGD Bà Rịa Vũng Tàu-đề 2 năm 2017-2018) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm nguyên âm của bất phương trình $\log_3(x+3) < 2$. Tính giá trị của $P = |x_1 - x_2|$.
- A. $P = 3$. B. $P = 2$. C. $P = 1$. D. $P = 5$.
- Câu 38: [Mức độ 2]** (THPT Lục Ngạn-Bắc Giang-lần 1 năm 2017-2018) Tập nghiệm của bất phương trình: $\log_2(x-3) + \log_2 x \geq 2$ là
- A. $(3; +\infty)$. B. $[4; +\infty)$. C. $(-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$. D. $(3; 4]$.
- Câu 39: [Mức độ 2]** (THPT Chuyên Hạ Long-Quảng Ninh lần 2 năm 2017-2018) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{4}}(x+1) > \log_{\frac{\pi}{4}}(2x-5)$ là
- A. $(-1; 6)$. B. $\left(\frac{5}{2}; 6\right)$. C. $(-\infty; 6)$. D. $(6; +\infty)$.
- Câu 40: [Mức độ 2]** (THPT Chuyên Phan Bội Châu-lần 2 năm 2017-2018) Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2 x + \log_3 x \geq 1 + \log_2 x \cdot \log_3 x$ là
- A. 1. B. 2. C. 3. D. Vô số.
- Câu 41: [Mức độ 2]** (THPT Tây Thụy Anh – Thái Bình – lần 1 - năm 2017 – 2018) Giải bất phương trình $2\log_3(4x-3) + \log_{\frac{1}{9}}(2x+3)^2 \leq 2$.
- A. $x > \frac{3}{4}$. B. $\frac{3}{4} < x \leq 3$. C. Vô nghiệm. D. $-\frac{3}{8} \leq x \leq 3$.
- Câu 42: [Mức độ 3]** Tập nghiệm của bất phương trình: $3^{x^2+\sqrt{x-1}-1} + 3 \leq 3^{x^2} + 3^{\sqrt{x-1}}$.
- A. $2 \leq x$. B. $1 \leq x \leq 2$. C. $2 \leq x \leq 7$. D. $2 \leq x \leq 4$.
- Câu 43: [Mức độ 3]** (THPT Lục Ngạn-Bắc Giang-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x)$. Tập nghiệm của bất phương trình $y' > 0$ là
- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(2; +\infty)$.
- Câu 44: [Mức độ 3]** Tất cả các giá trị của m để bất phương trình $(3m+1)12^x + (2-m)6^x + 3^x < 0$ có nghiệm đúng $\forall x > 0$ là
- A. $(-2; +\infty)$. B. $(-\infty; -2]$. C. $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$. D. $\left(-2; -\frac{1}{3}\right)$.
- Câu 45: [Mức độ 3]** (Mã 105 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x + 3m - 2 < 0$ có nghiệm thực.
- A. $m < 1$. B. $m \leq 1$. C. $m < 0$. D. $m < \frac{2}{3}$.

Câu 46: [Mức độ 3] (Chuyên Vĩnh Phúc 2019) Cho $f(x) = x.e^{-3x}$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) > 0$ là

- A.** $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$. **B.** $\left(0; \frac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **D.** $(0; 1)$.

[illegible]

GIẢI TÍCH 12 – CHƯƠNG 3

§5. NGUYÊN HÀM

A. PHẦN KIẾN THỨC CHÍNH

I. NGUYÊN HÀM VÀ TÍNH CHẤT

1. Nguyên hàm

➤ VD MỞ ĐẦU:

a) Cho hàm số $f(x) = 3x^2$. Hàm số $F(x)$ nào sau đây không thỏa mãn $F'(x) = f(x)$

- A. $F(x) = x^3$. B. $x^3 + 2021$. C. $x^3 - 2004$. D. $3x^3 + 2x - 7$.

.....

b) Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ với $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Tìm hàm số $F(x)$ sao cho $F'(x) = f(x)$

- A. $F(x) = \tan x + \sqrt{10}$. B. $F(x) = 3x + \tan x + 2022$.

- C. $F(x) = 2 \cos x - 9$. D. $F(x) = -\cot x + 1221$.

.....

➤ **Định nghĩa:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . (K là một khoảng, nửa khoảng hoặc một đoạn). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

➤ VD1:

a) Hàm số $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x$ trên $\mathbb{R}$ vì $F'(x) = (x^2)' = 2x$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Hàm số $F(x) = \ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ vì $F'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, $\forall x \in (0; +\infty)$.

Định lý 1: Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C , hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K .

Định lý 2: Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$, với C là một hằng số.

➤ **Kí hiệu:** $\int f(x)dx = F(x) + C$ là họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K .

➤ **Chú ý:** $f(x)dx$ chính là vi phân của nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ vì

$$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx.$$

➤ VD2:

a) Với $x \in \mathbb{R}$, $\int 2x dx = x^2 + C$.

b) Với $s \in (0; +\infty)$, $\int \frac{1}{s} ds = \ln s + C$.

c) Với $t \in \mathbb{R}$, $\int \cos t dt = \sin t + C$.

➤ **VD3:** Tính nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $\int x^4 dx$;

b) $\int \cos x dx$;

c) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Tính chất của nguyên hàm

➤ **Tính chất 1:** $\int f'(x) dx = f(x) + C$.

➤ **Tính chất 2:** $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$, k là hằng số khác 0.

➤ **Tính chất 3:** $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$.

➤ **VD4:** Tính nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $\int (\cos x)' dx$;

b) $\int \left(3x^2 - \frac{1}{x} \right) dx$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **VD5:** Khẳng định nào đây **sai**?

A. $\int \cos x dx = -\sin x + C$.

B. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

C. $\int 2x dx = x^2 + C$.

D. $\int e^x dx = e^x + C$.

.....

.....

.....

.....

➤ **VD6:** Cho hàm số $f(x) = \frac{5+2x^4}{x^2}$. Khi đó:

A. $\int f(x) dx = 2x^3 - \frac{5}{x} + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5}{x} + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{5}{x} + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + 5\ln x^2 + C.$

.....

3. Sự tồn tại nguyên hàm

➤ **Định lý 3:** Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .

➤ **VD7:**

a) Hàm số $f(x) = x^5$ có nguyên hàm trên các khoảng $(-\infty; +\infty)$ và $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C.$

b) Hàm số $h(x) = x^{\frac{2}{3}}$ có nguyên hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $\int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + C.$

c) Hàm số $g(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ có nguyên hàm trên khoảng $(k\pi; (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$

và $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C.$

4. Bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

$\int 0 dx = C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$
$\int dx = x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$

➤ **VD8:** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}.$

Tìm $F(x).$

A. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}.$

B. $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}.$

C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}.$

D. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}.$

.....

➤ **VD9:** Nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 3$ là

A. $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} + 3x + C.$

B. $2\sqrt{x} + \frac{4}{3}\sqrt[3]{x^2} + 3x + C.$

C. $\frac{1}{2}\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} + 3x + C.$

D. $\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{4}{3}\sqrt[3]{x^2} + 3x + C.$

.....

II. PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

1. Phương pháp đổi biến số

a) Định lý 1:

Nếu $\int f(u)du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C.$$

b) Hệ quả:

Với $u = ax + b$ ($a \neq 0$), ta có

➤ $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C.$

➤ $\int (ax + b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax + b)^{n+1} + C \quad (n \neq -1).$

➤ $\int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax + b| + C.$

➤ $\int e^{(ax+b)} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C.$

➤ $\int \alpha^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \frac{\alpha^{ax+b}}{\ln \alpha} + C.$

➤ $\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C.$

➤ $\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C.$

➤ $\int \frac{1}{\cos^2(ax + b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + C.$

➤ $\int \frac{1}{\sin^2(ax + b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + C.$

➤ **VD10:** Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $\int (2x - 3)^7 dx;$

b) $\int 3^{1-2x} dx;$

c)

$\int \frac{1}{3+2x} dx;$

d) $\int e^{4-5x} dx;$

e) $\int \sin(3x - 2) dx$

f) $\int \cos(3 - 4x) dx;$

Hãy học cho chính bản thân mình vì đây là năm học quyết định cho tương lai

g) $\int \frac{1}{\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)} dx;$

h) $\int \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)} dx.$

➤ **Các bước tính nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số**

Bước 1: Đặt $t = u(x)$.

Bước 2: Tính $dt = u'(x)dx$.

Bước 3: Biến đổi $f(x)dx$ theo t và dt . Tính nguyên hàm mới theo t .

Bước 4: Thay $t = u(x)$ để được kết quả theo biến x .

2. Ví dụ minh họa

➤ **VD11:** Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $I = \int x(x+2)^{2021} dx;$

b) $I = \int \frac{\ln x + 2}{x} dx.$

a) $I = \int \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 2} dx.$

b) $I = \int \frac{3x+3}{-x^2-x+2} dx.$

c) $I = \int \frac{(2x+1)}{x^2+x+1} dx.$

[illegible]

a) $I_1 = \int \cos^{2021} x \sin x \, dx;$

b) $I_2 = \int \cos^3 x \, dx;$

c) $I_3 = \int \frac{\cos x}{9 - 2 \sin x} dx.$

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

➤ **VD14:** Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ biết $F(0) = 2$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **VD15:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0;1]$ thỏa mãn $f'(x) = 2x.e^{-f(x)}$ và $f(0) = 0$. Tính $f(1)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

III. PHƯƠNG PHÁP TỪNG PHẦN:

1) Dấu hiệu: Tìm họ nguyên hàm $\int f(x)g(x)dx$, trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là hai trong bốn hàm số sau lôgarit, đa thức, lượng giác, hàm mũ.

2) Công thức $\int u dv = uv - \int v du$.

3) Chú ý:

- Thứ tự ưu tiên u nhất lôgarit, nhì đa, ba mũ, tứ lượng.
- Phần còn lại đặt dv .

4) Ví dụ

➤ **VD16:** Họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x \cos x$ là

A. $F(x) = x \sin x - \cos x + C$.

B. $F(x) = -x \sin x - \cos x + C$.

C. $F(x) = x \sin x + \cos x + C$.

D. $F(x) = -x \sin x + \cos x + C$.

.....

.....

.....

.....

➤ **VD17:** Họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x e^x$ là

A. $I = x e^x - e^x + C$.

B. $I = x e^x + e^x + C$.

C. $I = \frac{x^2}{2} e^x + C$.

D. $I = \frac{x^2}{2} e^x + e^x + C$.

.....

.....

.....

.....

➤ **VD18:** Họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ là

A. $F(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x^2} + C.$

B. $F(x) = -\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x^2} + C.$

C. $F(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x^2} + C.$

D. $F(x) = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x^2} + C.$

.....

B. LUYỆN TẬP

I. Chữa bài tập SGK

Bài 1 trang 100 - SGK: Trong các cặp hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của hàm còn lại?

a) e^{-x} và $-e^{-x}$; b) $\sin 2x$ và $\sin^2 x$; c) $\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x$ và $\left(1 - \frac{4}{x}\right) e^x$.

Bài 2 trang 101 - SGK: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x}};$

b) $f(x) = \frac{2^x - 1}{e^x};$ c)

$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x};$

d) $f(x) = \sin 5x \cos 3x;$

e) $f(x) = \tan^2 x;$

g) $f(x) = e^{3-2x};$

h) $f(x) = \frac{1}{(1+x)(1-2x)}.$

Bài 3 trang 101 - SGK: Sử dụng phương pháp đổi biến số, hãy tính:

a) $\int (1-x)^9 dx$ (đặt $u = 1-x$);

b) $\int x(1+x^2)^{\frac{3}{2}} dx$ (đặt $u = 1+x^2$);

c) $\int \cos^3 x \sin x dx$ (đặt $t = \cos x$);

d) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x} + 2}$ (đặt $u = e^x + 1$).

Bài 4 trang 101 - SGK: Sử dụng phương pháp tính nguyên hàm từng phần, hãy tính:

a) $\int x \ln(1+x) dx;$

b) $\int (x^2 + 2x - 1)e^x dx;$

c) $\int x \sin(2x+1) dx;$ d) $\int (1-x) \cos x dx.$

II. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: [Mức độ 1] Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$ với $k \in \mathbb{R}$.

B. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ với $f(x); g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$ với $\alpha \neq -1$.

D. $\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$.

Câu 2: [Mức độ 1] Tìm nguyên hàm $F(x) = \int \pi^2 dx$.

A. $F(x) = \frac{\pi^3}{3} + C$.

B. $F(x) = 2\pi x + C$.

C. $F(x) = \pi^2 x + C$.

D. $F(x) = \frac{\pi^2 x^2}{2} + C$.

Câu 3: [Mức độ 1] Nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ là

A. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - \ln|x| + C$.

B. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{x^2} + C$.

C. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln x + C$.

D. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C$.

Câu 4: [Mức độ 1] Áp dụng công thức nguyên hàm ta có $\int \left(x^2 - 3x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C$.

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x} + 3x\sqrt[3]{x^2}$ là

A. $\frac{2x\sqrt[3]{x}}{4} + \frac{9x\sqrt{x^2}}{8} + C$.

B. $\frac{5x\sqrt{x}}{3} + \frac{27x^2\sqrt[3]{x^2}}{8} + C$.

C. $\frac{2x\sqrt{x}}{3} - \frac{9x^2\sqrt[3]{x}}{5} + C$.

D. $\frac{2x\sqrt{x}}{3} + \frac{9x^2\sqrt[3]{x^2}}{8} + C$.

Câu 5: [Mức độ 1] Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + x$ là

A. $e^x + x^2 + C$.

B. $e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$.

C. $\frac{1}{x+1}e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$.

D. $e^x + 1 + C$.

Câu 6: [Mức độ 1] Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 6$ là

A. $2x^2 + 6x + C$.

B. $x^2 + 6x + C$.

C. $2x^2 + C$.

D. $x^2 + C$.

Câu 7: [Mức độ 2] $F(x)$ của hàm số $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 2$ thỏa mãn $F(1) = 9$ là:

A. $F(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 2$.

B. $F(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 10$.

C. $F(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 2x$.

D. $F(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 10$.

Câu 8: [Mức độ 2] Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$ biết $F(1) = 0$.

A. $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$.

B. $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + \frac{3}{2}$.

C. $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}.$

D. $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} - \frac{3}{2}.$

Câu 9: [Mức độ 3] Hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm là $f'(x) = |x-1|$. Biết rằng $f(0) = 3$. Tính $f(2) + f(4)$?

A. 10.

B. 12.

C. 4.

D. 11.

Câu 10: [Mức độ 2] Tìm nguyên hàm $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx$.

A. $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = 2\ln|x+2| - \ln|x+1| + C.$

B. $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = 2\ln|x+1| - \ln|x+2| + C.$

C. $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = 2\ln|x+1| + \ln|x+2| + C.$

D. $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = \ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C.$

Câu 11: [Mức độ 3] Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$ là

A. $F(x) = \frac{1}{3}(\sqrt{1+x^2})^3.$

B. $F(x) = \frac{1}{3}(\sqrt{1+x^2})^2.$

C. $F(x) = \frac{x^2}{2}(\sqrt{1+x^2})^2.$

D. $F(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{1+x^2})^2.$

Câu 12: [Mức độ 3] Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 e^{x^3+1}$.

A. $\int f(x) dx = e^{x^3+1} + C.$

B. $\int f(x) dx = 3e^{x^3+1} + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3}e^{x^3+1} + C.$

Câu 13: [Mức độ 3] Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1-2\sin^2 x}{2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}.$

A. $\int f(x) dx = \ln|\sin x + \cos x| + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{2}\ln|\sin x + \cos x| + C.$

C. $\int f(x) dx = \ln|1 + \sin 2x| + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{2}\ln|1 + \sin 2x| + C.$

Câu 13: [Mức độ 2] Tìm $\int e^x \sin x dx$ bằng đặt $u = e^x$ và $dv = \sin x dx$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int e^x \sin x dx = e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$

B. $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$

C. $\int e^x \sin x dx = e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$

D. $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$

Câu 14: [Mức độ 2] Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x \sin x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2022$.

A. $F(x) = x \sin x + \cos x + 2022.$

B. $F(x) = \sin x - x \cos x + 2021.$

C. $F(x) = x \sin x - \cos x + 2022.$

D. $F(x) = -x \sin x - \cos x + 2020.$

Câu 15: [Mức độ 2] Họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x \ln x$ là

A. $f(x) = \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{4}x^2 + C.$

B. $f(x) = x^2 \ln x - \frac{1}{2}x^2 + C.$

C. $f(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$

D. $f(x) = x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$

Câu 16: [Mức độ 3] Tìm hàm số $f(x)$, biết rằng $f'(x) = \frac{2x}{1-\cos 2x}$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2022.$

A. $f(x) = x \tan x - \ln|\sin x| + 2020.$

B. $f(x) = x \cot x + \ln|\sin x| + 2022.$

C. $f(x) = -x \cot x - \ln|\sin x| + 2021.$

D. $f(x) = -x \cot x + \ln|\sin x| + 2022.$

Câu 17: [Mức độ 3] Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+1)e^x$ và $F(0) = 3.$ Tính $F(1).$

A. $F(1) = 11e - 3.$

B. $F(1) = e + 3.$

C. $F(1) = e + 7.$

D. $F(1) = e + 2.$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 18: [Mức độ 1] Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3$ là

A. $4x^4 + C.$

B. $3x^2 + C.$

C. $x^4 + C.$

D. $\frac{1}{4}x^4 + C.$

Câu 19: [Mức độ 1] Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + 6x$ là

A. $\sin x + 3x^2 + C.$

B. $-\sin x + 3x^2 + C.$

C. $\sin x + 6x^2 + C.$

D. $-\sin x + C.$

Câu 20: [Mức độ 1] Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x$ là

A. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C.$

B. $3x^2 + 1 + C.$

C. $x^3 + x + C.$

D. $x^4 + x^2 + C.$

Câu 21: [Mức độ 1] Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 3$ là

A. $x^2 + 3x + C.$

B. $2x^2 + 3x + C.$

C. $x^2 + C.$

D. $2x^2 + C.$

Câu 22: [Mức độ 1] Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}.$

A. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C.$

Câu 23: [Mức độ 1] Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x-2}.$

A. $\int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln|5x-2| + C.$

B. $\int \frac{dx}{5x-2} = \ln|5x-2| + C.$

C. $\int \frac{dx}{5x-2} = -\frac{1}{2} \ln|5x-2| + C.$

D. $\int \frac{dx}{5x-2} = 5 \ln|5x-2| + C.$

Câu 24: [Mức độ 1] Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x.$

A. $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$. **B.** $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C$. **C.** $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C$. **D.** $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C$.

Câu 25: [Mức độ 1] Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x}$ là hàm số nào sau đây?

A. $3e^x + C$. **B.** $\frac{1}{3}e^{3x} + C$. **C.** $\frac{1}{3}e^x + C$. **D.** $3e^{3x} + C$.

Câu 26: [Mức độ 1] Nguyên hàm của hàm số $y = e^{2x-1}$ là

A. $2e^{2x-1} + C$. **B.** $e^{2x-1} + C$. **C.** $\frac{1}{2}e^{2x-1} + C$. **D.** $\frac{1}{2}e^x + C$.

Câu 27: [Mức độ 2] Họ nguyên hàm của hàm số $y = e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right)$ là

A. $2e^x + \tan x + C$. **B.** $2e^x - \tan x + C$. **C.** $2e^x - \frac{1}{\cos x} + C$. **D.** $2e^x + \frac{1}{\cos x} + C$.

Câu 28: [Mức độ 2] Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là

A. $x + 3\ln(x-1) + C$. **B.** $x - 3\ln(x-1) + C$. **C.** $x - \frac{3}{(x-1)^2} + C$. **D.** $x + \frac{3}{(x-1)^2} + C$.

Câu 29: [Mức độ 2] Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ thỏa mãn

$F(e+1) = 4$. Tìm $F(x)$.

A. $2\ln(x-1) + 2$. **B.** $\ln(x-1) + 3$. **C.** $4\ln(x-1)$. **D.** $\ln(x-1) - 3$.

Câu 30: [Mức độ 2] Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm

$F(x)$.

A. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$. **B.** $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$.
C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$. **D.** $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$.

Câu 31: [Mức độ 2] Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

A. $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$. **B.** $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$.
C. $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$. **D.** $F(x) = \cos x - \sin x + 3$.

Câu 32: [Mức độ 2] Biết $F(x) = e^x + x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $\int f(2x) dx$ bằng

A. $2e^x + 2x^2 + C$. **B.** $\frac{1}{2}e^{2x} + x^2 + C$. **C.** $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x^2 + C$. **D.** $e^{2x} + 4x^2 + C$.

Câu 33: [Mức độ 3] Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 e^{x^3+1}$.

A. $\int \left(-t^{-5} + 2t^{-3} - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{4}t^{-4} - t^{-2} - \ln|t| + C.$

B. $\int f(x) dx = 3e^{x^3+1} + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3}e^{x^3+1} + C.$

Câu 34: [Mức độ 3] Khi tính nguyên hàm $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$, bằng cách đặt $u = \sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

A. $\int 2(u^2 - 4) du.$

B. $\int (u^2 - 4) du.$

C. $\int (u^2 - 3) du.$

D. $\int 2u(u^2 - 4) du.$

Câu 35: [Mức độ 3] Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cos x$ và $F(0) = \pi$.

Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi.$

B. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$

C. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \pi.$

D. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \pi.$

Câu 36: [Mức độ 3] Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^x$ là

A. $-\sin 2x + \cos 2x + C.$

B. $-2\sin 2x + \cos 2x + C.$

C. $-2\sin 2x - \cos 2x + C.$

D. $2\sin 2x - \cos 2x + C.$

Câu 37: [Mức độ 3] Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \sin x$ là

A. $F(x) = x \cos x + \sin x + C.$

B. $F(x) = x \cos x - \sin x + C.$

C. $F(x) = -x \cos x - \sin x + C.$

D. $F(x) = -x \cos x + \sin x + C.$

.....

GIẢI TÍCH 12 – CHƯƠNG 2

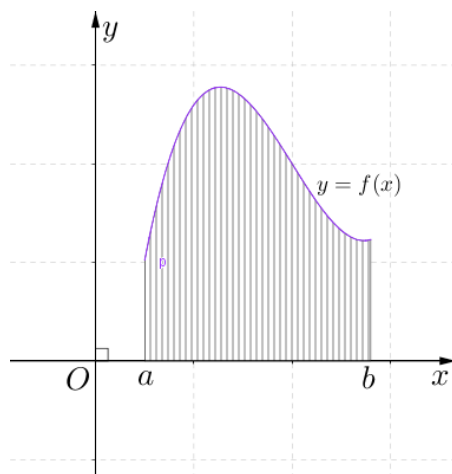
§2. TÍCH PHÂN

A. PHẦN KIẾN THỨC CHÍNH

I. DIỆN TÍCH HÌNH THANG CONG

1. Định nghĩa

➤ **Định nghĩa:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không đổi dấu trên đoạn $[a; b]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được gọi là hình thang cong.



➤ **Diện tích hình thang cong:**

Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Bằng cách chia nhỏ phần hình phẳng cần tính diện tích ra thành các hình chữ nhật, người ta chứng minh được diện tích của hình thang cong cần tìm là $F(b) - F(a)$.

II. ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN

1. **Định nghĩa:** Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[a; b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$. Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b (hay gọi là tích phân xác định trên đoạn $[a; b]$ của hàm số $f(x)$). Kí hiệu là $\int_a^b f(x) dx$.

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

2. Tên gọi:

➤ $\int_a^b$ là dấu tích phân, a là cận dưới, b là cận trên.

➤ $f(x) dx$ gọi là biểu thức dưới dấu tích phân.

➤ $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.

3. Chú ý:

➤ Nếu $a = b$ thì $\int_a^a f(x) dx = 0$.

➤ Nếu $a > b$ thì $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.

➤ Tích phân không phụ thuộc vào biến số: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du = F(b) - F(a)$.

➤ Ý nghĩa hình học của tích phân: $S = \int_a^b f(x) dx$.

Với S là diện tích của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của $y = f(x)$ trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($f(x)$ là hàm số liên tục và lấy giá trị dương trên đoạn $[a; b]$).

III. TÍNH CHẤT

1. Tính chất 1: $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ (với k là hằng số).

2. Tính chất 2: $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$.

3. Tính chất 3: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ (với $a < c < b$).

4. Ví dụ

➤ **VD1:** Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_1^2 \left(x^3 - \frac{3}{x} + e^x \right) dx;$

b) $J = \int_1^4 (x^2 + 3\sqrt{x}) dx.$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Hãy học cho chính bản thân mình vì đây là năm học quyết định cho tương lai

➤ **VD2:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ biết $f(1) = 12$ và $\int_1^4 f'(x) dx = 17$. Tính giá trị của $f(4)$.

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **VD3:** Cho $\int_1^2 f(x) dx = -3$, $\int_2^5 f(x) dx = 5$ và $\int_1^5 g(x) dx = 6$.

Tính tích phân $I = \int_1^5 [2f(x) - 3g(x)] dx$.

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **VD4:** Tính tích phân $I = \int_0^2 |x - 1| dx$.

.....

.....

.....

.....

.....

B. LUYỆN TẬP

I. Chữa bài tập SGK

II. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: [Mức độ 1] Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^1 f(x)dx = 2$; $\int_1^3 f(x)dx = 6$.

Tính $I = \int_0^3 f(x)dx$.

- A. $I = 8$. B. $I = 12$. C. $I = 36$. D. $I = 4$.

Câu 2: [Mức độ 1] Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;3]$ và thỏa mãn $f(1) = 2$ và $f(3) = 9$. Tính $I = \int_1^3 f'(x)dx$.

- A. $I = 11$. B. $I = 7$. C. $I = 2$. D. $I = 18$.

Câu 3: [Mức độ 2] Đặt $I = \int_1^2 (2mx+1)dx$ (m là tham số thực). Tìm m để $I = 4$.

- A. $m = -1$. B. $m = -2$. C. $m = 1$. D. $m = 2$.

Câu 4: [Mức độ 3] Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1+\sin 2x)dx = \pi\left(\frac{\pi}{a}-\frac{1}{b}\right)+1$, với a, b là các số nguyên dương.

Tính $a+2b$.

- A. 10. B. 14. C. 12. D. 8.

Câu 5: [Mức độ 2] Biết tích phân $\int_0^1 \frac{2x+3}{2-x}dx = a \ln 2 + b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Giá trị của a bằng

- A. 7. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 6: [Mức độ 3] Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$ và $f(0) = 1$; $f(1) = -2$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

- A. $2 + \ln 15$. B. $3 - \ln 15$. C. $\ln 15 - 1$. D. $\ln 15$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 7: Cho $\int_1^2 f(x)dx = 3$ và $\int_1^2 [3f(x) - g(x)]dx = 10$. Khi đó $\int_1^2 g(x)dx$ bằng

- A. 17. B. 1. C. -1. D. -4.

Câu 8: Giả sử f là hàm số liên tục trên khoảng K và a, b, c là ba số bất kỳ trên khoảng K . Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\int_a^a f(x)dx = 1.$

B. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

C. $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx, c \in (a; b).$

D. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$

Câu 9: Giá trị của $\int_{-1}^0 e^{x+1}dx$ bằng

A. $1-e.$

B. $e-1.$

C. $-e.$

D. $e.$

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 3]$, $f(3) = 5$ và $\int_1^3 f'(x)dx = 6$. Khi đó $f(1)$ bằng

A. $-1.$

B. $11.$

C. $1.$

D. $10.$

Câu 11: Tìm số thực $a < 0$ thỏa mãn $\int_1^a (x^3 - 6x)dx = \frac{875}{4}.$

A. $a = -4.$

B. $a = -5.$

C. $a = -6.$

D. $a = -3.$

Câu 12: Cho $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1)dx = 6$. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1; 2).$

B. $(-\infty; 0).$

C. $(0; 4).$

D. $(-3; 1).$

Câu 13: Cho $\int_0^1 \frac{2x^2 + 3x}{x^2 + 3x + 2}dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$, với a, b, c là các số nguyên. Tổng $a + b + c$ bằng

A. $3.$

B. $1.$

C. $-1.$

D. $2.$

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int_1^3 f(x)dx = 4$. Tính

$\int_{-1}^3 f(|x|)dx.$

A. $6.$

B. $4.$

C. $8.$

D. $2.$

Câu 15: Biết $\int_0^2 [f(x) + x]dx = 6$ và $\int_0^2 [3f(x) - g(x)]dx = 10$. Tính $I = \int_0^2 [2f(x) + 3g(x)]dx.$

A. $I = 12.$

B. $I = 16.$

C. $I = 10.$

D. $I = 14.$

Câu 16: Biết rằng $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-4 \sin x + 7 \cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx = a + 2 \ln \frac{b}{c}$ với $a > 0; b, c \in \mathbb{N}^*; \frac{b}{c}$ tối giản. Hãy tính giá trị biểu thức $P = a - b + c.$

A. $\pi - 1.$

B. $\frac{\pi}{2} + 1.$

C. $\frac{\pi}{2} - 1.$

D. $1.$

GIẢI TÍCH 12 – CHƯƠNG 3

§2. TÍCH PHÂN

A. PHẦN KIẾN THỨC CHÍNH

III. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

1. Phương pháp đổi biến số

1.1. Định lý

➤ **Định lý:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử hàm số $x = \varphi(t)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$ sao cho $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ và $a \leq \varphi(t) \leq b$ với mọi $t \in [\alpha; \beta]$.

$$\text{Khi đó } \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

➤ **Chú ý:** Chú ý nếu $\beta < \alpha$ thì ta xét $[\beta; \alpha]$.

1.2. Ví dụ

➤ **VD1:** Tính tích phân sau: $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 3}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **Chú ý:** Trong nhiều trường hợp ta còn sử dụng phép đổi biến số ở dạng sau: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Để tính $\int_a^b f(x) dx$, đôi khi ta chọn hàm số $t = u(x)$ làm biến số mới, trong đó trên đoạn $[a; b]$, $u(x)$ có đạo hàm liên tục và $u(x) \in [\alpha; \beta]$. Giả sử có thể viết $f(x) = g(u(x))u'(x)$ với $g(u)$ liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$.

$$\text{Khi đó, ta có } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(u(x))u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt.$$

➤ **Phương pháp:** Tính $\int_a^b g(u(x))u'(x) dx$ với $f(x) = g(u(x))u'(x)$.

Bước 1: Biến đổi để chọn phép đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x) dx$.

Bước 2: Đổi cận: $\begin{cases} x = b \rightarrow t = u(b) \\ x = a \rightarrow t = u(a) \end{cases}$ (Ghi nhớ: đổi biến phải đổi cận).

Bước 3: Đưa về dạng $I = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt$ đơn giản hơn và dễ tính toán.

➤ **VD2:** Tính tích phân sau: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **VD3:** Tính tích phân sau: $I = \int_1^3 x \sqrt[3]{x^2 - 1} dx$.

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **VD4:** Tính tích phân sau: $I = \int_1^e \frac{\sqrt{8 \ln x + 1}}{x} dx$.

.....

.....

.....

.....

.....

B. LUYỆN TẬP

Câu 1: [Mức độ 2] Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x \, dx$ và $\sin x = t$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \, dt.$ B. $I = \int_0^1 dt.$ C. $I = -\int_0^1 e^t \, dt.$ D. $I = \int_0^1 e^t \, dt.$

Câu 2: [Mức độ 3] Giá trị của tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ bằng

- A. $I = \frac{\pi}{2}.$ B. $I = \frac{3\pi}{4}.$ C. $I = \frac{\pi}{4}.$ D. $I = \frac{5\pi}{4}.$

➤ **Phương pháp giải nhanh trắc nghiệm**

Sử dụng máy tính tính $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0,79.$

Sử dụng máy tính bấm các đáp án, đáp án nào cho kết quả gần bằng 0,79 thì chọn.

Câu 3: [Mức độ 2] Giá trị của $I = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$ được viết dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ (a, b là các số nguyên dương). Khi đó giá trị của $a - 7b$ bằng

- A. 0. B. 1. C. 2. D. -1.

Câu 4: [Mức độ 3] Giả sử tích phân $I = \int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$. Lúc đó

- A. $a + b + c = \frac{4}{3}.$ B. $a + b + c = \frac{5}{3}.$ C. $a + b + c = \frac{7}{3}.$ D. $a + b + c = \frac{8}{3}.$

Câu 5: [Mức độ 2] Tính tích phân $I = \int_0^1 x(1+x^2)^4 dx$.

- A. $\frac{32}{10}.$ B. $-\frac{31}{10}.$ C. $\frac{30}{10}.$ D. $\frac{31}{10}.$

Phương pháp giải nhanh trắc nghiệm

Sử dụng máy tính tính $\int_0^1 x(1+x^2)^4 dx = \frac{31}{10}.$

Câu 6: [Mức độ 2] Với phép đổi biến $u = \sqrt{x}$, tích phân $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ trở thành

- A. $2 \int_1^4 e^u du.$ B. $2 \int_1^2 e^u du.$ C. $2 \int_1^{16} e^u du.$ D. $\frac{1}{2} \int_1^2 e^u du.$

Phương pháp giải nhanh trắc nghiệm

Sử dụng máy tính tính $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \approx 9,34.$

Sử dụng máy tính tính các tích phân trong các đáp án, đáp án nào cho kết quả $\approx 9,34$ chọn.

Câu 7: [Mức độ 2] Cho tích phân $I = \int_1^e \frac{3 \ln x + 1}{x} dx$. Nếu đặt $t = \ln x$ thì

A. $I = \int_0^1 \frac{3t+1}{e^t} dt.$ B. $I = \int_1^e \frac{3t+1}{t} dt.$ C. $I = \int_1^e (3t+1) dt.$ D. $I = \int_0^1 (3t+1) dt.$

Phương pháp giải nhanh trắc nghiệm

Sử dụng máy tính tính $I = \int_1^e \frac{3 \ln x + 1}{x} dx = \frac{5}{2}.$

Sử dụng máy tính tính các tích phân trong các đáp án, kết quả bằng $\frac{5}{2}$ thì ta chọn đáp án đó.

Câu 8: [Mức độ 2] Cho biết $\int_1^3 f(x) dx = 8$. Tính tích phân $I = \int_4^{12} f\left(\frac{x}{4}\right) dx.$

A. $I = 12.$ B. $I = 2.$ C. $I = 32.$ D. $I = 3.$

Câu 9: [Mức độ 3] Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{x^2 + 2 \ln x}{x} dx.$

A. $I = \frac{e^2}{2}.$ B. $I = e^2 + 1.$ C. $I = e^2 - \frac{1}{2}.$ D. $I = \frac{e^2 + 1}{2}.$

Câu 10: [Mức độ 3] Cho $\int_0^{\ln m} \frac{e^x dx}{e^x + 2} = \ln 2$. Khi đó giá trị của m là

A. $m = 4.$ B. $m = 2; m = 4.$ C. $m = 2.$ D. $m = \frac{1}{2}.$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 11: [Mức độ 2] Tích phân $\int_0^2 \frac{x}{x^2 + 3} dx$ bằng

A. $\frac{1}{2} \log \frac{7}{3}.$ B. $\ln \frac{7}{3}.$ C. $\frac{1}{2} \ln \frac{3}{7}.$ D. $\frac{1}{2} \ln \frac{7}{3}.$

Câu 12: [Mức độ 2] Cho tích phân $I = \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$, nếu đặt $u = x^2 + 1$ thì tích phân đã cho trở thành

A. $I = \int_1^9 \frac{u+1}{2\sqrt{u}} du.$ B. $I = \int_1^9 \frac{u-1}{2\sqrt{u}} du.$ C. $I = \int_1^9 \frac{u-1}{2u} du.$ D. $I = \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{u-1}{2\sqrt{u}} du.$

Câu 13: [Mức độ 2] Cho tích phân $I = \int_0^3 \frac{x}{1 + \sqrt{x+1}} dx$ nếu đặt $t = \sqrt{x+1}$ thì $I = \int_1^2 f(t) dt$ trong đó

A. $f(t) = 2t^2 + 2t.$ B. $f(t) = t^2 - t.$ C. $f(t) = 2t^2 - 2t.$ D. $f(t) = t^2 + t.$

Câu 14: [Mức độ 2] Xét $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x e^{\sin^2 x} dx$, nếu đặt $u = \sin^2 x$ thì $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x e^{\sin^2 x} dx$ bằng

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^u du.$ B. $\int_0^1 e^u du.$ C. $-\int_0^1 e^u du.$ D. $2 \int_0^1 e^u du.$

Câu 15: [Mức độ 3] Biết $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S = a^2 + b^2$.

- A. $S = 73$. B. $S = 71$. C. $S = 65$. D. $S = 68$.

Câu 16: [Mức độ 2] Cho $\int_0^6 f(x) dx = 12$. Tính $I = \int_0^2 f(3x) dx$.

- A. $I = 6$. B. $I = 36$. C. $I = 2$. D. $I = 4$.

Câu 17: [Mức độ 2] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_1^2 f(x) dx = 2020$.

Tính $I = \int_0^1 f(x^2 + 1) x dx$

- A. 2020. B. 4040. C. 1010. D. 505.

Câu 18: [Mức độ 3] Biết $\int_{-1}^{11} f(x) dx = 18$. Tính $I = \int_0^2 x [2 + f(3x^2 - 1)] dx$.

- A. $I = 10$. B. $I = 5$. C. $I = 7$. D. $I = 8$.

Vậy $I = 4 + 3 = 7$.

Câu 19: [Mức độ 3] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_1^3 f(x) dx = 6$.

Giá trị của $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(2 \sin x + 1) dx$ bằng

- A. 3. B. 12. C. 6. D. 4.

Câu 20: [Mức độ 4] Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x + 2x^3 & \text{khi } x > -2 \\ 4 - 3x & \text{khi } x \leq -2 \end{cases}$.

Tích phân $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(-1 + 2 \sin 2x) \cos 2x dx$ bằng

- A. $\frac{1}{8}$. B. $-\frac{1}{4}$. C. $\frac{47}{8}$. D. $-\frac{1}{8}$.

Câu 21: [Mức độ 3] Tính tích phân $I = \int_1^4 \frac{\sqrt{x} + f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ biết rằng $\int_1^2 f(x) dx = 2$.

- A. $I = 7$. B. $I = 5$. C. $I = 8$. D. $I = 9$.

Câu 22: [Mức độ 3] Biết $\int_1^e \frac{1 - \ln x}{(x + \ln x)^2} dx = \frac{1}{ae + b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $T = 2a + b^2$.

- A. $T = 1$. B. $T = 4$. C. $T = 2$. D. $T = 3$.

Câu 23: [Mức độ 2] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4$ và

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 2$. Tích phân $I = \int_0^3 f(x) dx$ bằng

A. $I = 2$. **B.** $I = 6$. **C.** $I = 4$. **D.** $I = 10$.

A. $\frac{3^{2018} - 2^{2018}}{2018}$. **B.** $\frac{3^{2018} - 2^{2018}}{4036}$. **C.** $\frac{3^{2017} - 2^{2018}}{4037} - \frac{2^{2018}}{2017}$. **D.** $\frac{3^{2021} - 2^{2021}}{4040}$.

$\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S = a^2 + b^2 + c^2$.

A. $S = 29$. **B.** $S = 26$. **C.** $S = 27$. **D.** $S = 21$.

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

GIẢI TÍCH 12 – CHƯƠNG 3

§2. TÍCH PHÂN

A. PHẦN KIẾN THỨC CHÍNH

III. PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

1. Phương pháp tính tích phân từng phần:

➤ VD MỞ ĐẦU:

Công thức $\int u dv = uv - \int v du$. Tính $\int_a^b u dv = ?$

Lời giải: $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$.

➤ **Định lý:** Nếu $u = u(x)$, $v = v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx \text{ hay } \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

➤ Phương pháp:

Bước 1: Chọn đặt u và dv thích hợp.

Bước 2: Tìm du và v .

Bước 3: Sử dụng công thức tích phân từng phần.

Bước 4: Tính tích phân $\int_a^b u dv$ đơn giản hơn.

➤ Chú ý: Dấu hiệu sử dụng tích phân

Cách đặt	Dạng tích phân			
	$\int_a^b P(x) e^x dx$	$\int_a^b P(x) \sin x dx$	$\int_a^b P(x) \cos x dx$	$\int_a^b P(x) \ln x dx$
u	$P(x)$	$P(x)$	$P(x)$	$\ln x$
dv	$e^x dx$	$\sin x dx$	$\cos x dx$	$P(x) dx$

2. Ví dụ:

➤ **VD1:** Tính tích phân $I = \int_1^e x \ln x \, dx$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **VD2:** Tính tích phân $I = \int_0^1 (2x + 3) e^x \, dx$.

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **VD3:** Tính tích phân $I = \int_0^1 x \ln(2 + x^2) \, dx$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. [Mức độ 1] Tính tích phân $I = \int_0^1 (x + 1) e^{2x} \, dx$.

A. $I = e^2$. B. $I = \frac{3e^2 - 1}{4}$. C. $I = \frac{3e^2 - 3}{4}$. D. $I = 5e^2 - 3$.

Câu 2. [Mức độ 2] Kết quả tích phân $I = \int_0^1 (2x+3)e^x dx$ được viết dưới dạng $I = ae + b$ với a, b là các số hữu tỉ. Tìm khẳng định đúng.

A. $ab = 3$. B. $a^3 + b^3 = 28$. C. $a - b = 2$. D. $a + 2b = 1$.

Câu 3. [Mức độ 3] Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1 + \sin 2x) dx = \frac{a}{b} + \frac{c\pi^2}{d}$ với $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là phân số tối giản. Tính $a + b + c + d$.

A. 12. B. 14. C. 36. D. 38.

Câu 4. [Mức độ 2] Biết $I = \int_0^4 x \ln(x^2 + 9) dx = a \ln 5 + b \ln 3 + c$ trong đó a, b, c là các số thực. Giá trị của biểu thức $T = a + b + c$.

A. $T = 11$. B. $T = 9$. C. $T = 10$. D. $T = 8$.

Câu 5. [Mức độ 3] Biết $f(5) = 1$ và $\int_0^1 x f(5x) dx = 1$. Khi đó giá trị của $\int_0^5 x^2 f'(x) dx$ bằng

A. 15. B. 23. C. -25. D. $\frac{123}{5}$.

Câu 6. [Mức độ 3] Biết $\int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x dx = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} e^2$ với $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là phân số tối giản. Tính $a + b + c + d$.

A. 12. B. 14. C. 16. D. 18.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. [Mức độ 1] Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx$ ta được kết quả:

A. $\frac{\pi}{8}$. B. $\frac{\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{2}$. D. $\frac{\pi}{3}$.

Câu 2. [Mức độ 1] Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} x^2 \cos 2x dx$ bằng cách đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos 2x dx \end{cases}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x \sin 2x dx$. B. $I = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} x \sin 2x dx$.
C. $I = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} x \sin 2x dx$. D. $I = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} x \sin 2x dx$.

Câu 3. [Mức độ 2] Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(4)=1$ và $\int_0^1 x f(4x) dx = 1$.

Tính tích phân $\int_0^4 x^2 f'(x) dx$.

- A.** 16. **B.** -16. **C.** 8. **D.** -8.

Câu 4. [Mức độ 2] Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+x)\cos 2x \, dx = \frac{1}{a} + \frac{\pi}{b}$ (a, b là các số nguyên khác 0). Tính giá trị ab .

- A.** $ab = 32$. **B.** $ab = 2$. **C.** $ab = 4$. **D.** $ab = 12$.

Câu 5. [Mức độ 3] Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos\sqrt{x} \, dx$.

- A.** $I = \pi - 2$. **B.** $I = \pi + 2$. **C.** $I = -\pi - 2$. **D.** $I = -\pi + 2$.

[illegible]

GIẢI TÍCH 12 – CHƯƠNG 3

§2. TÍCH PHÂN

A. PHẦN KIẾN THỨC CHÍNH

I. ĐỊNH NGHĨA

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

II. TÍNH CHẤT

1. Tính chất 1: $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ (với k là hằng số).

2. Tính chất 2: $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$.

3. Tính chất 3: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ ($a < c < b$).

III. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

➤ **Công thức:** $\int_a^b [f(u(x))] u'(x) dx = F[u(x)] \Big|_a^b = F[u(b)] - F[u(a)]$.

➤ **Phương pháp:**

Bước 1: Biến đổi để chọn phép đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x) dx$.

Bước 2: Đổi cận: $\begin{cases} x = b \rightarrow t = u(b) \\ x = a \rightarrow t = u(a) \end{cases}$ (đổi biến phải đổi cận).

Bước 3: Đưa về dạng $I = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt$ đơn giản để tính toán.

IV. PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

➤ **Công thức:** $\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$.

hay $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$. (2)

➤ **Phương pháp**

Bước 1: Chọn đặt u và dv thích hợp ($u = \log, u =$ đa thức).

Bước 2: Sử dụng công thức tính tích phân từng phần.

Bước 3: Tính tích phân $\int_a^b v du$ đơn giản hơn.

B. LUYỆN TẬP

I. Chữa bài tập SGK

Bài 3 trang 113 - SGK: Sử dụng phương pháp đổi biến số, hãy tính:

a) $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$; b) $I = \int_0^1 \frac{e^x(1+x)}{1+xe^x} dx$.

Bài 4 trang 113 – SGK: Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, hãy tính:

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sin x dx$; b) $I = \int_1^e x^2 \ln x dx$;

c) $I = \int_0^1 \ln(1+x) dx$; d) $I = \int_0^1 (x^2 - 2x - 1)e^{-x} dx$.

II. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: [Mức độ 2] Cho $I = \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{2e^x + 3} = a + \frac{b \ln 7 + c \ln 10}{3}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Tính giá trị của $K = 2a + 3b + 4c$.

- A. $K = 3$. B. $K = 7$. C. $K = 1$. D. $K = -1$.

Câu 2: [Mức độ 3] Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1) f'(x) dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$.

Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

- A. -12 . B. 8 . C. 1 . D. -8 .

Câu 3: [Mức độ 3] Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 16$, $\int_0^2 f(x) dx = 4$.

Tính $I = \int_0^1 x f'(2x) dx$.

- A. 7 . B. 12 . C. 20 . D. 13 .

Câu 4: [Mức độ 4] Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(4) = 5$ và $\int_0^2 x^2 f(2x) dx = 10$. Giá trị

của tích phân $\int_0^4 x^3 f'(x) dx$ bằng

- A. 80 . B. 70 . C. 60 . D. 90 .

Câu 5: [Mức độ 3] Cho $f(x)$ liên tục thỏa $f(1) = 1$ và $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x f'(\sin x) dx$.

- A. $I = \frac{4}{3}$. B. $I = \frac{2}{3}$. C. $I = \frac{1}{3}$. D. $I = -\frac{2}{3}$.

Câu 6: [Mức độ 4] Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 x^2 f''(x) dx = 12$ và $2f(1) - f'(1) = -2$.

Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

- A. 6. B. 5. C. 7. D. 8.

Câu 7: [Mức độ 3] Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x+1)e^x & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Biết $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{a}{b} + c.e$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của tổng $a + b + c$ bằng

- A. 9. B. 11. C. 12. D. 14.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: [Mức độ 1] Cho $\int_{-2}^1 f(x) dx = 3$. Tính tích phân $I = \int_{-2}^1 [2f(x) - 1] dx$.

- A. -9. B. -3. C. 3. D. 5.

Câu 2: [Mức độ 2] Biết $\int_1^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1} dx = \frac{2}{3}(a - \sqrt{b})$, với a, b là các số nguyên dương. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a = 2b$. B. $a < b$. C. $a = b$. D. $a = 3b$.

Câu 3: [Mức độ 2] Biết rằng tích phân $\int_0^1 (2x+1)e^x dx = a + be$. Tích ab bằng

- A. 1. B. -1. C. -15. D. 20.

Câu 4: [Mức độ 3] Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(0)f'(2) \neq 0$ và $g(x)f'(x) = x(x-2)e^x$. Tính giá trị của tích phân $I = \int_0^2 f(x)g'(x) dx$?

- A. -4. B. $e - 2$. C. 4. D. $2 - e$.

Câu 5: [Mức độ 4] Cho $\int_0^1 f(2x+1) dx = 12$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x) \sin 2x dx = 3$. Tính $\int_0^3 f(x) dx$.

- A. 26. B. 22. C. 27. D. 15.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

GIẢI TÍCH 11 – CHƯƠNG 3
§5. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

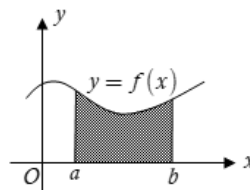
A. PHẦN KIẾN THỨC CHÍNH

I. TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

1. Hình phẳng giới hạn bởi 1 đường cong và trục hoành.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định $S = \int_a^b |f(x)| dx$.

Ta có (H):
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \Rightarrow S = \int_a^b |f(x)| dx.$$



Ví dụ 1: Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x + 4$, trục hoành, các đường

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2: Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{-x-2}{x-1}$, trục hoành và các đường thẳng $x = -1$; $x = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3: Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 2$ và trục hoành.

.....

.....

.....

.....

.....

Chú ý:

➤ Nếu đề bài chưa cho $x = a$, $x = b$ (cận tích phân) thì ta cần giải phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = 0$ để tìm cận tích phân.

➤ Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên $[a; b]$ thì $S = \int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$.

➤ Phương pháp trắc nghiệm:

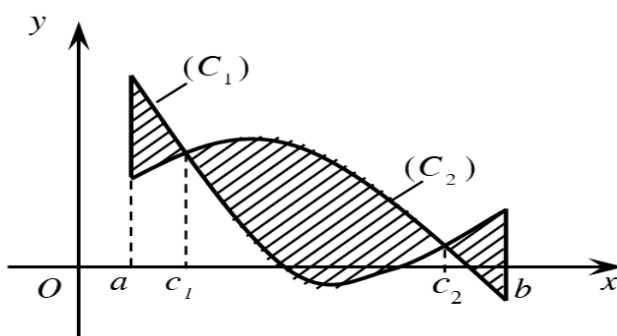
+ Xác định các yếu tố cần thiết như công thức $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$.

+ Khi đó $S = \int_a^b |f(x)| dx$.

+ Sử dụng chức năng tích phân có sẵn trong máy tính Casio để tính.

2. Hình phẳng giới hạn bởi 2 đường cong.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.



Ta có (H): $\begin{cases} y = f_1(x) & (C_1) \\ y = f_2(x) & (C_2) \\ x = a \\ x = b \end{cases} \Rightarrow S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

Ví dụ 1: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 2$, $x = 0$, $x = 1$.

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x \ln x$, $y = x$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = e$.

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3: Tính diện tích của hình phẳng giới hạn đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 2$ và đường thẳng $y = x - 1$.

.....

.....

.....

.....

.....

Chú ý:

- Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số chính là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm của hai hàm số đó.
- Nếu đề bài chưa cho $x = a$, $x = b$ (cận tích phân) thì ta cần giải phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x)$ để tìm cận tích phân.

B. LUYỆN TẬP

I. Chữa bài tập SGK

Bài 1 trang 123 – SGK. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường:

a) $y = x^2$, $y = x + 2$.

b) $y = |\ln x|$, $y = 1$

Bài 2 trang 123 – SGK. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^2 + 1$; tiếp tuyến của đường này tại điểm $M(2;5)$ và trục Oy .

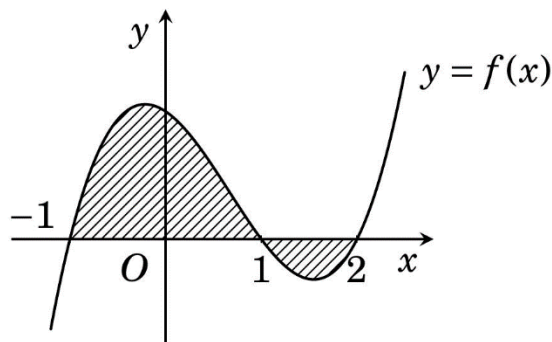
$$= \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right) \bigg|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

II. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: [Mức độ 1] Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ đường thẳng $x = a$; $x = b$ và trục Ox được tính bởi công thức:

A. $S = \int_a^b f(x) dx$. **B.** $S = \int_a^b |f(x)| dx$. **C.** $S = \int_b^a f(x) dx$ **D.** $S = \int_b^a |f(x)| dx$.

Câu 2: [Mức độ 2] Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$; $x = -1$ và $x = 2$ (như hình vẽ bên).



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = -\int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx.$

B. $S = -\int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx.$

C. $S = \int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx.$

D. $S = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx.$

Câu 3: [Mức độ 2] Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$; $y = 3x - 2$ được tính theo công thức

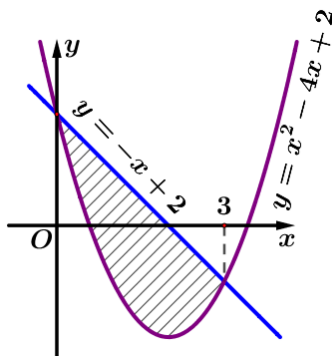
A. $S = \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)dx.$

B. $S = -\int_1^2 (x^2 - 3x + 2)dx.$

C. $S = \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)^2 dx.$

D. $S = \pi \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)^2 dx.$

Câu 4: [Mức độ 1] Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào?



A. $\int_0^3 (x^2 - 3x)dx.$

B. $\int_0^3 (-x^2 + 3x)dx.$

C. $\int_0^3 (x^2 - 4x + 2)dx - \int_0^3 (-x + 2)dx.$

D. $\int_0^3 (-x + 2)dx + \int_0^3 (x^2 - 4x + 2)dx.$

Câu 5: [Mức độ 1] Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^4$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 3$ là:

A. $\frac{243}{5}$ (đvdt).

B. $\frac{244}{5}$ (đvdt).

C. $\frac{242}{5}$ (đvdt).

D. $\frac{1}{5}$ (đvdt)

Câu 6: [Mức độ 1] Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x}$, trục hoành, hai đường thẳng $x = 1$ và $x = 2$ là.

A. $\ln 2$.

B. $\ln 2 - 1$.

C. $\ln 2 + 1$.

D. $1 - \ln 2$.

Câu 7: [Mức độ 2] Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 2$ được tính bởi công thức:

A. $\int_0^2 (x - x^2) dx$.

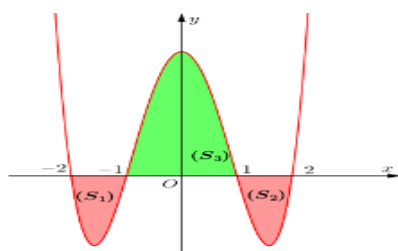
B. $\int_1^2 (x^2 - x) dx - \int_0^1 (x^2 - x) dx$.

C. $\int_0^1 (x^2 - x) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx$.

D. $\int_0^1 (x^2 - x) dx$.

Câu 8: [Mức độ 2] Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$ như hình vẽ ở bên và có diện tích

$S_1 = S_2 = \frac{22}{15}$, $S_3 = \frac{76}{15}$. Tính tích phân $I = \int_{-2}^2 f(x) dx$



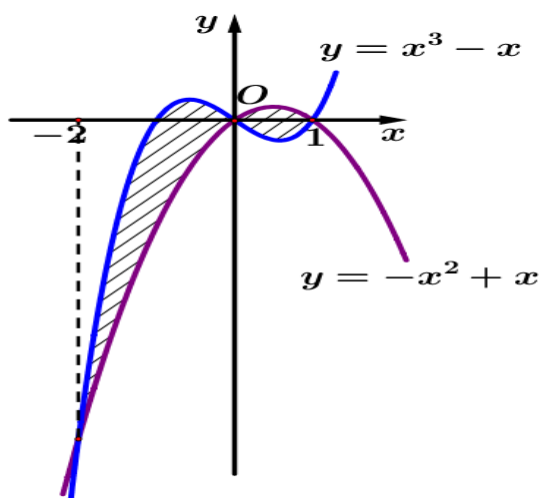
A. $I = \frac{32}{15}$.

B. $I = 8$.

C. $I = \frac{18}{5}$.

D. $I = -\frac{32}{15}$.

Câu 9: [Mức độ 2] Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào?



A. $\int_{-2}^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx$.

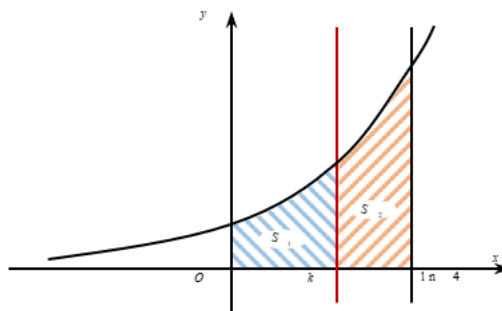
B. $\int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx - \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx$.

C. $\int_{-2}^1 (-x^3 - x^2 + 2x) dx$.

D. $\int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx + \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx$.

Câu 10: [Mức độ 3] Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$.

Đường thẳng $x = k$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.



A. $k = \frac{2}{3} \ln 4$.

B. $k = \ln 2$.

C. $k = \ln \frac{8}{3}$.

D. $k = \ln 3$.

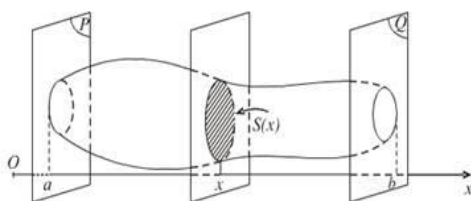
III. TÍNH THỂ TÍCH

1. Thể tích của vật thể.

Khái niệm:

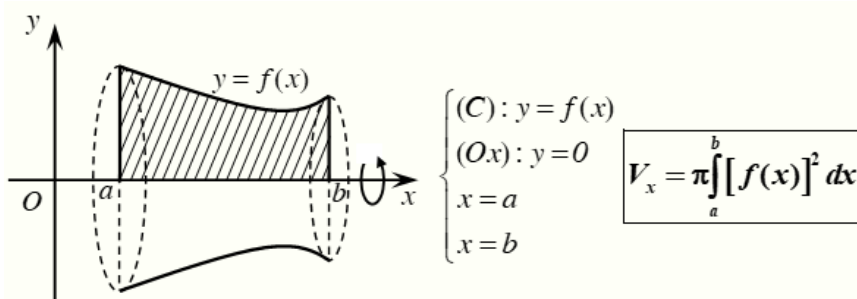
Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b ; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x , ($a \leq x \leq b$). Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Người ta chứng minh được thể tích vật thể V của phần vật thể được giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) được tính bởi công thức: $V = \int_a^b S(x) dx$



2. Thể tích khối tròn xoay.

Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox :



Ví dụ 1: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x} - 1$, trục hoành và đường thẳng $x = 4$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

.....

.....

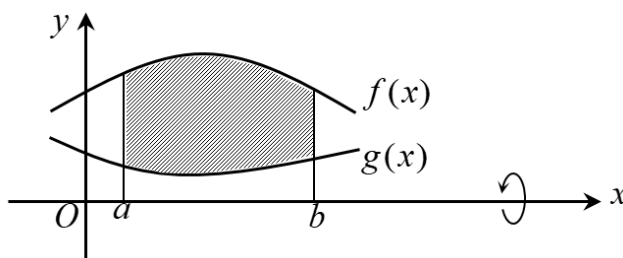
.....

Ví dụ 2: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $x = 1$ và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh bởi hình (H) quay quanh trục Ox .

Ví dụ 3: Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{\tan x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ quanh trục hoành.

Ví dụ 4: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) xung quanh trục hoành

Chú ý: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ (cùng nằm một phía so với Ox) và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox :



Thể tích khối tròn xoay tạo thành là: $V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$.

Ví dụ 5: Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x$ quay xung quanh trục Ox .

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 6: Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong $y = -x^3 + 12x$ và $y = -x^2$.

.....

.....

.....

.....

.....

B. LUYỆN TẬP

I. Chữa bài tập SGK

Bài 4 trang 123 – SGK. Tính thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quay quanh Ox :

a) $y = 1 - x^2$; $y = 0$. b) $y = \cos x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = \pi$. c) $y = \tan x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = \frac{\pi}{4}$.

Bài 5 trang 123 – SGK. Cho tam giác vuông OPM có cạnh OP nằm trên Ox . Đặt $POA = \alpha$ và $OM = R$ ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$, $R > 0$). Gọi H là khối tròn xoay thu được khi quay tam giác đó xung quanh Ox

- a) Tính thể tích của H theo α và R . b) Tìm α sao cho thể tích H là lớn nhất.

IV. Bài tập trắc nghiệm

Câu 11: Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ và $y = \sqrt{2x+1}$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức?

A. $V = \int_0^1 (2x+1) dx$. **B.** $V = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx$. **C.** $V = \pi \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx$. **D.** $V = \pi \int_0^1 (2x+1) dx$.

Câu 12: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x \cdot \ln x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$; $x = 2$. Thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi (H) khi nó quay quanh trục hoành có thể tích V được xác định bởi

A. $V = \pi \int_1^2 (x \cdot \ln x)^2 dx$. **B.** $V = \int_1^2 (x \cdot \ln x) dx$. **C.** $V = \int_1^2 (x \cdot \ln x)^2 dx$. **D.** $V = \pi \int_1^2 (x \cdot \ln x) dx$.

Câu 13: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{\pi(e^2+1)}{2}$. **B.** $V = \frac{\pi(e^2-1)}{2}$. **C.** $\frac{\pi e^2}{2}$. **D.** $V = \frac{e^2-1}{2}$.

Câu 14: Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = xe^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ xung quanh trục Ox là

A. $V = \pi \int_0^1 x^2 e^x dx$. **B.** $V = \int_0^1 x^2 e^{2x} dx$. **C.** $V = \pi \int_0^1 x e^x dx$. **D.** $V = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} dx$.

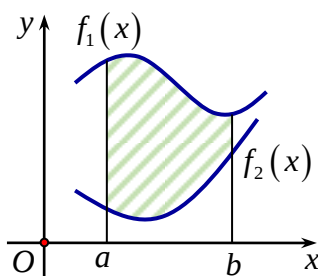
Câu 15: Cho miền phẳng (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành.

A. $\frac{3\pi}{2}$. **B.** 3π . **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{2\pi}{3}$.

Câu 16: Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x - x^2$ và trục hoành, quanh trục hoành.

A. $\frac{8\pi}{7}$ (đvtt). **B.** $\frac{81\pi}{10}$ (đvtt). **C.** $\frac{85\pi}{10}$ (đvtt). **D.** $\frac{41\pi}{7}$ (đvtt).

Câu 17: Cho hình phẳng trong hình (phần tô đậm) quay quanh trục hoành. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành được tính theo công thức nào?



A. $V = \pi \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]^2 dx$. **B.** $V = \int_a^b [f_1^2(x) - f_2^2(x)] dx$.
C. $V = \pi \int_a^b [f_1^2(x) - f_2^2(x)] dx$. **D.** $V = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx$.

Câu 18: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^3 - x + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $V = \pi \int_0^2 (x^3 - x + 1) dx$. **B.** $V = \int_0^2 (x^3 - x + 1)^2 dx$.
C. $V = \pi \int_0^2 (x^3 - x + 1)^2 dx$. **D.** $V = \pi \int_0^2 (x^3 - x^2 + 1) dx$.

Câu 19: Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$ và $y = -\sin x$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức

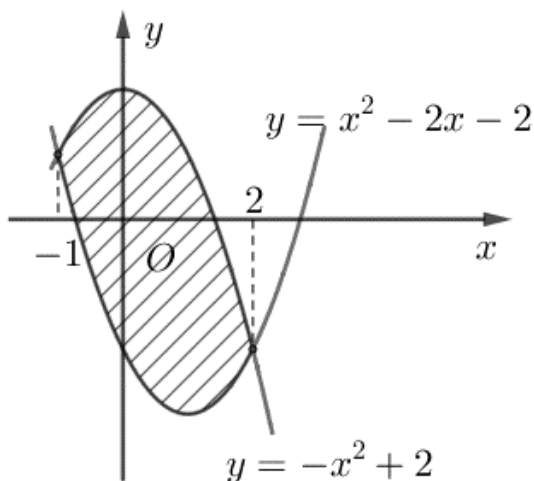
A. $V = \int_0^\pi \sin^2 x dx$. **B.** $V = \pi \int_0^\pi |\sin x| dx$.
C. $V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx$. **D.** $V = \pi \left| \int_0^\pi (-\sin x) dx \right|$.

Câu 20: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x} - 1$, trục hoành và đường thẳng $x = 4$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{7\pi}{3}$. **B.** $V = \frac{7}{6}$. **C.** $S = 1$. **D.** $V = \frac{7\pi}{6}$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 21: [Mức độ 1] (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên bằng



A. $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$.

B. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx$.

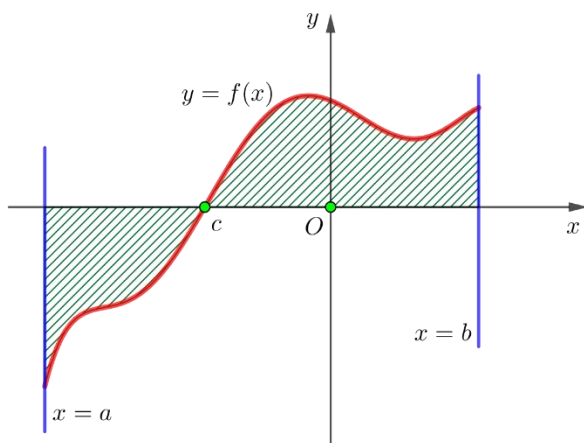
C. $\int_{-1}^2 (-2x^2 - 2x + 4) dx$.

D. $\int_{-1}^2 (2x^2 + 2x - 4) dx$.

Câu 22: [Mức độ 1] (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x^2$, $y = -1$, $x = 0$ và $x = 1$ được tính bởi công thức nào sau đây?

A. $S = \pi \int_0^1 (2x^2 + 1) dx$. B. $S = \int_0^1 (2x^2 - 1) dx$. C. $S = \int_0^1 (2x^2 + 1)^2 dx$. D. $S = \int_0^1 (2x^2 + 1) dx$.

Câu 23: [Mức độ 1] (Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2021) Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ trong hình dưới đây (phần gạch sọc) có diện tích S bằng



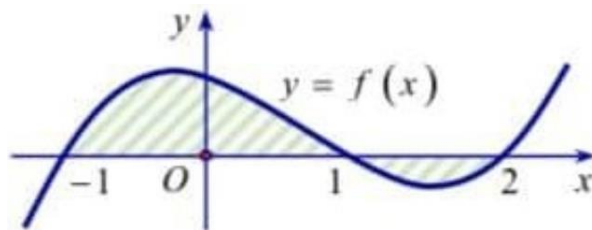
A. $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

B. $\int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$.

C. $-\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

D. $-\int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$.

Câu 24: [Mức độ 1] (Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - 2021) Gọi S là diện tích miền hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ dưới đây, với $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.



Công thức tính S là

A. $S = -\int_{-1}^2 f(x) dx.$

B. $S = \left| \int_{-1}^2 f(x) dx \right|.$

C. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$

D. $S = \int_{-1}^2 f(x) dx.$

Câu 25: [Mức độ 1] (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2021) Gọi (D) là hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = \frac{x}{4}, y = 0, x = 1, x = 4$. Thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục Ox được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $\pi \int_1^4 \frac{x}{16} dx.$

B. $\pi \int_1^4 \frac{x}{4} dx.$

C. $\pi \int_1^4 \left(\frac{x}{4} \right)^2 dx.$

D. $\pi \int_1^4 \frac{x^2}{4} dx.$

Câu 26: [Mức độ 1] (Chuyên Quốc Học Huế - 2021) Thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 1; x = 4$ quanh trục hoành được tính bởi công thức nào dưới đây?

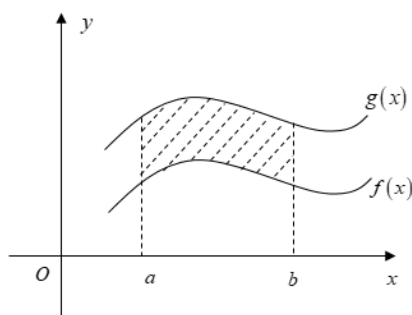
A. $V = \pi^2 \int_1^4 x dx.$

B. $V = \pi \int_1^4 \sqrt{x} dx.$

C. $V = \pi \int_1^4 x dx.$

D. $V = \int_1^4 |\sqrt{x}| dx.$

Câu 27: [Mức độ 1] (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội- 2021) Cho hình (H) được giới hạn như hình vẽ



Diện tích của hình (H) được tính bởi công thức nào dưới đây?

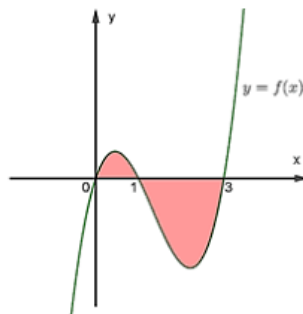
A. $\int_a^b [g(x) - f(x)] dx.$

B. $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$

C. $\int_a^b f(x) dx.$

D. $\int_a^b g(x) dx.$

Câu 28: [Mức độ 1] (THPT Quảng Xương 1-Thanh Hóa - 2021) Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích S của hình phẳng (phần tô đậm trong hình vẽ) là



A. $S = -\int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx.$

B. $S = \int_0^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx.$

C. $S = \int_0^3 f(x) dx.$

D. $S = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx.$

Câu 29: [Mức độ 1] (THPT Nguyễn Đức Cảnh - Thái Bình - 2021) Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $f(x) = \sqrt{2x+1}$, Ox , $x = 0$, $x = 1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức?

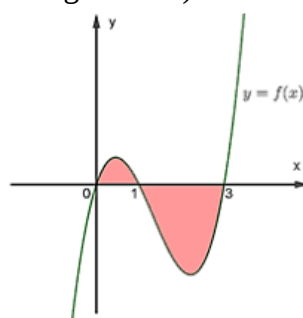
A. $V = \pi \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx.$

B. $V = \int_0^1 (2x+1) dx.$

C. $V = \pi \int_0^1 (2x+1) dx.$

D. $V = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx.$

Câu 30: [Mức độ 1] (THPT Quảng Xương 1-Thanh Hóa - 2021) Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích S của hình phẳng (phần tô đậm trong hình vẽ) là



A. $S = -\int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx.$

B. $S = \int_0^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx.$

C. $S = \int_0^3 f(x) dx.$

D. $S = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx.$

Câu 31: [Mức độ 2] (Chuyên KHTN - 2021) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2 + x$ và đồ thị của hàm số $y = 2x + 2$ bằng

A. $\frac{1}{6}.$

B. $\frac{3}{2}.$

C. $\frac{53}{6}.$

D. $\frac{9}{2}.$

Câu 32: [Mức độ 2] (Chuyên KHTN - 2021) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = x + 3$ và parabol $y = 2x^2 - x - 1$ bằng

A. $\frac{13}{6}.$

B. $\frac{9}{2}.$

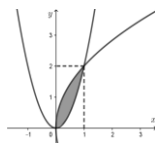
C. 9.

D. $\frac{13}{3}.$

Câu 33: [Mức độ 2] (Chuyên KHTN - 2021) Tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x = 2$ và đồ thị $y = x^2$ khi quay xung quanh trục Ox .

- A. $\frac{4\pi}{5}$. B. $\frac{5\pi}{6}$. C. $\frac{32\pi}{5}$. D. $\frac{\pi}{6}$.

Câu 34: [Mức độ 2] (Chuyên Quốc Học Huế - 2021) Tính diện tích của hình phẳng (được tô đậm) giới hạn bởi hai đường $y = 2x^2$, $y^2 = 4x$.



- A. $S = \frac{2\pi}{3}$. B. $S = \frac{4\pi}{3}$. C. $S = \frac{4}{3}$. D. $S = \frac{2}{3}$.

Câu 35: [Mức độ 2] (Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2021) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x - x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh trục Ox .

- A. $V = \frac{4}{3}\pi$. B. $V = \frac{16}{15}$. C. $V = \frac{4}{3}$. D. $V = \frac{16}{15}\pi$.

Câu 36: [Mức độ 2] (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội- 2021) Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = 0$; $x = 1$; $y = xe^x$; $y = 0$ là

- A. $\frac{\pi}{4}(e^2 - 1)$. B. $\frac{1}{4}(e^2 + 1)$. C. $\frac{1}{4}(e^2 - 1)$. D. $\frac{\pi}{4}(e^2 + 1)$.

Câu 37: [Mức độ 2] (Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên - 2021) Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- A. $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$. B. $V = \frac{\pi e^2}{2}$. C. $V = \frac{e^2 - 1}{2}$. D. $V = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2}$.

Câu 38: [Mức độ 2] (Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - 2021) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$ và hai trục tọa độ bằng

- A. $\frac{11}{4}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{11\pi}{4}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

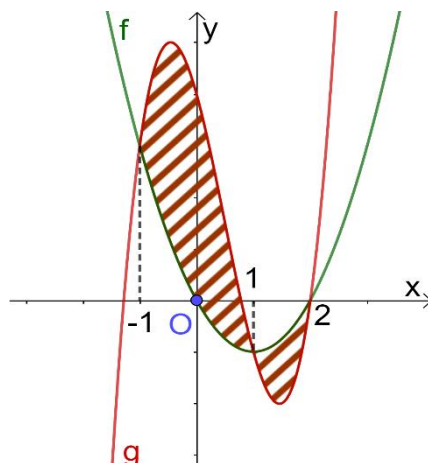
Câu 39: [Mức độ 2] (THPT Nguyễn Tất Thành - Hà Nội - 2021) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đường $y = \sin x, y = 0, x = 0$ và $x = \pi$. Quay hình phẳng (H) quanh trục Ox ta được một vật thể tròn xoay có thể tích bằng

- A. π . B. π^2 . C. $\frac{\pi^2}{2}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 40: [Mức độ 2] (THPT Đào Duy Từ - Hà Nội - 2021) Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 5x + 4$ và trục Ox . Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) quanh trục Ox bằng

- A. $\frac{9}{2}$. B. $\frac{81}{10}$. C. $\frac{81\pi}{10}$. D. $\frac{9\pi}{2}$.

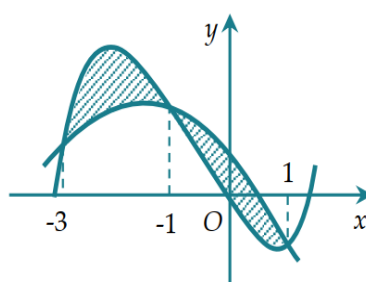
Câu 41: [Mức độ 3] (Chuyên KHTN - 2021) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 4$ và $g(x) = mx^2 + nx$ có đồ thị trong hình bên dưới.



Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số trên (phần gạch chéo trong hình vẽ) bằng

- A. $\frac{9}{4}$. B. $\frac{37}{12}$. C. $\frac{37}{6}$. D. $\frac{9}{2}$.

Câu 42: [Mức độ 3] (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2021) Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2}$ và $g(x) = dx^2 + ex + 1$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là -3 ; -1 ; 1 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng



- A. 5. B. $\frac{9}{2}$. C. 4. D. 8.

Câu 43: [Mức độ 3] (Liên trường Quỳnh Lưu - Hoàng Mai - Nghệ An - 2021) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$, đường thẳng $y = x - 1$ và các đường thẳng $x = m$, $x = 2m$ ($m > 1$). Giá trị của m sao cho $S = \ln 3$ là

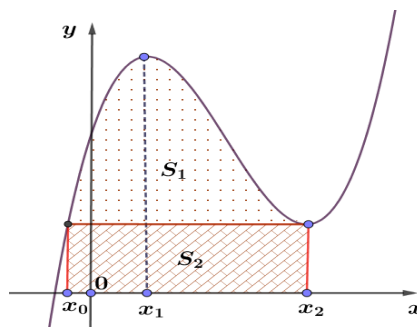
- A. $m = 2$. B. $m = 3$. C. $m = 5$. D. $m = 4$.

Câu 44: [Mức độ 3] (Sở Vĩnh Phúc - 2021) Biết diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường

$$y = 3^{-x}, y = \frac{x}{3}, x = 0 \text{ là } S = \frac{m}{3\ln 3} - \frac{n}{6}. \text{ Tính tổng } m+n.$$

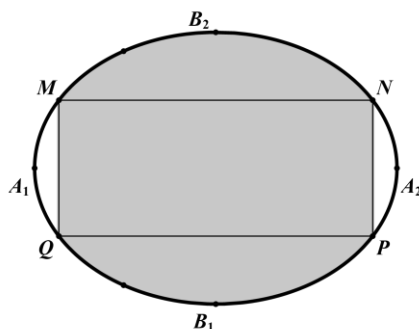
- A. $m+n=4$. B. $m+n=2$. C. $m+n=1$. D. $m+n=3$.

Câu 45: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên dưới. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hai điểm cực trị thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) - 3f(x_2) = 0$. Đường thẳng song song với trục Ox và qua điểm cực tiểu cắt đồ thị hàm số tại điểm thứ hai có hoành độ x_0 và $x_1 = x_0 + 1$. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ (S_1 và S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch ở hình bên dưới).



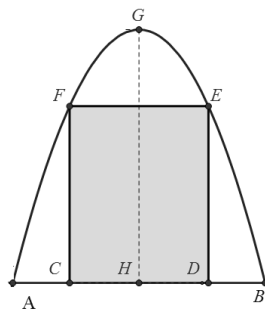
- A. $\frac{9}{8}$. B. $\frac{5}{8}$. C. $\frac{3}{8}$. D. $\frac{3}{5}$.

Câu 46: [Mức độ 4] (Đề Tham Khảo 2019) Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 200.000 VNĐ / m^2 và phần còn lại 100.000 VNĐ / m^2 . Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8m$, $B_1B_2 = 6m$ và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3m$?



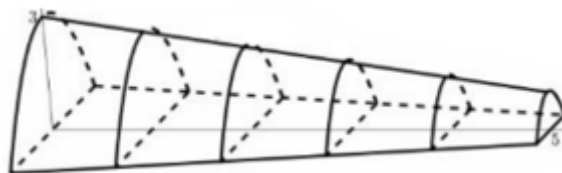
- A. 5.526.000 đồng. B. 5.782.000 đồng. C. 7.322.000 đồng. D. 7.213.000 đồng.

Câu 47: [Mức độ 4] (Trần Phú - Quảng Ninh - 2020) Một cái cổng hình Parabol như hình vẽ sau. Chiều cao $GH = 4m$, chiều rộng $AB = 4m$, $AC = BD = 0,9m$. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1200000 đồng / m^2 , còn các phần để trống làm xiên hoa có giá là 900000 đồng / m^2 . Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?



A. 11445000 đồng. B. 4077000 đồng. C. 7368000 đồng. D. 11370000 đồng.

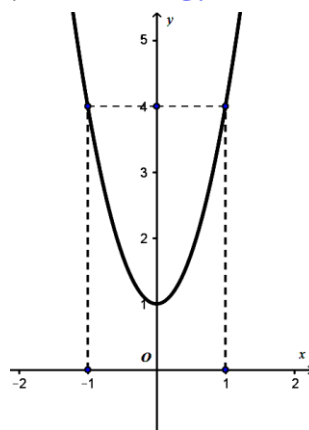
Câu 48: [Mức độ 4] (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019) Cho một mô hình 3-D mô phỏng một đường hầm như hình vẽ bên. Biết rằng đường hầm mô hình có chiều dài 5(cm); khi cắt hình này bởi mặt phẳng vuông góc với đáy của nó, ta được thiết diện là một hình parabol có độ dài đáy gấp đôi chiều cao parabol. Chiều cao của mỗi thiết diện parabol cho bởi công thức $y = 3 - \frac{2}{5}x$ (cm), với x (cm) là khoảng cách tính từ lối vào lớn hơn của đường hầm mô hình. Tính thể tích (theo đơn vị cm^3) không gian bên trong đường hầm mô hình (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



A. 29. B. 27. C. 31. D. 33.

Câu 49: [Mức độ 4] (THPT Hậu Lộc 2 - 2018) Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị là (C). Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính giá trị $H = f(4) - f(2)$.

A. $H = 45$. B. $H = 64$. C. $H = 51$. D. $H = 58$.



Câu 50: [Mức độ 4] Một họa tiết hình cánh bướm như hình vẽ bên.

A. 105660667 đ. **B.** 106666667 đ. **C.** 107665667 đ. **D.** 108665667 đ.

[illegible]

GIẢI TÍCH 12 – CHƯƠNG IV
§1. SỐ PHỨC

A. PHẦN KIẾN THỨC CHÍNH

1. Phần thực và phần ảo của số phức, số phức liên hợp.

- Số phức z là biểu thức có dạng $z = a + bi$ ($a, b \in R, i^2 = -1$). Khi đó:
 - + Phần thực của z là a ,
 - + Phần ảo của z là b và i được gọi là đơn vị ảo.
- Số phức liên hợp của z là $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$.

Đặc biệt:

- Số phức $z = a + 0i$ có phần ảo bằng 0 được coi là số thực và viết là $z = a$
- Số phức $z = 0 + bi$ có phần thực bằng 0 được gọi là số ảo (hay số thuần ảo) và viết là
- Số $i = 0 + 1i = 1i$.
- Số: $0 = 0 + 0i$ vừa là số thực vừa là số ảo.

Ví dụ 1: Tìm phần thực và phần ảo của các số phức sau: $-3 + 5i$; $4 - i\sqrt{2}$; $0 + \pi i$; $1 + 0i$

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Tìm $\bar{z}$, biết. a) $z = -3 + 2i$ b) $z = 4 - 3i$

.....

.....

2. Số phức bằng nhau.

+ Cho hai số phức $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ ($a_1, a_2, b_1, b_2 \in R$). Khi đó:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

Ví dụ 3. Tìm số thực $x; y$ biết: $(2x + 1) + (3y - 2)i = (x + 2) + (y + 4)i$

.....

.....

.....

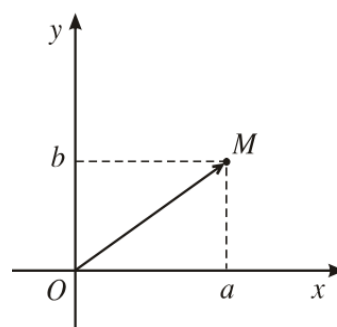
.....

3. Biểu diễn hình học của số phức, mô đun của số phức.

a) Biểu diễn hình học của số phức.

+ Số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ trong mặt phẳng tọa độ.

+ z và $\bar{z}$ được biểu diễn bởi hai điểm đối xứng nhau qua trục Ox .

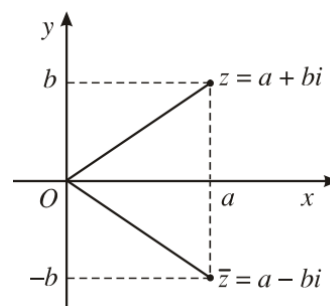


b) Mô đun của số phức.

+ Mô đun của số phức z là $|z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

+ $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$; $|z| = |\bar{z}|$.

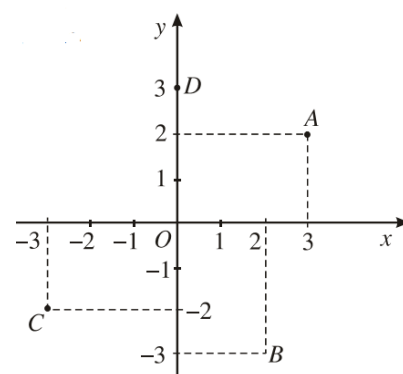
Chú ý: Trên mặt phẳng tọa độ, các điểm biểu diễn của z và $\bar{z}$ đối xứng nhau qua trục Ox



Ví dụ 4: Các điểm $A; B; C; D$ biểu diễn cho số phức nào?

Lời giải

.....



B. LUYỆN TẬP

1. Bài tập SGK

Bài 1 (Bài 1 trang 133 – SGK). Tìm phần thực và phần ảo của các số phức z , biết

- a) $z = 1 - \pi i$ b) $z = \sqrt{2} - i$ c) $z = 2\sqrt{2}$ d) $z = -7i$.

Bài 2 (Bài 2 trang 133 – SGK). Tìm các số thực x, y biết

- a) $(3x - 2) + (2y + 1)i = (x + 1) - (y - 5)i$
 b) $(2x + y) + (2y - x)i = (x - 2y + 3) + (y + 2x + 1)i$

Bài 3. (Bài 4 trang 133 – SGK). Tính $|z|$ biết

- a) $z = -2 + \sqrt{3}i$ b) $z = \sqrt{2} - 3i$ c) $z = -5$ d) $z = i\sqrt{3}$.

Bài 4. (Bài 6 trang 134 – SGK). Tìm $\bar{z}$, biết.

a) $z = 1 - i\sqrt{2}$ b) $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{3}$ c) $z = 5$ d) $z = 7i$.

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: [Mức độ 1] Phần thực của số phức $z = 5 - 2i$ bằng

- A. 5. B. 2. C. -5. D. -2.

Câu 2: [Mức độ 1] Cho số phức $z = 3 + 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$.

- A. Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng -2.
B. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng -2.
C. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $-2i$.
D. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2.

Câu 3: [Mức độ 1] Cho số phức $z = 1 + 2i$. Số phức liên hợp của z là

- A. $\bar{z} = -1 + 2i$. B. $\bar{z} = -1 - 2i$. C. $\bar{z} = 2 + i$. D. $\bar{z} = 1 - 2i$.

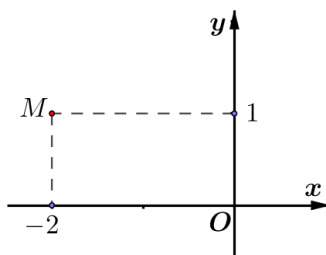
Câu 4: [Mức độ 1] Môđun của số phức $z = -1 + 2i$ bằng:

- A. 1. B. 5. C. $\sqrt{3}$. D. $\sqrt{5}$.

Câu 5: [Mức độ 1] Trên mặt phẳng tọa độ, điểm $M(-3; 2)$ là điểm biểu diễn số phức nào dưới đây?

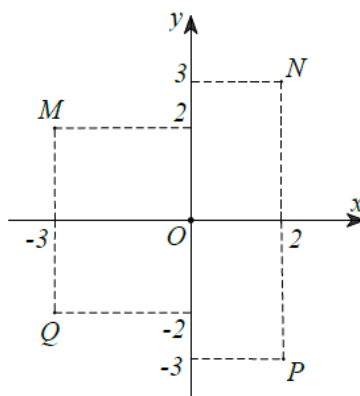
- A. $z_3 = 3 - 2i$. B. $z_4 = 3 + 2i$. C. $z_1 = -3 - 2i$. D. $z_2 = -3 + 2i$.

Câu 6: [Mức độ 2] Trên mặt phẳng tọa độ, điểm M là điểm biểu diễn số phức nào dưới đây?



- A. $z_1 = 1 - 2i$ B. $z_2 = 1 + 2i$ C. $z_3 = -2 + i$ D. $z_4 = 2 + i$

Câu 7: [Mức độ 2] Điểm nào trong hình vẽ dưới đây là điểm biểu diễn số phức liên hợp của số phức $z = -3i + 2$?



- A. M. B. N. C. Q. D. P.

Câu 8: [Mức độ 2] Cho số phức $z = 1 - 2i$. Tìm phần ảo của số phức $\bar{z}$.

- A. 2. B. -2. C. -1. D. 1.

Câu 9: [Mức độ 2] Tìm các số thực x và y thỏa mãn điều kiện $(2x + 3) + (3y - 1)i = (x + 2) + (y + 5)i$

A. $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$.

Câu 10: [Mức độ 3] Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $1+i, 4+i, 1+5i$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

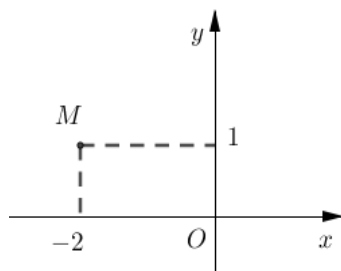
A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{7}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Câu 11: [Mức độ 1] Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $z = -3 + 4i$?

A. $N(3;4)$. B. $M(4;3)$. C. $P(-3;4)$. D. $Q(4;-3)$.

Câu 12: [Mức độ 1] Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức



A. $z = 1 + 2i$ B. $z = 1 - 2i$ C. $z = 2 + i$ D. $z = -2 + i$

Câu 13: [Mức độ 1] Số phức liên hợp của số phức $5 - 3i$ là

A. $-3 + 5i$. B. $-5 - 3i$. C. $5 + 3i$. D. $-5 + 3i$.

Câu 14: [Mức độ 1] Số phức $z = 4 - 3i$ có môđun bằng

A. $2\sqrt{2}$. B. 25. C. 5. D. 8.

Câu 15: [Mức độ 1] Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$.

A. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $2i$. B. Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng -2 .
C. Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng $-2i$. D. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2.

Câu 16: [Mức độ 1] Môđun của số phức $z = 2 - 3i$ bằng:

A. 5. B. $\sqrt{13}$. C. $\sqrt{5}$. D. 13.

Câu 17: [Mức độ 2] Biết rằng có duy nhất 1 cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn $(x + y) + (x - y)i = 5 + 3i$. Tính $S = x + 2y$.

A. $S = 5$. B. $S = 4$. C. $S = 6$. D. $S = 3$.

Câu 18: [Mức độ 2] Trong mặt phẳng Oxy , gọi M, N theo thứ tự là các điểm biểu diễn cho số phức z và $\bar{z}$ (với $z \neq 0$). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. M và N đối xứng với nhau qua trục Ox .
B. M và N đối xứng với nhau qua trục Oy .
C. M và N đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.
D. M và N đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ hai.

Câu 19: [Mức độ 3] Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện phần ảo của z bằng -2 là

B. $y = -2$.

D. $y = x + 2$.

Câu 20: [Mức độ 3] Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , 3 điểm A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của ba số phức $z_1 = 3 - 7i, z_2 = 9 - 5i$ và $z_3 = -5 + 9i$. Khi đó, trọng tâm G là điểm biểu diễn của số phức nào sau đây?

A. $z = 1 - 9i$.

B. $z = 3 + 3i$.

C. $z = \frac{7}{3} - i$.

D. $z = 2 + 2i$.

GIẢI TÍCH 12 – CHƯƠNG 4
§2 CỘNG, TRỪ VÀ NHÂN SỐ PHỨC

A. PHẦN KIẾN THỨC CHÍNH

I. PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ

1. Định nghĩa

➤ **Quy tắc:** Theo quy tắc cộng, trừ đa thức (coi i là biến).

* **Tổng quát:**

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

2. Ví dụ

➤ **VD1.** Tính

a) $(5 + i) + (2 + 7i)$.

b) $(3 + i) - (4 - 5i)$.

.....

.....

.....

.....

.....

Cách 2: Sử dụng máy tính Casio: Nhấn MODE + 2.

II. PHÉP NHÂN

1. Định nghĩa

➤ **Quy tắc:** Theo quy tắc nhân hai đa thức (coi i là biến), khi thu gọn thay $i^2 = -1$.

➤ **Tổng quát:**

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd.$$

$$\text{Vậy } (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

2. Ví dụ

➤ **VD2.** Tính

a) $(3 + 4i) + (1 - 2i)(5 + 2i)$.

b) $(x + 2i)(3 - 5xi), x \in \mathbb{R}$.

.....

.....

.....

.....

.....

Chú ý: Phép cộng và phép nhân các số phức có tất cả các tính chất của phép cộng và phép nhân các số thực.

B. LUYỆN TẬP

I. Chữa bài tập SGK

Bài 1 trang 135 – SGK. Thực hiện các phép tính sau:

a) $(3-5i)+(2+4i)$;

b) $(-2-3i)+(-1-7i)$; c) $(4+3i)-(5-7i)$;

d) $(2-3i)-(5-4i)$;

Bài 3 trang 136 – SGK. Thực hiện các phép tính sau:

a) $(3-2i)(2-3i)$; b) $(-1+i)(3+7i)$; c) $5(4+3i)$; d) $(-2-5i).4i$.

Bài 4 trang 136 – SGK. Tính i^3, i^4, i^5 .

Nêu cách tính i^n với n là một số tự nhiên tùy ý.

II. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hai số phức $z_1 = 1+2i$, $z_2 = 2-3i$. Tổng của hai số phức z_1 và z_2 là

- A. $3+i$. B. $3-5i$. C. $3+5i$. D. $3-i$.

Câu 2: Tìm số phức liên hợp của số phức $z = i^3 - (2+i)$.

- A. 2. B. $2\sqrt{2}$. C. $2-2i$. D. $-2+2i$.

Câu 3: Biết $\bar{z} = (\sqrt{2}+i)^2(1-\sqrt{2}i)$, phần ảo của số phức z bằng

- A. $\sqrt{2}$. B. $-\sqrt{2}i$. C. $-\sqrt{2}$. D. $\sqrt{2}i$.

Câu 4: Trong các số phức $(1+i)^3, (1+i)^4, (1+i)^5, (1+i)^6$ số phức nào là số phức thuần ảo?

- A. $(1+i)^3$. B. $(1+i)^4$. C. $(1+i)^5$. D. $(1+i)^6$.

Câu 5: Cho số phức $z = -2+i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w = iz$ trên mặt phẳng tọa độ?

- A. $P(-2;1)$. B. $N(2;1)$. C. $Q(1;2)$. D. $M(-1;-2)$.

Câu 6: Tìm số phức z thỏa mãn $|z-2|=|z|$ và $(z+1)\left(\frac{z-i}{z-i}\right)$ là số thực.

- A. $z = 1+2i$. B. $z = -1-2i$. C. $z = 2-i$. D. $z = 1-2i$.

Câu 7: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $(1+i)z + (2-i)\bar{z} = 13+2i$?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 8: Xét các số phức z thỏa mãn $(z+2i)(\bar{z}+2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn, tâm của đường tròn đó có tọa độ là

- A. $(1;-1)$. B. $(1;1)$. C. $(-1;1)$. D. $(-1;-1)$.

Câu 9: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2 = 2|z+\bar{z}|+4$ và $|z-1-i|=|z-3+3i|$?

- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 10: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |1+z|+3|1-z|$.

A. $3\sqrt{15}$.

B. $6\sqrt{5}$.

C. $2\sqrt{5}$.

D. $2\sqrt{10}$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 11: Cho số phức $z = 7 - 5i$. Tìm số phức $\omega = \bar{z} + iz$

A. $\omega = 12 + 12i$.

B. $\omega = 12 + 2i$.

C. $\omega = 2 + 12i$.

D. $\omega = 2 + 2i$.

Câu 12: Cho hai số phức $z_1 = 2 + 3i$ và $z_2 = 2 - i$. Số phức $w = \overline{z_1 z_2} + z_2$ có phần thực bằng

A. 7.

B. 9.

C. 4.

D. 3.

Câu 13: Cho hai số phức $z_1 = 2 - i$ và $z_2 = 1 + 2i$. Khi đó phần ảo của số phức $z_1 \cdot z_2$ bằng:

A. -2.

B. $3i$.

C. 3.

D. $-2i$.

Câu 14: Cho số phức $z = a + bi$ (trong đó a, b là các số thực) thỏa mãn $3z - (4 + 5i)\bar{z} = -17 + 11i$. Tính ab .

A. $ab = 6$.

B. $ab = -3$.

C. $ab = 3$.

D. $ab = -6$.

Câu 15: Số phức $z = a + bi$ (với a, b là số nguyên) thỏa mãn $(1 - 3i)z$ là số thực và $|\bar{z} - 2 + 5i| = 1$. Khi đó $a + b$ là

A. 9.

B. 8.

C. 6.

D. 7.

Câu 16: Gọi (H) là tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa $1 \leq |z - 1| \leq 2$ trong mặt phẳng phức. Tính diện tích hình (H) .

A. 2π .

B. 3π .

C. 4π .

D. 5π .

Câu 17: Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z} + 2i)(z - 2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A. 2.

B. $2\sqrt{2}$.

C. 4.

D. $\sqrt{2}$.

Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$.

Câu 18: Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 3 + i - |z|i = 0$. Tổng $S = a + b + 2ab$ bằng

A. 23.

B. 24.

C. -23.

D. -24.

Câu 19: Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 2i\bar{z} = 3 + 3i$. Tính giá trị biểu thức $P = a^{2019} + b^{2018}$.

A. $P = -\frac{3^{4036} - 3^{2019}}{5^{2019}}$.

B. $P = \frac{3^{4036} - 3^{2019}}{5^{2019}}$.

C. $P = 2$.

D. $P = 0$.

Câu 20: Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|(z_1 + 2 - i)(\sqrt{3} + i)| = |z_1 - \bar{z}_1|$ và $|z_2 - 3 + i| = |z_2 + 1 - 2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$ bằng

A. $4\sqrt{6}$.

B. $2\sqrt{6}$.

C. $\frac{34}{5}$.

D. $\frac{28}{15}$.

GIẢI TÍCH 12 – CHƯƠNG 4

§3. PHÉP CHIA SỐ PHỨC

A. PHẦN KIẾN THỨC CHÍNH

I. TỔNG VÀ TÍCH HAI SỐ PHỨC LIÊN HỢP

1. Ví dụ mở đầu:

Liệu rằng $(1+2i).z = 3+4i$ có tương đương với $z = \frac{3+4i}{1+2i}$ không? Tính $\frac{3+4i}{1+2i}$ như thế nào?

2. Nhận xét

- ① Tổng của một số phức với số phức liên hợp của nó bằng hai lần phần thực của số phức đó.
 ② Tích của một số phức với số phức liên hợp của nó bằng bình phương mô-đun của số phức đó.
 Vậy tổng, tích của hai số phức liên hợp là một số thực.

3. Ví dụ

➤ **VD1:** Hãy thực hiện các phép toán trong bảng dưới đây:

z	$\bar{z}$	$z + \bar{z}$	$z.\bar{z}$
$-2+i$			
	$3-4i$		

➤ **VD2:** Tìm số phức z thỏa mãn:

a) $3+4i = 5z$. b) $(1+2i)z = 5-i$.

.....

II. PHÉP CHIA HAI SỐ PHỨC

1. Định nghĩa:

Chia số phức $c+di$ cho số phức $a+bi$ khác 0 là tìm số phức z sao cho $(a+bi)z = c+di$. Số phức z được gọi là thương trong phép chia $c+di$ cho $a+bi$ và kí hiệu là:

$$z = \frac{c+di}{a+bi} .$$

2. Chú ý:

➤ Trong thực hành, để tính thương $\frac{c+di}{a+bi}$, ta nhân cả tử và mẫu với số phức liên hợp của $a+bi$

.

➤ $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} .$

3. Ví dụ

➤ **VD3:** Thực hiện các phép chia sau đây:

a) $\frac{3+4i}{1+2i}$.

b) $\frac{1+i}{2-3i}$.

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **VD4:** Kết quả của phép chia $\frac{6+3i}{5i}$ là:

A. $\frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$.

B. $\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$.

C. $\frac{6}{5} + \frac{3}{5}i$.

D. $\frac{6}{5} - \frac{3}{5}i$.

.....

.....

.....

.....

B. LUYỆN TẬP

I. Chữa bài tập SGK

Bài 1 trang 138 – SGK. Thực hiện các phép chia sau:

a) $\frac{2+i}{3-2i}$

b) $\frac{1+i\sqrt{2}}{2+i\sqrt{3}}$

c) $\frac{5i}{2-3i}$

d) $\frac{5-2i}{i}$

Bài 2a, 2b trang 138 – SGK. Tìm nghịch đảo $\frac{1}{z}$ của số phức z , biết:

a). $1+2i$.

b) $\sqrt{2}-3i$.

Bài 3.a, 3b trang 138 – SGK. Thực hiện phép tính sau:

a) $2i(3+i)(2+4i)$. b) $\frac{(1+i)^2(2i)^3}{-2+i}$.

Bài 4 trang 138 – SGK. Giải các phương trình sau:

a) $(3-2i)z + 4 + 5i = 7 + 3i$.

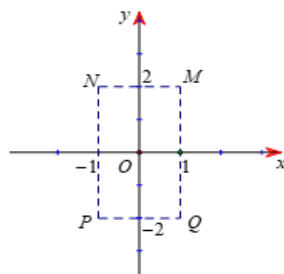
b) $(1+3i)z - (2+5i) = (2+i)z$.

c) $\frac{z}{4-3i} + (2-3i) = 5-2i$.

II. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: [Mức độ 1] Cho số phức z thỏa mãn $(1+2i)z = (1+2i) - (-2+i)$. Mô-đun của số phức z bằng:
A. 2. **B.** 1. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{10}$.

Câu 2: [Mức độ 2] Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z = -1+3i$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm M, N, P, Q ở hình dưới đây.



A. Điểm M . **B.** Điểm N . **C.** Điểm P . **D.** Điểm Q .

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 3: [Mức độ 1] Cho số phức z có số phức liên hợp $\bar{z} = 3-2i$. Khi đó, $z\bar{z}$ bằng:
A. $\sqrt{13}$. **B.** 13. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 5.

Câu 4: [Mức độ 2] Cho số phức z thỏa mãn: $z(2-i) + 13i = 1$. Tính mô-đun của số phức $w = z + 2i$.
A. 3. **B.** 18. **C.** $\sqrt{34}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Câu 5: [Mức độ 2] Cho số phức z thỏa mãn: $\bar{z} = \frac{(1+i\sqrt{3})^3}{1-i}$. Tìm mô-đun của số phức $\bar{z} + iz$.
A. $4\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** $8\sqrt{2}$. **D.** 8.

Câu 6: [Mức độ 3] Cho số phức z thỏa mãn $\frac{1+i}{z}$ là số thực và $|z-2| = m$ với $m \in \mathbb{R}$. Gọi m_0 là một giá trị của m để có đúng một số phức thỏa mãn bài toán. Khi đó:
A. $m_0 \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. **B.** $m_0 \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$. **C.** $m_0 \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$. **D.** $m_0 \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$.

GIẢI TÍCH 12 – CHƯƠNG 4

§4. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC

A. PHẦN KIẾN THỨC CHÍNH

➤ VD MỞ ĐẦU:

Dùng công thức nghiệm của phương trình bậc hai, giải phương trình:

a) $x^2 - 2x + 5 = 0$ b) $x^2 - 2x - 5 = 0$ c) $x^2 + 1 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

I. CĂN BẬC HAI CỦA SỐ THỰC ÂM

+) b là căn bậc hai của số thực a âm khi: $b^2 = a (a < 0)$.

+) Ta có $a < 0 \Rightarrow a = i^2 \cdot |a|$

+) Vậy căn bậc hai của số thực $a (a < 0)$ là: $\pm i\sqrt{|a|}$

➤ **VD1:** Tìm căn bậc hai các số sau: $-1; -2; -4; -9; -13; 0; 1; 4$.

.....

.....

.....

.....

.....

Nhận xét: Nếu $a \geq 0$ thì các căn bậc hai của a là $\pm\sqrt{a}$.

Nếu $a = 0$ thì căn bậc hai số 0 là 0.

Nếu $a < 0 (a = i^2 |a|)$ thì các căn bậc hai của số thực a : $\pm i\sqrt{|a|}$

II. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC

Cho pt bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0; a, b, c \in \mathbb{R})$

Tính: $\Delta = b^2 - 4ac$

* $\Delta = 0$, phương trình có 1 nghiệm thực $x = -\frac{b}{2a}$

* $\Delta > 0$, phương trình có 2 nghiệm thực: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$* \Delta < 0, \text{ phương trình có 2 nghiệm phức: } x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Chú ý:

Phương trình bậc hai: $a.z^2 + b.z + c = 0 (a \neq 0) \quad (\Delta = b^2 - 4.a.c < 0)$.

Có hai nghiệm phức phân biệt: $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|a|}}{2.a}; z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|a|}}{2.a}$.

+) Khi đó $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}; z_1.z_2 = -\frac{c}{a}; z_1 = \overline{z_2}$.

+) Hai số z_1, z_2 (nếu có) lần lượt có tổng là S, có tích là P thì là nghiệm của phương trình bậc hai sau: $x^2 - Sx + P = 0$.

➤ **VD 2:** Giải phương trình bậc hai sau trên tập số phức: $z^2 - 2z + 5 = 0$

.....

.....

.....

.....

➤ **VD 3:** Giải phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ trên tập số phức.

.....

.....

.....

.....

III. CÁC DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP.

1. Câu hỏi lý thuyết về phương trình trên tập $\mathbb{C}$.

➤ **VD 4:** Tìm nghiệm của phương trình sau trên tập hợp số phức:

a) $x^2 + 4 = 0$ b) $x^2 + 2x + 10 = 0$

.....

.....

.....

.....

2. Tính toán biểu thức các nghiệm.

➤ **VD 5:** Trên tập hợp số phức. Gọi z_1, z_2 (z_1 là số phức có phần ảo âm) lần lượt là nghiệm của phương trình sau trên tập hợp số phức:

a) $z^2 + 1 = 0$. Tính $|z_1 + 2z_2|$

b) $z^2 - 2z + 5 = 0$. Tìm mô đun của số phức: $|2z_1 - z_2 - i|$.

.....

.....

.....

.....

.....

3. Ứng dụng định lý viết vào các nghiệm

➤ **VD 6:** Cho các số phức $z_1 = 3 + 2i, z_2 = 3 - 2i$. Tìm phương trình bậc hai có các nghiệm z_1, z_2 ?

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **VD 7:** Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình: $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$.

Tìm giá trị của $z_1^2 + z_2^2$?

.....

.....

.....

.....

.....

4. Biểu diễn hình học các nghiệm của phương trình trên mặt phẳng phức.

➤ **VD 8:** Trên tập hợp số phức cho phương trình $z^2 - 2z + 50 = 0$. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình (z_1 là số phức có phần ảo âm). Tìm điểm biểu diễn hình học của số phức $w = z_1 + 2z_2 - i$ trên mặt phẳng phức Oxy?

.....

.....

.....

.....

.....

► **VD 9:** Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 + 2z + 2 = 0$. Tìm điểm biểu diễn hình học của số phức liên hợp của số phức $w = (1 + 2i)z_1$?

.....

.....

.....

.....

.....

5. Hệ phương trình số phức.

► **VD 10:** Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z - 1| = |z + 1| = \sqrt{5}$?

.....

.....

.....

.....

.....

► **VD 11:** Cho số phức z thỏa mãn $|z\bar{z} - z| = 2$ và $|z| = 2$. Số phức $w = z^2 - z - 3i$ bằng?

.....

.....

.....

.....

.....

B. LUYỆN TẬP

I. Chữa bài tập SGK

Bài 1 trang 142 - SGK: Tìm các căn bậc hai phức của các số sau: $-7; -8; -12; -20; -121$.

Bài 1 trang 143 - SGK: Giải các phương trình sau trên tập số phức:

a) $-3x^2 + 2x - 1 = 0$;

b) $7x^2 + 3x + 2 = 0$;

c) $5x^2 - 7x + 11 = 0$.

C. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Một căn bậc hai của -3 là

A. 9.

B. $-\sqrt{3}$.

C. $\sqrt{3}i$.

D. $-3i$.

Câu 2: Giải phương trình $z^2 - z + 1 = 0$ trên tập số phức.

A. $z = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$. **B.** $z = \sqrt{3} \pm i$. **C.** $z = 1 \pm \sqrt{3}i$. **D.** $z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Câu 3: Gọi z_1 và z_2 là 2 nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$, trong đó z_1 có phần ảo dương. Tìm số phức $w = (z_1 + z_2)z_2$.

A. $w = -2 - 4i$. **B.** $w = -2 + 4i$. **C.** $w = 2 - 4i$. **D.** $w = 2 + 4i$.

Câu 4: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$. Giá trị của $|z_1|^2 + |z_2|^2$ bằng

A. 10. **B.** 50. **C.** 5. **D.** 18.

Câu 5: Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 6z + 18 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = (z_1 + z_2)^2$ bằng

A. 6. **B.** 36. **C.** 18. **D.** 24.

Câu 6: Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 4 = 0$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Tính $T = OM + ON$ với O là gốc tọa độ.

A. $T = 2$. **B.** $T = \sqrt{2}$. **C.** $T = 8$. **D.** $T = 4$.

Câu 7: Gọi z_1, z_2 là nghiệm phức của phương trình $z^2 - 5z + 8 = 0$. Giá trị $z_1^2 + z_2^2$ bằng

A. 41. **B.** 9. **C.** 16. **D.** 17.

Câu 8: Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 - 4z + 8 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức iz_0 ?

A. $Q(2; 2)$. **B.** $M(-2; 2)$. **C.** $P(-2; -2)$. **D.** $N(2; -2)$.

Câu 9: Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 4 = 0$. Giá trị của $\frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|}$ bằng

A. 2. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 10: Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Môđun của số phức $z_0 + i$ bằng

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** 10.

Câu 11: Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Môđun của số phức $z_0 - i$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 1. **D.** 3.

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 12: Trong $\mathbb{C}$, nghiệm của phương trình $z^3 - 8 = 0$ là:

A. $z_1 = 2; z_2 = 1 + \sqrt{3}i; z_3 = 1 - \sqrt{3}i$. **B.** $z_1 = 2; z_2 = -1 + \sqrt{3}i; z_3 = -1 - \sqrt{3}i$.
C. $z_1 = -2; z_2 = -1 + \sqrt{3}i; z_3 = -1 - \sqrt{3}i$. **D.** $z_1 = -2; z_2 = 1 + \sqrt{3}i; z_3 = 1 - \sqrt{3}i$.

Câu 13: Hai giá trị $x_1 = a + bi; x_2 = a - bi$ là hai nghiệm của phương trình:

A. $x^2 + 2ax + a^2 + b^2 = 0$. **B.** $x^2 + 2ax + a^2 - b^2 = 0$.
C. $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$. **D.** $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$.

Câu 14: Trong $\mathbb{C}$, nghiệm của phương trình $z^2 + 4z + 5 = 0$ là:

- A. $z = 2 - i$. B. $z = -2 - i$. C. $\begin{cases} z = -2 - i \\ z = -2 + i \end{cases}$. D. $z = -2 + i$.

Câu 15: Trong $\mathbb{C}$, phương trình $z^4 - 1 = 0$ có nghiệm là:

- A. $\pm 1; \pm 2i$. B. $\pm 2; \pm 2i$. C. $\pm 3; \pm 4i$. D. $\pm 1; \pm i$.

Câu 16: Biết $z_1; z_2$ là hai nghiệm của phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$. Khi đó giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ là:

- A. $\frac{9}{4}$. B. 9. C. 4. D. $-\frac{9}{4}$.

Câu 17: Gọi $z_1; z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Khi đó phần thực của $z_1^2 + z_2^2$ là:

- A. 5. B. 6. C. 4. D. 7.

Câu 18: Gọi $z_1; z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 4 = 0$. Khi đó $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$ có giá trị là

- A. -7. B. -8. C. -4. D. 8.

Câu 19: Tìm các căn bậc hai của -9.

- A. $\pm 3i$. B. 3. C. $3i$. D. -3.

Câu 20: Trong $\mathbb{C}$, phương trình $z^4 + 4 = 0$ có nghiệm là:

- A. $\pm(1 - 4i); \pm(1 + 4i)$. B. $\pm(1 - 2i); \pm(1 + 2i)$.
C. $\pm(1 - 3i); \pm(1 + 3i)$. D. $\pm(1 - i); \pm(1 + i)$.

Câu 21: Căn bậc hai của số phức $4 + 6\sqrt{5}i$ là:

- A. $-(3 + \sqrt{5}i)$. B. $(3 + \sqrt{5}i)$. C. $\pm(3 + \sqrt{5}i)$. D. 2.

Câu 22: Trên tập hợp số phức, phương trình $z^2 + 7z + 15 = 0$ có hai nghiệm z_1, z_2 . Giá trị biểu thức $z_1 + z_2 + z_1z_2$ là:

- A. -7. B. 8. C. 15. D. 22.

Câu 23: Giả sử z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$ và A, B là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 . Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là:

- A. $I(1; 1)$. B. $I(-1; 0)$. C. $I(0; 1)$. D. $I(1; 0)$.

Câu 24: Cho phương trình $z^2 + mz - 6i = 0$. Để phương trình có tổng bình phương hai nghiệm bằng 5 thì m có dạng $m = \pm(a + bi)$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Giá trị $a + 2b$ là:

- A. 0. B. 1. C. -2. D. -1.

Câu 25: Cho phương trình $z^2 - mz + 2m - 1 = 0$ trong đó m là tham số phức. Giá trị của m để phương trình có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1^2 + z_2^2 = -10$ là:

- A. $m = 2 \pm 2\sqrt{2}i$. B. $m = 2 + 2\sqrt{2}i$. C. $m = 2 - 2\sqrt{2}i$. D. $m = -2 - 2\sqrt{2}i$.

Câu 26: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 6 = 0$. Trong đó z_1 có phần ảo âm. Giá trị biểu thức $M = |z_1| + |3z_1 - z_2|$ là:

- A. $\sqrt{6} - 2\sqrt{21}$. B. $\sqrt{6} + 2\sqrt{21}$. C. $\sqrt{6} + 4\sqrt{21}$. D. $\sqrt{6} - 4\sqrt{21}$.