

MỤC LỤC

PHẦN A. CÂU HỎI	1
Dạng 1. Góc.....	1
Dạng 1.1 Góc của đường thẳng với mặt phẳng.....	1
Dạng 1.2 Góc của đường thẳng với đường thẳng.....	4
Dạng 1.3 Góc của mặt với mặt.....	5
Dạng 2. Khoảng cách.....	8
Dạng 2.1 Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng.....	8
Dạng 2.2 Khoảng cách của đường thẳng với đường thẳng.....	11
Dạng 2.3 Khoảng cách của đường với mặt.....	15
PHẦN B. LỜI GIẢI THAM KHẢO.....	15
Dạng 1. Góc.....	15
Dạng 1.1 Góc của đường thẳng với mặt phẳng.....	15
Dạng 1.2 Góc của đường thẳng với đường thẳng.....	25
Dạng 1.3 Góc của mặt với mặt.....	27
Dạng 2. Khoảng cách.....	39
Dạng 2.1 Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng.....	39
Dạng 2.2 Khoảng cách của đường thẳng với đường thẳng.....	51
Dạng 2.3 Khoảng cách của đường với mặt.....	71

PHẦN A. CÂU HỎI

Dạng 1. Góc

Dạng 1.1 Góc của đường thẳng với mặt phẳng

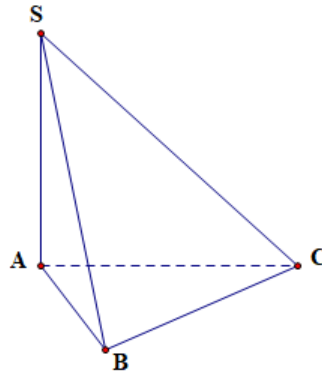
Câu 1. (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C , $AC = a$, $BC = \sqrt{2}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

- A. 60° B. 90° C. 30° D. 45°

Câu 2. (Mã đề 102 BGD&ĐT NĂM 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

- A. 45° B. 60° C. 30° D. 90°

Câu 3. (Mã 102 - BGD - 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại B , $AB = a$ và $BC = \sqrt{3}a$ (minh họa như hình vẽ bên).



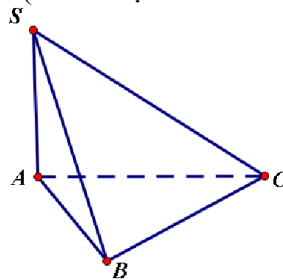
Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

- A. 30° . B. 60° . C. 45° . D. 90° .

Câu 4. (Mã đề 101 BGD&ĐT NĂM 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

- A. 45° B. 60° C. 90° D. 30°

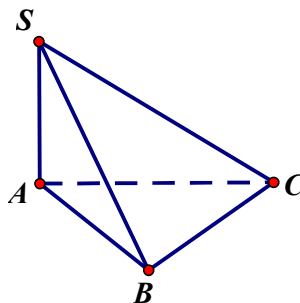
Câu 5. (Mã 103 - BGD - 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . $SA = \sqrt{2}a$. Tam giác ABC vuông cân tại B và $AB = a$ (minh họa như hình vẽ bên).



Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 90° .

Câu 6. (Mã đề 101 - BGD - 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại B , $AB = a\sqrt{3}$ và $BC = a$ (minh họa như hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng:



- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Câu 7. (ĐỀ THAM KHẢO BGD & ĐT 2018) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của SD (tham khảo hình vẽ bên). Tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. 30° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 90° .

A. 30° **B.** 60° **C.** 75° **D.** 45°

A. 45° **B.** 30° **C.** 60° **D.** 75°

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

A. 45° **B.** 30° **C.** 60° **D.** 90°

Câu 14. (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG GIA LAI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa SD và (SAC) . Giá trị $\sin \alpha$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 15. (SỞ GD&ĐT BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Tam giác SAB cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết SC tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° , gọi M là trung điểm của BC . Gọi α là góc giữa đường thẳng SM và mặt phẳng (ABC) . Tính $\cos \alpha$.

A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

D. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Câu 16. (THPT CHUYÊN BẮC NINH LẦN 01 NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B . $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Biết SA vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB, CD . Tính $\sin$ góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC)

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

B. $\frac{\sqrt{55}}{10}$

C. $\frac{3\sqrt{5}}{10}$

D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Câu 17. (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$, O là trung điểm AC và $SO = b$. Gọi (Δ) là đường thẳng đi qua C , (Δ) chứa trong mặt phẳng $(ABCD)$ và khoảng cách từ O đến (Δ) là $\frac{a\sqrt{14}}{6}$. Giá trị lượng giác $\cos((SA), (\Delta))$ bằng

A. $\frac{2a}{3\sqrt{4b^2 - 2a^2}}$.

B. $\frac{2a}{3\sqrt{2a^2 + 4b^2}}$.

C. $\frac{a}{3\sqrt{2a^2 + 4b^2}}$.

D. $\frac{a}{3\sqrt{4b^2 - 2a^2}}$.

Câu 18. (HSG BẮC NINH NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Cosin của góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{\sqrt{13}}{4}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{1}{4}$

Câu 19. (SỞ GD&ĐT HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C , CH vuông góc với AB tại H , I là trung điểm của đoạn HC . Biết SI vuông góc với mặt phẳng đáy, $\widehat{ASB} = 90^\circ$. Gọi O là trung điểm của đoạn AB , O' là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABI$. Góc tạo bởi đường thẳng OO' và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 60° .

B. 30° .

C. 90° .

D. 45° .

Câu 20. (SỞ GD&ĐT BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC , gọi φ là góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SCD) , tính $\sin \varphi$ biết rằng $SB = a$.

A. $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

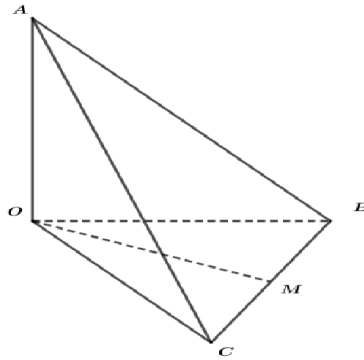
B. $\sin \varphi = \frac{1}{4}$.

C. $\sin \varphi = \frac{1}{2}$.

D. $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dạng 1.2 Góc của đường thẳng với đường thẳng

Câu 21. (ĐỀ THAM KHẢO BGD & ĐT 2018) Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

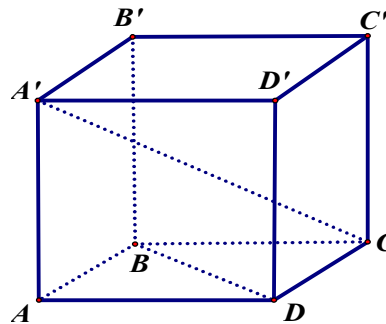


- A. 45° B. 90° C. 30° D. 60°

Câu 22. (THPT LÊ QUY ĐÔN ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho tứ diện $ABCD$ với $AC = \frac{3}{2}AD, \widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^\circ, CD = AD$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AB và CD . Chọn khẳng định đúng về góc φ .

- A. $\cos \varphi = \frac{3}{4}$ B. 30° C. 60° D. $\cos \varphi = \frac{1}{4}$

Câu 23. (TRƯỜNG THPT HOÀNG HOA THÁM HƯNG YÊN NĂM 2018-2019) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, biết đáy $ABCD$ là hình vuông. Tính góc giữa $A'C$ và BD .



- A. 90° . B. 30° . C. 60° . D. 45° .

Câu 24. (CHUYÊN KHTN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC . Biết $MN = a\sqrt{3}$, góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng.

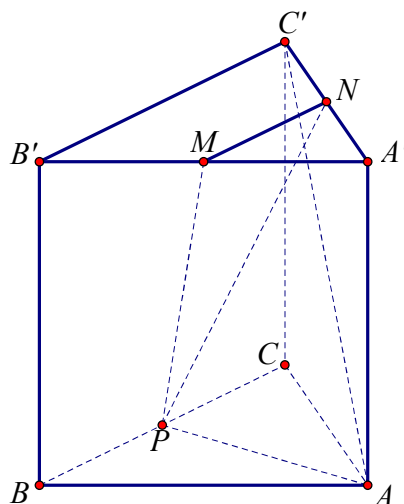
- A. 45° . B. 90° . C. 60° . D. 30° .

Câu 25. (CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH PHÚ YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$; gọi M là trung điểm của $B'C'$. Góc giữa hai đường thẳng AM và BC' bằng

- A. 45° . B. 90° . C. 30° . D. 60° .

Dạng 1.3 Góc của mặt với mặt

Câu 26. (ĐỀ THAM KHẢO BGD & ĐT 2018) Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B', A'C'$ và BC (tham khảo hình vẽ bên). Cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng



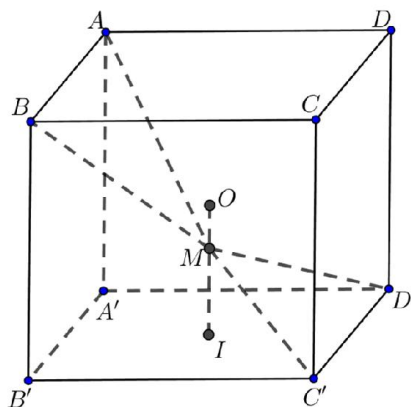
A. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$

B. $\frac{18\sqrt{13}}{65}$

C. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$

D. $\frac{\sqrt{13}}{65}$

Câu 27. (Mã đề 102 BGD&ĐT NĂM 2018) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO = \frac{1}{2}MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng



A. $\frac{7\sqrt{85}}{85}$

B. $\frac{6\sqrt{85}}{85}$

C. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$

D. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$

Câu 28. (Mã đề 101 BGD&ĐT NĂM 2018) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO = 2MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng

A. $\frac{7\sqrt{85}}{85}$

B. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$

C. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$

D. $\frac{6\sqrt{85}}{85}$

Câu 29. (SỞ GD&ĐT BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = SA = 2a$, $SA \perp (ABCD)$. Tính tang của góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$.

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

B. $\sqrt{5}$

C. $\frac{1}{\sqrt{5}}$

D. $\frac{2}{\sqrt{5}}$

Câu 30. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB = 2$, $AD = 3$; $AA' = 4$. Góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ là α . Tính giá trị gần đúng của góc α ?

A. $45,2^\circ$.B. $38,1^\circ$.C. $53,4^\circ$.D. $61,6^\circ$.

Câu 31. (KSCL THPT NGUYỄN KHUYẾN LẦN 05 NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB = SB = a$, $SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) .

A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

Câu 32. (TRƯỜNG THPT LƯƠNG TÀI SỐ 2 NĂM 2018-2019) Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có diện tích đáy bằng $\sqrt{3}a^2$ (đvdt), diện tích tam giác $A'BC$ bằng $2a^2$ (đvdt). Tính góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) ?

A. 120° B. 60° C. 30° D. 45°

Câu 33. (SỞ GD&ĐT QUẢNG NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Nếu $\tan \alpha = \sqrt{2}$ thì góc giữa (SAC) và (SBC) bằng.

A. 30° .B. 90° C. 60° .D. 45° .

Câu 34. (THPT GIA LỘC HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình thang vuông $ABCD$ tại A và D , cạnh bên A vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Cho biết $AB = 2AD = 2DC = 2a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBA) và (SBC)

A. 30° .B. 60° .C. 45° D. $\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)$.

Câu 35. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có mặt $ABCD$ là hình vuông, $AA' = \frac{AB\sqrt{6}}{2}$. Xác định góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(C'BD)$.

A. 30° .B. 45° .C. 60° .D. 90° .

Câu 36. (THPT GANG THÉP THÁI NGUYÊN NĂM 2018-2019) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(ADC'B')$ và $(BCD'A')$ là

A. 30° .B. 45° .C. 90° .D. 60° .

Câu 37. (ĐỀ 01 ĐỀ PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AC' = a\sqrt{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng qua AC' cắt BB' , DD' lần lượt tại M , N sao cho tam giác AMN cân tại A có $MN = a$. Tính $\cos \varphi$ với $\varphi = \left((P), (ABCD) \right)$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.B. $\frac{1}{2}$.C. $\frac{1}{3}$.D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 38. (THPT HÀM RỒNG THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 1) Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{3}$. Gọi M , N , P lần lượt thuộc các cạnh AA' , BB' , CC' , diện tích tam giác MNP bằng 4. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (MNP)

A. 120° .B. 45° .C. 30° .D. 90° .

Dạng 2. Khoảng cách**Dạng 2.1 Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng**

Câu 39. (Mã đề 101 BGD&ĐT NĂM 2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B , $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$

B. $\frac{\sqrt{5}a}{3}$

C. $\frac{2\sqrt{2}a}{3}$

D. $\frac{\sqrt{5}a}{5}$

Câu 40. (Mã đề 102 BGD&ĐT NĂM 2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B , $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

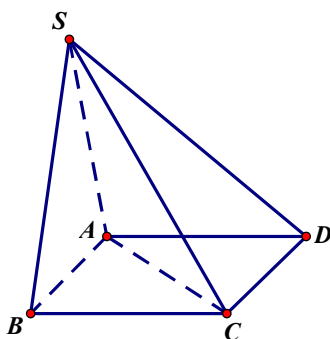
A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{a}{2}$

D. a

Câu 41. (Mã 103 - BGD - 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ bên). Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) bằng



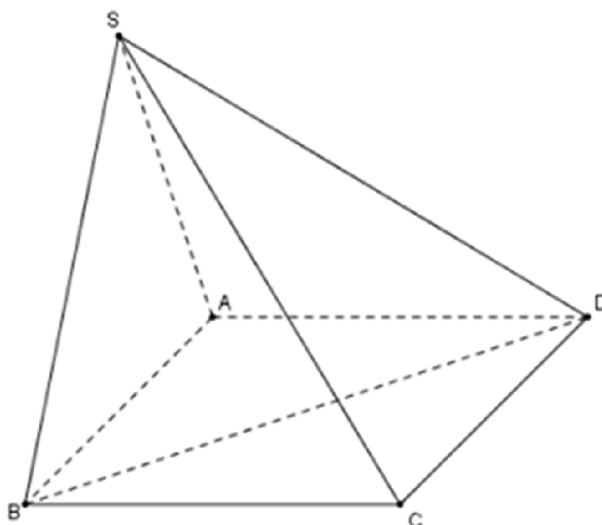
A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$

C. $\frac{a\sqrt{21}}{14}$

D. $\frac{a\sqrt{21}}{28}$

Câu 42. (Mã đề 101 - BGD - 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ bên). Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng



A. $\frac{\sqrt{21}a}{14}$.

B. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$.

C. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{21}a}{28}$.

Câu 43. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến (SCD) bằng?

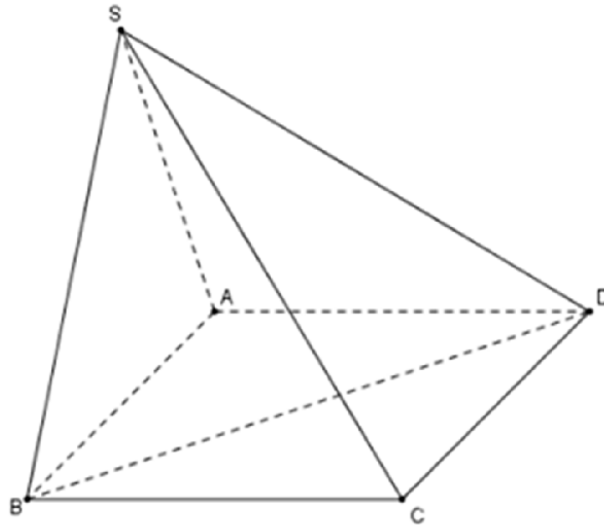
A. $\frac{\sqrt{21}a}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{15}a}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$.

D. $\frac{\sqrt{15}a}{7}$.

Câu 44. (Mã 102 - BGD - 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ bên). Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng



A. $\frac{\sqrt{21}a}{14}$.

B. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$.

D. $\frac{\sqrt{21}a}{28}$.

Câu 45. (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{\sqrt{6}a}{6}$.

B. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{5}a}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Câu 46. (THPT CHUYÊN VINH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) .

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

C. $\frac{3a}{2}$.

D. $2a$.

Câu 47. (THPT CHUYÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình chóp $SABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AD = 2a$, $SA = a$. Khoảng cách từ A đến (SCD) bằng:

A. $\frac{3a}{\sqrt{7}}$.

B. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$.

D. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 48. (THPT CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng:

A. $\frac{a\sqrt{57}}{19}$

B. $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$

C. $\frac{2a\sqrt{3}}{19}$

D. $\frac{2a\sqrt{38}}{19}$

Câu 49. (THPT HÙNG VƯƠNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách d từ tâm O của đáy $ABCD$ đến một mặt bên theo a .

A. $d = \frac{2a\sqrt{5}}{3}$

B. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

C. $d = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

D. $d = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

Câu 50. (CHUYÊN TRẦN PHÚ HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm cạnh SC . Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

B. $\frac{a\sqrt{10}}{10}$

C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$

Câu 51. (THPT GANG THẾP THÁI NGUYÊN NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$; SA vuông góc với đáy, $SA = 2a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$

D. $\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$

Câu 52. (THPT CHUYÊN SƠN LA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng:

A. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}a}{7}$

C. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$

D. $\frac{\sqrt{15}a}{5}$

Câu 53. (THPT LÊ VĂN THỊNH BẮC NINH NĂM 2018-2019) Cho hình chóp đều $S.ABCD$, cạnh đáy bằng a , góc giữa mặt bên và mặt đáy là 60° . Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) .

A. $\frac{a}{4}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{a}{2}$

Câu 54. (THPT CHUYÊN VINH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là nửa lục giác đều $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$ và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ với $SA = a\sqrt{6}$. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) .

A. $a\sqrt{2}$

B. $a\sqrt{3}$

C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 55. (THPT MINH CHÂU HƯNG YÊN NĂM 2018 – 2019) Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của AD và $SH = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SCD) .

A. $d = \frac{\sqrt{6}a}{8}$

B. $d = a$

C. $d = \frac{\sqrt{6}a}{4}$

D. $d = \frac{\sqrt{15}a}{5}$

Câu 56. (THPT CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau $OA = OB = OC = \sqrt{3}$. Khoảng cách từ O đến $mp(ABC)$ là

- A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$

Câu 57. (THPT CẨM GIANG 2 NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SC = 2a$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) là

- A. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$ B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$ D. $\frac{5a\sqrt{30}}{3}$

Câu 58. (ĐỀ 01 ĐỀ PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $2a$, góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$, SAB là tam giác đều nằm trên mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) là

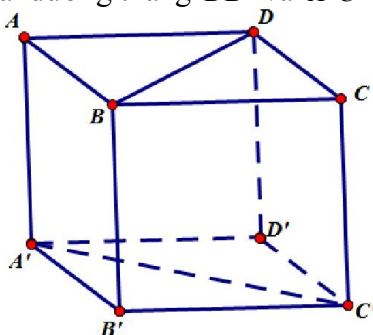
- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{3a}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ D. $a\sqrt{6}$

Câu 59. (KTNL GV THUẬN THÀNH 2 BẮC NINH NĂM 2018-2019) Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O ; mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SBD) . Biết khoảng cách từ O đến các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCD)$ lần lượt là $1; 2; \sqrt{5}$. Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (SAD) .

- A. $d = \sqrt{\frac{19}{20}}$ B. $d = \sqrt{\frac{20}{19}}$ C. $d = \sqrt{2}$ D. $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Dạng 2.2 Khoảng cách của đường thẳng với đường thẳng

Câu 60. (ĐỀ THAM KHẢO BGD & ĐT 2018) Cho lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng



- A. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$ B. $\sqrt{2}a$ C. $\sqrt{3}a$ D. a

Câu 61. (Mã đề 101 BGD&ĐT NĂM 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a, BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

- A. $\frac{\sqrt{6}a}{2}$ B. $\frac{2a}{3}$ C. $\frac{a}{2}$ D. $\frac{a}{3}$

Câu 62. (Mã đề 102 BGD&ĐT NĂM 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD , SC bằng

- A. $\frac{4\sqrt{21}a}{21}$ B. $\frac{2\sqrt{21}a}{21}$ C. $\frac{a\sqrt{30}}{12}$ D. $\frac{a\sqrt{30}}{6}$

Câu 63. (Mã đề 104 BGD&ĐT NĂM 2018) Cho tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = a$ và $OB = OC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

- A. $\frac{\sqrt{6}a}{3}$ B. a C. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$ D. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$

Câu 64. (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2017-2018) Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, và $OA = OB = a$, $OC = 2a$. Gọi M là trung điểm của AB . Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AC bằng

- A. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$ B. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$ C. $\frac{2a}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}a}{3}$

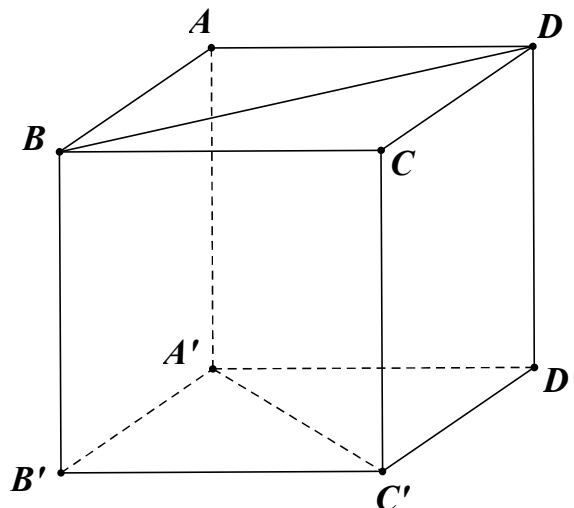
Câu 65. (GKI THPT VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AC = a\sqrt{3}$. Biết BC' hợp với mặt phẳng $(AA'C'C)$ một góc 30° và hợp với mặt phẳng đáy góc α sao cho $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{4}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh BB' và $A'C'$. Khoảng cách giữa MN và AC' là:

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{a\sqrt{5}}{4}$ D. $\frac{a}{3}$

Câu 66. (THPT CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình chóp $S.ABC$, có $SA = SB = SC$, đáy là tam giác đều cạnh a . Biết thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng:

- A. $\frac{4a}{7}$ B. $\frac{3\sqrt{13}a}{13}$ C. $\frac{6a}{7}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

Câu 67. (THPT CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ).



Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng

- A. a B. $\sqrt{2}a$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ D. $\sqrt{3}a$

Câu 68. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG TRỊ NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC = a\sqrt{5}$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa SD và BC .

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $a\sqrt{3}$ C. $\frac{2a}{3}$ D. $\frac{3a}{4}$

Câu 69. (THPT LÊ VĂN THỊNH BẮC NINH NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a , SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = a$. Khoảng cách giữa SC và AB bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{15}$ B. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{2a\sqrt{3}}{15}$ D. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$

Câu 70. (THPT LÊ VĂN THỊNH BẮC NINH NĂM 2018-2019) Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và AB' bằng

- A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{7}}{4}$ D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 71. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $AC = a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC , biết góc giữa đường thẳng SD và mặt đáy bằng 60° .

- A. $\frac{a\sqrt{906}}{29}$ B. $\frac{a\sqrt{609}}{29}$ C. $\frac{a\sqrt{609}}{19}$ D. $\frac{a\sqrt{600}}{29}$

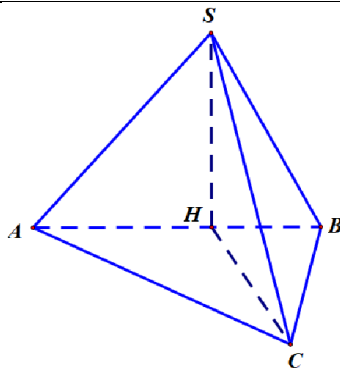
Câu 72. (KTNL GIA BÌNH NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có $AB = 4$, $BC = 3$, $SA = SB = SC = SD = 6$. K là hình chiếu vuông góc của B xuống AC . Tính độ dài d đoạn vuông góc chung của SA và BK .

- A. $\frac{\sqrt{119}}{11}$ B. $\frac{4\sqrt{229}}{13}$ C. $\frac{\sqrt{259}}{5}$ D. $\frac{4\sqrt{119}}{15}$

Câu 73. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC LẦN 02 NĂM 2018-2019) Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AA' = 2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và $A'C$.

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}a$ C. $a\sqrt{5}$ D. $\frac{2\sqrt{17}}{17}a$

Câu 74. (THPT LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 4, góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) là 45° . Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC .



A. $d = \frac{4\sqrt{210}}{45}$.

B. $d = \frac{\sqrt{210}}{5}$.

C. $d = \frac{4\sqrt{210}}{15}$.

D. $d = \frac{2\sqrt{210}}{15}$.

Câu 75. (SỞ GD&ĐT NINH BÌNH LẦN 01 NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B , $\widehat{C} = 60^\circ$, $AC = 2$, $SA \perp (ABC)$, $SA = 1$. Gọi M là trung điểm của AB . Khoảng cách d giữa SM và BC là

A. $d = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

B. $d = \frac{2\sqrt{21}}{7}$.

C. $d = \frac{\sqrt{21}}{3}$.

D. $d = \frac{2\sqrt{21}}{3}$.

Câu 76. (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có thể tích bằng $\frac{a^2b}{3}$ với $AB = a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SCD , trên các cạnh AB, SD lần lượt lấy các điểm E, F sao cho EF song song BG . Khoảng cách giữa hai đường thẳng DG và EF bằng

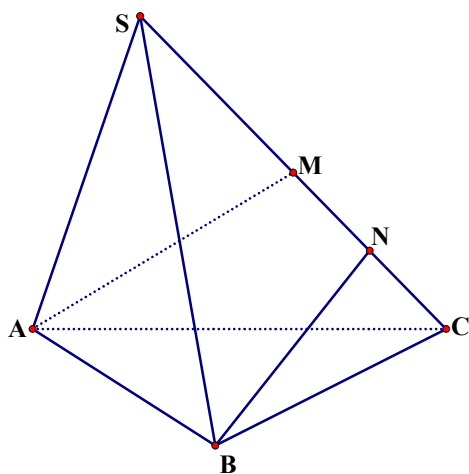
A. $\frac{2ab}{3\sqrt{2b^2 + a^2}}$.

B. $\frac{ab}{\sqrt{2b^2 + a^2}}$.

C. $\frac{a^2b}{3\sqrt{2b^2 + a^2}}$.

D. $\frac{ab}{3\sqrt{2b^2 + a^2}}$.

Câu 77. (TRƯỜNG THPT HOÀNG HOA THÁM HƯNG YÊN NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a\sqrt{3}$, mặt bên SAB là tam giác cân với $\widehat{ASB} = 120^\circ$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của SC và N là trung điểm của MC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM , BN .



A. $\frac{2\sqrt{327}a}{79}$.

B. $\frac{\sqrt{237}a}{79}$.

C. $\frac{2\sqrt{237}a}{79}$.

D. $\frac{5\sqrt{237}a}{316}$.

Câu 78. (CHUYÊN BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 3 cm. Gọi M là trung điểm của CD . Khoảng cách giữa AC và BM là:

A. $\frac{2\sqrt{11}}{11}cm$.

B. $\frac{3\sqrt{22}}{11}cm$.

C. $\frac{3\sqrt{2}}{11}cm$

D. $\frac{\sqrt{2}}{11}cm$.

Câu 79. (TRƯỜNG THPT LƯƠNG TÀI SỐ 2 NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và $SA = SB = SC = 11$, $\widehat{SAB} = 30^\circ$, $\widehat{SBC} = 60^\circ$ và $\widehat{SCA} = 45^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SD ?

A. $d = 4\sqrt{11}$

B. $d = 2\sqrt{22}$

C. $d = \frac{\sqrt{22}}{2}$

D. $d = \sqrt{22}$

Câu 80. (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC, AD vuông góc với nhau đôi một và $AD = 2AC = 3AB = a$. Gọi Δ là đường thẳng chứa trong mặt (BCD) sao cho khoảng cách từ điểm A đến Δ là nhỏ nhất và khoảng cách lớn nhất giữa hai đường thẳng Δ và AD là d . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $d = a \frac{\sqrt{14}}{14}$.

B. $3a < d < 4a$.

C. $\frac{3a}{14} < d < \frac{4a}{7}$.

D. $d > 4a$.

Câu 81. (THPT NGÔ GIA TỰ VINH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và $SA = SB = SC = 11$, $\widehat{SAB} = 30^\circ$, $\widehat{SBC} = 60^\circ$ và $\widehat{SCA} = 45^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SD ?

A. $d = 4\sqrt{11}$.

B. $d = 2\sqrt{22}$.

C. $d = \frac{\sqrt{22}}{2}$.

D. $d = \sqrt{22}$.

Câu 82. (THPT NĂM 2018-2019 LẦN 04) Cho hình hộp $ABCD A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng 1 và các góc phẳng ở đỉnh A đều bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và $A'C'$.

A. $\frac{\sqrt{22}}{11}$.

B. $\frac{2}{11}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{11}$.

D. $\frac{3}{11}$.

Dạng 2.3 Khoảng cách của đường với mặt

Câu 83. (THPT LÊ XOAY VINH PHÚC LẦN 1 NĂM 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D , SD vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $AD = 2a$, $SD = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa đường thẳng CD và mặt phẳng (SAB)

A. $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

B. $a\sqrt{2}$.

C. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 84. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của SD . Tính khoảng cách d giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ACM)

A. $d = \frac{3a}{2}$

B. $d = a$

C. $d = \frac{2a}{3}$

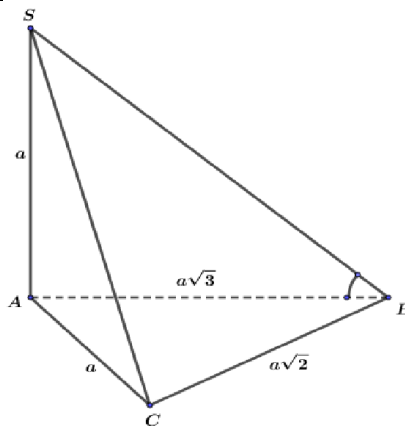
D. $d = \frac{a}{3}$

PHẦN B. LỜI GIẢI THAM KHẢO

Dạng 1. Góc

Dạng 1.1 Góc của đường thẳng với mặt phẳng

Câu 1. Chọn C



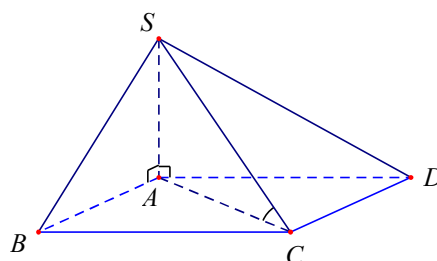
Có $SA \perp (ABC)$ nên AB là hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABC) .

$$\Rightarrow (\widehat{SB, (ABC)}) = (\widehat{SB, AB}) = \widehat{SBA}.$$

Mặt khác có $\triangle ABC$ vuông tại C nên $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = a\sqrt{3}$.

Khi đó $\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ nên $(\widehat{SB, (ABC)}) = 30^\circ$.

Câu 2. Chọn A



Do $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng góc $\widehat{SCA}$.

Ta có $SA = \sqrt{2}a$, $AC = \sqrt{2}a \Rightarrow \tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 45° .

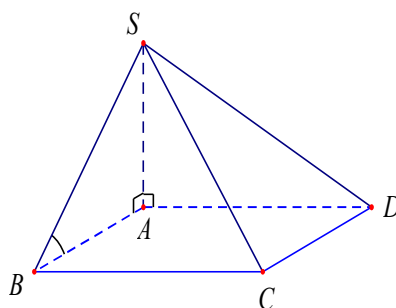
Câu 3. Chọn C

Vì SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng $\widehat{SCA}$.

$$\text{Mà } \tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{2a}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = 1.$$

Vậy $\widehat{SCA} = 45^\circ$.

Câu 4. Chọn B

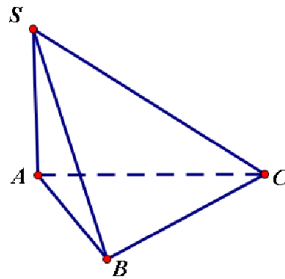


Do $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng góc $\widehat{SBA}$.

$$\text{Ta có } \cos \widehat{SBA} = \frac{AB}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ.$$

Vậy góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng 60° .

Câu 5. Chọn A



Ta có AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (ABC) .

Suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng $\widehat{SCA} = \varphi$.

Ta có $AC = a\sqrt{2}$, $SA = a\sqrt{2}$ nên tam giác SAC vuông cân tại $A \Rightarrow \varphi = 45^\circ$.

Câu 6. Chọn A

Ta có $SA \perp (ABC)$ nên AC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (ABC) .

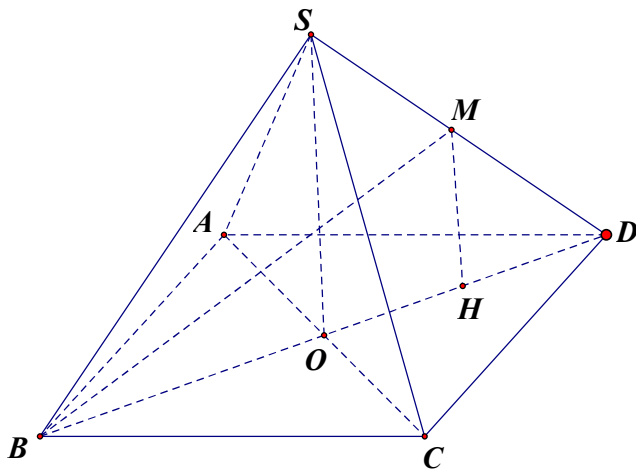
Do đó $(SC, (ABC)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$.

Tam giác ABC vuông tại B , $AB = a\sqrt{3}$ và $BC = a$ nên $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4a^2} = 2a$.

Do đó tam giác SAC vuông cân tại A nên $\widehat{SCA} = 45^\circ$.

Vậy $(SC, (ABC)) = 45^\circ$.

Câu 7. Chọn D



Gọi O là tâm của hình vuông. Ta có $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Gọi M là trung điểm của OD ta có $MH \parallel SO$ nên H là hình chiếu của M lên mặt phẳng $(ABCD)$ và

$$MH = \frac{1}{2}SO = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Do đó góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{MBH}$.

$$\text{Khi đó ta có } \tan \widehat{MBH} = \frac{MH}{BH} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{3a\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Vậy tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\frac{1}{3}$

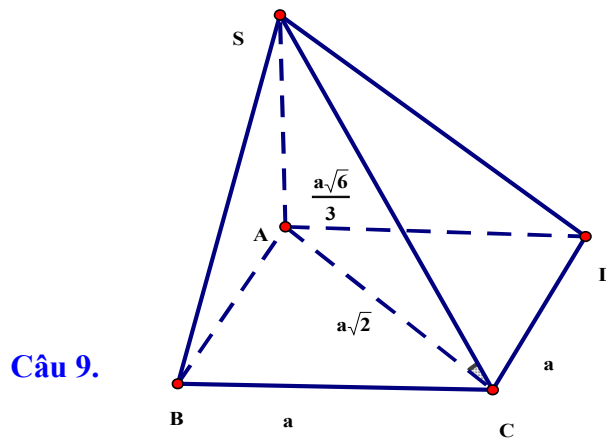
Câu 8. Chọn D

Ta có $SA \perp (ABC)$ nên đường thẳng AC là hình chiếu vuông góc của đường thẳng SC lên mặt phẳng (ABC) .

Do đó, $\alpha = (\widehat{SC, (ABC)}) = (\widehat{SC, AC}) = \widehat{SCA}$ (tam giác SAC vuông tại A).

Tam giác ABC vuông cân tại B nên $AC = AB\sqrt{2} = 2a$.

Suy ra $\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = 1$ nên $\alpha = 45^\circ$.

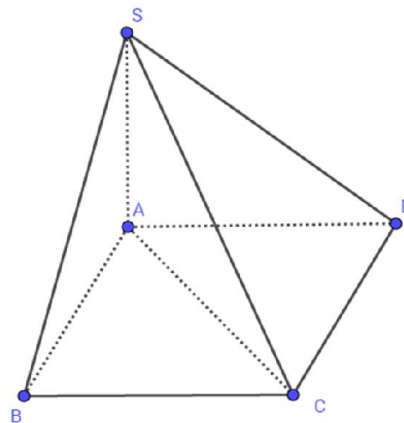


$$AC = a\sqrt{2},$$

AC là hình chiếu vuông góc của SC trên $(ABCD) \Rightarrow (\widehat{SC, (ABCD)}) = (\widehat{SC, AC}) = \widehat{SCA}$

$$\Delta SAC : \tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{6}}{3} : (a\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^\circ.$$

Câu 10. Chọn A

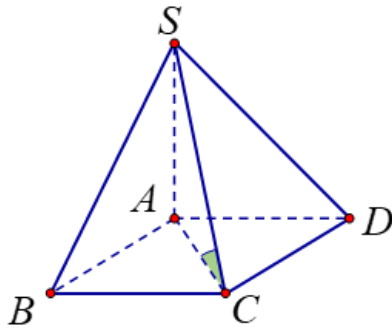


Ta có $AC = a\sqrt{2}$

Vì AC là hình chiếu của SC lên $(ABCD)$ nên góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc giữa SC và AC

Xét $\triangle SAC$ vuông tại A, ta có: $\tan \widehat{SCA} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{\frac{a\sqrt{2}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Suy ra $\widehat{SCA} = 30^\circ$

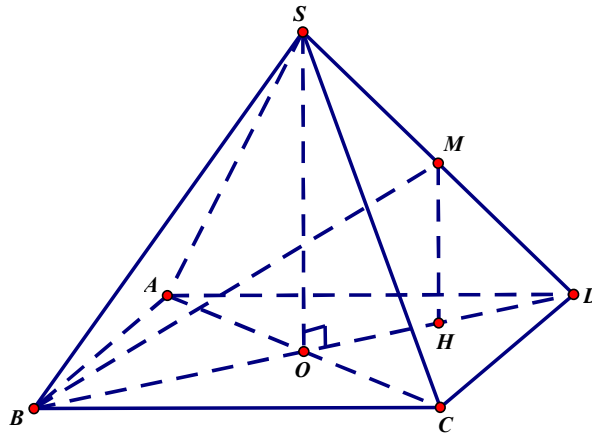
Câu 11. Chọn A



Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (\widehat{SC; (ABCD)}) = (\widehat{SC; AC}) = \widehat{SCA}$.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$.

$\Rightarrow \tan \widehat{SAC} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ$.



Câu 12.

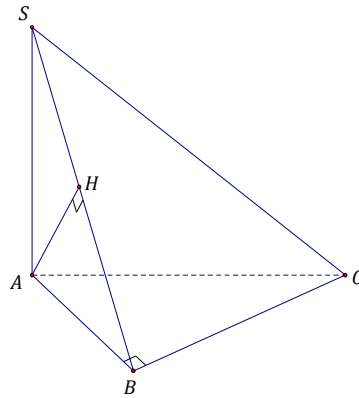
Trong tam giác SOD dựng $MH \parallel SO, H \in OD$ ta có $MH \perp (ABCD)$.

Vậy góc tạo bởi BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{MBH}$.

Ta có $MH = \frac{1}{2}SO = \frac{1}{2}\sqrt{SD^2 - OD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - 2a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$BH = \frac{3}{4}BD = \frac{3}{4}2a\sqrt{2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\tan \widehat{MBH} = \frac{MH}{BH} = \frac{1}{3}$.



Câu 13.

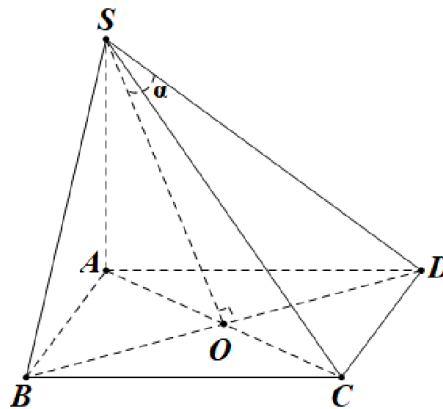
Trong (SAB) kẻ $AH \perp SB$ ($H \in SB$).

$$\text{Vì } \begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH.$$

Mà $SB \perp AH$ do cách dựng nên $AH \perp (SBC)$, hay H là hình chiếu của A lên (SBC) suy ra góc giữa SA và (SBC) là góc $\widehat{ASH}$ hay góc $\widehat{ASB}$.

$$\text{Tam giác } ABC \text{ vuông ở } B \Rightarrow AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = a\sqrt{3}$$

$$\text{Tam giác } SAB \text{ vuông ở } A \Rightarrow \sin \widehat{ASB} = \frac{AB}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ASB} = 30^\circ$$



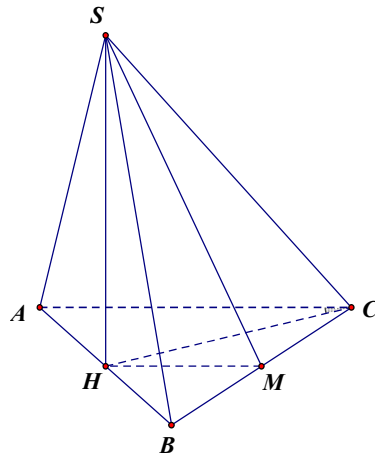
Câu 14.

$$\text{Gọi } O = AC \cap BD. \text{ Ta có: } \begin{cases} DO \perp AC \\ DO \perp SA (SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow DO \perp (ABCD).$$

$$\Rightarrow SO \text{ là hình chiếu của } SD \text{ lên mặt phẳng } (SAC) \Rightarrow (\widehat{SD; (SAC)}) = (\widehat{SD; SO}) = \widehat{DSO} = \alpha.$$

$$\text{Xét } \triangle SAD \text{ vuông tại } A: SD = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a.$$

$$\text{Xét } \triangle SOD \text{ vuông tại } O: \text{ có } SD = 2a, OD = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \sin \widehat{DSO} = \frac{DO}{SD} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$



Câu 15.

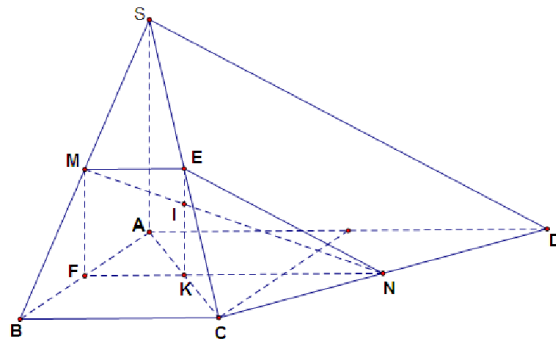
Gọi H là trung điểm AB để thấy $SH \perp (ABC)$.

SC tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° suy ra $\widehat{SCH} = 60^\circ$.

$$\text{Có } HC = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SH = HC \cdot \tan \widehat{SCH} = \frac{3a}{2}.$$

$$\text{Để thấy } \alpha = \widehat{SMH}, HM = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2} \Rightarrow SM = \frac{a\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{HM}{SM} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Câu 16. Chọn C



Ta gọi E, F lần lượt là trung điểm của SC, AB .

Ta có $ME \parallel NF$ (do cùng song song với BC). Nên tứ giác $MENF$ là hình thang,

$$\text{và } \begin{cases} MF \parallel SA \\ SA \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow MF \perp (ABCD) \text{ hay tứ giác } MENF \text{ là hình thang vuông tại } M, F$$

Gọi $K = NF \cap AC, I = EK \cap M$ thì $I = MN \cap (SAC)$

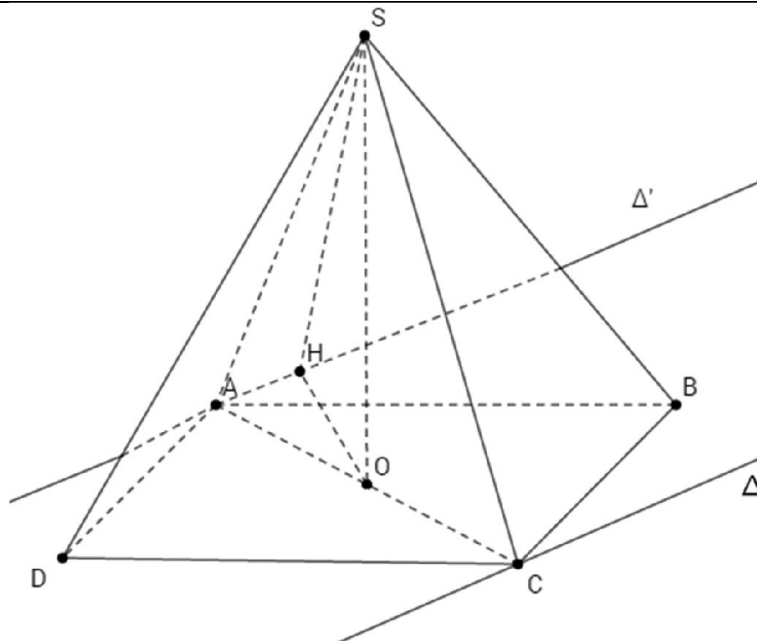
$$\text{Ta có: } \begin{cases} NC \perp AC \\ NC \perp SA \end{cases} \Rightarrow NC \perp (SAC) \text{ hay } E \text{ là hình chiếu vuông góc của } N \text{ lên } (SAC)$$

Từ đó ta có được, góc giữa MN và (SAC) là góc giữa MN và CI

$$\text{Suy ra, gọi } Q \text{ là góc giữa } MN \text{ và } (SAC) \text{ thì } \sin \alpha = \frac{CN}{IN}$$

$$NC = \frac{1}{2}CD = \frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{IN}{M} = \frac{KN}{ME} = 2 \Rightarrow IN = \frac{2}{3}MN = \frac{2}{3}\sqrt{MF^2 + FN^2} = \frac{a\sqrt{10}}{3}$$

$$\text{Vậy } \sin \alpha = \frac{CN}{IN} = \frac{3\sqrt{5}}{10}.$$

**Câu 17.**

Gọi (Δ') là đường thẳng đi qua A và song song với (Δ) . Hạ $OH \perp (\Delta')$ ($H \in (\Delta')$). Do O là trung điểm của AC và $(\Delta) \parallel (\Delta')$ nên $d(O, (\Delta')) = d(O, (\Delta))$ hay $OH = \frac{a\sqrt{14}}{6}$.

Do $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên đáy $ABCD$ là hình vuông và $SO \perp (ABCD)$.

Do $AH \perp OH$ và $AH \perp SO$ nên, suy ra $AH \perp SH$.

Do $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AC = a\sqrt{2}$, suy ra $OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

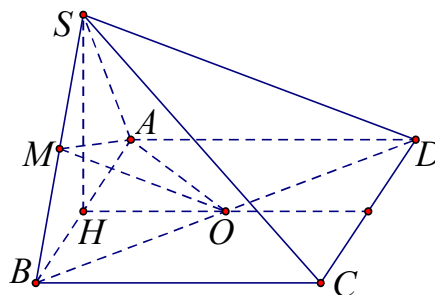
Áp dụng Định lý Pitago vào tam giác vuông AHO ta có $OA^2 = OH^2 + AH^2$, suy ra

$$AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{14}}{6}\right)^2} = \frac{a}{3}.$$

Áp dụng Định lý Pitago vào tam giác vuông SAO ta có $SA^2 = OA^2 + SO^2$, suy ra

$$SA = \sqrt{OA^2 + SO^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + b^2} = \frac{\sqrt{2a^2 + 4b^2}}{2}.$$

Do $(\Delta) \parallel (\Delta')$ nên $\cos((SA), (\Delta)) = \cos((SA), (\Delta')) = \cos \widehat{SAH} = \frac{AH}{SA} = \frac{2a}{3\sqrt{2a^2 + 4b^2}}$.

**Câu 18.**

Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB, SB ; O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$.

Ta có $MO \parallel SD$.

Dễ thấy $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$, mà $SB \perp AM$ nên $AM \perp (SBC)$.

Xét tam giác AMO , có:

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

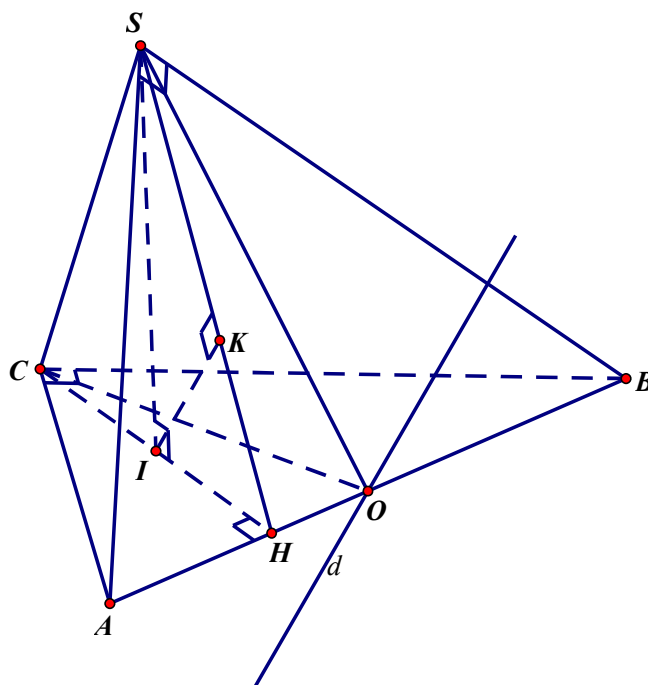
$$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3a^2} = a;$$

$$MO = \frac{1}{2}SD = \frac{1}{2}\sqrt{SH^2 + HD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{SH^2 + HA^2 + AD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 3a^2} = a.$$

$\Rightarrow \Delta AMO$ cân tại O

$$\Rightarrow \sin \widehat{AMO} = \frac{d(O; AM)}{OM} = \frac{\sqrt{MO^2 - \frac{AM^2}{4}}}{OM} = \frac{\sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{16}}}{a} = \frac{\sqrt{13}}{4}.$$

$$\Rightarrow \cos(\widehat{SD; (SBC)}) = \sin \widehat{AMO} = \frac{\sqrt{13}}{4}$$



Câu 19.

Do $\widehat{ASB} = 90^\circ$ nên tâm O' của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABI$ nằm trên đường thẳng d đi qua trung điểm O của đoạn thẳng AB và $d \perp (SAB)$. (1)

Trong mặt phẳng (SCH) kẻ $IK \perp SH$ tại K .

Theo giả thiết $SI \perp (ABC)$ suy ra $SI \perp AB$. Từ $SI \perp AB$ và $AB \perp CH$ suy ra $AB \perp (SCH) \Rightarrow AB \perp IK$.

Từ $IK \perp SH$ và $AB \perp IK$ ta có $IK \perp (SAB)$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $IK \parallel d$. Bởi vậy $(OO'; (ABC)) = (d; (ABC)) = (IK; (ABC))$.

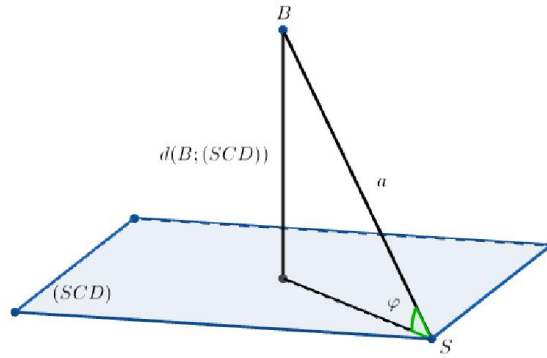
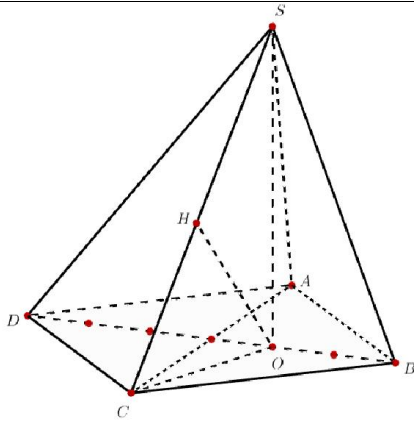
Vì $(SCH) \perp (ABC)$ nên IH là hình chiếu vuông góc của IK trên mặt phẳng (ABC) . Bởi vậy

$$(\widehat{IK; (ABC)}) = (\widehat{IK, IH}) = \widehat{HIK} = \widehat{HSI}.$$

Do tam giác ABC vuông tại C và SAB vuông tại S nên $CO = SO = \frac{AB}{2}$.

Xét tam giác SIH vuông tại I có $IH = \frac{CH}{2} = \frac{SH}{2}$, ta có $\sin \widehat{HSI} = \frac{IH}{SH} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{HSI} = 30^\circ$.

24



Trước hết ta chứng minh được $\sin(SB; (SCD)) = \frac{d(B, (SCD))}{SB}$ (như hình trên).

Gọi O là trọng tâm tam giác ABC . Khi đó ta có $CO \perp AB$.

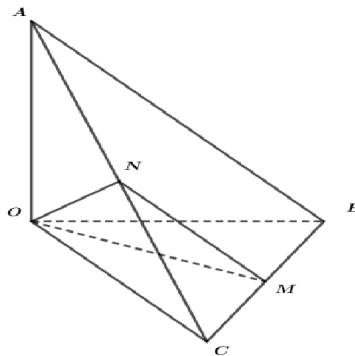
Dựng $OH \perp SC$ suy ra $OH \perp (SCD)$. Ta tính được $OC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $SO = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Khi đó $d(B, (SCD)) = \frac{3}{2}d(O, (SCD)) = \frac{3}{2}OH = \frac{3}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\sin(SB; (SCD)) = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dạng 1.2 Góc của đường thẳng với đường thẳng

Câu 21. Chọn D



Đặt $OA = a$ suy ra $OB = OC = a$ và $AB = BC = AC = a\sqrt{2}$

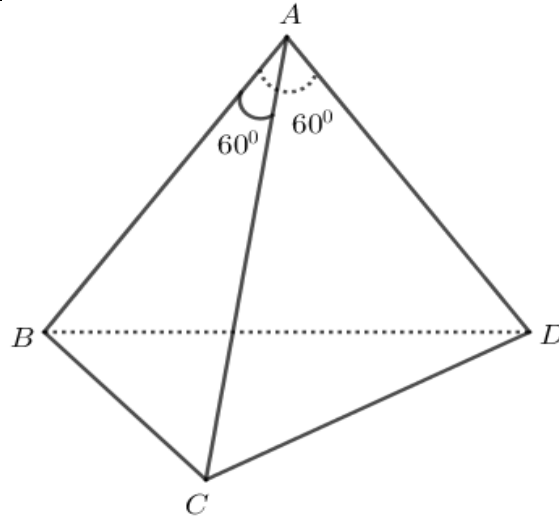
Gọi N là trung điểm AC ta có $MN \parallel AB$ và $MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Suy ra góc $(\widehat{OM, AB}) = (\widehat{OM, MN})$. Xét $\triangle OMN$

Trong tam giác OMN có $ON = OM = MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ nên OMN là tam giác đều

Suy ra $\widehat{OMN} = 60^\circ$. Vậy $(\widehat{OM, AB}) = (\widehat{OM, MN}) = 60^\circ$

Câu 22. Chọn D



Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ - AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ$

$$= AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ - AB \cdot \frac{3}{2} AD \cdot \cos 60^\circ = -\frac{1}{4} AB \cdot AD$$

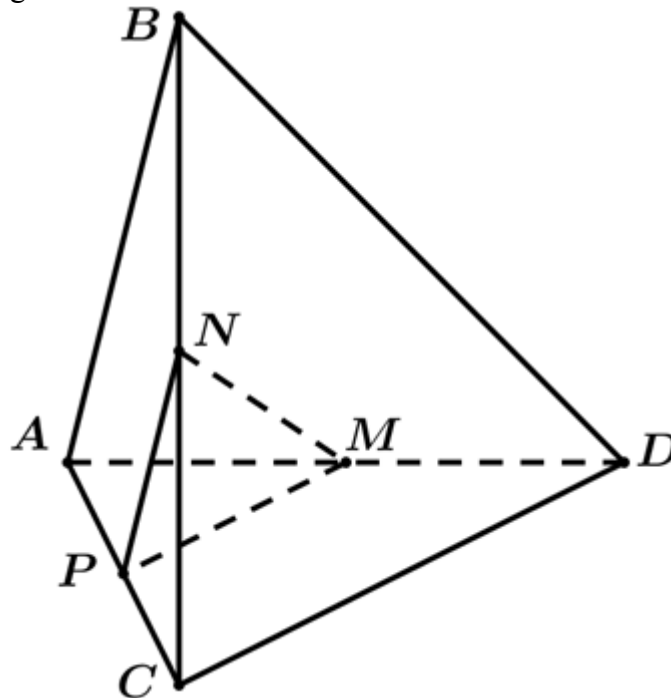
$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{AB \cdot CD} = \frac{-1}{4} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{4}$$

Câu 23. Vì $ABCD$ là hình vuông nên $BD \perp AC$.

Mặt khác $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow BD \perp AA'$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AA'C) \Rightarrow BD \perp A'C.$$

Do đó góc giữa $A'C$ và BD bằng 90° .



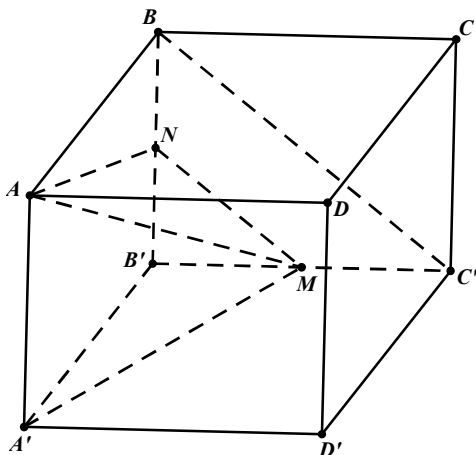
Câu 24.

Gọi P là trung điểm AC , ta có $PM \parallel CD$ và $PN \parallel AB$, suy ra $(\widehat{AB, CD}) = (\widehat{PM, PN})$.

Để thấy $PM = PN = a$.

$$\text{Xét } \triangle PMN \text{ ta có } \cos \widehat{MPN} = \frac{PM^2 + PN^2 - MN^2}{2PM \cdot PN} = \frac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2 \cdot a \cdot a} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{MPN} = 120^\circ \Rightarrow (\widehat{AB, CD}) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$



Câu 25.

Giả sử cạnh của hình lập phương là $a > 0$.

Gọi N là trung điểm đoạn thẳng BB' . Khi đó, $MN \parallel BC'$ nên $(AM, BC') = (AM, MN)$.

$$\text{Xét tam giác } A'B'M \text{ vuông tại } B' \text{ ta có: } A'M = \sqrt{A'B'^2 + B'M^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác } AA'M \text{ vuông tại } A' \text{ ta có: } AM = \sqrt{AA'^2 + A'M^2} = \sqrt{a^2 + \frac{5a^2}{4}} = \frac{3a}{2}.$$

$$\text{Có } AN = A'M = \frac{a\sqrt{5}}{2}; MN = \frac{BC'}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Trong tam giác AMN ta có:

$$\cos \widehat{AMN} = \frac{MA^2 + MN^2 - AN^2}{2 \cdot MA \cdot MN} = \frac{\frac{9a^2}{4} + \frac{2a^2}{4} - \frac{5a^2}{4}}{2 \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{6a^2}{4} \cdot \frac{4}{6a^2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra $\widehat{AMN} = 45^\circ$.

Vậy $(AM, BC') = (AM, MN) = \widehat{AMN} = 45^\circ$.

Dạng 1.3 Góc của mặt với mặt

Câu 26. Chọn D

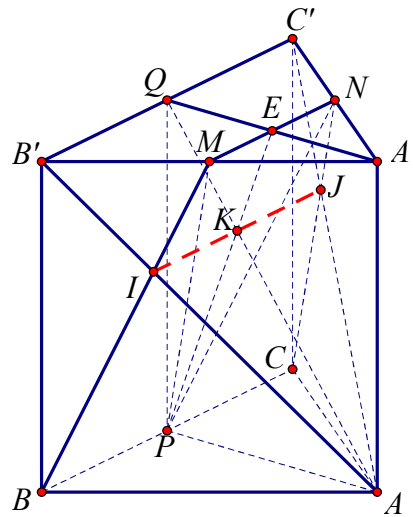
Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$; $I = BM \cap AB'$, $J = CN \cap AC'$, $E = MN \cap A'Q$.

Suy ra, $(MNP) \cap (AB'C') = (MNCB) \cap (AB'C') = IJ$ và gọi $K = IJ \cap PE \Rightarrow K \in AQ$ với E là trung điểm MN (hình vẽ).

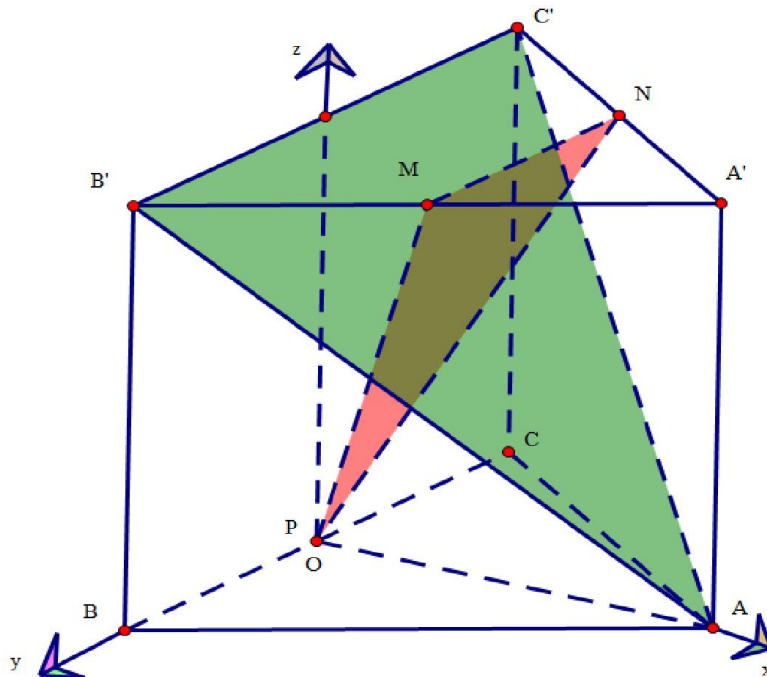
$$(AA'QP) \perp IJ \Rightarrow AQ \perp IJ, PE \perp IJ \Rightarrow ((MNP), (AB'C')) = (\widehat{AQ, PE}) = \alpha$$

$$\text{Ta có } AP = 3, PQ = 2 \Rightarrow AQ = \sqrt{13} \Rightarrow QK = \frac{\sqrt{13}}{3}; PE = \frac{5}{2} \Rightarrow PK = \frac{5}{3}.$$

$$\cos \alpha = \left| \cos \widehat{QKP} \right| = \frac{|KQ^2 + KP^2 - PQ^2|}{2KQ \cdot KP} = \frac{\sqrt{13}}{65}.$$



Cách 2



Gắn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ

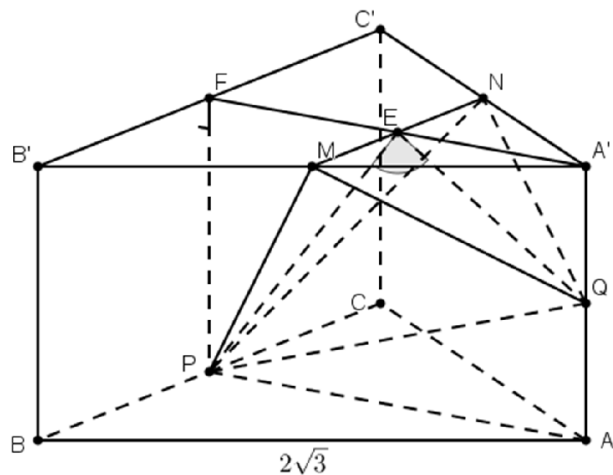
$$\Rightarrow P(0;0;0), A(3;0;0), B(0;\sqrt{3};0), C(0;-\sqrt{3};0), A'(3;0;2), B'(0;\sqrt{3};2), C'(0;-\sqrt{3};2)$$

$$\text{nên } M\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 2\right), N\left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 2\right)$$

$$\text{Ta có vtcp của mp}(AB'C') \text{ là } \vec{n}_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}[\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC'}] = (2; 0; 3) \text{ và vtcp của mp}(MNP) \text{ là } \vec{n}_2 = (4; 0; -3)$$

$$\text{Gọi } \varphi \text{ là góc giữa hai mặt phẳng } (AB'C') \text{ và mp}(MNP) \Rightarrow \cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|8-9|}{\sqrt{13}\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{13}}{65}$$

Cách 3



Gọi Q là trung điểm của AA' , khi đó mặt phẳng $(AB'C')$ song song với mặt phẳng (MNQ) nên góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) cũng bằng góc giữa hai mặt phẳng (MNQ) và (MNP) .

Ta có:

$$\begin{cases} (MNP) \cap (MNQ) = MN \\ PE \subset (MNP); PE \perp MN \Rightarrow \widehat{((MNP); (MNQ))} = \widehat{PEQ} \text{ hoặc } \widehat{((MNP); (MNQ))} = 180^\circ - \widehat{PEQ} \\ QE \subset (MNQ); QE \perp MN \end{cases}$$

Tam giác ABC đều có cạnh $2\sqrt{3} \Rightarrow AP = 3$.

Tam giác APQ vuông tại A nên ta có: $PQ = \sqrt{AP^2 + AQ^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

Tam giác $A'QE$ vuông tại A' nên ta có: $QE = \sqrt{A'E^2 + A'Q^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

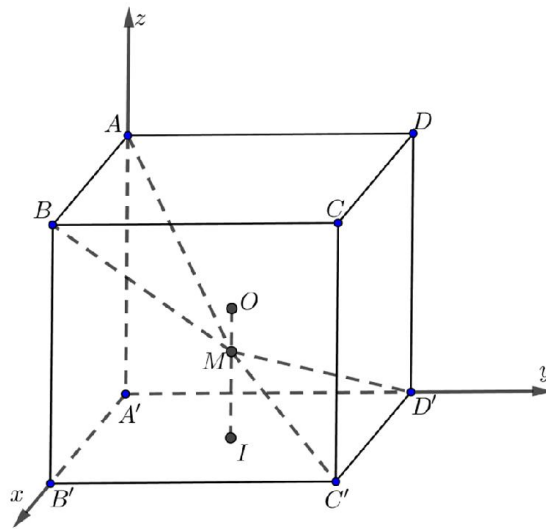
Tam giác PEF vuông tại F nên ta có: $PE = \sqrt{FP^2 + FE^2} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$

Áp dụng định lý hàm số cosin vào tam giác PQE ta có:

$$\cos \widehat{PEQ} = \frac{EP^2 + EQ^2 - PQ^2}{2 \cdot EP \cdot EQ} = \frac{\frac{25}{4} + \frac{13}{4} - 10}{2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt{13}}{2}} = -\frac{\sqrt{13}}{65}$$

Do đó: $\cos \widehat{((MNP); (AB'C'))} = \cos(180^\circ - \widehat{PEQ}) = -\cos \widehat{PEQ} = \frac{\sqrt{13}}{65}$.

Câu 27. Chọn C



Không mất tính tổng quát ta đặt cạnh của khối lập phương là 1.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho $A'(0;0;0)$, $B'(1;0;0)$, $D'(0;1;0)$ và $A(0;0;1)$ (như hình vẽ).

Khi đó ta có: $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$.

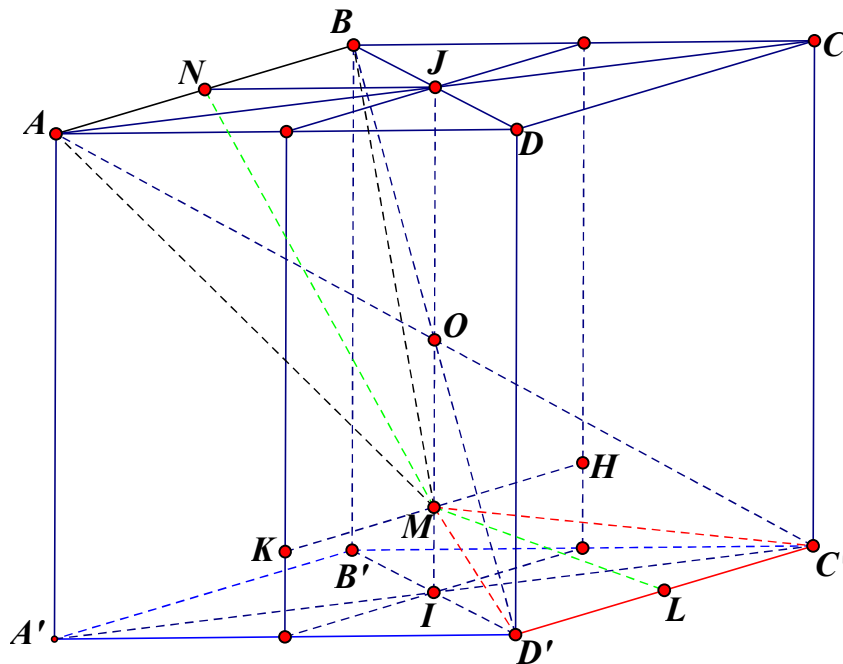
Suy ra: $\overrightarrow{AB} = (1;0;0)$, $\overrightarrow{MA} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{2}{3}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MA}] = \left(0; -\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \vec{n}_1 = (0; -4; 3)$ là VTPT của mặt phẳng (MAB) .

$\overrightarrow{D'C'} = (1;0;0)$, $\overrightarrow{MD'} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{D'C'}, \overrightarrow{MD'}] = \left(0; \frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \vec{n}_2 = (0; 2; -3)$ là VTPT của mặt phẳng $(MC'D')$.

cosin của góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và $(MC'D')$ bằng:

$$\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|0 \cdot 0 - 4 \cdot 2 + 3 \cdot (-3)|}{\sqrt{0^2 + (-4)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{0^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{17\sqrt{13}}{65}.$$

Câu 28. Chọn A



Giao tuyến của (MAB) và $(MC'D')$ là đường thẳng KH như hình vẽ.

Gọi J là tâm hình vuông $ABCD$. L, N lần lượt là trung điểm của $C'D'$ và AB .

Ta có: $C'D' \perp (LIM) \Rightarrow C'D' \perp LM \Rightarrow LM \perp KH$.

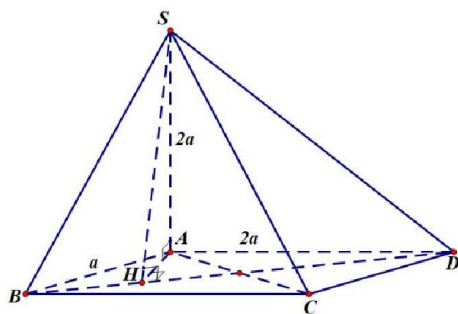
Tương tự $AB \perp (NJM) \Rightarrow AB \perp MN \Rightarrow MN \perp KH$.

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và $(MC'D')$ chính là góc giữa 2 đường thẳng (MN, ML) .

Gọi cạnh hình lập phương là 1. Ta có $LM = \frac{\sqrt{10}}{6}$, $MN = \frac{\sqrt{34}}{6}$, $NL = \sqrt{2}$.

Ta có: $\cos \widehat{LMN} = \frac{MN^2 + ML^2 - NL^2}{2MN \cdot ML} = \frac{-7\sqrt{85}}{85}$.

Suy ra cosin của góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và $(MC'D')$ là $\frac{7\sqrt{85}}{85}$.



Câu 29.

Ta có:

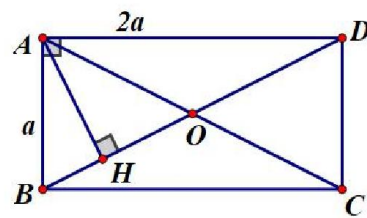
$(SBD) \cap (ABCD) = BD$.

Hạ $AH \perp BD$ tại H .

Ta có $\left. \begin{array}{l} AH \perp BD \\ BD \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (SAH) \Rightarrow BD \perp SH$.

$\Rightarrow \widehat{((SBD); (ABCD))} = \widehat{(HA, HS)}$.

ΔSAH vuông tại $A \Rightarrow \widehat{SHA} < 90^\circ \Rightarrow \widehat{(HA, HS)} = \widehat{SHA}$



$$\tan \widehat{SHA} = \frac{SA}{AH}.$$

Xét $\triangle ABD$ vuông tại A có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2}.$$

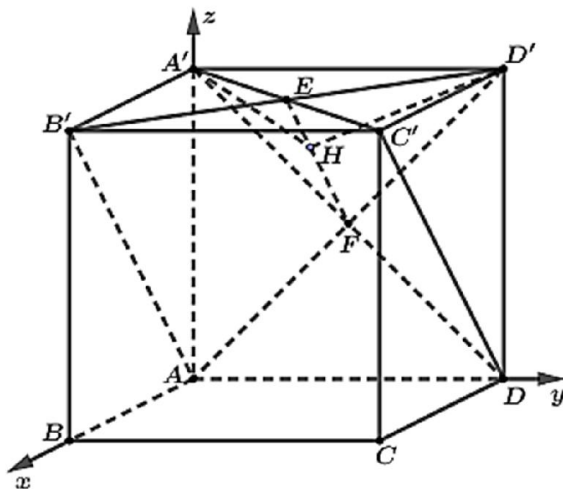
$$\Leftrightarrow AH = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\tan \widehat{SHA} = \frac{SA}{AH} = \frac{2a}{\frac{2a\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{5}.$$

Câu 30. Cách 1: Hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ có giao tuyến là EF như hình vẽ.

Do $EF \parallel AB'$ mà $A'D' \perp (A'ABB')$ nên $A'D' \perp AB' \Rightarrow EF \perp A'D'$

Từ A' kẻ vuông góc lên giao tuyến EF tại H thì $A'H \perp EF \Rightarrow EF \perp (A'D'H) \Rightarrow EF \perp D'H$. Khi đó, góc giữa hai mặt phẳng cần tìm chính là góc giữa hai đường thẳng AH và $D'H$.



Tam giác $D'EF$ lần lượt có $D'E = \frac{D'B'}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$, $D'F = \frac{D'A}{2} = \frac{5}{2}$, $EF = \frac{B'A}{2} = \sqrt{5}$.

Theo Hê-rông ta có: $S_{D'EF} = \frac{\sqrt{61}}{4}$. Suy ra $D'H = \frac{2S_{D'EF}}{EF} = \frac{\sqrt{305}}{10}$.

Dễ thấy $\triangle A'EF = \triangle D'EF \Rightarrow A'H = D'H$.

Tam giác $D'A'H$ có: $\cos \widehat{A'HD'} = \frac{HA'^2 + HD'^2 - A'D'^2}{2HA' \cdot HD'} = -\frac{29}{61}$.

Do đó $\widehat{A'HD'} \approx 118,4^\circ$ hay $(\widehat{A'H, D'H}) \approx 180^\circ - 118,4^\circ = 61,6^\circ$.

Cách 2: Gắn hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ vào hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $D(0;3;0)$, $C(2;3;0)$, $A'(0;0;4)$, $B'(2;0;4)$, $D'(0;3;4)$, $C'(2;3;4)$.

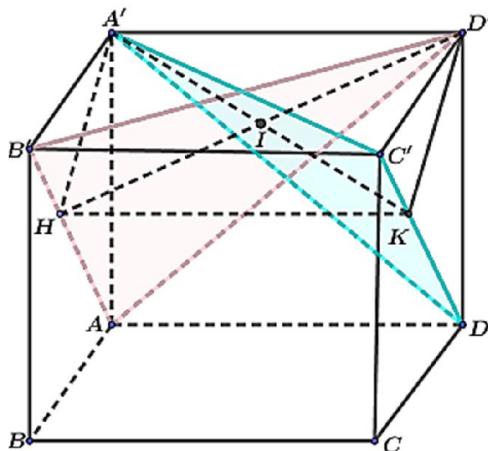
Gọi $\vec{n}_1$ là véc tơ pháp tuyến của $(AB'D')$. Có $\vec{n}_1 = [\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AD'}] = (-12; -8; 6)$.

Gọi $\vec{n}_2$ là véc tơ pháp tuyến của $(A'C'D)$. Có $\vec{n}_2 = [\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'D}] = (-12; 8; 6)$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$

$$\cos \alpha = \frac{\left| \frac{\vec{n}_1 \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \right|}{\frac{29}{61}} = \frac{29}{61}. \text{ Vậy giá trị gần đúng của góc } \alpha \text{ là } 61,6^\circ.$$

Cách 3.



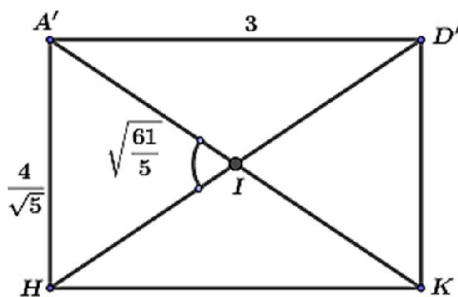
Do hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D')$ chứa hai đường AB' và $C'D$ song song với nhau nên giao tuyến của chúng song song hai đường đó.

Kẻ $A'H \perp AB'$, $H \in AB'$, dựng hình bình hành $A'HKD'$ có tâm I như hình vẽ.

Do $A'D' \perp (A'ABB')$ nên $A'D' \perp AB'$ suy ra $AB' \perp (A'HKD') \Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D')$ là góc giữa $A'K$ và $D'H$.

$$\text{Trong tam giác vuông } AAB' \text{ có } A'H \text{ là đường cao nên } \frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{A'B'^2} + \frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}.$$

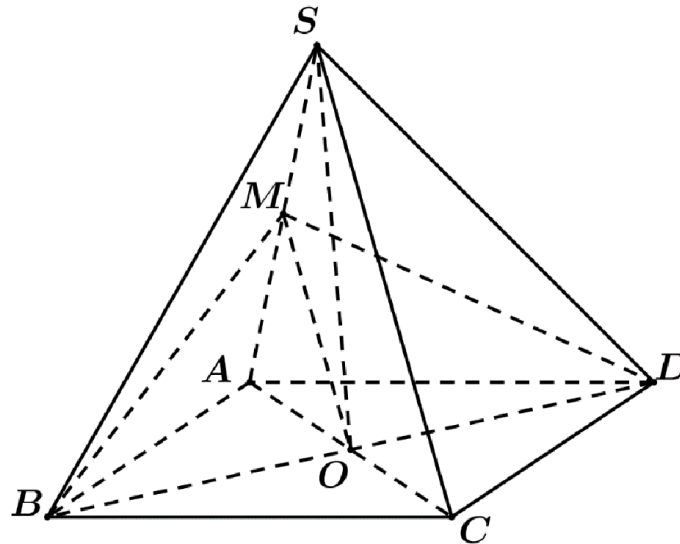
$$\text{Vậy } A'H = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$



$$\text{Xét tam giác } A'IH \text{ có } \cos I = -\cos(A' + H) = -\cos A' \cos H + \sin A' \sin H = \frac{29}{61}.$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D')$ gần đúng bằng $61,6^\circ$.

Câu 31. Chọn D



Gọi M trung điểm SA . Ta có $\triangle SAB$ cân tại $B \Rightarrow BM \perp SA$ (1)

Vì $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BD$, lại có O trung điểm $BD \Rightarrow \Delta SBD$ cân tại S nên $SD = SB = a \Rightarrow \Delta SAD$ cân tại D nên $DM \perp SA$ (2)

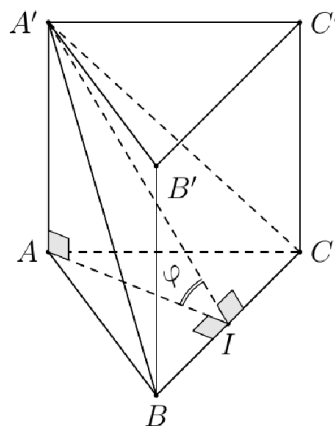
Lại có $(SAB) \cap (SAD) = SA$ (3)

Từ (1);(2);(3) $\Rightarrow \widehat{((SAB), (SAD))} = \widehat{BMD}$ hoặc $\widehat{((SAB), (SAD))} = 180^\circ - \widehat{BMD}$.

$$\text{Xét } \triangle SOB \Rightarrow OB = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow BD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$
$$\text{Xét } \triangle AOB \Rightarrow OA = OC = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \text{ Xét } \triangle SOC \Rightarrow SC = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow OM = \frac{1}{2}SC = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2}BD$$

Do đó ΔBMD vuông tại M , vậy $\widehat{((SAB), (SAD))} = \widehat{BMD} = 90^\circ$, do đó chọn **D.**

Câu 32. Chọn C



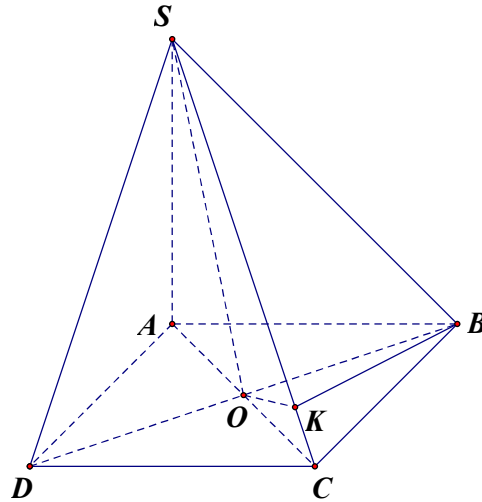
Ta có $\triangle A'BC$ cân tại A . Gọi I là trung điểm của BC

$$\Rightarrow ((A'BC);(ABC)) = (\widehat{AI}; \widehat{A'I}) = \widehat{A'IA} = \varphi.$$

$$\text{Theo đề bài ta suy ra } \left\{ \begin{array}{l} BC = 2a \\ A'I = 2a \\ AI = \frac{2a\sqrt{3}}{2}. \end{array} \right.$$

Xét tam giác vuông $A'AI$ có $\cos \varphi = \frac{AI}{A'I} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$.

Vậy $((A'BC); (ABC)) = 30^\circ$.



Câu 33.

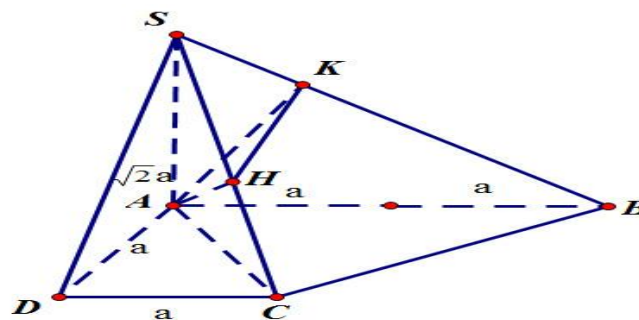
Gọi O là tâm đáy, và K là hình chiếu vuông góc của O trên SC .

Do $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SO$, suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là góc

$\widehat{SOA} = \alpha$. Ta có $\tan \alpha = \frac{SA}{OA} = \sqrt{2} \Rightarrow SA = OA \cdot \sqrt{2} = a$.

Do $\begin{cases} SC \perp BD \\ SC \perp OK \end{cases} \Rightarrow SC \perp BK$. nên góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) là $\widehat{BKO}$. Ta có

$$\tan \widehat{BKO} = \frac{BO}{OK} = \frac{BO}{\frac{1}{2}d(A, SC)} = \frac{2BO}{\frac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}}} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{1^2 + \sqrt{2}^2}}{1 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{3} \text{ suy ra } \widehat{BKO} = 60^\circ.$$



Câu 34.

Ta có tam giác ABC vuông tại C nên $BC \perp AC$ (1).

Vì $\begin{cases} SA \perp ABCD \\ BC \subset ABCD \end{cases} \Rightarrow BC \perp SA$ (2).

Từ (1), (2) $\Rightarrow BC \perp (SAC)$

Trong (SAC) vẽ $AH \perp SC$ tại H

Ta có: $\begin{cases} AH \perp BC \text{ (} BC \perp (SAC), AH \subset (SAC) \text{)} \\ AH \perp SC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$

$$\begin{cases} AH \perp (SBC) \\ SB \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow SB \perp AH$$

Trong (SAB) vẽ $AK \perp SB$ tại K

$$\begin{cases} SB \perp AH \\ SB \perp AK \end{cases} \Rightarrow SB \perp (AHK) \text{ mà } HK \subset (AHK) \text{ nên } SB \perp HK$$

Ta có:
$$\begin{cases} SB \perp AK \\ SB \perp HK \\ AK \subset (SAB) \\ HK \subset (SBC) \\ SB = (SAB) \cap (SBC) \end{cases} \Rightarrow [(SAB); (SBC)] = (AK; HK) = \widehat{AKH}$$

ΔSAC vuông tại A có đường cao AH :

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(a\sqrt{2})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow AH = a.$$

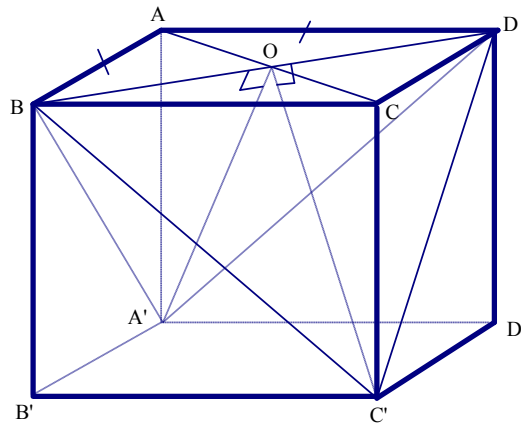
ΔSAB vuông tại A có đường cao AK :

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(2a)^2} \Rightarrow \frac{1}{AK^2} = \frac{3}{4a^2} \Rightarrow AK = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

ΔAHK vuông tại H :

$$AK^2 = AH^2 + HK^2 \text{ (Pytago)} \Rightarrow \frac{4a^2}{3} = a^2 + HK^2 \Rightarrow HK^2 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow HK = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

$$\Delta AHK \text{ vuông tại } H \Rightarrow \cos(\widehat{AKH}) = \frac{HK}{AK} = \frac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{\frac{2a}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AKH} = 60^\circ.$$



Câu 35.

+ Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình vuông $ABCD$.

$$\text{Đặt } AB = x \Rightarrow BC = x; AA' = \frac{x\sqrt{6}}{2}.$$

$$A'B = A'D = \sqrt{\left(\frac{x\sqrt{6}}{2}\right)^2 + x^2} = \frac{x\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \Delta A'BD \text{ cân} \Rightarrow A'O \perp BD.$$

$$C'B = C'D = \sqrt{\left(\frac{x\sqrt{6}}{2}\right)^2 + x^2} = \frac{x\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \Delta C'BD \text{ cân} \Rightarrow C'O \perp BD.$$

$$+ (A'BD) \cap (C'BD) = BD$$

$$A'O \perp BD, A'O \subset (A'BD)$$

$$C'O \perp BD, C'O \subset (C'BD)$$

$\Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(C'BD)$ bằng góc giữa $A'O$ và $C'O$.

+ Tính $\widehat{A'OC'}$.

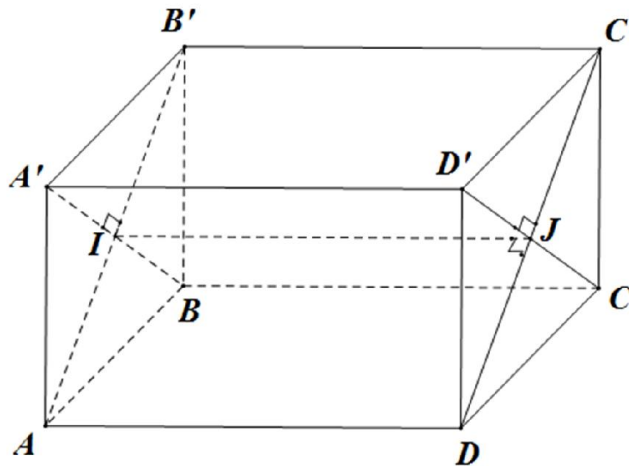
$$A'O = C'O = \sqrt{A'B^2 - BO^2} = \sqrt{\left(\frac{x\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2} = x\sqrt{2}.$$

$$A'C' = x\sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow \Delta A'OC' \text{ đều} \Rightarrow \widehat{A'OC'} = 60^\circ.$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(C'BD)$ bằng 60° .

Cách khác: Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ vào hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ để tìm góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(C'BD)$.



Câu 36.

Cách 1: Gọi $I = A'B \cap A'D$; $J = C'D \cap C'B$. Ta có $IJ = (ADB'C') \cap (BCD'A')$ (1).

Theo giả thiết, ta có: $IJ \perp (DCC'D') \Rightarrow C'D \perp IJ$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow C'D \perp (BCD'A') \Rightarrow (ADC'B') \perp (BCD'A')$.

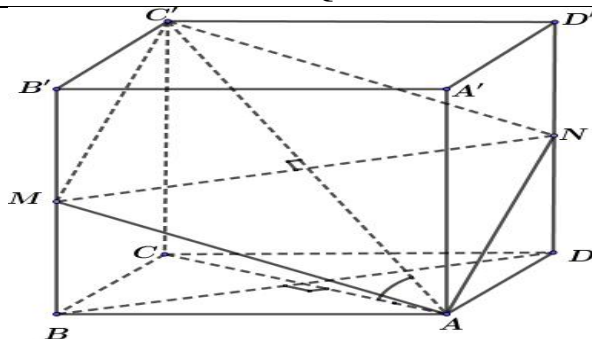
Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(ADC'B')$ và $(BCD'A')$ là 90° .

Cách 2: Mặt phẳng $(DCC'D')$ vuông góc và cắt hai mặt phẳng $(ADC'B')$ và $(BCD'A')$ lần lượt theo hai giao tuyến DC' và $D'C$.

$\Rightarrow$ Góc giữa hai mp $(ADC'B')$ và $(BCD'A')$ là góc giữa hai đường thẳng DC' và $D'C$.

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên tứ giác $DCC'D'$ là hình vuông $\Rightarrow DC' \perp D'C$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(ADC'B')$ và $(BCD'A')$ là 90° .

**Câu 37.**

Ta có $AMC'N$ là hình bình hành, mà tam giác AMN cân tại A nên $MN \perp AC'$.

Ta có $(BDD'B')$ cắt ba mặt phẳng $(ABCD)$, $(A'B'C'D')$, $(AMC'N)$ lần lượt theo ba giao tuyến $BD // B'D' // MN$.

Hai mặt phẳng (P) và $(ABCD)$ có điểm chung A và lần lượt chứa hai đường thẳng song song MN , BD nên giao tuyến của chúng là đường thẳng d đi qua A và song song với MN, BD .

Trên hai mặt phẳng (P) và $(ABCD)$ lần lượt có hai đường thẳng AC' và AC cùng vuông góc với d nên góc giữa hai mặt phẳng (P) và $(ABCD)$ chính là góc giữa AC' và AC , bằng góc $\widehat{CAC'}$. Xét tam giác $C'CA$ vuông tại C có:

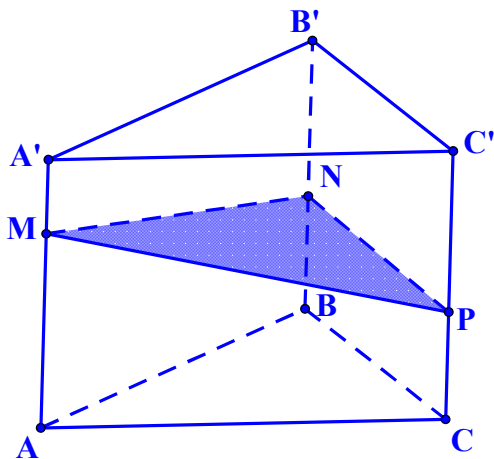
$$\cos \varphi = \frac{AC}{AC'} = \frac{BD}{AC'} = \frac{MN}{AC'} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Cách 2:

Theo chứng minh ở trên thì $MN // BD$ và $MN = BD = a$.

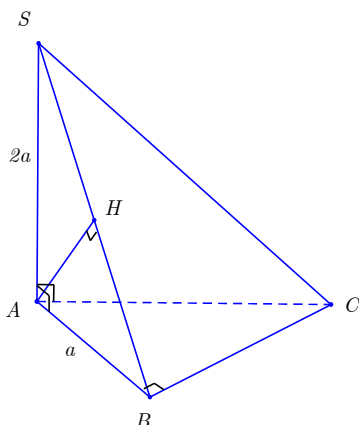
Đa giác $AMC'N$ nằm trên mặt phẳng (P) có hình chiếu trên mặt $(ABCD)$ là hình vuông $ABCD$ nên:

$$\cos \varphi = \frac{S_{ABCD}}{S_{AMC'N}} = \frac{AB^2}{\frac{1}{2} AC' \cdot MN} = \frac{\left(\frac{BD}{\sqrt{2}}\right)^2}{\frac{1}{2} AC' \cdot MN} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**Câu 38.**

Do $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đứng nên ta có: $S_{ABC} = S_{MNP} \cdot \cos((MNP), (ABC))$

$$\Leftrightarrow \cos((MNP), (ABC)) = \frac{S_{ABC}}{S_{MNP}} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow ((MNP), (ABC)) = 30^\circ$$

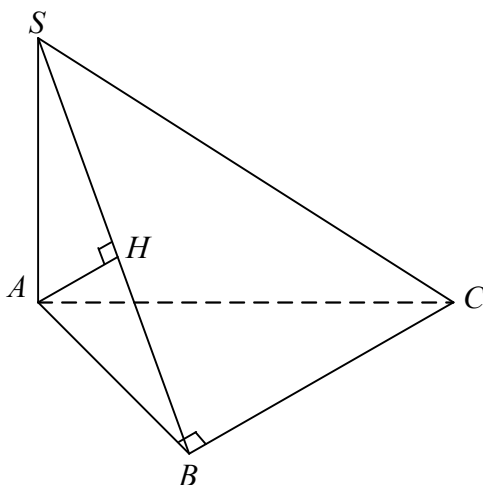
Dạng 2. Khoảng cách**Dạng 2.1 Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng****Câu 39. Chọn A**

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$

Kẻ $AH \perp SB$. Khi đó $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow AH$ là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

$$\text{Ta có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AH^2 = \frac{4a^2}{5} \Rightarrow AH = \frac{2\sqrt{5}a}{5}.$$

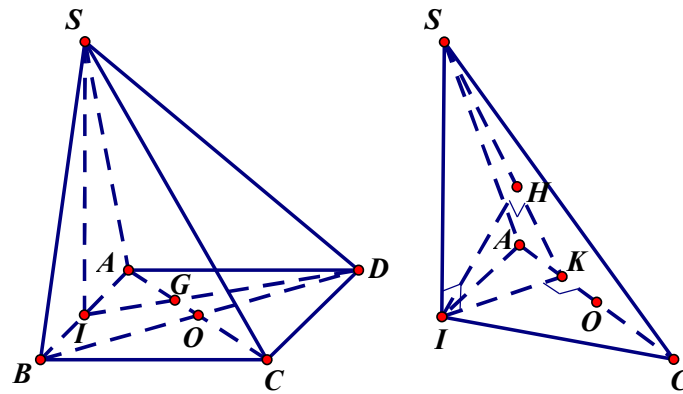
Câu 40. Chọn B

Kẻ $AH \perp SB$ trong mặt phẳng (SBC)

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

$$\text{Vậy } \begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 41. Chọn B



* Gọi $O = AC \cap BD$ và G là trọng tâm tam giác ABD , I là trung điểm của AB ta có

$$SI \perp (ABCD) \text{ và } \frac{d(D; (SAC))}{d(I; (SAC))} = \frac{DG}{IG} = 2 \Rightarrow d(D; (SAC)) = 2.d(I; (SAC)).$$

* Gọi K là trung điểm của AO , H là hình chiếu của I lên SK ta có $IK \perp AC$; $IH \perp (SAC)$

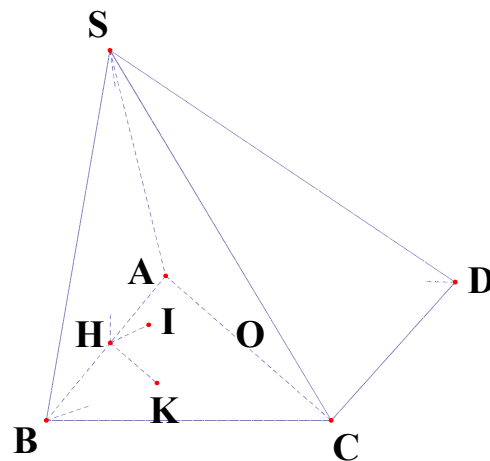
$$\Rightarrow d(D; (SAC)) = 2.d(I; (SAC)) = 2.IH$$

* Xét tam giác SIK vuông tại I ta có: $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $IK = \frac{BO}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

$$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{IK^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{16}{2a^2} = \frac{28}{3a^2} \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow d(D; (SAC)) = 2.d(I; (SAC)) = 2.IH = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 42. Chọn B



Gọi H là trung điểm của AB . Khi đó, $SH \perp (ABCD)$.

Gọi O là giao điểm của AC và BD suy ra $AC \perp BD$. Kẻ $HK \perp BD$ tại K (K là trung điểm BO).

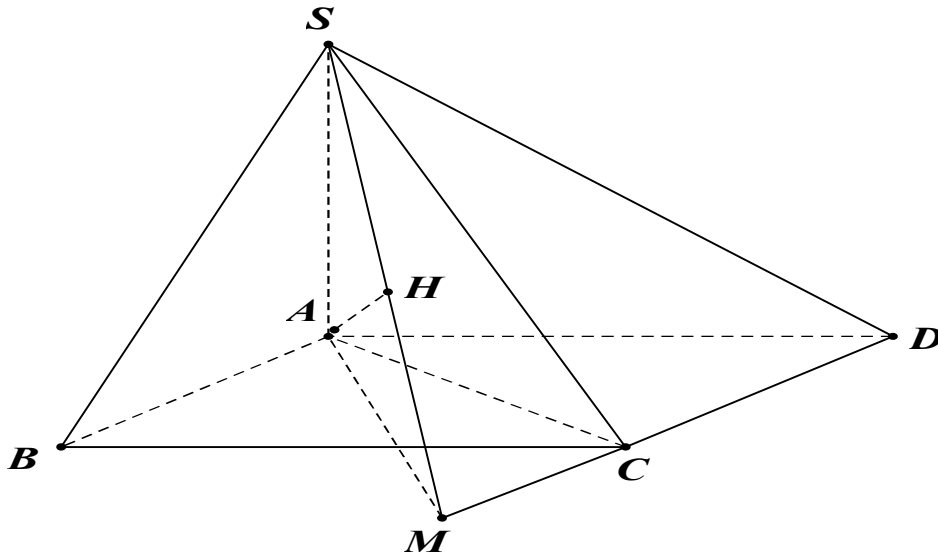
Kẻ $HI \perp SH$ tại I . Khi đó: $d(A; (SBD)) = 2d(H; (SBD)) = 2HI$.

Xét tam giác SHK , có: $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $HK = \frac{1}{2}AO = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

$$\text{Khi đó: } \frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{28}{3a^2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{21}}{14}.$$

Suy ra: $d(A, (SBD)) = 2HI = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 43. Chọn C



CÁCH 1:

Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow d(B, (SCD)) = d(A, (SCD))$.

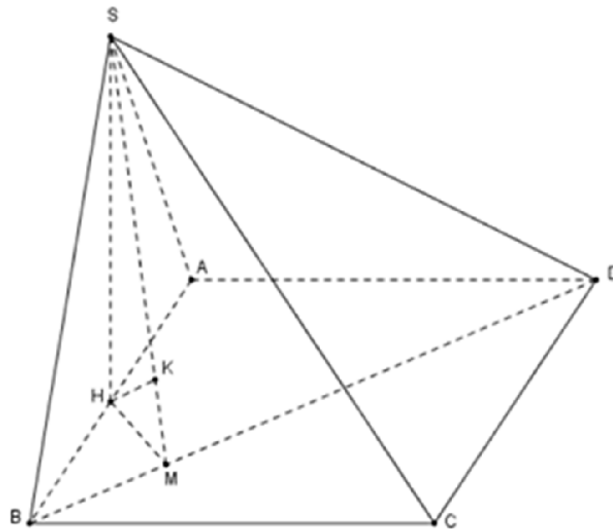
Kẻ $MA \perp CD (M \in CD)$, kẻ $AH \perp SM \Rightarrow SH \perp (SCD) \Rightarrow d(A, (SCD)) = SH$.

$$SA = a; AM = \frac{2S_{ACD}}{CD} = \frac{S_{ABCD}}{CD} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow SM = \frac{\sqrt{21}}{7}a$$

CÁCH 2: Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow d(B, (SCD)) = d(A, (SCD)) = \frac{3V_{S.BCD}}{S_{SCD}} = \frac{3V_{S.ABCD}}{2S_{SCD}} = \frac{\sqrt{21}a}{7}$.

(ΔSCD ; $SD = a\sqrt{2}$; $SC = 2a$; $CD = a$)

Câu 44. Chọn C



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Từ H kẻ $HM \perp BD$, M là trung điểm của BI và I là tâm của hình vuông.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp HM \\ BD \perp SH \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SHM)$

Từ H kẻ $HK \perp SM \Rightarrow HK \perp BD$ (Vì $BD \perp (SHM)$)

$\Rightarrow HK \perp (SBD) \Rightarrow d(H; (SBD)) = HK$.

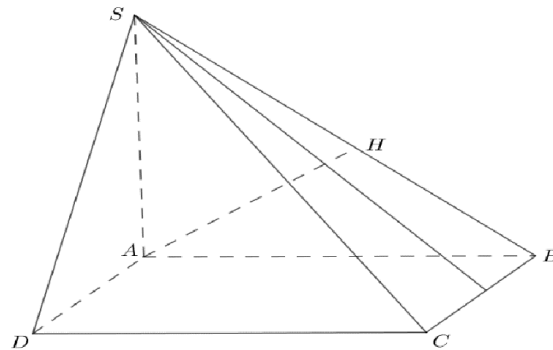
Ta có: $HM = \frac{AI}{2} = \frac{AC}{4} = \frac{\sqrt{2}a}{4}$. $SH = \frac{\sqrt{3}a}{2}$.

$$HK = \frac{HM \cdot HS}{\sqrt{HM^2 + HS^2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}a}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}a}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{21}a}{14}.$$

$$d(C; (SBD)) = d(A; (SBD)) = 2d(H; (SBD)) = 2HK = 2 \cdot \frac{\sqrt{21}a}{14} = \frac{\sqrt{21}a}{7}.$$

$$\text{Vậy: } d(C; (SBD)) = \frac{\sqrt{21}a}{7}.$$

Câu 45. Chọn D



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$$\Rightarrow \begin{cases} (SAB) \perp (SBC) \\ (SAB) \cap (SBC) = SB \end{cases}$$

Trong mặt phẳng (SAB) : Kẻ $AH \perp SB \Rightarrow AH = d(A; (SBC))$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2}.$$

$$\Rightarrow d(A; (SBC)) = AH = \frac{\sqrt{3}a}{2}. \text{ Chọn D}$$

Câu 46. Chọn B

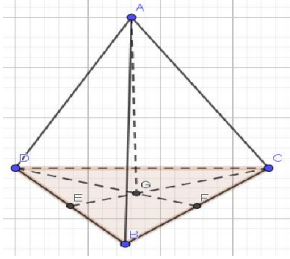
Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của BD, CD và trọng tâm tam giác BCD

$$\text{Tam giác } BCD \text{ đều nên suy ra } CE = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

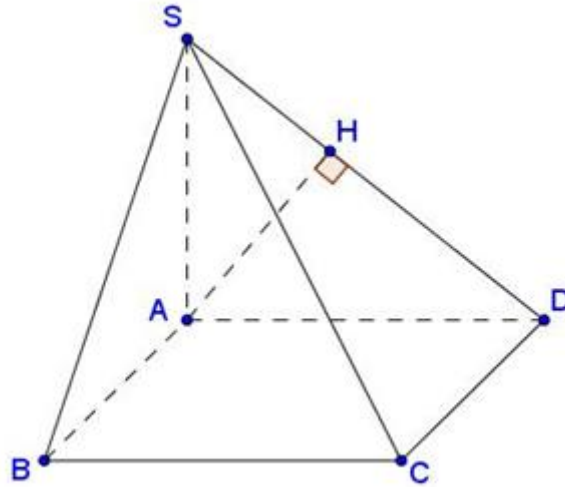
$$CG = \frac{2}{3}CE = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Tam giác } ACG \text{ vuông tại } G \text{ nên ta có } AG^2 = AC^2 - CG^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow AG = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Vậy } d(A; (BCD)) = AG = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$



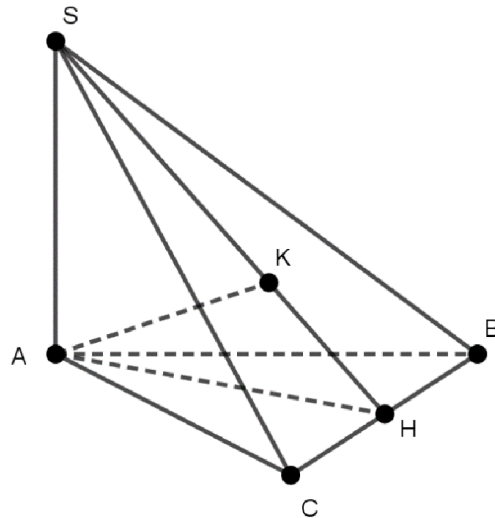
Câu 47. Chọn C



Gọi H là hình chiếu của A lên SD ta chứng minh được $AH \perp (SCD)$

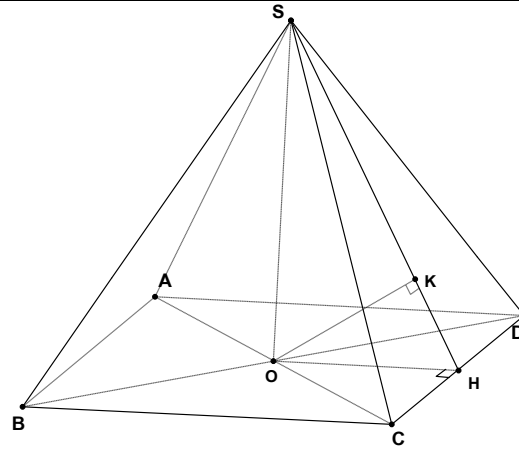
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AH = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

Câu 48. Chọn B



$$\text{Ta có } \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{19}{12a^2}.$$

$$\text{Suy ra } AK = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}} \text{ hay } d(A, (SBC)) = \frac{2a\sqrt{57}}{19}.$$



Câu 49.

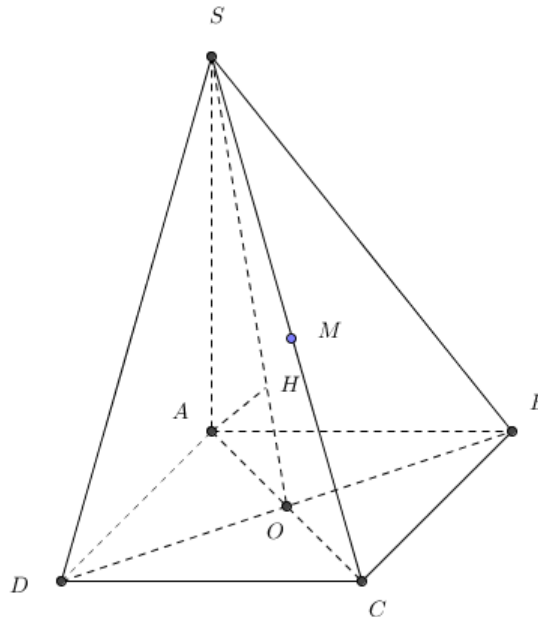
$S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $ABCD$ là hình vuông và $SO \perp (ABCD)$.

Vẽ OH vuông góc với CD tại H thì H là trung điểm CD , $OH = \frac{a}{2}$.

Để thấy $CD \perp (SOH) \Rightarrow (SCD) \perp (SOH)$ nên kẻ OK vuông góc với SH tại K thì $OK \perp (SCD)$.
 $\Rightarrow d[O, (SCD)] = OK$.

Tam giác vuông SOH có OK là đường cao nên $OK = \frac{OS \cdot OH}{\sqrt{OS^2 + OH^2}} = \frac{a\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Vậy $d[O, (SCD)] = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.



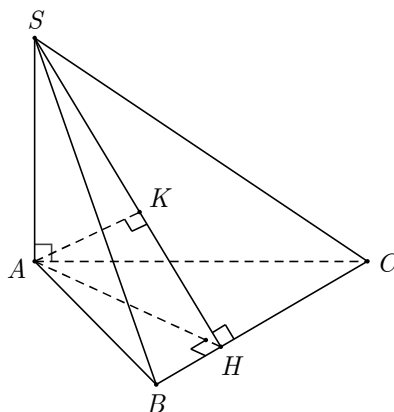
Câu 50.

Do M là trung điểm SC nên $d(M; (SBD)) = \frac{1}{2} d(C; (SBD)) = \frac{1}{2} d(A; (SBD))$

Gọi H là hình chiếu của A lên $mp(SBD) \Rightarrow d(A; (SBD)) = AH$

Lại có AS, AB, AD đôi một vuông góc nên $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} = \frac{5}{2a^2}$

$$\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{10}}{5} \Rightarrow d(M; (SBD)) = \frac{a\sqrt{10}}{10}.$$



Câu 51.

Ta có

$$\left. \begin{array}{l} SA \perp (ABC) \\ BC \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow SA \perp BC.$$

Trong (ABC) , kẻ $AH \perp BC$, mà $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH$.

Trong (SAH) , kẻ $AK \perp SH$, mà $SH \perp BC \Rightarrow AK \perp (SBC)$ hay $d(A; (SBC)) = AK$.

Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a$.

Mặt khác có AH là đường cao nên $AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$.

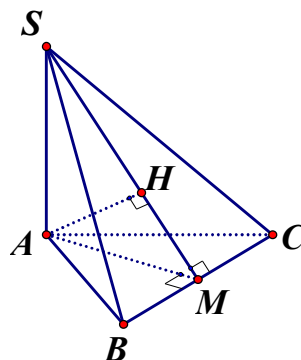
Vì $\triangle SAH$ vuông tại A nên $SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \frac{\sqrt{19}a}{2}$.

Vậy có AK là đường cao $AK = \frac{SA \cdot AH}{SH} = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

Nhận xét. Trong thực hành làm toán trắc nghiệm ta nên áp dụng bài toán sau:

Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và H là hình chiếu của O lên mặt phẳng

(ABC) . Khi đó $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.



Câu 52.

Gọi M là trung điểm BC . Kẻ $AH \perp SM$ tại H .

Ta có $AM \perp BC$ và $SA \perp BC$ nên $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AH$ (1).

Mà $AH \perp SM$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SBC)$.

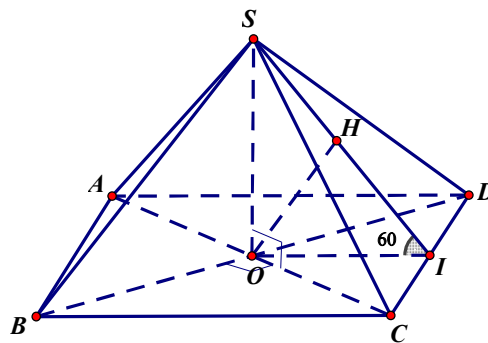
Do đó $d(A, (SBC)) = AH$.

Xét tam giác SAM vuông tại A , có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{21}a}{7}.$$

Câu 53. Chọn C

* Ta có: $\frac{d(B; (SCD))}{d(O; (SCD))} = \frac{BD}{OD} = 2 \Rightarrow d(B; (SCD)) = 2.d(O; (SCD)) = 2OH$. Trong đó H là hình chiếu vuông góc của O lên (SCD) .



* Gọi I là trung điểm của CD ta có:

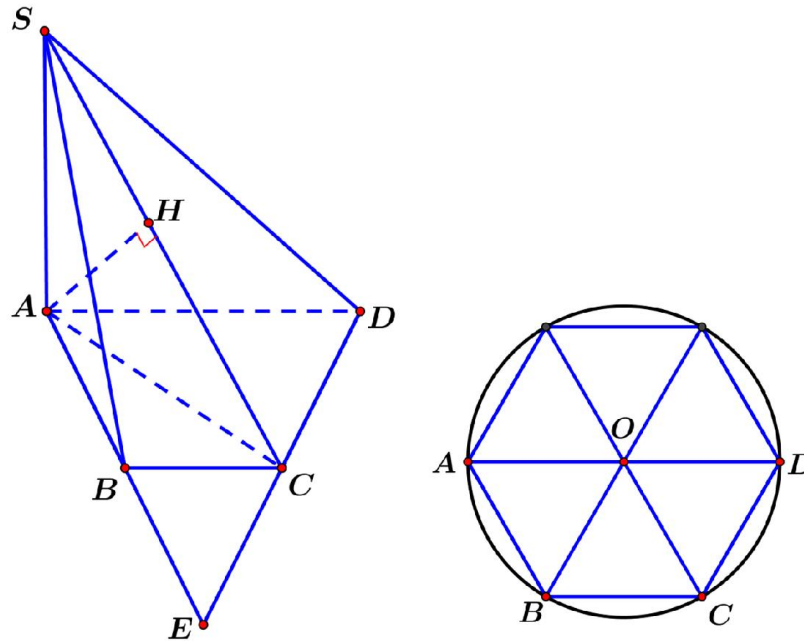
$$\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ SI \perp CD \\ OI \perp CD \end{cases} \Rightarrow ((SCD); (ABCD)) = (OI; SI) = \widehat{SIO} = 60^\circ.$$

Xét tam giác SOI vuông tại O ta có: $SO = OI \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Xét } \triangle SOI, \text{ ta có } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{16}{3a^2}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow d(B; (SCD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 54. Chọn C



Từ giả thiết suy ra: $AB = BC = CD = \frac{AD}{2} = a$, $AC = a\sqrt{3}$.

Gọi $E = AB \cap CD$, suy ra tam giác ADE đều.

Khi đó C là trung điểm của ED và $AC \perp ED$.

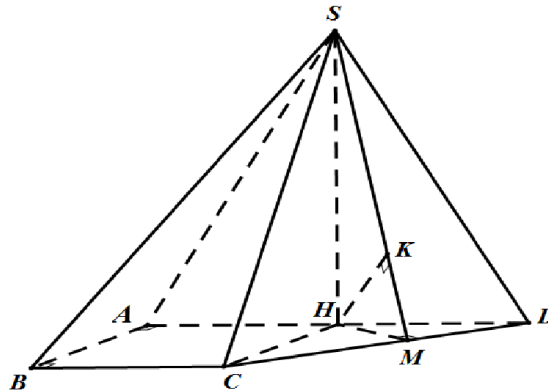
Dựng $AH \perp SC$ thì $AH \perp (SCD)$, suy ra $d[A, (SCD)] = AH$.

Xét tam giác SAC vuông tại A , có AH là đường cao

Suy ra: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \sqrt{2}a$

Mà $d[B, (SCD)] = \frac{1}{2}d[A, (SCD)] = \frac{1}{2}AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 55. Chọn C



Gọi M là trung điểm của CD , K là hình chiếu của H lên SM

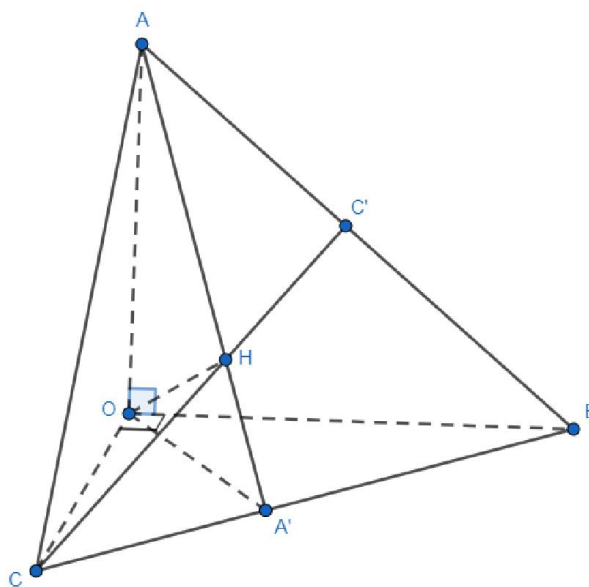
Tam giác HCD vuông tại H có $CD = a\sqrt{2}$ và $HM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Ta có $BH \parallel CD \Rightarrow d(B, (SCD)) = d(H, (SCD)) = HK$

Tam giác SHM vuông tại H có $HK = \frac{HM \cdot HS}{\sqrt{HM^2 + HS^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

Vậy $d(B, (SCD)) = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

Câu 56. Chọn B



Gọi A' là chân đường cao kẻ từ A lên BC , C' là chân đường cao kẻ từ C lên AB .

Gọi H là giao của AA' với CC' suy ra H là trực tâm của tam giác ABC . Ta dễ dàng chứng minh được $OH \perp (ABC)$.

Do đó: $d(O; (ABC)) = OH$. Tính OH .

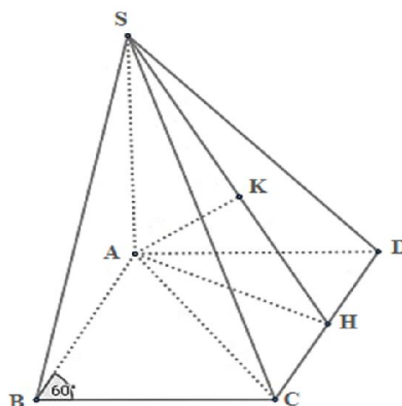
Ta có: Tam giác OAA' vuông tại O , có OH là đường cao. Suy ra: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OA'^2}$ (1)

Lại có: Tam giác OBC vuông tại B , có OA' là đường cao. Suy ra: $\frac{1}{OA'^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$. Thay $OA = OB = OC = \sqrt{3}$ vào, ta được:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 \Leftrightarrow OH = 1.$$

Vậy $d(O; (ABC)) = OH = 1$.



Câu 57.

Cách 1: Sử dụng kiến thức ở lớp 11.

$ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC, \triangle ACD$ là các tam giác đều cạnh a .

Xét $\triangle SAC$ vuông tại A có: $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Vì $AB \parallel CD$ nên $AB \parallel (SCD)$. Do đó $d(B, (SCD)) = d(A, (SCD))$.

Kẻ $AH \perp CD$ ($H \in CD$). Suy ra H là trung điểm của cạnh CD , $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Kẻ $AK \perp SH$ ($K \in SH$) (1)

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AH \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAH) \Rightarrow CD \perp AK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AK \perp (SCD) \Rightarrow d(A, (SCD)) = AK$.

Xét $\triangle SAH$ vuông ở A : $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Vậy $d(B, (SCD)) = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Cách 2: Tính khoảng cách thông qua tính thể tích.

$ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC, \triangle ACD$ là các tam giác đều cạnh a .

Xét $\triangle SAC$ vuông tại A có: $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Vì $AB \parallel DC$ nên $AB \parallel (SDC)$. Do đó $d(B, (SCD)) = d(A, (SCD)) = \frac{3V_{SACD}}{S_{\triangle SCD}}$.

$$V_{SACD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\triangle ACD} = \frac{1}{3} a\sqrt{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{4}.$$

Xét $\triangle SAC$ và $\triangle SAD$ có: $AD = AC = a$, SA chung, $\widehat{SAC} = \widehat{SAD} = 90^\circ$.

Do đó $\triangle SAC = \triangle SAD \Rightarrow SC = SD \Rightarrow \triangle SCD$ cân tại S .

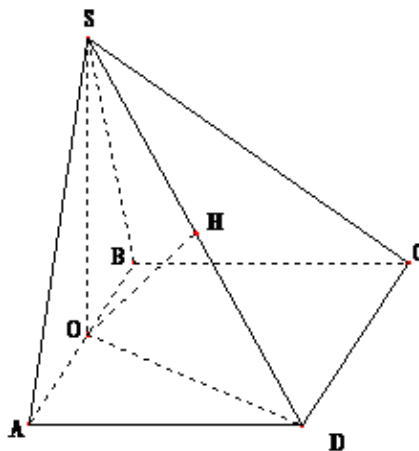
Gọi H là trung điểm $CD \Rightarrow SH \perp CD$.

Xét $\triangle SHC$ vuông ở H : $SH = \sqrt{SC^2 - CH^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$.

$$S_{\triangle SCD} = \frac{1}{2} SH \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{2} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{15}}{4}.$$

$$d(A, (SCD)) = \frac{3 \cdot \frac{a^3}{4}}{\frac{a^2\sqrt{15}}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Vậy $d(B, (SCD)) = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.



Câu 58.

Gọi O là trung điểm của $AB \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

$$SO = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \text{ do } SO \text{ là đường cao của tam giác đều cạnh } 2a$$

Từ giả thiết suy ra tam giác BCD và tam giác ABD là tam giác đều $\Rightarrow CD \perp OD$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} CD \perp OD \\ CD \perp SO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOD)$$

Trong tam giác SOD kẻ $OH \perp SD$ tại H

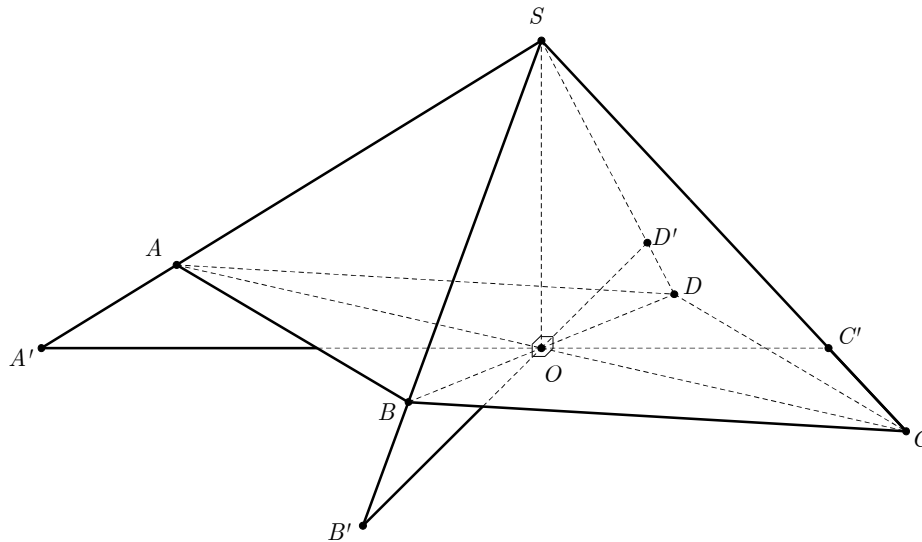
$$\begin{cases} OH \perp SD \\ OH \perp CD \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SCD)$$

$$\text{Do } AB \parallel (SCD) \text{ suy ra } d(B, (SCD)) = d(O, (SCD)) = OH$$

Nhận thấy tam giác SOD là tam giác vuông cân tại O với $OD = a\sqrt{3}$

$$OH = \frac{1}{2}SD = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 3a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Câu 59. Chọn B



Gọi p, q, u, v lần lượt là các khoảng cách từ O đến các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCD), (SDA)$.

Trong mặt phẳng (SAC) dựng đường thẳng qua O vuông góc với đường thẳng SO cắt hai đường thẳng SA, SC lần lượt tại A', C'

Trong mặt phẳng (SBD) dựng đường thẳng qua O vuông góc với đường thẳng SO cắt hai đường thẳng SB, SD lần lượt tại B', D' .

Do $(SAC) \perp (SBD), (SAC) \cap (SBD) = SO, A'C' \perp SO$ nên $A'C' \perp (SBD)$

$\Rightarrow A'C' \perp B'D'$.

Khi đó tứ diện $OSA'B'$ có OS, OA', OB' đôi một vuông góc nên ta chứng minh được

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OA'^2} + \frac{1}{OB'^2} \quad (1)$$

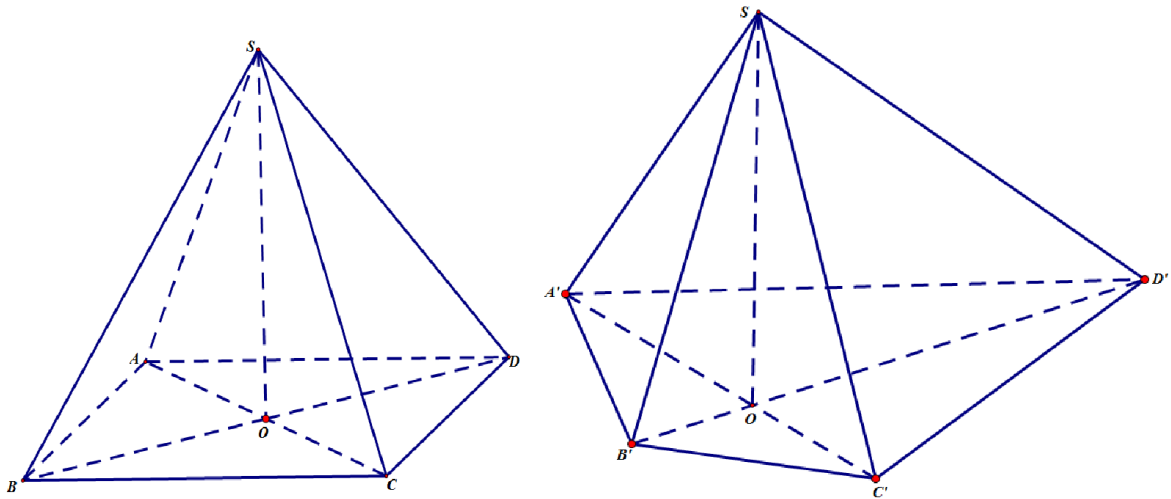
$$\text{Chứng minh tương tự: } \frac{1}{q^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OB'^2} + \frac{1}{OC'^2} \quad (2);$$

$$\frac{1}{u^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OC'^2} + \frac{1}{OD'^2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OD'^2} + \frac{1}{OA'^2} \quad (4)$$

Từ (1),(2),(3),(4) ta có $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{u^2} = \frac{1}{q^2} + \frac{1}{v^2}$.

Với $p = 1; q = 2; u = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{1}{1^2} + \frac{1}{(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{v^2} \Rightarrow \frac{1}{v^2} = \frac{19}{20} \Rightarrow d = v = \sqrt{\frac{20}{19}}$.



Dựng mặt phẳng qua O , vuông góc với SO , cắt các đường thẳng SA, SB, SC, SD lần lượt tại $A', B', C', D' \Rightarrow SO \perp (A'B'C'D')$.

Vì $(SAC) \perp (SBD) \Rightarrow A'C' \perp B'D'$.

Ta có: $\frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OA'^2} + \frac{1}{OB'^2} = \frac{1}{d(O, (SA'B'))} = 1. (1)$

$\frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OB'^2} + \frac{1}{OC'^2} = \frac{1}{d(O, (SB'C'))} = \frac{1}{4}. (2)$

$\frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OC'^2} + \frac{1}{OD'^2} = \frac{1}{d(O, (SC'D'))} = \frac{1}{5}. (3)$

$\frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OD'^2} + \frac{1}{OA'^2} = \frac{1}{d(O, (SD'A'))} = \frac{1}{d^2}. (4)$

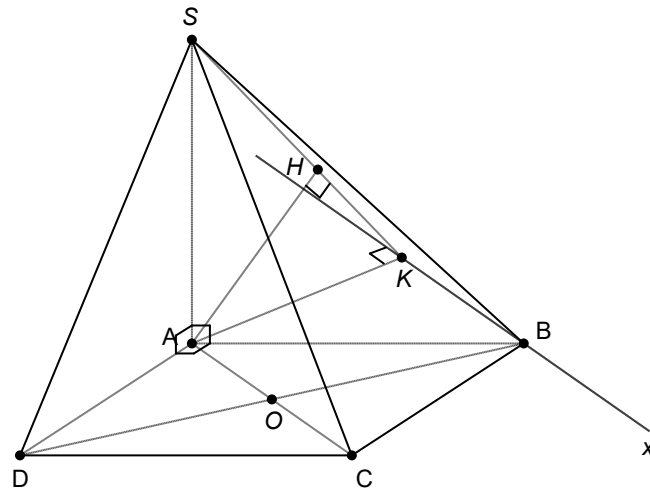
$(1), (2), (3), (4) \Rightarrow 1 + \frac{1}{5} = \frac{1}{4} + \frac{1}{d^2} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{20}{19}}$.

Dạng 2.2 Khoảng cách của đường thẳng với đường thẳng

Câu 60. Chọn D

Ta có khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau BD và $A'C'$ bằng khoảng cách giữa mặt phẳng song song $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ thứ tự chứa BD và $A'C'$. Do đó khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng a .

Câu 61. Chọn B



Từ B kẻ $Bx \parallel AC \Rightarrow AC \parallel (SB, Bx)$

Suy ra $d(AC, SB) = d(AC, (SB, Bx)) = d(A, (SB, Bx))$

Từ A kẻ $AK \perp Bx (K \in Bx)$ và $AH \perp SK$

Do $\begin{cases} AK \perp Bx \\ SA \perp Bx \end{cases} \Rightarrow Bx \perp (SAK) \Rightarrow Bx \perp AH$

Nên $AH \perp (SB, Bx) \Rightarrow d(A, (SB, Bx)) = AH$

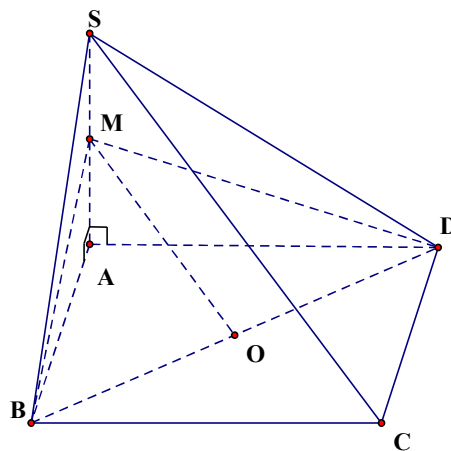
Ta có $\triangle BKA$ đồng dạng với $\triangle ABC$ vì hai tam giác vuông có $\widehat{KBA} = \widehat{BAC}$ (so le trong)

Suy ra $\frac{AK}{CB} = \frac{AB}{CA} \Rightarrow AK = \frac{AB \cdot CB}{CA} = \frac{a \cdot 2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}a}{5}$.

Trong tam giác SAK có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{5}{4a^2} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a}{3}$.

Vậy $d(AC, SB) = \frac{2a}{3}$.

Câu 62. Chọn B



Gọi O là tâm hình chữ nhật và M là trung điểm SA, ta có: $SC \parallel (BMD)$.

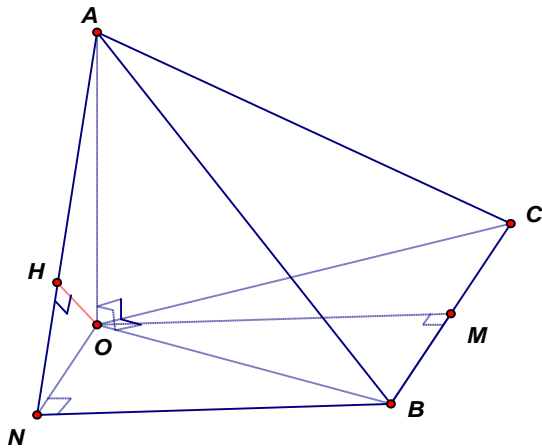
Do đó $d(SC, BD) = d(SC, (BMD)) = d(S, (BMD)) = d(A, (BMD)) = h$

Ta có: AM, AB, AD đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2}$$

Suy ra: $h = \frac{2a\sqrt{21}}{21}$.

Câu 63. Chọn A



Ta có $\triangle OBC$ vuông cân tại O , M là trung điểm của BC
 $\Rightarrow OM \perp BC$

Dựng hình chữ nhật $OMBN$, ta có $\begin{cases} OM \parallel BN \\ BN \subset (ABN) \end{cases} \Rightarrow OM \parallel (ABN)$

$$\Rightarrow d(AB, OM) = d(OM, (ABN)) = d(O, (ABN))$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên AN ta có:

$$\begin{cases} BN \perp ON \\ BN \perp OA \end{cases} \Rightarrow BN \perp (OAN) \Rightarrow OH \perp BN \text{ mà } OH \perp AN$$

$$\Rightarrow OH \perp (ABN) \Rightarrow d(O, (ABN)) = OH$$

$\triangle OAN$ vuông tại O , đường cao OH

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{BM^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{4}{BC^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{4}{OB^2 + OC^2}$$

$$= \frac{1}{a^2} + \frac{4}{4a^2 + 4a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow OH^2 = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow d(AB, OM) = OH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Nhận xét:



Xét tam giác vuông BOC : $ON = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{(2a)^2 + a^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$.

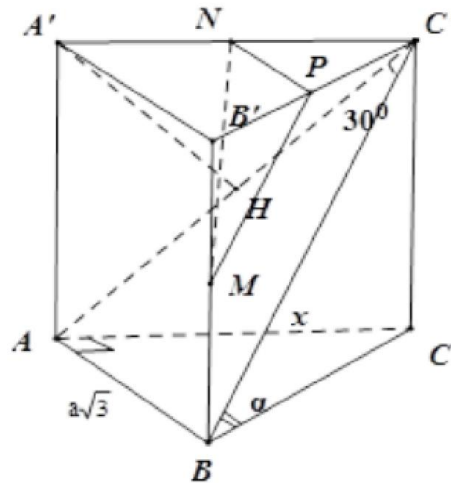
Xét tam giác BAC : $MN = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + (2a)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$.

Trong tam giác cân OMN , gọi H là trung điểm của OM ta có $NH = \sqrt{NM^2 - HM^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}a$.

Suy ra $S_{OMN} = \frac{1}{2}OM \cdot NH = \frac{3}{8}a^2$.

Vậy $d(B; OMN) = \frac{3V_{M.OBN}}{S_{OMN}} = \frac{2}{3}a$.

Câu 65. Chọn A



+) Ta có: $(BC', (AA'C'C)) = \widehat{BC'A} = 30^\circ$

+) Mặt khác $(BC', (ABC)) = \widehat{C'BC} = \alpha$

+) Gọi $AB = x \Rightarrow BC = \sqrt{3a^2 + x^2} \Rightarrow CC' = BC \cdot \tan \alpha = \sqrt{\frac{3(3a^2 + x^2)}{5}} \Rightarrow AC' = AB \cdot \cot 30^\circ = \sqrt{3}x$

+) Mặt khác ta có: $AC^2 + CC'^2 = AC'^2 \Rightarrow x = a\sqrt{2} \Rightarrow CC' = a\sqrt{3} \Rightarrow AC' = a\sqrt{6}$

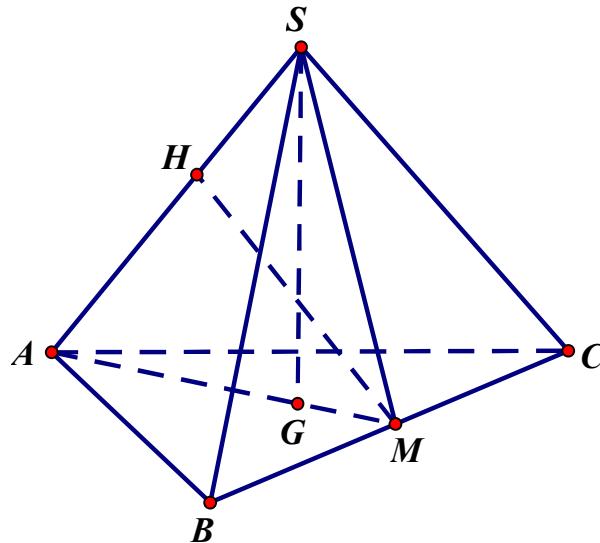
+) Gọi P là trung điểm của $B'C'$, ta có: Do mặt phẳng $(MNP) \parallel (ABC')$ nên

$d(MN, AC') = d(MN, (ABC')) = d(N, (ABC')) = \frac{1}{2}d(A', (ABC'))$

+) Kẻ $A'H \perp AC' \Rightarrow A'H \perp (ABC') \Rightarrow \frac{1}{2}d(A', (ABC')) = A'H = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

$\Rightarrow d(MN, AC') = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

Câu 66. Chọn C



Do hình chóp $S.ABC$ đều nên SG là đường cao của hình chóp (G là trọng tâm tam giác đều ABC). Kẻ $MH \perp SA$ tại H thì MH là đoạn vuông góc chung của SA và BC .

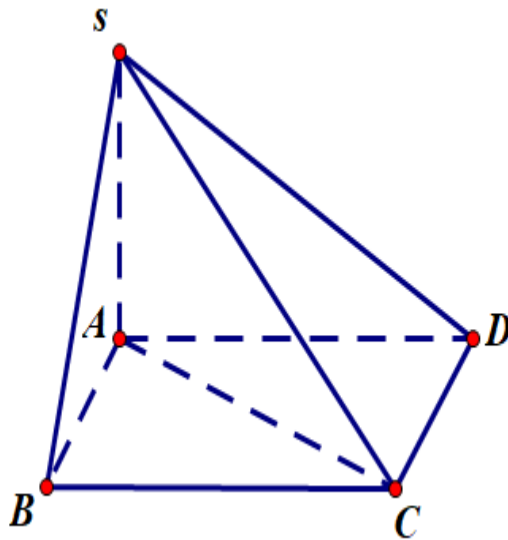
Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng MH .

$$\text{Ta có } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot SG = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3} \Rightarrow SG = 4a, AG = \frac{a\sqrt{3}}{3}, SA = \sqrt{AG^2 + SG^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{9} + 16a^2} = \frac{7a\sqrt{3}}{3}. \text{ Ta}$$

$$\text{có } SA \cdot MH = SG \cdot AM \Rightarrow MH = \frac{SG \cdot AM}{SA} = \frac{3 \cdot 4a \cdot a\sqrt{3}}{2 \cdot 7a\sqrt{3}} = \frac{6a}{7}$$

Câu 67. Chọn A

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (ABCD) // (A'B'C'D') \\ BD \subset (ABCD) \\ A'C' \subset (A'B'C'D') \end{cases} \Rightarrow d(BD; A'C') = d[(ABCD); (A'B'C'D')] = AA' = a$$



Câu 68.

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC // AD \\ BC \not\subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow BC // (SAD) \Rightarrow d(BC, SD) = d(BC, (SAD)) = d(B, (SAD)).$$

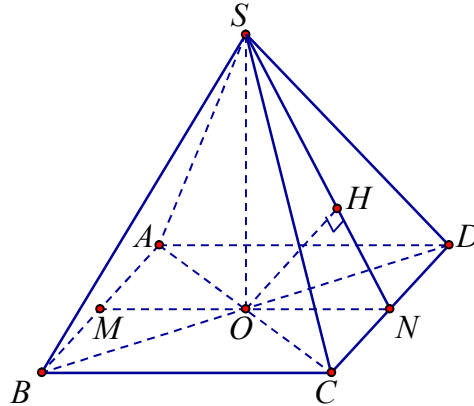
$$\text{Có } SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AB.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} BA \perp AD \\ BA \perp SA \\ SA \cap AD = A \end{cases} \Rightarrow BA \perp (SAD) \Rightarrow d(B, (SAD)) = BA.$$

Xét tam giác vuông BAC , $BA = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{5a^2 - 2a^2} = a\sqrt{3}$.

Vậy $d(B, (SAD)) = a\sqrt{3} \Rightarrow d(BC, SD) = a\sqrt{3}$.

Câu 69. Chọn D



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD ; H là hình chiếu vuông góc của O trên SN .

Vì $AB \parallel CD$ nên $d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(M, (SCD)) = 2d(O, (SCD))$ (vì O là trung điểm đoạn MN)

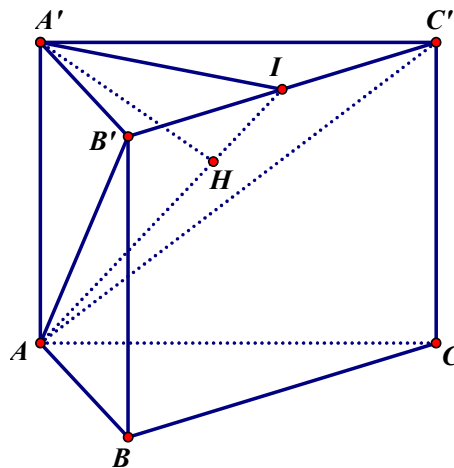
$$\text{Ta có } \begin{cases} CD \perp SO \\ CD \perp ON \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SON) \Rightarrow CD \perp OH$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} CD \perp OH \\ OH \perp SN \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SCD) \Rightarrow d(O, (SCD)) = OH.$$

$$\text{Tam giác } SON \text{ vuông tại } O \text{ nên } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{\frac{a^2}{4}} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Vậy } d(AB, SC) = 2OH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 70. Chọn A



Ta có $BC \parallel B'C' \Rightarrow BC \parallel (AB'C')$

suy ra $d(BC, AB') = d(BC, (AB'C')) = d(B, (AB'C')) = d(A', (AB'C'))$.

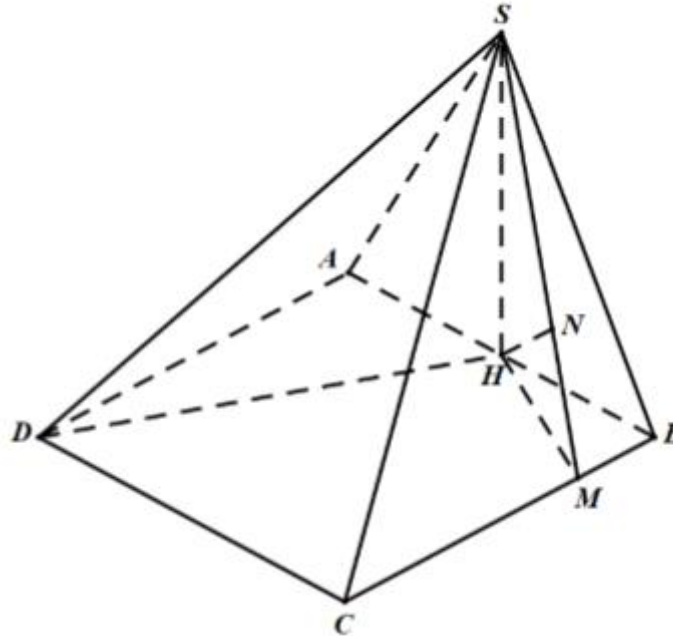
Gọi I và H lần lượt là hình chiếu vuông góc của A' trên $B'C'$ và AI .

Ta có $B'C' \perp A'I$ và $B'C' \perp A'A$ nên $B'C' \perp (A'AI) \Rightarrow B'C' \perp A'H$ mà $AI \perp A'H$. Do đó $(AB'C') \perp A'H$

$$\text{Khi đó } d(A', (AB'C')) = A'H = \frac{A'A \cdot A'I}{\sqrt{A'A^2 + A'I^2}} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Vậy khoảng cách cần tìm là $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 71. Chọn B



Không mất tính tổng quát, giả sử $a = 1$.

Gọi H là trung điểm của AB . Kẻ $HM \perp BC$ ($M \in BC$); $HN \perp SM$ ($N \in SM$).

Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên $SH \perp (ABCD)$.

$$\text{Áp dụng định lý hàm số } \cos : DH^2 = DA^2 + AH^2 - 2DA \cdot AH \cdot \cos 120^\circ = 1 + \frac{1}{4} - 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow DH = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{Theo đề bài: } \widehat{SDH} = 60^\circ \Rightarrow SH = DH \cdot \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

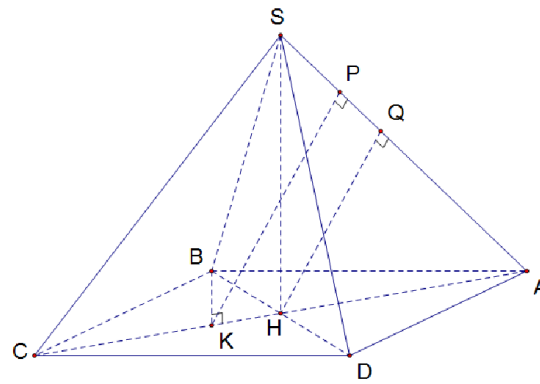
$$\text{Lại có: } HM = HB \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Ngoài ra: } BC \perp (SHM) \Rightarrow BC \perp HN \Rightarrow HN \perp (SBC); \Rightarrow \frac{1}{HN^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HM^2} = \frac{116}{21} \Rightarrow HN = \frac{\sqrt{609}}{58}.$$

Chú ý rằng $AD \parallel (SCB)$ nên khoảng cách giữa AD và SC là khoảng cách giữa A và mặt phẳng (SBC) ,

$$\text{bằng 2 lần khoảng cách từ } H \text{ (theo định lý Ta-let), } d = 2HN = \frac{\sqrt{609}}{29}$$

Câu 72. Chọn D



Gọi H là hình chiếu của S trên mặt đáy. Vì $SA = SB = SC = SD = 6$ nên $HA = HB = HC = HD$. Suy ra hình bình hành $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn tâm H . Vì vậy $ABCD$ là hình chữ nhật.

Kẻ KP vuông góc với SA tại P (1).

Ta có $\begin{cases} BK \perp AC \\ BK \perp SH \end{cases} \Rightarrow BK \perp (SAC) \Rightarrow BK \perp KP$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $d(SA, BK) = KP$.

Kẻ HQ vuông góc với SA tại Q .

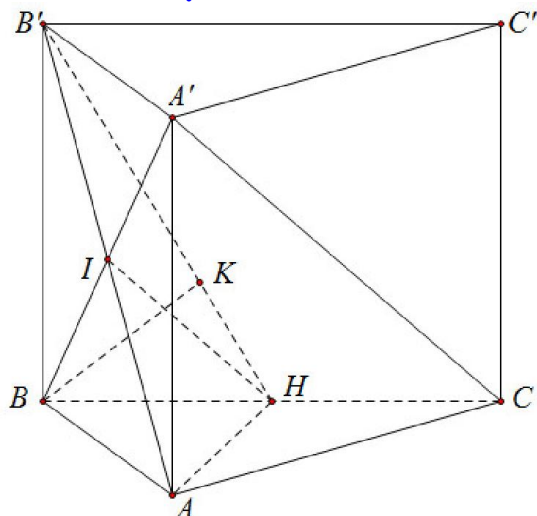
Ta có: $AH = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{5}{2}$, $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{\sqrt{119}}{2}$

$\Rightarrow HQ = \frac{SH \cdot HA}{SA} = \frac{5\sqrt{119}}{24}$.

Ta có: $\frac{KP}{HQ} = \frac{KA}{HA} = \frac{KA}{AC} \cdot \frac{AC}{HA} = \frac{KA \cdot AC}{AC^2} \cdot 2 = 2 \cdot \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{32}{25}$.

$\Rightarrow d(SA, BK) = KP = \frac{32}{25}HQ = \frac{4\sqrt{119}}{15}$.

Câu 73. Chọn D



• Gọi $I = AB' \cap A'B$; H là trung điểm của BC .

$\Rightarrow IH \parallel A'C \Rightarrow A'C \parallel (B'AH)$

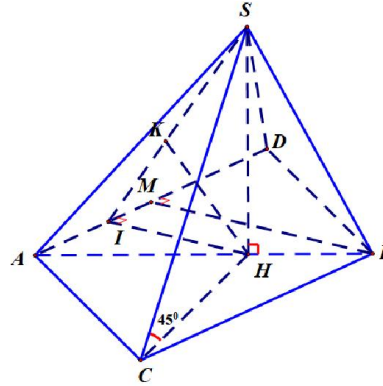
$\Rightarrow d_{(A'C; AB')} = d_{(A'; (B'AH))} = d_{(B'; (B'AH))}$.

• Kẻ $BK \perp B'H$, với $K \in B'H$.

Chúng minh: $BK \perp (B'AH) \Rightarrow d_{(B;(B'AH))} = BK = \frac{B'B \cdot BH}{\sqrt{B'B^2 + BH^2}} = \frac{2a \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{2a}{\sqrt{17}}$

Vậy $d_{(A'C;AB')} = \frac{2a}{\sqrt{17}}$.

Câu 74. Chọn B



$(SC; (ABC)) = \widehat{SCH} = 45^\circ$

Ta có: $BH = \frac{1}{3}AB = \frac{4}{3}$

$CH = \sqrt{BH^2 + BC^2 - 2BH \cdot BC \cdot \cos \widehat{HBC}} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4^2 - 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ} = \frac{4\sqrt{7}}{3}$

$\Rightarrow SH = CH \cdot \tan 45^\circ = \frac{2\sqrt{34}}{3}$

Dựng hình thoi ACBD (với D là đỉnh thứ 4 của hình thoi)

$\Rightarrow AD // BC \Rightarrow BC // (SAD)$

Vậy $d(SA; BC) = d(BC; (SAD)) = d(B; (SAD)) = \frac{3}{2}d(H; (SAD))$

Gọi M là trung điểm của AD $\Rightarrow BM \perp AD$ ($\triangle DAB$ đều).

Từ H dựng $HI // BM \Rightarrow HI \perp AD$

Ta có: $\begin{cases} AD \perp HI \\ AD \perp SH \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SIH) \Rightarrow (SAD) \perp (SIH)$

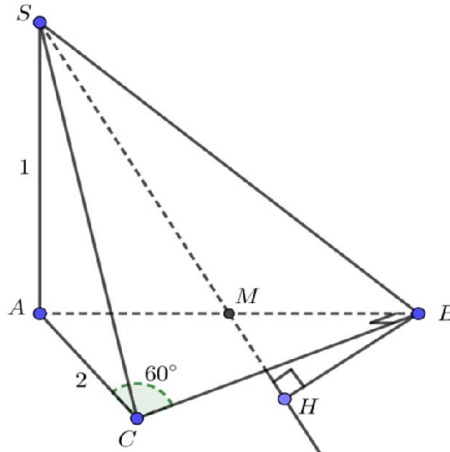
Từ H dựng $HK \perp SI \Rightarrow HK \perp (SAD)$

Vậy $d(H; (SAD)) = HK$

Ta có: $HI // BM \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{HI}{BM} \Rightarrow HI = \frac{BM \cdot AH}{AB} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \frac{8}{3}}{4} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow HK = \frac{SH \cdot IH}{SI} = \frac{SH \cdot IH}{\sqrt{SH^2 + HI^2}} = \frac{\frac{4\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{7}}{3}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \frac{2\sqrt{210}}{15}$

$$\Rightarrow d(SA; BC) = \frac{3}{2} HK = \frac{\sqrt{210}}{5}$$



Câu 75.

Ta có

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp SA \\ BC \perp AB \\ SA, AB \subset (SAB) \\ SA \cap AB = A \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB).$$

Trong (SAB) , dựng $BH \perp SM$ và cắt SM ở H .

Ta có

$$\left. \begin{array}{l} BH \perp SM \\ BH \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow d(SM, BC) = BH \Leftrightarrow d = BH.$$

$$\text{Ta có } \triangle BMH \sim \triangle SMA \Rightarrow \frac{BH}{SA} = \frac{BM}{SM} \Leftrightarrow BH = \frac{SA \cdot BM}{SM} \quad (1).$$

$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ vuông tại } B \text{ có } \sin \widehat{BCA} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = \sin 60^\circ \cdot 2 = \sqrt{3}.$$

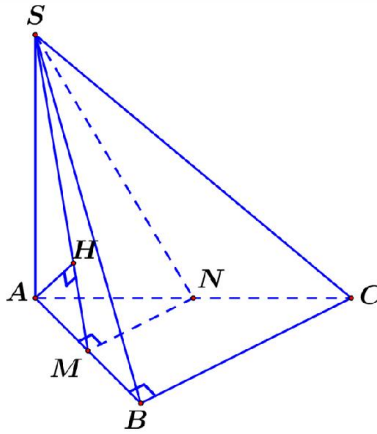
$$\Rightarrow AM = BM = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Xét } \triangle SAM \text{ vuông ở } A \text{ có } SM^2 = SA^2 + AM^2 = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{7}{4} \Rightarrow SM = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{Thế vào (1), ta có } BH = \frac{SA \cdot BM}{SM} = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Cách 2: (Nguyễn Văn Thịnh)

Nhận xét: Các dạng toán về khoảng cách nếu có thể thì nên sử dụng các quan hệ song song và tỉ lệ để đưa về tính khoảng cách từ chân đường cao của hình chóp.



Gọi N là trung điểm của AC .

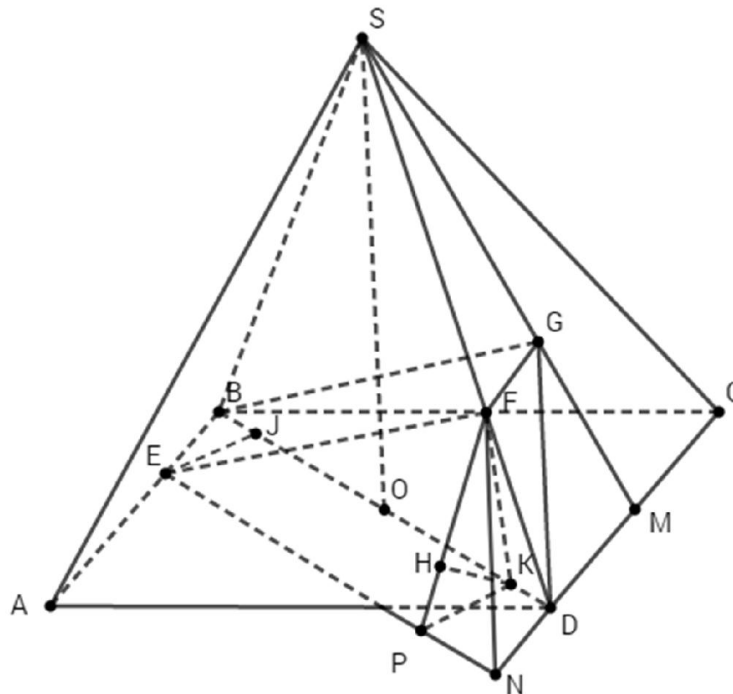
Ta có $BC \parallel (SMN) \Rightarrow d(BC, SM) = d(BC, (SMN)) = d(B, (SMN)) = d(A, (SMN))$.

Kẻ $AH \perp SM$, $H \in SM$, ta có $AH \perp (SMN) \Rightarrow d(A, (SMN)) = AH$.

Ta có $AB = AC \cdot \sin \hat{C} = 2 \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3} \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác SAM vuông tại A có AH là đường cao, suy ra $AH = \frac{SA \cdot AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Vậy $d(BC, SM) = \frac{\sqrt{21}}{7}$.



Câu 76.

Gọi M là trung điểm CD , O là trung điểm BD . Do $S.ABCD$ là khối chóp tứ giác đều nên $ABCD$ là hình vuông và $SO \perp (ABCD)$.

Do $V_{S.ABCD} = \frac{S_{ABCD} \cdot SO}{3} = \frac{a^2 \cdot SO}{3} = \frac{a^2 b}{3} \Rightarrow SO = b$.

Ta có

$$\left. \begin{array}{l} BE // CD \Rightarrow BE // (SCD) \\ (BEFG) \cap (SCD) = GF \end{array} \right\} \Rightarrow BE // GF \text{ mà } BE // CD \Rightarrow GF // CD.$$

Do G là trọng tâm ΔSCD nên $\frac{SG}{SM} = \frac{2}{3}$ mà $GF // CD$ nên $\frac{GF}{DM} = \frac{SF}{SD} = \frac{SG}{SM} = \frac{2}{3}$.

Trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho $DN = GF = \frac{2}{3}DM$. Từ đó ta có $DNFG$ và $BEND$ là hai hình bình hành và $(BDG) // (NEF)$.

Trên đoạn thẳng OD lấy điểm K sao cho $\frac{KD}{OD} = \frac{DF}{SD} = \frac{1}{3}$, từ đó ta có $FK // SO$ mà $SO \perp (ABCD)$ suy ra $FK \perp (ABCD)$.

Hạ $KP \perp EN$ và $KH \perp PF$, do $FK \perp (ABCD)$ nên $FK \perp KP$.

$$\text{Do } \left. \begin{array}{l} EN \perp KP \\ EN \perp FK \end{array} \right\} \Rightarrow EN \perp (FKP) \Rightarrow EN \perp KH \text{ mà } KH \perp PF \text{ suy ra } KH \perp (NEF).$$

$$\text{Khi đó: } d(DG, EF) = d(DG, (NEF)) = d((BDG), (NEF)) = d(K, (NEF)) = KH.$$

$$\text{Ta có: } BE = GF = \frac{2}{3}MD = \frac{2}{3} \cdot \frac{CD}{2} = \frac{CD}{3} = \frac{a}{3}$$

$$\text{Do } FK // SO \text{ nên } \frac{FK}{SO} = \frac{DF}{DS} = \frac{1}{3}, \text{ suy ra } FK = \frac{1}{3}SO = \frac{b}{3}.$$

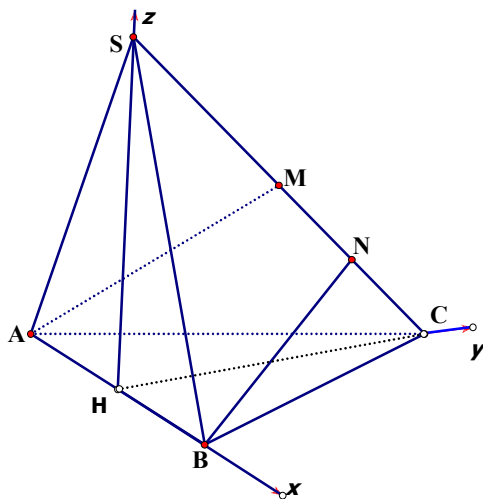
$$\text{Hạ } EJ \perp BD. \text{ Do } EN // BD, KP \perp EN, EJ \perp BD \Rightarrow KP = EJ = BE \cdot \sin 45^\circ = \frac{a}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{6}.$$

Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông FKP với đường cao KH ta có:

$$\frac{1}{KH^2} = \frac{1}{KF^2} + \frac{1}{KP^2} = \frac{1}{\left(\frac{b}{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{6}\right)^2} = \frac{9(2b^2 + a^2)}{a^2b^2} \Rightarrow KH = \frac{ab}{3\sqrt{2b^2 + a^2}}$$

$$\text{Vậy } d(DG, EF) = \frac{ab}{3\sqrt{2b^2 + a^2}}.$$

Câu 77. Cách 1:



Gọi H là trung điểm AB .

Vì $(SAB) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với $O \equiv H$, $HB \equiv Ox$, $HC \equiv Oy$, $HS \equiv Oz$.

Ta có: $HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} = 3a$; $SH = \frac{AH}{\tan ASH} = a$.

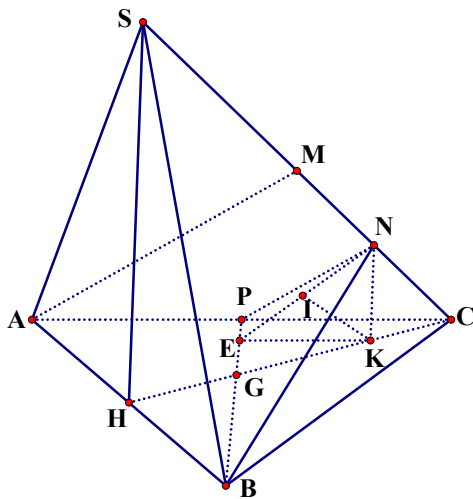
Khi đó: $H(0;0;0)$, $S(0;0;a)$, $A(-a\sqrt{3};0;0)$, $B(a\sqrt{3};0;0)$, $C(0;3a;0)$, $M\left(0;\frac{3a}{2};\frac{a}{2}\right)$, $N\left(0;\frac{9a}{4};\frac{a}{4}\right)$.

Suy ra: $\overrightarrow{AM} = \left(a\sqrt{3};\frac{3a}{2};\frac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{BN} = \left(-a\sqrt{3};\frac{9a}{4};\frac{a}{4}\right)$, $\overrightarrow{AB} = (2a\sqrt{3};0;0)$,

$[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}] = \left(-\frac{3a^2}{4}; -\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}; \frac{15\sqrt{3}a^2}{4}\right)$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, BN là $d(AM, BN) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}]|}{\|[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}]\|} = \frac{\frac{3\sqrt{3}a^3}{2}}{\frac{\sqrt{711}a^2}{4}} = \frac{2\sqrt{237}a}{79}$.

Cách 2:



Gọi P là trung điểm của AC , G là trọng tâm tam giác ABC .

Kẻ $NK \parallel SH$, $K \in HC$; $EK \parallel AC$, $E \in BP$.

Suy ra: $NP \parallel AM \Rightarrow AM \parallel (NPB) \Rightarrow d(AM, BN) = d(M, (NPB)) = d(C, (NPB))$.

Ta có: $NK \parallel SH$ nên $\frac{NK}{SH} = \frac{KC}{CH} = \frac{CN}{CS} = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} NK = \frac{1}{4}SH = \frac{a}{4} \\ \frac{GK}{GC} = \frac{5}{8} \end{cases}$.

$EK \parallel AC$ nên $\frac{EK}{PC} = \frac{GK}{GC} = \frac{5}{8} \Rightarrow EK = \frac{5}{8}PC = \frac{5\sqrt{3}a}{8}$.

$NE = \sqrt{NK^2 + EK^2} = \frac{a\sqrt{79}}{8}$; $BP = HC = 3a$.

Vì: $\begin{cases} KN \perp BP \\ KE \perp BP \end{cases} \Rightarrow BO \perp (NPB) \Rightarrow BP \perp EN$.

Diện tích tam giác NBP là: $S_{\triangle NBP} = \frac{1}{2}NE \cdot BP = \frac{3\sqrt{79}a}{16}$.

Thể tích tứ diện $N.CPB$ là: $V_{N.CPB} = \frac{1}{3}d(N, (ABC)) \cdot S_{\triangle CPB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot SH \cdot \frac{1}{2} \cdot BP \cdot PC = \frac{1}{24} \cdot a \cdot 3a \cdot a \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}a^3}{8}$.

Khoảng cách từ C đến (NBP) là: $d(C, (NBP)) = \frac{3V_{N.CPB}}{S_{\Delta NBP}} = \frac{2\sqrt{237}a}{79}$.

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, BN là $\frac{2a\sqrt{237}}{79}$.

Cách 3:

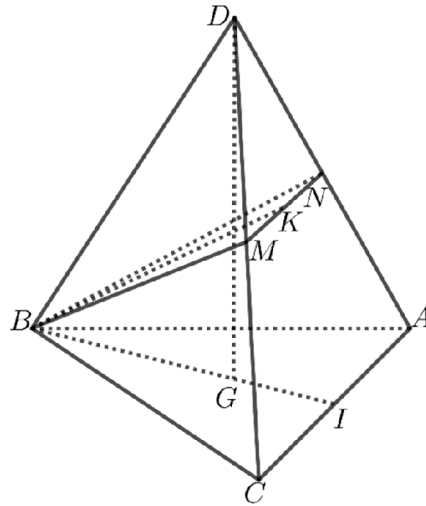
Kẻ $KI \perp NE$, $I \in NE$.

Khi đó: $NP // AM \Rightarrow AM // (NPB) \Rightarrow d(AM, BN) = d(M, (NPB)) = d(C, (NPB)) = \frac{8}{5}d(K, (NPB))$.

Ta có: $\begin{cases} KI \perp NE \\ KI \perp BP \end{cases} \Rightarrow KI \perp (NPB) \Rightarrow d(K, (NPB)) = KI$.

Suy ra: $NP // AM \Rightarrow AM // (NPB) \Rightarrow d(AM, BN) = \frac{8}{5}KI$.

Trong tam giác vuông NKE ta có: $\frac{1}{KI^2} = \frac{1}{KN^2} + \frac{1}{KE^2} = \frac{1264}{75a^2} \Rightarrow KI = \frac{5\sqrt{237}a}{316} \Rightarrow d(AM, BN) = \frac{2\sqrt{237}a}{79}$.



Câu 78.

Gọi I, G lần lượt là trung điểm của AC và trọng tâm của tam giác ABC .

Ta có $DG \perp (ABC)$ và $V_{ABCD} = \frac{1}{3}DG.S_{ABC} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$.

Gọi N là trung điểm của $AD \Rightarrow MN \parallel AC \Rightarrow AC \parallel (BMN)$.

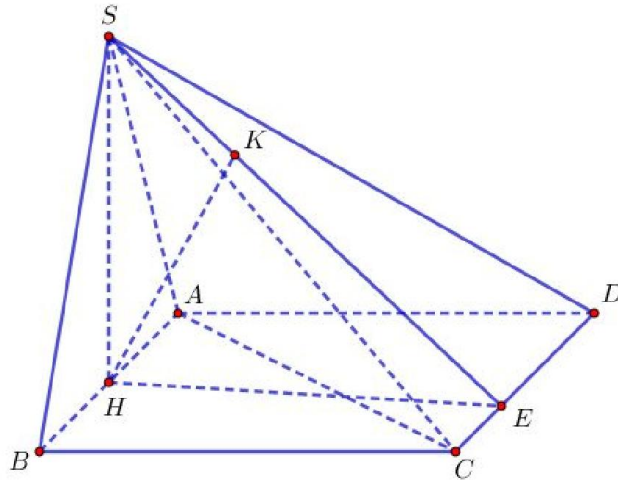
$\Rightarrow d(AC, BM) = d(AC, (BMN)) = d(A, (BMN)) = d(N, (BMN)) = h$.

Gọi K là trung điểm của MN , ta có $S_{BMN} = \frac{1}{2}.BK.MN = \frac{1}{2}\sqrt{BM^2 - MK^2}.MN = \frac{9\sqrt{11}}{16}$.

Ta có: $\frac{V_{DACB}}{V_{DNMB}} = \frac{DA}{DN} \cdot \frac{DC}{DM} \cdot \frac{DB}{DB} = 2.2.1 = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4}V_{DACB} = V_{DBMN} \Leftrightarrow \frac{9\sqrt{2}}{16} = \frac{1}{3}.h.S_{BMN}$.

$\Leftrightarrow \frac{9\sqrt{2}}{16} = \frac{1}{3}.h \cdot \frac{9\sqrt{11}}{16} \Leftrightarrow h = \frac{3\sqrt{22}}{11}$.

Câu 79. Chọn D



Gọi H là trung điểm của AB , vẽ $HE \perp CD$ tại E , $HK \perp SE$ tại K .

Ta có $\triangle SBC$ đều nên $BC = 11$, $\triangle SAC$ vuông cân tại S nên $AC = 11\sqrt{2}$.

Trong $\triangle SAB$, $AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2SA \cdot SB \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow AB = 11\sqrt{3}$.

$\triangle ABC$ có $AB^2 = AC^2 + BC^2$ nên $\triangle ABC$ vuông tại C , từ đó H là tâm đường tròn (ABC)

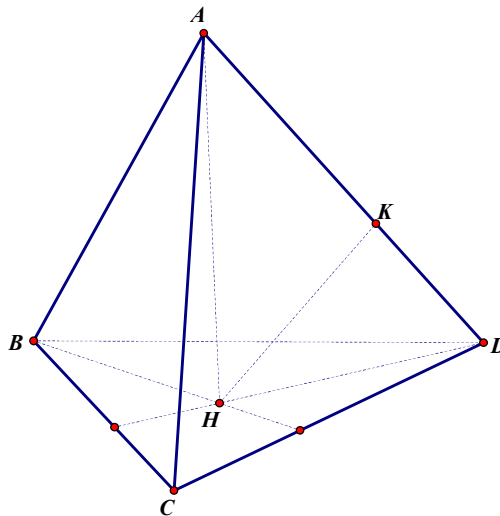
$\Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow CD \perp (SHE) \Rightarrow CD \perp HK \Rightarrow HK \perp (SCD)$.

Ta có $d(AB, SD) = (AB, (SCD)) = (H, (SCD)) = HK$.

Ta có $HE = d(A, CD) = \frac{AC \cdot AD}{\sqrt{AC^2 + AD^2}} = \frac{11\sqrt{2} \cdot 11}{\sqrt{2 \cdot 11^2 + 11^2}} = \frac{11\sqrt{6}}{3}$, $SH = \frac{SA}{2} = \frac{11}{2}$.

$$\Rightarrow HK = \frac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{\frac{11}{2} \cdot \frac{11\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{\frac{121}{4} + \frac{121 \cdot 2}{3}}} = \sqrt{22}.$$

Vậy $d(AB, SD) = \sqrt{22}$.



Câu 80.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (BCD) . Khi đó ta có H là trực tâm của tam giác BCD .

Với mọi đường thẳng Δ nằm trong (BCD) thì $d(A; \Delta) \geq AH$. Do đó đường thẳng Δ thỏa mãn phải đi qua điểm H .

Kẻ $HK \perp AD$ ($K \in AD$) khi đó H, K là hai điểm cố định lần lượt nằm trên Δ & AD .

Hiển nhiên, khoảng cách giữa Δ & AD là độ dài đoạn vuông góc chung của chúng nên $d(\Delta; AD) \leq HK$. Dấu bằng xảy ra khi $HK \perp \Delta$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{14}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a}{\sqrt{14}}.$$

$$\text{Ta có: } \cos \widehat{HAK} = \frac{AH}{AD} = \frac{1}{\sqrt{14}} \Rightarrow \sin \widehat{HAK} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{14}} \Rightarrow HK = HA \cdot \sin \widehat{HAK} = \frac{a\sqrt{13}}{14}.$$

$$\Rightarrow \frac{3a}{14} < d < \frac{4a}{7}.$$

Câu 81. Chọn D

Do $SB = SC = 11$ và $\widehat{SBC} = 60^\circ$ nên ΔSBC đều, do đó $BC = 11$.

Ta lại có, $SA = SC = 11$ và $\widehat{SCA} = 45^\circ$ nên ΔSAC vuông cân tại S , hay $AC = 11\sqrt{2}$.

Mặt khác, $SA = SB = 11$ và $\widehat{SAB} = 30^\circ$ nên $AB = 11\sqrt{3}$.

Từ đó, ta có $AB^2 = BC^2 + AC^2$ suy ra ΔABC vuông tại C .

Gọi H là trung điểm của AB . Khi đó, H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC . Vì $SA = SB = SC$ nên $SH \perp (ABC)$.

Gọi M là điểm trên CD sao cho $HM \perp AB$, suy ra

$HM \perp CD$. Gọi N là chân đường vuông góc hạ từ C xuống AB . Khi đó, $HM \parallel CN$ và $HM = CN$. Do ΔABC vuông tại C nên theo công thức tính diện tích ta có:

$$HM = CN = \frac{CA \cdot CB}{\sqrt{CA^2 + CB^2}} = \frac{11\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Ta lại có, } CH = \frac{1}{2}AB = \frac{11\sqrt{3}}{2} \text{ nên } SH = \sqrt{SC^2 - CH^2} = \frac{11}{2}.$$

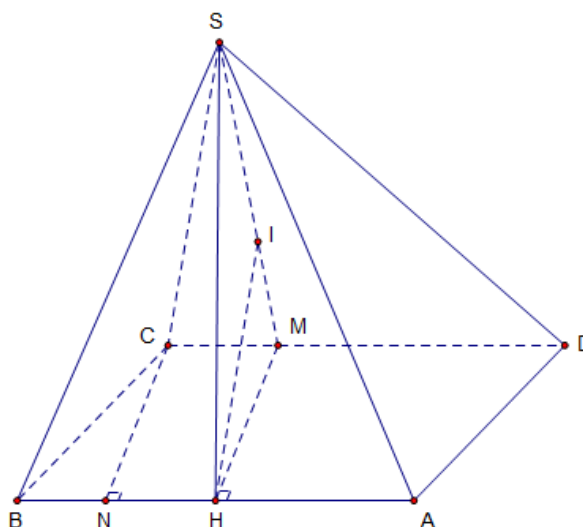
Trong tam giác vuông SHM , dựng đường cao HI ($I \in SM$), suy ra $HI \perp (SCD)$. Khi đó,

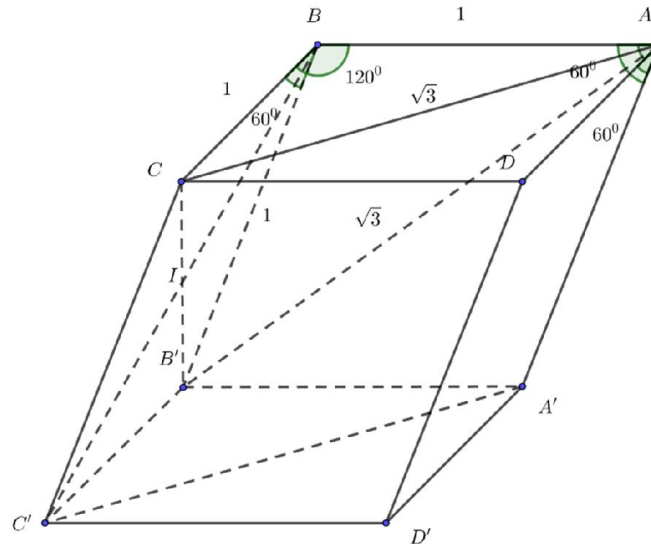
$$d(AB, SD) = d(AB, (SCD)) = d(H, (SCD)) = HI = \frac{SH \cdot HM}{\sqrt{SH^2 + HM^2}} = \sqrt{22}.$$

Vậy $d(AB, SD) = \sqrt{22}$.

Câu 82.

A. Phân tích bài toán:



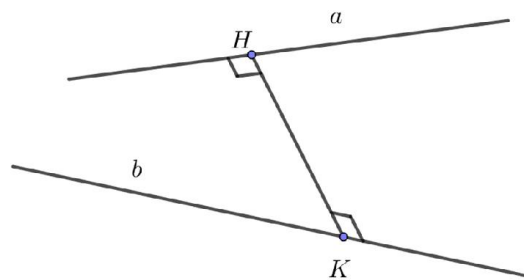


1. Vẽ hình hộp, yếu tố vẽ hình quan trọng, giúp bạn tư duy “nét” nhất cho bài toán. Các cạnh của hình hộp bằng 1 và góc phẳng tại đỉnh A bằng 60° cho ta thêm dữ kiện hình hộp xiên có đáy là hình thoi.

2. Kiến thức khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b .

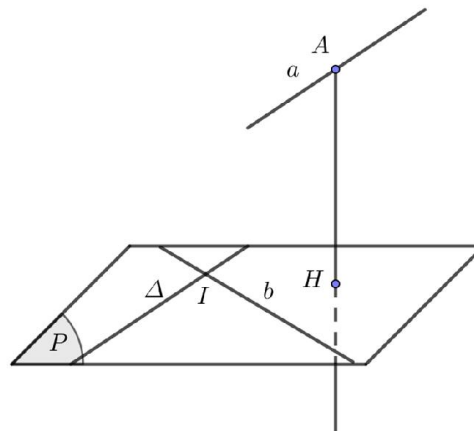
Cách 1: Là độ dài đoạn vuông góc chung giữa a và b .

$HK \perp a$; $HK \perp b \Rightarrow d(a, b) = HK \perp a$.



Cách 2: Là khoảng cách từ đường thẳng này đến mặt phẳng song song với nó chứa đường thẳng còn lại.

$\Delta // a$, $\Delta \cap b = I$, $(P) \supset \{b, \Delta\} \Rightarrow d(a, b) = d(a, (P)) = d(A, (P)) = AH$.



Cách 3: Là khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đã cho.

$d(a, b) = d((P), (Q)) = d(A, (Q)) = AH$.

Định lý hàm số cosin:

Cho ΔABC có $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ với các góc của tam giác là A, B, C ta có:

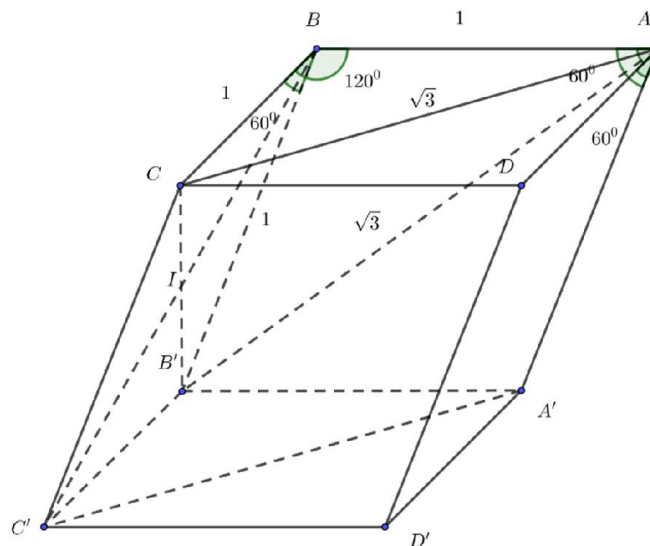
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Các công thức tính diện tích tam giác:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R} = \frac{1}{2} h_a \cdot a \quad (h_a \text{ chiều cao của tam giác hạ từ đỉnh } A; R \text{ là bán kính đường tròn ngoại tiếp } \Delta ABC)$$

), từ đó tính ra chiều cao của tứ diện.

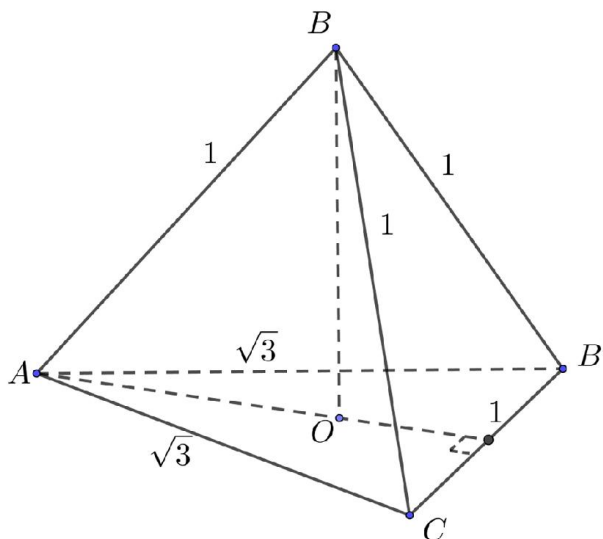
Sau khi phân tích bài toán, học sinh sẽ tự trình bày lời giải như sau:



Có $AC \parallel A'C' \Rightarrow A'C' \parallel (AB'C)$

$$\Rightarrow d(A'C'; AB') = d(A'C'; (ACB')) = d(C'; (ACB')) = d(B; (ACB'))$$

Xét tứ diện $B.ACB'$ có



+) $BA = BC = BB' = 1$ nên điểm B nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp $\Delta ACB'$. Suy ra $BO \perp (ACB')$ tại tâm O của đường tròn ngoại tiếp $\Delta ACB'$.

+) $\widehat{CBB'} = 60^\circ$, $\widehat{B'BA} = \widehat{ABC} = 120^\circ$ nên áp dụng định lý hàm số cosin trong tam giác $\Delta B'BA$ và ΔABC ta có $AB' = AC = \sqrt{3}$.

$$d(B; (ACB')) = BO = BA^2 - R^2 \text{ với } R \text{ là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác } \Delta ACB'.$$

$$S_{\triangle ACB'} = \frac{AB' \cdot CB' \cdot AC}{4R} = \frac{AH \cdot B'C}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{4R} = \frac{\sqrt{3-\frac{1}{4}}}{2} \Leftrightarrow R = \frac{3}{\sqrt{11}} \Rightarrow BO = \sqrt{1-\frac{9}{11}} = \sqrt{\frac{2}{11}}$$

$$\Rightarrow BO = \frac{\sqrt{22}}{11}.$$

$$\Rightarrow d(A'C'; AB') = OB.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và $A'C'$ là $\frac{\sqrt{22}}{11}$.

Đáp án cần chọn là **A**.

Nhận xét

Bài toán này đã giúp người học ôn lại

+) Kiến thức về khoảng cách trong không gian.

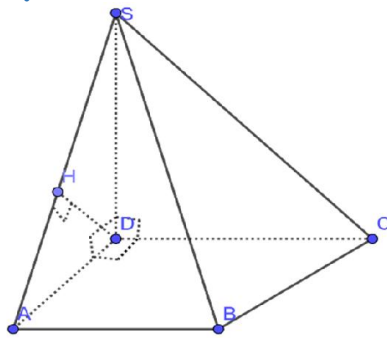
+) Hệ thức lượng trong tam giác và giải tam giác.

Và quan trọng biết chuyển từ bài toán hình hộp xiên sang hình tứ diện, biết độ dài các cạnh.

Khai thác bài toán

Vẫn với hình vẽ và một phần lời giải của bài toán ban đầu, một số bài toán tương tự với các hướng dẫn kèm theo cho học sinh ôn luyện.

Dạng 2.3 Khoảng cách của đường với mặt



Câu 83.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SD \end{cases}$ nên $AB \perp (SAD)$.

Kẻ $DH \perp SA$ tại H . Do $DH \subset (SAD)$ nên $AB \perp DH$.

Ta có: $\begin{cases} DH \perp SA \\ DH \perp AB \end{cases} \Rightarrow DH \perp (SAB)$.

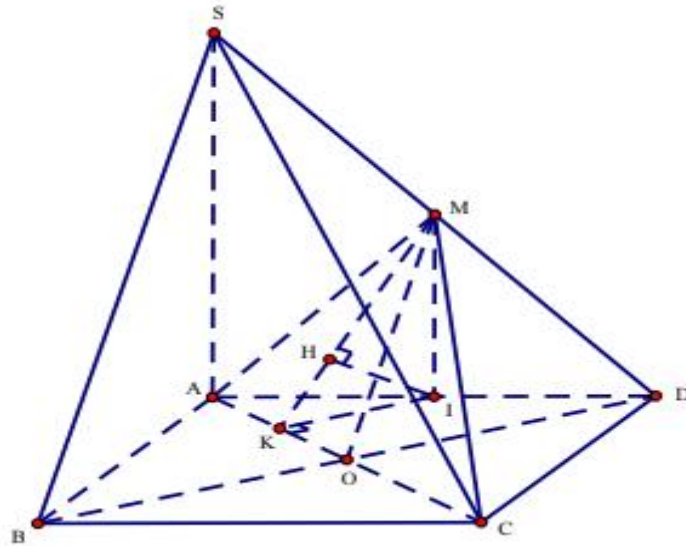
Do $DC \parallel AB$ nên $DC \parallel (SAB)$.

Vậy khoảng cách giữa đường thẳng CD và mặt phẳng (SAB) là DH .

Xét $\triangle SAD$ vuông tại D có: $\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(2a)^2} = \frac{3}{4a^2}$.

$\Rightarrow DH = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. Khoảng cách giữa đường thẳng CD và mặt phẳng (SAB) là $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Câu 84. Chọn C



Gọi O là tâm hình vuông. Ta có: $MO \parallel SB \Rightarrow SB \parallel (ACM)$
 $\Rightarrow d(SB, (ACM)) = d(B, (ACM)) = d(D, (ACM))$ (vì O là trung điểm BD)

Gọi I là trung điểm $AD \Rightarrow \begin{cases} MI \parallel SA \Rightarrow MI \perp (ABCD) \\ d(D, (ACM)) = 2d(I, (ACM)) \end{cases}$

Trong $(ABCD)$ kẻ $IK \perp AC$ tại K

Trong (MIK) kẻ $IH \perp MK$ tại H (1)

Ta có: $AC \perp MI, AC \perp IK \Rightarrow AC \perp (MIK) \Rightarrow AC \perp IH$ (2)

Từ (1) & (2) $\Rightarrow IH \perp (ACM) \Rightarrow d(I, (ACM)) = IH$

Trong tam giác MIK ta có: $IH = \frac{IM \cdot IK}{\sqrt{IM^2 + IK^2}}$

$$\text{Biết } MI = \frac{SA}{2} = a, IK = \frac{OD}{2} = \frac{BD}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow IH = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{8}}} = \frac{a}{3}$$

$$\text{Vậy: } d(SB, (ACM)) = \frac{2a}{3}$$