

CHỦ ĐỀ 19: BÀI TOÁN CỰC TRỊ TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

II. CÁC DẠNG TOÁN TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: Tìm điểm M thuộc (P) sao cho $\vec{u} = a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC}$ có $|\vec{u}|$ đạt min.

Phương pháp giải:

$$+ \text{Tìm điểm I thỏa mãn hệ thức } a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0} \text{ tọa độ điểm I là: } \begin{cases} x_1 = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a + b + c} \\ y_1 = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a + b + c} \\ z_1 = \frac{az_A + bz_B + cz_C}{a + b + c} \end{cases}$$

$$\text{Phân tích } \vec{u} = a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC} = (a + b + c)\vec{MI} + (a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC}) = (a + b + c)\vec{MI}$$

$$\text{Khi đó } |\vec{u}| = |a + b + c|MI \Rightarrow |\vec{u}|_{\min} \Leftrightarrow M \text{ là hình chiếu vuông góc của I lên (P).}$$

$$\text{Viết phương trình đường thẳng IM đi qua I và vuông góc với (P)} \Rightarrow \vec{u}_{IM} = \vec{n}_{(P)}$$

$$\text{Khi đó } M = (P) \cap (IM).$$

Ví dụ 1: Cho các điểm $A(2;1;-1)$; $B(0;3;1)$ và $(P): x + y - z + 3 = 0$. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho

a) $|\vec{MA} + \vec{MB}|_{\min}$.

b) $|2\vec{MA} - \vec{MB}|_{\min}$.

Lời giải

a) Gọi $I(1;2;0)$ là trung điểm của AB thì $|\vec{IA} + \vec{IB}| = \vec{0}$

Ta có: $|\vec{MA} + \vec{MB}| = |2\vec{MI}|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu của điểm I trên (P)

Phương trình đường thẳng MI là:
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -t \end{cases} \Rightarrow M(1+t; 2+t; -t)$$

Cho $M \in (P) \Rightarrow 1 + t + 2 + t - t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow M(-1; 0; 2)$.

b) Gọi I là điểm thỏa mãn $2\vec{IA} - \vec{IB} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2x_A - x_B}{2 - 1} = 4 \\ y_1 = \frac{2y_A - y_B}{2 - 1} = -1 \\ z_1 = \frac{2z_A - z_B}{2 - 1} = -3 \end{cases}$

Ta có: $\left| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \right| = \left| 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IA} - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \right| = \left| \overrightarrow{MI} \right| = MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của điểm I trên

(P). Phương trình đường thẳng MI là:
$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -1 + t \\ z = -3 - t \end{cases} \Rightarrow M(4 + t; -1 + t; -3 - t)$$

Cho $M \in (P) \Rightarrow 4 + t - 1 + t + 3 + t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -3 \Rightarrow M(1; -4; 0)$.

Ví dụ 2: Cho các điểm $A(1; 0; -1)$; $B(2; -2; 1)$ $C(0; -1; 0)$ và $(P): x - 2y + 2z + 6 = 0$. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho

a) $\left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right|_{\min}$.

b) $\left| 2\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} \right|_{\min}$.

Lời giải

a) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC $\Rightarrow \begin{cases} G(0; 1; -2) \\ \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \end{cases}$

Ta có: $\left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right| = \left| 3\overrightarrow{MG} \right| = 3MG \Leftrightarrow M$ là hình chiếu của G trên mặt phẳng (P).

Phương trình đường thẳng MG khi đó là:
$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 - 2t \\ z = -2 + 2t \end{cases} \Rightarrow M(t; -1 - 2t; -2 + 2t)$$

Cho $M \in (P) \Rightarrow t + 4t - 2 + 4t - 4 + 6 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow M(0; 1; -2)$.

b) Gọi I là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} - 4\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2x_A - 4x_B + 3x_C}{2 - 4 + 3} = -6 \\ y_1 = \frac{2y_A - 4y_B + 3y_C}{2 - 4 + 3} = 5 \\ z_1 = \frac{2z_A - 4z_B + 3z_C}{2 - 4 + 3} = -6 \end{cases}$

Phương trình đường thẳng MI khi đó là:
$$\begin{cases} x = -6 + t \\ y = 5 - 2t \\ z = -6 + 2t \end{cases} \Rightarrow M(-6 + t; 5 - 2t; -6 + 2t)$$

Cho $M \in (P) \Rightarrow -6 + t + 4t - 10 + 4t - 12 + 6 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{22}{9} \Rightarrow M\left(\frac{-32}{9}; \frac{89}{9}; -\frac{10}{9}\right)$.

Ví dụ 3: Cho các điểm $A(4; 1; -1)$; $B(2; 3; -2)$ $C(6; 3; -12)$ và $(P): x + 2y - z + 1 = 0$. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho $\left| 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right|_{\min}$. Độ dài đoạn thẳng OM là:

- A. $OM = \sqrt{5}$. B. $OM = \sqrt{3}$. C. $OM = 3$. D. $OM = 9$.

Lời giải

$$\text{Gọi } I \text{ là điểm thỏa mãn } 2\vec{IA} + 3\vec{IB} - \vec{IC} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2x_A + 3x_B - x_C}{2+3-1} = 2 \\ y_1 = \frac{2y_A + 3y_B - y_C}{2+3-1} = 2 \\ z_1 = \frac{2z_A + 3z_B - z_C}{2+3-1} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình đường thẳng MI khi đó là: } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \Rightarrow M(2+t; 2+2t; 1-t)$$

$$\text{Cho } M \in (P) \Rightarrow 2+t+4t+4+t-1+1=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow M(1;0;2) \Rightarrow OM = \sqrt{5}. \text{ Chọn A.}$$

Ví dụ 4: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho tam giác ABC có $A(-1;2;3); B(3;0;-1)C(1;4;7)$ và $(P): x-2y+2z+6=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất. Giá trị biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$ là.

A. $T = 10$. B. $T = 17$. C. $T = 21$. D. $T = 26$.

Lời giải:

Gọi $G(1;2;3)$ là trọng tâm tam giác ABC thì $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } MA^2 + MB^2 + MC^2 &= \vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 + \vec{MC}^2 = (\vec{MG} + \vec{GA})^2 + (\vec{MG} + \vec{GB})^2 + (\vec{MG} + \vec{GC})^2 \\ &= 3MG^2 + 2\vec{MG}(\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) + GA^2 + GB^2 + GC^2 \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \text{ nhỏ nhất khi M là hình chiếu của G trên mặt phẳng (P)} \end{aligned}$$

$$\text{Phương trình MG: } \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{2} \text{ suy ra } M = MG \cap (P) \Rightarrow M(0;4;1)$$

$$\text{Do đó } T = a^2 + b^2 + c^2 = 17. \text{ Chọn B.}$$

Ví dụ 5: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng cho 3 điểm $A(0;-3;1); B(2;7;1)$ và $C(1;0;3)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x+y-z-3=0$. Gọi $M(a;b;c)$ trên (P) sao cho $|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}|$ nhỏ nhất. Tính giá trị của $T = a + 2b - 3c$.

A. $T = 0$. B. $T = 4$. C. $T = 3$. D. $T = -1$.

Lời giải:

$$\text{Gọi } I \text{ là điểm thỏa mãn } \left| \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} \right| = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{x_A + x_B + 2x_C}{1+1+2} = 1 \\ y_1 = \frac{y_A + y_B + 2y_C}{1+1+2} = 2 \Leftrightarrow I(1;1;2) \\ z_1 = \frac{z_A + z_B + 2z_C}{1+1+2} = 2 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IC} = 4\overrightarrow{MI}$$

Khi đó $\left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu của điểm I trên mặt phẳng (P) .

$$\text{Ta có: } IM : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1} \Rightarrow M = MI \cap (P) \Rightarrow M(2;1;0) \quad T = 4. \quad \text{Chọn B.}$$

Dạng 2: Tìm điểm M thuộc (P) sao cho $T = aMA^2 + bMB^2 + cMC^2$ đạt max hoặc min.

Phương pháp giải:

+) Tìm điểm I thỏa mãn hệ thức $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$+) \text{ Phân tích } T = a\overrightarrow{MA}^2 + b\overrightarrow{MB}^2 + c\overrightarrow{MC}^2 = a(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + b(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + c(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2$$

$$\Rightarrow (a+b+c)MI^2 + 2\overrightarrow{MI}(a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC}) + aIA^2 + bIB^2 + cIC^2$$

$$= (a+b+c)MI^2 + aIA^2 + bIB^2 + cIC^2.$$

+) Nếu $a+b+c > 0$ thì T đạt min; $a+b+c < 0$ thì T đạt max.

Khi đó $T_{\max}; T_{\min} \Leftrightarrow MI_{\min} \rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I lên (P) .

Ví dụ 1: Cho các điểm $A(-3;5;-5); B(5;-3;7)C(1;0;3)$ và $(P): x+y+z=0$. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho

a) $T = MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) $T = MA^2 - 2MB^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải:

a) Gọi I là trung điểm của AB thì $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Ta có: $T = MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + IA^2 + IB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I

$$\text{lên } (P). \text{ Khi đó phương trình IM là: } \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 1+t \end{cases} \Rightarrow M(1+t;1+t;1+t)$$

$$\text{Cho } M \in (P) \Rightarrow 3(1+t) = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow M(0;0;0).$$

$$\text{b) Gọi } I \text{ là điểm thỏa mãn } \overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{x_A - 2x_B}{1-2} = 13 \\ y_1 = \frac{y_A - 2y_B}{1-2} = -11 \\ z_1 = \frac{z_A - 2z_B}{1-2} = 19 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } T &= MA^2 - 2MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 - 2\overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= -MI^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB}) + IA^2 - 2IB^2 = -MI^2 + IA^2 - 2IB^2. \end{aligned}$$

Do $IA^2 - 2IB^2$ không đổi nên $T_{\max} \Leftrightarrow -MI^2$ lớn nhất khi đó $MI_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I

$$\text{lên (P). Khi đó phương trình IM là: } \begin{cases} x = 13 + t \\ y = -11 + t \\ z = 19 + t \end{cases} \Rightarrow M(13 + t; -11 + t; 19 + t).$$

$$\text{Cho } M \in (P) \Rightarrow 21 + 3t = 0 \Leftrightarrow t = -7 \Rightarrow M(6; -18; 12).$$

Ví dụ 2: Cho các điểm $A(1; 4; 5)$; $B(0; 3; 1)$ $C(2; -1; 0)$ và $(P): 3x - 3y - 2z - 15 = 0$. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho

a) $T = MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) $T = MA^2 + MB^2 - 4MC^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải:

$$\text{a) Gọi } G \text{ là trọng tâm của tam giác ABC } \Rightarrow \begin{cases} G(1; 2; 2) \\ \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } T &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + GA^2 + GB^2 + GC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \end{aligned}$$

Do đó $T_{\min} \Leftrightarrow M_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của G lên (P).

$$\text{Khi đó phương trình MG là: } \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 3t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \Rightarrow M(1 + 3t; 2 - 3t; 2 - t).$$

$$\text{Giải } M \in (P) \Rightarrow 9t + 3 + 9t - 6 + 4t - 4 - 15 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(4; -1; 0).$$

$$\text{b) Gọi } I \text{ là điểm thỏa mãn } \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - 4\overrightarrow{IC} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{x_A + 2x_B - 4x_C}{1+2-4} = 7 \\ y_1 = \frac{y_A + 2y_B - 4y_C}{1+2-4} = -14 \\ z_1 = \frac{z_A + 2z_B - 4z_C}{1+2-4} = -7 \end{cases}$$

Biến đổi $T = -MI^2 + IA^2 + 2IB^2 - 4IC^2$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow MI_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I

lên (P). Khi đó phương trình MI là:
$$\begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = -14 - 3t \Rightarrow M(7 + 3t; -14 - 3t; -7 - 2t) \\ z = -7 - 2t \end{cases}$$

Giải $M \in (P) \Rightarrow 9t + 21 + 9t + 42 + 4t + 14 - 15 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-31}{11} \Rightarrow M\left(-\frac{16}{11}; -\frac{61}{11}; -\frac{15}{11}\right)$.

Ví dụ 3: Cho các điểm $A(1;1;-1)$; $B(2;0;1)$ $C(1;-1;-1)$ và (P): $x + 3y + z + 2 = 0$. Biết điểm M thuộc (P) sao cho $T = MA^2 + 2MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính độ dài OM.

A. $OM = \sqrt{6}$. B. $OM = \sqrt{3}$. C. $OM = \sqrt{2}$. D. $OM = 2$.

Lời giải:

Gọi điểm I là điểm thỏa mãn $\vec{IA} + 2\vec{IB} - \vec{IC} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{x_A + 2x_B - x_C}{1 + 2 - 1} = 1 \\ y_1 = \frac{y_A + 2y_B - y_C}{1 + 2 - 1} = 1 \\ z_1 = \frac{z_A + 2z_B - z_C}{1 + 2 - 1} = 1 \end{cases}$

Biến đổi $T = 2MI^2 + IA^2 - 2IB^2 + IC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I

lên (P). Khi đó phương trình MI là:
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \Rightarrow M(2 + t; 1 + t; 1 + t) \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Giải $M \in (P) \Rightarrow 3t + 4 + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow M(0; -1; -1) \Rightarrow OM = \sqrt{2}$. **Chọn C.**

Ví dụ 4: Cho các điểm $A(0;4;-2)$; $B(1;2;-1)$ và (P): $x + y + z + 1 = 0$. Biết điểm M thuộc (P) sao cho biểu thức $MA^2 - 2MB^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính OM.

A. $OM = \sqrt{6}$. B. $OM = \sqrt{3}$. C. $OM = \sqrt{2}$. D. $OM = 2$.

Lời giải:

Gọi I là điểm thỏa mãn $\vec{IA} - 2\vec{IB} = \vec{0} \Rightarrow I(2;0;0)$.

Biến đổi $MA^2 - 2MB^2 = -MI^2 + IA^2 - 2IB^2$ đạt giá trị lớn nhất khi M là hình chiếu vuông góc của I lên

(P). Khi đó phương trình MI là:
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -t \Rightarrow M(2 + t; -t; t) \\ z = t \end{cases}$$

Cho $M \in (P) \Rightarrow 2 + t + t + t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow M(1;1;-1) \Rightarrow OM = \sqrt{3}$. **Chọn B.**

Ví dụ 5: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$; $B(2;-1;3)$. Điểm M trên mặt phẳng (O_{xyz}) sao

cho $MA^2 - 2MB^2$ lớn nhất. Khi đó $T = x_M + y_M$ có giá trị là

A. $T = 1$.

B. $T = 0$.

C. $T = -1$.

D. $T = 2$.

Lời giải:

Gọi M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow I(3; -4; 5)$.

Khi đó $MA^2 - 2MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = -MI^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB}) + IA^2 - 2IB^2$

$= -MI^2 + IA^2 - 2IB^2$ lớn nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên mặt phẳng (O_{xy})

Suy ra $M(3; -4; 0) \Rightarrow T = -1$. **Chọn C.**

Ví dụ 6: Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(4; 1; 5)$; $B(3; 0; 1)$; $C(-1; 2; 0)$ và mặt phẳng

$(P): 3x - 3y + 2z + 37 = 0$. Điểm M(a;b;c) thuộc (P) sao cho $S = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$ nhỏ nhất.

Tính a+b+c.

A. a+b+c=13.

B. a+b+c=9.

C. a+b+c=11.

D. a+b+c=1.

Lời giải:

Gọi $D\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}; 3\right)$; $E\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$; $F\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$ lần lượt là trung điểm của AB, BC và AC.

Ta có: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA})(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA})(\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{DA}) = MD^2 - AD^2 = MD^2 - \frac{AB^2}{4}$

Suy ra $S = MD^2 + ME^2 + MF^2 - \frac{AB^2 + BC^2 + AC^2}{4}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MD^2 + ME^2 + MF^2$ nhỏ nhất.

Gọi $G(2; 1; 2)$ là trọng tâm tam giác DEF $\Rightarrow MD^2 + ME^2 + MF^2 = 3MG^2 + GD^2 + GE^2 + GF^2$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow MG_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu của G trên (P) $\Rightarrow MG: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

Suy ra $M = MG \cap (P) \Rightarrow M(-4; 7; -2) \Rightarrow a + b + c = 1$. **Chọn D.**

Dạng 3: Tìm điểm M thuộc (P) sao cho $(MA + MB)_{\min}$ hoặc $|MA - MB|_{\max}$

Phương pháp giải:

+) Kiểm tra vị trí tương đối của các điểm A và B so với mặt phẳng (P).

+) Nếu A và B cùng phía (P) thì bài toán $(MA + MB)_{\min}$ phải lấy đối xứng A qua (P) khi đó

$MA + MB = MA' + MB \geq A'B$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow A', M, B$ thẳng hàng hay $M = A'B \cap (P)$.

Bài toán tìm $|MA - MB|_{\max}$, ta có $|MA - MB| \leq AB \Rightarrow M$ là giao điểm trực tiếp của đường thẳng AB và (P).

+) Nếu A và B khác phía (P) thì bài toán $|MA - MB|_{\max}$ phải lấy đối xứng A qua (P) bài toán tìm $(MA + MB)_{\min} \Rightarrow M$ là giao điểm trực tiếp của đường thẳng AB và (P).

Ví dụ 1: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $A(-1; 3; -2); B(-3; 7; -18)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 1 = 0$. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất.

Lời giải:

Đặt $f = 2x - y + z + 1 = 0$ ta có: $f(A) \cdot f(B) > 0 \Rightarrow A, B$ cùng phía với mặt phẳng (P).

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua $(P): 2x - y + z + 1 = 0 \Rightarrow AA': \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{1}$

Gọi $I(-1+2t; 3-t; -2+t) = AA' \cap (P)$ suy ra $2(-1+2t) - (3-t) - 2+t + 1 = 0$

$\Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow I(1; 2; -1) \Rightarrow A(3; 1; 0)$.

Khi đó $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow A', M, B$ thẳng hàng.

Phương trình đường thẳng $A'B: \begin{cases} x = 3 + u \\ y = 1 - u \\ z = 3u \end{cases} \Rightarrow M = A'B \cap (P) \Rightarrow M(3+u; 1-u; 3u)$

Giải $M \in (P) \Rightarrow u = -1 \Rightarrow M(2; 2; -3)$.

Ví dụ 2: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x - y + 2z - 2 = 0$ và 2 điểm $A(2; 3; 0); B(2; -1; 2)$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $|MA - MB|$ lớn nhất.

Lời giải:

Kí hiệu $f = x - y + 2z - 2 = 0$. Ta có $f(A) \cdot f(B) < 0$ nên A, B nằm khác phía so với mặt phẳng (P).

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (P). Ta có: $AA': \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{2}$

Khi đó $I = AA' \cap (P) \Rightarrow (2+t; 3-t; 2t) \Rightarrow t+2+t-3+4t-2=0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow I\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; 1\right) \Rightarrow A'(3; 2; 2)$

Lại có $|MA - MB| = |MA' - MB| \leq A'B$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow A', M, B$ thẳng hàng.

Khi đó $A'B: \begin{cases} x = 3 + u \\ y = 2 + 3u \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow M = A'B \cap (P) \Rightarrow M\left(\frac{9}{2}; \frac{13}{2}; 2\right)$.

Ví dụ 3: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(3; 1; 0); B(-9; 4; 9)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $(P): 2x - y + z + 1 = 0$. Gọi $I(a; b; c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho $|IA - IB|$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó tổng $a + b + c$ bằng

A. $a+b+c=22$.

B. $a+b+c=-4$.

C. $a+b+c=-13$.

D. $a+b+c=13$.

Lời giải:

$$\text{Đặt } f(x; y; z) = 2x - y + z + 1 \Rightarrow \begin{cases} f(x_A; y_A; z_A) = 6 \\ f(x_B; y_B; z_B) = -12 \end{cases} \Rightarrow f(A) \cdot f(B) = -72 < 0.$$

Do đó hai điểm A, B nằm khác phía so với mặt phẳng (P) .

$$\text{Gọi } B' \text{ là điểm đối xứng của } B \text{ qua mặt phẳng } (P) \Rightarrow (BB') : \frac{x+9}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-9}{1}.$$

$$\text{Điểm } H \in (BB') \Rightarrow H(2t-9; 4-t; t+9) \in (P) \rightarrow 2(2t-9) - (4-t) + t+9+1 = 0 \Rightarrow t=2$$

$$\text{Ta có } |IA - IB| = |IA - IB'| \leq A'B \Rightarrow |IA - IB|_{\max} = AB' \Rightarrow I \text{ là giao điểm của } AB' \text{ và mặt phẳng } (P).$$

$$\text{Lại có } \overrightarrow{AB'} = (-4; -1; 13) \Rightarrow \overrightarrow{u_{(AB')}} = (4; 1; -13) \Rightarrow (AB') : \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-13}.$$

$$\text{Điểm } I \in (AB') \Rightarrow I(4t+3; t+1; -13t) \in (P) \rightarrow I(7; 2; -13) \Rightarrow a+b+c = -4. \text{ Chọn B}$$

Ví dụ 4: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (P) có phương trình $(P): x - y + 2z + 2 = 0$ và 2 điểm $A(0; 1; -2); B(2; 0; -3)$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất. Tính giá trị của $T = a+b+c$.

A. $T = -5$.

B. $T = -\frac{1}{5}$.

C. $T = -1$.

D. $T = \frac{1}{5}$.

Lời giải:

$$\text{Kí hiệu } f = x - y + 2z + 2 \text{ ta có } f(A) \cdot f(B) > 0 \Rightarrow \text{nên } A, B \text{ nằm cùng phía với } (P).$$

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (P) .

Khi đó $MA + MB = MA' + MB' \geq A'B$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow A', M, B$ thẳng hàng.

$$\text{Phương trình } AA' : \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2}. \text{ Gọi } H = AA' \cap (P), H(t; 1-t; -2+2t)$$

$$\text{Cho } H \in (P) \Rightarrow t+t-1+4t-4+2=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2} \Rightarrow H\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -1\right) \Rightarrow A'(1; 0; 0).$$

$$\text{Khi đó } A'B : \begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=-3t \end{cases} \Rightarrow M = A'B \cap (P) \Rightarrow M\left(\frac{8}{5}; 0; -\frac{9}{5}\right) \Rightarrow a+b+c = -\frac{1}{5}. \text{ Chọn B.}$$

Dạng 4: Bài toán lập phương trình mặt phẳng, đường thẳng có yếu tố cực trị

Phương pháp đại số:

- Gọi véc tơ pháp tuyến hoặc véc tơ chỉ phương của mặt phẳng (hoặc đường thẳng) cần lập là $(a; b; c), (a^2 + b^2 + c^2) > 0$

- Thiết lập một phương trình quy ẩn (a theo b,c hoặc ngược lại) từ một dữ kiện về mặt phẳng chứa đường, song song hoặc vuông góc. Giả sử phương trình thu gọn ẩn là $a = f(b;c)$.
- Thiết lập phương trình khoảng cách mà đề bài yêu cầu, thay $a = f(b;c)$ vào ta được một phương trình hai ẩn b;c.
- Xét hàm khoảng cách $d = g(b;c)$
 + Nếu $c = 0$ thì $b \neq 0 \rightarrow d = d_1$ lưu lại giá trị khoảng cách d_1 này.

+ Nếu $c \neq 0 \Rightarrow d = g\left(\frac{b}{c}\right) = g(t); t = \frac{b}{c}$

Khảo sát hàm $g(t)$ ta thu được kết quả.

Chú ý:

- Công thức khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng $d(A;(P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
- Công thức khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng $d(A;\Delta) = \frac{|\overrightarrow{u_\Delta} \cdot \overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{u_\Delta}|}$; với M thuộc Δ .
- Công thức khoảng cách giữa hai đường thẳng $d(\Delta_1; \Delta_2) = \frac{|\overrightarrow{[u_{\Delta_1}; u_{\Delta_2}]} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}|}{|\overrightarrow{[u_{\Delta_1}; u_{\Delta_2}]|}$

Phương pháp hình học:

Bài toán 1: Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất, với M là điểm không thuộc d.

Phương pháp giải:

Đường thẳng d xác định đi qua điểm A và có véc tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_d}$.

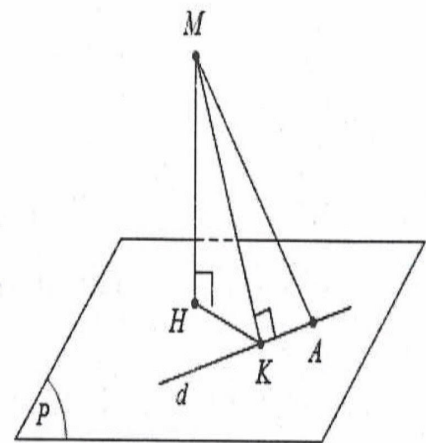
Kẻ $MH \perp (P); MK \perp d \Rightarrow MH = d(M;(P))$ và điểm K cố định.

Ta có $d(M;(P)) = MH \leq MK$

Suy ra $d_{\max} = MK$. Khi đó $\begin{cases} d \subset (P) \\ (P) \perp (M;d) \end{cases}$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa M và d ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_{(P)}} \perp \overrightarrow{u_d} \\ \overrightarrow{n_{(P)}} \perp \overrightarrow{n_\alpha} = [\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{MA}] \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_{(P)}} = [\overrightarrow{u_d}; [\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{MA}]]$$



Khi đó (P) đi qua A và có véc tơ pháp tuyến là: $\overrightarrow{n_{(P)}} = [\overrightarrow{u_d}; [\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{MA}]]$

Ví dụ 1: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $M(2;5;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$.

Lập (P) chứa d sao cho khoảng cách từ M đến (P) đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải:

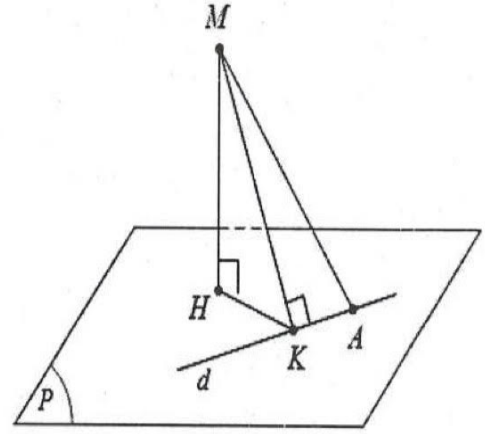
Đường thẳng d xác định đi qua điểm A và có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_d(2;1;2)$

Kẻ $MH \perp (P); MK \perp d \Rightarrow MH = d(M; (P))$ và điểm K có định.

Ta có $d(M; (P)) = MH \leq MK$

Suy ra $d_{\max} = MK$. Khi đó $\begin{cases} d \subset (P) \\ (P) \perp (M; d) \equiv (\alpha) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_{(P)} \perp \vec{u}_d \\ \vec{n}_{(P)} \perp \vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d; \vec{MA}] \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_d; [\vec{u}_d; \vec{MA}]]$$



Ta có: $\vec{MA}(1;-5;-1) \Rightarrow \vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_d; [\vec{u}_d; \vec{MA}]] = -9(1;-4;1)$

Do đó mặt phẳng (P) cần tìm đi qua $A(1;0;2)$ và có $\vec{n}_{(P)}(1;-4;1) \Rightarrow (P): x-4y+z-3=0$.

Ví dụ 2: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $M(5;1;6)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{5}$.

Lập (P) chứa d sao cho khoảng cách từ M đến (P) đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải:

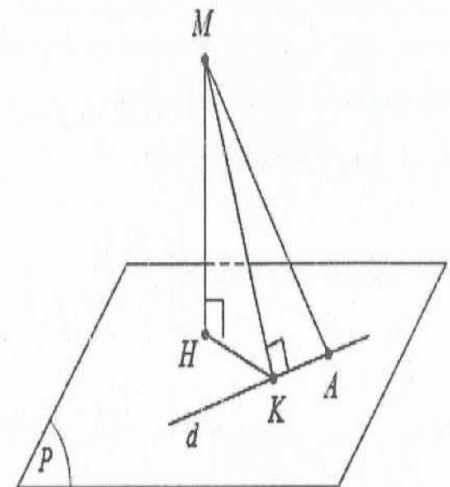
Đường thẳng d xác định đi qua điểm $A(1;-1;2)$ và có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_d(2;1;5)$.

Kẻ $MH \perp (P); MK \perp d \Rightarrow MH = d(M; (P))$ và điểm K có định.

Ta có $d(M; (P)) = MH \leq MK$

Suy ra $d_{\max} = MK$. Khi đó $\begin{cases} d \subset (P) \\ (P) \perp (M; d) \equiv (\alpha) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_{(P)} \perp \vec{u}_d \\ \vec{n}_{(P)} \perp \vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d; \vec{MA}] \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_d; [\vec{u}_d; \vec{MA}]]$$



Ta có: $\vec{MA}(-4;-2;-4) = -2(2;1;2) \Rightarrow \vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_d; [\vec{u}_d; \vec{MA}]] = 30(2;1;-1)$.

Do đó mặt phẳng (P) cần tìm đi qua $A(1;2;-1)$ và có $\overrightarrow{n_{(P)}}(2;1;-1) \Rightarrow (P): 2x + y - z + 1 = 0$.

Ví dụ 3: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $M(1;2;-3)$ và đường thẳng

$d: \frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{2}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d đồng thời cách điểm M một khoảng lớn

nhất. Khi đó khoảng cách từ O đến (P) bằng:

- A. $d = \sqrt{3}$. B. $d = 3$. C. $d = \frac{3}{\sqrt{5}}$. D. $d = \sqrt{5}$.

Lời giải:

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của điểm M lên mặt phẳng (P) và đường thẳng d .

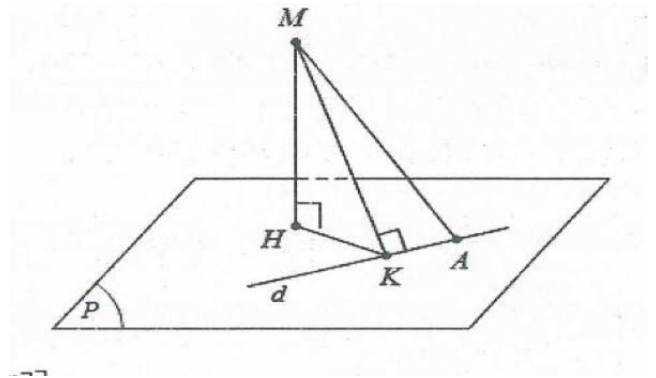
Đường thẳng d đi qua $A(-1;2;1)$

Ta có: $d(M; (P)) = MH \leq MK$ Khi đó

Suy ra $d_{\max} = MK$.

Khi đó $\begin{cases} d \subset (P) \\ (P) \perp (M; d) \equiv (\alpha) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_{(P)}} \perp \overrightarrow{u_d} \\ \overrightarrow{n_{(P)}} \perp \overrightarrow{n_\alpha} = [\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{MA}] \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_{(P)}} = [\overrightarrow{u_d}; [\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{MA}]]$$



Ta có: $\overrightarrow{u_d} = (4; -3; 2); \overrightarrow{MA} = (-2; 0; 4)$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{MA}] = -2(6; 10; 3) \Rightarrow \overrightarrow{n_{(P)}} = [\overrightarrow{u_d}; [\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{MA}]] = (-29; 0; 58) = -29(1; 0; -2)$$

Khi đó $(P): x - 2z + 3 = 0 \Rightarrow d(O; (P)) = \frac{3}{\sqrt{5}}$. **Chọn C.**

Ví dụ 4: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(-1;2;4); A(0;2;1); B(1;0;2)$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng AB đồng thời cách điểm M một khoảng lớn nhất cắt các trục tọa độ tại các điểm N, P, Q . Thể tích V của khối chóp $O.NPQ$ là:

- A. $V = \frac{9}{2}$. B. $V = \frac{3}{2}$. C. $V = 9$. D. $V = 27$.

Lời giải:

Giải sử

Ta có: Ta có $d(M; (P)) = MH \leq MK$

Suy ra $d_{\max} = MK$. Khi đó $\begin{cases} d \subset (P) \\ (P) \perp (M; d) \equiv (\alpha) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_{(P)} \perp \vec{u}_d \\ \vec{n}_{(P)} \perp \vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d; \vec{MA}] \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_d; [\vec{u}_d; \vec{MA}]]$$

Ta có: $\vec{u}_d = (1; -2; 1); \vec{MA} = (1; 0; -3)$.

$$\Rightarrow [\vec{u}_d; \vec{MA}] = 2(3; 2; 1) \Rightarrow \vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_d; [\vec{u}_d; \vec{MA}]] = (-4; 2; 8) = -2(2; -1; -4)$$

Khi đó $(P): 2x - y - 4z + 6 = 0 \Rightarrow N(-3; 0; 0); P(0; 6; 0); Q\left(0; 0; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow V_{O.NPQ} = \frac{1}{6} OM.OP.OQ = \frac{9}{2}$.

Chọn A.

Ví dụ 5: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(1; 4; 2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$.

Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d đồng thời cách điểm M một khoảng lớn nhất. Khi đó khoảng cách từ O đến (P) bằng:

A. $d = \frac{\sqrt{210}}{10}$. B. $d = \frac{\sqrt{210}}{30}$. C. $d = \frac{\sqrt{21}}{5}$. D. $d = \frac{\sqrt{21}}{10}$.

Lời giải:

Đường thẳng d xác định đi qua điểm $B(1; -2; 0)$ và có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_d(-1; 1; 2)$.

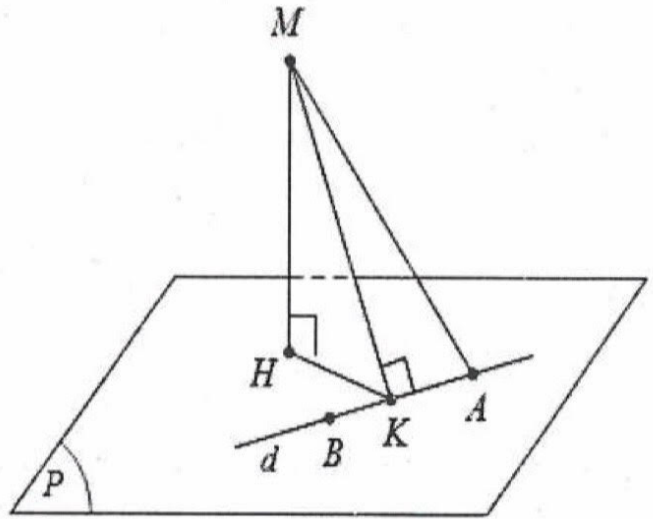
Ta có: $\vec{AB}(0; -6; -2) = -2(0; 3; 1)$.

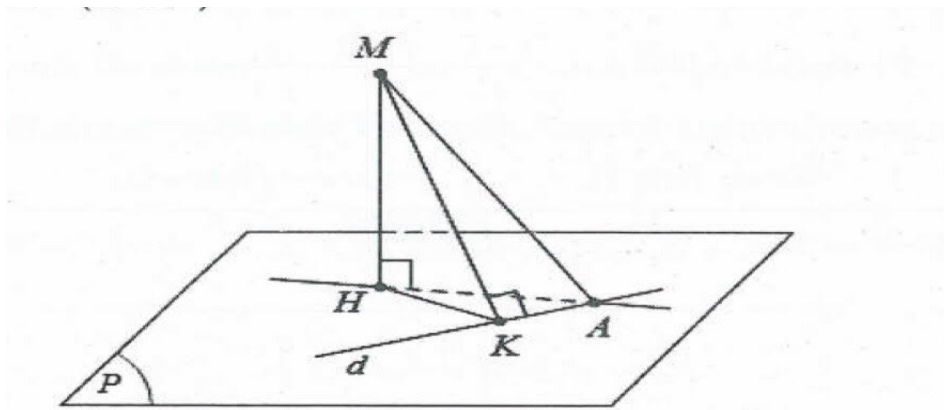
Áp dụng công thức nhanh ta có: $\vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_d; [\vec{u}_d; \vec{MA}]] = 2(5; 13; -4)$

$$\Rightarrow (P): 5x + 13y - 4z - 21 = 0 \Rightarrow d(O; (P)) = \frac{21}{\sqrt{5^2 + 13^2 + 4^2}} = \frac{\sqrt{210}}{10}. \text{ Chọn A.}$$

Bài toán 2: Lập phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) , đi qua điểm A sao cho khoảng cách từ điểm M đến d lớn nhất, nhỏ nhất?

Phương pháp giải:





+ Kẻ $MK \perp d; MK \perp (P) \Rightarrow MK = d(M; d)$ và điểm H cố định.

+ Kẻ $MK \perp d; MH \perp (P); \Rightarrow MK = d(M; d) = d$ và điểm H cố định.

Ta có: $MH \leq MK \leq MA \Leftrightarrow MH \leq d \leq MA$.

+) Ta có $MK \leq MA \Rightarrow d(M; d)_{\max} = MA \Leftrightarrow K \equiv A$.

Khi đó đường thẳng d nằm trong (P) , đi qua A và vuông góc với đường thẳng AM , suy ra d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_d = [\vec{n}_{(P)}; \vec{MA}]$

+) Mặt khác, lại có $MK \geq MH \Rightarrow d(M; d)_{\min} = MH \Leftrightarrow H \equiv K$.

Khi đó đường thẳng d nằm trong (P) , đi qua A và đi qua hình chiếu H của M . Suy ra

$d = (P) \cap (MHA)$. Trong đó $\vec{n}_{(MHA)} = [\vec{n}_{(P)}; \vec{MA}]$

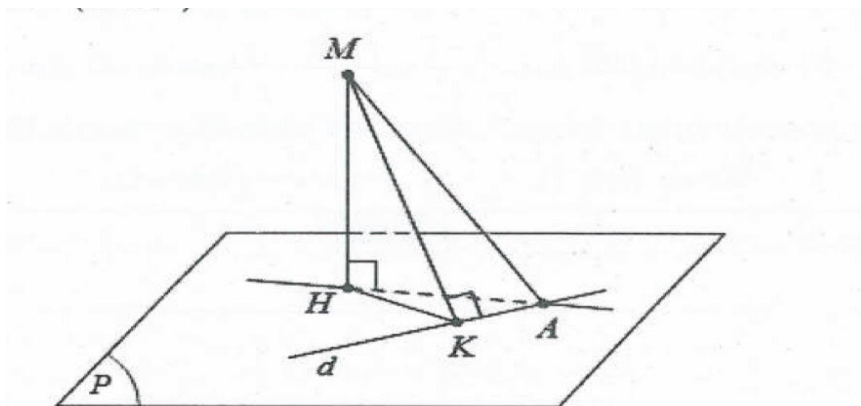
Khi đó đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_d = [\vec{n}_{(P)}; [\vec{n}_{(P)}; \vec{MA}]]$

(**Chú ý:** Trong trường hợp $d_{\min}$ thì d chính là hình chiếu vuông góc của MA trên mặt phẳng (P)).

Ví dụ 1: Cho các điểm $M(1;0;0); A(0;2;-3)$ và $(P): x+2y-z-1=0$. Lập phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) , đi qua A và cách M một khoảng lớn nhất, nhỏ nhất?

Lời giải:

Ta có: $\vec{n}_{(P)}(1;2;-1); \vec{MA} = (1;-2;3)$.



+) Kẻ $MK \perp d; MK \perp (P) \Rightarrow MK = d(M; d) = d$ và điểm H cố định.

Ta có: $MH \leq MK \leq MA \Leftrightarrow MH \leq d \leq MA$.

+) Ta có $MK \leq MA \Rightarrow d(M; d)_{\max} = MA \Leftrightarrow K \equiv A$.

Khi đó đường thẳng d nằm trong (P) , đi qua A và vuông góc với đường thẳng AM , suy ra d có một

véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_d = [\vec{n}_{(P)}; \vec{MA}] = 4(-1; 1; 1) \Rightarrow d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ và $d_{\max} = MA = \sqrt{14}$.

+) Mặt khác, lại có $MK \geq MH \Rightarrow d(M; d)_{\min} = MH \Leftrightarrow H \equiv K$.

Khi đó đường thẳng d nằm trong (P) , đi qua A và đi qua hình chiếu H của M. Suy ra

$d = (P) \cap (MHA)$. Trong đó $\vec{n}_{(MHA)} = [\vec{n}_{(P)}; \vec{MA}] = 4(1; -1; -1)$

Khi đó đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_d = [\vec{n}_{(P)}; [\vec{n}_{(P)}; \vec{MA}]] = -12(1; 0; 1)$

Suy ra $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$ và $d_{\min} = MH = d(M; (P)) = \sqrt{6}$.

Ví dụ 2: Cho các điểm $A(1; 2; 4); A(1; 2; -2)$ và $(P): x + y - z + 1 = 0$. Lập phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) , đi qua A và cách B một khoảng lớn nhất, nhỏ nhất?

Lời giải:

Ta có: $\vec{n}_{(P)}(1; 1; -1); \vec{AB} = (0; 0; -6) = -6(0; 0; 1)$.

Gọi H; N lần lượt là hình chiếu của B trên (P) và d .

Khi đó $d(B; (d)) = BN$

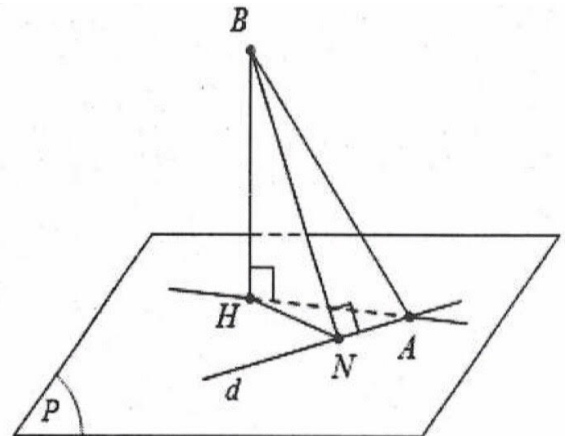
Ta có: $BH \leq BN \leq BA \Leftrightarrow BH \leq d \leq BA$.

+) $d_{\max} \Leftrightarrow \vec{u}_d = [\vec{n}_{(P)}; \vec{AB}] = -6(1; -1; 0)$.

$\Rightarrow d: \{x = 1 + t; y = 2 - t; z = 4\}$.

+) $d_{\min} \Leftrightarrow \vec{u}_d = [\vec{n}_{(P)}; [\vec{n}_{(P)}; \vec{AB}]] = 6(1; 1; 2)$.

$\Rightarrow d: \{x = 1 + t; y = 2 + t; z = 4 + 2t\}$.



Ví dụ 3: [Đề luyện thi đại học Vinh 2017] Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $M(-1; 2; 1)$;

$A(1; 2; -3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-1}$ vec tơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M, vuông

góc với đường thẳng d đồng thời cách điểm A một khoảng lớn nhất.

A. $\vec{u} = (4; -3; 2)$.

B. $\vec{u} = (1; 0; 2)$.

C. $\vec{u} = (2; 0; -4)$.

D. $\vec{u} = (2; 2; -1)$.

Lời giải:

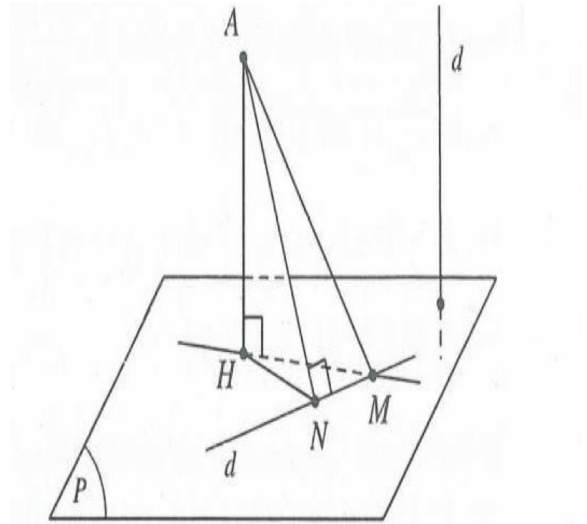
Phương trình mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d là: $(P) = 2x + 2y - z - 1 = 0$ khi đó (P) chứa Δ . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A xuống (P) và N là hình chiếu của A xuống Δ . Ta có: $AH \leq AN \leq AM$.

Khi đó $AN_{\max} \Leftrightarrow N \equiv M$

Do

$$\Delta \perp d; \Delta \perp AM \Rightarrow \vec{u}_{\Delta} = [\vec{u}_d; \vec{AM}] = (-8; 6; -4). \text{Chọn}$$

A.



Ví dụ 4: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;1;-1); B(0;2;1)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $(P): 2x - y - z = 0$. Gọi d là đường thẳng đi qua A nằm trong mặt phẳng (P) , và cách điểm B một khoảng lớn nhất. Đường thẳng d cắt mặt phẳng (O_{xy}) tại điểm.

A. $Q(0;4;0)$.

B. $Q(1;-2;0)$.

C. $Q(0;-2;0)$.

D. $Q(1;4;0)$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } d(B; d)_{\max} \Leftrightarrow \vec{u}_d = [\vec{n}_{(P)}; \vec{AB}] = (-1; -3; 1) \Rightarrow d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{1}$$

Mặt phẳng (O_{xy}) có phương trình $z = 0 \Rightarrow d \cap (O_{xy}) = Q(0; -2; 0)$. **Chọn C.**

Ví dụ 5: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+2}{-1}$ và hai điểm $A(1;1;-2); B(-1;0;2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc với đường thẳng d sao cho khoảng cách từ B đến Δ là nhỏ nhất.

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{-8}$.

B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+2}{-8}$.

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{8}$.

D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+2}{8}$.

Lời giải:

Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;1;-2)$ và $\vec{n}_{(P)} = \vec{u}_d = (1; 2; -1)$

Ta có: $\vec{AB}(-2; -1; 4)$

Áp dụng công thức nhanh ta có: $d_{\min} \Leftrightarrow \vec{u}_d = [\vec{n}_{(P)}; [\vec{n}_{(P)}; \vec{AB}]] = (4; -10; -16) = 2(2; -5; -8)$.

Phương trình đường thẳng Δ là: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+2}{-8}$. **Chọn B.**

Ví dụ 6: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;2;-1)$; $B(3;-1;-5)$ và đường thẳng

$\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$. Gọi d là đường thẳng đi qua A và cắt đường thẳng sao cho khoảng cách từ B đến Δ là lớn nhất, đường thẳng d đi qua các điểm nào trong các điểm sau:

- A. $E(2;4;-2)$. B. $F(2;3;0)$. C. $G(2;4;0)$. D. $N(2;0;0)$.

Lời giải:

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và chứa $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$; Δ qua $M(-1;0;-1)$ và $\vec{u}_\Delta = (2;3;-1)$

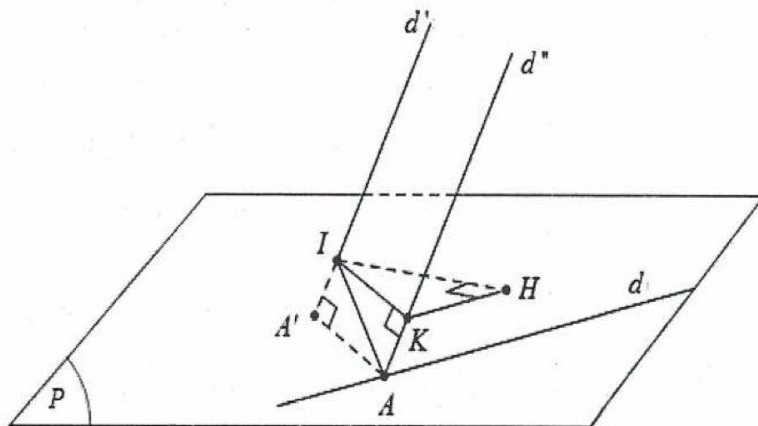
Ta có: $\vec{n}_{(P)}[\vec{AM}; \vec{u}_\Delta] = 2(1;-1;-1); d \subset (P)$.

Khi đó $d(B; \Delta)_{\max} \Leftrightarrow \vec{u}_d = [\vec{AB}; \vec{n}_{(P)}] = -(1;2;-1) \Rightarrow d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

Suy ra $E(2;4;-2) \in d$. **Chọn A.**

Bài toán 3: Lập phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) , đi qua điểm A cho trước sao cho khoảng cách giữa d và d' lớn nhất, với d' là đường thẳng cho trước và cắt (P) .

Phương pháp giải:



+) Gọi $I = d' \cap (P)$, qua A dựng đường thẳng $d'' \parallel d' \Rightarrow d' \parallel (Q)$, với (Q) là mặt phẳng chứa d và d'' .

Khi đó $d(d; d') = d(d'; (Q)) = d(I; (Q))$

+) Kẻ $IH \perp (Q); IK \perp d'' \Rightarrow IH = d(I; (Q))$ và điểm K cố định.

+) Ta có $H \leq IK \Rightarrow d(I; (Q))_{\max} = IK \Leftrightarrow H \equiv K$. Khi đó đường thẳng d nằm trong (P) , đi qua A và

vuông góc với đường thẳng IK , suy ra d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_d = [\vec{n}_{(P)}; \vec{IK}]$

Gọi A' là hình chiếu vuông góc của A lên d' , suy ra $AA' \parallel IK$, khi đó $\vec{u}_d = [\vec{n}_{(P)}; \vec{AA'}]$

Vậy đường thẳng d cần lập đi qua điểm A và có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_d = [\vec{n}_{(P)}; \vec{AA}']$

Ví dụ 1: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;0;1)$; và đường thẳng

$d: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-1}$ và $(P) = x - y + z - 2 = 0$. Lập phương trình đường thẳng d đi qua A , nằm trong (P) sao cho khoảng cách giữa d và d' lớn nhất?

Lời giải:

Gọi $A'(2+2t;1-t;-t)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên d'

Ta có: $\vec{AA'}(1+2t;1-t;-t-1)$ và $\vec{AA'}. \vec{u}_d = 4t+2+t-1+t+1=0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}$

Suy ra $\vec{AA'}(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{2}{3}) = \frac{1}{3}(1;4;-2)$. Lại có: $\vec{n}_{(P)} = (1;-1;1)$.

Khi đó $d(d;d')_{\max} \Leftrightarrow \vec{u}_d = [\vec{n}_{(P)}; \vec{AA'}] = (-2;3;5)$

Suy ra $d: \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{5}$.

Ví dụ 2: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$ và $d': \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$.

Lập phương trình đường Δ đi qua $O(0;0;0)$ vuông góc với d và cách d' một khoảng lớn nhất?

Lời giải:

Mặt phẳng (P) đi qua $O(0;0;0)$ và vuông góc với d có VTPT là $\vec{u}_{(P)} = \vec{u}_d = (1;-2;1)$.

Khi đó $d \subset (P)$. Gọi $O'(2t;-1-2t;1-t) \in d'$ là hình chiếu vuông góc của O trên d'

Ta có: $\vec{OO'}(2t;-2t-t;-t+1) \Rightarrow \vec{OO'}. \vec{u}_{d'} = 4t+4t+2+t-1=0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{9} \Rightarrow \vec{OO'}(-\frac{2}{9}; -\frac{7}{9}; \frac{10}{9})$

Khi đó $d(d;d')_{\max} \Leftrightarrow \vec{u}_d = [\vec{OO'}; \vec{n}_{(P)}] = \frac{1}{9}(13;12;11) \Rightarrow \Delta: \frac{x}{13} = \frac{y}{12} = \frac{z}{11}$.

Ví dụ 3: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(0;1;-1)$; đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$ và

$(P): x-2y+2z=0$. Lập phương trình đường Δ đi qua A song song với (P) sao cho khoảng cách giữa Δ và d lớn nhất?

Lời giải:

Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và song song với $(P): x-2y+2z=0 \Rightarrow \vec{n}_{(Q)} = (1;-2;2)$.

Khi đó, $d \subset (Q)$ Gọi $A'(1+t;-t;-t) \in d$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên d .

Ta có: $\overrightarrow{AA'}(t+1; -t-1; -t+1) \Rightarrow \overrightarrow{AA'}. \overrightarrow{u_\Delta} = t+1+t+1+t-1=0 \Leftrightarrow t = \frac{-1}{3}$

Suy ra $\overrightarrow{AA'}\left(\frac{2}{3}; \frac{-2}{3}; \frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3}(1; -1; 2) \Rightarrow d(\Delta; d)_{\max} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_\Delta} = [\overrightarrow{AA'}; \overrightarrow{n_{(Q)}}] = \frac{2}{3}(2; 0; -1)$.

Khi đó $\Delta: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = -1 - t \end{cases}$.

Ví dụ 4: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, gọi d là đường thẳng đi qua $A(0; 2; 1)$, song song với mặt phẳng $(P): 2x + y + z + 1 = 0$ sao cho khoảng cách giữa d và $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ lớn nhất. Đường thẳng d đi qua điểm nào trong các điểm sau:

A. $M(1; 9; 10)$. B. $N(1; -9; -8)$. C. $P(1; -9; -10)$. D. $Q(1; 9; -8)$.

Lời giải:

Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và song song với $(P): 2x + y + z + 1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n_{(Q)}} = (2; 1; 1)$.

Khi đó, $d \subset (Q)$ Gọi $A'(1+t; 2t; t) \in \Delta$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên Δ

Ta có: $\overrightarrow{AA'}(t+1; 2t-2; t-1) \Rightarrow \overrightarrow{AA'}. \overrightarrow{u_\Delta} = t+1+4t-4+t-1=0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$

Suy ra $\overrightarrow{AA'}\left(\frac{5}{3}; \frac{-2}{3}; \frac{-1}{3}\right) = \frac{1}{3}(5; -2; -1) \Rightarrow d(d; \Delta)_{\max} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_d} = [\overrightarrow{AA'}; \overrightarrow{n_{(Q)}}] = -\frac{1}{3}(1; 7; -9)$.

Khi đó $d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-1}{-9} \Rightarrow Q(1; 9; -8) \in d$. **Chọn D.**

Bài toán 4: Lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm A cho trước, d cắt d_1 và khoảng cách giữa d và d_2 lớn nhất

Phương pháp giải:

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và chứa d_1 , suy ra d nằm trong (P) . Khi đó quy về bài toán 3!

Ví dụ 1: Cho điểm $A(0; -1; 2)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

Lập phương trình đường Δ đi qua A cắt d sao cho

a) Khoảng cách từ $B(2; 1; 1)$ đến đường thẳng Δ là lớn nhất.

b) Khoảng cách giữa Δ và $d': \frac{x-5}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$ là lớn nhất.

Lời giải:

Đường thẳng d đi qua điểm $M(-1; 0; 2)$ có VTCP là $\overrightarrow{u_d} = (1; 1; -1)$, ta có: $\overrightarrow{AM} = (-1; 1; 0)$

Gọi (P) là mặt phẳng qua A và $d \Rightarrow \Delta \subset (P)$.

Ta có: $\overrightarrow{n_{(P)}} = [\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{AM}] = (1; 1; 2)$ và $\overrightarrow{AB} = (2; 2; -1)$.

$$a) d(B; \Delta)_{\max} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_{\Delta}} = [\overrightarrow{n_{(P)}}; \overrightarrow{AB}] = -5(1; -1; 0) \Rightarrow \Delta \begin{cases} x = t \\ y = -1 - t \\ z = 2 \end{cases}$$

b) Gọi $A'(5 + 2t; -2t; t)$ là hình chiếu vuông góc của A trên d' .

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AA'}(5 + 2t; -2t + 1; t - 2) \Rightarrow \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{u_{d'}} = 4t + 10 + 4t - 2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AA'}\left(\frac{11}{3}; \frac{7}{3}; -\frac{8}{3}\right) = \frac{1}{3}(11; 7; -8).$$

$$\text{Khi đó } d(\Delta; d')_{\max} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_{\Delta}} = [\overrightarrow{AA'}; \overrightarrow{n_{(P)}}] = \frac{2}{3}(11; -15; 2) \Rightarrow \Delta: \frac{x}{11} = \frac{y+1}{-15} = \frac{z-2}{2}.$$

Ví dụ 2: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua $A(0; -1; 2)$, cắt đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$, sao cho khoảng cách giữa d và $d_2: \frac{x-5}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$ lớn nhất có một véc tơ chỉ phương là:

A. $\overrightarrow{u_d} = (29; -41; 4).$

B. $\overrightarrow{u_d} = (29; -41; -4).$

C. $\overrightarrow{u_d} = (14; -20; 2).$

D. $\overrightarrow{u_d} = (14; -20; -2).$

Lời giải:

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $B(-1; 0; 2)$ có VTCP là $\overrightarrow{u_1} = (2; 1; -1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-1; 1; 0)$

$$\text{Gọi } (P) = (A; d_1) \Rightarrow \overrightarrow{n_{(P)}} = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{u_1}] = -(1; 1; 3) \Rightarrow d \subset (P).$$

Gọi $A'(2 + 5t; -2t; t) \in d_2$ là hình chiếu vuông góc của A trên d_2 ta có:

$$\overrightarrow{AA'} = (5 + 2t; -2t + 1; t - 2) \Rightarrow \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{u_{d_2}} = 4t + 10 + 4t - 2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AA'}\left(\frac{11}{3}; \frac{7}{3}; -\frac{8}{3}\right) \Rightarrow d(d; d_2)_{\max} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_d} = [\overrightarrow{AA'}; \overrightarrow{n_{(P)}}] = \frac{1}{3}(29; -41; 4). \text{ Chọn A.}$$

Ví dụ 2: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua $A(2; -1; 2)$, cắt đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-1}$, sao cho khoảng cách giữa d và $d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-3}$ lớn nhất có một véc tơ chỉ phương là:

A. $\overrightarrow{u_d} = (33; 8; 25).$

B. $\overrightarrow{u_d} = (43; -8; -25).$

C. $\overrightarrow{u_d} = (2; 1; 1).$

D. $\overrightarrow{u_d} = (41; 68; -27).$

Lời giải:

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $B(-1; -1; 1)$ có VTCP là $\vec{u}_1 = (2; 1; 1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-1; 0; -1)$

Gọi $(P) = (A; d_1) \Rightarrow \vec{n}_{(P)} = [\overrightarrow{AB}; \vec{u}_1] = (1; -1; -1) \Rightarrow d \subset (P)$.

Gọi $A'(-1+t; -2t; -3t) \in d_2$ là hình chiếu vuông góc của A trên d_2 ta có:

$$\overrightarrow{AA'} = (t-3; -2t+1; -3t-2) \Rightarrow \overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u}_{d_2} = t-3+4t-2+9t+6=0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{14}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \left(\frac{-43}{14}; \frac{8}{7}; \frac{-25}{14} \right) = \frac{1}{14}(-43; 16; -25) \Rightarrow d(d; d_2)_{\max} \Leftrightarrow \vec{u}_d = [\overrightarrow{AA'}; \vec{n}_{(P)}] = \frac{1}{14}(41; 68; -27). \text{ Chọn D.}$$

Dạng 5: Bài toán tìm điểm M thuộc đường thẳng có yếu tố cực trị

Phương pháp giải:

Tham số hóa điểm M theo phương trình đường thẳng.

Biến đổi giả thiết về dạng $y = f(t)$ và tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = f(t)$.

Chú ý:

Tam thức bậc hai: $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ có đỉnh $I\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$.

Bất đẳng thức véc tơ: Cho 2 véc tơ $\vec{u} = (a; b)$ và $\vec{v} = (c; d)$ ta có: $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$

Khi đó $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Ví dụ 1: Trong không gian hệ tọa độ Oxyz cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$ và hai điểm $A(2; -1; 1); B(0; 1; -2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho tam giác ABM có diện tích nhỏ nhất.

Lời giải:

Đường thẳng d có phương trình tham số $d: \begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$

Gọi M là điểm cần tìm. Do nếu M thuộc d thì M nên $M(t; 3-t; -1+2t)$.

Diện tích tam giác M được tính bởi $S = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}] \right|$ trong đó $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = (t-2; 4-t; 2t-2) \\ \overrightarrow{AB} = (-2; 2; -3) \end{cases}$

$$\text{Do đó } S_{ABM} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}] \right| = \frac{1}{2} |(-8-t; -t-2; 4)| = \frac{1}{2} \sqrt{(t+8)^2 + (t+2)^2 + 16}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2(t+5)^2 + 34} \geq \frac{1}{2} \sqrt{34}. \text{ Vậy } \min S = \frac{\sqrt{34}}{2} \text{ tại } t = -5 \Rightarrow M(-5; 8; -11).$$

Ví dụ 2: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;0;-1); B(0;2;3); C(-1;1;1)$ và đường thẳng

$d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ Tìm điểm M trên d sao cho:

a) $MA^2 + 2MB^2 - 4MC^2$ đạt giá trị lớn nhất?

b) $|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC}|_{\min}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải:

a) Gọi $M(-1+t; 1-2t; 2t) \in d$ và I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - 4\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow I(-5; 0; -1)$

Biến đổi $MA^2 + 2MB^2 - 4MC^2 = -MI^2 + IA^2 + 2MB^2 - 4MC^2$ lớn nhất $\Leftrightarrow MI^2$ nhỏ nhất

Lại có: $MI^2 = (t+4)^2 + (2t-1)^2 + (2t+1)^2 = 9t^2 + 8t + 18$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow t = -\frac{4}{9} \Rightarrow M\left(\frac{-13}{9}; \frac{17}{9}; \frac{-8}{9}\right)$.

b) Ta có: $\overrightarrow{AM}(t-2; 1-2t; 2t+1); \overrightarrow{BC} = (-1; -1; -2)$

Khi đó $|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC}|_{\min} = |(t-3; -2t; 2t-1)| = \sqrt{(t-3)^2 + 4t^2 + (2t-1)^2} = \sqrt{9t^2 - 10t + 10}$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow t = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{9} \Rightarrow M\left(\frac{-13}{9}; \frac{-1}{9}; \frac{19}{9}\right)$.

Ví dụ 3: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(0;0;3); B(0;3;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$

Tìm điểm M trên d sao cho:

a) $MA^2 + 2MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

b) $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải:

a) Gọi $M(t; t; t)$ ta có: $MA^2 + 2MB^2 = 2t + (t-3)^2 + 2[t^2 + 2(t-3)^2] = 9t^2 - 30t + 45$ đạt giá trị nhỏ nhất

$t = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{3} \Rightarrow M\left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

b) Ta có: $MA + MB = \sqrt{2t^2 + (t-3)^2} + \sqrt{t^2 + 2(t-3)^2} = \sqrt{3}\left(\sqrt{(t-1)^2 + 2} + \sqrt{(t-2)^2 + 2}\right)$

$= \sqrt{3}\left(\sqrt{(t-1)^2 + 2} + \sqrt{(2-t)^2 + 2}\right) \geq \sqrt{3} \cdot \sqrt{(t-1+2-t)^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{2})^2} = 3\sqrt{3}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{t-1}{2-t} = 1 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Ví dụ 4: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, gọi I là điểm thuộc $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$ sao cho

$A = 3a^2 + 2b^2 - c^2$ nhỏ nhất. Khi đó độ dài đoạn thẳng OM là.

A. $OM = \sqrt{87}$.

B. $OM = \sqrt{93}$.

C. $OM = \sqrt{41}$.

D. $OM = 3\sqrt{3}$.

Lời giải:

Gọi $M(2-t; -1-t; 2t)$ khi đó $3a^2 + 3b^2 - c^2 = 3(t-2)^2 + 2(t+1)^2 - 4t^2$

$$= t^2 - 8t + 14 = (t-4)^2 - 2 \geq -2. \text{ Do đó } A_{\min} = -2 \text{ khi } t = 4 \Rightarrow M(-2; -5; 8)$$

Khi đó $OM = \sqrt{93}$. **Chọn B.**

Ví dụ 5: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(-1; 1; 6); B(-3; -2; -4); C(1; 2; -1) D(2; -2; 0)$.

Gọi $M(a; b; c)$ làm điểm thuộc đường thẳng CD sao cho tam giác ABM có chu vi nhỏ nhất. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = -1$. B. $S = 1$. C. $S = -2$. D. $S = 2$.

Lời giải:

Ta có: $\overline{CD}(1; -4; 1)$. Phương trình đường thẳng CD là: $CD: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 - 4t \\ z = t \end{cases}$

Vì $M \in CD$ nên $M(2+t; -2-4t; t)$.

Chu vi tam giác MAB là: $P = AB + MA + MB$ Vì A, B cố định nên AB không đổi.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= AB + \sqrt{(t+3)^2 + (4t+3)^2 + (t-6)^2} + \sqrt{(t+5)^2 + (4t)^2 + (t+4)^2} \\ &= \sqrt{18t^2 + 18t + 18} + \sqrt{18t^2 + 18t + 41} = \sqrt{18\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{2}} + \sqrt{18\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{73}{2}} \geq \sqrt{\frac{27}{2}} + \sqrt{\frac{73}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{Dấu = xảy ra} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow S = \frac{3}{2} + 0 - \frac{1}{2} = 1. \text{ **Chọn B.**}$$

Ví dụ 6: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(-1; 3; -2); B(1; 1; 4)$ và đường thẳng d có

phương trình $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$. Gọi M là điểm thuộc đường thẳng d sao cho chu vi tam giác MAB nhỏ nhất. Khi đó độ dài OM là.

A. $OM = \sqrt{3}$.

B. $OM = 3$.

C. $OM = 2$.

D. $OM = \sqrt{5}$.

Lời giải:

Gọi $M(-1+2t; -2-t; 2t)$ ta có: C_{ABC} nhỏ nhất $\Leftrightarrow P = MA + MB$ nhỏ nhất.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } P &= \sqrt{4t^2 + (t+5)^2 + (2t+2)^2} + \sqrt{(2t-2)^2 + (t+3)^2 + (2t-4)^2} \\ &= \sqrt{9t^2 + 18t + 29} + \sqrt{9t^2 - 18t + 29} = \sqrt{(3t+1)^2 + (2\sqrt{5})^2} + \sqrt{(1-3t)^2 + (2\sqrt{5})^2} \end{aligned}$$

Trong mặt phẳng tọa độ gọi $\vec{u} = (3t+1; 2\sqrt{5}); \vec{v} = (1-3t; 2\sqrt{5});$

Ta có: $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| \Rightarrow P \geq \sqrt{2^2 + (4\sqrt{5})^2}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{3t+1}{1-3t} = 1 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow M(-1; -2; 0)$ do đó $OM = \sqrt{5}$. **Chọn D.**

Ví dụ 7: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$ và $\Delta_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{1}$. Một mặt phẳng (P) vuông góc với Δ_1 , cắt trục Oz tại A và cắt Δ_2 tại B. Tìm độ dài nhỏ nhất của đoạn AB.

- A. $\frac{2\sqrt{30}}{5}$. B. $\frac{2\sqrt{31}}{5}$. C. $\sqrt{\frac{6}{5}}$. D. $\frac{24}{5}$.

Lời giải:

Gọi $A(0; 0; a)$ và $B(b+1; 2b; b-2)$ suy ra $\overrightarrow{AB} = (b+1; 2b; b-a-2)$.

Vì $AB \subset (P)$ và vuông góc với $(\Delta_1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_{(\Delta_1)}} = 0 \Leftrightarrow 2(b+1) - 2b + b - a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = b$.

Khi đó $\overrightarrow{AB} = (a+1; 2a; -2) \Rightarrow AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(a+1)^2 + 4a^2 + 4} = \sqrt{5a^2 + 2a + 5}$

$$= \sqrt{5\left(a + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{24}{5}} \geq \sqrt{\frac{24}{5}} = \frac{2\sqrt{30}}{5} \Rightarrow AB_{\min} = \frac{2\sqrt{30}}{5}$$

Vậy độ dài nhỏ nhất của đoạn AB là $\frac{2\sqrt{30}}{5}$. **Chọn A.**

Dạng 6: Một số bài toán cực trị khoảng cách liên quan đến mặt cầu

Ví dụ 1: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(0; 1; 1); B(0; 0; -1); C(1; 2; -1)$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$. Tìm điểm D trên mặt phẳng (S) sao cho thể tích tứ diện ABCD lớn nhất.

Lời giải:

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; -1)$ và bán kính $R = 2$.

Ta có: $V_{ABCD} = \frac{1}{3} d(D; (ABC)) \cdot S_{ABC}$ lớn nhất $\Leftrightarrow d(D; (ABC))$ lớn nhất

Gọi $D_1 D_2$ là đường kính của mặt cầu (S) và vuông góc với mặt phẳng (ABC)

Khi đó $\Leftrightarrow d(D; (ABC))_{\max} \Leftrightarrow D$ trùng với 1 trong 2 điểm D_1 hoặc D_2

Đường thẳng $D_1 D_2$ qua $I(1; 0; -1)$ và có VTCP là $\vec{n} = \overrightarrow{n_{(ABC)}} = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (-2; 2; -1)$

Phương trình mặt phẳng $(ABC): 2x - 2y + z + 1 = 0$.

Suy ra $D_1 D_2 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \\ z = -1 + t \end{cases}$, tọa độ $D_1; D_2$ là nghiệm của hệ phương trình

$$D_1 D_2 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \\ z = -1 + t \\ (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{3} \\ t = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow D_1 \left(\frac{7}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{1}{3} \right); D_2 \left(-\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{5}{3} \right)$$

Do $d(D_1; (ABC)) > d(D_2; (ABC)) \Rightarrow D \left(\frac{7}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{1}{3} \right)$ là điểm cần tìm.

Ví dụ 2: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1; 2; -3)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$.

Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x + 4y - 4z + 5 = 0$ cắt mặt phẳng (P) tại B . Điểm

M nằm trong mặt phẳng (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới một góc vuông và độ dài MB lớn nhất. Độ

dài MB là:

- A. $MB = \sqrt{5}$. B. $MB = \frac{\sqrt{5}}{2}$. C. $MB = \frac{\sqrt{41}}{2}$. D. $MB = \sqrt{41}$.

Lời giải:

Đường thẳng d đi qua $A(1; 2; -3)$ và vuông góc (Q) có phương trình là $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 4t \\ z = -3 - 4t \end{cases}$.

Vì $B = d \cap (P) \Rightarrow B(1 + 3t; 2 + 4t; -3 - 4t) \in (P)$ suy ra $t = -1 \Rightarrow B(-2; -2; 1)$.

Ta có $\begin{cases} M \in (P) \\ MA \perp MB \end{cases} \Rightarrow M$ thuộc đường tròn giao tuyến của (P) và mặt cầu (S) (tâm I , đường kính AB).

Phương trình mặt cầu (S) là $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = \frac{41}{4}$ và $d(I; (P)) = \frac{\left| 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot 0 + 1 + 9 \right|}{3} = 3$.

Khi đó $BK = \sqrt{IB^2 - d^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, với K là tâm đường tròn giao tuyến của (P) và (S) .

Để MB lớn nhất $\Leftrightarrow MB$ là đường kính đường tròn giao tuyến $\Rightarrow MB = 2BK = \sqrt{5}$. **Chọn A.**

Ví dụ 3: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1; 2; -3)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$.

Đường thẳng d đi qua A và có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (3; 4; -4)$ cắt (P) tại điểm B . Điểm M thay đổi trong

(P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới góc 90° . Khi độ dài MB lớn nhất, đường thẳng MB đi qua điểm nào

trong các điểm sau?

A. $J(-3;2;7)$.

B. $K(3;0;15)$.

C. $H(-2;-1;3)$.

D. $I(-1;-2;3)$.

Lời giải:

Phương trình đường thẳng $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+3}{-4}$. Vì $B \in d \Rightarrow B(3b+1; 4b+2; -4b-3)$.

Mà $B = d \cap (P)$ suy ra $2(3b+1) + 2(4b+2) + 4b+3+9=0 \Leftrightarrow b=-1 \Rightarrow B(-2;-2;1)$.

Gọi là hình chiếu của A trên $(P) \Rightarrow AA': \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-1} \Rightarrow A'(-3;-2;-1)$.

Theo bài ra, ta có $MA^2 + MB^2 = AB^2 \Leftrightarrow MB^2 = AB^2 - MA^2 \leq AB^2 - AA'^2 = A'B^2$.

Độ dài MB lớn nhất khi $M \equiv A' \Rightarrow MB: \begin{cases} x=-2+t \\ y=-2 \\ z=1+2t \end{cases} \Rightarrow I(-1;-2;3) \in MB$. **Chọn D.**

Ví dụ 4: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S_1) có tâm $I(2;1;1)$ bán kính bằng 4 và mặt cầu (S_2) có tâm $J(2;1;5)$ bán kính bằng 2. (P) là mặt phẳng thay đổi tiếp xúc với hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$. Đặt M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của khoảng cách từ điểm O đến (P) . Giá trị $M+m$ bằng

A. 8.

B. $8\sqrt{3}$.

C. 9

D. $\sqrt{15}$.

Lời giải:

Do $IJ=4 > R_1 + R_2$ nên 2 mặt cầu cắt nhau.

Giả sử IJ cắt (P) tại M ta có $\frac{MJ}{MI} = \frac{R_2}{R_1} = 2 \Rightarrow J$ là trung điểm của MI

Suy ra $M(2;1;9)$. Khi đó $(P): a(x-2)+b(y-1)+c(z-9)=0 (a^2+b^2+c^2 > 0)$

Mặt khác $d(I;(P))=4 \Leftrightarrow \frac{|8c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=4 \Leftrightarrow \frac{|2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=1$

Do đó $c \neq 0$ chọn $c=1 \Rightarrow a^2+b^2=3$

Đặt $a=\sqrt{3}\sin t; b=\sqrt{3}\cot t \Rightarrow d(O;(P))=\frac{|2a+b+9|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|2a+b+9|}{2}=\frac{|2\sqrt{3}\sin t+\sqrt{3}\cot t+9|}{2}$

Mặt khác $-\sqrt{12+3} \leq 2\sqrt{3}\sin t+\sqrt{3}\cot t \leq \sqrt{12+3} \Rightarrow \frac{9-\sqrt{15}}{2} \leq d_0 \leq \frac{\sqrt{15}+9}{2} \Rightarrow M+m=9$. **Chọn C.**

Ví dụ 5: (Đề thi thử nghiệm Bộ GD&ĐT 2017) Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng

$(P): x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$. Giả sử điểm $M \in (P)$ và

$N \in (S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với véc tơ $\vec{u}(1;0;1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN.

A. $MN=3$.

B. $MN=1+2\sqrt{2}$.

C. $MN=3\sqrt{2}$.

D. $MN=14$.

Lời giải:

Ta có: $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 1$

Gọi $\overrightarrow{MN} = k(1; 0; 1) \Rightarrow \sin(\widehat{MN; (P)}) = \cos(\overrightarrow{u_{MN}}; \overrightarrow{n_P}) = \frac{|1+2|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{MN; (P)} = 45^\circ$

Gọi H là hình chiếu của M trên (P) khi đó $MN \sin 45^\circ = MH$

Do đó $MN = MH\sqrt{2}$ lớn nhất $\Leftrightarrow MH_{\max} = d(I; (P)) + R = 2 + 1 = 3$

Suy ra $MN_{\max} = 3\sqrt{2}$. **Chọn C.**

Ví dụ 6: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x + y - z - 3 = 0$ và hai điểm $A(1; 1; 1); B(-3; -3; -3)$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C . Biết rằng C luôn thuộc đường tròn cố định. Tính bán kính đường tròn đó.

A. $R = 4$.

B. $R = 6$.

C. $R = \frac{2\sqrt{33}}{3}$.

D. $R = \frac{2\sqrt{11}}{3}$.

Lời giải:

Phương trình đường thẳng AB là:
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Suy ra $M(3; 3; 3)$ là giao điểm của AB và mặt phẳng (P) khi đó MC là tiếp tuyến của mặt cầu (S) .

Theo tính chất phương tích ta có: $MA \cdot MB = MC^2 \Rightarrow MC^2 = 2\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 36$

Do đó tập hợp điểm C là đường tròn tâm $M(3; 3; 3)$ bán kính $R = 6$. **Chọn B.**

Ví dụ 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z + 18 = 0$, M là điểm di chuyển trên mặt phẳng (P) ; N là điểm nằm trên tia OM sao cho $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 24$. Tìm giá trị nhỏ nhất của khoảng cách từ N đến mặt phẳng (P) .

A. $\min d[N, (P)] = 6$.

B. $\min d[N, (P)] = 4$.

C. $\min d[N, (P)] = 2$.

D. $\min d[N, (P)] = 0$.

Lời giải:

Gọi $N(a; b; c)$ thì $ON = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Nên $OM = \frac{24}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{24}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \overrightarrow{ON} = \frac{24}{a^2 + b^2 + c^2}(a; b; c)$

$$\text{Lại có } M \in (P) \Rightarrow 24 \left[\frac{a}{(a^2 + b^2 + c^2)} + \frac{2b}{(a^2 + b^2 + c^2)} + \frac{2c}{(a^2 + b^2 + c^2)} \right] + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + \frac{4a}{3} + \frac{8b}{3} + \frac{8c}{3} = 0 \Rightarrow N \in (S): x^2 + y^2 + z^2 + \frac{4x}{3} + \frac{8y}{3} + \frac{8z}{3} = 0;$$

$$\Rightarrow I \left(\frac{-2}{3}; \frac{-4}{3}; \frac{-4}{3} \right); R = 2. \text{ Khi đó } d(N; (P))_{\min} = d(N; (P)) - R = 2. \text{ Chọn C.}$$

Ví dụ 8: Cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 9$. Điểm $M(1;0;1)$ di động trên (S) . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |2x + 2y - z + 16|$.

A. 6.

B. 3.

C. 24.

D. 2.

Lời giải:

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -1; 3)$, bán kính $R = 3$. Xét mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 16 = 0$

Đường thẳng Δ qua I và vuông góc với (P) có phương trình $x = 2 + 2t, y = -1 + 2t, z = 3 - t$

Cho $\Delta \cap (S) \Rightarrow \Delta$ và (S) cắt nhau tại 2 điểm: $A(0; -3; 4); B(4; 1; 2)$.

Ta có $d(A, (P)) = 2, d(B, (P)) = 8$

$$\text{Lấy } M(x; y; z) \in (S) \Rightarrow d(M; (P)) = \frac{|2x + 2y - z + 16|}{3} = \frac{1}{3}P$$

$$\text{Ta có: } d(A; (P)) \leq d(M; (P)) \leq d(B; (P)) \Leftrightarrow 2 \leq \frac{P}{3} \leq 8 \Leftrightarrow 6 \leq P \leq 24.$$

Vậy $P_{\min} = 6$ khi $x = 0, y = -3, z = 4$. **Chọn A.**

Ví dụ 9: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;1), B(3;0;-1), C(0;21;-19)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$. $M(a; b; c)$ là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho biểu thức $T = 3MA^2 + 2MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a + b + c$.

A. $a + b + c = 0$.

B. $a + b + c = 12$.

C. $a + b + c = \frac{12}{5}$.

D. $a + b + c = \frac{14}{5}$.

Lời giải:

Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} 3(0 - x_1) + 2(3 - x_1) + (0 - x_1) = 0 \\ 3(1 - y_1) + 2(0 - y_1) + (21 - y_1) = 0 \\ 3(1 - z_1) + 2(-1 - z_1) + (-19 - z_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow I(1; 4; -3)$$

$$\text{Ta có: } T = 3MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = 3\overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2$$

$$\Rightarrow T = 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{IC})^2 = 6MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) + 3IA^2 + 2IB^2 + IC^2$$

$$= 6MI^2 + 3IA^2 + 2IB^2 + IC^2 \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow MI \text{ nhỏ nhất.}$$

$$\text{Mặt cầu } (S) \text{ có tâm } K(1;1;1) \Rightarrow I: \begin{cases} x=1 \\ y=1+3t \\ z=1-4t \end{cases} \text{ Cho } KI \cap (S) \Rightarrow \begin{cases} M_1\left(1; \frac{8}{5}; \frac{1}{5}\right) \\ M_2\left(1; \frac{2}{5}; \frac{9}{5}\right) \end{cases}$$

Tính $M_1I = 4; M_2I = 6 \Rightarrow M_1$ là điểm thỏa mãn yêu cầu nên $a+b+c = \frac{14}{5}$. **Chọn D.**

Ví dụ 10: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a \geq 4, b \geq 5, c \geq 6$ và mặt cầu (S) có bán kính bằng $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Khi tổng $OA+OB+OC$ đạt giá trị nhỏ nhất thì mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây?

A. $\sqrt{2}x + 2y + 2z + 3 - 2\sqrt{2} = 0$.

B. $\sqrt{2}x + 2y - \sqrt{2}z + 6 + 3\sqrt{2} = 0$.

C. $\sqrt{2}x + 2y - 2z + 3 + 2\sqrt{2} = 0$.

D. $2x + \sqrt{2}y + 2z + 7 - 2\sqrt{2} = 0$.

Lời giải:

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$ là $R = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 = 90$.

Ta có $P = OA+OB+OC = a+b+c$. Đặt $m = a-4 \geq 0, n = b-5 \geq 0, p = c-6 \geq 0$.

Khi đó $a^2+b^2+c^2 = (m+4)^2 + (n+5)^2 + (p+6)^2 = m^2+n^2+p^2+8m+10n+12p+77 = 90$.

$T = (m+n+p)^2 + 12(m+n+p) = m^2+n^2+p^2+8m+10n+12p+2(mn+np+pm+2m+n)$.

Vì $m^2+n^2+p^2+8m+10n+12p = 13$ và $m, n, p \geq 0$ nên $(m+n+p)^2 + 12(m+n+p) - 13 \geq 0$.

$\Leftrightarrow m+n+p \geq 1 \Leftrightarrow a+b+c \geq 16 \Rightarrow \{OA+OB+OC\}_{\min} = 16$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a=4, b=5, c=7$.

Tâm của mặt cầu (S) là $I\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right) \Rightarrow I\left(2; \frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right) \Rightarrow d(I; (P)_D) = \frac{3\sqrt{10}}{2}$. **Chọn D.**

Dạng 7: Bài toán cực trị liên quan đến góc

Phương pháp đại số

- Gọi véc tơ pháp tuyến hoặc véc tơ chỉ phương của mặt phẳng (hoặc đường thẳng) cần lập là $(a; b; c)$ trong đó $a^2+b^2+c^2 > 0$.
- Thiết lập một phương trình quy ẩn (a theo b, c hoặc ngược lại) từ một dữ kiện về mặt phẳng chứa đường, song song hoặc vuông góc. Giả sử phương trình thu gọn ẩn là $a = f(b; c)$.
- Thiết lập phương trình về góc, thay $a = f(b; c)$ vào ta được một phương trình hai ẩn b, c .

Chú ý:

- Góc giữa hai đường thẳng $\cos(d_1; d_2) = \left| \cos(\vec{u}_1; \vec{u}_2) \right| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}$
- Góc giữa hai mặt phẳng $\cos((P)_1; (P)_2) = \left| \cos(\vec{n}_1; \vec{n}_2) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$
- Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng $\sin(d; (P)) = \left| \cos(\vec{n}_P; \vec{u}_d) \right| = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{u}_d|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{u}_d|}$
- Ta biết rằng hàm $\sin \varphi$ đồng biến khi $0 < \varphi < 90^\circ$, ngược lại hàm $\cos \varphi$ nghịch biến.

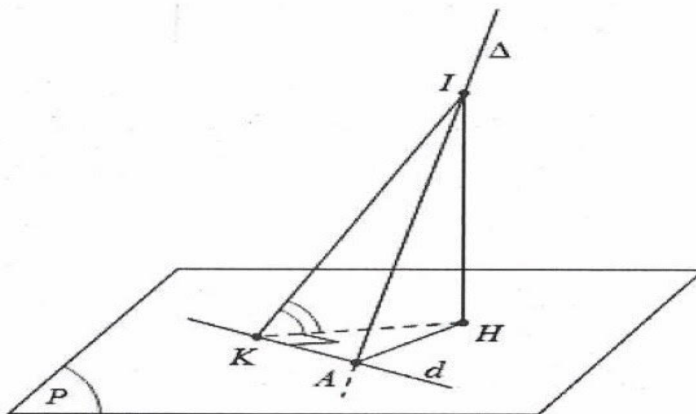
Vậy khi hàm xét max, min là hàm sin thì góc lớn ứng với hàm max, góc nhỏ ứng với hàm nhỏ. Còn khi hàm xét max, min là hàm cosin thì ngược lại, đề bài yêu cầu tìm góc lớn thì hàm phải đạt min, góc nhỏ thì hàm đạt max.

Phương pháp hình học

Bài toán 1: Lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa Δ sao cho mặt phẳng (Q) tạo với mặt phẳng (P) cho trước một góc nhỏ nhất (hoặc tạo với đường thẳng d cho trước một góc lớn nhất)

Phương pháp giải:

- TH1: $\left(\widehat{(P);(Q)} \right)_{\min}$



Gọi $A = \Delta \cap (P); d = (P) \cap (Q)$ với (Q) là mặt phẳng (IAK) trong hình vẽ.

Lấy $I \in \Delta \Rightarrow A; I$ cố định, dựng $IH \perp d \Rightarrow \left(\widehat{(P);(Q)} \right) = \widehat{IKH} = \varphi$.

Do $IA \geq IK \Rightarrow \sin \varphi = \frac{IH}{IK} \geq \frac{IH}{IA} \Rightarrow \varphi_{\min}$ khi $K \equiv A$ tức là $\Delta \perp d \Leftrightarrow \Delta \perp (P) \Rightarrow \vec{n}_Q = [\vec{u}_\Delta; \vec{u}_d]$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} IA \perp d \\ d \subset (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \perp d \\ d \subset (P) \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_d = [\vec{u}_\Delta; \vec{n}_{(P)}]$$

$$\text{Suy ra } \left(\widehat{(P);(Q)} \right) \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \Delta \perp \text{ giao tuyến } d \text{ của } (P) \text{ và } (Q) \Leftrightarrow \vec{n}_{(Q)} = [\vec{u}_\Delta; [\vec{u}_\Delta; \vec{n}_{(P)}]]$$

$$\text{-TH2: } \left(\widehat{(Q);d} \right)_{\max} \Leftrightarrow \vec{n}_{(Q)} = [\vec{u}_\Delta; [\vec{u}_\Delta; \vec{u}_d]]$$

Tổng kết: $\begin{cases} \left(\widehat{(P);(Q)} \right)_{\min} \Leftrightarrow \vec{n}_{(Q)} = [\vec{u}_\Delta; [\vec{u}_\Delta; \vec{n}_{(P)}]] \\ \left(\widehat{(Q);d} \right)_{\max} \Leftrightarrow \vec{n}_{(Q)} = [\vec{u}_\Delta; [\vec{u}_\Delta; \vec{u}_d]] \end{cases}$
--

Ví dụ 1: Cho $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-1}; d': \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}; (Q): x+2y+2z-3=0$

Lập chứa d sao cho

a) Góc giữa (P) và (Q) nhỏ nhất.

b) Góc giữa (P) và d' lớn nhất.

Lời giải:

a) Ta có: $\vec{u}_d = (1; 2; -1)$ và $\vec{n}_{(Q)} = (1; 2; 2)$. Đường thẳng d đi qua $M(1; -2; 0)$.

$$\left(\widehat{(P);(Q)} \right)_{\min} \Leftrightarrow \vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_d; [\vec{u}_d; \vec{n}_{(Q)}]] = (-3; -6; -15) = -3(1; 2; 5)$$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2; 5)$ có phương trình là:

$$(P): x + 2y + 5z + 3 = 0.$$

b) Ta có: $\vec{u}_{d'} = (2; -1; 2)$.

$$\left(\widehat{(P);d'} \right)_{\max} \Leftrightarrow \vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_d; [\vec{u}_d; \vec{u}_{d'}]] = (-14; 2; -10) = -2(7; -1; 5)$$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (7; -1; 5)$

$$\text{Phương trình mặt phẳng } (P): 7x - y + 5z - 9 = 0.$$

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 2 = 0$ và đường thẳng

$\Delta: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa Δ và tạo với (P) một góc nhỏ nhất. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (Q) bằng

A. $\sqrt{3}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

C. $\sqrt{5}$.

D. 1.

Lời giải:

Ta có: $\vec{n}_{(P)} = (2; -1; -2); \vec{u}_\Delta = (-1; 2; 1)$ và đường thẳng Δ đi qua $A(0; -1; 2)$.

$$\left(\widehat{(P);(Q)} \right) \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_{(Q)}} = \left[\overrightarrow{u_{\Delta}}; \left[\overrightarrow{u_{\Delta}}; \overrightarrow{n_{(P)}} \right] \right]$$

Ta có: $\overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{u_{\Delta}}; \overrightarrow{n_{(P)}} \right] = -3(1; 0; 1)$ suy ra $\overrightarrow{n_{(Q)}} = \left[\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{u_{\Delta}} \right] = -2(1; 1; -1)$

Khi đó (Q) đi qua $A(0; -1; 2)$ và $\vec{n} = (1; 1; -1)$ $(Q): x + y - z + 3 = 0 \Rightarrow d(O; (Q)) = \sqrt{3}$. **Chọn A.**

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 1 = 0$ và đường thẳng

$\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-2}$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa Δ và tạo với (P) một góc nhỏ nhất. Tính cosin góc

φ giữa 2 mặt phẳng (P) và (Q) khi đó:

A. $\cos \varphi = \frac{1}{3}$. **B.** $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\cos \varphi = \frac{1}{2}$.

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{u_{\Delta}} = (1; -1; -2); \overrightarrow{n_{(P)}} = (2; -2; -1)$ và đường thẳng Δ đi qua $M(1; 0; 0)$.

Để $\left(\widehat{(P);(Q)} \right)_{\min} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_{(Q)}} = \left[\overrightarrow{u_{\Delta}}; \left[\overrightarrow{u_{\Delta}}; \overrightarrow{n_{(P)}} \right] \right] = (-6; 6; -6) = -6(1; -1; 1)$.

Suy ra $\cos \varphi = \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 1|}{\sqrt{4+4+1} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **Chọn B.**

Ví dụ 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x + 2y - z + 3 = 0$ và đường thẳng

$d: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$. Mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ

nhất. Khoảng cách từ O đến (Q) bằng:

A. $4\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2 . **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{u_d} = (2; 1; 1); \overrightarrow{n_{(P)}} = (1; 2; -1)$ và đường thẳng Δ đi qua $M(-1; -1; 3)$.

$\left(\widehat{(P);(Q)} \right)_{\min} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_{(Q)}} = \left[\overrightarrow{u_d}; \left[\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{n_{(P)}} \right] \right] = (0; -9; 9) = -9(0; 1; -1)$.

Phương trình mặt phẳng (P) cần tìm đi qua điểm $M(-1; -1; 3)$ và có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(Q)} = (0; 1; -1)$

Suy ra $(P): y - z + 4 = 0 \Rightarrow d(O; Q) = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. **Chọn D.**

Ví dụ 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$. Gọi (P) là mặt

phẳng chứa d và tạo với trục Oy một góc lớn nhất. Mặt phẳng (P) đi qua điểm nào trong các điểm sau:

A. $A(6; -3; 0)$. **B.** $B(2; -3; 0)$. **C.** $C(2; 1; -1)$. **D.** $D(2; 1; 1)$.

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{u_d} = (-1; 1; 2); \overrightarrow{u_{Oy}} = (0; 1; 0)$ và đường thẳng d đi qua $M(1; -2; 0)$.

$$\widehat{((P); Oy)}_{\max} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_{(P)}} = [\overrightarrow{u_d}; [\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{u_{Oy}}]] = (-1; -5; 2) = -1(1; 5; -2).$$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 5; -2)$

Phương trình mặt phẳng $(P): x + 5y - 2z + 9 = 0$.

Do đó (P) đi qua điểm $A(6; -3; 0)$. **Chọn A.**

Ví dụ 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -1); B(-1; 1; 2)$. Gọi (Q) là phương trình mặt phẳng đi qua 2 điểm A, B sao cho (Q) tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc nhỏ nhất. Khoảng cách từ gốc O đến mặt phẳng (Q) bằng:

A. $d = \frac{7}{\sqrt{35}}$. B. $d = \frac{\sqrt{70}}{10}$. C. $d = \frac{\sqrt{70}}{70}$. D. $d = \frac{\sqrt{70}}{35}$.

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2; -1; 3); \overrightarrow{n_{(Oxy)}} = (0; 0; 1)$.

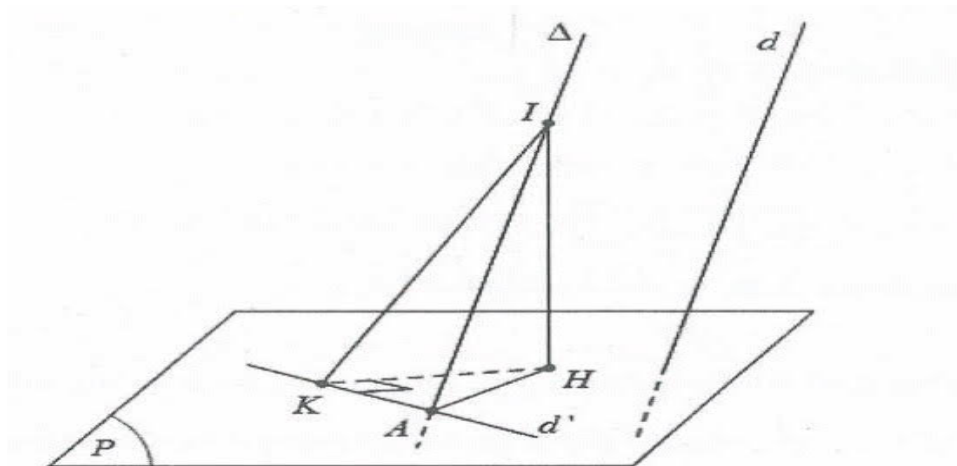
$$\widehat{((P); Oxy)}_{\min} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_Q} = [\overrightarrow{AB}; [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{n_{(Oxy)}}]] = (-6; -3; -5) = -(6; 3; 5).$$

Phương trình mặt phẳng (Q) là: $6x + 3y + 5z - 7 = 0 \Rightarrow d(O; (Q)) = \frac{7}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 5^2}} = \frac{\sqrt{70}}{10}$. **Chọn B.**

Bài toán 2: Viết phương trình đường thẳng d' qua A nằm trong (P) sao cho góc giữa 2 đường thẳng d và d' nhỏ nhất (hoặc tạo với mặt phẳng (Q) cho trước một góc lớn nhất)

Phương pháp giải:

- TH1: $(\widehat{d; d'})_{\min}$



Qua A dựng đường thẳng $\Delta \parallel d$, trên Δ lấy điểm I , hạ $IH \perp (P) \Rightarrow A, I, H$ cố định, điểm K thay đổi

$$\left(\widehat{d;d'}\right)=\left(\widehat{\Delta;d'}\right)=\widehat{IAK}=\alpha$$

Mà $\sin \alpha = \frac{IK}{IA} \geq \frac{IH}{IA}$ (Do $IK \geq IH$) suy ra $\alpha_{\min} \Leftrightarrow H \equiv K$ hay d' qua A và H .

Khi đó d' là hình chiếu vuông góc của Δ trên (P) .

$$\text{Ta có: } \left(\widehat{d;d'}\right)_{\min} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_{d'}} = \left[\overrightarrow{n_{(P)}}; \overrightarrow{n_{AIH}}\right] = \left[\overrightarrow{n_{(P)}}; \left[\overrightarrow{n_{(P)}}; \overrightarrow{u_d}\right]\right].$$

$$\text{- TH2: } \left(\widehat{d;(Q)}\right)_{\max} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_{d'}} = \left[\overrightarrow{n_{(P)}}; \left[\overrightarrow{n_{(P)}}; \overrightarrow{n_Q}\right]\right].$$

$$\text{Tổng kết: } \begin{cases} \left(\widehat{d;d'}\right)_{\min} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_{d'}} = \left[\overrightarrow{n_{(P)}}; \left[\overrightarrow{n_{(P)}}; \overrightarrow{u_d}\right]\right] \\ \left(\widehat{d;(Q)}\right)_{\max} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_{d'}} = \left[\overrightarrow{n_{(P)}}; \left[\overrightarrow{n_{(P)}}; \overrightarrow{n_{(Q)}}\right]\right] \end{cases}$$

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;2)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - z + 3 = 0$.

Lập phương trình đường thẳng d đi qua A ; song song với (P) đồng thời tạo với đường $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ một góc nhỏ nhất.

Lời giải:

Gọi (α) là mặt phẳng chứa A và song song với $(P) \Rightarrow \overrightarrow{n_{(\alpha)}} = (2; -1; -1)$.

Khi đó d nằm trong (α) sao cho góc giữa d và Δ nhỏ nhất.

$$\text{Ta có: } \left(\widehat{d;\Delta}\right)_{\min} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{n_{(\alpha)}}; \left[\overrightarrow{u_{\Delta}}; \overrightarrow{n_{(\alpha)}}\right]\right] = -2(1; -5; 7)$$

$$\text{Phương trình đường thẳng } d \text{ là: } d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{7}.$$

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;2)$ và hai đường

$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1}; d': \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{2}$. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua A đồng thời cắt đường d sao cho góc giữa Δ và d' nhỏ nhất?

Lời giải:

Gọi (P) là mặt phẳng chứa A và d .

Đường thẳng d đi qua điểm $A(1;2;-2)$ và có VTCP là $\overrightarrow{u_d} = (2; 1; -1)$.

Khi đó $\overrightarrow{n_{(P)}} = \left[\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{u_d}\right] = -(1; 0; 2)$. Đường thẳng $\Delta \subset (P)$.

$$\text{Ta có: } \left(\widehat{\Delta;d'}\right)_{\min} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_{\Delta}} = \left[\overrightarrow{n_{(P)}}; \left[\overrightarrow{n_{(P)}}; \overrightarrow{u_{d'}}\right]\right] = (8; -10; -4) = 2(4; -5; -2).$$

Phương trình đường thẳng là: $d: \frac{x+1}{4} = \frac{y}{-5} = \frac{z+1}{-2}$.

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, lập phương trình đường thẳng d đi qua $A(1;0;-2)$ và cắt $\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-2}$ sao cho góc giữa d và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 1 = 0$ lớn nhất?.

Lời giải:

Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (Q) chứa A và Δ .

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1;-1;2)$ và có VTCP là $\vec{u}_\Delta = (3;2;-2)$, $\vec{AM} = (0;-1;4)$

Ta có: $\vec{n}_{(Q)} = [\vec{AM}; \vec{u}_\Delta] = -(-6;12;3) \Rightarrow \vec{n}_{(Q)} = (-2;4;1)$.

Để $(\widehat{d;(P)})_{\max} \Leftrightarrow \vec{u}_d = [\vec{n}_{(Q)}; [\vec{n}_{(Q)}; \vec{n}_{(P)}]] = (-30;-3;-48) = -3(10;1;16)$.

Khi đó phương trình đường thẳng $d: \frac{x-1}{10} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{16}$.

Ví dụ 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua $A(1;0;1)$, nằm trong mặt phẳng $(P): 2x + y - z - 1 = 0$ và tạo với đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$ một góc nhỏ nhất. Biết $\vec{u} = (5;b;c)$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ . Tìm $b + c$.

- A. $b + c = -6$. B. $b + c = 6$. C. $b + c = -3$. D. $b + c = 3$.

Lời giải:

Ta có: $\vec{n}_{(P)} = (2;1;-1)$; $\vec{u}_d = (2;-1;2)$.

Để $(\widehat{d;\Delta})_{\min} \Leftrightarrow \vec{u}_\Delta = [\vec{n}_{(P)}; [\vec{n}_{(P)}; \vec{u}_d]] = (-10;7;-13) = -2\left(\frac{5}{2}; -\frac{7}{2}; \frac{13}{2}\right)$.

Do đó: $b = -\frac{7}{2}$; $c = \frac{13}{2} \Rightarrow b + c = 3$. **Chọn D.**

Ví dụ 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;1)$, đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2}$, mặt phẳng $(P): x - y + z - 5 = 0$. Gọi d là đường thẳng đi điểm qua A nằm trong (P) và tạo với Δ một góc bé nhất là α . Tính $\sin \alpha$.

- A. $\frac{\sqrt{78}}{9}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{9}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{9}$. D. $\frac{\sqrt{75}}{9}$.

Lời giải:

Ta có: $\vec{n}_{(P)} = (1;-1;1)$; $\vec{u}_\Delta = (1;2;2)$.

Để $(\widehat{d;\Delta})_{\min} \Leftrightarrow \vec{u}_d = [\vec{n}_{(P)}; [\vec{n}_{(P)}; \vec{u}_\Delta]] = (-2;-7;-5) = -(2;7;5)$.

Phương trình đường thẳng d là: $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z-1}{5}$.

Khi đó $\cos \alpha = \left| \cos(\overrightarrow{u_\Delta}; \overrightarrow{u_d}) \right| = \frac{|2+14+10|}{3 \cdot \sqrt{2^2+7^2+5^2}} = \frac{\sqrt{78}}{9} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{9}$. **Chọn B.**

Ví dụ 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi d là đường thẳng song song với $(P): x-2y+2z-5=0$, đồng thời tạo với mặt phẳng (Oyz) một góc lớn nhất là φ . Tính $P = \sin \varphi$.

- A. $P=1$. B. $P = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. C. $P = \frac{1}{3}$. D. $P = \frac{1}{2}$.

Lời giải:

Gọi $Q \equiv (Oyz) \Rightarrow \overrightarrow{n_{(Q)}} = (1; 0; 0); \overrightarrow{n_{(P)}} = (1; -2; 2)$.

Ta có $\varphi = \left(\widehat{d; (Q)} \right)_{\max} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{n_{(P)}}, \left[\overrightarrow{n_{(P)}}, \overrightarrow{n_{(Q)}} \right] \right] = (-8; -2; 2) = -2(4; 1; -1)$.

Suy ra $\sin \varphi = \left| \cos(\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{n_{(Q)}}) \right| = \frac{4}{\sqrt{18}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. **Chọn B.**

Ví dụ 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y+z-1=0$, điểm $A(2; 3; 0)$ thuộc mặt phẳng (P) và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Đường thẳng d' qua A nằm trong (P) sao cho góc giữa 2 đường thẳng d và d' nhỏ nhất đi qua điểm nào trong các điểm sau:

- A. $(0; 0; 1)$. B. $(2; 4; 1)$. C. $(1; 1; 0)$. D. $(1; 2; 1)$.

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{n_{(P)}} = (2; -1; 1); \overrightarrow{u_d} = (1; -1; 1)$.

Do đó $\left(\widehat{d; d'} \right)_{\min} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_{d'}} = \left[\overrightarrow{n_{(P)}}, \left[\overrightarrow{n_{(P)}}, \overrightarrow{u_d} \right] \right] = (2; 2; -2) = 2(1; 1; -1) \Rightarrow d': \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-1}$.

Vậy d' đi qua hai điểm $(1; 2; 1)$. **Chọn D.**

Ví dụ 8: Cho mặt phẳng $(P): x-y+z-2=0$ điểm $A(2; 1; 1)$ thuộc mặt phẳng (P) và đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$. Đường thẳng d' qua A nằm trong (P) sao cho góc giữa 2 đường thẳng d và d' nhỏ nhất cắt mặt phẳng (Oyz) tại điểm E . Tính $P = OE$.

- A. $P=14$. B. $P = 2\sqrt{6}$. C. $P = 10$. D. $P = \sqrt{14}$.

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{n_{(P)}} = (1; -1; 1); \overrightarrow{u_d} = (-1; 2; 2) \Rightarrow \left[\overrightarrow{n_{(P)}}, \overrightarrow{u_d} \right] = (4; 3; -1)$

$$\text{Ta có: } \left(\widehat{\mathbf{d}; \mathbf{d}'} \right)_{\min} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_{d'}} = \left[\overrightarrow{n_{(P)}}; \left[\overrightarrow{n_{(P)}}; \overrightarrow{u_d} \right] \right] = -(2; -5; -7) \Rightarrow \mathbf{d'}: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z-1}{-7}.$$

Vậy d' cắt mặt phẳng $x = 0$ tại điểm $E(0; 6; 8) \Rightarrow OE = 10$. **Chọn C.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;2), B(5;4;4)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - z + 6 = 0$.

Nếu M thay đổi thuộc (P) thì giá trị nhỏ nhất của $MA^2 + MB^2$ là

- A. 60. B. 50. C. $\frac{200}{3}$. D. $\frac{2968}{25}$.

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-5;2;2), B(-1;6;2)$. Mặt phẳng

$(P): x + y - 2z - 5 = 0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc (P) thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}|$ nhỏ nhất, khi đó tính giá trị của tích abc .

- A. -20. B. 0. C. 12. D. 24.

Câu 3: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho các điểm $A(5;8;-11), B(3;5;-4); C(2;1;-6)$ và mặt cầu

$(S): (x-4)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$. Gọi $M(x_M; y_M; z_M)$ là điểm trên (S) sao cho biểu thức

$|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P = x_M + y_M$.

- A. $P = 4$. B. $P = 0$. C. $P = -2$. D. $P = 2$.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;2), B(0;-1;6)$ và mặt phẳng

$(P): x + 2y - 2z + 12 = 0$. Gọi M là điểm di động trên mặt phẳng (P) . Tìm giá trị lớn nhất của $|MA - MB|$.

- A. $6\sqrt{2}$. B. $\sqrt{10}$. C. $3\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{10}$.

Câu 5: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;1), B(1;-1;0)$ và đường thẳng

$d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$. Gọi M là điểm thuộc đường thẳng d sao cho diện tích tam giác MAB nhỏ nhất. Tính

giá trị biểu thức $Q = x_M^2 + y_M^2 + z_M^2$

- A. $Q = 29$. B. $Q = \frac{53}{18}$. C. $Q = \frac{49}{18}$. D. $Q = \frac{101}{36}$.

Câu 6: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai điểm $M(0;1;3), B(10;6;0)$ và mặt phẳng (P) có

phương trình $(P): x - 2y + 2z - 10 = 0$. Điểm $I(-10;a;b)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $|IM - IN|$ lớn nhất.

Tính tổng $T = a + b$.

- A. $T = 6$. B. $T = 5$. C. $T = 1$. D. $T = 2$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x + y + z + 3 = 0$ và hai điểm

$A(3;1;1), B(7;3;9)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm trên mặt phẳng (α) sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Tính $S = a - 2b + 3c$.

- A. $S = -6$. B. $S = 19$. C. $S = 5$. D. $S = 6$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-3;5;-5), B(5;-3;7)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 6 = 0$. Lấy điểm $M(a;b;c)$ trên mặt phẳng (α) sao cho $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $S = a + b + c$.

- A. $S = 4$. B. $S = 3$. C. $S = 5$. D. $S = 6$.

Câu 9: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;-2;-3), B(-4;-4;1); C(2;-3;3)$. Tìm tọa độ điểm M trong mặt phẳng Oxz sao cho $MA^2 + MB^2 + 2MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $(0;0;3)$. B. $(0;0;2)$. C. $(0;0;1)$. D. $(0;0;-1)$.

Câu 10: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;-1), B(1;0;-1), C(0;1;0)$ Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng Oxy sao cho $AM^2 - 5BM^2 + 2CM^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính độ dài đoạn thẳng OM .

- A. $\frac{\sqrt{13}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{29}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{26}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;1;0), B(-9;4;9)$ và mặt phẳng

$(P): 2x - y + z + 1 = 0$. Gọi $I(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho $|IA - IB|$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó tổng $a + b + c$ là

- A. $a + b + c = 22$. B. $a + b + c = -4$. C. $a + b + c = -13$. D. $a + b + c = 13$.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-3;2), B(3;5;4)$. Tìm tọa độ điểm M trên trục Oz sao cho $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $M(0;0;49)$. B. $M(0;0;0)$. C. $M(0;0;67)$. D. $M(0;0;3)$.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;3)$ và $B(3;2;1)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và cách B một khoảng lớn nhất.

- A. $x - z - 2 = 0$. B. $3x + 2y + z - 10 = 0$.
C. $x + 2y + 3z - 10 = 0$. D. $x - z + 2 = 0$.

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x-4)^2 + (y-7)^2 + (z+1)^2 = 36$ và mặt phẳng $(P): 3x + y - z + m = 0$. Tìm m để mặt phẳng (P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính lớn nhất.

- A. $m = -20$. B. $m = 6$. C. $m = 36$. D. $m = 20$.

Câu 15: Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 1 = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng $(P): x + 3y - 2z - m = 0$ cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có chu vi lớn nhất.

- A. $m = 1$. B. $m = -13$. C. $m = 13$. D. $m = -1$.

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các tia Ox , Oy , Oz lần lượt tại các điểm A , B , C sao cho $T = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $(P): x + 2y + 3z - 14 = 0$. B. $(P): 6x - 3y + 2z - 6 = 0$.
C. $(P): 6x + 3y + 2z - 18 = 0$ D. $(P): 3x + 2y + z - 10 = 0$.

Câu 17: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-4}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{3}$. Xét mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ $M(0;0;0)$ đến (P) đạt giá trị lớn nhất. Xác định tọa độ giao điểm N của (P) và trục Oz .

- A. $N(0;0;-9)$. B. $N(0;0;9)$. C. $N(0;0;3)$. D. $N(0;0;6)$.

Câu 18: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$ và điểm $M(1;7;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ M đến (P) đạt giá trị lớn nhất.

- A. $2x - 6y + z - 4 = 0$. B. $2x + y - 2z - 10 = 0$.
C. $x + y + 2z - 15 = 0$ D. $x - 2y - z + 1 = 0$.

Câu 19: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;1;3)$ và cắt các trục tọa độ Ox , Oy , Oz lần lượt tại các điểm A , B , C không trùng với O sao cho biểu thức

$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $2x + y + 3z - 10 = 0$. B. $2x - y + 3z - 14 = 0$.
C. $2x + y + 3z - 14 = 0$ D. $2x + y - 3z - 14 = 0$.

Câu 20: Cho ba tia Ox , Oy , Oz đôi một vuông góc. Một điểm M cố định và khoảng cách từ điểm M đến các mặt phẳng (Oxy) , (Oyz) , (Oxz) lần lượt là a , b , c . Biết tồn tại mặt phẳng (P) qua M và cắt các tia Ox , Oy , Oz tại A , B , C sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

- A. $V_{\min} = \frac{9abc}{2}$. B. $V_{\min} = \frac{abc}{6}$. C. $V_{\min} = 27abc$. D. $V_{\min} = \frac{abc}{3}$.

Câu 21: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2;-2;1)$, $A(1;2;-3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-1}$. Tìm véc tơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M , vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách điểm A một khoảng bé nhất.

- A. $\vec{u} = (3;4;-4)$. B. $\vec{u} = (2;2;-1)$. C. $\vec{u} = (2;1;6)$. D. $\vec{u} = (1;0;2)$.

Câu 22: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho các điểm $M(2;2;-3)$ và $N(-4;2;1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M , song song với mặt phẳng $(P): 2x + y + z = 0$ sao cho khoảng cách từ N đến Δ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $\Delta: \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-4}$.

B. $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{-1}$.

C. $\Delta: \frac{x-2}{5} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-8}$.

D. $\Delta: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-2}{7} = \frac{z+3}{-3}$.

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): ax + by + cz + d = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 > 0$) đi qua hai điểm $M(5;1;3)$ và $N(1;6;2)$. Biết rằng khoảng cách từ điểm $P(5;0;4)$ đến mặt phẳng (α) đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị biểu thức $S = \frac{|a+b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

A. $S = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

B. $S = \frac{4\sqrt{14}}{7}$.

C. $S = \frac{\sqrt{14}}{7}$.

D. $S = \frac{10\sqrt{14}}{7}$.

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Gọi $I(3;3;3)$ là trung điểm của AB thì $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$$T = MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 2MI^2 + IA^2 + IB^2 \text{ nhỏ nhất } \Leftrightarrow MI_{\min}$$

Khi đó M là hình chiếu vuông góc của I trên $(P) \Rightarrow IM \perp (P)$

$$\text{Suy ra } MI_{\min} = d(M; (P)) = \frac{|2 \cdot 3 + 3 - 3 + 6|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{12}{\sqrt{6}} \Rightarrow T_{\min} = 2 \cdot \left(\frac{12}{\sqrt{6}}\right)^2 + IA^2 + IB^2 = 60. \text{ Chọn A.}$$

Câu 2: Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow I(-2;5;2)$

Khi đó $|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}| = |4\overrightarrow{MI}|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên (P) .

$$\text{Phương trình đường thẳng } IM \text{ qua } I \text{ vuông góc với } (P) \text{ là: } \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 5 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \Rightarrow M(-2 + t; 5 + t; 2 - 2t)$$

Cho $M \in (P) \Rightarrow t - 2 + 5 + 4t - 4 - 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(-1;6;0) \Rightarrow abc = 0$. **Chọn B.**

Câu 3: Gọi điểm $G(x;y;z)$ sao cho $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{GC} \Rightarrow G(0;-2;1)$

Xét mặt cầu $(S): (x-4)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ tâm $I(4;2;-1)$ và bán kính $R = 3$.

Ta có $\overrightarrow{IG} = (4;-4;2) \Rightarrow IG = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2} = 6 > R \Rightarrow G$ nằm ngoài mặt cầu (S) .

Ta có $|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = |-\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}| = |\overrightarrow{MG}| = MG \Rightarrow MG$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow I, M, G$ thẳng

hàng hay M chính là trung điểm của $IG \Rightarrow M(2;0;0) \Rightarrow \begin{cases} x_M = 2 \\ y_M = 0 \end{cases} \Rightarrow P = 2$. **Chọn D.**

Câu 4: Kí hiệu $f = x + 2y - 2z + 12$. Ta có $f(A) \cdot f(B) < 0$ nên A, B nằm khác phía so với mặt phẳng (P) . Gọi là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (P)

Ta có: $AA': \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{2}$. Khi đó $I = AA' \cap (P) \Rightarrow I(1+t; 2t; 2-2t) \in (P)$

$\Rightarrow t + 1 + 4t + 4t - 4 + 12 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow I(0;-2;4) \Rightarrow A'(-1;-4;6)$.

Lại có $|MA - MB| = |MA' - MB| \leq A'B$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow A', M, B$ thẳng hàng.

Vậy $|MA - MB|_{\max} = A'B = \sqrt{10}$. **Chọn B.**

Câu 5: Gọi $M(1+t; 1+2t; 1+3t) \in d \Rightarrow \overrightarrow{AM}(t-1; 2t+2; 3t); \overrightarrow{AB}(-1; 0; -1)$

Ta có $S_{MAB} = \frac{1}{2} \left| \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB} \right] \right| = \frac{1}{2} |(-2t-2; -2t-1; 2t+2)| = \frac{1}{2} \sqrt{(2t+2)^2 + (2t+1)^2 + (2t+2)^2}$
 $= \frac{1}{2} \sqrt{12t^2 + 20t + 9}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow t = \frac{-20}{24} = \frac{-5}{6} \Rightarrow M\left(\frac{1}{6}; \frac{-2}{3}; \frac{-3}{2}\right) \Rightarrow Q = \frac{49}{18}$. **Chọn C.**

Câu 6: Đặt $f = x - 2y + 2z - 10 \Rightarrow f(M) \cdot f(N) > 0 \Rightarrow M, N$ nằm cùng phía với mặt phẳng (P)

Ta có: $|IM - IN| \leq MN \Leftrightarrow M, N, I$ thẳng hàng.

Phương trình đường thẳng MN là:
$$\begin{cases} x = 10t \\ y = 1 + 5t \\ z = 3 - 3t \end{cases} \Rightarrow I = MN \cap (P) = (-10; -4; 6)$$

Suy ra $T = a + b = 2$. **Chọn D.**

Câu 7: Gọi $I(5; 2; 5)$ là trung điểm của AB

Ta có: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = 2MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên

$(\alpha): x + y + z + 3 = 0 \Rightarrow MI: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 + t \\ z = 5 + t \end{cases} \Rightarrow M(5+t; 2+t; 5+t)$

Cho $M \in (\alpha) \Rightarrow t + 5 + t + 2 + t + 5 + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -5 \Rightarrow M(0; -3; 0) \Rightarrow S = 6$. **Chọn A.**

Câu 8: Gọi $I(1; 1; 1)$ là trung điểm của AB

Ta có: $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + IA^2 + IB^2 = 2MI^2 + 2IA^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu

vuông góc của I trên $(P): x + y + z - 6 = 0 \Rightarrow MI: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases} \Rightarrow M(1+t; 1+t; 1+t)$

Giải $M \in (P) \Rightarrow t = 1 \Rightarrow M(2; 2; 2) \Rightarrow S = 6$. **Chọn D**

Câu 9: Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow I(0; -3; 1)$

Biến đổi $MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = 4MI^2 + IA^2 + IB^2 + 2IC^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên $(Oxz) \Rightarrow M(0; 0; 1)$. **Chọn C.**

Câu 10: Đặt $T = MA^2 - 5MB^2 + 2MC^2$

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} - 5\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow I\left(\frac{3}{2}; -1; -2\right)$

Biến đổi $T = -2MI^2 + IA^2 - 5IB^2 + 2IC^2$ lớn nhất $\Leftrightarrow MI_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên $Oxy \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; -1; 0\right) \Rightarrow OM = \frac{\sqrt{13}}{2}$. **Chọn A.**

Câu 11: Đặt $f = 2x - y + z + 1 \Rightarrow f(A) \cdot f(B) < 0 \Rightarrow M, N$ nằm khác phía so với $(P): 2x - y + z + 1 = 0$.

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (P) ta có: $AA': \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$

Khi đó $K = AA' \cap (P) \Rightarrow K(3+2t; 1-t; t) \in (P): 4t+6+t-1+t+1=0 \Rightarrow t=-1$

Do đó $K(1; 2; -1) \Rightarrow A'(-1; 3; -2)$.

Lại có $|IA - IB| = |IA' - IB| \leq A'B$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow A', I, B$ thẳng hàng.

Khi đó $A'B: \begin{cases} x = -1 + 8u \\ y = 3 - u \\ z = -2 - 11u \end{cases} \Rightarrow I = A'B \cap (P) \Rightarrow I(7; 2; -13) \Rightarrow a+b+c = -4$. **Chọn B.**

Câu 12: Gọi $M(0; 0; t) \Rightarrow MA^2 + MB^2 = 4 + 9 + (t-2)^2 + 9 + 25 + (t-4)^2 = 2t^2 - 12t + 67$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow t = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{2 \cdot 2} = 3 \Rightarrow M(0; 0; 3)$. **Chọn D.**

Câu 13: Gọi H là hình chiếu của B trên (α)

Ta có $BH \leq BA \Rightarrow BH_{\max} = AB$. Dấu bằng xảy ra khi $AB \perp (\alpha)$

Lại có $\overrightarrow{AB} = (2; 0; -2) \Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (α) là $x - z + 2 = 0$. **Chọn D.**

Câu 14: Mặt cầu (S) có tâm $I(4; 7; -1)$, bán kính $R = 6$.

Gọi r là bán kính đường tròn giao tuyến $\Rightarrow r^2 = \sqrt{R^2 - d^2(I; (P))}$

Để $r_{\max} \Leftrightarrow d(I; (P))$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow (P)$ đi qua $I \Rightarrow m = -20$. **Chọn A.**

Câu 15: $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (x+3)^2 = 16$ có tâm $I(1; 2; -3)$, bán kính $R = 4$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (P)$ đi qua tâm $I \Rightarrow 1 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) - m = 0 \Leftrightarrow m = 13$. **Chọn C.**

Câu 16: Gọi phương trình mặt phẳng $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, với $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$.

Vì (P) đi qua M suy ra $1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \Leftrightarrow 1 \leq \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) (1^2 + 2^2 + 3^2) \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{14}$

Ta có $T = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{14}$. Suy ra $T \geq \frac{1}{14}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = 14; b = 7; c = \frac{14}{3}$. Vậy $(P): \frac{x}{14} + \frac{y}{7} + \frac{3z}{14} = 1$. **Chọn A.**

Câu 17: Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M trên $(P), (d)$.

Khi đó

$d(M; (P)) = MH \leq MK \Rightarrow d(M; (P))_{\max} = MK$.

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M và chứa đường thẳng d .

Suy ra $\begin{cases} \vec{n}_{(P)} \perp \vec{u}_d \\ \vec{n}_{(P)} \perp \vec{n}_{(\alpha)} \end{cases} = [\vec{u}_d; \vec{MA}]$ với $A(4; 5; 0) \in (d)$.

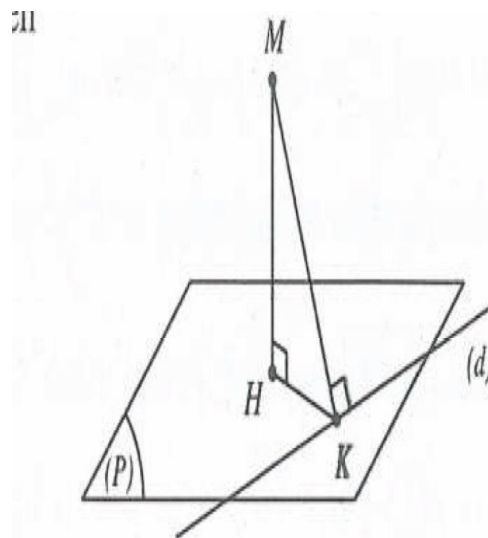
$\Rightarrow \vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_d; [\vec{u}_d; \vec{MA}]]$. Mà

$\begin{cases} \vec{u}_d = (1; 2; 3) \\ \vec{MA} = (4; 5; 0) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{(P)} = (1; 1; -1)$.

Do đó phương trình mặt phẳng $(P): x + y - z - 9 = 0$.

Vậy $N = P \cap Oz \rightarrow N(0; 0; 9)$. **Chọn B.**

Câu 18: Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M trên $(P), (d)$.



Khi đó $d(M;(P)) = MH \leq MK \Rightarrow d(M;(P))_{\max} = MK$

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M và chứa đường thẳng d .

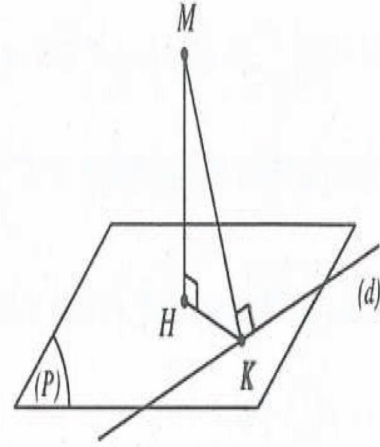
Suy ra $\begin{cases} \vec{n}_{(P)} \perp \vec{u}_d \\ \vec{n}_{(P)} \perp \vec{n}_{(\alpha)} \end{cases} = [\vec{u}_d; \vec{MA}]$ với $A(1;0;2) \in (d)$.

$$\Rightarrow \vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_d; [\vec{u}_d; \vec{MA}]].$$

Mà

$$\begin{cases} \vec{u}_d = (2;1;2) \\ \vec{MA} = (0;-7;-1) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{(P)} = (2;-6;1) \Rightarrow 2x - 6y + z - 4 = 0.$$

Chọn A.



Câu 19: Gọi phương trình mặt phẳng $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, với $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$.

Vì (P) đi qua M suy ra $1 = \frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{3}{c} \Leftrightarrow 1 \leq \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) (2^2 + 1^2 + 3^2) \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{14}$

Ta có $T = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{14}$. Suy ra $T \geq \frac{1}{14}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = 7; b = 14; c = \frac{14}{3}$. Vậy $(P): \frac{x}{7} + \frac{y}{14} + \frac{3z}{14} = 1$. **Chọn C.**

Câu 20: Ta có $M(a;b;c)$. Phương trình mặt phẳng là: $(P): A(x-b) + B(y-c) + C(z-a) = 0$

Khi đó $A\left(\frac{Ab+Bc+Ca}{A}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{Ab+Bc+Ca}{B}; 0\right), C\left(0; 0; \frac{Ab+Bc+Ca}{C}\right)$

Thể tích khối tứ diện $OABC$ là:

$$V = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = \left| \frac{(Ab+Bc+Ca)^3}{6ABC} \right| \geq \frac{(3\sqrt[3]{ABC \cdot abc})^3}{6ABC} = \frac{27abc}{6} = \frac{9abc}{2}. \text{ **Chọn A.**}$$

Câu 21: Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d khi đó $\vec{n}_{(P)} = \vec{u}_d = (2;2;-1)$.

Khi đó $\Delta \subset (P)$. Ta có: $d(A;d)_{\min} \Leftrightarrow \vec{u}_{\Delta} = [\vec{n}_{(P)}; [\vec{AM}; \vec{n}_{(P)}]]$. trong đó $\vec{AM}(-3;-4;4)$.

Suy ra $\overrightarrow{u_\Delta} = \left[\overrightarrow{n_{(P)}}; \left[\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{n_{(P)}} \right] \right] = 9(1; 0; 2)$. **Chọn D.**

Câu 22: Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua M , song song với mặt phẳng $(P): 2x + y + z = 0$ suy ra

$\overrightarrow{n_{(Q)}} = \overrightarrow{n_{(P)}} = (2; 1; 1)$. Khi đó $\Delta \subset (Q)$. Ta có: $\overrightarrow{MN} = (-6; 0; 4) = -2(3; 0; -2)$.

$$d(N; \Delta)_{\min} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_\Delta} = \left[\overrightarrow{n_{(Q)}}; \left[\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{n_{(Q)}} \right] \right] = -2(10; -4; -16) = -4(5; -2; -8).$$

Phương trình đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{5} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-8}$. **Chọn C.**

Câu 23: Gọi phương trình đường thẳng MN là: $\Delta: \frac{x-5}{4} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z-3}{1}$.

Gọi $H(5+4t; 1-5t; 3+t) \in MN$ là hình chiếu vuông góc của điểm P trên đường thẳng MN .

Khi đó: $\overrightarrow{PH} = (4t; 1-5t; -1+t); \overrightarrow{u_{MN}} = (4; -5; 1)$.

$$\text{Giải } \overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{u_{MN}} = 16t + 25t - 5 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{7} \Rightarrow \overrightarrow{PH} \left(\frac{4}{7}; \frac{2}{7}; \frac{-6}{7} \right)$$

Ta có: $d(P; (\alpha)) \leq PH$, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow PH \perp (\alpha) \Rightarrow \overrightarrow{n_{(\alpha)}} = \overrightarrow{PH} = \left(\frac{4}{7}; \frac{2}{7}; \frac{-6}{7} \right) = \frac{2}{7}(2; 1; -3)$.

Phương trình mặt phẳng (α) là: $2x + y - 3z - 2 = 0$. Gọi $I(1; 1; 1)$

Khi đó $S = d(I; (\alpha)) = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$. **Chọn C.**