

Câu 1. (4 điểm)

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0 \leq a \leq b \leq c$ và $a + b + c = ab + bc + ca$. Chứng minh rằng $\sqrt{bc}(a+1) \geq 2$.

Câu 2. (4 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) , đường cao AD , trực tâm H . Đường tròn đường kính AH cắt (O) tại điểm Q khác A . Đường tròn đường kính HQ cắt (O) tại điểm K khác Q . Gọi M là trung điểm BC .

- a) Đường thẳng qua H vuông góc với MH cắt BC tại X . Chứng minh rằng XK tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác KDM .
- b) Đường thẳng KQ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác KDM tại N khác K . Chứng minh rằng MN chia đôi AQ .

Câu 3. (4 điểm)

Cho số thực a và dãy số $(u_n)_{n \geq 1}$ xác định bởi $u_1 = a, u_{n+1} = u_n^2 + u_n + a^3$ ($n \geq 1$).

- a) Chứng minh rằng, với dãy $a \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right]$, dãy số hội tụ và tìm giới hạn đó.
- b) Cho $a = 2020$. Chứng minh rằng $u_n^2 + 2020^3$ luôn có ít nhất $n+4$ ước số nguyên tố khác nhau.

Câu 4. (4 điểm)

- a) Tìm tất cả các số tự nhiên k sao cho $2k+1$ và $4k+1$ đều là các số chính phương.
- b) Với mỗi số tự nhiên k thỏa mãn đề bài, chứng minh rằng $35 \mid (k^2 - 12k)$.

Câu 5. (4 điểm)

Sắp đến ngày Tết Trung thu, tổ chức Smile Foundation của trường THPT chuyên Bắc Giang làm bánh gây quỹ từ thiện thường niên. Sản phẩm năm nay là một cặp bánh dẻo, bánh nướng có tổng giá cặp bánh đó là 50000 đồng. Do số lượng có hạn nên mỗi bạn chỉ được mua đúng một cặp. Để mua bánh các bạn học sinh trường chuyên phải xếp hàng. Biết rằng trong hàng có $m+n$ bạn, trong đó m bạn cầm tờ 50000 đồng và n bạn cầm tờ 100000 đồng ($m, n \in \mathbb{N}^*, m \geq n$). Hỏi có bao nhiêu cách xếp hàng để không bạn nào phải chờ tiền trả lại, giả thiết rằng ban đầu ban tổ chức không cầm theo đồng tiền nào.

----- **HẾT** -----

<https://toanmath.com/>

Họ và tên thí sinh: Số báo danh: