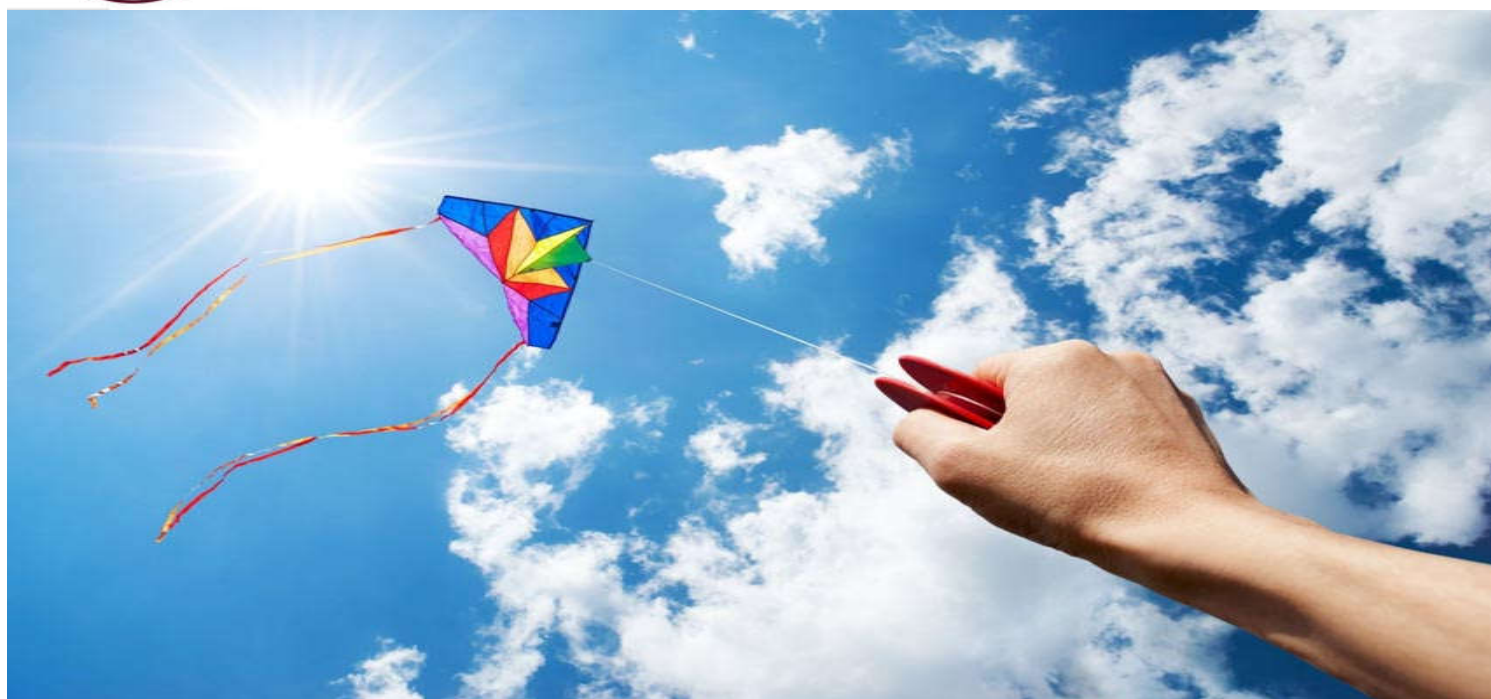




LỚP TOÁN THẦY CỬ- XÃ TẮC- TP HUẾ

Trung tâm Ứng dụng CN và dạy học MTC

SĐT: 0834 332 133



BÀI GIẢNG TOÁN 10 CÁNH DIỀU

TOANTHAYCU.COM

CHƯƠNG
IMỆNH ĐỀ TOÁN HỌC
TẬP HỢP

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau:
mệnh đề toán học, tập hợp và các phép toán trên tập hợp.

§1 MỆNH ĐỀ TOÁN HỌC



Số 15 chia hết cho 5.

Việt Nam là một nước ở
khu vực Đông Nam Á.

Trong hai phát biểu trên, phát biểu
nào là mệnh đề toán học?



I. MỆNH ĐỀ TOÁN HỌC



- Phát biểu của bạn H'Maryam có phải là một câu khẳng định về tính chất chia hết trong toán học hay không?
- Phát biểu của bạn Phuong có phải là một câu khẳng định về một sự kiện trong toán học hay không?

Phát biểu của bạn H'Maryam là một mệnh đề khẳng định về một sự kiện trong toán học, gọi là *mệnh đề toán học*.

Như vậy, phát biểu của bạn Phuong không phải là mệnh đề toán học.

Chú ý: Khi không sợ nhầm lẫn, ta thường gọi tắt mệnh đề toán học là mệnh đề.

Ví dụ 1 Phát biểu nào sau đây là một mệnh đề toán học?

- Hà Nội là Thủ đô của Việt Nam;
- Số π là một số hữu tỉ;
- $x = 1$ có phải là nghiệm của phương trình $x^2 - 1 = 0$ không?

Giải

Câu a) không phải là một mệnh đề toán học.

Câu b) là một mệnh đề toán học.

Câu c) là một câu hỏi nên không phải là một mệnh đề toán học.

1 Nêu hai ví dụ về mệnh đề toán học.

 **2** Trong hai mệnh đề toán học sau đây, mệnh đề nào là một khẳng định đúng? Mệnh đề nào là một khẳng định sai?

P : “Tổng hai góc đối của một tứ giác nội tiếp bằng 180° ”;

Q : “ $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ”.



Mỗi mệnh đề toán học phải hoặc đúng hoặc sai. Một mệnh đề toán học không thể vừa đúng, vừa sai.

Khi mệnh đề toán học là đúng, ta gọi mệnh đề đó là một *mệnh đề đúng*.

Khi mệnh đề toán học là sai, ta gọi mệnh đề đó là một *mệnh đề sai*.

Chẳng hạn, trong hai mệnh đề ở Hoạt động 2, mệnh đề thứ nhất là một mệnh đề đúng, mệnh đề thứ hai là một mệnh đề sai.

Ví dụ 2 Tìm mệnh đề đúng trong những mệnh đề sau:

A : “Tam giác có ba cạnh”;

B : “1 là số nguyên tố”.

2 Nêu ví dụ về một mệnh đề đúng và một mệnh đề sai.

Giải

Mệnh đề A là mệnh đề đúng; mệnh đề B là mệnh đề sai vì 1 không là số nguyên tố.

II. MỆNH ĐỀ CHỨA BIẾN



3 Xét câu “ n chia hết cho 3” với n là số tự nhiên.

a) Ta có thể khẳng định được tính đúng sai của câu trên hay không?

b) Với $n = 21$ thì câu “21 chia hết cho 3” có phải là mệnh đề toán học hay không? Nếu là mệnh đề toán học thì mệnh đề đó đúng hay sai?

c) Với $n = 10$ thì câu “10 chia hết cho 3” có phải là mệnh đề toán học hay không? Nếu là mệnh đề toán học thì mệnh đề đó đúng hay sai?



- Ta chưa khẳng định được tính đúng sai của câu “ n chia hết cho 3” với n là số tự nhiên.
- Với mỗi giá trị cụ thể của biến n , câu này cho ta một mệnh đề toán học mà ta có thể khẳng định được tính đúng sai của mệnh đề đó.

Câu “ n chia hết cho 3” là một *mệnh đề chứa biến*.

Ta thường kí hiệu mệnh đề chứa biến n là $P(n)$; mệnh đề chứa biến x, y là $P(x, y)$; ...

Ví dụ 3 Trong những câu sau, câu nào là mệnh đề chứa biến?

a) 18 chia hết cho 9;

b) $3n$ chia hết cho 9.

3 Nêu ví dụ về mệnh đề chứa biến.

Giải

- a) Câu “18 chia hết cho 9” là một mệnh đề nhưng không phải là mệnh đề chứa biến.
 b) Câu “ $3n$ chia hết cho 9” là một mệnh đề chứa biến, kí hiệu là $P(n)$: “ $3n$ chia hết cho 9”.

III. PHỦ ĐỊNH CỦA MỘT MỆNH ĐỀ

 Hai bạn Kiên và Cường đang tranh luận với nhau.

Kiên nói: “Số 23 là số nguyên tố”.

Cường nói: “Số 23 không là số nguyên tố”.

Em có nhận xét gì về hai câu phát biểu của Kiên và Cường?

 Cho mệnh đề P . Mệnh đề “Không phải P ” được gọi là *mệnh đề phủ định* của mệnh đề P và kí hiệu là $\bar{P}$.

Mệnh đề $\bar{P}$ đúng khi P sai.
 Mệnh đề $\bar{P}$ sai khi P đúng.

Ví dụ 4 Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và nhận xét tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó:

A: “16 là bình phương của một số nguyên”;

B: “Số 25 không chia hết cho 5”.

Giải

Mệnh đề $\bar{A}$: “16 không phải là bình phương của một số nguyên” và $\bar{A}$ sai.

Mệnh đề $\bar{B}$: “Số 25 chia hết cho 5” và $\bar{B}$ đúng.

Chú ý: Để phủ định một mệnh đề (có dạng phát biểu như trên), ta chỉ cần thêm (hoặc bớt) từ “không” (hoặc “không phải”) vào trước vị ngữ của mệnh đề đó.

4 Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và nhận xét tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó.

P : “5,15 là một số hữu tỉ”;

Q : “2 023 là số chẵn”.

IV. MỆNH ĐỀ KÉO THEO

 Xét hai mệnh đề:

P : “Số tự nhiên n chia hết cho 6”; Q : “Số tự nhiên n chia hết cho 3”.

Xét mệnh đề R : “Nếu số tự nhiên n chia hết cho 6 thì số tự nhiên n chia hết cho 3”.

Mệnh đề R có dạng phát biểu như thế nào?

 Cho hai mệnh đề P và Q . Mệnh đề “Nếu P thì Q ” được gọi là *mệnh đề kéo theo* và kí hiệu là $P \Rightarrow Q$.

Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ sai khi P đúng, Q sai và đúng trong các trường hợp còn lại.

Nhận xét: Tùy theo nội dung cụ thể, đôi khi người ta còn phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là “ P kéo theo Q ” hay “ P suy ra Q ” hay “Vì P nên Q ”...

Ví dụ 5 Cho tam giác ABC . Xét hai mệnh đề:

P : “Tam giác ABC có hai góc bằng 60° ”; Q : “Tam giác ABC đều”.

Hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và nhận xét tính đúng sai của mệnh đề đó.

Giải

$P \Rightarrow Q$: “Nếu tam giác ABC có hai góc bằng 60° thì tam giác ABC đều”.

Mệnh đề trên là đúng.

Nhận xét: Các định lý toán học là những mệnh đề đúng và thường phát biểu ở dạng mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$.

Khi đó ta nói

P là giả thiết, Q là kết luận của định lý, hay

P là điều kiện đủ để có Q , hoặc Q là điều kiện cần để có P .

5 Hãy phát biểu một định lý toán học ở dạng mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$.

V. MỆNH ĐỀ ĐẢO. HAI MỆNH ĐỀ TƯƠNG ĐƯƠNG

6 Cho tam giác ABC . Xét mệnh đề dạng $P \Rightarrow Q$ như sau:

“Nếu tam giác ABC vuông tại A thì tam giác ABC có $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ”.

Phát biểu mệnh đề $Q \Rightarrow P$ và xác định tính đúng sai của hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$.

- Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.
- Nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng thì ta nói P và Q là hai mệnh đề tương đương, kí hiệu $P \Leftrightarrow Q$.

Nhận xét: Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ có thể phát biểu ở những dạng như sau:

- “ P tương đương Q ”;
- “ P là điều kiện cần và đủ để có Q ”;
- “ P khi và chỉ khi Q ”;
- “ P nếu và chỉ nếu Q ”.

Ví dụ 6 Trong Hoạt động 6, cho biết hai mệnh đề P và Q có tương đương hay không. Nếu có, hãy phát biểu mệnh đề tương đương đó.

Giải

Trong Hoạt động 6, ta có:

Mệnh đề P : “Tam giác ABC vuông tại A ”;

Mệnh đề Q : “Tam giác ABC có $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ”.

6 Cho tam giác ABC . Từ các mệnh đề:

P : “Tam giác ABC đều”.

Q : “Tam giác ABC cân và có một góc bằng 60° ”.

hãy phát biểu hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ và xác định tính đúng sai của mỗi mệnh đề đó.

Nếu cả hai mệnh đề trên đều đúng, hãy phát biểu mệnh đề tương đương.

Theo định lý Pythagore, hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng. Do đó, hai mệnh đề P và Q là tương đương và có thể phát biểu như sau: “Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi tam giác ABC có $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ”.

Chú ý: Trong toán học, những câu khẳng định đúng phát biểu ở dạng “ $P \Leftrightarrow Q$ ” cũng được coi là một mệnh đề toán học, gọi là *mệnh đề tương đương*.

VI. KÍ HIỆU $\forall$ VÀ $\exists$

 **7** Cho mệnh đề “ n chia hết cho 3” với n là số tự nhiên.

- Phát biểu “Mọi số tự nhiên n đều chia hết cho 3” có phải là mệnh đề không?
- Phát biểu “Tồn tại số tự nhiên n chia hết cho 3” có phải là mệnh đề không?

- Phát biểu “Mọi số tự nhiên n đều chia hết cho 3” là một mệnh đề. Có thể viết lại mệnh đề đó như sau: “Với mọi số tự nhiên n , n đều chia hết cho 3”.
- Phát biểu “Tồn tại số tự nhiên n chia hết cho 3” là một mệnh đề. Có thể viết lại mệnh đề đó như sau: “Tồn tại số tự nhiên n , n chia hết cho 3”.



Để viết gọn phát biểu: “Với mọi số tự nhiên n ” ta dùng kí hiệu $\forall n \in \mathbb{N}$, ở đó kí hiệu “ $\forall$ ” đọc là “với mọi”. Khi đó, mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , n đều chia hết cho 3” có thể viết lại như sau: “ $\forall n \in \mathbb{N}$, n đều chia hết cho 3”.

Tương tự, để viết gọn phát biểu: “Tồn tại số tự nhiên n ” ta dùng kí hiệu $\exists n \in \mathbb{N}$, ở đó kí hiệu “ $\exists$ ” đọc là “tồn tại” hoặc “có một” (tồn tại một) hoặc “có ít nhất một” (tồn tại ít nhất một). Khi đó, mệnh đề “Tồn tại số tự nhiên n , n chia hết cho 3” có thể viết lại như sau: “ $\exists n \in \mathbb{N}$, n chia hết cho 3”.

Ví dụ 7

Sử dụng kí hiệu “ $\forall$ ” để viết mỗi mệnh đề sau và xét xem mệnh đề đó là đúng hay sai, giải thích vì sao.

- P : “Với mọi số thực x , $x^2 + 1 > 0$ ”.
- Q : “Với mọi số tự nhiên n , $n^2 + n$ chia hết cho 6”.

Giải

- Mệnh đề được viết là P : “ $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$ ”. Để chứng minh mệnh đề P là đúng, ta làm như sau:

Xét một số thực x tùy ý, ta phải chứng tỏ rằng $x^2 + 1 > 0$. Thật vậy, ta có: $x^2 + 1 \geq 1 > 0$. Vậy mệnh đề P là mệnh đề đúng.

- Mệnh đề được viết là Q : “ $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n^2 + n) : 6$ ”.

Để chứng minh mệnh đề Q là sai, ta cần chỉ ra một giá trị cụ thể của n để nhận được mệnh đề sai.

Thật vậy, chọn $n = 1$, ta thấy $n^2 + n = 2$ không chia hết cho 6. Vậy mệnh đề Q là mệnh đề sai.

Ví dụ 8

Sử dụng kí hiệu “ $\exists$ ” để viết mỗi mệnh đề sau và xét xem mệnh đề đó là đúng hay sai, giải thích vì sao.

- a) M : “Tồn tại số thực x sao cho $x^3 = -8$ ”.
 b) N : “Tồn tại số nguyên x sao cho $2x + 1 = 0$ ”.

Giải

- a) Mệnh đề được viết là M : “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^3 = -8$ ”.

Để chứng tỏ mệnh đề M là đúng, ta cần chỉ ra một giá trị cụ thể của x để nhận được mệnh đề đúng. Thật vậy, chọn $x = -2$, ta thấy $(-2)^3 = -8$. Vậy mệnh đề M là mệnh đề đúng.

- b) Mệnh đề được viết là N : “ $\exists x \in \mathbb{Z}, 2x + 1 = 0$ ”.

Để chứng minh mệnh đề N là sai, ta phải chứng tỏ rằng với số nguyên x tùy ý thì $2x + 1 \neq 0$. Thật vậy, xét một số nguyên x tùy ý, ta có $2x + 1$ không chia hết cho 2 nên $2x + 1 \neq 0$. Vì thế mệnh đề N là mệnh đề sai.

Chú ý: Cách làm ở Ví dụ 7, Ví dụ 8 lần lượt cho chúng ta phương pháp chứng minh một mệnh đề có kí hiệu “ $\forall$ ”, có kí hiệu “ $\exists$ ”, là đúng hoặc sai.



Bạn An nói: “Mọi số thực đều có bình phương là một số không âm”.

Bạn Bình phủ định lại câu nói của bạn An: “Có một số thực mà bình phương của nó là một số âm”.

- a) Sử dụng kí hiệu “ $\forall$ ” để viết mệnh đề của bạn An.
 b) Sử dụng kí hiệu “ $\exists$ ” để viết mệnh đề của bạn Bình.



An: “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2$ là một số không âm”

Bình: “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2$ là một số âm”



Cho mệnh đề “ $P(x), x \in X$ ”.

- Phủ định của mệnh đề “ $\forall x \in X, P(x)$ ” là mệnh đề “ $\exists x \in X, \overline{P(x)}$ ”.
- Phủ định của mệnh đề “ $\exists x \in X, P(x)$ ” là mệnh đề “ $\forall x \in X, \overline{P(x)}$ ”.

Ví dụ 9

Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau:

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq x$; b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$.

Giải

- a) Phủ định của mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq x$ " là mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R}, |x| < x$ ".
- b) Phủ định của mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$ " là mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0$ ".

7 Phát biểu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau:

- a) Tồn tại số nguyên chia hết cho 3;
- b) Mọi số thập phân đều viết được dưới dạng phân số.

BÀI TẬP

- Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là mệnh đề toán học?
 - Tích hai số thực trái dấu là một số thực âm.
 - Mọi số tự nhiên đều là số dương.
 - Có sự sống ngoài Trái Đất.
 - Ngày 1 tháng 5 là ngày Quốc tế Lao động.
- Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và nhận xét tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó:
 - A: " $\frac{5}{1,2}$ là một phân số";
 - B: "Phương trình $x^2 + 3x + 2 = 0$ có nghiệm";
 - C: " $2^2 + 2^3 = 2^{2+3}$ ";
 - D: "Số 2 025 chia hết cho 15".
- Cho n là số tự nhiên. Xét các mệnh đề:

P : " n là một số tự nhiên chia hết cho 16";

Q : " n là một số tự nhiên chia hết cho 8".

 - Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Nhận xét tính đúng sai của mệnh đề đó.
 - Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Nhận xét tính đúng sai của mệnh đề đó.
- Cho tam giác ABC . Xét các mệnh đề:

P : "Tam giác ABC cân";

Q : "Tam giác ABC có hai đường cao bằng nhau".

Phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ bằng bốn cách.
- Dùng kí hiệu " $\forall$ " hoặc " $\exists$ " để viết các mệnh đề sau:
 - Có một số nguyên không chia hết cho chính nó;
 - Mọi số thực cộng với 0 đều bằng chính nó.
- Phát biểu các mệnh đề sau:
 - $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$;
 - $\exists x \in \mathbb{R}, \frac{1}{x} > x$.
- Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề phủ định đó:
 - $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 2x - 2$;
 - $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2x - 1$;
 - $\exists x \in \mathbb{R}, x + \frac{1}{x} \geq 2$;
 - $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 < 0$.

Dạng 1: Nhận biết mệnh đề, mệnh đề chứa biến**1. Phương pháp**

Mệnh đề là một câu khẳng định đúng hoặc một câu khẳng định sai.

- ☐ Một câu khẳng định đúng được gọi là một mệnh đề đúng, một câu khẳng định sai được gọi là mệnh đề sai.
- ☐ Câu hỏi, câu cảm thán, câu mệnh lệnh hoặc câu chưa xác định được tính đúng sai thì không phải là mệnh đề.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Các câu sau đây, câu nào là mệnh đề, câu nào không phải là mệnh đề? Nếu là mệnh đề hãy cho biết mệnh đề đó đúng hay sai.

- (1) Ở đây đẹp quá!
- (2) Phương trình $x^2 - 3x + 1 = 0$ vô nghiệm
- (3) 16 không là số nguyên tố
- (4) Hai phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$ và $x^2 - \sqrt{x+3} + 1 = 0$ có nghiệm chung.
- (5) Số π có lớn hơn 3 hay không?
- (6) Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng có diện tích bằng nhau.

Lời giải

Câu (1) và (5) không là mệnh đề (vì là câu cảm thán, câu hỏi)

Các câu (3), (4),

Câu (2) và (6) là những mệnh đề sai.

Ví dụ 1: Cho các phát biểu sau, có bao nhiêu phát biểu là mệnh đề?

- a) Hà Nội là thủ đô của Việt Nam.
- b) $x \in \mathbb{R}, x + 2 > 5$.
- c) $x - 6 \leq 5$.
- d) Phương trình $x^2 - 6x + 5 = 0$ có nghiệm.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B.

Câu b), c) là mệnh đề chứa biến.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Phát biểu nào sau đây là một mệnh đề?

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------------|
| A. Mùa thu Hà Nội đẹp quá! | B. Bạn có đi học không? |
| C. Đề thi môn Toán khó quá! | D. Hà Nội là thủ đô của Việt Nam. |

Hướng dẫn giải**Chọn D.**

Phát biểu ở A, B, C là câu cảm và câu hỏi nên không là mệnh đề.

Câu 2. Câu nào sau đây không là mệnh đề?**A.** Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau.**B.** $3 < 1$.**C.** $4 - 5 = 1$.**D.** Bạn học giỏi quá!**Hướng dẫn giải****Chọn D.**

Vì “Bạn học giỏi quá!” là câu cảm thán không có khẳng định đúng hoặc sai.

Câu 3. Cho các phát biểu sau đây:

1. “17 là số nguyên tố”

2. “Tam giác vuông có một đường trung tuyến bằng nửa cạnh huyền”

3. “Các em C14 hãy cố gắng học tập thật tốt nhé !”

4. “Mọi hình chữ nhật đều nội tiếp được đường tròn”

Hỏi có bao nhiêu phát biểu là một đề?

A. 4.**B.** 3.**C.** 2.**D.** 1.**Hướng dẫn giải****Chọn B.**

♦ Câu 1 là mệnh đề.

♦ Câu 2 là mệnh đề.

♦ Câu 3 không phải là mệnh đề.

♦ Câu 4 là mệnh đề.

Câu 4. Cho các câu sau đây:

1. “Phan-xi-păng là ngọn núi cao nhất Việt Nam”.

2. “ $\pi^2 < 9,86$ ”.

3. “Mệt quá!”.

4. “Chị ơi, mấy giờ rồi?”.

Hỏi có bao nhiêu câu là mệnh đề?

A. 1.**B.** 3.**C.** 4.**D.** 2.**Hướng dẫn giải****Chọn D.**

Mệnh đề là một khẳng định có tính đúng hoặc sai, không thể vừa đúng vừa sai.

Do đó 1,2 là mệnh đề và 3,4 không là mệnh đề.

Câu 5. Câu nào trong các câu sau không phải là mệnh đề?

A. π có phải là một số vô tỷ không?.

B. $2 + 2 = 5$.

C. $\sqrt{2}$ là một số hữu tỷ.

D. $\frac{4}{2} = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Câu 6. Trong các câu sau, câu nào không phải là mệnh đề?

A. Buồn ngủ quá!

B. Hình thoi có hai đường chéo vuông góc với nhau.

C. 8 là số chính phương.

D. Băng Cốc là thủ đô của Mianma.

Lời giải.

Chọn A

Câu cảm thán không phải là mệnh đề.

Câu 7. Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là không phải là mệnh đề?

a) Huế là một thành phố của Việt Nam.

b) Sông Hương chảy ngang qua thành phố Huế.

c) Hãy trả lời câu hỏi này!

d) $5 + 19 = 24$.

e) $6 + 81 = 25$.

f) Bạn có rồi tôi nay không?

g) $x + 2 = 11$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải.

Chọn C

Các câu c), f), g) không phải là mệnh đề

Câu 8: Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là mệnh đề?

a) Hãy đi nhanh lên!

b) Hà Nội là thủ đô của Việt Nam.

c) $5 + 7 + 4 = 15$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"

Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng

Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

d) Năm 2018 là năm nhuận.

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải.

Chọn B

Câu a) là câu cảm thán không phải là mệnh đề.

Câu 9: Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là mệnh đề?

a) Có lên, sắp đói rồi!

b) Số 15 là số nguyên tố.

c) Tổng các góc của một tam giác là 180° .

d) x là số nguyên dương.

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Lời giải.

Chọn B

Câu a), d) không là mệnh đề.

Câu 10: Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề?

A. Đi ngủ đi!

B. Trung Quốc là nước đông dân nhất thế giới.

C. Bạn học trường nào?

D. Không được làm việc riêng trong giờ học.

Lời giải.

Chọn B

Câu 11: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. Tổng của hai số tự nhiên là một số chẵn khi và chỉ khi cả hai số đều là số chẵn.

B. Tích của hai số tự nhiên là một số chẵn khi và chỉ khi cả hai số đều là số chẵn.

C. Tổng của hai số tự nhiên là một số lẻ khi và chỉ khi cả hai số đều là số lẻ.

D. Tích của hai số tự nhiên là một số lẻ khi và chỉ khi cả hai số đều là số lẻ.

Lời giải.

Chọn D

A là mệnh đề sai: Ví dụ: $1+3=4$ là số chẵn nhưng 1,3 là số lẻ.

B là mệnh đề sai: Ví dụ: $2.3=6$ là số chẵn nhưng 3 là số lẻ.

C là mệnh đề sai: Ví dụ: $1+3=4$ là số chẵn nhưng 1,3 là số lẻ.

Câu 12: Mệnh đề $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2 + a > 0$ với a là số thực cho trước. Tìm a để mệnh đề đúng

- A. $a \leq 2$. B. $a < 2$. C. $a = 2$. D. $a > 2$.

Lời giải

Chọn D

Vì $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2 + a > 0 \Leftrightarrow x^2 > 2 - a \Leftrightarrow 2 - a < 0 \Leftrightarrow a > 2$.

Câu 13: Với giá trị nào của x thì " $x^2 - 1 = 0, x \in \mathbb{N}$ " là mệnh đề đúng.

- A. $x = 1$. B. $x = -1$. C. $x = \pm 1$. D. $x = 0$.

Lời giải

Chọn A

- B. Không hiểu rõ câu hỏi và tập $\mathbb{N}$.
C. Không hiểu rõ câu hỏi và tập $\mathbb{N}$.
D. Không biết giải phương trình.

Dạng 2: Xét tính đúng sai của mệnh đề

1. Phương pháp

Một câu khẳng định đúng là mệnh đề đúng, một câu khẳng định sai là mệnh đề sai.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho mệnh đề chứa biến $P(x): "3x + 5 \leq x^2"$ với x là số thực. Mệnh đề nào sau đây là đúng:

- A. $P(3)$. B. $P(4)$. C. $P(1)$. D. $P(5)$.

Hướng dẫn giải

$P(3): "3.3 + 5 \leq 3^2" \Leftrightarrow "14 \leq 9"$ là mệnh đề sai.

$P(4): "3.4 + 5 \leq 4^2" \Leftrightarrow "17 \leq 16"$ là mệnh đề sai.

$P(1): "3.1 + 5 \leq 1^2" \Leftrightarrow "8 \leq 1"$ là mệnh đề sai.

$P(5): "3.5 + 5 \leq 5^2" \Leftrightarrow "20 \leq 25"$ là mệnh đề đúng.

Ví dụ 2: Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề đúng?

- A. Nếu $a \geq b$ thì $a^2 \geq b^2$.
B. Nếu a chia hết cho 9 thì a chia hết cho 3.
C. Nếu em chăm chỉ thì em thành công.
D. Nếu một tam giác có một góc bằng 60° thì tam giác đó đều.

Hướng dẫn giải**Chọn B.**

Mệnh đề A là một mệnh đề sai vì $b \leq a < 0$ thì $b^2 \geq a^2$.

Mệnh đề B là mệnh đề đúng. Vì $a:9 \Rightarrow \begin{cases} a=9n, n \in \mathbb{Z} \\ 9:3 \end{cases} \Rightarrow a:3$.

Câu C chưa là mệnh đề vì chưa khẳng định được tính đúng, sai.

Mệnh đề D là mệnh đề sai vì chưa đủ điều kiện để khẳng định một tam giác là đều.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\forall x \in \mathbb{R}$ sao cho $x+1 > x$.

B. $\forall x \in \mathbb{R}$ sao cho $|x| = x$.

C. $\exists x \in \mathbb{R}$ sao cho $x-3 = x^2$.

D. $\exists x \in \mathbb{R}$ sao cho $x^2 < 0$.

Lời giải**Chọn A**

A: Đúng vì VT luôn lớn hơn VP 1 đơn vị.

B: HS nhầm trong tập hợp số tự nhiên.

C: HS nhầm là tìm được x ở VT để được số chính phương ở VP.

D: HS nhầm ở số 0.

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 1 \Rightarrow x > -1$.

B. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 1 \Rightarrow x > 1$.

C. $\forall x \in \mathbb{R}, x > -1 \Rightarrow x^2 > 1$.

D. $\forall x \in \mathbb{R}, x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$.

Hướng dẫn giải**Chọn D.**

Ta có $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 1 \end{cases}$. Ta xét theo một chiều của mệnh đề ta thấy D đúng.

Câu 3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $6\sqrt{2}$ là số hữu tỷ.

B. Phương trình $x^2 + 7x - 2 = 0$ có 2 nghiệm trái dấu.

C. 17 là số chẵn.

D. Phương trình $x^2 + x + 7 = 0$ có nghiệm.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình $x^2 + 7x - 2 = 0$ có $a.c = 1.(-2) < 0$ nên nó có 2 nghiệm trái dấu.

Vậy mệnh đề ở phương án B là mệnh đề đúng. Các mệnh đề còn lại đều sai.

Câu 4: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề sai?

A. $-\pi < -2 \Leftrightarrow \pi^2 < 4$.

B. $\pi < 4 \Leftrightarrow \pi^2 < 16$.

C. $\sqrt{23} < 5 \Rightarrow 2\sqrt{23} < 2.5$.

D. $\sqrt{23} < 5 \Rightarrow -2\sqrt{23} > -2.5$.

Lời giải.**Chọn A**

Xét đáp án A. Ta có: $\pi^2 < 4 \Leftrightarrow |\pi| < 2 \Leftrightarrow -2 < \pi < 2$. Suy ra A sai.

Câu 5: Trong các mệnh đề dưới đây mệnh đề nào đúng?

A. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$.

B. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > x$.

C. $\exists r \in \mathbb{Q}, r^2 = 7$.

D. $\forall n \in \mathbb{N}, n + 4$ chia hết cho 4.

Lời giải**Chọn A**

A: Đúng vì $x^2 \geq 0$ nên $x^2 + 1 > 0$.

B: HS hiểu nhầm mọi số bình phương đều lớn hơn chính nó.

C: HS hiểu nhầm $\sqrt{7} \in \mathbb{Q}$.

Câu 6: Hỏi trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. " $\forall x \in \mathbb{R}, x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$ ".

B. " $\forall x \in \mathbb{R}, x > -3 \Rightarrow x^2 > 9$ ".

C. " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 9 \Rightarrow x > 3$ ".

D. " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 9 \Rightarrow x > -3$ ".

Lời giải**Chọn A**

B, C, D sai là không biết mệnh đề kéo theo.

Dạng 3: Phủ định của mệnh đề**1. Phương pháp**

Cho mệnh đề P . Mệnh đề “Không phải P ” gọi là mệnh đề phủ định của P . Ký hiệu là $\bar{P}$. Nếu P đúng thì $\bar{P}$ sai, nếu P sai thì $\bar{P}$ đúng.

Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$ với $x \in X$

□ Mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\forall x \in X, P(x)$ " là " $\exists x \in X, \overline{P(x)}$ "

□ Mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\exists x \in X, P(x)$ " là " $\forall x \in X, \overline{P(x)}$ "

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau, cho biết mệnh đề này đúng hay sai?

P : " Hình thoi có hai đường chéo vuông góc với nhau"

Q : " 6 là số nguyên tố"

R : " Tổng hai cạnh của một tam giác lớn hơn cạnh còn lại"

S : " $5 > -3$ "

K : " Phương trình $x^4 - 2x^2 + 2 = 0$ có nghiệm "

H : " $(\sqrt{3} - \sqrt{12})^2 = 3$ "

Lời giải

Ta có các mệnh đề phủ định là

$\overline{P}$: " Hai đường chéo của hình thoi không vuông góc với nhau", mệnh đề này sai

$\overline{Q}$: " 6 không phải là số nguyên tố", mệnh đề này đúng

$\overline{R}$: " Tổng hai cạnh của một tam giác nhỏ hơn hoặc bằng cạnh còn lại", mệnh đề này sai

$\overline{S}$: " $5 \leq -3$ ", mệnh đề này sai

Ví dụ 2: Cho mệnh đề chứa biến " $P(x) : x > x^3$ " , xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) $P(1)$ b) $P\left(\frac{1}{3}\right)$ c) $\forall x \in N, P(x)$ d) $\exists x \in N, \overline{P(x)}$

Lời giải

a) Ta có $P(1) : 1 > 1^3$ đây là mệnh đề sai

b) Ta có $P\left(\frac{1}{3}\right) : \frac{1}{3} > \left(\frac{1}{3}\right)^3$ đây là mệnh đề đúng

c) Ta có $\forall x \in N, x > x^3$ là mệnh đề sai vì $P(1)$ là mệnh đề sai

d) Ta có $\exists x \in N, x \leq x^3$ là mệnh đề đúng vì $x - x^3 = x(1 - x)(1 + x) \leq 0$ với mọi số tự nhiên.

Ví dụ 3: Dùng các kí hiệu để viết các câu sau và viết mệnh đề phủ định của nó.

- a) Tích của ba số tự nhiên liên tiếp chia hết cho sáu
b) Với mọi số thực bình phương của nó là một số không âm.
c) Có một số nguyên mà bình phương của nó bằng chính nó.

Giao viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"

Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng

Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

d) Có một số hữu tỉ mà nghịch đảo của nó lớn hơn chính nó.

Lời giải

a) Ta có $P: \forall n \in \mathbb{N}, n(n+1)(n+2) \vdots 6$, mệnh đề phủ định là $\overline{P}: \exists n \in \mathbb{N}, n(n+1)(n+2) \not\vdots 6$.

b) Ta có $Q: \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$, mệnh đề phủ định là $\overline{Q}: \exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$

c) Ta có $R: \exists n \in \mathbb{Z}, n^2 = n$, mệnh đề phủ định là $\overline{R}: \forall n \in \mathbb{Z}, n^2 \neq n$.

d) $\exists q \in \mathbb{Q}, \frac{1}{q} > q$, mệnh đề phủ định là $\forall q \in \mathbb{Q}, \frac{1}{q} \leq q$.

Ví dụ 4: Xác định tính đúng sai của mệnh đề sau và tìm phủ định của nó :

a) A : " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ "

b) B: " Tồn tại số tự nhiên đều là số nguyên tố".

c) C : " $\exists x \in \mathbb{N}, x$ chia hết cho $x + 1$ "

d) D: " $\forall n \in \mathbb{N}, n^4 - n^2 + 1$ là hợp số "

e) E: " Tồn tại hình thang là hình vuông ".

f) F: " Tồn tại số thực a sao cho $a + 1 + \frac{1}{a+1} \leq 2$ "

Lời giải

a) Mệnh đề A đúng và $\overline{A}: \exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$

b) Mệnh đề B đúng và $\overline{B}: "$ Với mọi số tự nhiên đều không phải là số nguyên tố"

c) Mệnh đề C đúng vì cho $x = 0$ và $\overline{C}: "$ $\forall x \in \mathbb{N}, x \nmid (x + 1)$ "

d) Mệnh đề D sai vì với $n = 2$ ta có $n^4 - n^2 + 1 = 13$ không phải là hợp số

Mệnh đề phủ định là $\overline{D}: "$ $\exists n \in \mathbb{N}, n^4 - n^2 + 1$ là số nguyên tố"

e) Mệnh đề E đúng và $\overline{E}: "$ Với mọi hình thang đều không là hình vuông ".

f) Mệnh đề F đúng và mệnh đề phủ định là $\overline{F}: "$ Với mọi số thực a thì $a + 1 + \frac{1}{a+1} > 2$ "

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho mệnh đề: " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 5 > 0$ ". Mệnh đề phủ định của mệnh đề trên là

A. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 5 \leq 0$.

B. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 5 \leq 0$.

C. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 5 < 0$.

D. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 5 > 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Chú ý: Phủ định của mệnh đề “ $\forall x \in \mathbb{R}, p(x)$ ” là “ $\exists x \in \mathbb{R}, \overline{p(x)}$ ”.

Câu 2. Cho mệnh đề “Có một học sinh trong lớp C4 không chấp hành luật giao thông”. Mệnh đề phủ định của mệnh đề này là

A. Không có học sinh nào trong lớp C4 chấp hành luật giao thông.

B. Mọi học sinh trong lớp C4 đều chấp hành luật giao thông.

C. Có một học sinh trong lớp C4 chấp hành luật giao thông.

D. Mọi học sinh trong lớp C4 không chấp hành luật giao thông.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Mệnh đề phủ định là “Mọi học sinh trong lớp C4 đều chấp hành luật giao thông”.

Câu 3. Cho mệnh đề: “Có một học sinh trong lớp 10A không thích học môn Toán”. Mệnh đề phủ định của mệnh đề này là:

A. “Mọi học sinh trong lớp 10A đều thích học môn Toán”.

B. “Mọi học sinh trong lớp 10A đều không thích học môn Toán”.

C. “Mọi học sinh trong lớp 10A đều thích học môn Văn”.

D. “Có một học sinh trong lớp 10A thích học môn Toán”.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Câu 4. Mệnh đề phủ định của mệnh đề “2018 là số tự nhiên chẵn” là

A. 2018 là số chẵn.

B. 2018 là số nguyên tố.

C. 2018 không là số tự nhiên chẵn.

D. 2018 là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Câu 5. Mệnh đề: “Mọi động vật đều di chuyển” có mệnh đề phủ định là

A. Có ít nhất một động vật di chuyển.

B. Mọi động vật đều đứng yên.

C. Có ít nhất một động vật không di chuyển.

D. Mọi động vật đều không di chuyển.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Câu 6: Cho mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$ ". Hỏi mệnh đề nào là mệnh đề phủ định của mệnh đề trên?

A. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \geq 0$.

B. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 > 0$.

C. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$.

D. $\nexists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$.

Lời giải

Chọn A

B : sai là gì không dùng đúng kí hiệu của phủ định.

C : sai là gì không dùng đúng $\geq$.

D : sai kí hiệu không tồn tại.

Câu 7: Cho mệnh đề: " $\exists x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 3x - 5 < 0$ ". Mệnh đề phủ định sẽ là

A. " $\forall x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 3x - 5 \geq 0$ ".

B. " $\forall x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 3x - 5 > 0$ ".

C. " $\exists x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 3x - 5 > 0$ ".

D. " $\exists x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 3x - 5 \geq 0$ ".

Lời giải

Chọn A

Đáp án A đúng vì phủ định của " $\exists$ " là " $\forall$ " và phủ định của dấu "<" là dấu " $\geq$ ".

Đáp án B sai vì học sinh nhầm phủ định của dấu "<" là dấu ">".

Đáp án C sai vì học sinh không nhớ phủ định của " $\exists$ " là " $\forall$ " và phủ định dấu "<" là dấu " $\geq$ ".

Đáp án D sai vì học sinh không nhớ phủ định của " $\exists$ " là " $\forall$ ".

Câu 8: Mệnh đề phủ định của mệnh đề: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 > 0$ là

A. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 \leq 0$.

B. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 \leq 0$.

C. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 < 0$.

D. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 < 0$.

Lời giải

Chọn A

B: HS quên biến đổi lượng từ.

C: HS quên trường hợp dấu bằng.

D: HS quên cả đổi lượng từ và dấu bằng.

Câu 9: Mệnh đề phủ định của mệnh đề "Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) vô nghiệm" là mệnh đề nào sau đây?

A. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có nghiệm.

B. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có 2 nghiệm phân biệt.

C. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có nghiệm kép.

D. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) không có nghiệm.

Lời giải

Chọn A

Đáp án A đúng vì phủ định vô nghiệm là có nghiệm.

Đáp án B sai vì học sinh nhầm phủ định vô nghiệm là phương trình sẽ có 2 nghiệm phân biệt.

Đáp án C sai vì học sinh nhầm phủ định vô nghiệm là có 1 nghiệm tức nghiệm kép.

Đáp án D sai vì học sinh không hiểu câu hỏi của đề, học sinh nghĩ vô nghiệm là không có nghiệm.

Câu 10. Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 > 0$.

A. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 < 0$.

B. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 < 0$.

C. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 \leq 0$.

D. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 \leq 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 > 0$. Suy ra mệnh đề phủ định là $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 \leq 0$.

Câu 11. Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > x$ ".

A. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \leq x$.

B. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 > x$.

C. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq x$.

D. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < x$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Mệnh đề $A : "\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > x" \Rightarrow \bar{A} : "\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq x"$.

Câu 12. Cho x là số tự nhiên. Phủ định của mệnh đề " $\forall x$ chẵn, $x^2 + x$ là số chẵn" là mệnh đề:

A. $\exists x$ lẻ, $x^2 + x$ là số lẻ.

B. $\exists x$ lẻ, $x^2 + x$ là số chẵn.

C. $\forall x$ lẻ, $x^2 + x$ là số lẻ.

D. $\exists x$ chẵn, $x^2 + x$ là số lẻ.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Mệnh đề phủ định là " $\exists x$ lẻ, $x^2 + x$ lẻ".

Câu 13. Phủ định của mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{Q} : 2x^2 - 5x + 2 = 0$ " là

A. " $\exists x \in \mathbb{Q} : 2x^2 - 5x + 2 > 0$ ".

B. " $\exists x \in \mathbb{Q} : 2x^2 - 5x + 2 \neq 0$ ".

C. " $\forall x \in \mathbb{Q} : 2x^2 - 5x + 2 \neq 0$ ".

D. " $\forall x \in \mathbb{Q} : 2x^2 - 5x + 2 = 0$ ".

Hướng dẫn giải**Chọn C.**

Vì phủ định của mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{Q} : 2x^2 - 5x + 2 = 0$ " là " $\forall x \in \mathbb{Q} : 2x^2 - 5x + 2 \neq 0$ ".

Câu 14. Cho mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$ ". Hỏi mệnh đề nào là mệnh đề phủ định của mệnh đề trên?

A. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 > 0$.

B. $\nexists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$.

C. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \geq 0$.

D. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \leq 0$.

Hướng dẫn giải**Chọn C.**

Phủ định của mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$ " là mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \geq 0$ ".

Câu 15. Mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 = 0$ " là

A. " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 \neq 0$ ".

B. " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 > 0$ ".

C. " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 = 0$ ".

D. " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 \neq 0$ ".

Hướng dẫn giải**Chọn A.**

Mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 = 0$ " là " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 \neq 0$ ".

Câu 16. Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề $P : \forall x \in \mathbb{N}; x^2 + x - 1 > 0$.

A. $\bar{P} : \forall x \in \mathbb{N}; x^2 + x - 1 > 0$.

B. $\bar{P} : \exists x \in \mathbb{N}; x^2 + x - 1 \leq 0$.

C. $\bar{P} : \exists x \in \mathbb{N}; x^2 + x - 1 > 0$.

D. $\bar{P} : \forall x \in \mathbb{N}; x^2 + x - 1 \leq 0$.

Hướng dẫn giải**Chọn B.****Dạng 4: Mệnh đề kéo theo, mệnh đề đảo và hai mệnh đề tương đương****1. Phương pháp**

Cho 2 mệnh đề P và Q .

- ☐ Mệnh đề "Nếu P thì Q " gọi là mệnh đề kéo theo. Ký hiệu là $P \Rightarrow Q$. Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng Q sai, và đúng trong các trường hợp còn lại.
- ☐ Cho mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Khi đó mệnh đề $Q \Rightarrow P$ gọi là mệnh đề đảo của $P \Rightarrow Q$.

- Mệnh đề “ P nếu và chỉ nếu Q ” gọi là mệnh đề tương đương, ký hiệu $P \Leftrightarrow Q$. Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi cả hai mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng và sai trong các trường hợp còn lại.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và phát biểu mệnh đề đảo, xét tính đúng sai của nó.

- a) P : "Tứ giác $ABCD$ là hình thoi" và Q : "Tứ giác $ABCD$ AC và BD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường"
- b) P : " $2 > 9$ " và Q : " $4 < 3$ "
- c) P : "Tam giác ABC vuông cân tại A" và Q : "Tam giác ABC có $\hat{A} = 2\hat{B}$ "
- d) P : "Ngày 2 tháng 9 là ngày Quốc Khánh của nước Việt Nam" và Q : "Ngày 27 tháng 7 là ngày thương binh liệt sĩ"

Lời giải

a) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là "Nếu tứ giác $ABCD$ là hình thoi thì AC và BD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường", mệnh đề này đúng.

Mệnh đề đảo là $Q \Rightarrow P$: "Nếu tứ giác $ABCD$ có AC và BD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường thì $ABCD$ là hình thoi", mệnh đề này sai.

b) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là "Nếu $2 > 9$ thì $4 < 3$ ", mệnh đề này đúng vì mệnh đề P sai.

Mệnh đề đảo là $Q \Rightarrow P$: "Nếu $4 < 3$ thì $2 > 9$ ", mệnh đề này đúng vì mệnh đề Q sai.

c) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là "Nếu tam giác ABC vuông cân tại A thì $\hat{A} = 2\hat{B}$ ", mệnh đề này đúng

Mệnh đề đảo là $Q \Rightarrow P$: "Nếu tam giác ABC có $\hat{A} = 2\hat{B}$ thì nó vuông cân tại A", mệnh đề này sai

d) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là "Nếu ngày 2 tháng 9 là ngày Quốc Khánh của nước Việt Nam thì ngày 27 tháng 7 là ngày thương binh liệt sĩ"

Mệnh đề đảo là $Q \Rightarrow P$: "Nếu ngày 27 tháng 7 là ngày thương binh liệt sĩ thì ngày 2 tháng 9 là ngày Quốc Khánh của nước Việt Nam"

Hai mệnh đề trên đều đúng vì mệnh đề P, Q đều đúng

Ví dụ 2: Phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ bằng hai cách và xét tính đúng sai của nó

a) P : "Tứ giác $ABCD$ là hình thoi" và Q : "Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau"

b) P : "Bất phương trình $\sqrt{x^2 - 3x} > 1$ có nghiệm" và Q : " $\sqrt{(-1)^2 - 3 \cdot (-1)} > 1$ "

Lời giải

Giao viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"

Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng

Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

a) Ta có mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng vì mệnh đề $P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow P$ đều đúng và được phát biểu bằng hai cách như sau:

"Tứ giác $ABCD$ là hình thoi khi và chỉ khi tứ giác $ABCD$ là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau" và

"Tứ giác $ABCD$ là hình thoi nếu và chỉ nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau"

b) Ta có mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng vì mệnh đề P, Q đều đúng (do đó mệnh đề $P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow P$ đều đúng) và được phát biểu bằng hai cách như sau:

"Bất phương trình $\sqrt{x^2 - 3x} > 1$ có nghiệm khi và chỉ khi $\sqrt{(-1)^2 - 3 \cdot (-1)} > 1$ " và

"Bất phương trình $\sqrt{x^2 - 3x} > 1$ có nghiệm nếu và chỉ nếu $\sqrt{(-1)^2 - 3 \cdot (-1)} > 1$ "

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho định lý “Nếu hai tam giác bằng nhau thì diện tích chúng bằng nhau”. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** Hai tam giác bằng nhau là điều kiện cần để diện tích chúng bằng nhau.
- B.** Hai tam giác bằng nhau là điều kiện cần và đủ để chúng có diện tích bằng nhau.
- C.** Hai tam giác có diện tích bằng nhau là điều kiện đủ để chúng bằng nhau.
- D.** Hai tam giác bằng nhau là điều kiện đủ để diện tích chúng bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

- ♦ “Hai tam giác bằng nhau” là điều kiện đủ.
- ♦ “Diện tích bằng nhau” là điều kiện cần.

Câu 2: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào có **mệnh đề đảo** là đúng?

- A.** Nếu a và b cùng chia hết cho c thì $a + b$ chia hết cho c .
- B.** Nếu hai tam giác bằng nhau thì diện tích bằng nhau.
- C.** Nếu a chia hết cho 3 thì a chia hết cho 9.
- D.** Nếu một số tận cùng bằng 0 thì số đó chia hết cho 5.

Lời giải

Chọn C

Nếu a chia hết cho 9 thì a chia hết cho 3 là mệnh đề đúng.

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào không phải là định lý?

- A.** $\exists x \in \mathbb{N}, x^2$ chia hết cho 3 $\Rightarrow x$ chia hết cho 3.

B. $\exists x \in \mathbb{N}, x^2$ chia hết cho 6 $\Rightarrow x$ chia hết cho 3.

C. $\forall x \in \mathbb{N}, x^2$ chia hết cho 9 $\Rightarrow x$ chia hết cho 9.

D. $\exists x \in \mathbb{N}, x$ chia hết cho 4 và 6 $\Rightarrow x$ chia hết cho 12.

Lời giải

Chọn D

Định lý sẽ là: $\forall x \in \mathbb{N}, x$ chia hết cho 4 và 6 $\Rightarrow x$ chia hết cho 12.

Câu 4: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là định lý?

A. $\forall x \in \mathbb{R}, x > -2 \Rightarrow x^2 > 4$.

B. $\forall x \in \mathbb{R}, x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$.

C. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$.

D. Nếu $a + b$ chia hết cho 3 thì a, b đều chia hết cho 3.

Lời giải

Chọn B

Dạng 5: Mệnh đề với kí hiệu với mọi, tồn tại

1. Phương pháp

- Kí hiệu $\forall$: đọc là với mọi, $\exists$: đọc là tồn tại
- Mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\forall x \in X, P(x)$ " là " $\exists x \in X, \overline{P(x)}$ ".
- Mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\exists x \in X, P(x)$ " là " $\forall x \in X, \overline{P(x)}$ ".

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Câu 1: Mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 3$ " khẳng định rằng:

A. Bình phương của mỗi số thực bằng 3.

B. Có ít nhất một số thực mà bình phương của nó bằng 3.

C. Chỉ có một số thực có bình phương bằng 3.

D. Nếu x là số thực thì $x^2 = 3$.

Lời giải

Chọn B.

Câu 2: Kí hiệu X là tập hợp các cầu thủ x trong đội tuyển bóng rổ, $P(x)$ là mệnh đề chứa biến " x cao trên 180 cm". Mệnh đề " $\forall x \in X, P(x)$ " khẳng định rằng:

A. Mọi cầu thủ trong đội tuyển bóng rổ đều cao trên 180 cm.

B. Trong số các cầu thủ của đội tuyển bóng rổ có một số cầu thủ cao trên 180 cm.

- C. Bất cứ ai cao trên 180 cm đều là cầu thủ của đội tuyển bóng rổ.
D. Có một số người cao trên 180 cm là cầu thủ của đội tuyển bóng rổ.

Lời giải

Chọn A.

Câu 3: Mệnh đề nào sau đây là phủ định của mệnh đề: “Mọi động vật đều di chuyển”.

- A. Mọi động vật đều không di chuyển.
B. Mọi động vật đều đứng yên.
C. Có ít nhất một động vật không di chuyển.
D. Có ít nhất một động vật di chuyển.

Lời giải

Chọn C.

Phủ định của “mọi” là “có ít nhất”

Phủ định của “đều di chuyển” là “không di chuyển”.

Câu 4: Phủ định của mệnh đề: “Có ít nhất một số vô tỷ là số thập phân vô hạn tuần hoàn” là mệnh đề nào sau đây:

- A. Mọi số vô tỷ đều là số thập phân vô hạn tuần hoàn.
B. Có ít nhất một số vô tỷ là số thập phân vô hạn không tuần hoàn.
C. Mọi số vô tỷ đều là số thập phân vô hạn không tuần hoàn.
D. Mọi số vô tỷ đều là số thập phân tuần hoàn.

Lời giải

Chọn C.

Phủ định của “có ít nhất” là “mọi”

Phủ định của “tuần hoàn” là “không tuần hoàn”.

Câu 5: Cho mệnh đề $A: \forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$ Mệnh đề phủ định của A là:

- A. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 > 0$.
B. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 > 0$.
C. Không tồn tại $x: x^2 - x + 7 < 0$.
D. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \geq 0$.

Lời giải

Chọn D.

Phủ định của $\forall$ là $\exists$

Phủ định của $<$ là $\geq$.

3. Bài tập trắc nghiệm**Câu 1.** Tìm mệnh đề **sai**.

A. " $\forall x; x^2 + 2x + 3 > 0$ ".

B. " $\forall x; x^2 \geq x$ ".

C. " $\exists x; x^2 + 5x + 6 = 0$ ".

D. " $\exists x; x < \frac{1}{x}$ ".

Lời giải.**Chọn B.**Chọn $x = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 < x$. Vậy mệnh đề B sai**Câu 2:** Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$.

B. $\exists n \in \mathbb{N}, n < 0$.

C. $\exists n \in \mathbb{Q}, x^2 = 2$.

D. $\forall x \in \mathbb{Z}, \frac{1}{x} > 0$.

Lời giải**Chọn A**Chọn A Vì $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.**Câu 3.** Mệnh đề nào sau là mệnh đề **sai**?

A. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$.

B. $\exists x \in \mathbb{R} : x > x^2$

C. $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 = n$.

D. $\forall n \in \mathbb{N}$ thì $n \leq 2n$.

Hướng dẫn giải**Chọn A.**Ta có $0 \in \mathbb{R}$ và $0^2 = 0$ nên mệnh đề $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$ là mệnh đề sai.**Câu 4.** Chọn mệnh đề **sai**.

A. " $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$ ". **B.** " $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 = n$ ". **C.** " $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq 2n$ ". **D.** " $\exists x \in \mathbb{R} : x < 1$ ".

Hướng dẫn giải**Chọn A.**Với $x = 0 \in \mathbb{R}$ thì $x^2 = 0$ nên " $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$ " sai.**Câu 5.** Tìm mệnh đề đúng.

A. " $\exists x; x^2 + 3 = 0$ "

B. " $\exists x; x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ "

C. " $\forall x \in \mathbb{Z}; x^5 > x^2$ ".

D. " $\forall n \in \mathbb{N}; ((2n+1)^2 - 1) : 4$ ".

Lời giải.

Chọn C.

$$(2n+1)^2 - 1 = 4n^2 + 4n = 4(n^2 + n) : 4; \forall n \in \mathbb{N}. \text{ Vậy mệnh đề C đúng}$$

Câu 6. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 11n + 2$ chia hết cho 11.

B. $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ chia hết cho 4.

C. Tồn tại số nguyên tố chia hết cho 5.

D. $\exists n \in \mathbb{Z}, 2x^2 - 8 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

+ Xét đáp án A. Khi $n = 3$ thì giá trị của $(n^2 + 11n + 2)$ bằng $44 : 11$ nên đáp án A đúng+ Xét đáp án B. Khi $n = 2k, k \in \mathbb{N} \Rightarrow n^2 + 1 = 4k^2 + 1$ không chia hết cho 4, $k \in \mathbb{N}$.Khi $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N} \Rightarrow n^2 + 1 = (2k + 1)^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2$ không chia hết cho 4, $k \in \mathbb{N}$.

+ Xét đáp án C. Tồn tại số nguyên tố 5 chia hết cho 5 nên đáp án C đúng

+ Xét đáp án D. Phương trình $2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2; x = 2 \in \mathbb{Z}$ nên đáp án D đúng.

Câu 7. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \neq x-1$.

B. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < 3 \Leftrightarrow x < 3$.

C. $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ chia hết cho 4.

D. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ không chia hết cho 3.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

A sai vì với $x = 1$ thì $(x-1)^2 = x-1$.B sai vì khi $x = -4 < 3$ nhưng $|x| = 4 > 3$.

C sai vì

□ Nếu $n = 2k (k \in \mathbb{N})$ thì $n^2 + 1 = 4k^2 + 1$ số này không chia hết cho 4.

□ Nếu $n = 2k + 1 (k \in \mathbb{N})$ thì $n^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2$ số này cũng không chia hết cho 4.

D đúng vì

□ Nếu $n = 3k (k \in \mathbb{N})$ thì $n^2 + 1 = 9k^2 + 1$ số này không chia hết cho 3.

□ Nếu $n = 3k \pm 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$) $\lim_{x \rightarrow \infty}$ thì $n^2 + 1 = 9k^2 \pm 6k + 2$ số này không chia hết cho 3.

§2 TẬP HỢP. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

Khái niệm tập hợp thường gặp trong toán học và trong đời sống. Chẳng hạn:

- Tập hợp A các học sinh của lớp 10D.
- Tập hợp B các học sinh tổ I của lớp đó.

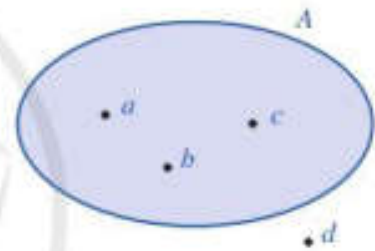


Làm thế nào để diễn tả quan hệ giữa tập hợp A và tập hợp B ?

I. TẬP HỢP

1 Ở lớp 6, ta đã làm quen với khái niệm tập hợp, kí hiệu và cách viết tập hợp, phần tử thuộc tập hợp. Hãy nêu cách cho một tập hợp.

2 Người ta còn minh họa tập hợp bằng một vòng kín, mỗi phần tử của tập hợp được biểu diễn bởi một chấm bên trong vòng kín, còn phần tử không thuộc tập hợp đó được biểu diễn bởi một chấm bên ngoài vòng kín (Hình 1). Cách minh họa tập hợp như vậy được gọi là biểu đồ Ven.



Hình 1

- Viết tập hợp A trong Hình 1 bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp đó.
- Nêu phần tử không thuộc tập hợp A .

Ví dụ 1 Cho tập hợp B gồm các số tự nhiên có một chữ số và chia hết cho 3.

- Viết tập hợp B theo hai cách: liệt kê các phần tử của tập hợp; chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp đó.
- Minh họa tập hợp B bằng biểu đồ Ven.

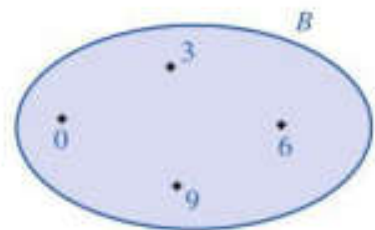
Giải

- Tập hợp B được viết theo cách liệt kê các phần tử là:
 $B = \{0; 3; 6; 9\}$.

Tập hợp B được viết theo cách chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử là:

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 9 \text{ và } x : 3\}.$$

- Tập hợp B được minh họa bằng biểu đồ Ven ở Hình 2.



Hình 2

3 Nêu số phần tử của mỗi tập hợp sau:

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}, D = \{a\}, E = \{b; c; d\}, N = \{0; 1; 2; \dots\}.$$

Nhận xét

- Tập hợp không chứa phần tử nào được gọi là tập hợp rỗng, kí hiệu là $\emptyset$.
- Một tập hợp có thể không có phần tử nào, cũng có thể có một phần tử, có nhiều phần tử, có vô số phần tử.

Chú ý: Khi tập hợp C là tập hợp rỗng, ta viết $C = \emptyset$ và không được viết là $C = \{\emptyset\}$.

1 Nêu số phần tử của mỗi tập hợp sau:

$$G = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\},$$

$$\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \dots\}.$$

II. TẬP CON VÀ TẬP HỢP BẰNG NHAU**1. Tập con**

4 Cho hai tập hợp:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < 3\}, B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 3\}.$$

- Viết tập hợp A, B bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp.
- Mỗi phần tử của tập hợp A có thuộc tập hợp B không?

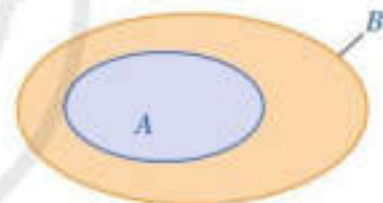
Nếu mọi phần tử của tập hợp A đều là phần tử của tập hợp B thì ta nói A là một *tập con* của tập hợp B và viết là $A \subset B$. Ta còn đọc là A chứa trong B .

Quy ước: Tập hợp rỗng $\emptyset$ được coi là tập con của mọi tập hợp.

Chú ý: $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$.

Khi $A \subset B$, ta cũng viết $B \supset A$ (đọc là B chứa A) (Hình 3).

Nếu A không phải là tập con của B , ta viết $A \not\subset B$.



Hình 3

Ví dụ 2 Cho hai tập hợp:

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}, F = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}.$$

Chứng tỏ rằng $E \subset F$.

Giải

Với mọi số thực x , ta có: $x \leq 1$ thì $x < 2$ nên $x \in E$ thì $x \in F$.

Do đó $E \subset F$.

2 Cho hai tập hợp:

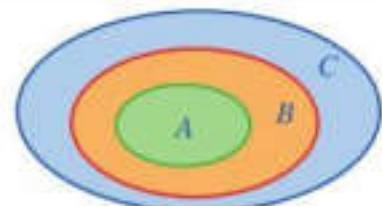
$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ chia hết cho } 3\},$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ chia hết cho } 9\}.$$

Chứng tỏ rằng $B \subset A$.

Ta có các tính chất sau:

- $A \subset A$ với mọi tập hợp A ;
- Nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$ (Hình 4).



Hình 4

*Giải*a) $A = \{1; 2; 4; 8; 16\}$, $B = \{1; 2; 4; 5; 10; 20\}$. Vậy $A \cap B = \{1; 2; 4\}$.*Chú ý:* A là tập hợp các ước tự nhiên của 16, B là tập hợp các ước tự nhiên của 20 nên $A \cap B$ là tập hợp các ước chung tự nhiên của 16 và 20.b) $C \cap D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội của } 4 \text{ và } x \text{ là bội của } 5\}$
 $= \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội chung của } 4 \text{ và } 5\}$.

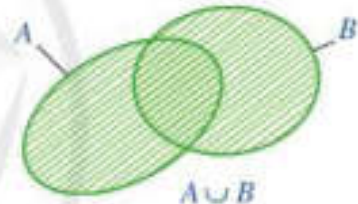
IV. HỢP CỦA HAI TẬP HỢP

 Hai trường dự định tổ chức giải thi đấu thể thao cho học sinh lớp 10. Trường thứ nhất đề xuất ba môn thi đấu là: Bóng bàn, Bóng đá, Bóng rổ. Trường thứ hai đề xuất ba môn thi đấu là: Bóng đá, Bóng rổ, Cầu lông. Lập danh sách những môn thi đấu mà cả hai trường đã đề xuất.

Tập hợp gồm các phần tử thuộc A hoặc thuộc B được gọi là *hợp* của A và B , kí hiệu $A \cup B$.

Vậy $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$.Tập hợp $A \cup B$ được minh hoạ bởi phần gạch chéo trong Hình 6.*Ví dụ 5* Cho tập hợp Q các số hữu tỉ và tập hợp I các số vô tỉ. Tìm $Q \cap I$, $Q \cup I$.*Giải*Ta có: $Q \cap I = \emptyset$, $Q \cup I = \mathbb{R}$.

$x \in A \cup B$ khi và chỉ khi $x \in A$ hoặc $x \in B$.



Hình 6

4 Cho hai tập hợp:
 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$,
 $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.
 Tìm $A \cap B$, $A \cup B$.

V. PHẦN BÙ. HIỆU CỦA HAI TẬP HỢP

 Gọi $\mathbb{R}$ là tập hợp các số thực, I là tập hợp các số vô tỉ. Khi đó $I \subset \mathbb{R}$.

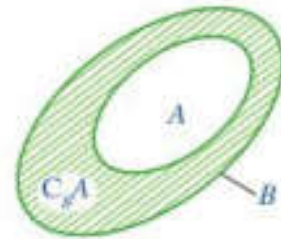
Tìm tập hợp những số thực không phải là số vô tỉ.

Tập hợp những số thực không phải là số vô tỉ chính là tập hợp Q các số hữu tỉ.

Ta nói tập hợp Q các số hữu tỉ là phần bù của tập hợp I các số vô tỉ trong tập hợp $\mathbb{R}$.



Cho tập hợp A là tập con của tập hợp B . Tập hợp những phần tử của B mà không phải là phần tử của A được gọi là *phần bù* của A trong B , kí hiệu $C_B A$.



Hình 7

Tập hợp $C_B A$ được mô tả bằng phần gạch chéo trong Hình 7.

Ví dụ 6

Các học sinh của lớp 10A đăng kí đi tham quan ở một trong hai địa điểm: Hoàng thành Thăng Long và Văn Miếu – Quốc Tử Giám. Mỗi học sinh đều đăng kí đúng một địa điểm. Gọi A là tập hợp các học sinh đăng kí tham quan Hoàng thành Thăng Long, B là tập hợp các học sinh đăng kí tham quan Văn Miếu – Quốc Tử Giám, T là tập hợp các học sinh lớp 10A. Tìm phần bù của tập hợp A trong tập hợp T .

Giải. Phần bù của tập hợp A trong tập hợp T bao gồm những học sinh trong lớp không đăng kí tham quan Hoàng thành Thăng Long nên $C_T A = B$.



Cho hai tập hợp: $A = \{2; 3; 5; 7; 14\}$, $B = \{3; 5; 7; 9; 11\}$.

Liệt kê các phần tử thuộc tập hợp A nhưng không thuộc tập hợp B .



Tập hợp gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B được gọi là *hiệu* của A và B , kí hiệu $A \setminus B$.



$x \in A \setminus B$ khi và chỉ khi $x \in A$ và $x \notin B$.

Vậy $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$.

Tập hợp $A \setminus B$ được minh hoạ bởi phần gạch chéo trong Hình 8.

Chú ý: Nếu $B \subset A$ thì $A \setminus B = C_A B$.

Ví dụ 7

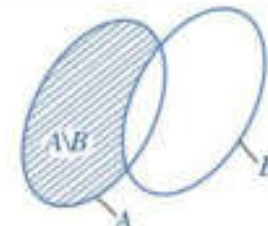
Cho hai tập hợp: $A = \{3; 6; 9; 12\}$,

$B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$.

Tìm $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Giải

- Tập hợp $A \setminus B$ gồm những phần tử thuộc A mà không thuộc B . Vậy $A \setminus B = \{3; 9\}$.
- Tập hợp $B \setminus A$ gồm những phần tử thuộc B mà không thuộc A . Vậy $B \setminus A = \{2; 4; 8; 10\}$.



Hình 8

Ví dụ 8

Cho hai tập hợp: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x - 11 \leq 0\}$,

$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3x^2 - 14x + 11 = 0\}$.

Tìm $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Giải

Ta có: $A = \{0; 1; 2; 3\}$, $B = \{1\}$.

Vậy $A \cap B = \{1\}$, $A \cup B = \{0; 1; 2; 3\}$, $A \setminus B = \{0; 2; 3\}$, $B \setminus A = \emptyset$.



5 Cho hai tập hợp:

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 3\}$,

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 6 = 0\}$,

Tìm $A \setminus B$ và $B \setminus A$.

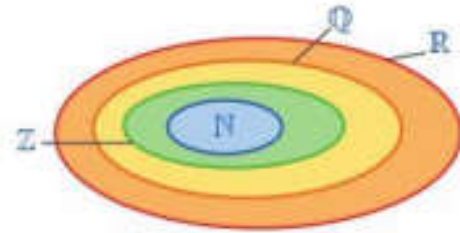
VI. CÁC TẬP HỢP SỐ

1. Các tập hợp số đã học

Ta đã biết $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ lần lượt là tập hợp số tự nhiên, tập hợp số nguyên, tập hợp số hữu tỉ, tập hợp số thực.

Ta có quan hệ sau:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \text{ (Hình 9).}$$



Hình 9

2. Một số tập con thường dùng của tập hợp số thực

Tập hợp	Tên gọi và kí hiệu	Biểu diễn trên trục số (Phần được tô màu đỏ)
$\mathbb{R}$	Tập hợp số thực $(-\infty; +\infty)$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	Đoạn $[a; b]$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	Khoảng $(a; b)$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	Khoảng $(a; +\infty)$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	Khoảng $(-\infty; b)$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	Nửa khoảng $[a; b)$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	Nửa khoảng $(a; b]$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	Nửa khoảng $[a; +\infty)$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	Nửa khoảng $(-\infty; b]$	

Kí hiệu $-\infty$ đọc là âm vô cực, kí hiệu $+\infty$ đọc là dương vô cực; a và b được gọi là đầu mút của các đoạn, khoảng, nửa khoảng.

Ta cũng có thể biểu diễn tập hợp trên trục số bằng cách gạch bỏ phần không thuộc tập đó, chẳng hạn đoạn $[a; b]$ có thể biểu diễn như sau:



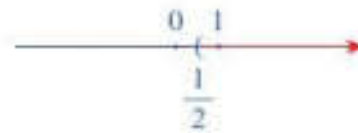
Ví dụ 9 Hãy đọc tên, kí hiệu và biểu diễn mỗi tập hợp sau trên trục số:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 3\}$;

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 1\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 1 > 0\}$.

Giải

a) Tập hợp A là nửa khoảng $(-2; 3]$ và được biểu diễn là:b) Tập hợp B là đoạn $[-3; 1]$ và được biểu diễn là:c) Tập hợp C là khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ và được biểu diễn là:**BÀI TẬP**

- Cho tập hợp $X = \{a; b; c\}$. Viết tất cả các tập con của tập hợp X .
- Sắp xếp các tập hợp sau theo quan hệ " $\subset$ ":
 $[2; 5], (2; 5), [2; 5), (1; 5]$.
- Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số:
 - $[-3; 7] \cap (2; 5)$;
 - $(-\infty; 0] \cup (-1; 2)$;
 - $\mathbb{R} \setminus (-\infty; 3)$;
 - $(-3; 2) \setminus [1; 3)$.
- Gọi A là tập nghiệm của phương trình $x^2 + x - 2 = 0$,
 B là tập nghiệm của phương trình $2x^2 + x - 6 = 0$.
 Tìm $C = A \cap B$.
- Tìm $D = E \cap G$ biết E và G lần lượt là tập nghiệm của hai bất phương trình trong mỗi trường hợp sau:
 - $2x + 3 \geq 0$ và $-x + 5 \geq 0$;
 - $x + 2 > 0$ và $2x - 9 < 0$.
- Gọi A là tập nghiệm của đa thức $P(x)$. Viết tập hợp các số thực x sao cho biểu thức $\frac{1}{P(x)}$ xác định.
- Lớp 10B có 28 học sinh tham gia câu lạc bộ thể thao và 19 học sinh tham gia câu lạc bộ âm nhạc. Biết rằng có 10 học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ trên.
 - Có bao nhiêu học sinh ở lớp 10B tham gia câu lạc bộ thể thao và không tham gia câu lạc bộ âm nhạc?
 - Có bao nhiêu học sinh ở lớp 10B tham gia ít nhất một trong hai câu lạc bộ trên?
 - Biết lớp 10B có 40 học sinh. Có bao nhiêu học sinh không tham gia câu lạc bộ thể thao? Có bao nhiêu học sinh không tham gia cả hai câu lạc bộ?
- Một nhóm có 12 học sinh chuẩn bị cho hội diễn văn nghệ. Trong danh sách đăng kí tham gia tiết mục múa và tiết mục hát của nhóm đó, có 5 học sinh tham gia tiết mục múa, 3 học sinh tham gia cả hai tiết mục. Hỏi có bao nhiêu học sinh trong nhóm tham gia tiết mục hát? Biết có 4 học sinh của nhóm không tham gia tiết mục nào.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP**Dạng 1: Tập hợp và các phần tử của tập hợp****1. Phương pháp**

Cách liệt kê: Ghi tất cả các phần tử của tập hợp

Cách nêu tính chất đặc trưng: Từ tất cả các phần tử của tập hợp, nhận biết tính chất đặc trưng và ghi tính chất đặc trưng của các phần tử.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 5\}$. Tập hợp A được viết dưới dạng liệt kê các phần tử là

Lời giải

$$\text{Vì } x \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0; x = 1; x = 2; x = 3; x = 4; x = 5$$

Ví dụ 2: Cho tập $X = \{x \in \mathbb{R} | (x^2 - 4)(x - 1) = 0\}$. Tính tổng S các phần tử của tập X.

Lời giải

Các phần tử của tập hợp X là các nghiệm thực của phương trình $(x^2 - 4)(x - 1) = 0$.

$$\text{Ta có: } (x^2 - 4)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } S = 2 + (-2) + 1 = 1.$$

Ví dụ 1: Xác định các tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng

$$A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

$$B = \{0; 4; 8; 12; 16\}$$

$$C = \{1; 2; 4; 8; 16\}$$

Lời giải

Ta có các tập hợp A, B, C được viết dưới dạng nêu các tính chất đặc trưng là

$$A = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 4\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} | x : 4 \text{ và } x \leq 16\}$$

$$C = \{2^n | n \leq 4 \text{ và } n \in \mathbb{N}\}$$

Ví dụ 2: Cho tập hợp $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^2 + 2}{x} \in \mathbb{Z}\right\}$

a) Hãy xác định tập A bằng cách liệt kê các phần tử

b) Tìm tất cả các tập con của tập hợp A mà số phần tử của nó nhỏ hơn 3.

Lời giải

a) Ta có $\frac{x^2 + 2}{x} = x + \frac{2}{x} \in \mathbb{Z}$ với $x \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi x là ước của 2 hay $x \in \{-2; -1; 1; 2\}$

Vậy $A = \{-2; -1; 1; 2\}$

b) Tất cả các tập con của tập hợp A mà số phần tử của nó nhỏ hơn 3 là

Tập không có phần tử nào: $\emptyset$

Tập có một phần tử: $\{-2\}, \{-1\}, \{1\}, \{2\}$

Tập có hai phần tử: $\{-2; -1\}, \{-2; 1\}, \{-2; 2\}, \{-1; 1\}, \{-1; 2\}, \{1; 2\}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Trong các tập hợp sau đây, tập hợp nào có đúng một phần tử?

- A. $\{x; y\}$. B. $\{x\}$. C. $\{x; \emptyset\}$. D. $\emptyset$.

Lời giải

Chọn B

Câu 2. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$. Tập hợp A được viết dưới dạng liệt kê các phần tử là

- A. $A = \{1; 2; 3; 4\}$. B. $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.
C. $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. D. $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0; x = 1; x = 2; x = 3; x = 4; x = 5$

Câu 3. Cho tập $X = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 4)(x - 1) = 0\}$. Tính tổng S các phần tử của tập X .

- A. $S = 4$. B. $S = \frac{9}{2}$. C. $S = 9$. D. $S = 1$.

Lời giải

Chọn D

Các phần tử của tập hợp X là các nghiệm thực của phương trình $(x^2 - 4)(x - 1) = 0$.

$$\text{Ta có: } (x^2 - 4)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Do đó: $S = 2 + (-2) + 1 = 1$.

Câu 4. Tập hợp $X = \{2; 5\}$ có bao nhiêu phần tử?

- A. 4. B. Vô số. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn C

Câu 5. Liệt kê phân tử của tập hợp $B = \{x \in \mathbb{N} \mid (2x^2 - x)(x^2 - 3x - 4) = 0\}$.

- A. $B = \{-1; 0; 4\}$. B. $B = \{0; 4\}$. C. $B = \left\{-1; \frac{1}{2}; 0; 4\right\}$. D. $B = \{0; 1; 4\}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } (2x^2 - x)(x^2 - 3x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - x = 0 \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\text{Mà } x \in \mathbb{N} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Câu 6. Cho $X = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 5x + 3 = 0\}$, khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $X = \{1\}$. B. $X = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$. C. $X = \left\{\frac{3}{2}\right\}$. D. $X = \{0\}$.

Lời giải

Chọn B

$$2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow X = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}.$$

Câu 7. Có bao nhiêu cách cho một tập hợp ?

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.

Lời giải

Chọn A

Có hai cách cho một tập hợp :

+) Cách 1 : Liệt kê .

+) Cách 2 : Chỉ ra tính chất đặc trưng của các phần tử .

Câu 8: Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là tập hợp rỗng?

A. $\{x \in \mathbb{N} \mid |x| < 1\}$.

B. $\{x \in \mathbb{Z} \mid 6x^2 - 7x + 1 = 0\}$.

C. $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 4x + 2 = 0\}$.

D. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$.

Lời giải

Chọn C

Câu 9: Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (2x^2 - x - 3)(x^2 - 4) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\}$. Viết lại các tập A và B bằng cách liệt kê các phần tử.

A. $A = \{-2; -1; 2; \frac{3}{2}\}$, $B = \{0; 1; 2; 3\}$.

B. $A = \{-2; -1; 2; \frac{3}{2}\}$, $B = \{1; 2; 3; 4\}$.

C. $A = \{-2; -1; 2\}$, $B = \{0; 1; 2; 3\}$.

D. $A = \{-2; -1; 2\}$, $B = \{1; 2; 3\}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } (2x^2 - x - 3)(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 3 = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(2x-3) = 0 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3}{2} \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

$$\text{Do } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-2; -1; 2\} \Rightarrow A = \{-2; -1; 2\}$$

$$B = \{0; 1; 2; 3\}$$

Câu 10. Tìm số phần tử của tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x+2)(x^3 - 4x) = 0\}$.

A. 5.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

$$(x-1)(x+2)(x^3 - 4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x+2=0 \\ x^3 - 4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \\ x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \{1; -2; 0; 2\}. \text{ Vậy } A \text{ có 4 phần tử.}$$

Câu 11. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (2x^2 + 5x + 2)(x^2 - 16) = 0\}$. Tập hợp A được viết dưới dạng liệt kê là

- A. $\left\{-4; \frac{-1}{2}; -2; 4\right\}$. B. $\{-4; -2\}$. C. $\{\pm 4\}$. D. $\{-4; -2; 4\}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } (2x^2 + 5x + 2)(x^2 - 16) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 5x + 2 = 0 \\ x^2 - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{1}{2} \\ x = 4 \\ x = -4 \end{cases}.$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-2; 4; -4\}$.

Câu 12. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp: $X = \{x \in \mathbb{Z} / 2x^2 - 5x + 2 = 0\}$

- A. $X = \{0\}$. B. $X = \left\{\frac{1}{2}\right\}$. C. $X = \{2\}$. D. $X = \left\{2; \frac{1}{2}\right\}$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}. \text{ Mà } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 2.$$

Câu 13. Cho tập $X = \{x \in \mathbb{N} / (x^2 - 4)(x - 1)(2x^2 - 7x + 3) = 0\}$. Tính tổng S các phần tử của X .

- A. $S = \frac{9}{2}$. B. $S = 5$. C. $S = 6$. D. $S = 4$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } (x^2 - 4)(x - 1)(2x^2 - 7x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ x - 1 = 0 \\ 2x^2 - 7x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = 1 \\ x = 3 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vì $x \in \mathbb{N}$ nên $X = \{1; 2; 3\}$.

Vậy tổng $S = 1 + 2 + 3 = 6$.

Câu 14. Trong các tập hợp sau, tập nào là tập rỗng?

- A. $\{x \in \mathbb{R} / x^2 + 5x - 6 = 0\}$. B. $\{x \in \mathbb{Q} / 3x^2 - 5x + 2 = 0\}$.

C. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 + x - 1 = 0\}$.

D. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 5x - 1 = 0\}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

* $x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -6 \end{cases}$. Vậy $A = \{-6; 1\}$.

* $3x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$. Vậy $B = \{1; \frac{2}{3}\}$.

* $x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$. Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $C = \emptyset$.

* $x^2 + 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-5 + \sqrt{29}}{2} \\ x = \frac{-5 - \sqrt{29}}{2} \end{cases}$. Vậy $D = \left\{ \frac{-5 + \sqrt{29}}{2}; \frac{-5 - \sqrt{29}}{2} \right\}$.

Câu 15. Trong các tập hợp sau, tập hợp nào rỗng?

A. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4 = 0\}$.

B. $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5 = 0\}$.

C. $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 + x - 12 = 0\}$.

D. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 3 = 0\}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có :

$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow A = \{-2; 2\}$.

$x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{5} \\ x = \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow B = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$.

$x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow C = \{-4; 3\}$.

$x^2 + 2x + 3 = 0$, phương trình vô nghiệm nên $D = \emptyset$.

Câu 16. Cho $A = \{x \in \mathbb{N}^*, x < 10, x : 3\}$. Chọn khẳng định đúng.

A. A có 4 phần tử.

B. A có 3 phần tử.

Giao viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"

Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng

Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT: 0834 332 133

C. A có 5 phần tử.D. A có 2 phần tử.**Hướng dẫn giải****Chọn B.**Ta có $A = \{x \in \mathbb{N}^*, x < 10, x:3\} = \{3; 6; 9\} \Rightarrow A$ có 3 phần tử.**Câu 17.** Tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} | (x-1)(x+2)(x^3+4x) = 0\}$ có bao nhiêu phần tử?

A. 1.

B. 3.

C. 5.

D. 2.

Hướng dẫn giải**Chọn D.**Ta có $(x-1)(x+2)(x^3+4x) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+2)(x^2+4) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x-1 = 0 \\ x+2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Vì $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0; x = 1$. Vậy $A = \{0; 1\} \Rightarrow$ tập A có hai phần tử.**Câu 18.** Trong các tập hợp sau, tập nào là tập rỗng?A. $T_1 = \{x \in \mathbb{N} | x^2 + 3x - 4 = 0\}$.B. $T_1 = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 3 = 0\}$ C. $T_1 = \{x \in \mathbb{N} | x^2 = 2\}$.D. $T_1 = \{x \in \mathbb{Q} | (x^2 + 1)(2x - 5) = 0\}$.**Hướng dẫn giải****Chọn C.**

$$\text{Vì } x^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \notin \mathbb{N} \\ x = -\sqrt{2} \notin \mathbb{N} \end{cases}.$$

Câu 19. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp: $X = \{x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 = 0\}$.A. $X = \{0\}$.B. $X = \{2\}$.C. $X = \emptyset$.D. $X = 0$.**Hướng dẫn giải****Chọn C.**Trên tập số thực, phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ vô nghiệm.Vậy: $X = \emptyset$.**Câu 20.** Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp $X = \{x \in \mathbb{R} | 2x^2 - 5x + 3 = 0\}$.

A. $X = \{1\}$. B. $X = \left\{\frac{3}{2}\right\}$. C. $X = \{0\}$. D. $X = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$.

Hướng dẫn giải**Chọn D.**

Các phần tử của tập hợp $X = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 5x + 3 = 0\}$ là các nghiệm của phương trình

$$2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Câu 21. Trong các tập hợp sau, tập nào là tập rỗng?

A. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 5x - 6 = 0\}$. B. $\{x \in \mathbb{Q} \mid 3x^2 - 5x + 2 = 0\}$.
C. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 + x - 1 = 0\}$. D. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 5x - 1 = 0\}$.

Hướng dẫn giải**Chọn C.**

$$x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ nên } \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 + x - 1 = 0\} = \emptyset.$$

Câu 22. Xác định số phần tử của tập hợp $X = \{n \in \mathbb{N} \mid n:4, n < 2017\}$.

A. 505. B. 503. C. 504. D. 502.

Hướng dẫn giải**Chọn A.**

Tập hợp X gồm các phần tử là những số tự nhiên nhỏ hơn 2017 và chia hết cho 4.

Từ 0 đến 2015 có 2016 số tự nhiên, ta thấy cứ 4 số tự nhiên liên tiếp sẽ có duy nhất một số chia hết cho 4. Suy ra có 504 số tự nhiên chia hết cho 4 từ 0 đến 2015. Hiển nhiên $2016:4$.

Vậy có tất cả 505 số tự nhiên nhỏ hơn 2017 và chia hết cho 4.

Dạng 2: Tập hợp con và hai tập hợp bằng nhau**1. Phương pháp**

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Các tính chất:

$$+ A \subset A, \forall A$$

$$+ \emptyset \subset A, \forall A$$

$$+ A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

$$\bullet A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ và } B \subset A) \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Giao viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"

Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng

Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho tập hợp $A = \{1; 2; a\}$, $B = \{1; 2; a; b; x; y\}$. Hỏi có bao nhiêu tập hợp X thỏa $A \subset X \subset B$?

Lời giải

$$\{1; 2; a\}, \{1; 2; a; b\}, \{1; 2; a; x\}, \{1; 2; a; y\}, \\ \{1; 2; a; b; x\}, \{1; 2; a; b; y\}, \{1; 2; a; x; y\}, \{1; 2; a; b; x; y\}.$$

Ví dụ 2: Cho $A = \{-4; -2; -1; 2; 3; 4\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$. Tìm tập hợp X sao cho

a) $A \subset X \subset B$

b) $A \cup X = B$ với X có đúng bốn phần tử

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} |x| \leq 4 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$$

Suy ra $B = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$

b) Ta có $\{-4; -2; -1; 2; 3; 4\} \subset X \subset \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ suy ra tập hợp X là

$$\{-4; -2; -1; 2; 3; 4\}, \{-4; -2; -3; -1; 2; 3; 4\}, \{-4; -2; -1; 0; 2; 3; 4\}$$

$$\{-4; -2; -1; 1; 2; 3; 4\}, \{-4; -2; -3; -1; 0; 2; 3; 4\}, \{-4; -2; -3; -1; 1; 2; 3; 4\}$$

$$\{-4; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}, \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$$

c) Ta có $A \cup X = B$ với X có đúng bốn phần tử khi đó tập hợp X là

$$\{-4; -3; 0; 1\}, \{-3; -2; 0; 1\}, \{-3; -1; 0; 1\}, \{-3; 0; 1; 2\}, \{-3; 0; 1; 3\}, \{-3; 0; 1; 4\}$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$. Tập A có mấy tập con?

A. 15.

B. 12.

C. 16.

D. 10.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Số tập hợp con của tập hợp có 4 phần tử là $2^4 = 16$ tập hợp con.

Chú ý: Cho tập A có n phần tử. Số tập hợp con là 2^n

Câu 2. Tập hợp nào sau đây có đúng một tập hợp con?

- A. $\emptyset$. B. $\{1\}$. C. $\{\emptyset\}$. D. $\{1;\emptyset\}$.

Hướng dẫn giải**Chọn A.**

- ♦ Đáp án A duy nhất một tập con là $\emptyset$.
- ♦ Đáp án B còn một tập con nữa là tập $\emptyset$.
- ♦ Đáp án C có hai tập con là $\emptyset$ và $\{\emptyset\}$.
- ♦ Đáp án D có ba tập con $\{\emptyset\}$, $\{1\}$ và $\{1;\emptyset\}$.

Câu 3. Cho tập hợp P . Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

- A. $P \subset P$. B. $\emptyset \subset P$. C. $P \in \{P\}$. D. $P \in P$.

Hướng dẫn giải**Chọn D.**

Các đáp án A, B, C đúng. Đáp án D sai.

Câu 4. Tập hợp nào sau đây có đúng hai tập hợp con?

- A. $\{x;\emptyset\}$. B. $\{x\}$. C. $\{x;y;\emptyset\}$. D. $\{x;y\}$.

Hướng dẫn giải**Chọn B.**

C1: Công thức số tập con của tập hợp có n phần tử là 2^n nên suy ra tập $\{x\}$ có 1 phần tử nên có $2^1 = 2$ tập con.

C2: Liệt kê số tập con ra thì $\{x\}$ có hai tập con là $\{x\}$ và $\{\emptyset\}$.

Câu 5: Cho tập hợp A . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai** ?

- A. $\emptyset \subset A$. B. $A \neq \{A\}$. C. $A \in A$. D. $A \subset A$.

Lời giải**Chọn C**

Câu 6. Số tập con của tập hợp có n ($n \geq 1, n \in \mathbb{N}$) phần tử là

- A. 2^{n+2} . B. 2^{n-1} . C. 2^{n+1} . D. 2^n .

Lời giải**Chọn D**

Số tập con của tập hợp có n bằng 2^n .

Câu 7. Cách viết nào sau đây là đúng?

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"

Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng

Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

- A. $a \in [a; b]$. B. $\{a\} \subset [a; b]$. C. $\{a\} \in [a; b]$. D. $a \in (a; b]$.

Lời giải

Chọn B

Câu 8. Cho tập hợp $A = \{x^2 + 1 \mid x \in \mathbb{N}^*, x^2 \leq 5\}$. Khi đó tập A bằng tập hợp nào sau đây?

- A. $A = \{1; 2; 3; 4\}$. B. $A = \{0; 2; 5\}$.
C. $A = \{2; 5\}$. D. $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x^2 \leq 5 \\ x \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} \\ x \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{1; 2\} \Rightarrow (x^2 + 1) \in \{2; 5\}$$

Vậy $A = \{2; 5\}$.

Câu 9. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 8\}$. Tập hợp A có tất cả bao nhiêu tập hợp con?

- A. 9. B. 7. C. 8. D. 6.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Tập hợp có n phần tử thì có 2^n tập hợp con.

Do đó tập hợp A có tất cả $2^3 = 8$ tập hợp con.

Cách 2: Các tập con của tập A là: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{8\}, \{1; 2\}, \{2; 8\}, \{1; 8\}, \{1; 2; 8\}$.

Câu 10: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

- A. $A \subset A$. B. $\emptyset \subset A$. C. $A \in \emptyset$. D. $\emptyset \subset \emptyset$.

Lời giải

Chọn C.

Câu 11: Cho hai tập hợp: $X = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là bội số của 4 và 6}\}$ và $Y = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là bội số của 12}\}$.

Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**?

- A. $X \subset Y$. B. $Y \subset X$.
C. $X = Y$. D. $\exists n : n \in X \text{ và } n \notin Y$.

Lời giải

Chọn D

Vì bội số chung nhỏ nhất của 4 và 6 là 12.

Câu 12: Cho tập hợp $A = \{1; 2; a\}$, $B = \{1; 2; a; b; x; y\}$. Hỏi có bao nhiêu tập hợp X thỏa $A \subset X \subset B$?

- A. 8. B. 7. C. 6. D. 2^n .

Lời giải

Chọn A

$$\{1; 2; a\}, \{1; 2; a; b\}, \{1; 2; a; x\}, \{1; 2; a; y\},$$

$$\{1; 2; a; b; x\}, \{1; 2; a; b; y\}, \{1; 2; a; x; y\}, \{1; 2; a; b; x; y\}.$$

Câu 13: Hai tập hợp nào dưới đây **không** bằng nhau?

A. $A = \left\{x \mid x = \frac{1}{2^k}, k \in \mathbb{Z}, x \geq \frac{1}{8}\right\}$ và $B = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}\right\}$.

B. $A = \{3; 9; 27; 81\}$ và $B = \{3^n \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 4\}$.

C. $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x \leq 3\}$ và $B = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$.

D. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$ và $B = \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Lời giải

Chọn A

Xét tập hợp $A = \left\{x \mid x = \frac{1}{2^k}, k \in \mathbb{Z}, x \geq \frac{1}{8}\right\}$ ta có: $\frac{1}{2^k} \geq \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{2^k} \geq \frac{1}{2^3} \Leftrightarrow 2^k \leq 2^3 \Leftrightarrow k \leq 3$, suy ra:

$$A = \left\{x \mid x = \frac{1}{2^k}, k \in \mathbb{Z}, k \leq 3\right\} \Leftrightarrow A = \left\{\frac{1}{8}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \dots\right\} \text{ nên: } A \neq B.$$

Câu 14: Cho tập hợp $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid -3 < x \leq 4\}$. Tập hợp B có tất cả bao nhiêu tập hợp con?

- A. 16. B. 12. C. 8. D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid -3 < x \leq 4\} = \{1; 2; 3; 4\}.$$

Vậy tập B có $2^4 = 16$.

Câu 15: Cho tập hợp $A = \{x; y; z\}$ và $B = \{x; y; z; t; u\}$. Có bao nhiêu tập X thỏa mãn $A \subset X \subset B$?

- A. 16. B. 4. C. 8. D. 2.

Lời giải

Chọn B

Có 4 tập hợp X thỏa mãn $A \subset X \subset B$ là:

$$X_1 = \{x; y; z\} ; X_2 = \{x; y; z; t\} ; X_3 = \{x; y; z; u\} \text{ và } X_4 = \{x; y; z; t; u\}.$$

Câu 16. Có tất cả bao nhiêu tập X thỏa mãn $\{1; 2\} \subset X \subset \{1; 2; 3; 4; 5\}$?

- A. 8. B. 1. C. 3. D. 6.

Lời giải

Chọn A

Các 8 tập X thỏa mãn đề bài là:

$$\{1; 2\}, \{1; 2; 3\}, \{1; 2; 4\}, \{1; 2; 5\}, \{1; 2; 3; 4\}, \{1; 2; 3; 5\}, \{1; 2; 4; 5\}, \{1; 2; 3; 4; 5\}.$$

Câu 17: Cho tập hợp $A = \{x; y; z\}$ và $B = \{x; y; z; t; u\}$. Có bao nhiêu tập X thỏa mãn $A \subset X \subset B$?

- A. 16. B. 4. C. 8. D. 2.

Lời giải

Chọn B

Có 4 tập hợp X thỏa mãn $A \subset X \subset B$ là:

$$X_1 = \{x; y; z\} ; X_2 = \{x; y; z; t\} ; X_3 = \{x; y; z; u\} \text{ và } X_4 = \{x; y; z; t; u\}.$$

Câu 18. Cho tập X có $n+1$ phần tử ($n \in \mathbb{N}$). Số tập con của X có hai phần tử là

- A. $n(n+1)$. B. $\frac{n(n-1)}{2}$. C. $n+1$. D. $\frac{n(n+1)}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Lấy một phần tử của X , ghép với n phần tử còn lại được n tập con có hai phần tử. Vậy có $(n+1)n$ tập. Nhưng mỗi tập con đó được tính hai lần nên số tập con của X có hai phần tử là $\frac{n(n+1)}{2}$.

Dạng 3: Giao và hợp của hai tập hợp

1. Phương pháp

Cần nắm chắc các định nghĩa

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}; A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Cho các tập hợp sau $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - 2x^2)(x^2 - 3x + 2) = 0\}$ và $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 3 < n(n+1) < 31\}$.

Tìm $A \cap B$

Lời giải

Ta có: $A = \{0; 1; 2\}$ và $B = \{2; 3; 4; 5\}$. Vậy: $A \cap B = \{2\}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho $A = \{a; b; c\}$ và $B = \{a; c; d; e\}$. Hãy chọn khẳng định đúng.

A. $A \cap B = \{a; c\}$.

B. $A \cap B = \{a; b; c; d; e\}$.

C. $A \cap B = \{b\}$.

D. $A \cap B = \{d; e\}$.

Lời giải

Chọn A

A. Đúng vì $\{a; c\}$ vừa thuộc tập A, vừa thuộc tập B.

B. HS nhầm là vừa thuộc A hoặc B.

C. HS nhầm là thuộc A và không thuộc B.

D. HS nhầm là thuộc B và không thuộc A.

Câu 2: Cho hai tập hợp $A = \{0; 2; 3; 5\}$ và $B = \{2; 7\}$. Khi đó $A \cap B$

A. $A \cap B = \{2; 5\}$.

B. $A \cap B = \{2\}$.

C. $A \cap B = \emptyset$.

D. $A \cap B = \{0; 2; 3; 5; 7\}$.

Lời giải

Chọn B

$$A \cap B = \{2\}.$$

Câu 3. Cho hai tập hợp $X = \{1; 2; 4; 7; 9\}$ và $Y = \{-1; 0; 7; 10\}$. Tập hợp $X \cup Y$ có bao nhiêu phần tử?

A. 9.

B. 7.

C. 8.

D. 10.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $X \cup Y = \{-1; 0; 1; 2; 4; 7; 9; 10\}$. Do đó $X \cup Y$ có 8 phần tử.

Câu 4. Cho $A = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 3\}$, $B = \{0; 1; 2; 3\}$. Tập $A \cap B$ bằng

A. $\{1; 2; 3\}$.

B. $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

C. $\{0; 1; 2\}$.

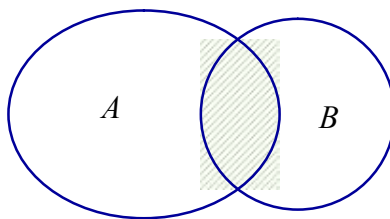
D. $\{0; 1; 2; 3\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$A = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 3\} = \{0; 1; 2; 3\} \Rightarrow A \cap B = \{0; 1; 2; 3\}.$$

Câu 5. Cho A, B là hai tập hợp bất kì. Phần gạch sọc trong hình vẽ bên dưới là tập hợp nào sau đây?



A. $A \cup B$.

B. $B \setminus A$.

C. $A \setminus B$.

D. $A \cap B$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Theo biểu đồ Ven thì phần gạch sọc trong hình vẽ là tập hợp $A \cap B$.

Câu 6. Cho 2 tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 3 < n^2 < 30\}$, chọn mệnh đề đúng?

A. $A \cap B = \{2\}$.

B. $A \cap B = \{5; 4\}$.

C. $A \cap B = \{2; 4\}$.

D. $A \cap B = \{3\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Xét tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}$ ta có: $(2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - x^2 = 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow A = \left\{0; 2; -\frac{1}{2}\right\}.$$

Xét tập hợp $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 3 < n^2 < 30\} = \{2; 3; 4; 5\}$.

Vậy $A \cap B = \{2\}$.

Câu 7. Cho hai tập hợp $A = \{1; 2; a; b\}$, $B = \{1; x; y\}$ với x, y khác $a, b, 2, 1$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $A \cap B = B$.

B. $A \cap B = \emptyset$.

C. $A \cap B = A$.

D. $A \cap B = \{1\}$.

Lời giải

Chọn D

Hai tập hợp A, B có 1 phần tử chung là 1 nên $A \cap B = \{1\}$.

Câu 8: Cho hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$. Xét các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid f^2(x) + g^2(x) = 0\}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $C = A \cup B$.

B. $C = A \cap B$.

C. $C = A \setminus B$.

D. $C = B \setminus A$.

Lời giải.**Chọn B.**

Ta có $f^2(x) + g^2(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$ nên $C = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0, g(x) = 0\}$ nên $C = A \cap B$.

Câu 9: Cho hai tập hợp $E = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$, $F = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$. Tập hợp $H = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x)g(x) = 0\}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A.** $H = E \cap F$. **B.** $H = E \cup F$. **C.** $H = E \setminus F$. **D.** $H = F \setminus E$.

Lời giải.**Chọn B.**

Ta có $f(x)g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$ nên $H = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0 \vee g(x) = 0\}$ nên $H = E \cup F$.

Dạng 4: Hiệu và phần bù của hai tập hợp**1. Phương pháp**

Cần nắm chắc các định nghĩa

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$$

Nếu $A \subset E$ thì $E \setminus A = C_E^A$.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1. Cho $A = \{2; 4; 6; 9\}$ và $B = \{1; 2; 3; 4\}$. Tìm $A \setminus B$

Lời giải

$$A \setminus B = \{6; 9\}$$

Ví dụ 2. Cho hai tập hợp $A = \{1; 2; 4; 6\}$, $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. Tìm khi $C_B A$

Lời giải

$$C_B A = B \setminus A = \{3; 5; 7; 8\}.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

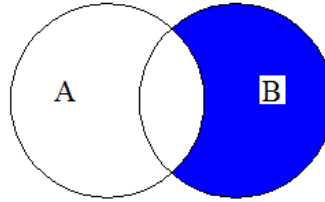
Câu 1. Cho hai tập hợp $A = \{2; 4; 6; 9\}$, $B = \{1; 2; 3; 4\}$. Tập hợp $A \setminus B$ bằng tập hợp nào sau đây?

- A.** $\{2; 4\}$. **B.** $\{1; 3\}$. **C.** $\{6; 9\}$. **D.** $\{6; 9; 1; 3\}$.

Lời giải**Chọn C**

Ta có $A \setminus B = \{6; 9\}$.

Câu 2: Phần tô đậm trong hình vẽ sau biểu diễn tập hợp nào?



- A. $B \setminus A$. B. $A \setminus B$. C. $A \cap B$. D. $A \cup B$.

Lời giải

Chọn A

Câu 3. Cho hai tập hợp $A = \{2; 4; 6; 9\}$, $B = \{1; 2; 3; 4\}$. Tập $A \setminus B$ bằng tập hợp nào sau đây?

- A. $\{2; 4\}$. B. $\{1; 3\}$. C. $\{6; 9\}$. D. $\{6; 9; 1; 3\}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $A \setminus B = \{x | x \in A; x \notin B\} = \{6; 9\}$.

Câu 4. Cho A là tập hợp các hình thoi, B là tập hợp các hình chữ nhật và C là tập hợp các hình vuông. Khi đó

- A. $B \setminus A = C$. B. $A \cup B = C$. C. $A \setminus B = C$. D. $A \cap B = C$.

Lời giải

Chọn D

Theo tính chất của hình thoi, hình chữ nhật và hình vuông, ta có:

$C \subset A$ và $C \subset B$ nên $B \setminus A = C$, $A \setminus B = C$ là các mệnh đề sai.

Vì hình vuông vừa là hình thoi và cũng là hình chữ nhật nên $A \cap B = C$ là mệnh đề đúng và $A \cup B = C$ là mệnh đề sai.

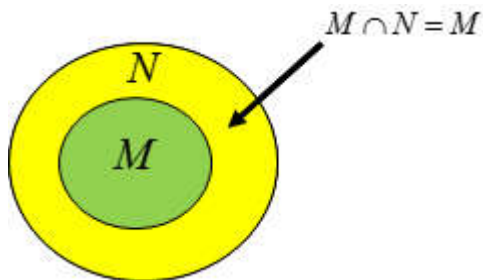
Câu 5. Cho hai tập hợp $M, N, M \subset N$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $M \cap N = N$. B. $M \setminus N = N$. C. $M \cap N = M$. D. $M \setminus N = M$.

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết ta có $M \subset N$. Ta có sơ đồ Ven



Câu 6. Cho hai tập hợp: $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ và $B = \{2; 4; 6; 8; 10\}$. Tập $A \setminus B$ bằng

- A. $\{6; 8; 10\}$. B. $\{0; 1; 3\}$.
C. $\{2; 4\}$. D. $\{0; 1; 2; 3; 4; 6; 8; 10\}$.

Lời giải

Chọn B

Tập $A \setminus B = \{0; 1; 3\}$.

Câu 7. Cho A : "Tập hợp các học sinh khối 10 học giỏi", B : "Tập hợp các học sinh nữ học giỏi", C : "Tập hợp các học sinh nam khối 10 học giỏi". Vậy tập hợp C là:

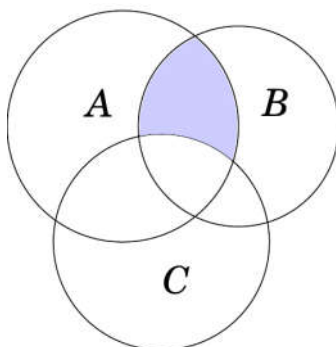
- A. $A \subset B$. B. $B \setminus A$. C. $A \cap B$. D. $A \setminus B$.

Lời giải

Chọn D

Vì tập hợp B có chứa cả các học sinh nữ khối 10 học giỏi nên tập hợp C gồm những phần tử thuộc tập hợp A mà không thuộc tập hợp B . Do đó, $C = A \setminus B$.

Câu 8. Cho các tập hợp A, B, C được minh họa bằng biểu đồ Ven như hình vẽ. Phần tô màu xám trong hình là biểu diễn của tập hợp nào sau đây?



- A. $A \cap B \cap C$. B. $(A \setminus C) \cup (A \setminus B)$. C. $(A \cup B) \setminus C$. D. $(A \cap B) \setminus C$.

Lời giải

Chọn D

Phần tô màu xám trong hình là biểu diễn tập hợp các điểm vừa thuộc A, B mà không thuộc C .

Chính là tập $(A \cap B) \setminus C$.

Câu 9: Cho $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$, $B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$. Tính phép toán $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

- A. $\{0; 1; 5; 6\}$. B. $\{1; 2\}$. C. $\{2; 3; 4\}$. D. $\{5; 6\}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 10: Cho hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$. Xét các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$,

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$, $C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{f(x)}{g(x)} = 0\right\}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $C = A \cup B$. B. $C = A \cap B$. C. $C = A \setminus B$. D. $C = B \setminus A$.

Lời giải.

Chọn C.

Ta có $\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$ hay $C = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0, g(x) \neq 0\}$ nên $C = A \setminus B$.

Dạng 5: Bài toán sử dụng biểu đồ Ven

1. Phương pháp

- Chuyển bài toán về ngôn ngữ tập hợp
- Sử dụng biểu đồ ven để minh họa các tập hợp
- Dựa vào biểu đồ ven ta thiết lập được đẳng thức (hoặc phương trình hệ phương trình) từ đó tìm được kết quả bài toán

Trong dạng toán này ta kí hiệu $n(X)$ là số phần tử của tập X .

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

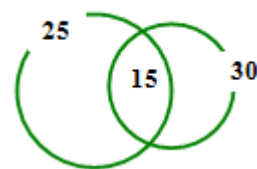
Ví dụ 1: Mỗi học sinh của lớp 10A₁ đều biết chơi đá cầu hoặc cầu lông, biết rằng có 25 em biết chơi đá cầu, 30 em biết chơi cầu lông, 15 em biết chơi cả hai. Hỏi lớp 10A₁ có bao nhiêu em chỉ biết đá cầu? bao nhiêu em chỉ biết đánh cầu lông? Sĩ số lớp là bao nhiêu?

Lời giải

Dựa vào biểu đồ ven ta suy ra số học sinh chỉ biết đá cầu là
 $25 - 15 = 10$

Số học sinh chỉ biết đánh cầu lông là $30 - 15 = 15$

Do đó ta có sĩ số học sinh của lớp 10A₁ là $10 + 15 + 15 = 40$



Ví dụ 2: Trong lớp 10C có 45 học sinh trong đó có 25 em thích môn Văn, 20 em thích môn Toán, 18 em thích môn Sử, 6 em không thích môn nào, 5 em thích cả ba môn. Hỏi số em thích chỉ một môn trong ba môn trên.

Lời giải

Gọi a, b, c theo thứ tự là số học sinh chỉ thích môn Văn, Sử, Toán;

x là số học sinh chỉ thích hai môn là văn và toán

y là số học sinh chỉ thích hai môn là Sử và toán

z là số học sinh chỉ thích hai môn là văn và Sử

Ta có số em thích ít nhất một môn là $45 - 6 = 39$

Sửa vào biểu đồ ven ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + x + z + 5 = 25 & (1) \\ b + y + z + 5 = 18 & (2) \\ c + x + y + 5 = 20 & (3) \\ x + y + z + a + b + c + 5 = 39 & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + y + z + 5 = 18 & (2) \\ c + x + y + 5 = 20 & (3) \\ x + y + z + a + b + c + 5 = 39 & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c + x + y + 5 = 20 & (3) \\ x + y + z + a + b + c + 5 = 39 & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z + a + b + c + 5 = 39 & (4) \end{cases}$$

Cộng vế với vế (1), (2), (3) ta có

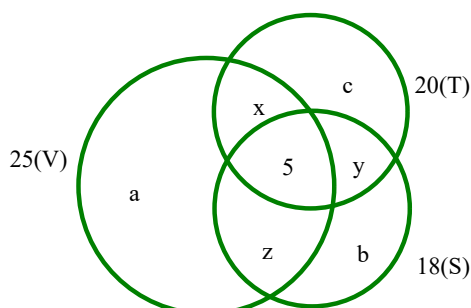
$$a + b + c + 2(x + y + z) + 15 = 63 \quad (5)$$

Từ (4) và (5) ta có

$$a + b + c + 2(39 - 5 - a - b - c) + 15 = 63$$

$$\Leftrightarrow a + b + c = 20$$

Vậy chỉ có 20 em thích chỉ một môn trong ba môn trên.



3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Lớp 10A có 51 bạn học sinh trong đó có 31 bạn học tiếng Anh và 27 bạn học tiếng Nhật. Lớp 10A có bao nhiêu bạn học cả tiếng Anh và tiếng Nhật?

- A. 7. B. 9. C. 5. D. 12.

Lời giải

Chọn A

Số học sinh học cả tiếng Anh và tiếng Nhật của lớp 10A là $31 + 27 - 51 = 7$ bạn.

Câu 2. Lớp 10A có 45 học sinh, trong đó có 15 học sinh được xếp loại học lực giỏi, 20 học sinh được xếp loại hạnh kiểm tốt, 10 em vừa được xếp loại học lực giỏi, vừa có hạnh kiểm tốt. Hỏi có bao nhiêu học sinh xếp loại học lực giỏi hoặc xếp loại hạnh kiểm tốt?

- A. 10. B. 35. C. 25. D. 45.

Lời giải

Chọn C

Gọi A là tập hợp học sinh được xếp loại học lực giỏi.

Gọi B là tập hợp học sinh được xếp loại hạnh kiểm tốt.

Khi đó $A \cap B$ là tập hợp học sinh vừa được xếp loại học lực giỏi, vừa có hạnh kiểm tốt.

$A \cup B$ là tập hợp học sinh xếp loại học lực giỏi hoặc xếp loại hạnh kiểm tốt.

Ta có $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 15 + 20 - 10 = 25$.

Câu 3. Trong số 50 học sinh của lớp 10A có 15 bạn được xếp loại học lực giỏi, 25 bạn được xếp loại hạnh kiểm tốt, trong đó có 10 bạn vừa được học sinh giỏi vừa được hạnh kiểm tốt. Khi đó, lớp 10A có bao nhiêu bạn được khen thưởng, biết rằng muốn được khen thưởng bạn đó phải có học lực giỏi hay hạnh kiểm tốt.

- A. 20 . B. 30. C. 35. D. 25 .

Lời giải

Chọn B

Đề có sự không thống nhất trong diễn đạt nên tôi sửa đề bài toán lại thành:

Trong số 50 học sinh của lớp 10A có 15 bạn được xếp loại học lực giỏi, 25 bạn được xếp loại hạnh kiểm tốt, trong đó có 10 bạn vừa được xếp loại học lực giỏi vừa được xếp loại hạnh kiểm tốt. Khi đó, lớp 10A có bao nhiêu bạn được khen thưởng, biết rằng muốn được khen thưởng bạn đó phải có học lực giỏi hoặc hạnh kiểm tốt.

Từ giả thiết bài toán, ta có:

Số các học sinh chỉ có học lực giỏi là: $15 - 10 = 5$.

Số các học sinh chỉ được xếp loại hạnh kiểm tốt là: $25 - 10 = 15$.

Tổng số học sinh có học lực giỏi hoặc hạnh kiểm tốt là $10 + 5 + 15 = 30$.

Vậy có 30 học sinh được khen thưởng.

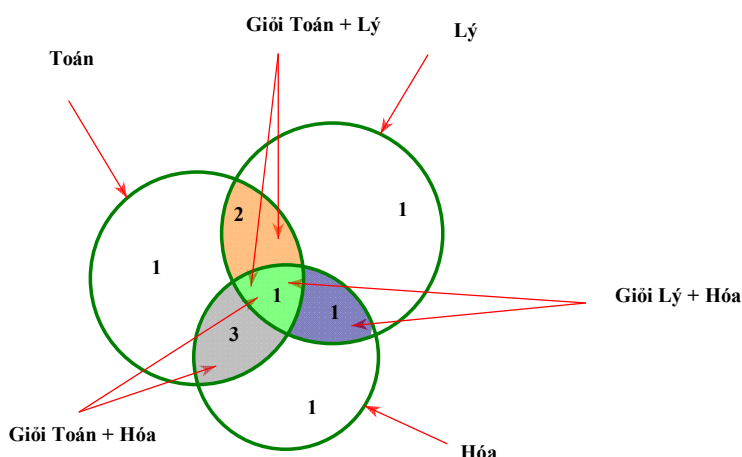
Câu 4: Lớp 10_{B₁} có 7 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Lý, 6 học sinh giỏi Hóa, 3 học sinh giỏi cả Toán và Lý, 4 học sinh giỏi cả Toán và Hóa, 2 học sinh giỏi cả Lý và Hóa, 1 học sinh giỏi cả 3 môn Toán, Lý, Hóa. Số học sinh giỏi ít nhất một môn của lớp 10_{B₁} là:

- A. 9. B. 10. C. 18. D. 28.

Lời giải.

Chọn B.

Ta dùng biểu đồ Ven để giải:



Nhìn vào biểu đồ, số học sinh giỏi ít nhất 1 trong 3 môn là: $1 + 2 + 1 + 3 + 1 + 1 + 1 = 10$

Dạng 6: Tìm giao và hợp các khoảng, nửa khoảng, đoạn**1. Phương pháp**

- Để tìm $A \cap B$ ta làm như sau
 - Sắp xếp theo thứ tự tăng dần các điểm đầu mút của các tập hợp A, B lên trục số
 - Biểu diễn các tập A, B trên trục số (phần nào không thuộc các tập đó thì gạch bỏ)
 - Phần không bị gạch bỏ chính là giao của hai tập hợp A, B
- Để tìm $A \cup B$ ta làm như sau
 - Sắp xếp theo thứ tự tăng dần các điểm đầu mút của các tập hợp A, B lên trục số
 - Tô đậm các tập A, B trên trục số
 - Phần tô đậm chính là hợp của hai tập hợp A, B

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho hai tập hợp $A = (-7 ; 3)$, $B = (-4 ; 5)$. Tìm $A \cap B$, $A \cup B$

Lời giải

Ta có: $A \cap B = (-4 ; 3)$, $A \cup B = (-7 ; 5)$

Ví dụ 2: Cho số thực $a < 0$. Tìm a để $(-\infty; 9a) \cap \left(\frac{4}{a}; +\infty\right) \neq \emptyset$

Hướng dẫn giải

$$(-\infty; 9a) \cap \left(\frac{4}{a}; +\infty\right) \neq \emptyset \Leftrightarrow 9a > \frac{4}{a} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} < a < 0 \end{cases}.$$

Vì $a < 0$ nên giá trị của a cần tìm là $-\frac{2}{3} < a < 0$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Tập $(-\infty; -3) \cap [-5; 2)$ bằng

- A. $[-5; -3)$. B. $(-\infty; -5]$. C. $(-\infty; -2)$. D. $(-3; -2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $(-\infty; -3) \cap [-5; 2) = [-5; -3)$.

Câu 2. Hình vẽ sau đây là biểu diễn của tập hợp nào?



A. $(-\infty; -2) \cup [5; +\infty)$.

B. $(-\infty; -2) \cup (5; +\infty)$.

C. $(-\infty; -2] \cup (5; +\infty)$.

D. $(-\infty; -2] \cup [5; +\infty)$.

Hướng dẫn giải**Chọn A.****Câu 3.** Kết quả của $[-4; 1) \cup (-2; 3]$ là

A. $(-2; 1)$

B. $[-4; 3]$

C. $(-4; 2]$

D. $(1; 3]$

Hướng dẫn giải**Chọn B.**

Cách 1: Gọi $x \in [-4; 1) \cup (-2; 3]$, ta có: $\begin{cases} -4 \leq x < 1 \\ -2 < x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 3 \Rightarrow$ Chọn B.

Cách 2: Biểu diễn hai tập hợp $[-4; 1)$ và $(-2; 3]$ trên trục số rồi tìm hợp của hai tập hợp, Chọn B.

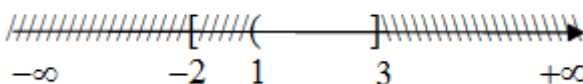
Câu 4. Cho hai tập hợp $A = [-2; 3]$ và $B = (1; +\infty)$. Tìm $A \cap B$.

A. $A \cap B = [-2; +\infty)$.

B. $A \cap B = (1; 3]$.

C. $A \cap B = [1; 3]$.

D. $A \cap B = (1; 3)$.

Hướng dẫn giải**Chọn B.**Biểu diễn hai tập hợp A và B ta được:

Vậy $A \cap B = (1; 3]$.

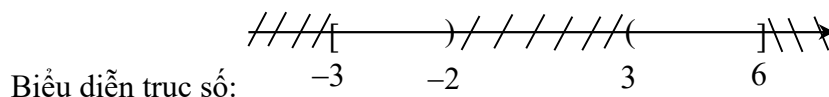
Câu 5. Cho các tập hợp $M = [-3; 6]$ và $N = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$. Khi đó $M \cap N$ là

A. $(-\infty; -2) \cup [3; 6]$.

B. $(-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$.

C. $[-3; -2) \cup (3; 6]$.

D. $(-3; -2) \cup (3; 6)$.

Hướng dẫn giải**Chọn C.**

$$M = [-3; 6] \text{ và } N = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty).$$

$$\text{Khi đó: } M \cap N = [-3; -2) \cup (3; 6].$$

Câu 6. Cho $A = (-\infty; 2]$, $B = [2; +\infty)$, $C = (0; 3)$. Chọn phát biểu **sai**.

A. $A \cap C = (0; 2]$.

B. $B \cup C = (0; +\infty)$.

C. $A \cup B = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

D. $B \cap C = [2; 3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có: } A \cup B = \mathbb{R}.$$

Câu 7. Cho $A = (-\infty; -2]$, $B = [3; +\infty)$, $C = (0; 4)$. Khi đó tập $(A \cup B) \cap C$ là

A. $(-\infty; -2] \cup (3; +\infty)$.

B. $(-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$.

C. $[3; 4)$.

D. $[3; 4]$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } A \cup B = (-\infty; -2] \cup [3; +\infty). \text{ Suy ra } (A \cup B) \cap C = [3; 4).$$

Câu 8. Cho $A = (-\infty; 5]$, $B = (0; +\infty)$. Tìm $A \cap B$.

A. $A \cap B = [0; 5)$.

B. $A \cap B = (0; 5)$.

C. $A \cap B = (0; 5]$.

D. $A \cap B = (-\infty; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$A \cap B = (0; 5].$$

Câu 9. Cho $A = (1; 9)$, $B = [3; +\infty)$, câu nào sau đây đúng?

A. $A \cap B = [1; +\infty)$.

B. $A \cap B = (9; +\infty)$.

C. $A \cap B = (1; 3)$.

D. $A \cap B = [3; 9)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$A \cap B = (1; 9) \cap [3; +\infty) = [3; 9).$$

Câu 10. Cho ba tập hợp: $X = (-4; 3)$, $Y = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 4 > 0, x < 5\}$, $Z = \{x \in \mathbb{R} : (x + 3)(x - 4) = 0\}$.

Chọn câu đúng nhất:

Giao viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"

Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng

Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT: 0834 332 133

A. $X \subset Y$.

B. $Z \subset X$.

C. $Z \subset X \cup Y$.

D. $Z \subset Y$.

Hướng dẫn giải**Chọn C.**

Ta có:

□ $Y = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 4 > 0, x < 5\} = (-2; 5); Z = \{-3; 4\}.$

□ $\begin{cases} -3 \in X \\ -3 \notin Y \end{cases} \Rightarrow X \not\subset Y \Rightarrow A \text{ sai.}$

□ $\begin{cases} 4 \in Z \\ 4 \notin X \end{cases} \Rightarrow Z \not\subset X \Rightarrow B \text{ sai.}$

□ $\begin{cases} -3 \in Z \\ -3 \notin Y \end{cases} \Rightarrow Z \not\subset Y \Rightarrow D \text{ sai.}$

□ $X \cup Y = (-4; 5) \Rightarrow \{-3; 4\} \subset (-4; 5). \text{ Vậy } Z \subset X \cup Y$

Vậy C đúng.

Câu 11. Tập hợp nào dưới đây là giao của hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 2\}$?

A. $(-1; 2).$

B. $[0; 2).$

C. $(-2; 3).$

D. $[-1; 2).$

Hướng dẫn giải**Chọn D.**Ta viết lại hai tập hợp như sau: $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 3\} = [-1; 3).$

$B = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 2\} = (-2; 2).$

Suy ra: $A \cap B = [-1; 2).$

Câu 12. Cho $A = [1; +\infty)$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$, $C = (0; 4)$. Tập $(A \cup B) \cap C$ có bao nhiêu phần tử là số nguyên.

A. 3.

B. 1.

C. 0.

D. 2.

Lời giải**Chọn A.**Ta có : $(A \cup B) \cap C = [1; 4)$ có 3 phần tử là số nguyên.**Câu 13.** Cho hai tập hợp $A = (-3; 3)$ và $B = (0; +\infty)$. Tìm $A \cup B$.

A. $A \cup B = (-3; +\infty).$

B. $A \cup B = [-3; +\infty).$

C. $A \cup B = [-3; 0)$.

D. $A \cup B = (0; 3)$.

Hướng dẫn giải**Chọn A.**

Thực hiện phép hợp trên hai tập hợp A và B ta được: $A \cup B = (-3; +\infty)$.

Câu 14. Kết quả của phép toán $(-\infty; 1) \cap [-1; 2)$ là

A. $(1; 2)$.

B. $(-\infty; 2)$.

C. $[-1; 1)$.

D. $(-1; 1)$.

Hướng dẫn giải**Chọn C.**

Ta có $(-\infty; 1) \cap [-1; 2) = [-1; 1)$.

Câu 15. Cho $A = (2; +\infty)$, $B = (m; +\infty)$. Điều kiện cần và đủ của m sao cho B là tập con của A là

A. $m \leq 2$.

B. $m = 2$.

C. $m > 2$.

D. $m \geq 2$.

Hướng dẫn giải**Chọn D.**

Ta có: $B \subset A$ khi và chỉ khi $\forall x \in B \Rightarrow x \in A \Rightarrow m \geq 2$.

Câu 16. Cho $A = (-\infty; m+1]$; $B = (-1; +\infty)$. Điều kiện để $(A \cup B) = \mathbb{R}$ là

A. $m > -1$.

B. $m \geq -2$.

C. $m \geq 0$.

D. $m > -2$.

Hướng dẫn giải**Chọn B.**

Ta có: $(A \cup B) = \mathbb{R} \Leftrightarrow -1 \leq m+1 \Leftrightarrow m \geq -2$.

Câu 17. Cho các tập hợp khác rỗng $\left[m-1; \frac{m+3}{2} \right]$ và $B = (-\infty; -3) \cup [3; +\infty)$. Tập hợp các giá trị thực của m để $A \cap B \neq \emptyset$ là

A. $(-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$.

B. $(-2; 3)$.

C. $(-\infty; -2) \cup [3; 5)$.

D. $(-\infty; -9) \cup (4; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Để } A \cap B \neq \emptyset \text{ thì điều kiện là } \begin{cases} m-1 < \frac{m+3}{2} \\ m-1 < -3 \\ \frac{m+3}{2} \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ m < -2 \\ m \geq 3 \end{cases}$$

Vậy $m \in (-\infty - 2) \cup [3; 5)$.

Câu 18. Cho hai tập hợp $A = [1; 3]$ và $B = [m; m+1]$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để $B \subset A$.

A. $m = 1$.**B.** $1 < m < 2$.**C.** $1 \leq m \leq 2$.**D.** $m = 2$.**Hướng dẫn giải****Chọn C.**

$$\text{Ta có: } B \subset A \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m+1 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq 2 \end{cases}. \text{ Vậy } 1 \leq m \leq 2.$$

Câu 19. Cho m là một tham số thực và hai tập hợp $A = [1-2m; m+3]$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 8-5m\}$. Tất cả các giá trị m để $A \cap B = \emptyset$ là

A. $m \geq \frac{5}{6}$.**B.** $m < -\frac{2}{3}$.**C.** $m \leq \frac{5}{6}$.**D.** $-\frac{2}{3} \leq m < \frac{5}{6}$.**Hướng dẫn giải****Chọn D.**

Ta có $A = [1-2m; m+3]$, $B = [8-5m; +\infty)$.

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} m+3 < 8-5m \\ 1-2m \leq m+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6m < 5 \\ 3m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{5}{6} \\ m \geq -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq m < \frac{5}{6}.$$

Câu 20. Cho hai tập $A = [0; 5]$; $B = (2a; 3a+1]$, với $a > -1$. Tìm tất cả các giá trị của a để $A \cap B \neq \emptyset$.

A. $\begin{cases} a < \frac{5}{2} \\ a \geq -\frac{1}{3} \end{cases}$.**B.** $\begin{cases} a \geq \frac{5}{2} \\ a < -\frac{1}{3} \end{cases}$.**C.** $-\frac{1}{3} \leq a < \frac{5}{2}$.**D.** $-\frac{1}{3} \leq a \leq \frac{5}{2}$.**Hướng dẫn giải****Chọn C.**

$$A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} 2a < 3a+1 \\ 3a+1 \geq 0 \\ 2a < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -1 \\ a \geq -\frac{1}{3} \\ a < \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -\frac{1}{3} \\ -1 < a < \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq a < \frac{5}{2}.$$

Dạng 7: Xác định hiệu và phần bù các khoảng, đoạn, nửa khoảng

1. Phương pháp

- Để tìm $A \setminus B$ ta làm như sau
- Sắp xếp theo thứ tự tăng dần các điểm đầu mút của các tập hợp A, B trên trục số
- Biểu diễn tập A trên trục số (gạch bỏ phần không thuộc tập A), gạch bỏ phần thuộc tập B trên trục số
- Phần không bị gạch bỏ chính là $A \setminus B$.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Cho các tập hợp:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 5\} \quad C = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 4\}$$

a) Hãy viết lại các tập hợp A, B, C dưới kí hiệu khoảng, nửa khoảng, đoạn.

b) Tìm $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$.

c) Tìm $(B \cup C) \setminus (A \cap C)$

Lời giải

a) Ta có: $A = (-\infty; 3)$ $B = (1; 5]$ $C = [-2; 4]$.

b) • Biểu diễn trên trục số



Suy ra $A \cup B = (-\infty; 5]$

• Biểu diễn trên trục số



Suy ra $A \cap B = (1; 3)$

• Biểu diễn trên trục số



Suy ra $A \setminus B = (-\infty; 1]$

c) Bằng cách biểu diễn trên trục số ta có

$$A \cap C = [-2; 3) \text{ và } B \cup C = [-2; 5]$$

$$\text{Suy ra ta có } (B \cup C) \setminus (A \cap C) = [3; 5]$$

Nhận xét: Việc biểu diễn trên trục số để tìm các phép toán tập hợp ta làm trên giấy nháp và trình bày kết quả vào.

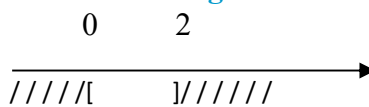
Ví dụ 2: Xác định các tập số sau và biểu diễn trên trục số:

- a) $(-4; 2] \cap [0; 4)$ b) $(0; 3) \cup [1; 4]$
 c) $[-4; 3] \setminus [-2; 1]$ d) $\mathbb{R} \setminus [1; 3]$

Lời giải

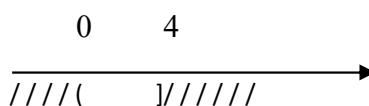
a) Ta có $(-4; 2] \cap [0; 4) = [0; 2]$

Biểu diễn tập đó trên trục số là



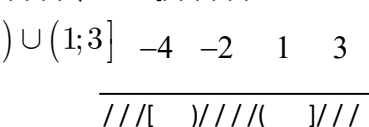
b) Ta có $(0; 3) \cup [1; 4] = (0; 4]$

Biểu diễn tập đó trên trục số là



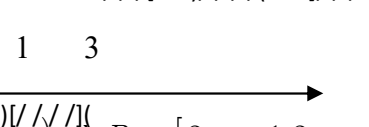
c) Ta có $[-4; 3] \setminus [-2; 1] = [-4; -2) \cup (1; 3]$

Biểu diễn tập đó trên trục số là



d) Ta có $\mathbb{R} \setminus [1; 3] = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$

Biểu diễn tập đó trên trục số là

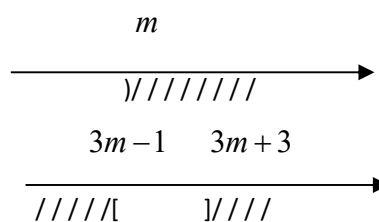


Ví dụ 3: Cho các tập hợp $A = (-\infty; m)$ và $B = [3m - 1; 3m + 3]$. Tìm m để

- a) $A \cap B = \emptyset$ b) $B \subset A$
 c) $A \subset C_{\mathbb{R}} B$ d) $C_{\mathbb{R}} A \cap B \neq \emptyset$

Lời giải

Ta có biểu diễn trên trục số các tập A và B trên hình vẽ



a) Ta có $A \cap B = \emptyset$

$$\Leftrightarrow m \leq 3m - 1 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$$

Vậy $m \geq \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

b) Ta có $B \subset A \Leftrightarrow 3m + 3 < m \Leftrightarrow m < -\frac{3}{2}$

Vậy $m < -\frac{3}{2}$ là giá trị cần tìm.

c) Ta có $C_{\mathbb{R}} B = (-\infty; 3m - 1) \cup (3m + 3; +\infty)$

$$\text{Suy ra } A \subset C_{\mathbb{R}} B \Leftrightarrow m \leq 3m - 1 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$$

Vậy $m \geq \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

d) Ta có $C_{\mathbb{R}} A = [m; +\infty)$ suy ra $C_{\mathbb{R}} A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow m \leq 3m + 3 \Leftrightarrow m \geq -\frac{3}{2}$

Vậy $m \geq -\frac{3}{2}$ là giá trị cần tìm.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho tập hợp $A = [-\sqrt{3}; \sqrt{5})$. Tập hợp $C_{\mathbb{R}}A$ bằng

- A. $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup (\sqrt{5}; +\infty)$. B. $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$.
C. $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{5}; +\infty)$. D. $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup [\sqrt{5}; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $C_{\mathbb{R}}A = \mathbb{R} \setminus A = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup [\sqrt{5}; +\infty)$.

Câu 2. Phần bù của $[-2; 1)$ trong $\mathbb{R}$ là

- A. $(-\infty; 1]$. B. $(-\infty; -2) \cup [1; +\infty)$. C. $(-\infty; -2)$. D. $(2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$C_{\mathbb{R}}B = \mathbb{R} \setminus B = (-\infty; -2) \cup [1; +\infty)$.

Câu 3. Tập hợp nào sau đây chỉ gồm các số vô tỷ?

- A. $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}^*$. B. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. C. $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. D. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tập hợp chỉ gồm các số vô tỷ là $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Câu 4. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x \leq 5\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x \leq 4\}$. Khi đó $(B \cup C) \setminus (A \cap C)$ bằng

- A. $[-2; 3)$. B. $[3; 5]$. C. $(-\infty; 1]$. D. $[-2; 5]$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$A = (-\infty; 3)$, $B = (1; 5]$, $C = [-2; 4]$.

$(B \cup C) \setminus (A \cap C) = \{(1; 5] \cup [-2; 4]\} \setminus \{(-\infty; 3) \cap [-2; 4]\} = [-2; 5] \setminus [-2; 3) = [3; 5]$.

Câu 5. Cho $A = (-\infty; 1]$; $B = [1; +\infty)$; $C = (0; 1]$. Câu nào sau đây **sai**?

A. $(A \cup B) \setminus C = (-\infty; 0] \cup (1; +\infty)$.

B. $A \cap B \cap C = \{-1\}$.

C. $A \cup B \cup C = (-\infty; +\infty)$.

D. $(A \cap B) \setminus C = \emptyset$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $A \cap B = \{1\} \Rightarrow A \cap B \cap C = \{1\}$.

Câu 6. Cho $A = [-1; 3]$; $B = (2; 5)$. Tìm mệnh đề sai.

A. $B \setminus A = [3; 5)$.

B. $A \cap B = (2; 3]$.

C. $A \setminus B = [-1; 2]$.

D. $A \cup B = [-1; 5]$.

Lời giải

Chọn D.

Mệnh đề đúng: $A \cup B = [-1; 5)$.

Câu 7. Cho các tập $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$. Tập $\mathbb{R} \setminus (A \cap B)$ là :

A. $(-\infty; -1) \cup [3; +\infty)$.

B. $(-1; 3]$.

C. $[-1; 3)$.

D. $(-\infty; -1] \cup (3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có : $A = [-1; +\infty)$; $B = (-\infty; 3)$. Khi đó $A \cap B = [-1; 3) \Rightarrow \mathbb{R} \setminus (A \cap B) = (-\infty; -1) \cup [3; +\infty)$.

Câu 8. Cho hai tập hợp $A = (\sqrt{2}; +\infty)$ và $B = \left(-\infty; \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$. Khi đó $(A \cap B) \cup (B \setminus A)$ là

A. $\left[\frac{\sqrt{5}}{2}; \sqrt{2}\right]$.

B. $(\sqrt{2}; +\infty)$.

C. $\left(-\infty; \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$.

D. $\left(-\infty; \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $A \cap B = \emptyset$, $B \setminus A = \left(-\infty; \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$.

Do đó $(A \cap B) \cup (B \setminus A) = \left(-\infty; \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$

Câu 9. Cho $A = (-1; 3)$ và $B = [0; 5]$. Khi đó $(A \cap B) \cup (A \setminus B)$ là

- A. $(-1; 3)$. B. $[-1; 3]$. C. $(-1; 3) \setminus \{0\}$. D. $(-1; 3]$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

C1: Ta có: $A \cap B = [0; 3)$ và $A \setminus B = (-1; 0)$. Do đó:

$$(A \cap B) \cup (A \setminus B) = [0; 3) \cup (-1; 0) = (-1; 3).$$

C2: Ta có: $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$ nên $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = (-1; 3)$.

Câu 10. Xác định phần bù của tập hợp $(-\infty; -2)$ trong $(-\infty; 4)$.

- A. $(-2; 4)$. B. $(-2; 4]$. C. $[-2; 4)$. D. $[-2; 4]$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $C_{(-\infty; 4)}(-\infty; -2) = (-\infty; 4) \setminus (-\infty; -2) = [-2; 4)$.

Câu 11. Xác định phần bù của tập hợp $(-\infty; -10) \cup (10; +\infty) \cup \{0\}$ trong $\mathbb{R}$.

- A. $[-10; 10)$. B. $[-10; 10] \setminus \{0\}$.
C. $[-10; 0) \cup [0; 10)$. D. $[-10; 0) \cup (0; 10)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\mathbb{R} \setminus (-\infty; -10) \cup (10; +\infty) \cup \{0\} = [-10; 10] \setminus \{0\}.$$

Câu 12. Cho hai tập hợp X, Y thỏa mãn $X \setminus Y = \{7; 15\}$ và $X \cap Y = (-1; 2)$. Xác định số phần tử là số nguyên của X .

- A. 2. B. 5. C. 3. D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Do $X \setminus Y = \{7; 15\} \Rightarrow \{7; 15\} \subset X$.

Mà $X \cap Y = (-1; 2) \Rightarrow (-1; 2) \subset X$.

Suy ra $X = (-1; 2) \cup \{7; 15\}$.

Vậy số phần tử nguyên của tập X là 4.

Câu 13. Cho $A = (-\infty; 2]$ và $B = (0; +\infty)$. Tìm $A \setminus B$.

A. $A \setminus B = (-\infty; 0]$.

B. $A \setminus B = (2; +\infty)$.

C. $A \setminus B = (0; 2]$.

D. $A \setminus B = (-\infty; 0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Biểu diễn hai tập hợp A và B lên trục số ta có kết quả $A \setminus B = (-\infty; 0]$.

Câu 14. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 2\}$, $B = (-1; 3)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $A \cap B = (-1; 2]$.

B. $A \setminus B = (-3; -1)$.

C. $C_{\mathbb{R}} B = (-\infty; -1) \cup [3; +\infty)$.

D. $A \cup B = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 2\} = (-3; 2] \Rightarrow (-3; 2] \cap (-1; 3) = (-1; 2].$$

Câu 15. Cho $A = [a; a+1)$. Lựa chọn phương án đúng.

A. $C_{\mathbb{R}} A = (-\infty; a] \cup [a+1; +\infty)$.

B. $C_{\mathbb{R}} A = (-\infty; a) \cup [a+1; +\infty)$.

C. $C_{\mathbb{R}} A = (-\infty; a] \cup (a+1; +\infty)$.

D. $C_{\mathbb{R}} A = (-\infty; a) \cup (a+1; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } C_{\mathbb{R}} A = \mathbb{R} \setminus A = (-\infty; a) \cup [a+1; +\infty).$$

Câu 16. Cho các tập hợp khác rỗng $A = (-\infty; m)$ và $B = [2m-2; 2m+2]$. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để $C_{\mathbb{R}} A \cap B \neq \emptyset$.

A. $m \geq 2$.

B. $m < -2$.

C. $m \geq -2$.

D. $m < 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có: } C_{\mathbb{R}} A = [m; +\infty).$$

$$\text{Để } C_{\mathbb{R}} A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow 2m+2 \geq m \Leftrightarrow m \geq -2.$$

Câu 17. Cho $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |mx-3| = mx-3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 = 0\}$. Tìm m để $B \setminus A = B$.

A. $-\frac{3}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}$. B. $m < \frac{3}{2}$. C. $-\frac{3}{2} < m < \frac{3}{2}$. D. $m \geq -\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $x \in A \Leftrightarrow mx - 3 \geq 0$.

$$x \in B \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } B \setminus A = B \Leftrightarrow B \cap A = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ \begin{cases} m > 0 \\ \frac{3}{m} > 2 \end{cases} \\ \begin{cases} m < 0 \\ \frac{3}{m} < -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ \begin{cases} 0 < m < \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} < m < 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < m < \frac{3}{2}.$$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I**A. TRẮC NGHIỆM**

Câu 1. Dùng kí hiệu khoảng, đoạn để viết lại tập hợp sau: $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x \leq 3 \right\}$.

- A.** $B = \left[-\frac{1}{2}; 3 \right)$. **B.** $B = \left(-\frac{1}{2}; 3 \right]$. **C.** $B = \left[-\frac{1}{2}; 3 \right]$. **D.** $B = \left(-\frac{1}{2}; 3 \right)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 2. Cho tập hợp $A = \{2; 5; 6; 7; 8\}$ và $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Tập $A \setminus B$ có bao nhiêu phần tử?

- A.** 8. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 12.

Lời giải

Chọn B

$$A \setminus B = \{8\}$$

Vậy tập $A \setminus B$ có 1 phần tử.

Câu 3. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 3\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}$. Tìm $A \setminus B$.

- A.** $A \setminus B = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 6; 8\}$. **B.** $A \setminus B = [-1; 0)$.
C. $A \setminus B = (-1; 0)$. **D.** $A \setminus B = \{-1\}$.

Lời giải

Chọn D

$$A = \{-1; 0; 1; 2; 3\}, B = \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

$$\Rightarrow A \setminus B = \{-1\}$$

Câu 4. Viết tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid (2x+1)(x^2-5x+6)=0\}$ bằng cách liệt kê phần tử.

- A.** $A = \left\{ \frac{-1}{2}; 2; 3 \right\}$. **B.** $A = \{2; 3\}$. **C.** $A = \{-1; 2\}$. **D.** $A = \{-1; 2; 3\}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } (2x+1)(x^2-5x+6)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ x^2-5x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2} \\ x=2 \\ x=3 \end{cases}.$$

$$\text{Do } x \in \mathbb{N} \text{ nên } \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}.$$

Câu 5. Cho tập hợp $A = [-3; 5]$. Viết lại tập hợp A bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng.

- A.** $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 5\}$. **B.** $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 5\}$.
C. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid -3 \leq x \leq 5\}$. **D.** $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 5\}$.

Lời giải**Chọn A**

Lý thuyết về tập con của các tập hợp số.

Câu 6. Lập mệnh đề phủ định của mệnh đề: " $\forall n \in \mathbb{N}; 2^n \geq n+1$ ".

A. " $\exists n \in \mathbb{N}; 2^n < n+1$ ".

B. " $\forall n \in \mathbb{N}; 2^n < n+1$ ".

C. " $\exists n \in \mathbb{N}; 2^n \leq n+1$ ".

D. " $\forall n \in \mathbb{N}; 2^n \leq n+1$ ".

Lời giải**Chọn A**

Lý thuyết về mệnh đề phủ định câu mệnh đề và cách sử dụng các ký hiệu $\forall; \exists$.

Câu 7. Trong các phát biểu sau, có bao nhiêu phát biểu là mệnh đề?

1/ Hải Phòng là một thành phố của Việt Nam.

2/ Bạn có đi xem phim không?

3/ $2^{10} - 1$ chia hết cho 11.

4/ 2763 là hợp số.

5/ $x^2 - 3x + 2 = 0$.

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải**Chọn A**

Phát biểu 2/ không phải là mệnh đề, vì phát biểu này không phải là một khẳng định.

Phát biểu 5/ không phải là mệnh đề, vì đây là mệnh đề chứa biến.

Câu 8. Cho tập hợp $X = \{0; 1; 2; 3\}$ và $Y = \{-1; 0; 1; 2; 3; 5\}$. Tìm $C_Y X$.

A. $C_Y X = \{-1; 5\}$.

B. $C_Y X = \{0; 1; 2; 3\}$.

C. $C_Y X = \emptyset$.

D. $C_Y X = \{-1; 0; 1; 2; 3; 5\}$.

Lời giải**Chọn A**

Ta có $C_Y X = Y \setminus X = \{-1; 5\}$.

Câu 9. Cho tập hợp $A = (-\infty; 5]$, $B = [5; +\infty)$. Tìm $A \cup B$.

A. $A \cup B = (-\infty; 5)$.

B. $A \cup B = \{5\}$.

C. $A \cup B = [5; +\infty)$

D. $A \cup B = \mathbb{R}$.

Lời giải**Chọn D**

Ta có: $A \cup B = (-\infty; 5] \cup [5; +\infty) = \mathbb{R}$.

Câu 10. Cho tập $A = \{1; 2; 3; 4\}$. Tìm các tập con của A.

A. 10.

B. 12.

C. 16.

D. 8.

Lời giải.**Chọn C**

Số tập con của A là

$\{\emptyset\}; A; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{4\}; \{1,2\}; \{1,3\}; \{1,4\}; \{2,3\}; \{2,4\}; \{3,4\}; \{1,2,3\}; \{1,2,4\}; \{2,3,4\}; \{1,3,4\}.$

Vậy A có 16 tập con.

Câu 11. Trong các tập hợp dưới đây, tập hợp nào là tập hợp rỗng?

A. $N = \{m \in \mathbb{Z} \mid 2 \leq m \leq 15\}.$

B. $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4 = 5\}.$

C. $P = \{n \in \mathbb{N} \mid 3n + 9 = 6\}.$

D. $Q = \{x \in \mathbb{N} \mid |x| \leq 1\}.$

Lời giải

Chọn C

Xét $P = \{n \in \mathbb{N} \mid 3n + 9 = 6\}$. Ta có : $3n + 9 = 6 \Leftrightarrow n = -1 \notin \mathbb{N}$ nên P là tập rỗng.

Câu 12. Cho tập $A = \{x \in \mathbb{N} \mid (x^2 - 3x + 2)(x + 3) = 0\}$ và $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Có bao nhiêu tập X thỏa mãn $A \cup X = B$?

A. 4.

B. 6.

C. 8.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(x^2 - 3x + 2)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$, suy ra $A = \{1; 2\}$ vì $-3 \notin \mathbb{N}$.

Để $A \cup X = B$ thì $X = B, X = B \setminus \{1\}, X = B \setminus \{2\}, X = B \setminus \{1; 2\}$.

Vậy có tất cả 4 tập X thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 13. Trong mặt phẳng, cho A là tập hợp các tam giác đều, B là tập hợp các tam giác vuông, C là tập hợp các tam giác cân. Chọn khẳng định đúng.

A. $C \subset A$.

B. $A \subset B$.

C. $B \subset C$.

D. $A \subset C$.

Lời giải

Chọn D

Vì tam giác đều được xem là một tam giác cân nên tập hợp các tam giác đều là tập con của tam giác cân hay $A \subset C$.

Câu 14. Tìm mệnh đề đúng.

A. Điều kiện cần và đủ để một số tự nhiên chia hết cho 15 là số đó chia hết cho 5.

B. Điều kiện cần để $a + b$ là một số hữu tỉ là a và b đều là số hữu tỉ.

C. Điều kiện đủ để có ít nhất một trong hai số a, b là số dương là $a + b > 0$.

D. Điều kiện cần và đủ để một tứ giác là hình chữ nhật là nó có hai đường chéo bằng nhau.

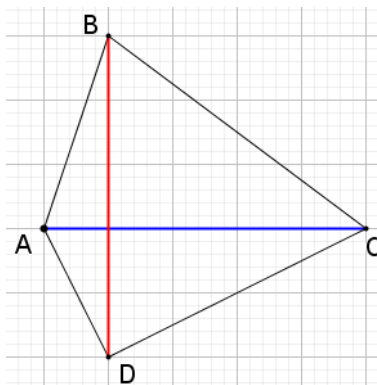
Lời giải

Chọn C

• A sai; Vì $10 \vdots 5$ mà $10 \nmid 15$.

• B sai; Vì $-\sqrt{2} + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, mà $\begin{cases} -\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \\ \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

- D sai; Vì giả sử tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau $AC = BD = 5$, nhưng $ABCD$ không là hình chữ nhật.



- Xét C. Nếu $a + b > 0$ thì có ít nhất một trong hai số a, b là số dương. Thật vậy; Giả sử cả hai số a, b đều không dương ($\forall a \leq 0, b \leq 0$), suy ra $a + b \leq 0$ (trái giả thiết).
- Vậy C đúng.

Câu 15. Cho tập $A = [m+1; m+2]$ và tập $B = [0; 1]$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $C_{\mathbb{R}} A \cap B = \emptyset$.

- A.** $m \geq 0$. **B.** $m = -1$. **C.** $0 < m < 1$. **D.** $m < -1$.

Lời giải

Chọn B

- $C_{\mathbb{R}} A = (-\infty; m+1) \cup (m+2; +\infty)$.
- Ycbt $\Leftrightarrow$ Tìm $m : m+1 \leq 0 < 1 \leq m+2$.
- $\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$.
- Vậy $m = -1$.

Câu 16. Cho tập $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| \leq 2\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x-1 < 0\}$. Tìm $A \cap B$.

- A.** $A \cap B = [-1; 3]$. **B.** $A \cap B = [-1; 1)$. **C.** $A \cap B = (-\infty; 1)$. **D.** $A \cap B = (-1; 2)$.

Lời giải

Chọn B

- Vì $|x-1| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x-1 \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$ nên $A = [-1; 3]$.
- Vì $x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$ nên $B = (-\infty; 1)$.
- Vậy $A \cap B = [-1; 1)$.

Câu 17. Lớp 10A có 45 học sinh. Trong đó có 12 học sinh có học lực giỏi, 30 học sinh có hạnh kiểm tốt, trong đó có 10 học sinh vừa học lực giỏi vừa hạnh kiểm tốt. Học sinh được khen thưởng nếu được học lực giỏi hoặc hạnh kiểm tốt. Tìm số học sinh không được khen thưởng.

- A.** 13. **B.** 35. **C.** 23. **D.** 32.

Lời giải

Chọn A

Gọi $A =$ “Học sinh chỉ xếp học lực giỏi”, $B =$ “Học sinh chỉ có hạnh kiểm tốt”.

Khi đó: $A \cup B =$ “Học sinh xếp chỉ học lực giỏi hoặc chỉ có hạnh kiểm tốt”.

$A \cap B =$ “Học sinh vừa học lực giỏi vừa hạnh kiểm tốt”: Có 10 học sinh.

Số phần tử của $A \cup B$ là: $12 + 30 - 10 = 32$.

Số học sinh được khen thưởng là 32.

Vậy số học sinh không được khen thưởng là: $45 - 32 = 13$.

Câu 18. Tìm mệnh đề sai.

A. $\forall n \in \mathbb{N}; n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 6.

B. $\forall n \in \mathbb{N}; n^2 + 1$ không chia hết cho 4.

C. $\exists n \in \mathbb{N}; n^2 + 1$ chia hết cho 3.

D. $\exists x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 0$.

Lời giải

Chọn C

- Xét đáp án A: $\forall n \in \mathbb{N}; n(n+1)(n+2)$ là tích của ba số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2 và chia hết cho 3 do đó chia hết cho 6. Vậy đáp án A đúng.

- Xét đáp án B: $\forall n \in \mathbb{N}; n^2 + 1$ không chia hết cho 4.

Giả sử mệnh đề trên sai tức là: $\forall n \in \mathbb{N}; n^2 + 1$ chia hết cho 4.

+ Nếu n chẵn $\Rightarrow n = 2k, (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow n^2 + 1 = 4k^2 + 1$ số này không chia hết cho 4.

+ Nếu n lẻ $\Rightarrow n = 2k + 1, (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow n^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2 = 4(k^2 + k) + 2$ không chia hết cho 4.

Suy ra $\forall n \in \mathbb{N}; n^2 + 1$ không chia hết cho 4 (trái với giả thiết). Do đó đáp án B đúng.

- Xét đáp án C: $\exists n \in \mathbb{N}; n^2 + 1$ chia hết cho 3.

$\forall n \in \mathbb{N}$, ta có các trường hợp:

$n = 3k (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow n^2 + 1 = 9k^2 + 1$ số này không chia hết cho 3.

$n = 3k + 1 (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow n^2 + 1 = (3k + 1)^2 + 1 = 9k^2 + 6k + 2$ số này không chia hết cho 3.

$n = 3k + 2 (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow n^2 + 1 = (3k + 2)^2 + 1 = 9k^2 + 12k + 5$ số này không chia hết cho 3.

Do đó $\forall n \in \mathbb{N}; n^2 + 1$ không chia hết cho 3. Nên đáp án C sai.

- Đáp án D đúng với $x = 0$.

Câu 19. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} | x = 15k; k \in \mathbb{Z}\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} | x = 5m; m \in \mathbb{Z}\}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $B \subset A$.

B. $A \subset B$.

C. $A \not\subset B$.

D. $A = B$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\forall x \in A \Rightarrow x = 15k = 5.(3k) = 5n$ (với $n = 3k$). Do $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3k \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = 3k \in \mathbb{Z}$.

Suy ra $x \in B \Rightarrow A \subset B$.

Câu 20. Cho mệnh đề chứa biến $P(x): "x^3 - 3x^2 + 2x = 0"$. Tìm tất cả các phần tử của x để $P(x)$ là một mệnh đề đúng?

- A. $x = -1, x = -2$. B. $x = -2, x = -3$. C. $x = 0, x = 1, x = 2$. D. $x = 4, x = -2, x = 3$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x-2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Câu 21. Tìm mệnh đề sai.

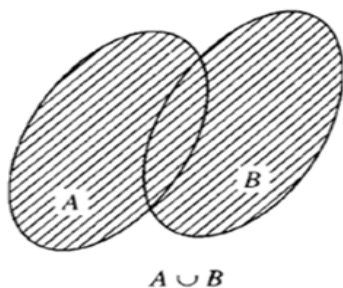
- A. $A \subset (A \cup B)$, với mọi tập A, B . B. $A \setminus B \subset A$, với mọi tập A, B .
C. $(A \cap B) \subset B$, với mọi tập A, B . D. $(A \cup B) \subset (A \cap B)$, với mọi tập A, B .

Lời giải

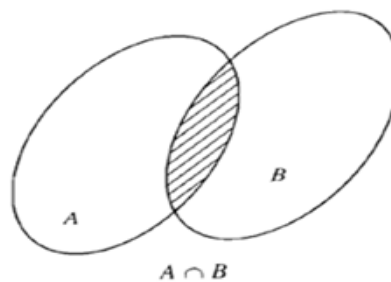
Chọn D.

Theo biểu đồ Ven ta có:

$(A \cup B)$ là phần gạch sọc bên dưới



$A \cap B$ là phần gạch sọc bên dưới.



Do đó $(A \cup B) \subset (A \cap B)$, với mọi tập A, B là mệnh đề sai.

Câu 24: Cho tập $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{|x-2|} > \frac{1}{2} \right\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq |x| \leq 2\}$. Tìm $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

- A. $[-2; -1] \cup [0; 1] \cup [2; 4)$. B. $[-2; -1] \cup (0; 1] \cup (2; 4)$
C. $[-2; -1] \cup [0; 1] \cup [2; 4]$ D. $[-2; -1] \cup (0; 1) \cup [2; 4)$.

Lời giải

Chọn D

+ Với $x \neq 2$, ta có: $\frac{1}{|x-2|} > \frac{1}{2} \Rightarrow |x-2| < 2 \Rightarrow 0 < x < 4$, suy ra $A = (0; 4) \setminus \{2\}$.

+ Ta có: $1 \leq |x| \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ -2 \leq x \leq -1 \end{cases}$, suy ra $B = [-2; -1] \cup [1; 2]$.

$A \cup B = [-2; -1] \cup (0; 4)$, $A \cap B = [1; 2)$

Suy ra: $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = [-2; -1] \cup (0; 1) \cup [2; 4)$.

Câu 25: Tìm mệnh đề sai.

A. $A \setminus \emptyset = \emptyset$, với mọi tập A .

B. $A \cup \emptyset = A$, với mọi tập A .

C. $A \cap \emptyset = \emptyset$, với mọi tập A .

D. $A \cap A = A$, với mọi tập A .

Lời giải

Chọn A

Vì $A \setminus \emptyset = A$ nên A là mệnh đề sai

BÀI TẬP TỰ LUẬN**Bài 1.** Xác định các tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng

$$A = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}, B = \{1; 3; 5; 7; 9\}, C = \{0; 1; 4; 9; 16; 25\}$$

Hướng dẫn giảiTa có các tập hợp A, B, C được viết dưới dạng nêu các tính chất đặc trưng là

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}, B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là số lẻ nhỏ hơn } 10\}, C = \{n^2 \mid n \text{ là số tự nhiên nhỏ hơn } 6\}$$

Bài 2.

a) Trong các tập sau đây, tập nào là tập con của tập nào

$$\begin{aligned} A &= \{1; 2; 3\} & B &= \{n \in \mathbb{N} \mid n < 4\} \\ C &= (0; +\infty) & D &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 7 + 3 = 0\} \end{aligned}$$

b) Tìm tất cả các tập X thỏa mãn bao hàm thức sau;

$$\{1; 2\} \subset X \subset \{1; 2; 3; 4; 5\}.$$

Hướng dẫn giảia) $A \subset B, A \subset C, D \subset C$.b) $\{1; 2\}, \{1; 2; 3\}, \{1; 2; 4\}, \{1; 2; 5\}, \{1; 2; 3; 4\}, \{1; 2; 3; 5\}, \{1; 2; 4; 5\}, \{1; 2; 3; 4; 5\}.$ **Bài 3:** Cho tập hợp $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{14}{3\sqrt{x} + 6} \in \mathbb{Z}\right\}$ a) Hãy xác định tập A bằng cách liệt kê các phần tửb) Tìm tất cả các tập con của tập hợp A .**Hướng dẫn giải**a) Ta có $\sqrt{x} \geq 0$ suy ra $0 < \frac{14}{3\sqrt{x} + 6} \leq \frac{14}{6}$ Mặt khác $\frac{14}{3\sqrt{x} + 6} \in \mathbb{Z}$ nên $\frac{14}{3\sqrt{x} + 6} = 1$ hoặc $\frac{14}{3\sqrt{x} + 6} = 2$

$$\text{Hay } x = \frac{1}{9} \text{ hoặc } x = \frac{64}{9}$$

$$\text{Vậy } A = \left\{\frac{1}{9}; \frac{64}{9}\right\}$$

b) Tất cả các tập con của tập hợp A là $\emptyset, \left\{\frac{1}{9}\right\}, \left\{\frac{64}{9}\right\}, \left\{\frac{1}{9}; \frac{64}{9}\right\}.$ **Bài 4:** Cho $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^4 - 16)(x^2 - 1) = 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x - 9 \leq 0\}.$ Tìm tập hợp X sao cho

a) $X \subset B \setminus A$

b) $A \setminus B = X \cap A$ với X có đúng hai phần tử

Hướng dẫn giải

Ta có $A = \{-2; -1; 1; 2\}$ và $B = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

a) Ta có $A \setminus B = \{0; 3; 4\}$

Suy ra $X \subset A \setminus B$ thì các tập hợp X là

$$\emptyset, \{0\}, \{3\}, \{4\}, \{0; 3\}, \{0; 4\}, \{3; 4\}, \{0; 3; 4\}$$

b) Ta có $A \setminus B = \{-2; -1\}$ với X có đúng hai phần tử khi đó $X = \{-2; -1\}$.

Bài 5: Cho tập $A = \{-1; 1; 5; 8\}$, $B =$ "Gồm các ước số nguyên dương của 16"

a) Viết tập A dưới dạng chỉ ra tính chất đặc trưng của các phần tử.

Viết tập B dưới dạng liệt kê các phần tử.

b) Xác định các phép toán $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$.**Hướng dẫn giải**

a) Ta có $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x+1)(x-1)(x-5)(x-8) = 0\}$

$$B = \{1; 2; 4; 8; 16\}$$

b) Ta có $A \cap B = \{1; 8\}$, $A \cup B = \{-1; 1; 2; 4; 5; 8; 16\}$, $A \setminus B = \{-1; 5\}$

Bài 6: Cho các tập hợp $E = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x < 7\}$

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid (x^2 - 9)(x^2 - 5x - 6) = 0\}$$
 và $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là số nguyên tố nhỏ hơn } 6\}$

a) Chứng minh rằng $A \subset E$ và $B \subset E$ b) Tìm $C_E A$; $C_E B$; $C_E(A \cup B)$

c) Chứng minh rằng: $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $A = \{3; 6\}$ và $B = \{2; 3; 5\}$

Suy ra $A \subset E$ và $B \subset E$

b) Ta có $C_E A = E \setminus A = \{1; 2; 4; 5\}$; $C_E B = E \setminus B = \{1; 4; 6\}$

$$A \cup B = \{2; 3; 5; 6\} \Rightarrow C_E(A \cup B) = E \setminus (A \cup B) = \{1; 4\}$$

c) Ta có $A \cap B = \{3\} \Rightarrow C_E(A \cap B) = E \setminus (A \cap B) = \{1; 2; 4; 5; 6\}$

$$E \setminus A = \{1; 2; 4; 5\}; E \setminus B = \{1; 4; 6\} \Rightarrow (E \setminus A) \cup (E \setminus B) = \{1; 2; 4; 5; 6\}$$

Suy ra $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$.

Bài 7: Xác định các tập hợp $A \cup B$, $A \setminus C$, $A \cap B \cap C$ và biểu diễn trên trục số các

tập hợp tìm được biết:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$, $C = (-\infty; 1)$

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$, $C = (-\infty; 0)$

Hướng dẫn giải

a) Có $A = [-1; 3]$ và $B = [1; +\infty)$

$A \cup B = [-1; +\infty)$, $A \setminus C = [1; 3]$, $A \cap B \cap C = \emptyset$

b) Có $A = [-2; 2]$ và $B = [3; +\infty)$

$A \cup B = [-2; 2] \cup [3; +\infty)$, $A \setminus C = [0; 2]$, $A \cap B \cap C = \emptyset$

Bài 8: Cho tập $A = [-1; 2)$, $B = (-3; 1)$ và $C = (1; 4]$.a) Viết tập A, B, C dưới dạng chỉ ra tính chất đặc trưng của các phần tử và biểu diễn chúng trên trục số.b) Xác định các phép toán $A \cap B$, $B \cup C$, $A \setminus B$.**Hướng dẫn giải**

a) Ta có: $A = [-1; 2) = \{x \mid -1 \leq x < 2\}$, $B = (-3; 1) = \{x \mid -3 < x < 1\}$

$C = (1; 4] = \{x \mid 1 < x \leq 4\}$

b) Ta có $A \cap B = [-1; 1)$, $B \cup C = (-3; 4] \setminus \{1\}$, $A \setminus B = [1; 2)$

Bài 9: Cho hai tập hợp $A = [0; 4)$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 2\}$. Hãy xác định các tập hợp

$A \cup B, A \cap B, A \setminus B$

$A = [0; 4), B = [-2; 2], A \cup B = [-2; 4), A \cap B = [0; 2], A \setminus B = (2; 4)$

Bài 10:

a) Cho $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 5\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 0 \text{ hoặc } 1 < x \leq 6\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

Tìm $A \cap B, A \cup C, B \setminus C$ và biểu diễn cách lấy kết quả trên trục số

b) Cho $A = (-\infty, -2)$, $B = [2m + 1, +\infty)$. Tìm m để $A \cup B = \mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

a) $A \cap B = [-1; 0) \cup (1; 5)$ $A \cup C = [-1; +\infty)$ $B \setminus C = (-2; 0) \cup (1; 2)$

b) $A \cup B = \mathbb{R} \Leftrightarrow 2m + 1 < -2 \Leftrightarrow m < \frac{-3}{2}$

Bài 11: a) Tìm m để $(1; m] \cap (2; +\infty) \neq \emptyset$.

b) Viết tập A gồm các phần tử x thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x \leq 3 \\ x + 1 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$ dưới dạng tập số.

Hướng dẫn giải

a) Để $(1; m] \cap (2; +\infty) \neq \emptyset$ thì $m > 2$.

b) Viết tập A gồm các phần tử x thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x \leq 3 \\ x + 1 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$ dưới dạng tập số.

$$\text{Có } \begin{cases} x \leq 3 \\ x + 1 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -1 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 3] \\ x \in [-1; +\infty) \\ x \in (-\infty; 0) \end{cases} \text{ (biểu diễn trên trục số)}$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; 3] \cap [-1; +\infty) \cap (-\infty; 0) \Leftrightarrow x \in [-1; 0).$$

Vậy $A = [-1; 0)$.

Bài 12: Cho tập hợp $A = \left[m - 1; \frac{m + 1}{2} \right]$ và $B = (-\infty; -2) \cup [2; +\infty)$. Tìm m để

a) $A \subset B$

b) $A \cap B = \emptyset$

Hướng dẫn giải

Điều kiện để tồn tại tập hợp A là $m - 1 < \frac{m + 1}{2} \Leftrightarrow m < 3$ (*)

$$\text{a) } A \subset B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset (-\infty; -2) \\ A \subset [2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m + 1}{2} < -2 \\ m - 1 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -5 \\ m \geq 3 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta có $m < -5$ là giá trị cần tìm

$$\text{b) } A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq m - 1 \\ \frac{m + 1}{2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m < 3$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta có $-1 \leq m < 3$ là giá trị cần tìm

Bài 13: Cho hai tập khác rỗng: $A = (m - 1; 4]$, $B = (-2; 2m + 2)$, với $m \in \mathbb{R}$. Xác định m để:

a) $A \cap B \neq \emptyset$;

b) $A \subset B$;

c) $B \subset A$;

d) $(A \cap B) \subset (-1; 3)$.

Hướng dẫn giải

Với $A = (m - 1; 4]$, $B = (-2; 2m + 2)$ khác tập rỗng, ta có điều kiện

$$\begin{cases} m - 1 < 4 \\ 2m + 2 > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 5 \text{ (*)}.$$

Với điều kiện (*), ta có:

a) $A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow m - 1 < 2m + 2 \Leftrightarrow m > -3$. So sánh với (*) ta thấy các giá trị m thỏa mãn yêu cầu $A \cap B \neq \emptyset$ là $-2 < m < 5$.

$$b) A \subset B \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \geq -2 \\ 2m+2 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1. \text{ So sánh (*) ta thấy các giá trị } m \text{ thỏa mãn yêu}$$

cầu $A \subset B$ là $1 < m < 5$.

$$c) B \subset A \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \leq -2 \\ 2m+2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1. \text{ So sánh với (*) ta thấy các giá trị } m \text{ thỏa mãn}$$

yêu cầu $B \subset A$ là $-2 < m \leq -1$.

$$d) (A \cap B) \subset (-1; 3) \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \geq -1 \\ 2m+2 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{1}{2} \text{ (thỏa (*)}).$$

CHƯƠNG II

BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: bất phương trình bậc nhất hai ẩn; hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn và ứng dụng của chúng vào bài toán thực tiễn.

§1 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Nhân dịp Tết Trung thu, một doanh nghiệp dự định sản xuất hai loại bánh: bánh nướng và bánh dẻo. Lượng đường cần cho mỗi chiếc bánh nướng, bánh dẻo lần lượt là 60 g, 50 g. Doanh nghiệp đã nhập về 500 kg đường.



Số bánh nướng và số bánh dẻo doanh nghiệp dự định sản xuất cần thỏa mãn điều kiện ràng buộc gì để lượng đường sản xuất bánh không vượt quá lượng đường đã nhập về?



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

I. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN



1 Trong bài toán ở phần mở đầu, ta gọi x, y lần lượt là số bánh nướng và số bánh dẻo doanh nghiệp dự định sản xuất (x, y là số tự nhiên). Nếu điều kiện ràng buộc đối với x và y để lượng đường sản xuất bánh không vượt quá lượng đường đã nhập về.



Điều kiện ràng buộc đối với x và y là: $0,06x + 0,05y \leq 500$.
Điều kiện trên là một bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y .



Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là bất phương trình có một trong các dạng sau:

$$ax + by < c; ax + by > c; ax + by \leq c; ax + by \geq c,$$

trong đó a, b, c là những số cho trước với a, b không đồng thời bằng 0, x và y là các ẩn.



Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by < c$ (*).

Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ sao cho $ax_0 + by_0 < c$ được gọi là một *ng nghiệm* của bất phương trình (*).

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , tập hợp các điểm có toạ độ là nghiệm của bất phương trình (*) được gọi là *miền nghiệm* của bất phương trình đó.

Nghiệm và miền nghiệm của các bất phương trình dạng $ax + by > c$, $ax + by \leq c$ và $ax + by \geq c$ được định nghĩa tương tự.

Ví dụ 1 Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $3x + 2y \geq -5$?

- a) $(2; -1)$; b) $(-2; 0)$; c) $(-1; -1)$.

Giải

a) Thay $x = 2, y = -1$, ta có: $3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \geq -5$ là mệnh đề đúng.

Vậy $(2; -1)$ là nghiệm của bất phương trình.

b) Thay $x = -2, y = 0$, ta có: $3 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 \geq -5$ là mệnh đề sai.

Vậy $(-2; 0)$ không là nghiệm của bất phương trình.

c) Thay $x = -1, y = -1$, ta có: $3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) \geq -5$ là mệnh đề đúng.

Vậy $(-1; -1)$ là nghiệm của bất phương trình.

1 Tìm bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong các bất phương trình sau và chỉ ra một nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn đó:

a) $5x + 3y < 20$;

b) $3x - \frac{5}{y} > 2$.

II. BIỂU DIỄN MIỀN NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Mô tả miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn



2 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , xác định các điểm $M(x; y)$ mà:

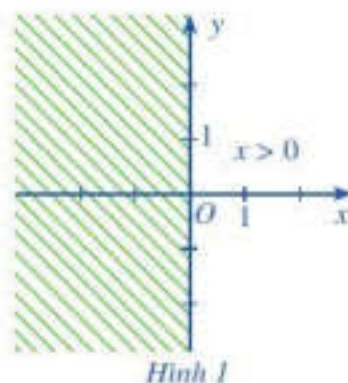
- a) $x > 0$ (1); b) $y < 1$ (2).

Để xác định các điểm $M(x; y)$ trong mặt phẳng toạ độ thoả mãn điều kiện đã cho, ta làm như sau:

a) Đường thẳng $x = 0$ chính là trục tung.

Đường thẳng $x = 0$ chia mặt phẳng thành hai nửa: nửa mặt phẳng bên trái và nửa mặt phẳng bên phải trục tung.

Một điểm có hoành độ dương thì nằm ở nửa mặt phẳng bên phải trục tung và ngược lại. Vì thế, miền nghiệm của bất phương trình (1) là nửa mặt phẳng bên phải trục tung, được mô tả bằng nửa mặt phẳng không bị gạch ở Hình 1 (không kể trục tung).

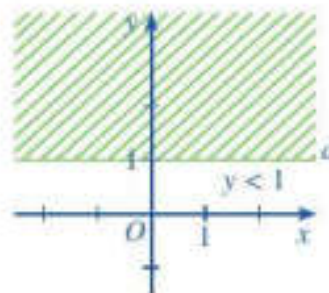


Hình 1

b) Vẽ đường thẳng $y = 1$.

Đường thẳng $d: y = 1$ chia mặt phẳng thành hai nửa: nửa mặt phẳng bên trên và nửa mặt phẳng bên dưới đường thẳng d (không kể đường thẳng d).

Một điểm có tung độ nhỏ hơn 1 thì nằm ở nửa mặt phẳng bên dưới đường thẳng d và ngược lại. Vì thế, miền nghiệm của bất phương trình (2) là nửa mặt phẳng bên dưới đường thẳng d , được mô tả bằng nửa mặt phẳng không bị gạch ở Hình 2.



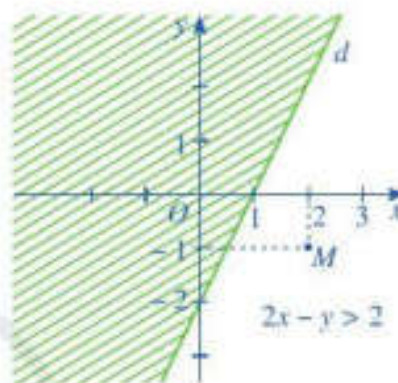
Hình 2

3 Cho bất phương trình $2x - y > 2$ (3).

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ đường thẳng $d: 2x - y = 2 \Leftrightarrow y = 2x - 2$.

b) Xét điểm $M(2; -1)$. Chứng tỏ $(2; -1)$ là nghiệm của bất phương trình (3).

c) Đường thẳng d chia mặt phẳng tọa độ thành hai nửa mặt phẳng. Gạch đi nửa mặt phẳng không chứa điểm $M(2; -1)$.



Hình 3



Miền nghiệm của bất phương trình (3) là nửa mặt phẳng không bị gạch trong Hình 3.

Người ta chứng minh được định lý sau:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , phương trình $ax + by = c$ (với a và b không đồng thời bằng 0) xác định một đường thẳng d như sau:

- d có phương trình là $x = \frac{c}{a}$ nếu $b = 0$;
- d có phương trình là $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ nếu $b \neq 0$.

Ngoài ra, người ta cũng chứng minh được định lý sau:



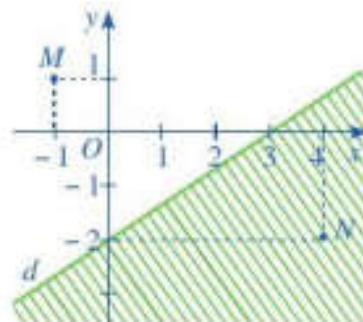
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , đường thẳng $d: ax + by = c$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Một trong hai nửa mặt phẳng (không kể d) là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$, nửa mặt phẳng còn lại (không kể d) là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by > c$.

Chú ý: Đối với bất phương trình dạng $ax + by \leq c$ hoặc $ax + by \geq c$ thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng kể cả đường thẳng d .

Ví dụ 2 Nửa mặt phẳng không bị gạch trong Hình 4 (không kể d) biểu diễn miền nghiệm của một bất phương trình bậc nhất hai ẩn. Hỏi tọa độ hai điểm $M(-1; 1)$, $N(4; -2)$ có là nghiệm của bất phương trình đó không?

Giải

- Điểm $M(-1; 1)$ thuộc nửa mặt phẳng không bị gạch nên $(-1; 1)$ là nghiệm của bất phương trình đó.
- Điểm $N(4; -2)$ thuộc nửa mặt phẳng bị gạch nên $(4; -2)$ không là nghiệm của bất phương trình đó.



Hình 4

2. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Quy tắc thực hành biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn như sau:

Các bước biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy :

Bước 1. Vẽ đường thẳng $d: ax + by = c$. Đường thẳng d chia mặt phẳng tọa độ thành hai nửa mặt phẳng

Bước 2. Lấy một điểm $M(x_0; y_0)$ không nằm trên d (ta thường lấy gốc tọa độ O nếu $c \neq 0$). Tính $ax_0 + by_0$ và so sánh với c

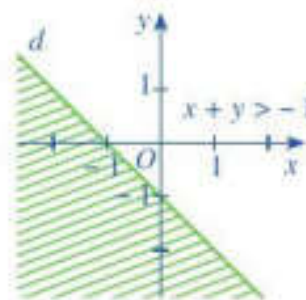
Bước 3. Kết luận

- Nếu $ax_0 + by_0 < c$ thì nửa mặt phẳng (không kể d) chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$
- Nếu $ax_0 + by_0 > c$ thì nửa mặt phẳng (không kể d) không chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$.

Ví dụ 3 Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau: $x + y > -1$; $x + y \geq -1$.

Giải

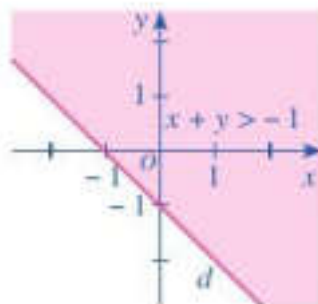
- Vẽ đường thẳng $d: x + y = -1$.
- Lấy điểm $O(0; 0)$. Ta có: $0 + 0 = 0 > -1$.
- Vậy miền nghiệm của bất phương trình $x + y > -1$ là nửa mặt phẳng không bị gạch ở Hình 5 chứa điểm $O(0; 0)$ không kể đường thẳng d ; miền nghiệm của bất phương trình $x + y \geq -1$ là nửa mặt phẳng không bị gạch ở Hình 5 chứa điểm $O(0; 0)$ kể cả đường thẳng d .



Hình 5

Chú ý: Thông thường khi sử dụng phần mềm toán học để biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn, miền nghiệm của bất phương trình đó được tô màu.

Chẳng hạn, miền nghiệm của bất phương trình $x + y > -1$ được tô màu như Hình 6.

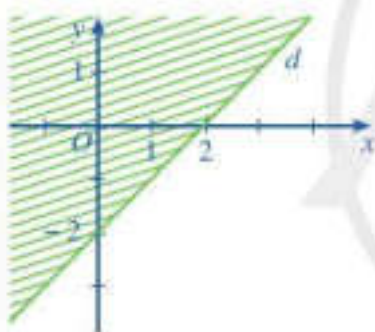


Hình 6

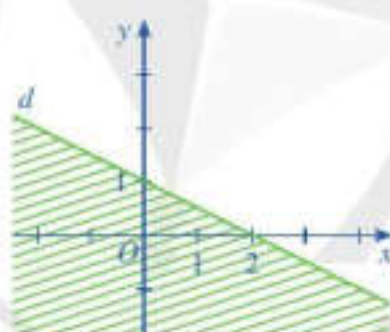
2 Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau:
 a) $x - 2y < 4$;
 b) $x + 3y \leq 6$.

BÀI TẬP

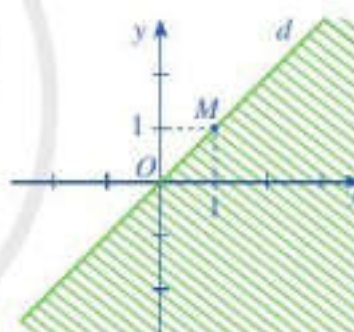
- Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $2x - 3y < 3$?
 a) $(0; -1)$; b) $(2; 1)$; c) $(3; 1)$.
- Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau:
 a) $x + 2y < 3$; b) $3x - 4y \geq -3$;
 c) $y \geq -2x + 4$; d) $y < 1 - 2x$.
- Phần không gạch (không kể d) ở mỗi Hình 7a, 7b, 7c là miền nghiệm của bất phương trình nào?



a)



b)



c)

Hình 7

- Một gian hàng trưng bày bàn và ghế rộng 60 m^2 . Diện tích để kê một chiếc ghế là $0,5 \text{ m}^2$, một chiếc bàn là $1,2 \text{ m}^2$. Gọi x là số chiếc ghế, y là số chiếc bàn được kê.
 a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y cho phần mặt sàn để kê bàn và ghế, biết diện tích mặt sàn dành cho lưu thông tối thiểu là 12 m^2 .
 b) Chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình trên.
- Trong 1 lạng (100 g) thịt bò chứa khoảng 26 g protein, 1 lạng cá rô phi chứa khoảng 20 g protein. Trung bình trong một ngày, một người phụ nữ cần tối thiểu 46 g protein. (Nguồn: <https://vinmec.com> và <https://thanhnien.vn>) Gọi x, y lần lượt là số lạng thịt bò và số lạng cá rô phi mà một người phụ nữ nên ăn trong một ngày. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn lượng protein cần thiết cho một người phụ nữ trong một ngày và chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình đó.

Dạng 1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

1. Phương pháp

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là mệnh đề chứa hai biến có một trong các dạng

$$\begin{cases} ax + by > c \\ ax + by < c \\ ax + by \geq c \\ ax + by \leq c \end{cases}, \text{ trong}$$

đó a, b, c là các số thực với $a^2 + b^2 \neq 0$.

Nghiệm của bất phương trình

Cặp số $(x_0; y_0)$ để $ax_0 + by_0 > c$ là bất đẳng thức đúng được gọi là một nghiệm của bất phương trình $ax + by > c$.

Biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Cũng như bất phương trình bậc nhất một ẩn, các bất phương trình bậc nhất hai ẩn thường có vô số nghiệm và để mô tả tập nghiệm của chúng, ta sử dụng phương pháp biểu diễn hình học.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của bất phương trình được gọi là miền nghiệm của nó.

Từ đó ta có quy tắc thực hành biểu diễn hình học tập nghiệm (hay biểu diễn miền nghiệm) của bất phương trình $ax + by \leq c$ như sau (tương tự cho bất phương trình $ax + by \geq c$).

Bước 1. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy vẽ đường thẳng $\Delta: ax + by = c$.

Bước 2. Lấy một điểm $M_0(x_0; y_0)$ không thuộc Δ (ta thường lấy gốc tọa độ O).

Bước 3. Tính $ax_0 + by_0$ và so sánh $ax_0 + by_0$ với c .

Bước 4. Kết luận.

+) Nếu $ax_0 + by_0 < c$ thì nửa mặt phẳng bờ Δ chứa M_0 là miền nghiệm của $ax_0 + by_0 \leq c$.

+) Nếu $ax_0 + by_0 > c$ thì nửa mặt phẳng bờ Δ không chứa M_0 là miền nghiệm của $ax_0 + by_0 \leq c$.

Chú ý: Miền nghiệm của bất phương trình $ax_0 + by_0 \leq c$ bỏ đi đường thẳng $ax_0 + by_0 = c$ là miền nghiệm của bất phương trình $ax_0 + by_0 < c$.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Xác định miền nghiệm của các bất phương trình sau:

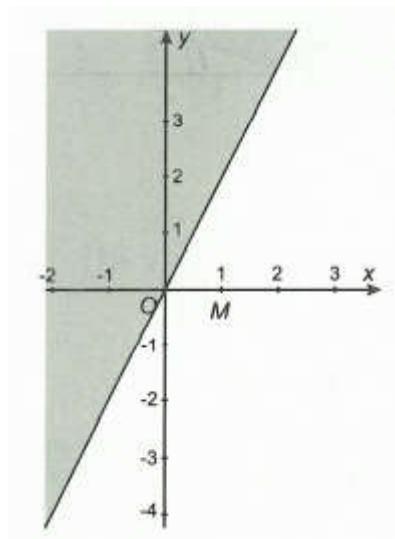
a) $2x - y \geq 0$.

b) $\frac{x-2y}{2} > \frac{2x+y+1}{3}$.

Hướng dẫn giải

a) Trong mặt phẳng tọa độ, vẽ đường thẳng $d: 2x - y = 0$. Ta có d chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Chọn một điểm bất kì không thuộc đường thẳng đó, chẳng hạn điểm $M(1; 0)$. Ta thấy

$(1;0)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho. Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ chứa d và chứa điểm $M(1;0)$ (miền không được tô màu trên hình vẽ).



b) Ta có

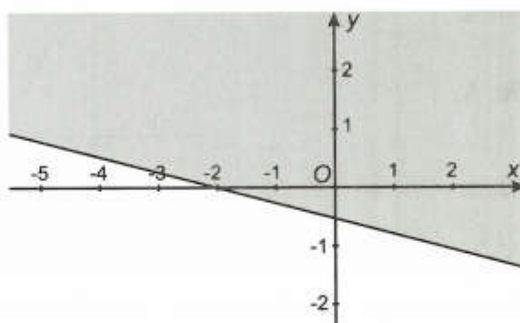
$$\frac{x-2y}{2} > \frac{2x-y+1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3(x-2y) - 2(2x-y+1) > 0$$

$$\Leftrightarrow -x-4y-2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x+4y+2 < 0$$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ đường thẳng $\Delta: x+4y+2=0$. Xét điểm $O(0;0)$, ta thấy $(0;0)$ không phải là nghiệm của bất phương trình đã cho, do đó miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ Δ (không kể đường thẳng Δ) và không chứa điểm $O(0;0)$ (miền không được tô đậm như hình vẽ).



Ví dụ 2: Xác định miền nghiệm của các bất phương trình sau:

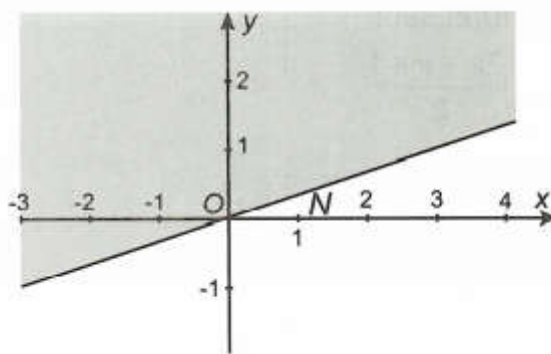
a) $x-3y \geq 0$.

b) $\frac{x-y}{-2} < x+y+1$.

Hướng dẫn giải

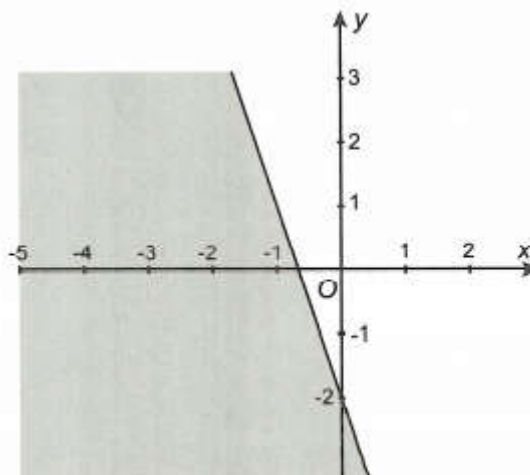
a) Trong mặt phẳng tọa độ, vẽ đường thẳng $d: x-3y=0$. Ta có d chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Chọn một điểm bất kì không thuộc đường thẳng đó, chẳng hạn điểm $N(1;0)$. Ta thấy

$(1;0)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho. Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ chứa d và chứa điểm $N(1;0)$ (miền không được tô đậm trên hình vẽ).



b) Ta có $\frac{x-y}{-2} < x+y+1 \Leftrightarrow x-y > -2(x+y+1) \Leftrightarrow 3x+y+2 > 0$.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ đường thẳng $\Delta: 3x+y+2=0$. Xét điểm $O(0;0)$, ta thấy $(0;0)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho, do đó miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ Δ (không kể đường thẳng Δ) và chứa điểm $O(0;0)$ (miền không được tô đậm trên hình vẽ).



3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

- A. $2x^2 + 3y > 0$ B. $x^2 + y^2 < 2$ C. $x + y^2 \geq 0$ D. $x + y \geq 0$

Lời giải

Chọn D

Theo định nghĩa thì $x + y \geq 0$ là bất phương trình bậc nhất hai ẩn. Các bất phương trình còn lại là bất phương trình bậc hai.

Câu 2. Cho bất phương trình $2x + 3y - 6 \leq 0$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. Bất phương trình (1) chỉ có một nghiệm duy nhất.
 B. Bất phương trình (1) vô nghiệm.
 C. Bất phương trình (1) luôn có vô số nghiệm.

D. Bất phương trình (1) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Trên mặt phẳng tọa độ, đường thẳng $(d): 2x + 3y - 6 = 0$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng.

Chọn điểm $O(0;0)$ không thuộc đường thẳng đó. Ta thấy $(x;y) = (0;0)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho. Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ (d) chứa điểm $O(0;0)$ kể cả (d) .

Vậy bất phương trình (1) luôn có vô số nghiệm.

Câu 3. Miền nghiệm của bất phương trình: $3x + 2(y + 3) \geq 4(x + 1) - y + 3$ là nửa mặt phẳng chứa điểm:

A. (3;0)

B. (3;1)

C. (2;1)

D. (0;0)

Lời giải

Chọn C

Ta có $3x + 2(y + 3) \geq 4(x + 1) - y + 3 \Leftrightarrow -x + 3y - 1 \geq 0$.

Vì $-2 + 3.1 - 1 > 0$ là mệnh đề đúng nên miền nghiệm của bất phương trình trên chứa điểm có tọa độ (2;1).

Câu 4. Miền nghiệm của bất phương trình: $3(x - 1) + 4(y - 2) < 5x - 3$ là nửa mặt phẳng chứa điểm:

A. (0;0)

B. (-4;2)

C. (-2;2)

D. (-5;3)

Lời giải

Chọn A

Ta có $3(x - 1) + 4(y - 2) < 5x - 3 \Leftrightarrow -2x + 4y - 8 < 0$.

Vì $-2.0 + 4.0 - 8 < 0$ là mệnh đề đúng nên miền nghiệm của bất phương trình trên chứa điểm có tọa độ (0;0).

Câu 5. Miền nghiệm của bất phương trình $-x + 2 + 2(y - 2) < 2(1 - x)$ là nửa mặt phẳng **không** chứa điểm nào trong các điểm sau?

A. (0;0)

B. (1;1)

C. (4;2)

D. (1;-1)

Lời giải

Chọn C

Ta có $-x + 2 + 2(y - 2) < 2(1 - x) \Leftrightarrow x + 2y < 4$.

Vì $-4 + 2.2 < 4$ là mệnh đề sai nên $(-4;2)$ không thuộc miền nghiệm của bất phương trình.

Câu 6. Trong các cặp số sau đây, cặp nào không thuộc nghiệm của bất phương trình: $x - 4y + 5 > 0$

A. (-5;0)

B. (-2;1)

C. (0;0)

D. (1;-3)

Lời giải

Chọn A

Vì $-5-4.0+5>0$ là mệnh đề sai nên $(-5;0)$ không thuộc miền nghiệm của bất phương trình.

Câu 7. Điểm $A(-1;3)$ là điểm thuộc miền nghiệm của bất phương trình:

- A. $-3x+2y-4>0$ B. $x+3y<0$ C. $3x-y>0$ D. $2x-y+4>0$

Lời giải

Chọn A

Vì $-3.(-1)+2.3-4>0$ là mệnh đề đúng nên $A(-1;3)$ là điểm thuộc miền nghiệm của bất phương trình $-3x+2y-4>0$.

Câu 8. Cặp số $(2;3)$ là nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

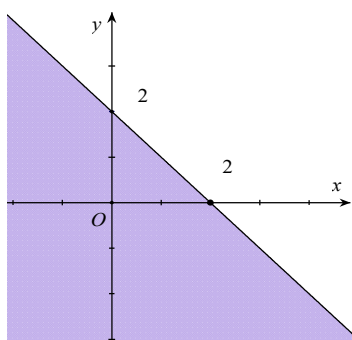
- A. $2x-3y-1>0$. B. $x-y<0$. C. $4x>3y$. D. $x-3y+7<0$.

Lời giải

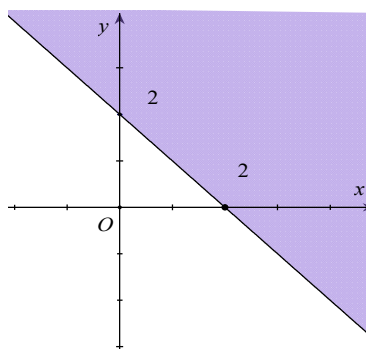
Chọn B

Vì $2-3<0$ là mệnh đề đúng nên cặp số $(2;3)$ là nghiệm của bất phương trình $x-y<0$.

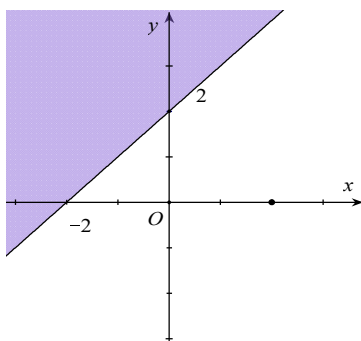
Câu 9. Miền nghiệm của bất phương trình $x+y\leq 2$ là phần **tô đậm** trong hình vẽ của hình vẽ nào, trong các hình vẽ sau?



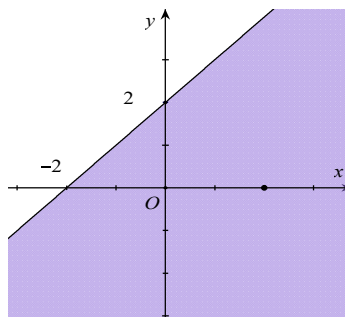
A.



B.



C.



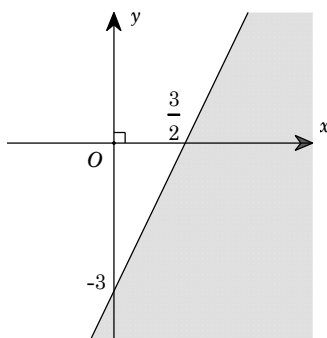
D.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng $\Delta: x+y-2=0$ đi qua hai điểm $A(2;0), B(0;2)$ và cặp số $(0;0)$ thỏa mãn bất phương trình $x+y\leq 2$ nên Hình 1 biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $x+y\leq 2$.

Câu 10. Phần **tô đậm** trong hình vẽ sau, biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình nào trong các bất phương trình sau?



A. $2x - y < 3$

B. $2x - y > 3$

C. $x - 2y < 3$

D. $x - 2y > 3$

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng đi qua hai điểm $A\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ và $B(0; -3)$ nên có phương trình $2x - y = 3$.

Mặt khác, cặp số $(0; 0)$ không thỏa mãn bất phương trình $2x - y > 3$ nên phần tô đậm ở hình trên biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $2x - y > 3$.

S2

HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Quảng cáo sản phẩm trên truyền hình là một hoạt động quan trọng trong kinh doanh của các doanh nghiệp.

Theo Thông báo số 10/2019, giá quảng cáo trên VTV1 là 30 triệu đồng cho 15 giây/1 lần quảng cáo vào khoảng 20h30; là 6 triệu đồng cho 15 giây/1 lần quảng cáo vào khung giờ 16h00 – 17h00.

Một công ty dự định chi không quá 900 triệu đồng để quảng cáo trên VTV1 với yêu cầu quảng cáo về số lần phát như sau: ít nhất 10 lần quảng cáo vào khoảng 20h30 và không quá 50 lần quảng cáo vào khung giờ 16h00 – 17h00. Gọi x, y lần lượt là số lần phát quảng cáo vào khoảng 20h30 và vào khung giờ 16h00 – 17h00.



Sảnh “Trống đồng” ở trụ sở của VTV tại Hà Nội
(Nguồn: Trịnh Hoàng Minh Quang)

Trong toán học, các điều kiện ràng buộc đối với x và y để đáp ứng nhu cầu trên của công ty được thể hiện như thế nào?



I. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN



1 Cho hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} x - y < 3 & (1) \\ x + 2y > -2 & (2) \end{cases}$$

- Mỗi bất phương trình (1) và (2) có là bất phương trình bậc nhất hai ẩn không?
- Chỉ ra một nghiệm chung của hai bất phương trình (1) và (2) trong hệ trên.



Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là một hệ gồm một số bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y . Mỗi nghiệm chung của các bất phương trình trong hệ được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đó.

Ví dụ 1 Cho hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x - 4y \leq 6 & (1) \\ x + y > 2 & (2) \end{cases}$$

Cặp số $(x; y)$ nào sau đây là nghiệm của hệ bất phương trình trên?

$(3; 1), (1; -2), (5; -3).$



1 Chỉ ra một nghiệm của hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x + y > 0 \\ x - 3y < 6 \\ x - y \geq -4. \end{cases}$$

Giải

- Thay $x = 3, y = 1$ vào hai bất phương trình của hệ, ta có:
 $2 \cdot 3 - 4 \cdot 1 \leq 6$ là mệnh đề đúng; $3 + 1 > 2$ là mệnh đề đúng.
Vậy $(3; 1)$ là nghiệm chung của (1) và (2) nên $(3; 1)$ là nghiệm của hệ bất phương trình.
- Thay $x = 1, y = -2$ vào bất phương trình (1) của hệ, ta có:
 $2 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) \leq 6$ là mệnh đề sai.
Vậy $(1; -2)$ không là nghiệm của (1) nên $(1; -2)$ không là nghiệm của hệ bất phương trình.
- Thay $x = 5, y = -3$ vào bất phương trình (2) của hệ, ta có:
 $5 + (-3) > 2$ là mệnh đề sai.
Vậy $(5; -3)$ không là nghiệm của (2) nên $(5; -3)$ không là nghiệm của hệ bất phương trình.

II. BIỂU DIỄN MIỀN NGHIỆM CỦA HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Cũng như bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta có thể biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng tọa độ.

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.



2 Cho hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} x - 2y \geq -2 \\ 7x - 4y \leq 16 \\ 2x + y \geq -4. \end{cases}$$

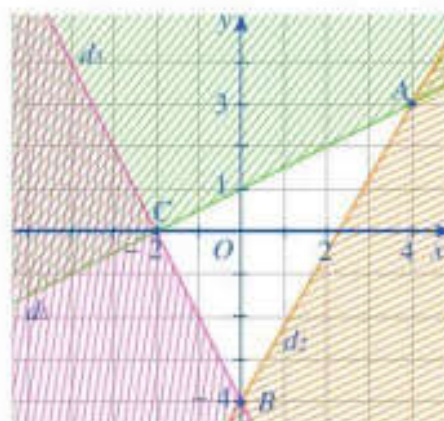
- Trong cùng mặt phẳng tọa độ Oxy , biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ bất phương trình bằng cách gạch bỏ phần không thuộc miền nghiệm của nó.
- Tìm miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho, ta làm như sau (Hình 8):

Bước 1. Trong cùng mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ ba đường thẳng:

$$\begin{aligned} d_1: x - 2y &= -2; & d_2: 7x - 4y &= 16; \\ d_3: 2x + y &= -4. \end{aligned}$$

Do tọa độ điểm $O(0; 0)$ thỏa mãn các bất phương trình trong hệ nên miền nghiệm của từng bất phương trình trong hệ lần lượt là những nửa mặt phẳng không bị gạch chứa điểm $O(0; 0)$ (kể cả đường thẳng tương ứng).



Hình 8

Bước 2. Phần không bị gạch (chứa điểm $O(0 ; 0)$) là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Cụ thể, miền nghiệm của hệ là tam giác ABC kể cả miền trong (còn gọi là miền tam giác ABC) với $A(4 ; 3)$, $B(0 ; -4)$, $C(-2 ; 0)$.



Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta làm như sau:

- Trong cùng mặt phẳng toạ độ, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ bằng cách gạch bỏ phần không thuộc miền nghiệm của nó.
- Phần không bị gạch là miền nghiệm cần tìm.

Ví dụ 2 Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 4 \\ x + y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

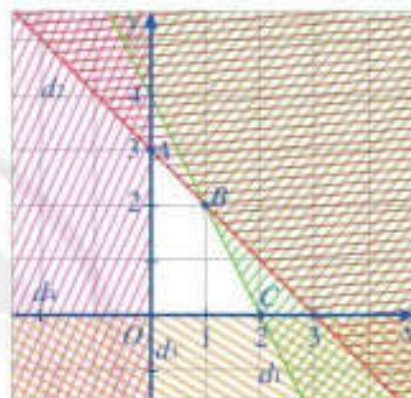
Giải. (Hình 9)

Vẽ các đường thẳng:

$d_1: 2x + y = 4$; $d_2: x + y = 3$; $d_3: x = 0$ là trục tung;
 $d_4: y = 0$ là trục hoành.

Gạch đi các phần không thuộc miền nghiệm của mỗi bất phương trình.

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là tứ giác $OABC$ kể cả miền trong (còn gọi là miền tứ giác $OABC$) với $O(0 ; 0)$, $A(0 ; 3)$, $B(1 ; 2)$, $C(2 ; 0)$.



Hình 9

2 Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 3x - y > -3 \\ -2x + 3y < 6 \\ 2x + y > -4. \end{cases}$$

III. ÁP DỤNG VÀO BÀI TOÁN THỰC TIỄN

Bài toán 1. Trong bài toán ở phần mở đầu, tìm x và y sao cho tổng số lần xuất hiện quảng cáo của công ty là nhiều nhất.

Giải

Gọi x , y lần lượt là số lần phát quảng cáo vào khoảng 20h30 và vào khung giờ 16h00 – 17h00. Theo giả thiết, ta có: $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$, $x \geq 10$, $0 \leq y \leq 50$.

Tổng số lần phát quảng cáo là $T = x + y$.

Số tiền công ty cần chi là $30x + 6y$ (triệu đồng).

Do công ty dự định chi không quá 900 triệu đồng nên $30x + 6y \leq 900$ hay $5x + y \leq 150$.

Ta có hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} 5x + y \leq 150 \\ x \geq 10 \\ 0 \leq y \leq 50 \end{cases} \quad (I)$$

Bài toán đưa về tìm x, y là nghiệm của hệ bất phương trình (I) sao cho $T = x + y$ có giá trị lớn nhất.

Trước hết, ta xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (I).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (I) là miền tứ giác $ABCD$ với $A(30; 0), B(20; 50), C(10; 50), D(10; 0)$ (Hình 10).

Người ta chứng minh được: Biểu thức $T = x + y$ đạt được giá trị lớn nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác $ABCD$.

Tính giá trị của biểu thức $T = x + y$ tại cặp số $(x; y)$ là toạ độ các đỉnh của tứ giác $ABCD$ rồi so sánh các giá trị đó. Ta được T đạt giá trị lớn nhất khi $x = 20, y = 50$ ứng với toạ độ đỉnh B .

Vậy để phát được số lần quảng cáo nhiều nhất thì số lần phát quảng cáo vào khoảng 20h30 và vào khung giờ 16h00 – 17h00 lần lượt là 20 và 50 lần.

Bài toán 2. Người ta dự định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 140 kg chất A và 9 kg chất B.

Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 4 triệu đồng, có thể chiết xuất được 20 kg chất A và 0,6 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 3 triệu đồng, có thể chiết xuất được 10 kg chất A và 1,5 kg chất B. Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất? Biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 10 tấn nguyên liệu loại I và không quá 9 tấn nguyên liệu loại II.

Giải

Gọi x, y lần lượt là số tấn nguyên liệu loại I, loại II cần sử dụng.

Khi đó, ta chiết xuất được $20x + 10y$ (kg) chất A và $0,6x + 1,5y$ (kg) chất B.

Theo giả thiết, x và y phải thỏa mãn các điều kiện:

$$0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 9;$$

$$20x + 10y \geq 140 \text{ hay } 2x + y \geq 14;$$

$$0,6x + 1,5y \geq 9 \text{ hay } 2x + 5y \geq 30.$$

Tổng số tiền cần mua nguyên liệu là $T = 4x + 3y$.

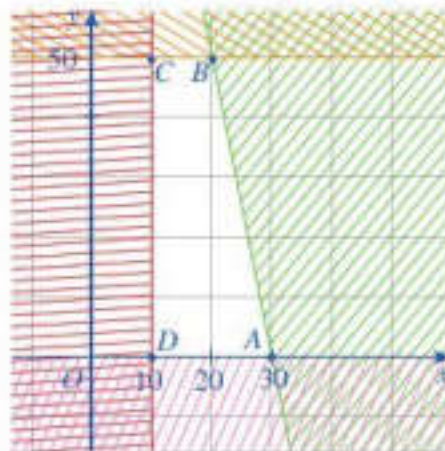
Bài toán đưa về: Tìm x, y là nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 2x + y \geq 14 \\ 2x + 5y \geq 30 \end{cases} \quad (\text{II})$$

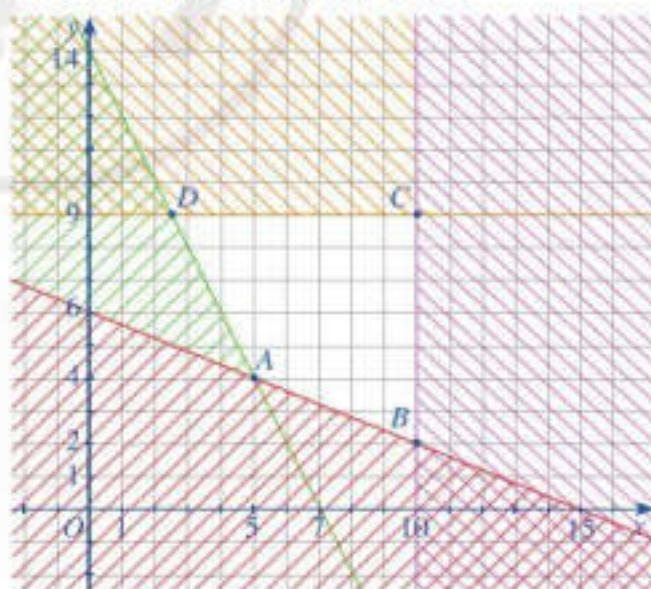
sao cho $T = 4x + 3y$ có giá trị nhỏ nhất.

Trước hết, ta xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (II).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (II) là miền tứ giác $ABCD$ với $A(5; 4), B(10; 2), C(10; 9), D\left(\frac{5}{2}; 9\right)$ (Hình 11).



Hình 10



Hình 11

Người ta chứng minh được: Biểu thức $T = 4x + 3y$ có giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác $ABCD$.

Tính giá trị của biểu thức $T = 4x + 3y$ tại cặp số $(x; y)$ là toạ độ các đỉnh của tứ giác $ABCD$ rồi so sánh các giá trị đó. Ta được T đạt giá trị nhỏ nhất bằng 32 khi $x = 5, y = 4$ ứng với toạ độ đỉnh A.

Vậy để chi phí nguyên liệu là ít nhất, cần sử dụng 5 tấn nguyên liệu loại I và 4 tấn nguyên liệu loại II; khi đó chi phí là 32 triệu đồng.

BÀI TẬP

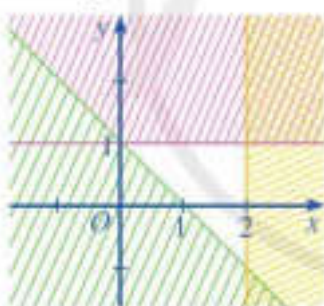
1. Kiểm tra xem mỗi cặp số $(x; y)$ đã cho có là nghiệm của hệ bất phương trình tương ứng không.

a) $\begin{cases} 3x + 2y \geq -6 \\ x + 4y > 4 \end{cases} \quad (0; 2), (1; 0);$ b) $\begin{cases} 4x + y \leq -3 \\ -3x + 5y \geq -12 \end{cases} \quad (-1; -3), (0; -3).$

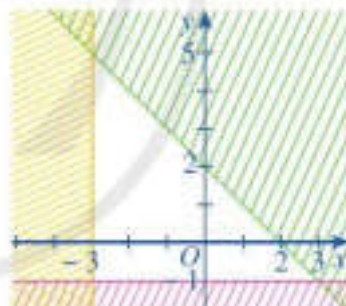
2. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình:

a) $\begin{cases} x + 2y < -4 \\ y \geq x + 5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - 2y > 8 \\ x \geq 0 \\ y \leq 0. \end{cases}$

3. Miền không bị gạch ở mỗi Hình 12a, 12b là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào cho ở dưới đây?



a)



b)

Hình 12

a) $\begin{cases} x + y < 2 \\ x > -3 \\ y \geq -1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} y < x \\ x \leq 0 \\ y > -3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} y > -x + 1 \\ x \leq 2 \\ y < 1. \end{cases}$

4. Một phân xưởng sản xuất hai kiểu mũ. Thời gian để làm ra một chiếc mũ kiểu thứ nhất nhiều gấp hai lần thời gian làm ra một chiếc mũ kiểu thứ hai. Nếu chỉ sản xuất toàn kiểu mũ thứ hai thì trong 1 giờ phân xưởng làm được 60 chiếc. Phân xưởng làm việc 8 tiếng mỗi ngày và thị trường tiêu thụ tối đa trong một ngày là 200 chiếc mũ kiểu thứ nhất và 240 chiếc mũ kiểu thứ hai. Tiền lãi khi bán một chiếc mũ kiểu thứ nhất là 24 nghìn đồng, một chiếc mũ kiểu thứ hai là 15 nghìn đồng. Tính số lượng mũ kiểu thứ nhất và kiểu thứ hai trong một ngày mà phân xưởng cần sản xuất để tiền lãi thu được là cao nhất.

Dạng 1. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

1. Phương pháp

Tương tự hệ phương trình một ẩn, ta có hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Trong mặt phẳng toạ độ, ta gọi tập hợp các điểm có toạ độ thoả mãn mọi bất phương trình trong hệ là miền nghiệm của hệ. Vậy miền nghiệm của hệ là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

Để xác định miền nghiệm của hệ, ta dùng phương pháp biểu diễn hình học như sau:

- Với mỗi bất phương trình trong hệ, ta xác định miền nghiệm của nó và gạch bỏ (tô màu) miền còn lại.
- Sau khi làm như trên lần lượt đối với tất cả các bất phương trình trong hệ trên cùng một mặt phẳng toạ độ, miền còn lại không bị gạch (tô đậm) chính là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Bài toán: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $T(x, y) = ax + by$ với (x, y) nghiệm đúng một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn cho trước.

- **Bước 1:** Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho. Kết quả thường được miền nghiệm S là đa giác.
- **Bước 2:** Tính giá trị của F tương ứng với (x, y) là toạ độ của các đỉnh của đa giác.
- **Bước 3:** Kết luận:
 - Giá trị lớn nhất của F là số lớn nhất trong các giá trị tìm được.
 - Giá trị nhỏ nhất của F là số nhỏ nhất trong các giá trị tìm được.

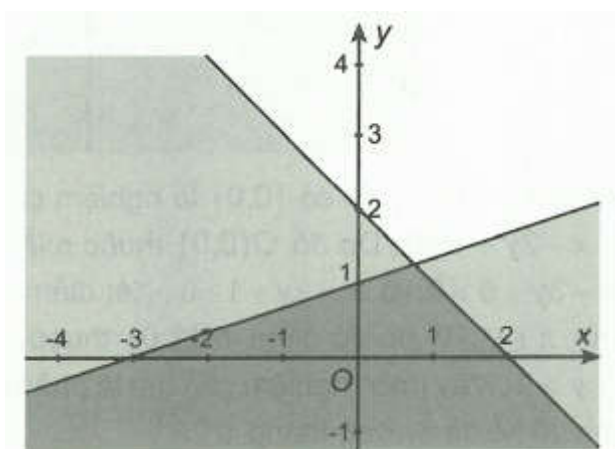
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ: Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình sau
$$\begin{cases} x + y - 2 \geq 0 \\ x - 3y + 3 \leq 0. \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Vẽ các đường thẳng $d: x + y - 2 = 0$, $d': x - 3y + 3 = 0$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy .

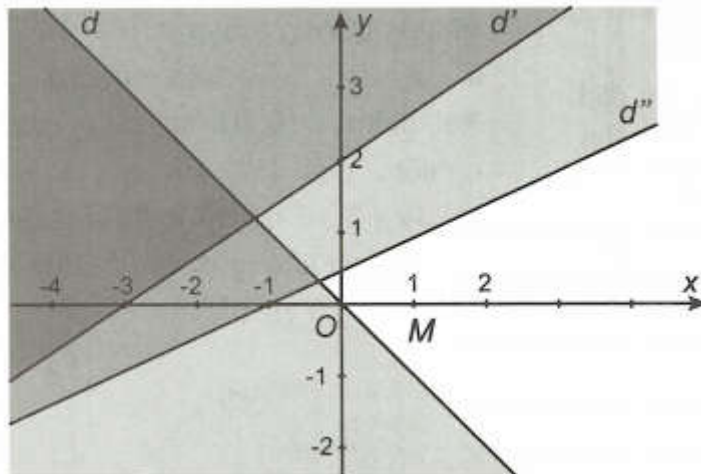
Xét điểm $O(0;0)$, ta thấy $(0;0)$ không phải là nghiệm của bất phương trình $x + y - 2 \geq 0$ và $x - 3y + 3 \leq 0$ do đó miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô đậm trên hình vẽ kẻ cả hai đường d và d' .



Ví dụ 2: Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình sau:
$$\begin{cases} x + y > 0 \\ 2x - 3y + 6 > 0 \\ x - 2y + 1 \geq 0 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Vẽ các đường thẳng $d: x + y = 0$, $d': 2x - 3y + 6 = 0$ và $d'': x - 2y + 1 = 0$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy .



Xét điểm $O(0;0)$, ta có $(0;0)$ là nghiệm của bất phương trình $2x - 3y + 6 > 0$ và $x - 2y + 1 \geq 0$. Do đó $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của các bất phương trình $2x - 3y + 6 > 0$ và $x - 2y + 1 \geq 0$. Xét điểm $M(1;0)$ là nghiệm của bất phương trình $x + y > 0$ do đó điểm $M(1;0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình $x + y > 0$. Vậy miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô đậm trên hình vẽ kể cả đường thẳng d'' .

Ví dụ 3: Xác định miền nghiệm của bất phương trình $(x - y)(x^3 + y^3) \geq 0$.

Hướng dẫn giải

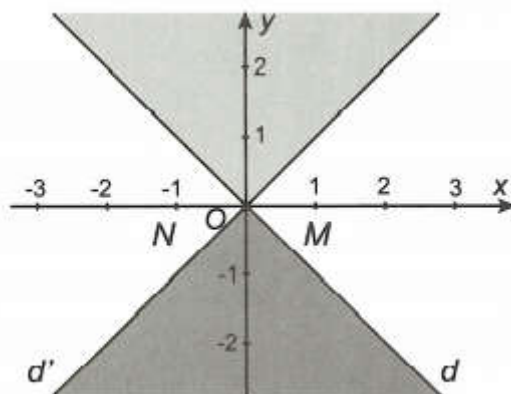
Ta có

$$(x - y)(x^3 + y^3) \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y)(x^2 - xy + y^2) \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x + y) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases} \quad (1) \text{ hoặc } \begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + y \leq 0 \end{cases} \quad (2).$$

Như vậy miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là gồm hai miền nghiệm của hệ bất phương trình (1) và (2).

Vẽ các đường thẳng $d: x + y = 0$ và $d': x - y = 0$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy . Xét điểm $M(1;0)$, ta có $(1;0)$ là nghiệm của các bất phương trình của hệ (1) do đó $M(1;0)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình (1). Xét điểm $N(-1;0)$, ta có $(-1;0)$ là nghiệm của các bất phương trình của hệ (2) do đó $N(-1;0)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình (2). Vậy miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô đậm trên hình vẽ kể cả hai đường thẳng d và d' .



Ví dụ 4: Cho biểu thức $F(x; y) = 2x + y$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} 2x + y - 9 \leq 0 \\ x - y \leq 0 \\ y - 1 \leq 0 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của F

Hướng dẫn giải

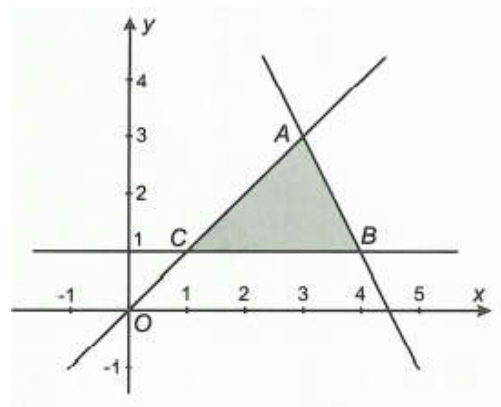
Trong mặt phẳng Oxy ta vẽ các đường thẳng có phương trình:

$$2x + y - 9 = 0; x - y = 0; y - 1 = 0.$$

Khi đó miền nghiệm của hệ là miền tam giác ABC kể cả biên, được tô đậm, với $A(3;3), B(4;1), C(1;1)$.

Ta có $F(3;3) = 9; F(4;1) = 9; F(1;1) = 3$.

Vậy giá trị lớn nhất là $F_{\max} = 9$ khi $x = 4; y = 1$ hoặc $x = 3; y = 3$.



3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + 3y - 2 \geq 0 \\ 2x + y + 1 \leq 0 \end{cases}$. Trong các điểm sau, điểm nào thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình?

A. $M(0;1)$

B. $N(-1;1)$

C. $P(1;3)$

D. $Q(-1;0)$

Lời giải

Chọn B

Ta thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

Với $M(0;1) \Rightarrow \begin{cases} 0 + 3 \cdot 1 - 2 \geq 0 \\ 2 \cdot 0 + 1 + 1 \leq 0 \end{cases}$. Bất phương trình thứ hai sai nên A sai.

Với $N(-1;1) \Rightarrow \begin{cases} -1 + 3 \cdot 1 - 2 \geq 0 \\ 2 \cdot (-1) + 1 + 1 \leq 0 \end{cases}$: Đúng. Chọn B.

Câu 2. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x - 5y - 1 > 0 \\ 2x + y + 5 > 0 \\ x + y + 1 < 0 \end{cases}$. Trong các điểm sau, điểm nào thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình?

A. $O(0;0)$

B. $M(1;0)$

C. $N(0;-2)$

D. $P(0;2)$

Lời giải

Chọn C

Ta thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

$$\text{Với } O(0;0) \Rightarrow \begin{cases} 2.0 - 5.0 - 1 > 0 \\ 2.0 + 0 + 5 > 0 \\ 0 + 0 + 1 < 0 \end{cases} \text{ . Bất phương trình thứ nhất và thứ ba sai nên A sai.}$$

$$\text{Với } M(1;0) \Rightarrow \begin{cases} 2.1 - 5.0 - 1 > 0 \\ 2.1 + 0 + 5 > 0 \\ 1 + 0 + 1 < 0 \end{cases} \text{ . Bất phương trình thứ ba sai nên B sai.}$$

$$\text{Với } N(0;-3) \Rightarrow \begin{cases} 2.0 - 5.(-3) - 1 > 0 \\ 2.0 + (-2) + 5 > 0 \\ 0 + (-2) + 1 < 0 \end{cases} \text{ : Đúng. Chọn C.}$$

Câu 3. Miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x + \frac{1}{2} - \frac{3y}{2} \leq 2 \end{cases}$$
 chứa điểm nào trong các điểm sau

đây?

A. $O(0;0)$

B. $M(2;1)$

C. $N(1;1)$

D. $P(5;1)$

Lời giải

Chọn B

Ta thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

$$\text{Với } O(0;0) \Rightarrow \begin{cases} \frac{0}{2} + \frac{0}{3} - 1 \geq 0 \\ 0 \geq 0 \\ 0 + \frac{1}{2} - \frac{3.0}{2} \leq 2 \end{cases} \text{ . Bất phương trình thứ nhất sai nên A sai.}$$

$$\text{Với } M(2;1) \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{2} + \frac{1}{3} - 1 \geq 0 \\ 2 \geq 0 \\ 2 + \frac{1}{2} - \frac{3.1}{2} \leq 2 \end{cases} \text{ : Đúng. Chọn B.}$$

Câu 4. Miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 3x + y \geq 9 \\ x \geq y - 3 \\ 2y \geq 8 - x \\ y \leq 6 \end{cases}$$
 chứa điểm nào trong các điểm sau đây?

A. $O(0;0)$

B. $M(1;2)$

C. $N(2;1)$

D. $P(8;4)$

Lời giải

Chọn D

Thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

Câu 5. Điểm $M(0; -3)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình nào sau đây?

- A. $\begin{cases} 2x - y \leq 3 \\ 2x + 5y \leq 12x + 8 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 2x - y > 3 \\ 2x + 5y \leq 12x + 8 \end{cases}$ C. $\begin{cases} 2x - y > -3 \\ 2x + 5y \leq 12x + 8 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 2x - y \leq -3 \\ 2x + 5y \geq 12x + 8 \end{cases}$

Lời giải

Chọn A

Thay tọa độ $M(0; -3)$ lần lượt vào từng hệ bất phương trình.

Câu 6. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ 2x - 3y + 2 > 0 \end{cases}$. Trong các điểm sau, điểm nào không thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình?

- A. $O(0; 0)$ B. $M(1; 1)$ C. $N(-1; 1)$ D. $P(-1; -1)$

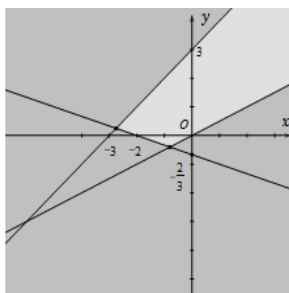
Lời giải

Chọn C

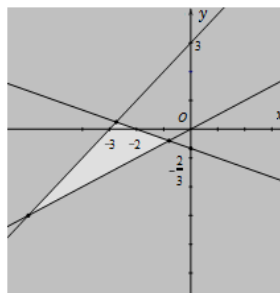
Thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

Câu 7. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y > -2 \\ y - x < 3 \end{cases}$ là phần không tô đậm của hình vẽ nào

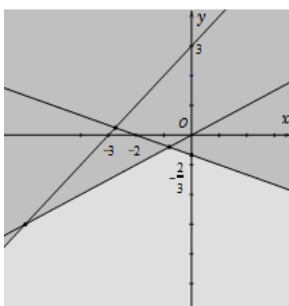
trong các hình vẽ sau?



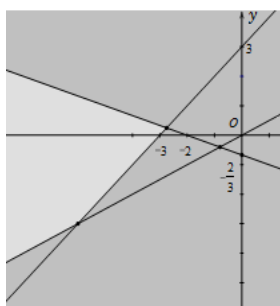
A.



B.



C.



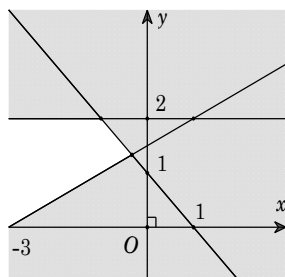
D.

Lời giải

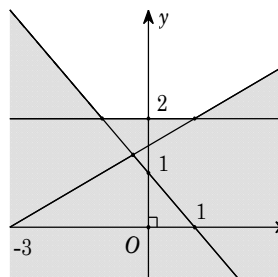
Chọn A

Chọn điểm $M(0; 1)$ thử vào các bất phương trình của hệ thấy thỏa mãn.

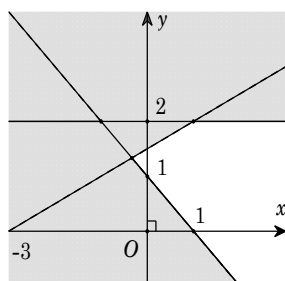
Câu 8. Miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x + y - 1 > 0 \\ y \geq 2 \\ -x + 2y > 3 \end{cases}$$
 là phần không tô đậm của hình vẽ nào trong các hình vẽ sau?



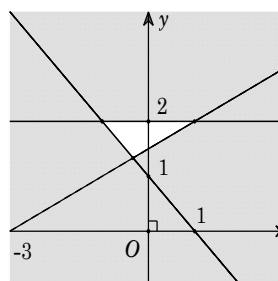
A.



B.



C.



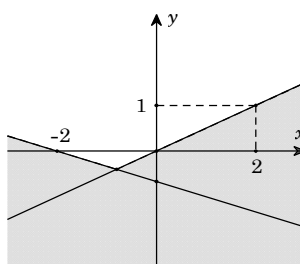
D.

Lời giải

Chọn B

Chọn điểm $M(0;4)$ thử vào các bất phương trình của hệ thấy thỏa mãn.

Câu 9. Phần không tô đậm trong hình vẽ dưới đây , biểu diễn tập nghiệm của hệ bất phương trình nào trong các hệ bất phương trình sau?



A.
$$\begin{cases} x - 2y \leq 0 \\ x + 3y \geq -2 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x - 2y > 0 \\ x + 3y < -2 \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x - 2y \leq 0 \\ x + 3y \leq -2 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y > -2 \end{cases}$$

Lời giải

Chọn D

Do miền nghiệm không chứa biên nên ta loại đáp án A và $M(0;1)$ thử vào các hệ bất phương trình.

C. Chọn điểm

Xét đáp án B, ta có $\begin{cases} 0-2.1 > 0 \\ 0+3.1 < -2 \end{cases}$: Sai.

Câu 10. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = y - x$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} y - 2x \leq 2 \\ 2y - x \geq 4 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$ là

A. $\min F = 1$ khi $x = 2, y = 3$.

B. $\min F = 2$ khi $x = 0, y = 2$.

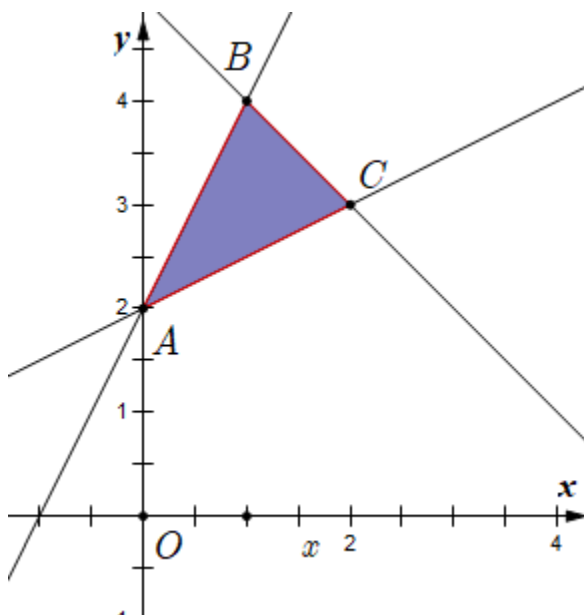
C. $\min F = 3$ khi $x = 1, y = 4$.

D. $\min F = 0$ khi $x = 0, y = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Miền nghiệm của hệ $\begin{cases} y - 2x \leq 2 \\ 2y - x \geq 4 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$ là miền trong của tam giác ABC kể cả biên



Ta thấy $F = y - x$ đạt giá trị nhỏ nhất chỉ có thể tại các điểm A, B, C .

Tại $A(0;2)$ thì $F = 2$.

Tại $B(1;4)$ thì $F = 3$

Tại $C(2;3)$ thì $F = 1$.

Vậy $\min F = 1$ khi $x = 2, y = 3$.

Câu 11: Giá trị nhỏ nhất $F_{\min}$ của biểu thức $F(x; y) = 4x + 3y$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 2x + y \geq 14 \\ 2x + 5y \geq 30 \end{cases}$ là

A. $F_{\min} = 23$

B. $F_{\min} = 26$

C. $F_{\min} = 32$

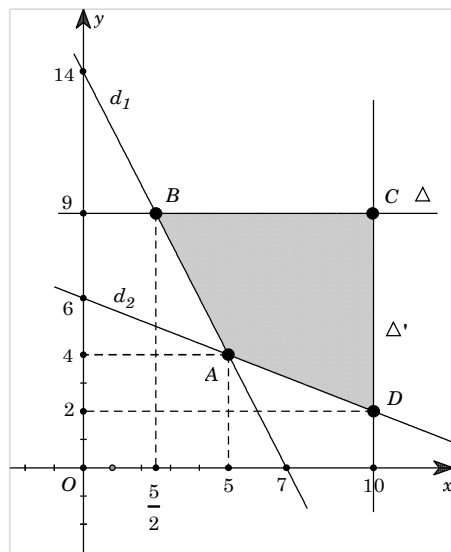
D. $F_{\min} = 67$

Lời giải

Chọn C

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ các đường thẳng

$$d_1: 2x + y - 14 = 0, \quad d_2: 2x + 5y - 30 = 0, \quad \Delta: y = 9, \quad \Delta': x = 10.$$



Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần mặt phẳng tô màu như hình vẽ.

Xét các đỉnh của miền khép kín tạo bởi hệ là $A(5;4)$, $B\left(\frac{5}{2};9\right)$, $C(10;9)$, $D(10;2)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} F(5;4) = 32 \\ F\left(\frac{5}{2};9\right) = 37 \\ F(10;9) = 67 \\ F(10;2) = 46 \end{cases} \longrightarrow F_{\min} = 32.$$

Câu 12. Biểu thức $F(x; y) = y - x$ đạt giá trị nhỏ nhất với điều kiện $\begin{cases} 2x - y \geq 2 \\ x - 2y \leq 2 \\ x + y \leq 5 \\ x \geq 0 \end{cases}$ tại điểm M có tọa độ

là:

A. (4;1)

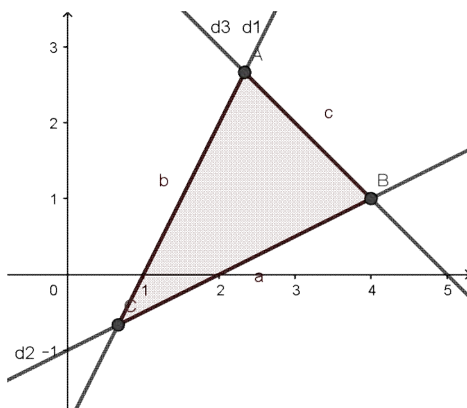
B. $\left(\frac{8}{3}; -\frac{7}{3}\right)$

C. $\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

D. (5;0)

Lời giải

Chọn A



Vẽ các đường thẳng :

$$(d_1): y = 2x - 2$$

$$(d_2): y = \frac{1}{2}x - 1$$

$$(d_3): y = 5 - x$$

Khi đó miền nghiệm của hệ là miền trong của tam giác ABC

$$\text{Tọa độ các đỉnh: } A\left(\frac{7}{3}; \frac{8}{3}\right); B(4;1); C\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{Ta có: } F(4;1) = -3; F\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right) = \frac{-4}{3} \Rightarrow F_{\min} = -3$$

Câu 13. Cho x, y thỏa mãn hệ
$$\begin{cases} x + 2y - 100 \leq 0 \\ 2x + y - 80 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$
 Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức

$$P = (x; y) = 40000x + 30000y$$

A. $P_{\max} = 2000000$

B. $P_{\max} = 2400000$

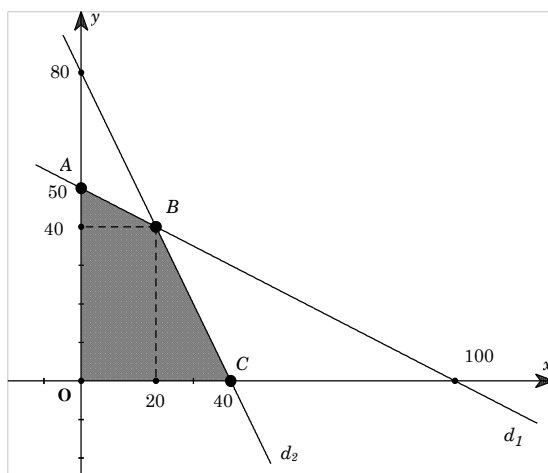
C. $P_{\max} = 1800000$

D. $P_{\max} = 1600000$

Lời giải

Chọn A

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ các đường thẳng $d_1: x + 2y - 100 = 0$, $d_2: 2x + y - 80 = 0$.



Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần mặt phẳng tô màu như hình vẽ.

Xét các đỉnh của miền khép kín tạo bởi hệ là

$$O(0;0), A(0;50), B(20;40), C(40;0).$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} P(0;0) = 0 \\ P(0;50) = 1500000 \\ P(20;40) = 2000000 \\ P(40;0) = 1600000 \end{cases} \longrightarrow P_{\max} = 2000000.$$

Câu 14. Giá trị lớn nhất $F_{\max}$ của biểu thức $F(x; y) = x + 2y$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} 0 \leq y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ x - y - 1 \leq 0 \\ x + 2y - 10 \leq 0 \end{cases}$ là

A. $F_{\max} = 6$

B. $F_{\max} = 8$

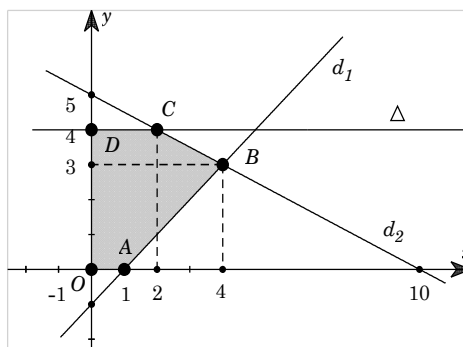
C. $F_{\max} = 10$

D. $F_{\max} = 12$

Lời giải

Chọn C

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ các đường thẳng $d_1: x - y - 1 = 0$, $d_2: x + 2y - 10 = 0$, $\Delta: y = 4$.



Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần mặt phẳng tô màu như hình vẽ.

Xét các đỉnh của miền khép kín tạo bởi hệ là $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(4;3)$, $C(2;4)$, $D(0;4)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} F(0;0) = 0 \\ F(1;0) = 1 \\ F(4;3) = 10 \longrightarrow F_{\max} = 10. \\ F(2;4) = 10 \\ F(0;4) = 8 \end{cases}$$

Dạng 2. Bài toán tối ưu

1. Phương pháp

Vấn đề tìm miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất có liên quan chặt chẽ đến **quy hoạch tuyến tính**. Đó là một ngành toán học có nhiều ứng dụng trong đời sống và kinh tế.

Lưu ý: Ta thừa nhận kết quả sau “Giá trị nhỏ nhất hay lớn nhất của biểu thức $P(x; y) = ax + by + c$ $a^2 + b^2 \neq 0$ trên miền đa giác lồi (kể cả biên) đạt được tại một đỉnh nào đó của đa giác”.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Một công ty kinh doanh thương mại chuẩn bị cho một đợt khuyến mại nhằm thu hút khách hàng bằng cách tiến hành quảng cáo sản phẩm của công ty trên hệ thống phát thanh và truyền hình. Chi phí cho 1 phút quảng cáo trên sóng phát thanh là 800.000 đồng, trên sóng truyền hình là 4.000.000 đồng. Đài phát thanh chỉ nhận phát các chương trình quảng cáo dài ít nhất là 5 phút. Do nhu cầu quảng cáo trên truyền hình lớn nên đài truyền hình chỉ nhận phát các chương trình dài tối đa là 4 phút. Theo các phân tích cùng thời lượng một phút quảng cáo trên truyền hình sẽ có hiệu quả gấp 6 lần trên sóng phát thanh. Công ty dự định chi tối đa là 16.000.000 đồng cho quảng cáo. Công ty cần đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh và truyền hình như thế nào để hiệu quả nhất?

Hướng dẫn giải

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. “Tránh mua các trang và các cá nhân khác”

Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Phân tích bài toán: Gọi thời lượng công ty đặt quảng cáo trên sóng phát thanh là x (phút), trên truyền hình là y (phút). Chi phí cho việc này là

$$800.000x + 4.000.000y \text{ (đồng)}.$$

Mức chi phí này không được phép vượt quá mức chi tối đa, tức là

$$800000x + 4000000y \leq 16000000$$

$$\Leftrightarrow x + 5y - 20 \leq 0.$$

Theo giả thiết, ta có $x \geq 5$; $x \leq 4$.

Đồng thời do x, y là thời lượng nên $x \geq 0$; $y \geq 0$.

Hiệu quả chung của quảng cáo là $x + 6y$.

Bài toán trở thành: Tìm x, y sao cho $M(x; y) = x + 6y$ đạt giá trị lớn nhất, với x, y thỏa mãn hệ bất

$$\text{phương trình } \begin{cases} x + 5y - 20 \leq 0 \\ x \geq 5 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases} \quad (*)$$

Trong mặt phẳng Oxy , ta biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là phần tam giác ABC với $A(5;3), B(5;0), C(20;0)$.

Ta có $M(5;3) = 23$; $M(5;0) = 5$; $M(20;0) = 20$ suy ra giá trị lớn nhất của $M(x; y)$ bằng 23 tại $(5;3)$.

Tức là nếu đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh là 5 phút và trên truyền hình là 3 phút thì sẽ đạt hiệu quả nhất.

Ví dụ 2: Một xưởng sản xuất hai loại sản phẩm, mỗi kg sản phẩm loại một cần 2kg nguyên liệu và 30 giờ, đem lại mức lợi nhuận 40 000 đồng. Mỗi sản phẩm loại hai cần 4kg nguyên liệu và 15 giờ đem lại mức lợi nhuận là 30 000 đồng. Xưởng có 200kg nguyên liệu và 1200 giờ làm việc. Hỏi cần sản xuất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu để có mức lợi nhuận cao nhất?

Hướng dẫn giải

Phân tích bài toán: Gọi x ($x \geq 0$) là số kg loại một cần sản xuất, y ($y \geq 0$) là số kg loại hai cần sản xuất. Suy ra số nguyên liệu cần dùng là $2x + 4y$, thời gian là $30x + 15y$ có mức lợi nhuận là $40000x + 30000y$.

Theo giả thiết bài toán xưởng có 200kg nguyên liệu và 1200 giờ làm việc, suy ra $2x + 4y \leq 200$ hay $x + 2y - 100 \leq 0$; $30x + 15y \leq 1200$ hay $2x + y - 80 \leq 0$.

$$\text{Bài toán trở thành: Tìm } x; y \text{ thỏa mãn hệ } \begin{cases} x + 2y - 100 \leq 0 \\ 2x + y - 80 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (*) \text{ sao cho } L(x; y) = 40000x + 30000y$$

đạt giá trị lớn nhất.

Biểu diễn miền nghiệm của hệ (*) là miền tứ giác $OABC$ với

$$O(0;0), A(40;0), B(0;50), C(20;40).$$

$$\text{Ta có } L(0;0) = 0, L(40;0) = 1600000, L(0;50) = 1500000, L(20;40) = 2000000.$$

Do đó giá trị lớn nhất của $L(x; y)$ là 2 000 000 khi $(x; y) = (20;40)$.

Vậy nên sản xuất 20kg sản phẩm loại I và 40kg sản phẩm loại hai để có mức lợi nhuận cao nhất.

Ví dụ 3: Một công ty điện tử sản xuất hai kiểu radio trên hai dây chuyền độc lập. Radio kiểu một sản xuất trên dây chuyền một với công suất 45 radio/ngày, radio kiểu hai sản xuất trên dây chuyền hai với công suất 80 radio/ngày. Để sản xuất một chiếc radio kiểu một cần 12 linh kiện, để sản xuất một chiếc radio kiểu hai cần 9 linh kiện. Tiền lãi khi bán một chiếc radio kiểu một là 250 000 đồng, lãi thu được khi bán một chiếc radio kiểu hai là 180 000 đồng. Hỏi cần sản xuất như thế nào để tiền lãi thu được là nhiều nhất, biết rằng số linh kiện có thể sử dụng tối đa trong một ngày là 900?

- A. Sản xuất 15 radio kiểu một và 80 radio kiểu hai.
- B. Sản xuất 45 radio kiểu một và 40 radio kiểu hai.
- C. Sản xuất 45 radio kiểu một.
- D. Sản xuất 80 radio kiểu hai.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi x và y lần lượt là số radio kiểu một và số radio kiểu hai mà công ty này sản xuất trong một ngày ($x; y \in \mathbb{N}^*$).

Số tiền lãi mà công ty này thu về hàng ngày là $f(x; y) = 250000x + 180000y$ (đồng).

Ta có hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 12x + 9y \leq 900 \\ 0 \leq x \leq 45 \\ 0 \leq y \leq 80 \end{cases} \quad (*)$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là ngũ miền ngũ giác $OABCD$ trong đó $O(0;0)$, $A(45;0)$,

$B(45;40)$, $C(15;80)$, $D(0;80)$.

Ta có $f(x; y)$ lớn nhất khi $(x; y) = (45; 40)$, tức là công ty này cần sản xuất 45 radio kiểu một và 40 radio kiểu hai.

Ví dụ 4: Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 24 g hương liệu, 9 lít nước và 210 g đường để pha chế nước cam và nước táo. Để pha chế 1 lít nước cam cần 30 g đường và 1 lít nước; pha chế 1 lít nước táo cần 10 g đường, 1 lít nước và 4 g hương liệu. Mỗi lít nước cam nhận được 20 điểm thưởng, mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Hỏi cần pha chế bao nhiêu lít nước trái cây mỗi loại để được số tiền thưởng là lớn nhất?

- A. 7 lít nước đường.
- B. 6 lít nước táo.
- C. 3 lít nước đường, 6 lít nước táo.
- D. 6 lít nước đường, 3 lít nước táo.

Hướng dẫn giải

Gọi $x; y$ lần lượt là số lít nước cam và táo của mỗi đội pha chế ($x; y \geq 0$).

Số điểm thưởng của đội chơi này là $f(x; y) = 20x + 80y$.

Số gam đường cần dùng là $30x + 10y$ (g).

Số lít nước cần dùng là $x + y$ (l).

Số gam hương liệu cần dùng là $4y$ (g).

Vì trong cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi sử dụng tối đa 24 g hương liệu, 9 lít nước và 210 g đường nên ta có hệ bất phương trình sau

$$\begin{cases} 30x + 10y \leq 210 \\ x + y \leq 9 \\ 4y \leq 24 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y \leq 21 \\ x + y \leq 9 \\ y \leq 6 \\ x, y \geq 0 \end{cases} (*)$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là ngũ giác $OABCD$.

Trong đó $O(0;0), A(7;0), B(6;3), C(3;6), D(0;6)$.

Suy ra $f(3;6)$ là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ (*).

Như vậy để được số điểm thưởng lớn nhất cần pha chế 3 lít nước cam và 6 lít nước táo.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1 : Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 24 g hương liệu, 9 lít nước và 210 g đường để pha chế nước cam và nước táo.

- Để pha chế 1 lít nước cam cần 30 g đường, 1 lít nước và 1 g hương liệu;
- Để pha chế 1 lít nước táo cần 10 g đường, 1 lít nước và 4 g hương liệu.

Mỗi lít nước cam nhận được 60 điểm thưởng, mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Hỏi cần pha chế bao nhiêu lít nước trái cây mỗi loại để đạt được số điểm thưởng cao nhất?

- A. 5 lít nước cam và 4 lít nước táo. B. 6 lít nước cam và 5 lít nước táo.
C. 4 lít nước cam và 5 lít nước táo. D. 4 lít nước cam và 6 lít nước táo.

Lời giải

Chọn C

Giả sử x, y lần lượt là số lít nước cam và số lít nước táo mà mỗi đội cần pha chế.

Suy ra $30x + 10y$ là số gam đường cần dùng;

$x + y$ là số lít nước cần dùng;

$x + 4y$ là số gam hương liệu cần dùng.

$$\text{Theo giả thiết ta có } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 30x + 10y \leq 210 \\ x + y \leq 9 \\ x + 4y \leq 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \leq 21 \\ x + y \leq 9 \\ x + 4y \leq 24 \end{cases} (*)$$

Số điểm thưởng nhận được sẽ là $P = 60x + 80y$.

Ta đi tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P với x, y thỏa mãn (*).

Câu 2: Một xưởng sản xuất hai loại sản phẩm

- Mỗi kg sản phẩm loại I cần 2 kg nguyên liệu và 30 giờ, đem lại mức lời 40 nghìn;

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. **“Tránh mua các trang và các cá nhân khác”**

Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT: 0834 332 133

- Mỗi kg sản phẩm loại II cần 4 kg nguyên liệu và 15 giờ, đem lại mức lời 30 nghìn.

Xưởng có 200 kg nguyên liệu và 1200 giờ làm việc. Nên sản xuất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu để có mức lời cao nhất?

- A. 30kg loại I và 40 kg loại II. B. 20kg loại I và 40 kg loại II.
C. 30kg loại I và 20 kg loại II. D. 25 kg loại I và 45 kg loại II.

Lời giải

Chọn B

Gọi $x \geq 0, y \geq 0$ (kg) lần lượt là số sản phẩm loại I và loại II cần sản xuất.

Khi đó, tổng số nguyên liệu sử dụng: $2x + 4y \leq 200$.

Tổng số giờ làm việc: $30x + 15y \leq 1200$.

Lợi nhuận tạo thành: $L = 40x + 30y$.

Thực chất của bài toán này là phải tìm $x \geq 0, y \geq 0$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} 2x + 4y \leq 200 \\ 30x + 15y \leq 1200 \end{cases} \text{ sao cho } L = 40x + 30y \text{ đạt giá trị lớn nhất.}$$

Câu 3: Một xưởng cơ khí có hai công nhân là Chiến và Bình. Xưởng sản xuất loại sản phẩm I và II. Mỗi sản phẩm I bán lãi 500 nghìn đồng, mỗi sản phẩm II bán lãi 400 nghìn đồng. Để sản xuất được một sản phẩm I thì Chiến phải làm việc trong 3 giờ, Bình phải làm việc trong 1 giờ. Để sản xuất được một sản phẩm II thì Chiến phải làm việc trong 2 giờ, Bình phải làm việc trong 6 giờ. Một người không thể làm được đồng thời hai sản phẩm. Biết rằng trong một tháng Chiến không thể làm việc quá 180 giờ và Bình không thể làm việc quá 220 giờ. Số tiền lãi lớn nhất trong một tháng của xưởng là.

- A. 32 triệu đồng. B. 35 triệu đồng. C. 14 triệu đồng. D. 30 triệu đồng.

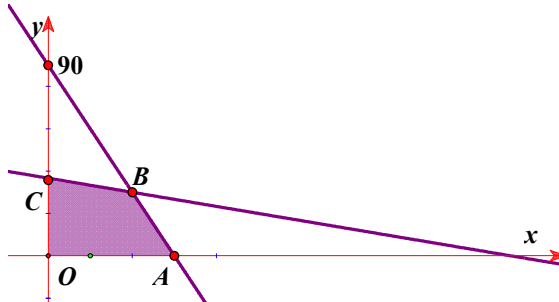
Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi x, y lần lượt là số sản phẩm loại I và loại II được sản xuất ra. Điều kiện x, y nguyên dương.

Ta có hệ bất phương trình sau:
$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 180 \\ x + 6y \leq 220 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Miền nghiệm của hệ trên là



Tiền lãi trong một tháng của xưởng là $T = 0,5x + 0,4y$.

Ta thấy T đạt giá trị lớn nhất chỉ có thể tại các điểm A, B, C . Vì C có tọa độ không nguyên nên loại.

Tại $A(60;0)$ thì $T = 30$ triệu đồng.

Tại $B(40;30)$ thì $T = 32$ triệu đồng.

Vậy tiền lãi lớn nhất trong một tháng của xưởng là 32 triệu đồng.

Câu 4. Một nhà khoa học đã nghiên cứu về tác động phối hợp của hai loại Vitamin A và B đã thu được kết quả như sau: Trong một ngày, mỗi người cần từ 400 đến 1000 đơn vị Vitamin cả A lẫn B và có thể tiếp nhận không quá 600 đơn vị vitamin A và không quá 500 đơn vị vitamin B . Do tác động phối hợp của hai loại vitamin trên nên mỗi ngày một người sử dụng số đơn vị vitamin B không ít hơn một nửa số đơn vị vitamin A và không nhiều hơn ba lần số đơn vị vitamin A . Tính số đơn vị vitamin mỗi loại ở trên để một người dùng mỗi ngày sao cho chi phí rẻ nhất, biết rằng mỗi đơn vị vitamin A có giá 9 đồng và mỗi đơn vị vitamin B có giá 7,5 đồng.

- A. 600 đơn vị Vitamin A , 400 đơn vị Vitamin B
- B. 600 đơn vị Vitamin A , 300 đơn vị Vitamin B
- C. 500 đơn vị Vitamin A , 500 đơn vị Vitamin B
- D. 100 đơn vị Vitamin A , 300 đơn vị Vitamin B

Lời giải

Chọn D

Gọi $x \geq 0, y \geq 0$ lần lượt là số đơn vị vitamin A và B để một người cần dùng trong một ngày.

Trong một ngày, mỗi người cần từ 400 đến 1000 đơn vị vitamin cả A lẫn B nên ta có:
 $400 \leq x + y \leq 1000$.

Hàng ngày, tiếp nhận không quá 600 đơn vị vitamin A và không quá 500 đơn vị vitamin B nên ta có: $x \leq 600, y \leq 500$.

Mỗi ngày một người sử dụng số đơn vị vitamin B không ít hơn một nửa số đơn vị vitamin A và không nhiều hơn ba lần số đơn vị vitamin A nên ta có: $0,5x \leq y \leq 3x$.

Số tiền cần dùng mỗi ngày là: $T(x, y) = 9x + 7,5y$.

Bài toán trở thành: Tìm $x \geq 0, y \geq 0$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 600, 0 \leq y \leq 500 \\ 400 \leq x + y \leq 1000 \\ 0,5x \leq y \leq 3x \end{cases} \quad \text{để } T(x, y) = 9x + 7,5y \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

Câu 5. Công ty Bao bì Dược cần sản xuất 3 loại hộp giấy: đựng thuốc B₁, đựng cao Sao vàng và đựng "Quy sâm đại bổ hoàn". Để sản xuất các loại hộp này, công ty dùng các tấm bìa có kích thước giống nhau. Mỗi tấm bìa có hai cách cắt khác nhau.

- ☐ Cách thứ nhất cắt được 3 hộp B₁, một hộp cao Sao vàng và 6 hộp Quy sâm.
- ☐ Cách thứ hai cắt được 2 hộp B₁, 3 hộp cao Sao vàng và 1 hộp Quy sâm. Theo kế hoạch, số hộp Quy sâm phải có là 900 hộp, số hộp B₁ tối thiểu là 900 hộp, số hộp cao sao vàng tối thiểu là 1000 hộp. Cần phương án sao cho tổng số tấm bìa phải dùng là ít nhất?

A. Cắt theo cách một 100 tấm, cắt theo cách hai 300 tấm.

B. Cắt theo cách một 150 tấm, cắt theo cách hai 100 tấm.

C. Cắt theo cách một 50 tấm, cắt theo cách hai 300 tấm.

D. Cắt theo cách một 100 tấm, cắt theo cách hai 200 tấm.

Lời giải

Chọn A

Gọi $x \geq 0, y \geq 0$ lần lượt là số tấm bìa cắt theo cách thứ nhất, thứ hai.

Bài toán đưa đến tìm $x \geq 0, y \geq 0$ thỏa mãn hệ
$$\begin{cases} 3x + 2y \geq 900 \\ x + 3y \geq 1000 \\ 6x + y = 900 \end{cases}$$
 sao cho $L = x + y$ nhỏ nhất.

Câu 6. Một nhà máy sản xuất, sử dụng ba loại máy đặc chủng để sản xuất sản phẩm A và sản phẩm B trong một chu trình sản xuất. Để sản xuất một tấn sản phẩm A cần 4 triệu đồng người ta sử dụng máy I trong 1 giờ, máy II trong 2 giờ và máy III trong 3 giờ. Để sản xuất ra một tấn sản phẩm B cần được 3 triệu đồng người ta sử dụng máy I trong 6 giờ, máy II trong 3 giờ và máy III trong 2 giờ. Biết rằng máy I chỉ hoạt động không quá 36 giờ, máy hai hoạt động không quá 23 giờ và máy III hoạt động không quá 27 giờ. Hãy lập kế hoạch sản xuất cho nhà máy để tiền lãi được nhiều nhất.

A. Sản xuất 9 tấn sản phẩm A và không sản xuất sản phẩm B

B. Sản xuất 7 tấn sản phẩm A và 3 tấn sản phẩm B

C. Sản xuất $\frac{10}{3}$ tấn sản phẩm A và $\frac{49}{9}$ tấn sản phẩm B

D. Sản xuất 6 tấn sản phẩm B và không sản xuất sản phẩm A

Lời giải

Chọn B

Gọi $x \geq 0, y \geq 0$ là sản lượng cần sản xuất của sản phẩm A và sản phẩm B. Ta có:

$x + 6y$ là thời gian hoạt động của máy I.

$2x + 3y$ là thời gian hoạt động của máy II.

$3x + 2y$ là thời gian hoạt động của máy III.

Số tiền lãi của nhà máy: $T = 4x + 3y$.

Bài toán trở thành: Tìm $x \geq 0, y \geq 0$ thỏa mãn
$$\begin{cases} x + 6y \leq 36 \\ 2x + 3y \leq 23 \\ 3x + 2y \leq 27 \end{cases}$$
 để $T = 4x + 3y$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 7. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kilogram thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipid. Mỗi kilogram thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn. Giá tiền một kg thịt bò là 160 nghìn đồng, một kg thịt lợn là 110 nghìn đồng. Gọi x, y lần lượt là số kg thịt bò và thịt lợn mà gia đình đó cần mua. Tìm x, y để tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipid trong thức ăn?

A. $x = 0,3$ và $y = 1,1$. B. $x = 0,3$ và $y = 0,7$. C. $x = 0,6$ và $y = 0,7$. D. $x = 1,6$ và $y = 0,2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

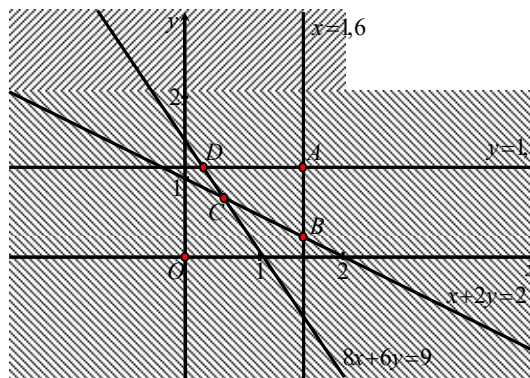
Theo bài ra ta có số tiền gia đình cần trả là $160.x + 110.y$ với x, y thỏa mãn: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \end{cases}$.

Số đơn vị protein gia đình có là $0,8.x + 0,6.y \geq 0,9 \Leftrightarrow 8x + 6y \geq 9$ (d_1).

Số đơn vị lipid gia đình có là $0,2.x + 0,4.y \geq 0,4 \Leftrightarrow x + 2y \geq 2$ (d_2).

Bài toán trở thành: Tìm x, y thỏa mãn hệ bất phương trình $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \\ 8x + 6y \geq 9 \\ x + 2y \geq 2 \end{cases}$ sao cho

$T = 160.x + 110.y$ nhỏ nhất.



Vẽ hệ trục tọa độ ta tìm được tọa độ các điểm $A(1,6;1,1)$; $B(1,6;0,2)$; $C(0,6;0,7)$; $D(0,3;1,1)$.

Nhận xét: $T(A) = 377$ nghìn, $T(B) = 278$ nghìn, $T(C) = 173$ nghìn, $T(D) = 169$ nghìn.

Vậy tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipid trong thức ăn thì $x = 0,6$ và $y = 0,7$.

S2

HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Quảng cáo sản phẩm trên truyền hình là một hoạt động quan trọng trong kinh doanh của các doanh nghiệp.

Theo Thông báo số 10/2019, giá quảng cáo trên VTV1 là 30 triệu đồng cho 15 giây/1 lần quảng cáo vào khoảng 20h30; là 6 triệu đồng cho 15 giây/1 lần quảng cáo vào khung giờ 16h00 – 17h00.

Một công ty dự định chi không quá 900 triệu đồng để quảng cáo trên VTV1 với yêu cầu quảng cáo về số lần phát như sau: ít nhất 10 lần quảng cáo vào khoảng 20h30 và không quá 50 lần quảng cáo vào khung giờ 16h00 – 17h00. Gọi x, y lần lượt là số lần phát quảng cáo vào khoảng 20h30 và vào khung giờ 16h00 – 17h00.



Sảnh “Trống đồng” ở trụ sở của VTV tại Hà Nội
(Nguồn: Trịnh Hoàng Minh Quang)

Trong toán học, các điều kiện ràng buộc đối với x và y để đáp ứng nhu cầu trên của công ty được thể hiện như thế nào?



I. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN



1 Cho hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} x - y < 3 & (1) \\ x + 2y > -2 & (2) \end{cases}$$

- Mỗi bất phương trình (1) và (2) có là bất phương trình bậc nhất hai ẩn không?
- Chỉ ra một nghiệm chung của hai bất phương trình (1) và (2) trong hệ trên.



Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là một hệ gồm một số bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y . Mỗi nghiệm chung của các bất phương trình trong hệ được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đó.

Ví dụ 1 Cho hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x - 4y \leq 6 & (1) \\ x + y > 2 & (2) \end{cases}$$

Cặp số $(x; y)$ nào sau đây là nghiệm của hệ bất phương trình trên?

$(3; 1), (1; -2), (5; -3).$



1 Chỉ ra một nghiệm của hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x + y > 0 \\ x - 3y < 6 \\ x - y \geq -4. \end{cases}$$

Giải

- Thay $x = 3, y = 1$ vào hai bất phương trình của hệ, ta có:
 $2 \cdot 3 - 4 \cdot 1 \leq 6$ là mệnh đề đúng; $3 + 1 > 2$ là mệnh đề đúng.
Vậy $(3; 1)$ là nghiệm chung của (1) và (2) nên $(3; 1)$ là nghiệm của hệ bất phương trình.
- Thay $x = 1, y = -2$ vào bất phương trình (1) của hệ, ta có:
 $2 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) \leq 6$ là mệnh đề sai.
Vậy $(1; -2)$ không là nghiệm của (1) nên $(1; -2)$ không là nghiệm của hệ bất phương trình.
- Thay $x = 5, y = -3$ vào bất phương trình (2) của hệ, ta có:
 $5 + (-3) > 2$ là mệnh đề sai.
Vậy $(5; -3)$ không là nghiệm của (2) nên $(5; -3)$ không là nghiệm của hệ bất phương trình.

II. BIỂU DIỄN MIỀN NGHIỆM CỦA HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Cũng như bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta có thể biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng tọa độ.

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

2 Cho hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} x - 2y \geq -2 \\ 7x - 4y \leq 16 \\ 2x + y \geq -4. \end{cases}$$

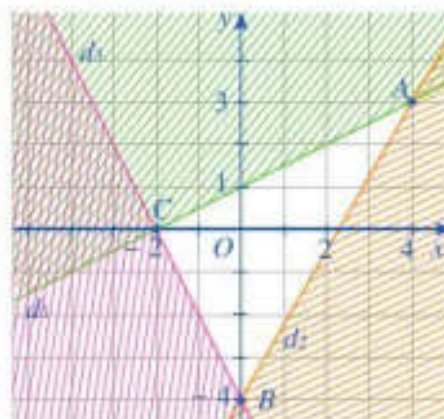
- Trong cùng mặt phẳng tọa độ Oxy , biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ bất phương trình bằng cách gạch bỏ phần không thuộc miền nghiệm của nó.
- Tìm miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho, ta làm như sau (Hình 8):

Bước 1. Trong cùng mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ ba đường thẳng:

$$\begin{aligned} d_1: x - 2y &= -2; & d_2: 7x - 4y &= 16; \\ d_3: 2x + y &= -4. \end{aligned}$$

Do tọa độ điểm $O(0; 0)$ thỏa mãn các bất phương trình trong hệ nên miền nghiệm của từng bất phương trình trong hệ lần lượt là những nửa mặt phẳng không bị gạch chứa điểm $O(0; 0)$ (kể cả đường thẳng tương ứng).



Hình 8

Bước 2. Phần không bị gạch (chứa điểm $O(0; 0)$) là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Cụ thể, miền nghiệm của hệ là tam giác ABC kể cả miền trong (còn gọi là miền tam giác ABC) với $A(4; 3)$, $B(0; -4)$, $C(-2; 0)$.



Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta làm như sau:

- Trong cùng mặt phẳng toạ độ, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ bằng cách gạch bỏ phần không thuộc miền nghiệm của nó.
- Phần không bị gạch là miền nghiệm cần tìm.

Ví dụ 2 Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 4 \\ x + y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Giải. (Hình 9)

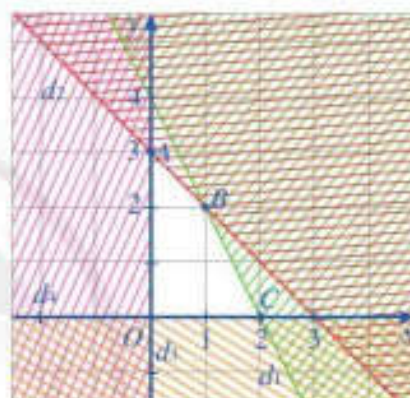
Vẽ các đường thẳng:

$d_1: 2x + y = 4$; $d_2: x + y = 3$; $d_3: x = 0$ là trục tung;

$d_4: y = 0$ là trục hoành.

Gạch đi các phần không thuộc miền nghiệm của mỗi bất phương trình.

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là tứ giác $OABC$ kể cả miền trong (còn gọi là miền tứ giác $OABC$) với $O(0; 0)$, $A(0; 3)$, $B(1; 2)$, $C(2; 0)$.



Hình 9

2 Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 3x - y > -3 \\ -2x + 3y < 6 \\ 2x + y > -4. \end{cases}$$

III. ÁP DỤNG VÀO BÀI TOÁN THỰC TIỄN

Bài toán 1. Trong bài toán ở phần mở đầu, tìm x và y sao cho tổng số lần xuất hiện quảng cáo của công ty là nhiều nhất.

Giải

Gọi x , y lần lượt là số lần phát quảng cáo vào khoảng 20h30 và vào khung giờ 16h00 – 17h00. Theo giả thiết, ta có: $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$, $x \geq 10$, $0 \leq y \leq 50$.

Tổng số lần phát quảng cáo là $T = x + y$.

Số tiền công ty cần chi là $30x + 6y$ (triệu đồng).

Do công ty dự định chi không quá 900 triệu đồng nên $30x + 6y \leq 900$ hay $5x + y \leq 150$.

Ta có hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} 5x + y \leq 150 \\ x \geq 10 \\ 0 \leq y \leq 50 \end{cases} \quad (I)$$

Bài toán đưa về tìm x, y là nghiệm của hệ bất phương trình (I) sao cho $T = x + y$ có giá trị lớn nhất.

Trước hết, ta xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (I).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (I) là miền tứ giác $ABCD$ với $A(30; 0), B(20; 50), C(10; 50), D(10; 0)$ (Hình 10).

Người ta chứng minh được: Biểu thức $T = x + y$ đạt được giá trị lớn nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác $ABCD$.

Tính giá trị của biểu thức $T = x + y$ tại cặp số $(x; y)$ là toạ độ các đỉnh của tứ giác $ABCD$ rồi so sánh các giá trị đó. Ta được T đạt giá trị lớn nhất khi $x = 20, y = 50$ ứng với toạ độ đỉnh B .

Vậy để phát được số lần quảng cáo nhiều nhất thì số lần phát quảng cáo vào khoảng 20h30 và vào khung giờ 16h00 – 17h00 lần lượt là 20 và 50 lần.

Bài toán 2. Người ta dự định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 140 kg chất A và 9 kg chất B.

Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 4 triệu đồng, có thể chiết xuất được 20 kg chất A và 0,6 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 3 triệu đồng, có thể chiết xuất được 10 kg chất A và 1,5 kg chất B. Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất? Biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 10 tấn nguyên liệu loại I và không quá 9 tấn nguyên liệu loại II.

Giải

Gọi x, y lần lượt là số tấn nguyên liệu loại I, loại II cần sử dụng.

Khi đó, ta chiết xuất được $20x + 10y$ (kg) chất A và $0,6x + 1,5y$ (kg) chất B.

Theo giả thiết, x và y phải thỏa mãn các điều kiện:

$$0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 9;$$

$$20x + 10y \geq 140 \text{ hay } 2x + y \geq 14;$$

$$0,6x + 1,5y \geq 9 \text{ hay } 2x + 5y \geq 30.$$

Tổng số tiền cần mua nguyên liệu là $T = 4x + 3y$.

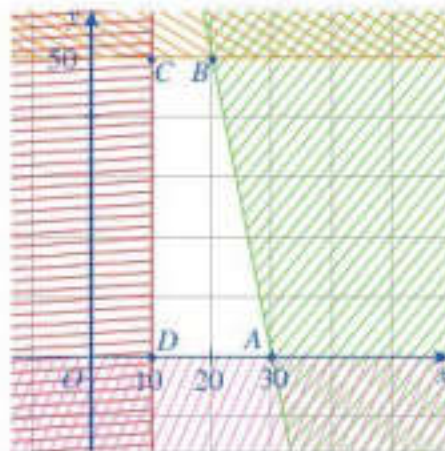
Bài toán đưa về: Tìm x, y là nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 2x + y \geq 14 \\ 2x + 5y \geq 30 \end{cases} \quad (II)$$

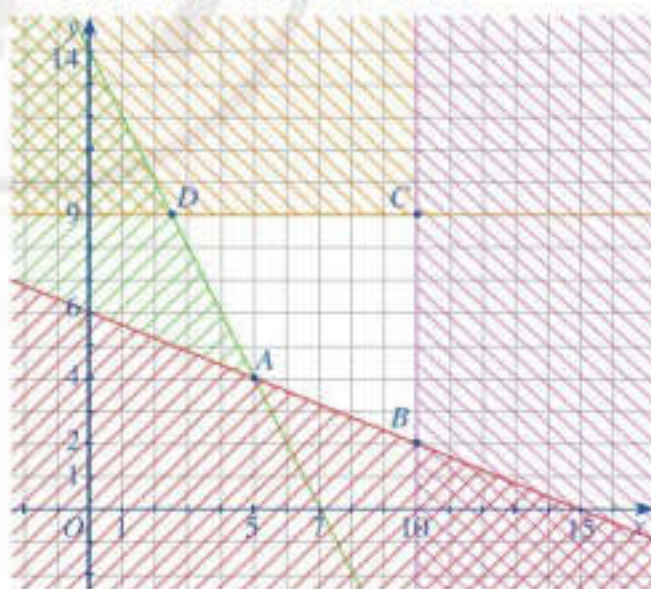
sao cho $T = 4x + 3y$ có giá trị nhỏ nhất.

Trước hết, ta xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (II).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (II) là miền tứ giác $ABCD$ với $A(5; 4), B(10; 2), C(10; 9), D\left(\frac{5}{2}; 9\right)$ (Hình 11).



Hình 10



Hình 11

Người ta chứng minh được: Biểu thức $T = 4x + 3y$ có giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác $ABCD$.

Tính giá trị của biểu thức $T = 4x + 3y$ tại cặp số $(x; y)$ là toạ độ các đỉnh của tứ giác $ABCD$ rồi so sánh các giá trị đó. Ta được T đạt giá trị nhỏ nhất bằng 32 khi $x = 5, y = 4$ ứng với toạ độ đỉnh A.

Vậy để chi phí nguyên liệu là ít nhất, cần sử dụng 5 tấn nguyên liệu loại I và 4 tấn nguyên liệu loại II; khi đó chi phí là 32 triệu đồng.

BÀI TẬP

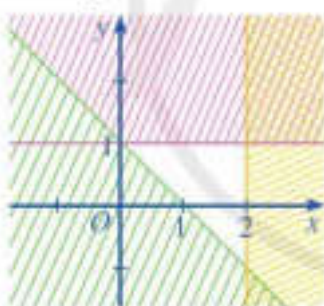
1. Kiểm tra xem mỗi cặp số $(x; y)$ đã cho có là nghiệm của hệ bất phương trình tương ứng không.

a) $\begin{cases} 3x + 2y \geq -6 \\ x + 4y > 4 \end{cases} \quad (0; 2), (1; 0);$ b) $\begin{cases} 4x + y \leq -3 \\ -3x + 5y \geq -12 \end{cases} \quad (-1; -3), (0; -3).$

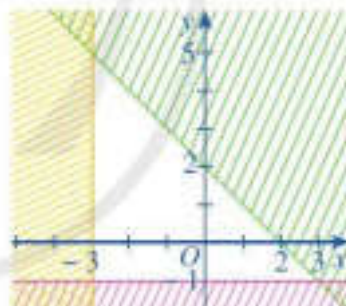
2. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình:

a) $\begin{cases} x + 2y < -4 \\ y \geq x + 5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - 2y > 8 \\ x \geq 0 \\ y \leq 0. \end{cases}$

3. Miền không bị gạch ở mỗi Hình 12a, 12b là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào cho ở dưới đây?



a)



b)

Hình 12

a) $\begin{cases} x + y < 2 \\ x > -3 \\ y \geq -1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} y < x \\ x \leq 0 \\ y > -3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} y > -x + 1 \\ x \leq 2 \\ y < 1. \end{cases}$

4. Một phân xưởng sản xuất hai kiểu mũ. Thời gian để làm ra một chiếc mũ kiểu thứ nhất nhiều gấp hai lần thời gian làm ra một chiếc mũ kiểu thứ hai. Nếu chỉ sản xuất toàn kiểu mũ thứ hai thì trong 1 giờ phân xưởng làm được 60 chiếc. Phân xưởng làm việc 8 tiếng mỗi ngày và thị trường tiêu thụ tối đa trong một ngày là 200 chiếc mũ kiểu thứ nhất và 240 chiếc mũ kiểu thứ hai. Tiền lãi khi bán một chiếc mũ kiểu thứ nhất là 24 nghìn đồng, một chiếc mũ kiểu thứ hai là 15 nghìn đồng. Tính số lượng mũ kiểu thứ nhất và kiểu thứ hai trong một ngày mà phân xưởng cần sản xuất để tiền lãi thu được là cao nhất.

Dạng 1. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

1. Phương pháp

Tương tự hệ phương trình một ẩn, ta có hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Trong mặt phẳng toạ độ, ta gọi tập hợp các điểm có toạ độ thoả mãn mọi bất phương trình trong hệ là miền nghiệm của hệ. Vậy miền nghiệm của hệ là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

Để xác định miền nghiệm của hệ, ta dùng phương pháp biểu diễn hình học như sau:

- Với mỗi bất phương trình trong hệ, ta xác định miền nghiệm của nó và gạch bỏ (tô màu) miền còn lại.
- Sau khi làm như trên lần lượt đối với tất cả các bất phương trình trong hệ trên cùng một mặt phẳng toạ độ, miền còn lại không bị gạch (tô đậm) chính là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Bài toán: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $T(x, y) = ax + by$ với (x, y) nghiệm đúng một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn cho trước.

- **Bước 1:** Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho. Kết quả thường được miền nghiệm S là đa giác.
- **Bước 2:** Tính giá trị của F tương ứng với (x, y) là toạ độ của các đỉnh của đa giác.
- **Bước 3:** Kết luận:
 - Giá trị lớn nhất của F là số lớn nhất trong các giá trị tìm được.
 - Giá trị nhỏ nhất của F là số nhỏ nhất trong các giá trị tìm được.

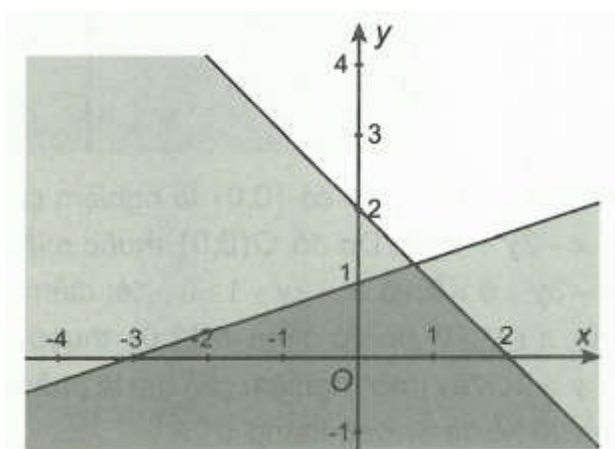
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ: Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình sau
$$\begin{cases} x + y - 2 \geq 0 \\ x - 3y + 3 \leq 0. \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Vẽ các đường thẳng $d: x + y - 2 = 0$, $d': x - 3y + 3 = 0$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy .

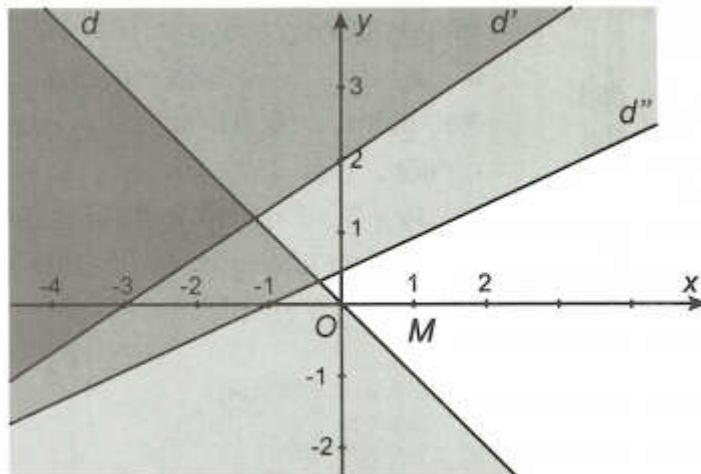
Xét điểm $O(0;0)$, ta thấy $(0;0)$ không phải là nghiệm của bất phương trình $x + y - 2 \geq 0$ và $x - 3y + 3 \leq 0$ do đó miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô đậm trên hình vẽ kẻ cả hai đường d và d' .



Ví dụ 2: Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình sau:
$$\begin{cases} x + y > 0 \\ 2x - 3y + 6 > 0 \\ x - 2y + 1 \geq 0 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Vẽ các đường thẳng $d: x + y = 0$, $d': 2x - 3y + 6 = 0$ và $d'': x - 2y + 1 = 0$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy .



Xét điểm $O(0;0)$, ta có $(0;0)$ là nghiệm của bất phương trình $2x - 3y + 6 > 0$ và $x - 2y + 1 \geq 0$. Do đó $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của các bất phương trình $2x - 3y + 6 > 0$ và $x - 2y + 1 \geq 0$. Xét điểm $M(1;0)$ là nghiệm của bất phương trình $x + y > 0$ do đó điểm $M(1;0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình $x + y > 0$. Vậy miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô đậm trên hình vẽ kể cả đường thẳng d'' .

Ví dụ 3: Xác định miền nghiệm của bất phương trình $(x - y)(x^3 + y^3) \geq 0$.

Hướng dẫn giải

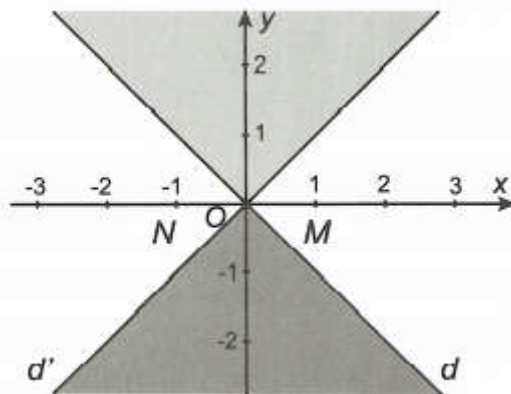
Ta có

$$(x - y)(x^3 + y^3) \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y)(x^2 - xy + y^2) \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x + y) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases} \quad (1) \text{ hoặc } \begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + y \leq 0 \end{cases} \quad (2).$$

Như vậy miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là gồm hai miền nghiệm của hệ bất phương trình (1) và (2).

Vẽ các đường thẳng $d: x + y = 0$ và $d': x - y = 0$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy . Xét điểm $M(1;0)$, ta có $(1;0)$ là nghiệm của các bất phương trình của hệ (1) do đó $M(1;0)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình (1). Xét điểm $N(-1;0)$, ta có $(-1;0)$ là nghiệm của các bất phương trình của hệ (2) do đó $N(-1;0)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình (2). Vậy miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô đậm trên hình vẽ kể cả hai đường thẳng d và d' .



Ví dụ 4: Cho biểu thức $F(x; y) = 2x + y$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} 2x + y - 9 \leq 0 \\ x - y \leq 0 \\ y - 1 \leq 0 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của F

Hướng dẫn giải

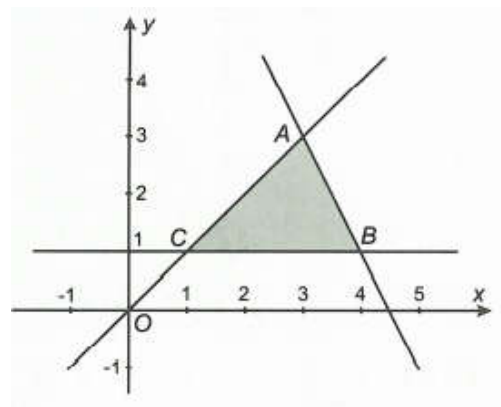
Trong mặt phẳng Oxy ta vẽ các đường thẳng có phương trình:

$$2x + y - 9 = 0; x - y = 0; y - 1 = 0.$$

Khi đó miền nghiệm của hệ là miền tam giác ABC kể cả biên, được tô đậm, với $A(3;3), B(4;1), C(1;1)$.

Ta có $F(3;3) = 9; F(4;1) = 9; F(1;1) = 3$.

Vậy giá trị lớn nhất là $F_{\max} = 9$ khi $x = 4; y = 1$ hoặc $x = 3; y = 3$.



3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 10. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + 3y - 2 \geq 0 \\ 2x + y + 1 \leq 0 \end{cases}$. Trong các điểm sau, điểm nào thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình?

A. $M(0;1)$

B. $N(-1;1)$

C. $P(1;3)$

D. $Q(-1;0)$

Lời giải

Chọn B

Ta thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

Với $M(0;1) \Rightarrow \begin{cases} 0 + 3 \cdot 1 - 2 \geq 0 \\ 2 \cdot 0 + 1 + 1 \leq 0 \end{cases}$. Bất phương trình thứ hai sai nên A sai.

Với $N(-1;1) \Rightarrow \begin{cases} -1 + 3 \cdot 1 - 2 \geq 0 \\ 2 \cdot (-1) + 1 + 1 \leq 0 \end{cases}$: Đúng. Chọn B.

Câu 11. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x - 5y - 1 > 0 \\ 2x + y + 5 > 0 \\ x + y + 1 < 0 \end{cases}$. Trong các điểm sau, điểm nào thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình?

A. $O(0;0)$

B. $M(1;0)$

C. $N(0;-2)$

D. $P(0;2)$

Lời giải

Chọn C

Ta thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

$$\text{Với } O(0;0) \Rightarrow \begin{cases} 2.0 - 5.0 - 1 > 0 \\ 2.0 + 0 + 5 > 0 \\ 0 + 0 + 1 < 0 \end{cases} \text{ . Bất phương trình thứ nhất và thứ ba sai nên A sai.}$$

$$\text{Với } M(1;0) \Rightarrow \begin{cases} 2.1 - 5.0 - 1 > 0 \\ 2.1 + 0 + 5 > 0 \\ 1 + 0 + 1 < 0 \end{cases} \text{ . Bất phương trình thứ ba sai nên B sai.}$$

$$\text{Với } N(0;-3) \Rightarrow \begin{cases} 2.0 - 5.(-3) - 1 > 0 \\ 2.0 + (-2) + 5 > 0 \\ 0 + (-2) + 1 < 0 \end{cases} \text{ : Đúng. Chọn C.}$$

Câu 12. Miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x + \frac{1}{2} - \frac{3y}{2} \leq 2 \end{cases}$$
 chứa điểm nào trong các

điểm sau đây?

A. $O(0;0)$

B. $M(2;1)$

C. $N(1;1)$

D. $P(5;1)$

Lời giải

Chọn B

Ta thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

$$\text{Với } O(0;0) \Rightarrow \begin{cases} \frac{0}{2} + \frac{0}{3} - 1 \geq 0 \\ 0 \geq 0 \\ 0 + \frac{1}{2} - \frac{3.0}{2} \leq 2 \end{cases} \text{ . Bất phương trình thứ nhất sai nên A sai.}$$

$$\text{Với } M(2;1) \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{2} + \frac{1}{3} - 1 \geq 0 \\ 2 \geq 0 \\ 2 + \frac{1}{2} - \frac{3.1}{2} \leq 2 \end{cases} \text{ : Đúng. Chọn B.}$$

Câu 13. Miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 3x + y \geq 9 \\ x \geq y - 3 \\ 2y \geq 8 - x \\ y \leq 6 \end{cases}$$
 chứa điểm nào trong các điểm

sau đây?

A. $O(0;0)$

B. $M(1;2)$

C. $N(2;1)$

D. $P(8;4)$

Lời giải

Chọn D

Thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

Câu 14. Điểm $M(0; -3)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình nào sau đây?

- A. $\begin{cases} 2x - y \leq 3 \\ 2x + 5y \leq 12x + 8 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 2x - y > 3 \\ 2x + 5y \leq 12x + 8 \end{cases}$ C. $\begin{cases} 2x - y > -3 \\ 2x + 5y \leq 12x + 8 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 2x - y \leq -3 \\ 2x + 5y \geq 12x + 8 \end{cases}$

Lời giải

Chọn A

Thay tọa độ $M(0; -3)$ lần lượt vào từng hệ bất phương trình.

Câu 15. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ 2x - 3y + 2 > 0 \end{cases}$. Trong các điểm sau, điểm nào không thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình?

- A. $O(0; 0)$ B. $M(1; 1)$ C. $N(-1; 1)$ D. $P(-1; -1)$

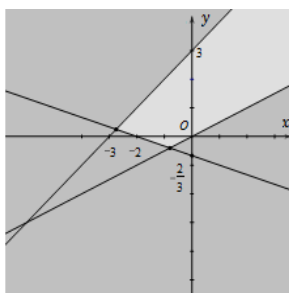
Lời giải

Chọn C

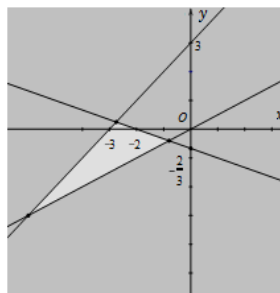
Thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

Câu 16. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y > -2 \\ y - x < 3 \end{cases}$ là phần không tô đậm của hình

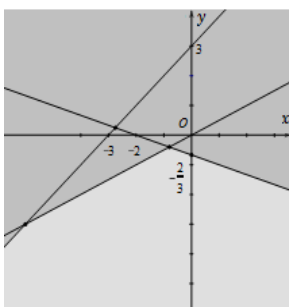
vẽ nào trong các hình vẽ sau?



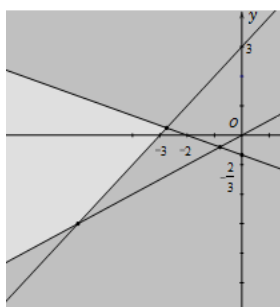
A.



B.



C.



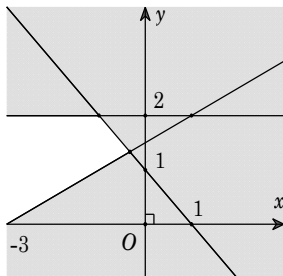
D.

Lời giải

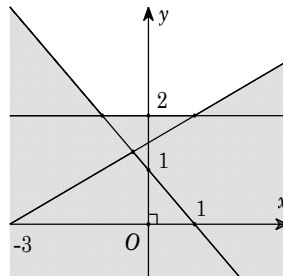
Chọn A

Chọn điểm $M(0; 1)$ thử vào các bất phương trình của hệ thấy thỏa mãn.

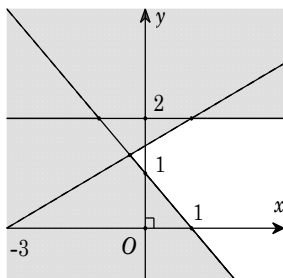
Câu 17. Miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x + y - 1 > 0 \\ y \geq 2 \\ -x + 2y > 3 \end{cases}$$
 là phần không tô đậm của hình vẽ nào trong các hình vẽ sau?



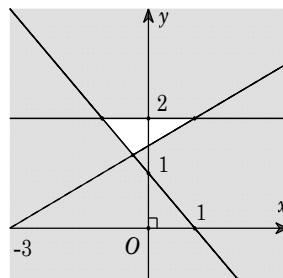
A.



B.



C.



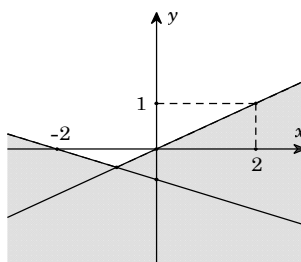
D.

Lời giải

Chọn B

Chọn điểm $M(0;4)$ thử vào các bất phương trình của hệ thấy thỏa mãn.

Câu 18. Phần không tô đậm trong hình vẽ dưới đây , biểu diễn tập nghiệm của hệ bất phương trình nào trong các hệ bất phương trình sau?



A.
$$\begin{cases} x - 2y \leq 0 \\ x + 3y \geq -2 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x - 2y > 0 \\ x + 3y < -2 \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x - 2y \leq 0 \\ x + 3y \leq -2 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y > -2 \end{cases}$$

Lời giải

Chọn D

Do miền nghiệm không chứa biên nên ta loại đáp án A và B. Chọn điểm $M(0;1)$ thử vào các hệ bất phương trình.

C. Chọn điểm

Xét đáp án B, ta có $\begin{cases} 0-2.1 > 0 \\ 0+3.1 < -2 \end{cases}$: Sai.

Câu 10. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = y - x$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} y - 2x \leq 2 \\ 2y - x \geq 4 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$ là

A. $\min F = 1$ khi $x = 2, y = 3$.

B. $\min F = 2$ khi $x = 0, y = 2$.

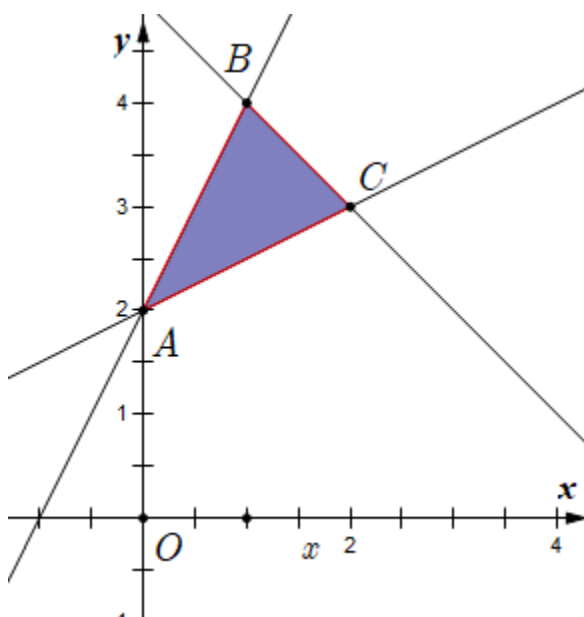
C. $\min F = 3$ khi $x = 1, y = 4$.

D. $\min F = 0$ khi $x = 0, y = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Miền nghiệm của hệ $\begin{cases} y - 2x \leq 2 \\ 2y - x \geq 4 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$ là miền trong của tam giác ABC kể cả biên



Ta thấy $F = y - x$ đạt giá trị nhỏ nhất chỉ có thể tại các điểm A, B, C .

Tại $A(0;2)$ thì $F = 2$.

Tại $B(1;4)$ thì $F = 3$

Tại $C(2;3)$ thì $F = 1$.

Vậy $\min F = 1$ khi $x = 2, y = 3$.

Câu 11: Giá trị nhỏ nhất $F_{\min}$ của biểu thức $F(x; y) = 4x + 3y$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 2x + y \geq 14 \\ 2x + 5y \geq 30 \end{cases}$ là

A. $F_{\min} = 23$

B. $F_{\min} = 26$

C. $F_{\min} = 32$

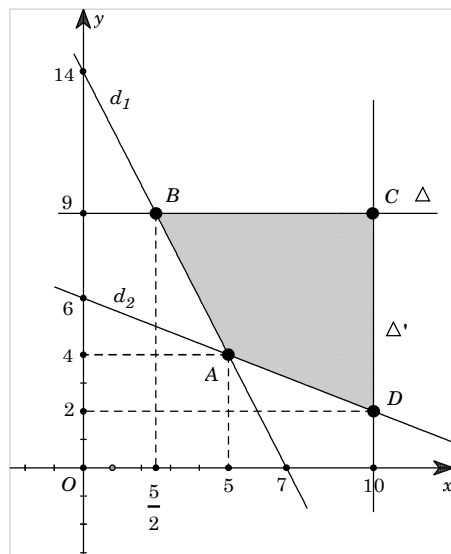
D. $F_{\min} = 67$

Lời giải

Chọn C

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ các đường thẳng

$$d_1: 2x + y - 14 = 0, \quad d_2: 2x + 5y - 30 = 0, \quad \Delta: y = 9, \quad \Delta': x = 10.$$



Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần mặt phẳng tô màu như hình vẽ.

Xét các đỉnh của miền khép kín tạo bởi hệ là $A(5;4)$, $B\left(\frac{5}{2};9\right)$, $C(10;9)$, $D(10;2)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} F(5;4) = 32 \\ F\left(\frac{5}{2};9\right) = 37 \\ F(10;9) = 67 \\ F(10;2) = 46 \end{cases} \longrightarrow F_{\min} = 32.$$

Câu 15. Biểu thức $F(x; y) = y - x$ đạt giá trị nhỏ nhất với điều kiện $\begin{cases} 2x - y \geq 2 \\ x - 2y \leq 2 \\ x + y \leq 5 \\ x \geq 0 \end{cases}$ tại điểm M có tọa độ

là:

A. $(4;1)$

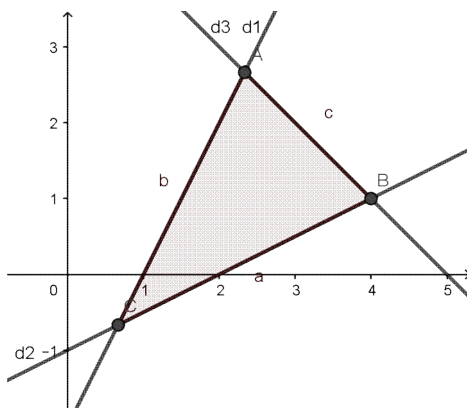
B. $\left(\frac{8}{3}; -\frac{7}{3}\right)$

C. $\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

D. $(5;0)$

Lời giải

Chọn A



Vẽ các đường thẳng :

$$(d_1): y = 2x - 2$$

$$(d_2): y = \frac{1}{2}x - 1$$

$$(d_3): y = 5 - x$$

Khi đó miền nghiệm của hệ là miền trong của tam giác ABC

$$\text{Tọa độ các đỉnh: } A\left(\frac{7}{3}; \frac{8}{3}\right); B(4;1); C\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{Ta có: } F(4;1) = -3; F\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right) = \frac{-4}{3} \Rightarrow F_{\min} = -3$$

Câu 16. Cho x, y thỏa mãn hệ
$$\begin{cases} x + 2y - 100 \leq 0 \\ 2x + y - 80 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$
 Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức

$$P(x; y) = 40000x + 30000y$$

A. $P_{\max} = 2000000$

B. $P_{\max} = 2400000$

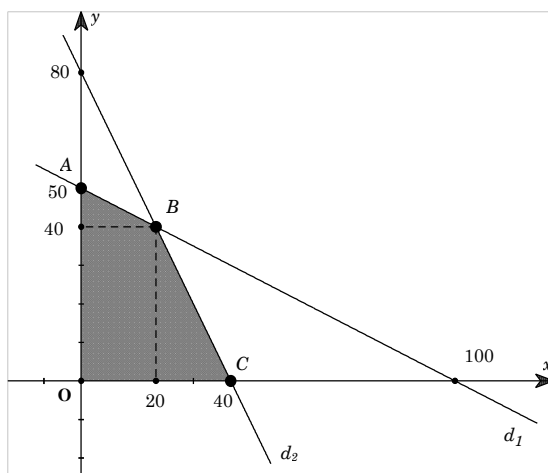
C. $P_{\max} = 1800000$

D. $P_{\max} = 1600000$

Lời giải

Chọn A

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ các đường thẳng $d_1: x + 2y - 100 = 0$, $d_2: 2x + y - 80 = 0$.



Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần mặt phẳng tô màu như hình vẽ.

Xét các đỉnh của miền khép kín tạo bởi hệ là

$$O(0;0), A(0;50), B(20;40), C(40;0).$$

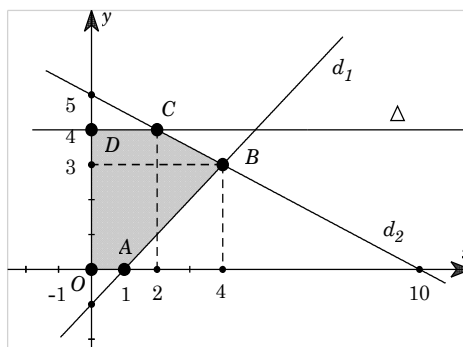
$$\text{Ta có } \begin{cases} P(0;0) = 0 \\ P(0;50) = 1500000 \\ P(20;40) = 2000000 \\ P(40;0) = 1600000 \end{cases} \longrightarrow P_{\max} = 2000000.$$

- Câu 17.** Giá trị lớn nhất $F_{\max}$ của biểu thức $F(x; y) = x + 2y$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} 0 \leq y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ x - y - 1 \leq 0 \\ x + 2y - 10 \leq 0 \end{cases}$ là
- A. $F_{\max} = 6$ B. $F_{\max} = 8$ C. $F_{\max} = 10$ D. $F_{\max} = 12$

Lời giải

Chọn C

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ các đường thẳng $d_1: x - y - 1 = 0$, $d_2: x + 2y - 10 = 0$, $\Delta: y = 4$.



Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần mặt phẳng tô màu như hình vẽ.

Xét các đỉnh của miền khép kín tạo bởi hệ là $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(4;3)$, $C(2;4)$, $D(0;4)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} F(0;0) = 0 \\ F(1;0) = 1 \\ F(4;3) = 10 \longrightarrow F_{\max} = 10. \\ F(2;4) = 10 \\ F(0;4) = 8 \end{cases}$$

Dạng 2. Bài toán tối ưu

1. Phương pháp

Vấn đề tìm miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất có liên quan chặt chẽ đến **quy hoạch tuyến tính**. Đó là một ngành toán học có nhiều ứng dụng trong đời sống và kinh tế.

Lưu ý: Ta thừa nhận kết quả sau “Giá trị nhỏ nhất hay lớn nhất của biểu thức $P(x; y) = ax + by + c$ $a^2 + b^2 \neq 0$ trên miền đa giác lồi (kể cả biên) đạt được tại một đỉnh nào đó của đa giác”.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Một công ty kinh doanh thương mại chuẩn bị cho một đợt khuyến mại nhằm thu hút khách hàng bằng cách tiến hành quảng cáo sản phẩm của công ty trên hệ thống phát thanh và truyền hình. Chi phí cho 1 phút quảng cáo trên sóng phát thanh là 800.000 đồng, trên sóng truyền hình là 4.000.000 đồng. Đài phát thanh chỉ nhận phát các chương trình quảng cáo dài ít nhất là 5 phút. Do nhu cầu quảng cáo trên truyền hình lớn nên đài truyền hình chỉ nhận phát các chương trình dài tối đa là 4 phút. Theo các phân tích cùng thời lượng một phút quảng cáo trên truyền hình sẽ có hiệu quả gấp 6 lần trên sóng phát thanh. Công ty dự định chi tối đa là 16.000.000 đồng cho quảng cáo. Công ty cần đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh và truyền hình như thế nào để hiệu quả nhất?

Hướng dẫn giải

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. “Tránh mua các trang và các cá nhân khác”

Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT: 0834 332 133

Phân tích bài toán: Gọi thời lượng công ty đặt quảng cáo trên sóng phát thanh là x (phút), trên truyền hình là y (phút). Chi phí cho việc này là

$$800.000x + 4.000.000y \text{ (đồng)}.$$

Mức chi phí này không được phép vượt quá mức chi tối đa, tức là

$$800000x + 4000000y \leq 16000000$$

$$\Leftrightarrow x + 5y - 20 \leq 0.$$

Theo giả thiết, ta có $x \geq 5$; $x \leq 4$.

Đồng thời do x, y là thời lượng nên $x \geq 0$; $y \geq 0$.

Hiệu quả chung của quảng cáo là $x + 6y$.

Bài toán trở thành: Tìm x, y sao cho $M(x; y) = x + 6y$ đạt giá trị lớn nhất, với x, y thỏa mãn hệ bất

$$\text{phương trình } \begin{cases} x + 5y - 20 \leq 0 \\ x \geq 5 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases} \quad (*)$$

Trong mặt phẳng Oxy , ta biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là phần tam giác ABC với $A(5;3), B(5;0), C(20;0)$.

Ta có $M(5;3) = 23$; $M(5;0) = 5$; $M(20;0) = 20$ suy ra giá trị lớn nhất của $M(x; y)$ bằng 23 tại $(5;3)$.

Tức là nếu đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh là 5 phút và trên truyền hình là 3 phút thì sẽ đạt hiệu quả nhất.

Ví dụ 2: Một xưởng sản xuất hai loại sản phẩm, mỗi kg sản phẩm loại một cần 2kg nguyên liệu và 30 giờ, đem lại mức lợi nhuận 40 000 đồng. Mỗi sản phẩm loại hai cần 4kg nguyên liệu và 15 giờ đem lại mức lợi nhuận là 30 000 đồng. Xưởng có 200kg nguyên liệu và 1200 giờ làm việc. Hỏi cần sản xuất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu để có mức lợi nhuận cao nhất?

Hướng dẫn giải

Phân tích bài toán: Gọi x ($x \geq 0$) là số kg loại một cần sản xuất, y ($y \geq 0$) là số kg loại hai cần sản xuất. Suy ra số nguyên liệu cần dùng là $2x + 4y$, thời gian là $30x + 15y$ có mức lợi nhuận là $40000x + 30000y$.

Theo giả thiết bài toán xưởng có 200kg nguyên liệu và 1200 giờ làm việc, suy ra $2x + 4y \leq 200$ hay $x + 2y - 100 \leq 0$; $30x + 15y \leq 1200$ hay $2x + y - 80 \leq 0$.

Bài toán trở thành: Tìm $x; y$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} x + 2y - 100 \leq 0 \\ 2x + y - 80 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (*)$ sao cho $L(x; y) = 40000x + 30000y$

đạt giá trị lớn nhất.

Biểu diễn miền nghiệm của hệ (*) là miền tứ giác $OABC$ với

$$O(0;0), A(40;0), B(0;50), C(20;40).$$

$$\text{Ta có } L(0;0) = 0, L(40;0) = 1600000, L(0;50) = 1500000, L(20;40) = 2000000.$$

Do đó giá trị lớn nhất của $L(x; y)$ là 2 000 000 khi $(x; y) = (20;40)$.

Vậy nên sản xuất 20kg sản phẩm loại I và 40kg sản phẩm loại hai để có mức lợi nhuận cao nhất.

Ví dụ 3: Một công ty điện tử sản xuất hai kiểu radio trên hai dây chuyền độc lập. Radio kiểu một sản xuất trên dây chuyền một với công suất 45 radio/ngày, radio kiểu hai sản xuất trên dây chuyền hai với công suất 80 radio/ngày. Để sản xuất một chiếc radio kiểu một cần 12 linh kiện, để sản xuất một chiếc radio kiểu hai cần 9 linh kiện. Tiền lãi khi bán một chiếc radio kiểu một là 250 000 đồng, lãi thu được khi bán một chiếc radio kiểu hai là 180 000 đồng. Hỏi cần sản xuất như thế nào để tiền lãi thu được là nhiều nhất, biết rằng số linh kiện có thể sử dụng tối đa trong một ngày là 900?

- A. Sản xuất 15 radio kiểu một và 80 radio kiểu hai.
- B. Sản xuất 45 radio kiểu một và 40 radio kiểu hai.
- C. Sản xuất 45 radio kiểu một.
- D. Sản xuất 80 radio kiểu hai.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi x và y lần lượt là số radio kiểu một và số radio kiểu hai mà công ty này sản xuất trong một ngày ($x, y \in \mathbb{N}^*$).

Số tiền lãi mà công ty này thu về hàng ngày là $f(x, y) = 250000x + 180000y$ (đồng).

Ta có hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 12x + 9y \leq 900 \\ 0 \leq x \leq 45 \\ 0 \leq y \leq 80 \end{cases} \quad (*)$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x, y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là ngũ miền ngũ giác $OABCD$ trong đó $O(0;0)$, $A(45;0)$,

$B(45;40)$, $C(15;80)$, $D(0;80)$.

Ta có $f(x, y)$ lớn nhất khi $(x, y) = (45;40)$, tức là công ty này cần sản xuất 45 radio kiểu một và 40 radio kiểu hai.

Ví dụ 4: Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 24 g hương liệu, 9 lít nước và 210 g đường để pha chế nước cam và nước táo. Để pha chế 1 lít nước cam cần 30 g đường và 1 lít nước; pha chế 1 lít nước táo cần 10 g đường, 1 lít nước và 4 g hương liệu. Mỗi lít nước cam nhận được 20 điểm thưởng, mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Hỏi cần pha chế bao nhiêu lít nước trái cây mỗi loại để được số tiền thưởng là lớn nhất?

- A. 7 lít nước đường.
- B. 6 lít nước táo.
- C. 3 lít nước đường, 6 lít nước táo.
- D. 6 lít nước đường, 3 lít nước táo.

Hướng dẫn giải

Gọi x, y lần lượt là số lít nước cam và táo của mỗi đội pha chế ($x, y \geq 0$).

Số điểm thưởng của đội chơi này là $f(x, y) = 20x + 80y$.

Số gam đường cần dùng là $30x + 10y$ (g).

Số lít nước cần dùng là $x + y$ (l).

Số gam hương liệu cần dùng là $4y$ (g).

Vì trong cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi sử dụng tối đa 24 g hương liệu, 9 lít nước và 210 g đường nên ta có hệ bất phương trình sau

$$\begin{cases} 30x + 10y \leq 210 \\ x + y \leq 9 \\ 4y \leq 24 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y \leq 21 \\ x + y \leq 9 \\ y \leq 6 \\ x, y \geq 0 \end{cases} (*)$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là ngũ giác $OABCD$.

Trong đó $O(0;0), A(7;0), B(6;3), C(3;6), D(0;6)$.

Suy ra $f(3;6)$ là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ (*).

Như vậy để được số điểm thưởng lớn nhất cần pha chế 3 lít nước cam và 6 lít nước táo.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1 : Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 24 g hương liệu, 9 lít nước và 210 g đường để pha chế nước cam và nước táo.

- Để pha chế 1 lít nước cam cần 30 g đường, 1 lít nước và 1 g hương liệu;
- Để pha chế 1 lít nước táo cần 10 g đường, 1 lít nước và 4 g hương liệu.

Mỗi lít nước cam nhận được 60 điểm thưởng, mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Hỏi cần pha chế bao nhiêu lít nước trái cây mỗi loại để đạt được số điểm thưởng cao nhất?

- A. 5 lít nước cam và 4 lít nước táo. B. 6 lít nước cam và 5 lít nước táo.
C. 4 lít nước cam và 5 lít nước táo. D. 4 lít nước cam và 6 lít nước táo.

Lời giải

Chọn C

Giả sử x, y lần lượt là số lít nước cam và số lít nước táo mà mỗi đội cần pha chế.

Suy ra $30x + 10y$ là số gam đường cần dùng;

$x + y$ là số lít nước cần dùng;

$x + 4y$ là số gam hương liệu cần dùng.

$$\text{Theo giả thiết ta có } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 30x + 10y \leq 210 \\ x + y \leq 9 \\ x + 4y \leq 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \leq 21 \\ x + y \leq 9 \\ x + 4y \leq 24 \end{cases} (*)$$

Số điểm thưởng nhận được sẽ là $P = 60x + 80y$.

Ta đi tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P với x, y thỏa mãn (*).

Câu 2: Một xưởng sản xuất hai loại sản phẩm

- Mỗi kg sản phẩm loại I cần 2 kg nguyên liệu và 30 giờ, đem lại mức lời 40 nghìn;

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. **"Tránh mua các trang và các cá nhân khác"**

Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

- Mỗi kg sản phẩm loại II cần 4 kg nguyên liệu và 15 giờ, đem lại mức lời 30 nghìn.

Xưởng có 200 kg nguyên liệu và 1200 giờ làm việc. Nên sản xuất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu để có mức lời cao nhất?

- A. 30kg loại I và 40 kg loại II. B. 20kg loại I và 40 kg loại II.
 C. 30kg loại I và 20 kg loại II. D. 25 kg loại I và 45 kg loại II.

Lời giải

Chọn B

Gọi $x \geq 0, y \geq 0$ (kg) lần lượt là số sản phẩm loại I và loại II cần sản xuất.

Khi đó, tổng số nguyên liệu sử dụng: $2x + 4y \leq 200$.

Tổng số giờ làm việc: $30x + 15y \leq 1200$.

Lợi nhuận tạo thành: $L = 40x + 30y$.

Thực chất của bài toán này là phải tìm $x \geq 0, y \geq 0$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} 2x + 4y \leq 200 \\ 30x + 15y \leq 1200 \end{cases} \text{ sao cho } L = 40x + 30y \text{ đạt giá trị lớn nhất.}$$

Câu 3: Một xưởng cơ khí có hai công nhân là Chiến và Bình. Xưởng sản xuất loại sản phẩm I và II. Mỗi sản phẩm I bán lãi 500 nghìn đồng, mỗi sản phẩm II bán lãi 400 nghìn đồng. Để sản xuất được một sản phẩm I thì Chiến phải làm việc trong 3 giờ, Bình phải làm việc trong 1 giờ. Để sản xuất được một sản phẩm II thì Chiến phải làm việc trong 2 giờ, Bình phải làm việc trong 6 giờ. Một người không thể làm được đồng thời hai sản phẩm. Biết rằng trong một tháng Chiến không thể làm việc quá 180 giờ và Bình không thể làm việc quá 220 giờ. Số tiền lãi lớn nhất trong một tháng của xưởng là.

- A. 32 triệu đồng. B. 35 triệu đồng. C. 14 triệu đồng. D. 30 triệu đồng.

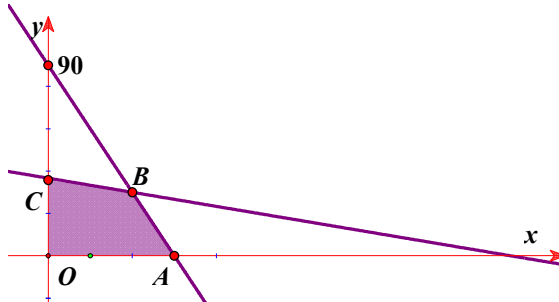
Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi x, y lần lượt là số sản phẩm loại I và loại II được sản xuất ra. Điều kiện x, y nguyên dương.

Ta có hệ bất phương trình sau:
$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 180 \\ x + 6y \leq 220 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Miền nghiệm của hệ trên là



Tiền lãi trong một tháng của xưởng là $T = 0,5x + 0,4y$.

Ta thấy T đạt giá trị lớn nhất chỉ có thể tại các điểm A, B, C . Vì C có tọa độ không nguyên nên loại.

Tại $A(60; 0)$ thì $T = 30$ triệu đồng.

Tại $B(40; 30)$ thì $T = 32$ triệu đồng.

Vậy tiền lãi lớn nhất trong một tháng của xưởng là 32 triệu đồng.

Câu 7. Một nhà khoa học đã nghiên cứu về tác động phối hợp của hai loại Vitamin A và B đã thu được kết quả như sau: Trong một ngày, mỗi người cần từ 400 đến 1000 đơn vị Vitamin cả A lẫn B và có thể tiếp nhận không quá 600 đơn vị vitamin A và không quá 500 đơn vị vitamin B . Do tác động phối hợp của hai loại vitamin trên nên mỗi ngày một người sử dụng số đơn vị vitamin B không ít hơn một nửa số đơn vị vitamin A và không nhiều hơn ba lần số đơn vị vitamin A . Tính số đơn vị vitamin mỗi loại ở trên để một người dùng mỗi ngày sao cho chi phí rẻ nhất, biết rằng mỗi đơn vị vitamin A có giá 9 đồng và mỗi đơn vị vitamin B có giá 7,5 đồng.

- A. 600 đơn vị Vitamin A , 400 đơn vị Vitamin B
- B. 600 đơn vị Vitamin A , 300 đơn vị Vitamin B
- C. 500 đơn vị Vitamin A , 500 đơn vị Vitamin B
- D. 100 đơn vị Vitamin A , 300 đơn vị Vitamin B

Lời giải

Chọn D

Gọi $x \geq 0, y \geq 0$ lần lượt là số đơn vị vitamin A và B để một người cần dùng trong một ngày.

Trong một ngày, mỗi người cần từ 400 đến 1000 đơn vị vitamin cả A lẫn B nên ta có: $400 \leq x + y \leq 1000$.

Hàng ngày, tiếp nhận không quá 600 đơn vị vitamin A và không quá 500 đơn vị vitamin B nên ta có: $x \leq 600, y \leq 500$.

Mỗi ngày một người sử dụng số đơn vị vitamin B không ít hơn một nửa số đơn vị vitamin A và không nhiều hơn ba lần số đơn vị vitamin A nên ta có: $0,5x \leq y \leq 3x$.

Số tiền cần dùng mỗi ngày là: $T(x, y) = 9x + 7,5y$.

Bài toán trở thành: Tìm $x \geq 0, y \geq 0$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 600, 0 \leq y \leq 500 \\ 400 \leq x + y \leq 1000 \\ 0,5x \leq y \leq 3x \end{cases} \quad \text{để } T(x, y) = 9x + 7,5y \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

Câu 8. Công ty Bao bì Dược cần sản xuất 3 loại hộp giấy: đựng thuốc B₁, đựng cao Sao vàng và đựng "Quy sâm đại bổ hoàn". Để sản xuất các loại hộp này, công ty dùng các tấm bìa có kích thước giống nhau. Mỗi tấm bìa có hai cách cắt khác nhau.

- ☐ Cách thứ nhất cắt được 3 hộp B₁, một hộp cao Sao vàng và 6 hộp Quy sâm.
- ☐ Cách thứ hai cắt được 2 hộp B₁, 3 hộp cao Sao vàng và 1 hộp Quy sâm. Theo kế hoạch, số hộp Quy sâm phải có là 900 hộp, số hộp B₁ tối thiểu là 900 hộp, số hộp cao sao vàng tối thiểu là 1000 hộp. Cần phương án sao cho tổng số tấm bìa phải dùng là ít nhất?

A. Cắt theo cách một 100 tấm, cắt theo cách hai 300 tấm.

B. Cắt theo cách một 150 tấm, cắt theo cách hai 100 tấm.

C. Cắt theo cách một 50 tấm, cắt theo cách hai 300 tấm.

D. Cắt theo cách một 100 tấm, cắt theo cách hai 200 tấm.

Lời giải

Chọn A

Gọi $x \geq 0, y \geq 0$ lần lượt là số tấm bìa cắt theo cách thứ nhất, thứ hai.

Bài toán đưa đến tìm $x \geq 0, y \geq 0$ thỏa mãn hệ
$$\begin{cases} 3x + 2y \geq 900 \\ x + 3y \geq 1000 \\ 6x + y = 900 \end{cases}$$
 sao cho $L = x + y$ nhỏ nhất.

Câu 9. Một nhà máy sản xuất, sử dụng ba loại máy đặc chủng để sản xuất sản phẩm A và sản phẩm B trong một chu trình sản xuất. Để sản xuất một tấn sản phẩm A cần 4 triệu đồng người ta sử dụng máy I trong 1 giờ, máy II trong 2 giờ và máy III trong 3 giờ. Để sản xuất ra một tấn sản phẩm B cần được 3 triệu đồng người ta sử dụng máy I trong 6 giờ, máy II trong 3 giờ và máy III trong 2 giờ. Biết rằng máy I chỉ hoạt động không quá 36 giờ, máy hai hoạt động không quá 23 giờ và máy III hoạt động không quá 27 giờ. Hãy lập kế hoạch sản xuất cho nhà máy để tiền lãi được nhiều nhất.

A. Sản xuất 9 tấn sản phẩm A và không sản xuất sản phẩm B

B. Sản xuất 7 tấn sản phẩm A và 3 tấn sản phẩm B

C. Sản xuất $\frac{10}{3}$ tấn sản phẩm A và $\frac{49}{9}$ tấn sản phẩm B

D. Sản xuất 6 tấn sản phẩm B và không sản xuất sản phẩm A

Lời giải

Chọn B

Gọi $x \geq 0, y \geq 0$ là sản lượng cần sản xuất của sản phẩm A và sản phẩm B. Ta có:

$x + 6y$ là thời gian hoạt động của máy I.

$2x + 3y$ là thời gian hoạt động của máy II.

$3x + 2y$ là thời gian hoạt động của máy III.

Số tiền lãi của nhà máy: $T = 4x + 3y$.

Bài toán trở thành: Tìm $x \geq 0, y \geq 0$ thỏa mãn
$$\begin{cases} x + 6y \leq 36 \\ 2x + 3y \leq 23 \\ 3x + 2y \leq 27 \end{cases}$$
 để $T = 4x + 3y$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 7. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kilogram thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipid. Mỗi kilogram thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn. Giá tiền một kg thịt bò là 160 nghìn đồng, một kg thịt lợn là 110 nghìn đồng. Gọi x, y lần lượt là số kg thịt bò và thịt lợn mà gia đình đó cần mua. Tìm x, y để tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipid trong thức ăn?

A. $x = 0,3$ và $y = 1,1$. B. $x = 0,3$ và $y = 0,7$. C. $x = 0,6$ và $y = 0,7$. D. $x = 1,6$ và $y = 0,2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

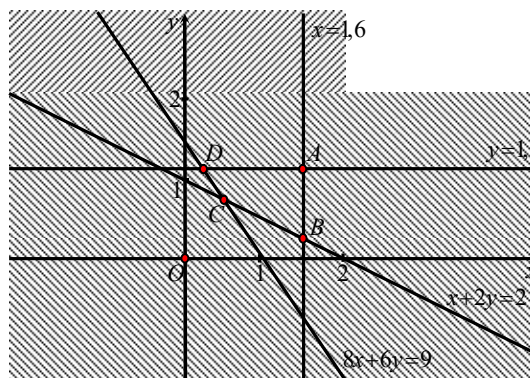
Theo bài ra ta có số tiền gia đình cần trả là $160.x + 110.y$ với x, y thỏa mãn: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \end{cases}$.

Số đơn vị protein gia đình có là $0,8.x + 0,6.y \geq 0,9 \Leftrightarrow 8x + 6y \geq 9$ (d_1).

Số đơn vị lipid gia đình có là $0,2.x + 0,4.y \geq 0,4 \Leftrightarrow x + 2y \geq 2$ (d_2).

Bài toán trở thành: Tìm x, y thỏa mãn hệ bất phương trình $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \\ 8x + 6y \geq 9 \\ x + 2y \geq 2 \end{cases}$ sao cho

$T = 160.x + 110.y$ nhỏ nhất.



Vẽ hệ trục tọa độ ta tìm được tọa độ các điểm $A(1,6;1,1)$; $B(1,6;0,2)$; $C(0,6;0,7)$; $D(0,3;1,1)$.

Nhận xét: $T(A) = 377$ nghìn, $T(B) = 278$ nghìn, $T(C) = 173$ nghìn, $T(D) = 169$ nghìn.

Vậy tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipid trong thức ăn thì $x = 0,6$ và $y = 0,7$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 2

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Điểm nào dưới đây thuộc miền nghiệm của bất phương trình $2x + y - 1 < 0$?

- A. $Q(1; 1)$. B. $M(1; -2)$. C. $P(2; -2)$. D. $N(1; 0)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$Q(1; 1)$: $2 + 1 - 1 < 0 \Leftrightarrow 2 < 0$ (vô lý) nên điểm $Q(1; 1)$ không thuộc miền nghiệm của bất phương trình.

$M(1; -2)$: $2 - 2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < 0$ (luôn đúng) nên điểm $M(1; -2)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình.

$P(2; -2)$: $4 - 2 - 1 < 0 \Leftrightarrow 1 < 0$ (vô lý) nên điểm $P(2; -2)$ không thuộc miền nghiệm của bất phương trình.

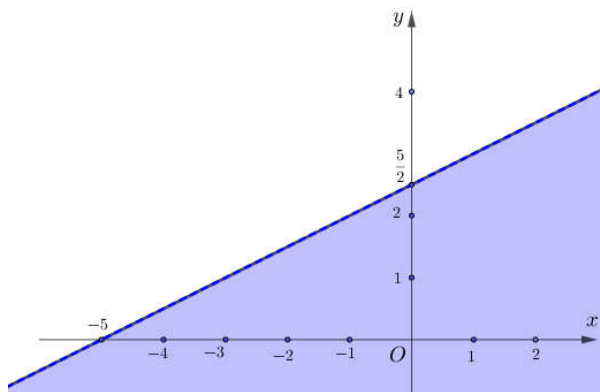
$N(1; 0)$: $2 - 0 - 1 < 0 \Leftrightarrow 1 < 0$ (vô lý) nên điểm $N(1; 0)$ không thuộc miền nghiệm của bất phương trình.

Câu 2. Cho bất phương trình $x - 2y + 5 > 0$ có tập nghiệm là S . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $(-2; 2) \in S$. B. $(2; 2) \in S$. C. $(-2; 4) \in S$. D. $(1; 3) \in S$.

Lời giải

Chọn B

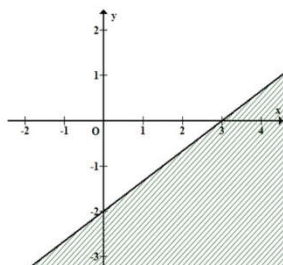


Xét đường thẳng $d: x - 2y + 5 = 0 \Rightarrow d: y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$.

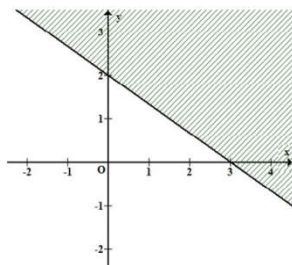
Lấy điểm $O(0; 0)$, ta thấy $O \notin d$ và có $0 - 2 \cdot 0 + 5 > 0$ nên nửa mặt phẳng bờ (d) chứa O là miền nghiệm của bất phương trình (miền bị tô xanh).

Khi đó ta thấy $(2; 2) \in S$.

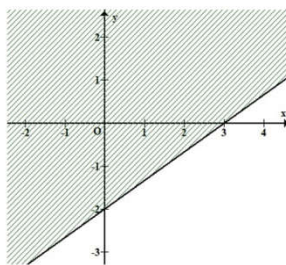
Câu 3. Hình vẽ nào sau đây biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $2x - 3y - 6 \leq 0$ (miền không tô đậm kể cả bờ)?



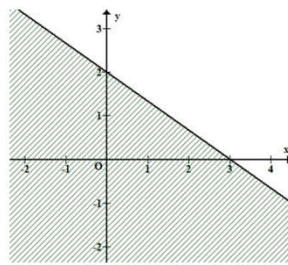
H1



H2



H3



H4

A. H1

B. H2

C. H3

D. H4

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng $2x - 3y - 6 = 0$ đi qua hai điểm $(0; -2), (3; 0)$ nên loại đáp án H2 và H4.

Mặt khác $O(0; 0)$ không thỏa mãn $2x - 3y - 6 \leq 0$ nên chọn hình H3.

Câu 4. Miền của bất phương trình $2x + y > 1$ không chứa điểm nào sau đây?

A. $C(3; 3)$.

B. $D(-1; -1)$.

C. $A(1; 1)$.

D. $B(2; 2)$.

Lời giải

Chọn B

Thử vào dễ thấy rằng $D(-1; -1)$ không thỏa mãn bất phương trình nên đáp án là B.

Câu 5. Cặp số $(1; -1)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

A. $x + y - 3 > 0$.

B. $-x - 3y - 1 < 0$.

C. $-x - y < 0$.

D. $x + 3y + 1 < 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta thấy cặp số $(1; -1)$ nghiệm đúng bất phương trình $x + 3y + 1 < 0$.

Câu 6. Điểm nào dưới đây thuộc miền nghiệm của bất phương trình $2x + y - 1 < 0$?

A. $Q(1; 1)$.

B. $M(1; -2)$.

C. $P(2; -2)$.

D. $N(1; 0)$.

Lời giải

Chọn B

Thay tọa độ điểm Q vào vế trái của bất phương trình $2x + y - 1 < 0$, ta có $2.1 + 1 - 1 > 0$.

Suy ra điểm Q không thuộc miền nghiệm của bất phương trình.

Thay tọa độ điểm M vào vế trái của bất phương trình $2x + y - 1 < 0$, ta có $2.1 - 2 - 1 < 0$.

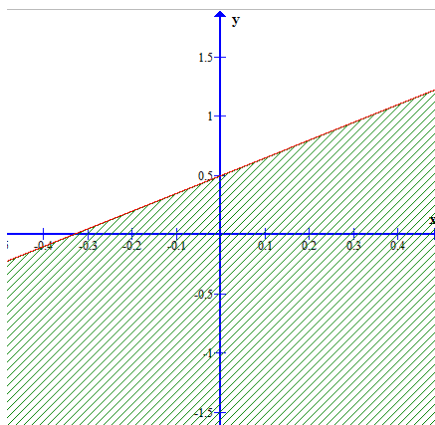
Suy ra điểm M thuộc miền nghiệm của bất phương trình.

Câu 7. Tập nghiệm của bất phương trình $3x - 2y + 1 < 0$ là

- A. Nửa mặt phẳng chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $3x - 2y + 1 = 0$ (không bao gồm đường thẳng).
- B. Nửa mặt phẳng chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $3x - 2y + 1 = 0$ (bao gồm đường thẳng).
- C. Nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $3x - 2y + 1 = 0$ (bao gồm đường thẳng).
- D. Nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $3x - 2y + 1 = 0$ (không bao gồm đường thẳng).

Lời giải

Chọn D



Quan sát đồ thị hàm số ta có, nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $3x - 2y + 1 = 0$ (không bao gồm đường thẳng).

Câu 8. Cặp số nào dưới đây là một nghiệm của bất phương trình: $2x - y > 3$.

- A. (3;1).
- B. (0;-2)
- C. (1;1).
- D. (2;1).

Lời giải

Chọn A

Câu 9. Miền nghiệm của bất phương trình $5(x + 2) - 9 < 2x - 2y + 7$ **không** chứa điểm nào trong các điểm sau?

- A. (2; 3).
- B. (-2; 1).
- C. (2; -1).
- D. (0; 0).

Lời giải

Chọn A

Thay tọa độ điểm (2; 3) vào bất phương trình $5(x + 2) - 9 < 2x - 2y + 7$ ta có:

$$5(2 + 2) - 9 < 2.2 - 2.3 + 7 \Leftrightarrow 11 < 5 \text{ (Mệnh đề sai)}.$$

Vậy miền nghiệm của bất phương trình $5(x + 2) - 9 < 2x - 2y + 7$ không chứa điểm (2; 3).

Câu 10. Điểm nào dưới đây thuộc miền nghiệm của bất phương trình $x - 2y - 1 \leq 0$?

- A. $M(0;-1)$. B. $Q(1;0)$. C. $N(-1;-2)$. D. $P(1;-1)$.

Lời giải

Chọn B

Xét đáp án A thay tọa độ M vào bất phương trình ta được: $1 \leq 0$ (vô lý) nên loại

Xét đáp án B thay tọa độ Q vào bất phương trình ta được: $0 \leq 0$ (đúng) nên chọn

Xét đáp án C thay tọa độ N vào bất phương trình ta được: $2 \leq 0$ (vô lý) nên loại

Xét đáp án D thay tọa độ P vào bất phương trình ta được: $2 \leq 0$ (vô lý) nên loại

Câu 11. Miền nghiệm của bất phương trình $x - 2y + 5 < 0$ là:

A. Nửa mặt phẳng chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ (bao gồm đường thẳng).

B. Nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ (không bao gồm đường thẳng).

C. Nửa mặt phẳng chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ (không bao gồm đường thẳng).

D. Nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ (bao gồm đường thẳng).

Lời giải

Chọn B

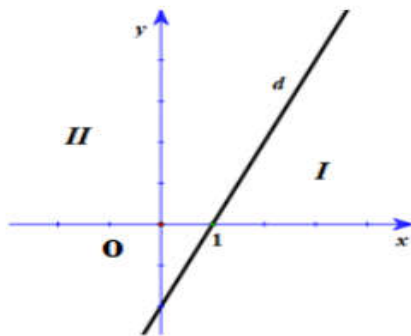
Ta có: $x - 2y + 5 < 0 \Leftrightarrow y > \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Thay tọa độ điểm $O(0;0)$ vào bất phương trình ta có: $0 < 0 + \frac{5}{2}$ (vô lý).

Vậy điểm O không thuộc miền nghiệm của bất phương trình.

Nên miền nghiệm là: Nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ (không bao gồm đường thẳng).

Câu 12. Đường thẳng $d: 2x - y = 2$ chia mặt phẳng tọa độ thành hai miền I, II có bờ là đường thẳng d (hình vẽ bên). Xác định miền nghiệm của bất phương trình $2x - y > 2$.



- A. Nửa mặt phẳng I bỏ đi đường thẳng d .
B. Nửa mặt phẳng I kể cả bờ d .
C. Nửa mặt phẳng II kể cả bờ d .
D. Nửa mặt phẳng II bỏ đi đường thẳng d .

Lời giải

Chọn A

Xét bất phương trình: $2x - y > 2$ (1)

Thay tọa độ gốc $O(0;0)$ vào (1) ta được: $0 > 2$ (không thỏa mãn).

Suy ra gốc O không thuộc miền nghiệm của bất phương trình (1).

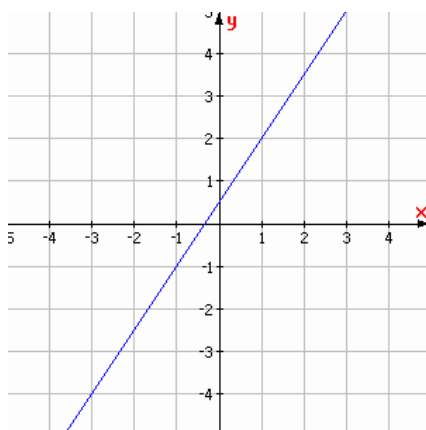
Vậy miền nghiệm của bất phương trình (1) là nửa mặt phẳng I bỏ đi đường thẳng d .

Câu 13. Tập nghiệm của bất phương trình $3x - 2y + 1 < 0$.

- A. Nửa mặt phẳng chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $3x - 2y + 1 = 0$ (không bao gồm đường thẳng).
B. Nửa mặt phẳng chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $3x - 2y + 1 = 0$ (bao gồm đường thẳng).
C. Nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $3x - 2y + 1 = 0$ (bao gồm đường thẳng).
D. Nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $3x - 2y + 1 = 0$ (không bao gồm đường thẳng).

Lời giải

Chọn D

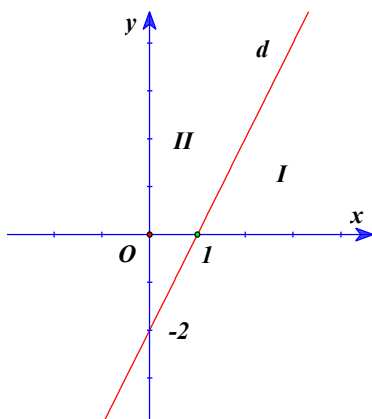


Vẽ đường thẳng $d : 3x - 2y + 1 = 0$.

Lấy $O(0;0) \in d$. Ta thấy $3.0 - 2.0 + 1 < 0$ (vô lí).

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ, bờ là đường thẳng $3x - 2y + 1 = 0$ (không bao gồm đường thẳng).

Câu 14. Đường thẳng $d: 2x - y - 2 = 0$ chia mặt phẳng tọa độ thành hai miền I , II là hai nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng d (Hình vẽ bên).



Xác định miền nghiệm của bất phương trình $2x - y - 2 \geq 0$.

- A.** Nửa mặt phẳng I bỏ đi đường thẳng d . **B.** Nửa mặt phẳng I kể cả bờ d .
C. Nửa mặt phẳng II kể cả bờ d . **D.** Nửa mặt phẳng II bỏ đi đường thẳng d .

Lời giải

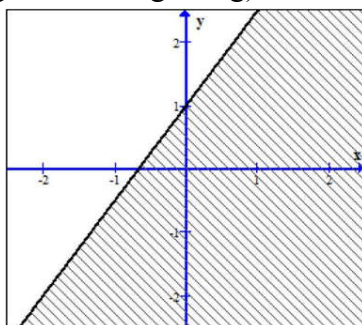
Chọn B

Ta thấy $O(0; 0) \notin d$ và $2 \cdot 0 - 0 - 2 = -2 < 0$ nên $(0; 0)$ không là nghiệm của bất phương trình $2x - y - 2 \geq 0$.

Do đó miền nghiệm của bất phương trình $2x - y - 2 \geq 0$ là miền không chứa điểm O kể cả đường thẳng d .

Vậy miền nghiệm của bất phương trình $2x - y - 2 \geq 0$ là nửa mặt phẳng I kể cả bờ d .

Câu 15. Hình dưới đây biểu diễn hình học miền nghiệm của bất phương trình nào? (Miền nghiệm là miền không gạch chéo và miền nghiệm không chứa đường thẳng)



- A.** $3x + 2y > 2$. **B.** $3x + 2y < 2$. **C.** $-3x + 2y > 2$. **D.** $-3x + 2y < 2$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng trong hình vẽ là $-3x + 2y = 2$.

Gốc tọa độ $O(0;0)$ không thuộc miền nghiệm nên ta chọn đáp án C.

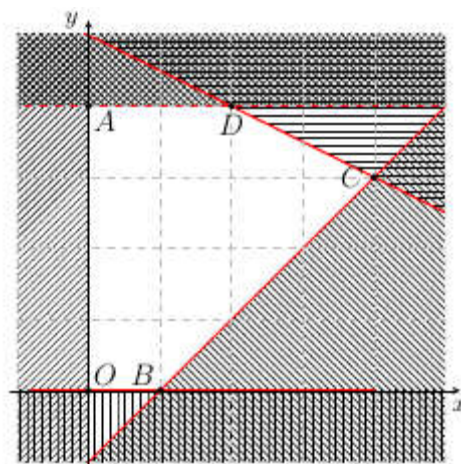
- Câu 16.** Giá trị lớn nhất của biểu thức $F(x;y) = x + 2y$, với điều kiện $\begin{cases} 0 \leq y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ x - y - 1 \leq 0 \\ x + 2y - 10 \leq 0 \end{cases}$ là
- A. 6. B. 12. C. 10. D. 8.

Lời giải

Chọn C

Trên cùng hệ trục tọa độ Oxy :

- + Vẽ miền nghiệm của $0 \leq y \leq 4$ (có biên là trục hoành Ox và đường thẳng $y = 4$).
- + Vẽ miền nghiệm của $x \geq 0$ (có biên là trục tung Oy).
- + Vẽ miền nghiệm của đường thẳng $x - y - 1 \leq 0$ (có biên là đường thẳng $x - y - 1 = 0$).
- + Vẽ miền nghiệm của đường thẳng $x + 2y - 10 \leq 0$ (có biên là đường thẳng $x + 2y - 10 = 0$).



Khi đó $F(x;y) = x + 2y$ sẽ đạt lớn nhất tại một trong các điểm $A(0;4)$, $O(0;0)$, $B(1;0)$, $C(4;3)$, $D(2;4)$.

Thử với từng điểm ta có $F(x;y) = x + 2y$ đạt giá trị lớn nhất bằng 10 tại điểm $C(4;3)$ hoặc $D(2;4)$.

Câu 17. Điểm $O(0;0)$ **không** thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình nào sau đây?

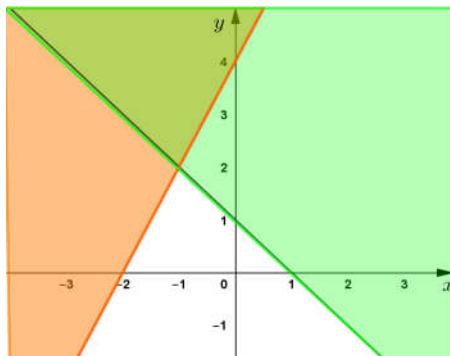
- A. $\begin{cases} x + 3y < 0 \\ 2x + y + 4 > 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x + 3y \geq 0 \\ 2x + y - 4 < 0 \end{cases}$
- C. $\begin{cases} x + 3y - 6 < 0 \\ 2x + y + 4 > 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x + 3y - 6 < 0 \\ 2x + y + 4 \geq 0 \end{cases}$

Lời giải

Chọn A

Thay tọa độ O vào hệ ta được đáp án.

Câu 18. Miền không bị gạch chéo (kể cả đường thẳng d_1 và d_2) là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào?



A. $\begin{cases} x + y - 1 \geq 0 \\ 2x - y + 4 \leq 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x + y - 1 \geq 0 \\ 2x - y + 4 \geq 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x + y - 1 \leq 0 \\ 2x - y + 4 \geq 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x + y - 1 \leq 0 \\ 2x - y + 4 \leq 0 \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

Nhận xét: Điểm O nằm trong miền nghiệm của hệ, ta có $\begin{cases} 0 + 0 - 1 \leq 0 \\ 2 \cdot 0 - 0 + 4 \geq 0 \end{cases}$ nên hệ cần tìm là

$$\begin{cases} x + y - 1 \leq 0 \\ 2x - y + 4 \geq 0 \end{cases}$$

Câu 19. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x - 4y + 12 \geq 0 \\ x + y - 5 \geq 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$ là miền chứa điểm nào trong các điểm

sau?

A. $M(1; -3)$.

B. $N(4; 3)$.

C. $P(-1; 5)$.

D. $Q(-2; -3)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases} 3x - 4y + 12 \geq 0 \\ x + y - 5 \geq 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$, kiểm tra đáp án thấy $N(4; 3)$ thỏa mãn.

Câu 20. Điểm nào sau đây thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + y - 6 < 0 \\ x - 3y + 5 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$

- A. $M(0;7)$. B. $N(1;1)$. C. $P(2;3)$. D. $Q(-1;2)$.

Lời giải

Chọn B

Thay điểm $N(1;1)$ vào hệ $\begin{cases} 2x + y - 6 < 0 \\ x - 3y + 5 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$ ta được $\begin{cases} -3 < 0 \\ 3 > 0 \\ 2 > 0 \end{cases}$ đúng.

Câu 21. Điểm nào trong các điểm sau thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x - 4y + 12 \geq 0 \\ x + y - 5 \geq 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$?

- A. $Q(-2;-3)$. B. $M(1;-3)$. C. $N(4;3)$. D. $P(-1;5)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có tọa độ điểm $N(4;3)$ thay $x=4; y=3$ vào hệ bất phương trình đã cho thỏa mãn nên điểm $N(4;3)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình.

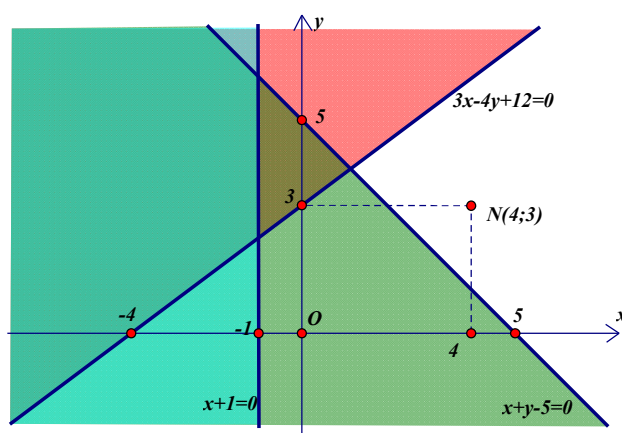
Câu 22. Miền nghiệm của hệ bất phương trình: $\begin{cases} 3x - 4y + 12 \geq 0 \\ x + y - 5 \geq 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$ là miền chứa điểm nào trong các điểm sau?

- A. $M(1;-3)$. B. $N(4;3)$. C. $P(-1;5)$. D. $Q(-2;-3)$.

Lời giải

Chọn B

Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình như hình vẽ:



Suy ra miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền chứa điểm $N(4;3)$.

Nhận xét: Theo hướng trắc nghiệm ta thay tọa độ từng điểm vào hệ, nếu tọa độ điểm nào thỏa mãn cả 3 bất phương trình thì chọn=> Chọn B

Câu 23. Điểm $O(0;0)$ không thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình nào dưới đây?

- A. $\begin{cases} x+3y-6 < 0 \\ 2x+y+4 > 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x+3y \geq 0 \\ 2x+y-4 < 0 \end{cases}$
- C. $\begin{cases} x+3y < 0 \\ 2x+y+4 > 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x+3y-6 < 0 \\ 2x+y+4 \geq 0 \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

Với điểm $O(0;0)$, lần lượt thay $x=0$, $y=0$ vào từng hệ bất phương trình đã cho, ta được:

Phương án A: $\begin{cases} -6 < 0 \\ 4 > 0 \end{cases}$ (thỏa mãn).

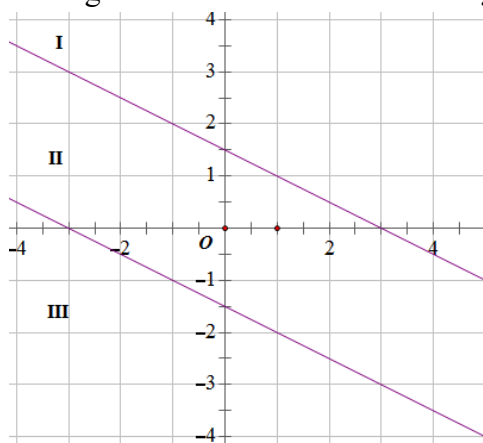
Phương án B: $\begin{cases} 0 \geq 0 \\ -4 < 0 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Phương án C: $\begin{cases} 0 < 0 \\ 4 > 0 \end{cases}$ (Không thỏa mãn vì $0 < 0$ là sai).

Phương án D: $\begin{cases} -6 < 0 \\ 4 \geq 0 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Do đó chọn

Câu 24. Hai đường thẳng $d: x+2y+3=0$ và $d': x+2y-3=0$ chia mặt phẳng tọa độ thành 3 miền I, II, III có bờ là 2 đường thẳng d và d' không kể các điểm nằm trên 2 đường thẳng đó:



Xác định miền nghiệm của bất phương trình $|x+2y| < 3$.

- A. Miền I và III. B. Miền II. C. Miền I. D. Miền III.

Lời giải

Chọn B

Xét bất phương trình: $|x + 2y| < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y < 3 & (1) \\ x + 2y > -3 & (2) \end{cases}$

Xác định miền nghiệm của BPT (1): $x + 2y < 3$

□ Lấy $O(0;0) \notin (d')$. Thay tọa độ điểm O và BPT (1) ta thấy: $0 + 2.0 < 3$, đúng

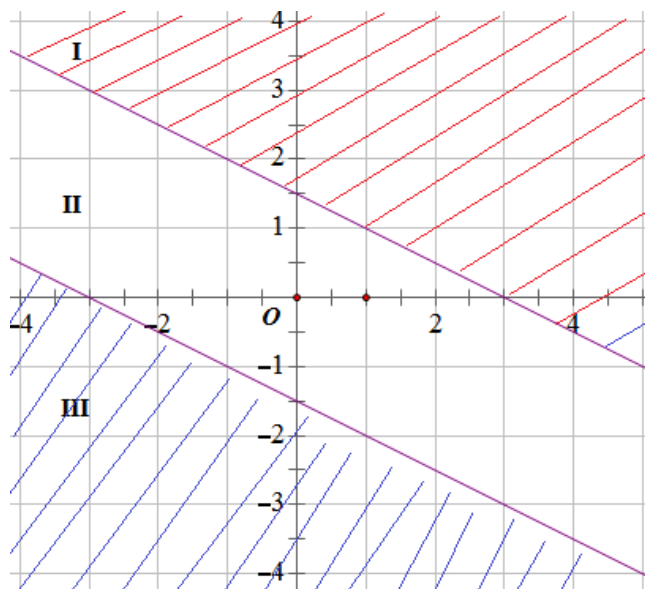
Suy ra: Điểm $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của BPT (1)

Xác định miền nghiệm của BPT (2): $x + 2y > -3$

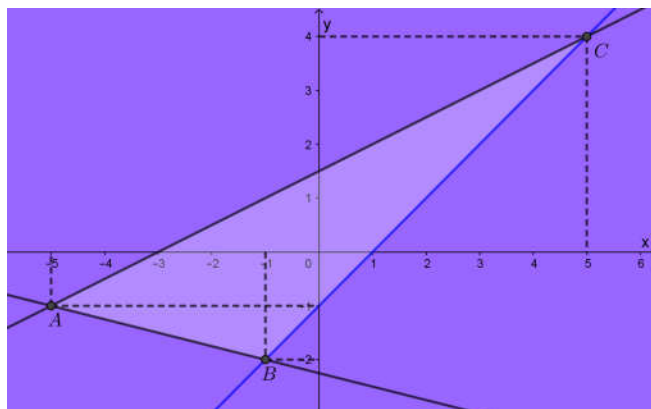
□ Lấy $O(0;0) \notin (d)$. Thay tọa độ điểm O và BPT (2) ta thấy: $0 + 2.0 > -3$, đúng

Suy ra: Điểm $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của BPT (2)

Vậy miền nghiệm của BPT đã cho là phần không gạch chéo trên hình (Miền II).



Câu 25. Gọi (S) là tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy thỏa mãn hệ $\begin{cases} x - y - 1 \leq 0 \\ x + 4y + 9 \geq 0 \\ x - 2y + 3 \geq 0 \end{cases}$ (hình vẽ).



Tìm tọa độ $(x; y)$ trong miền (S) sao cho biểu thức $T = 3x - 2y - 4$ có giá trị nhỏ nhất.

- A. $(5; 4)$. B. $(-1; -2)$. C. $(-5; -1)$. D. $(-2; 5)$.

Lời giải

Chọn C

Thay tọa độ điểm $A(-5; -1)$ vào biểu thức T ta được $T = -15 + 2 - 4 = -17$.

Thay tọa độ điểm $B(-1; -2)$ vào biểu thức T ta được $T = -3 + 4 - 4 = -3$.

Thay tọa độ điểm $C(5; 4)$ vào biểu thức T ta được $T = 15 - 8 - 4 = 3$.

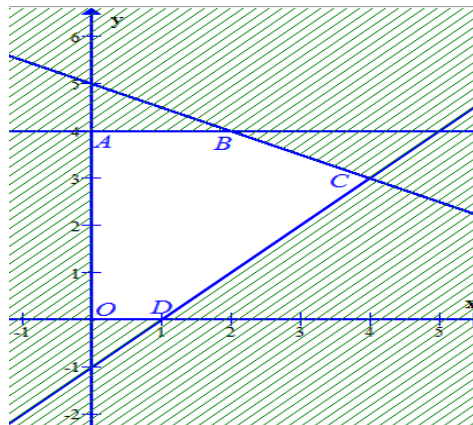
Vậy chọn phương án C.

- Câu 26.** Giá trị lớn nhất của biểu thức $F(x; y) = x + 2y$, với điều kiện $\begin{cases} 0 \leq y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ x - y - 1 \leq 0 \\ x + 2y - 10 \leq 0 \end{cases}$ là
- A. 6. B. 12. C. 10. D. 8.

Lời giải

Chọn C

Xét các điểm $M(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} 0 \leq y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ x - y - 1 \leq 0 \\ x + 2y - 10 \leq 0 \end{cases}$



Khi đó $M(x; y)$ thuộc miền ngũ giác $ABCD O$.

Trong đó $A(0;4); B(2;4); C(4;3); D(1;0); O(0;0)$

Biểu thức $F(x; y) = x + 2y$ đạt được giá trị lớn nhất tại một trong các đỉnh của ngũ giác đó.

Thay tọa độ của các đỉnh vào biểu thức $F(x; y) = x + 2y$ ta có:

$$F(0;4) = 8$$

$$F(2;4) = 10$$

$$F(4;3) = 10$$

$$F(1;0) = 1$$

$$F(0;0) = 0$$

Vậy biểu thức $F(x; y) = x + 2y$ đạt được giá trị lớn nhất bằng 10, tại điểm B hoặc C .

Câu 27. Cho các giá trị x, y thỏa mãn điều kiện
$$\begin{cases} x - y + 2 \geq 0 \\ 2x - y - 1 \leq 0 \\ 3x - y - 2 \geq 0 \end{cases}$$
 . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = 3x + 2y.$$

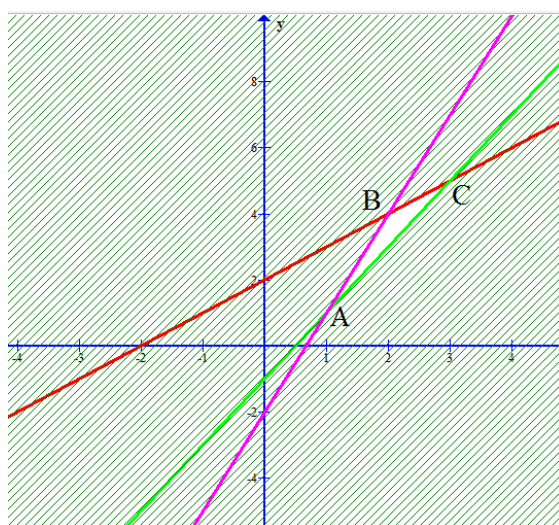
A. 19.

B. 25.

C. 14.

D. Không tồn tại.

Lời giải



Chọn B

Miền nghiệm của hệ đã cho là miền trong tam giác ABC (Kể cả đường biên) trong đó $A(1;1)$, $B(2;4)$, $C(3;5)$.

Giá trị lớn nhất của $T = 3x + 2y$ đạt được tại các đỉnh của tam giác ABC .

Do $T_A = T(1;1) = 3.1 + 2.1 = 5$, $T_B = T(2;4) = 3.2 + 2.4 = 14$ và $T_C = T(3;5) = 3.3 + 2.5 = 25$ nên giá trị lớn nhất của $T = 3x + 2y$ là 25 đạt được khi $x = 3$ và $y = 5$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1. Cho bất phương trình: $2x - y < 0$. Trong các cặp số $(-1;2)$, $(2;0)$, $(0;1)$, $(3;-2)$, $(-1;-2)$, cặp nào là nghiệm của bất phương trình, cặp nào không phải là nghiệm của bất phương trình?

Lời giải

Bằng cách thử trực tiếp, các cặp $(-1;2)$, $(0;1)$ là nghiệm, các cặp còn lại không phải là nghiệm của bất phương trình.

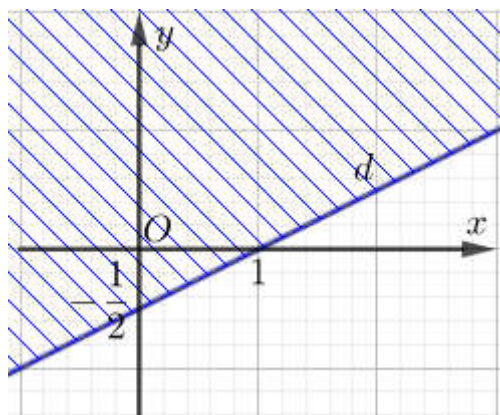
Câu 2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình $x - 2y > 1$?

Lời giải

+ Đường thẳng $d : x - 2y = 1$ đi qua hai điểm $A(1;0)$ và $B(0;-\frac{1}{2})$.

+ $x = y = 0$ không phải là nghiệm của bất phương trình.

+ Miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng $d : x - 2y = 1$, không chứa gốc tọa độ O , không bao gồm đường thẳng d (là miền không gạch chéo trên hình vẽ)



Câu 3. Xác định miền nghiệm của các bất phương trình sau

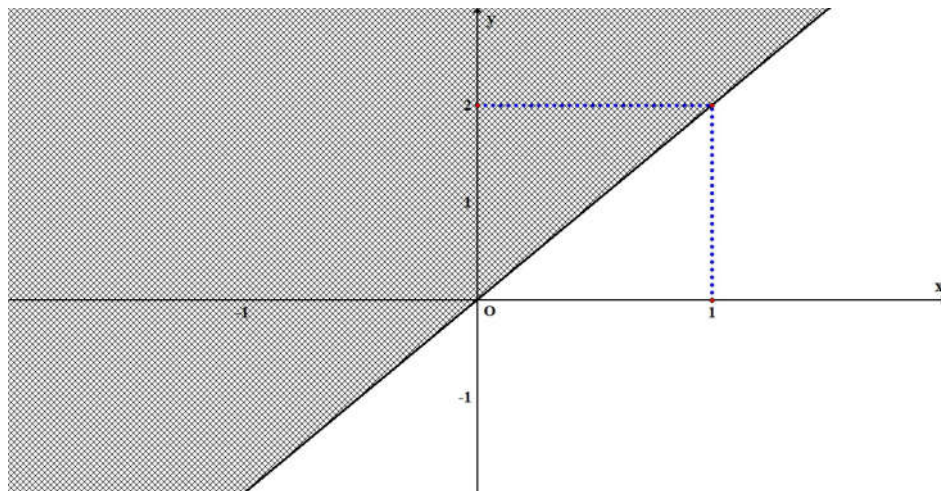
a) $2x - y \geq 0$.

b) $\frac{x-2y}{2} > \frac{2x+y+1}{3}$.

Lời giải.

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ đường thẳng $d: 2x - y = 0$. Ta có d chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Chọn một điểm bất kì không thuộc đường thẳng đó, chẳng hạn điểm $M(1;0)$.

Ta thấy $(1;0)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho. Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng chứa bờ d và chứa điểm $M(1;0)$ (miền không được tô màu trên hình vẽ).



b) Ta có

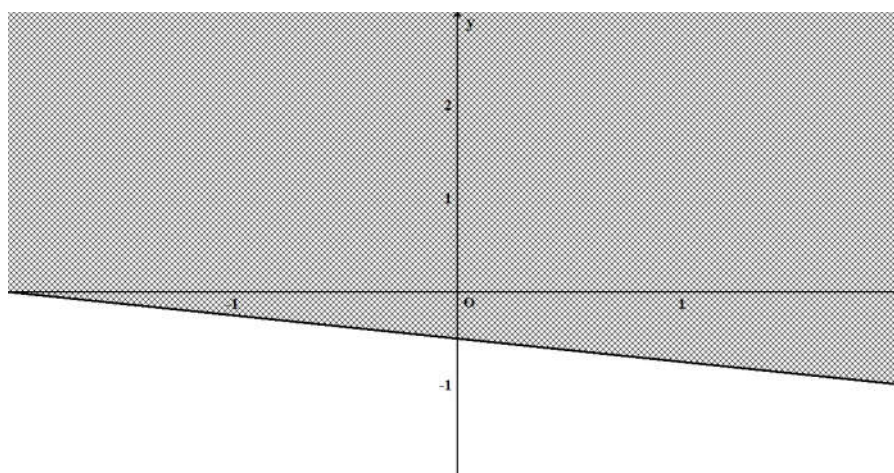
$$\frac{x-2y}{2} > \frac{2x+y+1}{3} \Leftrightarrow 3(x-2y) - 2(2x+y+1) > 0 \Leftrightarrow -x-4y-2 > 0 \Leftrightarrow x+4y+2 < 0.$$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ đường thẳng $\Delta: x+4y+2=0$.

Ta có Δ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Chọn một điểm bất kì không thuộc đường thẳng đó, chẳng hạn điểm $O(0;0)$.

Ta thấy $(0;0)$ không phải là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ Δ (Không kể đường thẳng Δ) và không chứa điểm $O(0;0)$ (miền không được tô màu trên hình vẽ).



Câu 4. Tìm các nghiệm $(x; y)$ của bất phương trình $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} \leq 1$, trong đó x, y là số nguyên dương.

Lời giải

Cách 1: Do $x > 0$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} \leq 1$ nên ta có $\frac{y}{4} < 1 \Leftrightarrow y < 4$.

Do y nguyên dương nên $y \in \{1; 2; 3\}$.

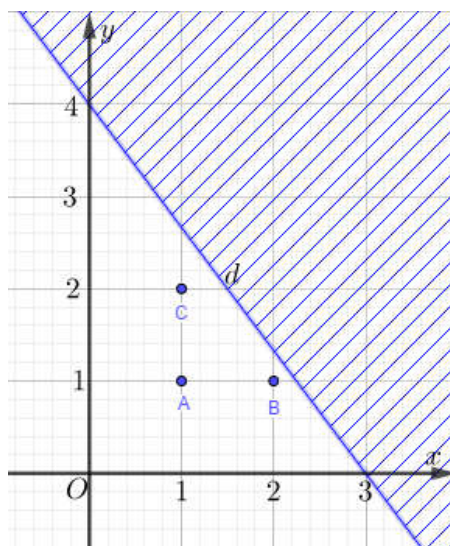
+ Với $y = 1$, ta có $0 < \frac{x}{3} \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow x \in \{1; 2\}$.

+ Với $y = 2$, ta có $0 < \frac{x}{3} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 1$.

+ Với $y = 3$, ta có $0 < \frac{x}{3} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

Vậy bất phương trình có các nghiệm nguyên dương là $(1; 1)$, $(2; 1)$ và $(1; 2)$.

Cách 2: Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình lên hệ trục tọa độ (là miền không gạch chéo trên hình vẽ):



Từ biểu diễn hình học, ta thấy các điểm nguyên dương trong miền nghiệm của bất phương trình là

$A(1; 1)$, $B(2; 1)$ và $C(1; 2)$

Câu 5. Tìm giá trị của tham số m sao cho $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ là nghiệm của bất phương trình $mx + (m-1)y > 2$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ là nghiệm của bất phương trình $mx + (m-1)y > 2$ khi và chỉ khi

$$-m + 2(m-1) > 2 \Leftrightarrow m > 4$$

Câu 6. Cho tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(-3;-1)$ và $C(3;-4)$. Tìm điều kiện của tham số m để điểm $M\left(m; \frac{m-5}{3}\right)$ nằm bên trong tam giác ABC ?

Lời giải

Cách 1:

$$\text{Đường thẳng } AB: \frac{x-1}{-3-1} = \frac{y-2}{-1-2} \Leftrightarrow 3x-4y+5=0.$$

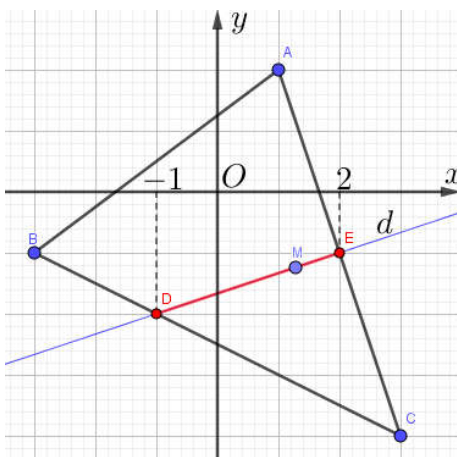
$$\text{Đường thẳng } BC: \frac{x+3}{3+3} = \frac{y+1}{-4+1} \Leftrightarrow x+2y+5=0.$$

$$\text{Đường thẳng } AC: \frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{-4-2} \Leftrightarrow 3x+y-5=0.$$

Điều kiện cần và đủ để điểm M nằm bên trong tam giác ABC là điểm M cùng với mỗi đỉnh A, B, C lần lượt cùng phía với nhau đối với cạnh BC, CA, AB

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1+4+5)\left(m+2\frac{m-5}{3}+5\right) > 0 \\ (-9-1-5)\left(3m+\frac{m-5}{3}-5\right) > 0 \\ (9+16+5)\left(3m-4\frac{m-5}{3}+5\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m < 2 \\ m > -7 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 2$$

Cách 2:



$$\text{Do } M\left(m; \frac{m-5}{3}\right) \text{ nên } M \in d: y = \frac{x-5}{3}.$$

Ta thấy, đường thẳng d cắt cạnh AC, BC của tam giác ABC lần lượt tại D và E .

Dựa vào đồ thị, ta thấy hoành độ D là $x_D = -1$, hoành độ điểm E là $x_E = 2$.

Điểm M nằm bên trong tam giác ABC khi và chỉ khi điểm M nằm trên đoạn thẳng DE (trừ hai điểm D, E) khi và chỉ khi $-1 < m < 2$.

Câu 7. Xác định miền nghiệm của các hệ bất phương trình sau

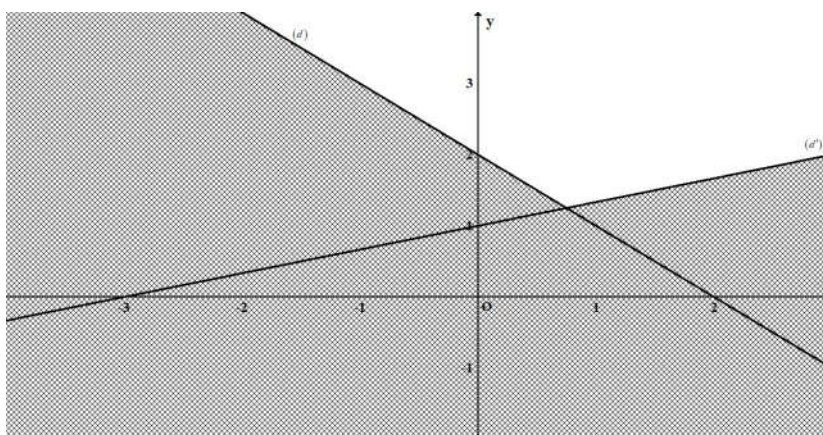
a)
$$\begin{cases} x + y - 2 \geq 0 \\ x - 3y + 3 \leq 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + y > 0 \\ -2x - 3y + 6 > 0 \\ x - 2y + 1 \geq 0 \end{cases}$$

Lời giải.

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ các đường thẳng $d: x + y - 2 = 0$ và $d': x - 3y + 3 = 0$.

Xét điểm $O(0;0)$, ta thấy $(0;0)$ không phải là nghiệm của bất phương trình $x + y - 2 \geq 0$ và $x - 3y + 3 \leq 0$ do đó miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô màu trên hình vẽ cả hai đường thẳng d và d' .

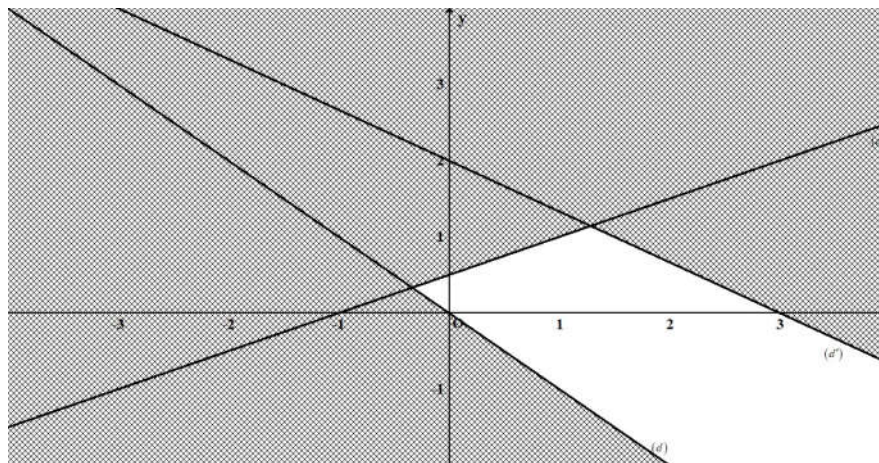


b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ các đường thẳng $d: x + y = 0$, $d': -2x - 3y + 6 = 0$ và $d'': x - 2y + 1 = 0$.

Xét điểm $O(0;0)$, ta thấy $(0;0)$ là nghiệm của bất phương trình $-2x - 3y + 6 > 0$ và $x - 2y + 1 \geq 0$. Do đó $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình $-2x - 3y + 6 > 0$ và $x - 2y + 1 \geq 0$.

Xét điểm $M(1;0)$, ta thấy $(1;0)$ là nghiệm của bất phương trình $x + y > 0$ do đó điểm $M(1;0)$ thuộc miền nghiệm bất phương trình $x + y > 0$.

Vậy miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô màu trên hình vẽ kể cả đường thẳng d'' .

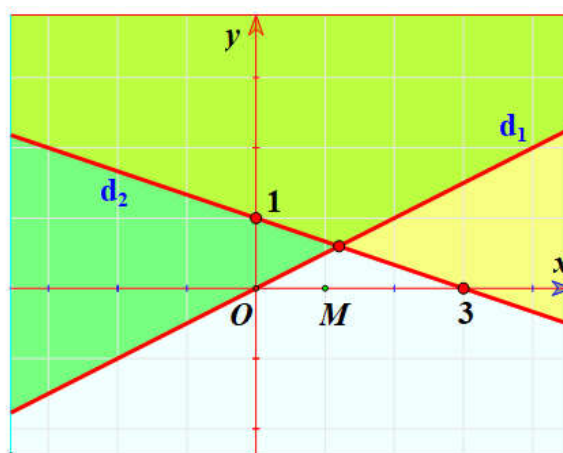


Câu 8. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x - 2y > 0 \\ x + 3y < 3 \end{cases}$$

Lời giải

- Vẽ các đường thẳng $d_1: x - 2y = 0$; $d_2: x + 3y = 3$.

- Điểm $M(1;0)$ có tọa độ thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ $d_1; d_2$ không chứa điểm M . Miền không bị tô đậm (miền chứa điểm M), không tính các bờ $d_1; d_2$ (hình vẽ) là miền nghiệm của hệ đã cho.

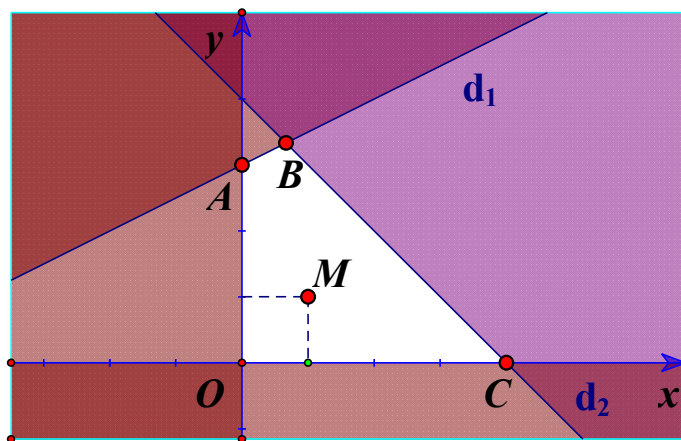


Câu 9. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} -x + 2y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Lời giải

- Vẽ các đường thẳng $d_1: -x + 2y = 6$; $d_2: x + y = 4$; trục $Oy: x = 0$; trục $Ox: y = 0$.

- Điểm $M(1;1)$ có tọa độ thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ $d_1; d_2; Ox; Oy$ không chứa điểm M . Miền không bị tô đậm là hình tứ giác $OABC$ kể cả bốn cạnh OA, AB, BC, CO trong hình vẽ dưới là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

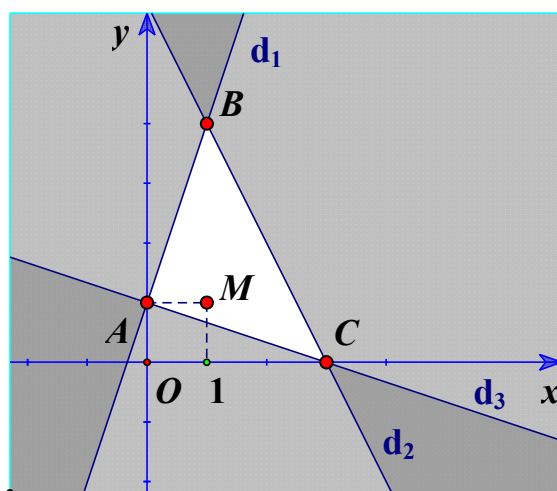


Câu 10. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 3x - y \geq -1 \\ 2x + y \leq 6 \\ x + 3y > 3 \end{cases}$$

Lời giải

- Vẽ các đường thẳng $d_1: 3x - y = -1$; $d_2: 2x + y = 6$; $d_3: x + 3y = 3$

- Điểm $M(1;1)$ có tọa độ thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ $d_1; d_2; d_3$ không chứa điểm M . Miền không bị tô đậm là hình tam giác ABC không tính cạnh AC trong hình vẽ dưới là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.



Câu 11. Cho cặp $(x; y)$ là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} 3x - y \geq -1 \\ 2x + y \leq 6 \\ x + 3y \geq 3 \end{cases} \quad (*)$$
. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu

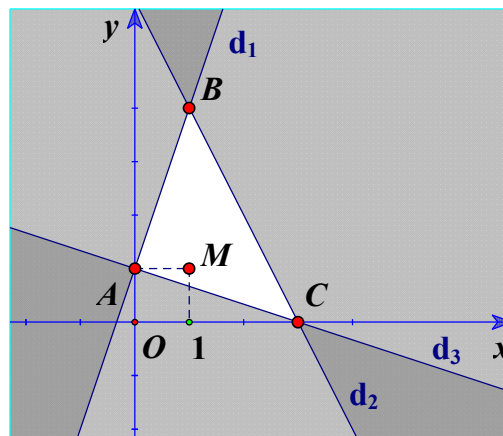
thức $f(x; y) = 2x - 3y + 1$.

Lời giải

* Trước hết ta biểu diễn miền nghiệm của hệ (*):

+ Vẽ các đường thẳng $d_1: 3x - y = -1$; $d_2: 2x + y = 6$; $d_3: x + 3y = 3$

+ Điểm $M(1;1)$ có tọa độ thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ $d_1; d_2; d_3$ không chứa điểm M . Miền không bị tô đậm là hình tam giác ABC , tính cả ba cạnh AB, BC, CA trong hình vẽ dưới là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.



* Tìm tọa độ các điểm A, B, C :

+ $A = d_1 \cap d_3$ nên tọa độ của nó là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x - y = -1 \\ x + 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$. Vậy $A(0;1)$.

+ $B = d_1 \cap d_2$ nên tọa độ của nó là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x - y = -1 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$. Vậy $B(1;4)$.

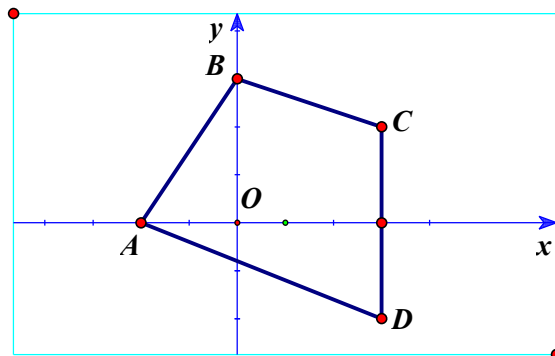
+ $C = d_2 \cap d_3$ nên tọa độ của nó là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x + 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$. Vậy $C(3;0)$.

* Tính giá trị của $f(x; y) = 2x - 3y + 1$ tại tất cả các đỉnh của tam giác ABC :

$(x; y)$	$A(0;1)$	$B(1;4)$	$C(3;0)$
$f(x; y) = 2x - 3y + 1$	-2	-9	7

Suy ra $\min f(x; y) = f(1;4) = -9$ và $\max f(x; y) = f(3;0) = 7$.

Câu 12. Trong mặt phẳng Oxy , cho tứ giác $ABCD$ có $A(-2;0)$; $B(0;3)$; $C(3;2)$ và $D(3;-2)$ (tham khảo hình vẽ). Tìm tất cả các giá trị của m sao cho điểm $M(m; m+1)$ nằm trên hình tứ giác $ABCD$ tính cả bốn cạnh AB, BC, CD, DA .



Lời giải

* Nhận thấy hình tứ giác $ABCD$ tính cả 4 cạnh của nó là miền nghiệm của hệ bất phương trình gồm 4 bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng chứa điểm $O(0;0)$ và lần lượt có các bờ là các đường AB, BC, CD và DA .

- Phương trình đường thẳng AB : $-3x + 2y = 6$. Bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ AB (tính cả bờ AB) và chứa điểm O là $-3x + 2y \leq 6$.

- Phương trình đường thẳng BC : $x + 3y = 9$. Bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ BC (tính cả bờ BC) và chứa điểm O là $x + 3y \leq 9$.

- Phương trình đường thẳng CD : $x = 3$. Bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ CD (tính cả bờ CD) và chứa điểm O là $x \leq 3$.

- Phương trình đường thẳng DA : $2x + 5y = -4$. Bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ DA (tính cả bờ DA) và chứa điểm O là $2x + 5y \geq -4$.

Như vậy hình tứ giác $ABCD$ tính cả 4 cạnh của nó là miền nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} -3x + 2y \leq 6 \\ x + 3y \leq 9 \\ x \leq 3 \\ 2x + 5y \geq -4 \end{cases} \quad (*)$$

* Điểm $M(m; m+1)$ nằm trên hình tứ giác $ABCD$ tính cả bốn cạnh của nó khi và chỉ khi $(m; m+1)$ là

$$\text{một nghiệm của hệ } (*), \text{ tức là } \begin{cases} -3m + 2(m+1) \leq 6 \\ m + 3(m+1) \leq 9 \\ m \leq 3 \\ 2m + 5(m+1) \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -4 \\ m \leq \frac{3}{2} \\ m \leq 3 \\ m \geq -\frac{9}{7} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{9}{7} \leq m \leq \frac{3}{2}.$$

Vậy các giá trị m cần tìm là $-\frac{9}{7} \leq m \leq \frac{3}{2}$.

Câu 13. Một hộ nông dân dự định trồng đậu và cà trên diện tích 8 ha. Nếu trồng đậu thì cần 20 công và thu 3 triệu đồng trên diện tích mỗi ha, nếu trồng cà thì cần 30 công và thu 4 triệu đồng trên diện

tích mỗi ha. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên với diện tích là bao nhiêu để thu về được nhiều tiền nhất, biết rằng tổng số công không quá 180.

Lời giải

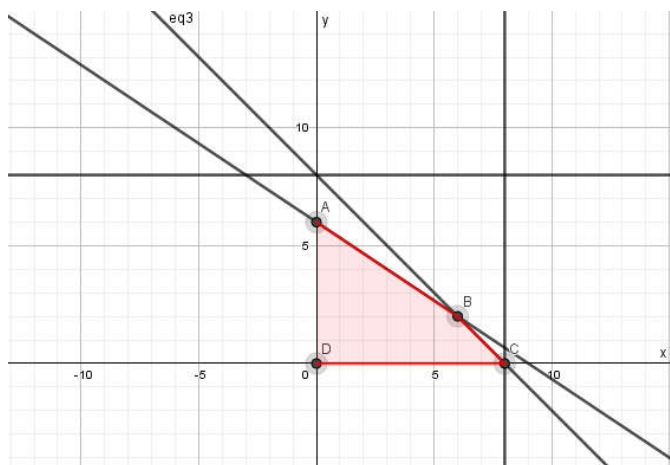
Gọi diện tích để trồng đậu là : x (ha); diện tích để trồng cà là: y (ha). (Đk: $0 \leq x, y \leq 8$)

Tổng số diện tích sử dụng là: $x + y$.

Tổng số công cần sử dụng là: $20x + 30y$

Ta có hệ bất phương trình :
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq 8 \\ x + y \leq 8 \\ 20x + 30y \leq 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq 8 \\ x + y \leq 8 \\ 2x + 3y \leq 18 \end{cases}$$

Vẽ các đường thẳng $(d_1): x + y = 8$, $(d_2): 2x + 3y = 18$, $(d_3): x = 8$, $(d_4): y = 8$ ta được miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần tô đậm như hình vẽ



$$A(0;6) = (d_2) \cap Oy, B(6;2) = (d_1) \cap (d_2) \\ C(8;0) = (d_1) \cap Ox, D \equiv O(0;0)$$

Số tiền thu về là: $f(x; y) = 3x + 4y$ (triệu đồng)

$M(x; y)$	A	B	C	D
$f(x, y) = 3x + 4y$	24	26	24	0

Do đó $f(x; y)$ đạt giá trị lớn nhất tại $B(6;2)$.

Vậy để thu được nhiều tiền nhất thì cần trồng 6 ha đậu và 2 ha cà.

Câu 14. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kg thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipid. Mỗi kg thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid. Biết rằng mỗi ngày gia đình này chỉ mua tối đa 1.5kg thịt bò và 1kg thịt lợn, giá tiền 1kg thịt bò là 200 nghìn đồng, 1kg thịt lợn là 100 nghìn đồng. Hỏi gia đình đó phải mua bao nhiêu kg thịt mỗi loại để số tiền bỏ ra là ít nhất.

Lời giải

Gọi số kg thịt bò cần mua là : x (kg); số kg thịt lợn cần mua là : y (kg). Đk:

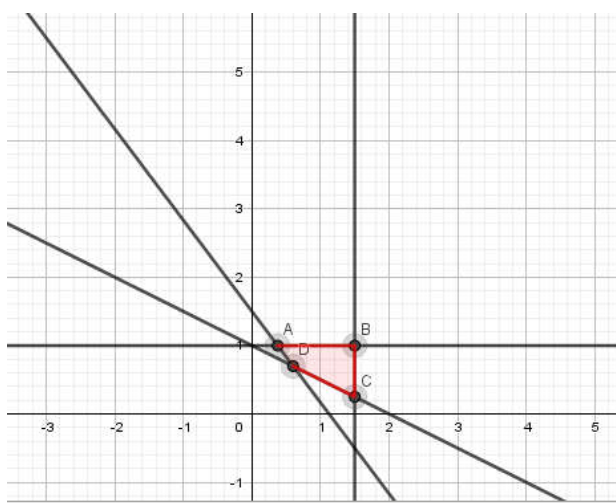
$$0 \leq x \leq 1,5, 0 \leq y \leq 1.$$

Khi đó số đơn vị protein là : $800x + 600y$.

Số đơn vị lipit là : $200x + 400y$.

$$\text{Ta có hệ bất phương trình: } \begin{cases} 0 \leq x \leq 1,5 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 800x + 600y \geq 900 \\ 200x + 400y \geq 200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1,5 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 8x + 6y \geq 9 \\ x + 2y \geq 2 \end{cases}$$

Vẽ các đường thẳng: $(d_1): x = 1,5$, $(d_2): y = 1$, $(d_3): 8x + 6y = 9$, $(d_4): x + 2y = 2$. Ta được miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần tô đậm trong hình vẽ.



$$A\left(\frac{3}{8}; 1\right) = (d_3) \cap (d_2),$$

$$B(1,5;1) = (d_1) \cap (d_2), C(1,5;0,25) = (d_1) \cap (d_4) \quad D\left(\frac{3}{5}; \frac{7}{10}\right) = (d_3) \cap (d_4).$$

Số tiền bỏ ra là : $f(x; y) = 200x + 100y$ (nghìn đồng).

$M(x; y)$	A	B	C	D
$f(x; y) = 200x + 100y$	175	400	325	190

Do đó $f(x; y)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $A\left(\frac{3}{8}; 1\right)$.

Vậy để số tiền bỏ ra nhỏ nhất thì cần mua $\frac{3}{8}$ kg và 1kg thịt lợn.

Câu 15. Người ta định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 120 kg hóa chất A và 9 kg hóa

chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 4 triệu đồng có thể chiết xuất được 20 kg chất A và 0,6 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 3 triệu đồng có thể chiết xuất được 10 kg chất A và 1,5 kg chất B. Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất. Biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 10 tấn nguyên liệu loại I và không quá 9 tấn nguyên liệu loại II.

Lời giải

Gọi số tấn nguyên liệu loại I cần sử dụng là x (tấn) ; số tấn nguyên liệu loại II cần sử dụng là y (tấn).

Đk: $0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 9$.

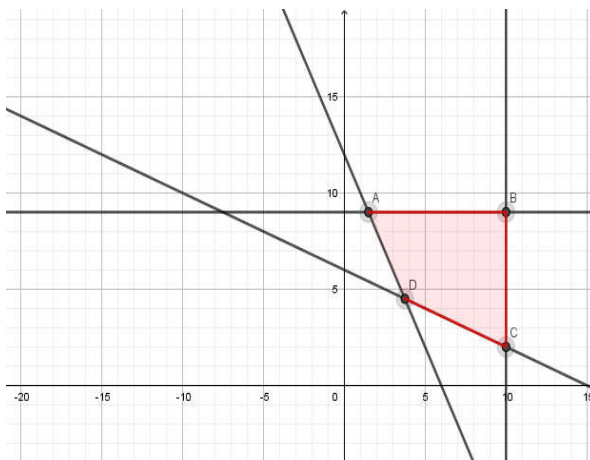
Khi đó số kg chất A thu được là: $20x + 10y$

Số kg chất B thu được là: $0,6x + 1,5y$.

$$\text{Ta có hệ bất phương trình: } \begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 20x + 10y \geq 120 \\ 0,6x + 1,5y \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 2x + y \geq 12 \\ 2x + 5y \geq 30 \end{cases}.$$

Vẽ các đường thẳng $(d_1): x = 10, (d_2): y = 9, (d_3): 2x + y = 12, (d_4): 2x + 5y = 30$

Ta có miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần tô màu như hình vẽ :



$$(d_2) \cap (d_3) = A\left(\frac{3}{2}; 9\right), (d_2) \cap (d_1) = B(10; 9).$$

$$(d_1) \cap (d_4) = C(10; 2), (d_4) \cap (d_3) = D\left(\frac{15}{4}; \frac{9}{2}\right)$$

Chi phí mua nguyên liệu cần bỏ ra là : $f(x; y) = 4x + 3y$ (triệu đồng).

$M(x; y)$	A	B	C	D
-----------	---	---	---	---

$f(x, y) = 4x + 3y$	33	67	46	28,5
---------------------	----	----	----	------

Do đó $f(x, y)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $D\left(\frac{15}{4}; \frac{9}{2}\right)$.

Vậy để chi phí nguyên liệu là ít nhất ta cần sử dụng $\frac{15}{4} = 3,75$ tấn nguyên liệu loại I và $\frac{9}{2} = 4,5$ tấn nguyên liệu loại II.

Câu 16. Có ba nhóm máy A, B, C dùng để sản xuất ra hai loại sản phẩm I và II. Để sản xuất một đơn vị sản phẩm mỗi loại phải lần lượt dùng các máy thuộc các nhóm khác nhau. Số máy trong một nhóm và số máy của từng nhóm cần thiết để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm thuộc mỗi loại được cho trong bảng sau:

Nhóm	Số máy trong mỗi nhóm	Số máy trong từng nhóm để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm	
		Loại I	Loại II
A	10	2	2
B	4	0	2
C	12	2	4

Một đơn vị sản phẩm I lãi ba nghìn đồng, một đơn vị sản phẩm loại II lãi năm nghìn đồng. Hãy lập phương án để việc sản xuất hai loại sản phẩm trên có lãi cao nhất.

Lời giải

Gọi số sản phẩm loại I cần sản xuất là x ; số sản phẩm loại II cần sản xuất là y . Đk: $x, y \geq 0$.

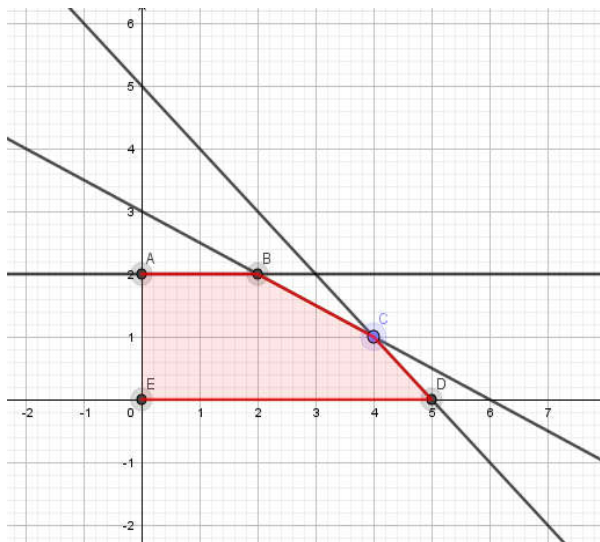
Số máy nhóm A cần sử dụng là: $2x + 2y$.

Số máy nhóm B cần sử dụng là: $2y$.

Số máy nhóm C cần sử dụng là: $2x + 4y$.

Ta có hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 2y \leq 10 \\ 2y \leq 4 \\ x + 2y \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 2 \\ x + y \leq 5 \\ x + 2y \leq 6 \end{cases}.$$

Vẽ các đường thẳng $(d_1): y = 2$, $(d_2): x + y = 5$, $(d_3): x + 2y = 6$. Ta có miền nghiệm của bất phương trình là phần tô màu như hình vẽ:



$$(d_1) \cap Oy = A(0;2), (d_1) \cap (d_3) = B(2;2), (d_2) \cap (d_3) = C(4;1)$$

$$(d_2) \cap Ox = D(5;0), E \equiv O = (0;0)$$

Lãi suất thu được là : $f(x; y) = 3x + 5y$ (nghìn đồng).

$M(x; y)$	A	B	C	D	E
$f(x, y) = 4x + 3y$	10	16	17	15	0

Do đó $f(x; y)$ đạt giá trị lớn nhất tại $C(4;1)$.

Vậy phương án sản xuất 4 sản phẩm loại I và 1 sản phẩm loại II sẽ cho lãi cao nhất.

CHƯƠNG
III

HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: hàm số và đồ thị, hàm số bậc hai và ứng dụng, dấu của tam thức bậc hai, bất phương trình bậc hai một ẩn, cách giải hai dạng phương trình vô tỉ.

§1 HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

Galileo Galilei (1564 – 1642), sinh tại thành phố Pisa (Italia), là nhà bác học vĩ đại của thời kì Phục Hưng. Ông được mệnh danh là “cha đẻ của khoa học hiện đại”. Trước Galileo, người ta tin rằng vật nặng rơi nhanh hơn vật nhẹ, ông đã bác bỏ điều này bằng thí nghiệm nổi tiếng ở tháp nghiêng Pisa. Từ thí nghiệm của Galileo, các nhà khoa học sau này được truyền cảm hứng rằng chúng ta chỉ có thể rút ra tri thức khoa học từ các quy luật khách quan của tự nhiên, chứ không phải từ niềm tin.



Tháp nghiêng Pisa (Italia)
(Nguồn: <https://pinterest.com>)

Làm thế nào để mô tả được mối liên hệ giữa thời gian t và quãng đường đi được S của vật rơi tự do? Làm thế nào để có được hình ảnh hình học minh họa mối liên hệ giữa hai đại lượng đó?



I. HÀM SỐ

1. Định nghĩa



Trong bài toán ở phần mở đầu, ta đã biết công thức tính quãng đường đi được S (m) của vật rơi tự do theo thời gian t (s) là: $S = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó g là gia tốc rơi tự do, $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$.

- Với mỗi giá trị $t = 1, t = 2$, tính giá trị tương ứng của S .
- Với mỗi giá trị của t có bao nhiêu giá trị tương ứng của S ?



Để xây dựng phương án kinh doanh cho một loại sản phẩm, doanh nghiệp tính toán lợi nhuận y (đồng) theo công thức sau: $y = -200x^2 + 92\,000x - 8\,400\,000$, trong đó x là số sản phẩm loại đó được bán ra.

- a) Với mỗi giá trị $x = 100, x = 200$, tính giá trị tương ứng của y .
 b) Với mỗi giá trị của x có bao nhiêu giá trị tương ứng của y ?
 Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho tập hợp khác rỗng $D \subset \mathbb{R}$. Nếu với mỗi giá trị của x thuộc D có một và chỉ một giá trị tương ứng của y thuộc tập hợp số thực $\mathbb{R}$ thì ta có một *hàm số*.

Ta gọi x là *biến số* và y là *hàm số* của x .

Tập hợp D được gọi là *tập xác định* của hàm số.

Kí hiệu hàm số: $y = f(x), x \in D$.

Ví dụ 1

- a) Diện tích S của hình tròn bán kính r được tính theo công thức $S = \pi r^2$. Hỏi S có phải là hàm số của r hay không? Giải thích.
 b) Cho công thức $y^2 = x$. Hỏi y có phải là hàm số của x hay không? Giải thích.

Giải

- a) S là hàm số của r vì mỗi giá trị của r chỉ cho đúng một giá trị của S .
 b) y không phải là hàm số của x vì khi $x = 1$ thì ta tìm được hai giá trị tương ứng của y là 1 và -1 .

1 Trong y học, một người cân nặng 60 kg chạy với tốc độ 6,5 km/h thì lượng ca-lo tiêu thụ được tính theo công thức: $c = 4,7t$ (Nguồn: <https://irace.vn>), trong đó thời gian t được tính theo phút. Hỏi c có phải là hàm số của t không? Vì sao?

2. Cách cho hàm số

a) Hàm số cho bằng một công thức

Cùng với cách nói hàm số cho bằng công thức, ta cũng nói hàm số cho bằng biểu thức.

3 Cho hai hàm số $y = 2x + 1$ (1) và $y = \sqrt{x - 2}$ (2).

- a) Nêu biểu thức xác định mỗi hàm số trên.
 b) Tìm x sao cho mỗi biểu thức trên có nghĩa.

Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

Ví dụ 2 Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{x}$;

b) $y = \sqrt{x - 1}$.

2 Tìm tập xác định của hàm số:

$$y = \frac{\sqrt{x+2}}{x-3}$$

Giải

a) Biểu thức $\frac{1}{x}$ có nghĩa khi $x \neq 0$. Vì vậy, tập xác định của hàm số đã cho là:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

b) Biểu thức $\sqrt{x-1}$ có nghĩa khi $x-1 \geq 0$. Vì vậy, tập xác định của hàm số đã cho là:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} = [1; +\infty).$$

b) Hàm số cho bằng nhiều công thức

Một hàm số có thể được cho bằng nhiều công thức, chẳng hạn hàm số trong Ví dụ 3 sau:

Ví dụ 3 Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } x < 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ 1 & \text{nếu } x > 0. \end{cases}$$

a) Tìm tập xác định của hàm số trên.

b) Tính giá trị của hàm số khi $x = -2$; $x = 0$; $x = 2021$.

Giải

a) $f(x)$ có nghĩa khi $x < 0$, $x = 0$, $x > 0$ nên tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

b) $f(-2) = -1$; $f(0) = 0$; $f(2021) = 1$.

Chú ý: Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định là D . Khi biến số x thay đổi trong tập D thì tập hợp các giá trị y tương ứng được gọi là **tập giá trị** của hàm số đã cho.

Chẳng hạn, trong Ví dụ 3, ta có: Ứng với các giá trị của x thì $f(x)$ chỉ nhận một trong ba giá trị -1 ; 0 ; 1 nên tập giá trị của hàm số đó là tập hợp $\{-1; 0; 1\}$.

c) Hàm số không cho bằng công thức

Trong thực tiễn, có những tình huống dẫn tới những hàm số không thể cho bằng công thức (hoặc nhiều công thức). Chẳng hạn, trong ví dụ sau đây:

Ví dụ 4 Biểu đồ ở Hình 1 cho biết nhiệt độ trung bình ở Đà Lạt theo từng tháng trong năm.

a) Xác định tập hợp các tháng được nêu trong biểu đồ.

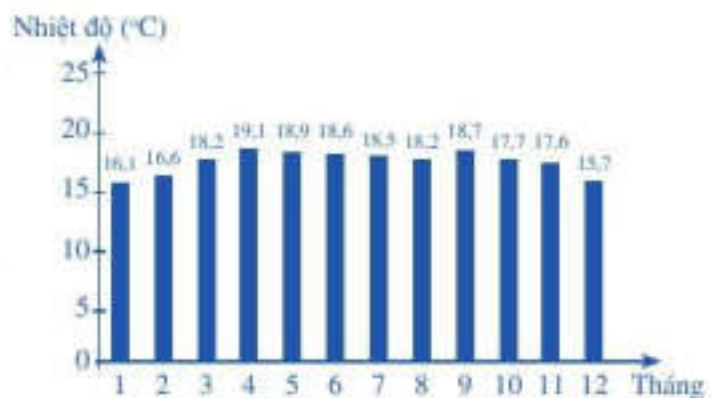
b) Tương ứng tháng với nhiệt độ trung bình của tháng đó có phải là hàm số không? Giải thích.

Giải

a) Tập hợp các tháng là

$$D = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}.$$

b) Mỗi tháng chỉ tương ứng với đúng một giá trị nhiệt độ trung bình nên tương ứng đó xác định một hàm số. Hàm số đó có thể được cho bằng bảng như sau:



(Nguồn: <http://vietnamtourism.com>)

Hình 1

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nhiệt độ (°C)	16,1	16,6	18,2	19,1	18,9	18,6	18,5	18,2	18,7	17,7	17,6	15,7

II. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ



4 Xét hàm số $y = f(x) = x^2$.

a) Tính các giá trị $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ tương ứng với giá trị $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

b) Biểu diễn trong mặt phẳng tọa độ Oxy các điểm $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$.

Cũng như vậy, với mỗi giá trị của biến số x , ta có thể xác định được điểm $M(x; y)$ với $y = f(x)$ trong mặt phẳng tọa độ. Khi biến số x thay đổi trên tập xác định, điểm $M(x; y)$ sẽ thay đổi theo trong mặt phẳng tọa độ Oxy và vạch nên một đường. Đường đó gọi là **đồ thị của hàm số** $y = f(x)$.

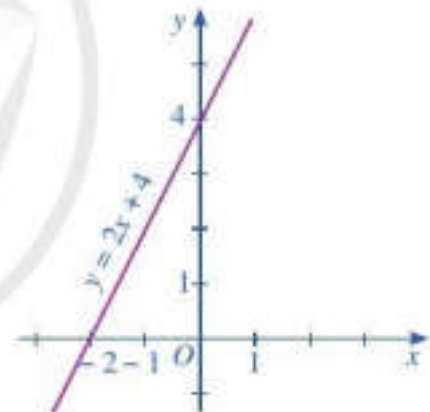


Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy với mọi x thuộc D .

Ví dụ 5 Cho hàm số $y = 2x + 4$.

a) Vẽ đồ thị hàm số trên.

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho bốn điểm: $A(-1; 2)$, $B(1; 6)$, $C(2\ 020; 2\ 021)$, $D(2\ 030; 4\ 064)$. Điểm nào thuộc đồ thị hàm số trên? Điểm nào không thuộc đồ thị hàm số trên?



Hình 2

Giải

a) Khi $x = 0$ thì $y = 4$; khi $y = 0$ thì $x = -2$. Vậy đồ thị hàm số $y = 2x + 4$ là đường thẳng cắt trục Oy tại điểm $(0; 4)$, cắt trục Ox tại điểm $(-2; 0)$ (Hình 2).

b) Khi $x = -1$ thì $y = 2$; khi $x = 1$ thì $y = 6$; khi $x = 2\ 020$ thì $y = 4\ 044$; khi $x = 2\ 030$ thì $y = 4\ 064$.

Vậy các điểm $A(-1; 2)$, $B(1; 6)$, $D(2\ 030; 4\ 064)$ thuộc đồ thị hàm số và điểm $C(2\ 020; 2\ 021)$ không thuộc đồ thị hàm số.

Nhận xét

• Điểm $M(a; b)$ trong mặt phẳng tọa độ thuộc đồ thị

hàm số $y = f(x)$, $x \in D$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a \in D \\ b = f(a). \end{cases}$



4 Cho hàm số $y = \frac{1}{x}$ và ba điểm $M(-1; -1)$, $N(0; 2)$, $P(2; 1)$. Điểm nào thuộc đồ thị hàm số trên? Điểm nào không thuộc đồ thị hàm số trên?

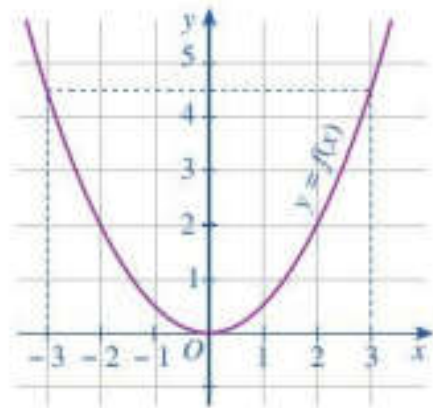
- Để chứng tỏ điểm $M(a; b)$ trong mặt phẳng tọa độ không thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$, $x \in D$, ta có thể kiểm tra một trong hai khả năng sau:

Khả năng 1: Chứng tỏ rằng $a \notin D$.

Khả năng 2: Khi $a \in D$ thì chứng tỏ rằng $b \neq f(a)$.

Ví dụ 6 Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như Hình 3.

- Trong các điểm có tọa độ $(-2; 2)$, $(0; 0)$, $(0; 1)$, $(2; 2)$, $(1; 1)$, điểm nào thuộc đồ thị hàm số? Điểm nào không thuộc đồ thị hàm số?
- Quan sát đồ thị, tìm $f(3)$ và những điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng $\frac{9}{2}$.



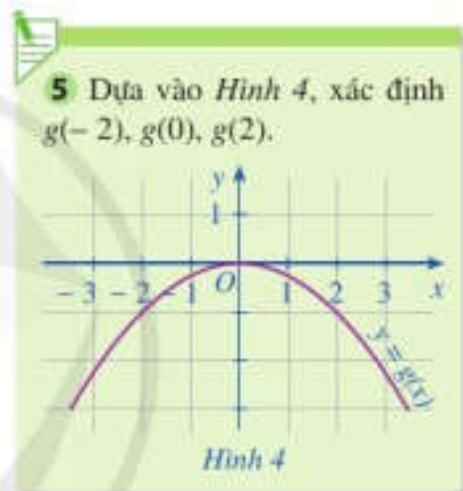
Hình 3

Giải

- Các điểm thuộc đồ thị hàm số có tọa độ là: $(-2; 2)$, $(0; 0)$, $(2; 2)$.
Các điểm không thuộc đồ thị hàm số có tọa độ là: $(0; 1)$, $(1; 1)$.

- Quan sát đồ thị, ta có: $f(3) = \frac{9}{2}$.

Tọa độ những điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng $\frac{9}{2}$ là: $\left(-3; \frac{9}{2}\right)$, $\left(3; \frac{9}{2}\right)$.



5 Dựa vào Hình 4, xác định $g(-2)$, $g(0)$, $g(2)$.

Hình 4

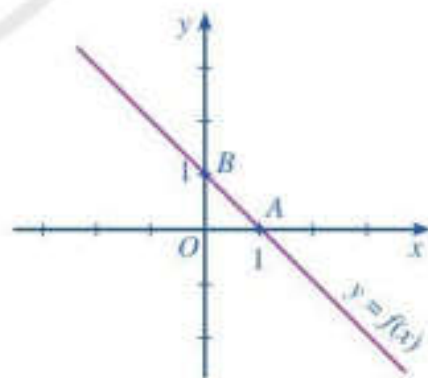
Ví dụ 7 Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như Hình 5.

- Xác định tọa độ các giao điểm của đồ thị đó với hai trục tọa độ.
- Hàm số $y = f(x)$ được xác định bởi công thức nào?

Giải

- Tọa độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là $(1; 0)$.
Tọa độ giao điểm của đồ thị với trục tung là $(0; 1)$.

- Vì đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường thẳng cắt cả hai trục tọa độ nên hàm số đó là hàm số bậc nhất, tức là $y = f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$). Giao điểm của đồ thị đó với trục Oy là điểm có tọa độ $(0; b)$ nên $b = 1$. Suy ra $y = f(x) = ax + 1$. Khi đó, giao điểm của đồ thị đó với trục Ox là điểm có tọa độ $\left(-\frac{1}{a}; 0\right)$ nên $-\frac{1}{a} = 1$, tức là $a = -1$. Vậy $y = f(x) = -x + 1$.



Hình 5

III. SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

1. Khái niệm



5 Cho hàm số $f(x) = x + 1$.

a) So sánh $f(1)$ và $f(2)$.

b) Chứng minh rằng nếu $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sao cho $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.

Như vậy, hàm số $f(x) = x + 1$ có tính chất sau đây: Khi x tăng thì $f(x)$ cũng tăng. Ta nói hàm số trên là *đồng biến* trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.



Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$.

- Hàm số $y = f(x)$ gọi là *đồng biến* trên khoảng $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

- Hàm số $y = f(x)$ gọi là *nghịch biến* trên khoảng $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Ví dụ 3

Chứng tỏ hàm số $y = 6x^2$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Giải

Xét hai số bất kì $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$ sao cho $x_1 < x_2$.

Ta có: $0 < x_1 < x_2$ nên $6x_1^2 < 6x_2^2$ hay $f(x_1) < f(x_2)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.



6 Chứng tỏ hàm số $y = 6x^2$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Nhận xét: Xét sự biến thiên của một hàm số là tìm các khoảng hàm số đồng biến và các khoảng hàm số nghịch biến. Kết quả xét sự biến thiên được tổng kết trong một *bảng biến thiên*.

Chẳng hạn, sau đây là bảng biến thiên của hàm số $y = 6x^2$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$+\infty$	0	$+\infty$

- Dấu mũi tên đi xuống (từ $+\infty$ đến 0) diễn tả hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- Dấu mũi tên đi lên (từ 0 đến $+\infty$) diễn tả hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

2. Mô tả hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến bằng đồ thị



6 Cho đồ thị hàm số: $y = f(x) = x^2$ như Hình 6.

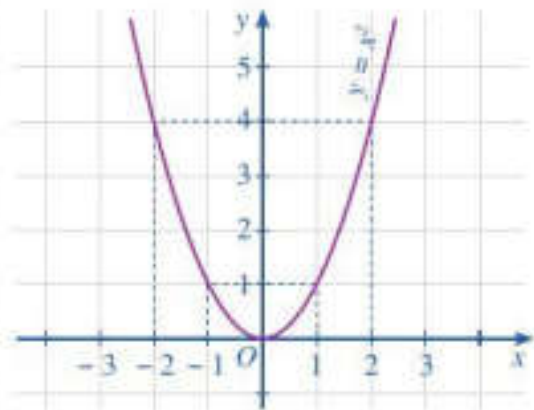
a) So sánh $f(-2)$, $f(-1)$. Nêu nhận xét về sự biến thiên của giá trị hàm số khi giá trị biến x tăng dần từ -2 đến -1 .

- b) So sánh $f(1)$, $f(2)$. Nếu nhận xét về sự biến thiên của giá trị hàm số khi giá trị biến x tăng dần từ 1 đến 2.

Nhận xét

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(a ; b)$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số “đi lên” trên khoảng đó.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(a ; b)$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số “đi xuống” trên khoảng đó.

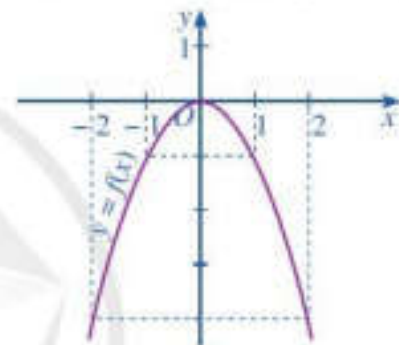
Khi nói đồ thị “đi lên” hay “đi xuống”, ta luôn kể theo chiều tăng của biến số, nghĩa là kể từ trái qua phải.



Hình 6

Ví dụ 9 Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như Hình 7. Quan sát đồ thị và cho biết phát biểu nào sau đây là đúng.

- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2 ; -1)$.
- Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1 ; 2)$.
- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1 ; 1)$.



Hình 7

Giải

- Phát biểu “Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2 ; -1)$ ” là đúng vì đồ thị hàm số đã cho “đi lên” trên khoảng đó.
- Phát biểu “Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1 ; 2)$ ” là đúng vì đồ thị hàm số đã cho “đi xuống” trên khoảng đó.
- Phát biểu “Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1 ; 1)$ ” là sai vì đồ thị hàm số đã cho vừa có phần “đi lên” vừa có phần “đi xuống” trên khoảng đó.

BÀI TẬP

1. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

a) $y = -x^2$; b) $y = \sqrt{2 - 3x}$; c) $y = \frac{4}{x+1}$; d) $y = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{nếu } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

2. Bảng 1 dưới đây cho biết chỉ số $PM_{2.5}$ (bụi mịn) ở Thành phố Hà Nội từ tháng 1 đến tháng 12 của năm 2019.

	Trung bình năm 2019	Tháng											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$PM_{2.5}$ ($\mu g/m^3$)	46,9	59,3	36,0	50,2	40,3	45,8	36,5	30,4	33,1	48,3	43,2	66,3	72,7

(Nguồn: Báo cáo chất lượng không khí thế giới 2019)

Bảng 1

a) Nêu chỉ số $PM_{2,5}$ trong tháng 2; tháng 5; tháng 10.

b) Chỉ số $PM_{2,5}$ có phải là hàm số của tháng không? Tại sao?

3. Theo quyết định số 2019/QĐ-BĐVN ngày 01/11/2018 của Tổng công ty Bưu điện Việt Nam, giá cước dịch vụ Bưu chính phổ cập đối với dịch vụ thư cơ bản và bưu thiếp trong nước có khối lượng đến 250 g như trong bảng sau:

a) Số tiền dịch vụ thư cơ bản phải trả y (đồng) có là hàm số của khối lượng thư cơ bản x (g) hay không? Nếu đúng, hãy xác định những công thức tính y .

Khối lượng đến 250 g	Mức cước (đồng)
Đến 20 g	4 000
Trên 20 g đến 100 g	6 000
Trên 100 g đến 250 g	8 000

b) Tính số tiền phải trả khi bạn Dương gửi thư có khối lượng 150 g, 200 g.

4. Cho hàm số $y = -2x^2$.

a) Điểm nào trong các điểm có tọa độ $(-1; -2)$, $(0; 0)$, $(0; 1)$, $(2 021; 1)$ thuộc đồ thị của hàm số trên?

b) Tìm những điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ lần lượt bằng -2 ; 3 và 10 .

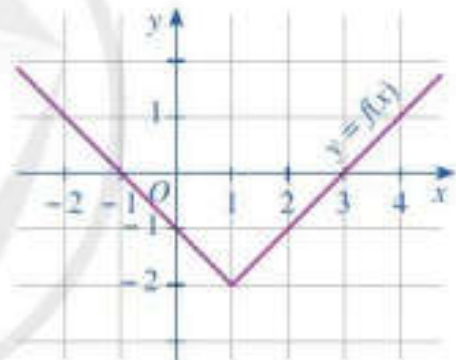
c) Tìm những điểm thuộc đồ thị hàm số có tung độ bằng -18 .

5. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như Hình 8.

a) Trong các điểm có tọa độ $(1; -2)$, $(0; 0)$, $(2; -1)$, điểm nào thuộc đồ thị hàm số? Điểm nào không thuộc đồ thị hàm số?

b) Xác định $f(0)$; $f(3)$.

c) Tìm điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng 0 .



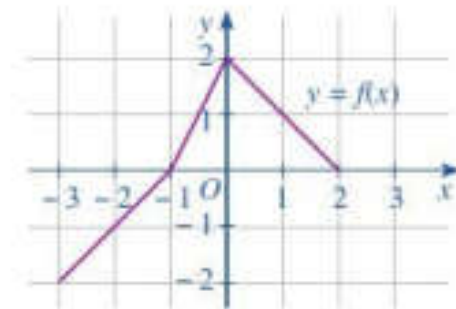
Hình 8

6. Cho hàm số $y = \frac{1}{x}$. Chứng tỏ hàm số đã cho:

a) Nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$;

b) Nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như Hình 9. Chỉ ra khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.



Hình 9

8. Một lớp muốn thuê một chiếc xe khách cho chuyến tham quan với tổng đoạn đường cần di chuyển trong khoảng từ 550 km đến 600 km, có hai công ty được tiếp cận để tham khảo giá.

Công ty A có giá khởi đầu là 3,75 triệu đồng cộng thêm 5 000 đồng cho mỗi ki-lô-mét chạy xe.

Công ty B có giá khởi đầu là 2,5 triệu đồng cộng thêm 7 500 đồng cho mỗi ki-lô-mét chạy xe. Lớp đó nên chọn công ty nào để chi phí là thấp nhất?

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP**Dạng 1: Tính giá trị của hàm số tại một điểm, điểm thuộc đồ thị****1. Phương pháp**

Thay trực tiếp các giá trị của biến số x vào hàm số.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x(x-2)}$?

A. $M(2;1)$.**B.** $N(-1;0)$.**C.** $P(2;0)$.**D.** $Q\left(0;\frac{1}{2}\right)$.**Lời giải****Chọn B**

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{x+1}{x(x-2)}$$

$$\text{Ta có: } f(-1) = \frac{-1+1}{-1(-1-2)} = 0.$$

Câu 2: Tọa độ giao điểm của đường thẳng $y = x - 1$ và $(P): y = x^2 - 2x - 1$ là

A. $(1;-1);(3;2)$.**B.** $(0;1);(3;2)$.**C.** $(0;-1);(3;2)$.**D.** $(1;-1);(-3;2)$.**Lời giải****Chọn C**

$$\text{Ta có phương trình hoành độ giao điểm: } x^2 - 2x - 1 = x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -1 \\ x = 3 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm là: $(0;-1);(3;2)$

Câu 3: Cho (P) có phương trình $y = x^2 - 2x + 4$. Tìm điểm mà parabol đi qua.

A. $Q(4;2)$.**B.** $N(-3;1)$.**C.** $P(4;0)$.**D.** $M(-3;19)$.**Lời giải****Chọn D**

Thử trực tiếp thấy tọa độ của $M(-3;19)$ thỏa mãn phương trình parabol.

Câu 4: Tìm m để đồ thị hàm số $y = 4x + m - 1$ đi qua điểm $A(1;2)$.

A. $m = 6$.**B.** $m = -1$.**C.** $m = -4$.**D.** $m = 1$.**Lời giải****Chọn B**

Đồ thị hàm số $y = 4x + m - 1$ đi qua điểm $A(1;2)$ suy ra $2 = 4.1 + m - 1 \Rightarrow m = -1$

- Câu 5:** Cho hàm số $y = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{khi } x \geq 1 \\ \frac{5-2x}{x-1} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số?
- A. $(4; -1)$. B. $(-2; -3)$. C. $(-1; 3)$. D. $(2; 1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy $\frac{5-2 \cdot (-2)}{-2-1} = -3$. Nên $(-2; -3)$ thuộc đồ thị hàm số đã cho.

3. Bài tập trắc nghiệm

- Câu 1.** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$. Tìm tọa độ điểm thuộc đồ thị của hàm số và có tung độ bằng -2 .
- A. $(0; -2)$. B. $\left(\frac{1}{3}; -2\right)$. C. $(-2; -2)$. D. $(-1; -2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi $M_0(x_0; -2)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số có tung độ bằng -2 .

Khi đó: $\frac{x_0+1}{x_0-1} = -2 \Leftrightarrow x_0+1 = 2(1-x_0) \Leftrightarrow 3x_0 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{3} \Rightarrow M\left(\frac{1}{3}; -2\right)$.

- Câu 2.** Điểm nào sau đây thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{x-2}{x(x-1)}$
- A. $M(0; -1)$. B. $M(2; 1)$. C. $M(2; 0)$. D. $M(1; 1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Thử trực tiếp thấy tọa độ của $M(2; 0)$ thỏa mãn phương trình hàm số.

- Câu 4.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x-2}-3}{x-1} & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2+2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tính $P = f(2) + f(-2)$.

- A. $P = 3$. B. $P = 2$. C. $P = \frac{7}{3}$. D. $P = 6$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $f(2) + f(-2) = \frac{2\sqrt{2-2}-3}{2-1} + (-2)^2 + 2 \Rightarrow P = 3.$

Câu 5. Đồ thị của hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x \leq 2 \\ -3 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ đi qua điểm nào sau đây:

- A. $(0; -3).$ B. $(3; 7).$ C. $(2; -3).$ D. $(0; 1).$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Thử lần lượt từng phương án A,B,C,D với chú ý về điều kiện ta được:

$f(0) = 2.0 + 1 = 1 \neq -3$, đồ thị không đi qua điểm $(0; -3).$

$f(3) = -3 \neq 7$, đồ thị không đi qua điểm $(3; 7).$

$f(2) = 2.2 + 1 = 5 \neq -3$, đồ thị không đi qua điểm $(2; -3).$

$f(0) = 2.0 + 1 = 1$, đồ thị không đi qua điểm $(0; 1).$

Câu 6. Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} -2(x-3) & \text{khi } -1 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x^2-1} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Giá trị của $f(-1)$; $f(1)$ lần lượt là

- A. 8 và 0. B. 0 và 8. C. 0 và 0. D. 8 và 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $f(-1) = -2(-1-3) = 8$; $f(1) = \sqrt{1^2-1} = 0.$

Câu 7. Cho hàm số $y = \begin{cases} -2x+1 & \text{khi } x \leq -3 \\ \frac{x+7}{2} & \text{khi } x > -3 \end{cases}$. Biết $f(x_0) = 5$ thì x_0 là

- A. -2. B. 3. C. 0. D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

TH1. $x_0 \leq -3$: Với $f(x_0) = 5 \Leftrightarrow -2x_0 + 1 = 5 \Leftrightarrow x_0 = -2.$

TH2. $x_0 > -3$: Với $f(x_0) = 5 \Leftrightarrow \frac{x_0 + 7}{2} = 5 \Leftrightarrow x_0 = 3.$

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{x+1} & \text{khi } x \geq 0 \\ \frac{\sqrt[3]{2+3x}}{x-2} & \text{khi } -2 \leq x < 0 \end{cases}$. Ta có kết quả nào sau đây đúng?

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. “Tránh mua các trang và các cá nhân khác”

Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng

Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT: 0834 332 133

A. $f(-1) = \frac{1}{3}; f(2) = \frac{7}{3}$.

B. $f(0) = 2; f(-3) = \sqrt{7}$.

C. $f(-1)$: không xác định; $f(-3) = -\frac{11}{24}$.

D. $f(-1) = \sqrt{8}; f(3) = 0$.

Hướng dẫn giải**Chọn A.**

$$f(-1) = \frac{\sqrt[3]{2-3}}{-1-2} = \frac{1}{3}; f(2) = \frac{2.2+3}{2+1} = \frac{7}{3}.$$

Dạng 2: Tìm tập xác định của hàm số**1. Phương pháp**

- Tìm tập xác định D của hàm số $y = f(x)$ là tìm tất cả những giá trị của biến số x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ có nghĩa}\}.$$

- Điều kiện xác định của một số hàm số thường gặp:

1) **Hàm số** $y = \frac{A(x)}{B(x)}$. Khi đó: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid A(x) \text{ xác định và } A(x) \neq 0\}$

2) **Hàm số** $y = \sqrt[k]{A(x)}, k \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid A(x) \text{ xác định và } A(x) \geq 0\}$

3) **Hàm số** $y = \frac{A(x)}{\sqrt[k]{B(x)}}, k \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid A(x), B(x) \text{ xác định và } B(x) > 0\}$

Chú ý:

- Đôi khi ta sử dụng phối hợp các điều kiện với nhau.
- $A.B \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \neq 0 \\ B \neq 0 \end{cases}$.
- Nếu $y = f(x)$ có tập xác định là D . Khi đó: $y = f(x)$ xác định trên tập $X \Leftrightarrow X \subset D$
 $y = f(x)$ xác định trên tập $X \Leftrightarrow f(x)$ xác định với mọi $x \in X$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng**Ví dụ 1:** Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x-1}$ **Hướng dẫn giải**

Hàm số $y = \sqrt{x-1}$ xác định $\Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Ví dụ 2: Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1+2x} + \sqrt{6+x}$

Hướng dẫn giải

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases} 1+2x \geq 0 \\ 6+x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ví dụ 3: Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$

Hướng dẫn giải

Hàm số xác định khi: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số $D = [0; +\infty) \setminus \{2\}$.

Ví dụ 4: Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{x-3} + \sqrt{x-1}$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện để hàm số xác định: $\begin{cases} x-3 \neq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \neq 3$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D = [1; +\infty) \setminus \{3\}$.

Ví dụ 5: Tìm m để hàm số $y = (x-2)\sqrt{3x-m-1}$ xác định trên tập $(1; +\infty)$?

Lời giải

ĐK: $x \geq \frac{m+1}{3} \Rightarrow D = \left[\frac{m+1}{3}; +\infty\right)$.

Để hàm số xác định trên $(1; +\infty)$ thì

$(1; +\infty) \subset \left[\frac{m+1}{3}; +\infty\right) \Leftrightarrow \frac{m+1}{3} \leq 1 \Leftrightarrow m+1 \leq 3 \Rightarrow m \leq 2$.

Ví dụ 6. Xác định tham số m để hàm số $y = \sqrt{3x-m}$ xác định trên tập $(1; +\infty)$

Hướng dẫn:

Tập xác định của hàm số $D = \left[\frac{m}{3}; +\infty\right)$. Do đó hàm số xác định trên tập $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$(1; +\infty) \subset D = \left[\frac{m}{3}; +\infty \right) \Leftrightarrow 1 \geq \frac{m}{3} \Leftrightarrow m \leq 3$$

Ví dụ 7. Xác định tham số m để hàm số $y = \sqrt{x^2 - m}$ xác định trên tập $(-\infty; -3]$

Hướng dẫn:

hàm số xác định khi và chỉ khi $x^2 - m \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq m$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m > 0 \\ x \in (-\infty; -\sqrt{m}] \cup [\sqrt{m}; +\infty) \end{cases}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{khi } m \leq 0 \\ (-\infty; -\sqrt{m}] \cup [\sqrt{m}; +\infty) & \text{khi } m > 0 \end{cases}$

Do đó hàm số xác định trên tập $(-\infty; -3]$ khi và chỉ khi

$$(-\infty; -3] \subset D \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ -3 \leq -\sqrt{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ 0 < m \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 9.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Tìm tập xác định D của hàm số $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{x}$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$. C. $D = [-1; +\infty) \setminus \{0\}$. D. $D = [-1; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$. Vậy tập xác định: $D = [-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

Câu 2. Cho hàm số: $y = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & x \leq 0 \\ \sqrt{x+2} & x > 0 \end{cases}$. Tập xác định của hàm số là tập hợp nào sau đây?

- A. $[-2; +\infty)$. B. $\mathbb{R}$.
C. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. D. $\{x \in \mathbb{R} \setminus x \neq 1 \text{ và } x \geq -2\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Với $x \leq 0$ ta có: $y = \frac{1}{x-1}$ xác định với mọi $x \neq 1$ nên xác định với mọi $x \leq 0$.

Với $x > 0$ ta có: $y = \sqrt{x+2}$ xác định với mọi $x \geq -2$ nên xác định với mọi $x > 0$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. “Tránh mua các trang và các cá nhân khác”

Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT: 0834 332 133

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

Câu 3. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x-3}$ là

- A. $(3; +\infty)$. B. $[1; +\infty)$. C. $[-1; 3) \cup (3; +\infty)$. D. $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x-3}$.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 3 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số $D = [-1; 3) \cup (3; +\infty)$.

Câu 4. Tập xác định của hàm số $y = \frac{2-x}{x^2-4x}$ là

- A. $\mathbb{R} \setminus \{0; 2; 4\}$. B. $\mathbb{R} \setminus [0; 4]$. C. $\mathbb{R} \setminus (0; 4)$. D. $\mathbb{R} \setminus \{0; 4\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow x^2 - 4x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$. Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 4\}$.

Câu 5. Tìm tập xác định D của hàm số $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{x}$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. B. $D = [1; +\infty)$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$. D. $D = [-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện: $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

Câu 6. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$.

- A. $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. B. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$. C. $\mathbb{R}$. D. $\emptyset$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện xác định: $4x^2 - 4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 \geq 0$.

Do đó tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Câu 7. Tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{3-x} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ là

A. $D = (1; 3]$.

B. $D = (-\infty; 1) \cup [3; +\infty)$.

C. $D = [1; 3]$.

D. $D = \emptyset$.

Hướng dẫn giải**Chọn A.**

Hàm số xác định khi $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 3$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (1; 3]$.

Câu 8. Tập hợp nào sau đây là tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1+5x} + \frac{|x|}{\sqrt{7-2x}}$?

A. $\left(\frac{1}{5}; -\frac{7}{2}\right)$.

B. $\left[-\frac{1}{5}; \frac{7}{2}\right]$.

C. $\left[-\frac{1}{5}; -\frac{7}{2}\right)$.

D. $\left[-\frac{1}{5}; \frac{7}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải**Chọn D.**

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} 1+5x \geq 0 \\ 7-2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{5} \\ x < \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{5} \leq x < \frac{7}{2}$.

Câu 9. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-6x+8}$ là

A. $(3; 8) \setminus \{4\}$.

B. $[-3; 3] \setminus \{2\}$.

C. $(-3; 3) \setminus \{2\}$.

D. $(-\infty; 3) \setminus \{2\}$.

Hướng dẫn giải**Chọn B.**

Ta có $9-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (3-x)(3+x) \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$.

Hàm số xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 9-x^2 \geq 0 \\ x^2-6x+8 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ x \neq 4 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ x \neq 2 \end{cases}. \text{ Vậy } x \in [-3; 3] \setminus \{2\}.$$

Câu 10. Tập xác định của hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{-3x+8} + x & \text{khi } x < 2 \\ \sqrt{x+7} + 1 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$ là

- A. $\mathbb{R}$. B. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. C. $\left(-\infty; \frac{8}{3}\right]$. D. $[-7; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có:

• Khi $x < 2$: $y = f(x) = \sqrt{-3x+8} + x$ xác định khi $-3x+8 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{8}{3}$.

Suy ra $D_1 = (-\infty; 2)$.

• Khi $x \geq 2$: $y = f(x) = \sqrt{x+7} + 1$ xác định khi $x+7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -7$.

Suy ra $D_2 = [2; +\infty)$.

Vậy TXĐ của hàm số là $D = D_1 \cup D_2 = (-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$.

Câu 11. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3} - \frac{x}{x-3}$.

- A. $(-\infty; 1] \cup (3; +\infty)$. B. $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. C. $(3; +\infty)$. D. $(1; 3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3} - \frac{x}{x-3}$ xác định

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \vee x \geq 3 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 1 \text{ hoặc } x > 3.$$

Câu 12. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{3-x} + \sqrt{x+1}}{x^2 - 5x + 6}$ là

- A. $[-1; 3) \setminus \{2\}$. B. $[-1; 2]$. C. $[-1; 3]$. D. $(2; 3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Hàm số } y = \frac{\sqrt{3-x} + \sqrt{x+1}}{x^2 - 5x + 6} \text{ có nghĩa khi } \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ x \neq 2; x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1; 3) \setminus \{2\}.$$

Câu 13. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$.

A. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$. B. $[2; +\infty)$. C. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$. D. $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Hàm số xác định} \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x \geq 2 \end{cases}$$

Câu 14. Tìm m để hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2m+3}}{x-m} + \frac{3x-1}{\sqrt{-x+m+5}}$ xác định trên khoảng $(0;1)$.

A. $m \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$. B. $m \in [-3; 0]$.
C. $m \in [-3; 0] \cup [0; 1]$. D. $m \in [-4; 0] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

*Gọi D là tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2m+3}}{x-m} + \frac{3x-1}{\sqrt{-x+m+5}}$.

$$*x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x-2m+3 \geq 0 \\ x-m \neq 0 \\ -x+m+5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2m-3 \\ x \neq m \\ x < m+5 \end{cases}.$$

*Hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2m+3}}{x-m} + \frac{3x-1}{\sqrt{-x+m+5}}$ xác định trên khoảng $(0;1)$

$$\Leftrightarrow (0;1) \subset D \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-3 \leq 0 \\ m+5 \geq 1 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{3}{2} \\ m \geq -4 \\ \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-4; 0] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right].$$

Dạng 3: Tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

1. Phương pháp

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. “Tránh mua các trang và các cá nhân khác”

Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT: 0834 332 133

Cho hàm số f xác định trên K .

- $y = f(x)$ **đồng biến** trên $K \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- $y = f(x)$ **nghịch biến** trên $K \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Từ đó, ta có hai cách để xét tính đồng biến nghịch biến:

Cách 1: $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2$. Xét hiệu số $A = f(x_2) - f(x_1)$

- Nếu $A > 0$ thì hàm số đồng biến
- Nếu $A < 0$ thì hàm số nghịch biến

Cách 2: $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 \neq x_2$. Xét tỉ số $A = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

- Nếu $A > 0$ thì hàm số đồng biến
- Nếu $A < 0$ thì hàm số nghịch biến

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1. Khảo sát sự biến thiên của hàm số sau

- a) $y = x^2 - 4x + 6$ trên mỗi khoảng $(-\infty; 2); (2; +\infty)$
 b) $y = -x^2 - 6x + 5$ trên mỗi khoảng $(-\infty; -3); (-3; +\infty)$

Hướng dẫn

a) Với $x_1 \neq x_2$, ta có:

$$A = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1 - 4 = (x_2 - 2) + (x_1 - 2)$$

Do đó:

$$\triangleright \forall x_1, x_2 \in (-\infty; 2), x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 < 2; x_2 < 2 \Rightarrow x_1 - 2 < 0, x_2 - 2 < 0 \Rightarrow A < 0$$

Vậy, hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$

$$\triangleright \forall x_1, x_2 \in (2; +\infty), x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 > 2; x_2 > 2 \Rightarrow x_1 - 2 > 0, x_2 - 2 > 0 \Rightarrow A > 0$$

Vậy, hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Ví dụ 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số sau

a) $y = \frac{3}{x-1}$ trên mỗi khoảng $(-\infty; 1); (1; +\infty)$

b) $y = \frac{x+1}{2x+4}$ trên mỗi khoảng $(-\infty; -2); (-2; +\infty)$

Hướng dẫn

a) Với $x_1 \neq x_2$, ta có:

$$A = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-3}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}$$

Do đó:

$$\triangleright \forall x_1, x_2 \in (-\infty; 1), x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 < 1; x_2 < 1 \Rightarrow x_1 - 1 < 0, x_2 - 1 < 0 \Rightarrow A < 0$$

Vậy, hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$

$$\triangleright \forall x_1, x_2 \in (1; +\infty), x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 > 1; x_2 > 1 \Rightarrow x_1 - 1 > 0, x_2 - 1 > 0 \Rightarrow A < 0$$

Vậy, hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

Ví dụ 3. Khảo sát sự biến thiên và lập bảng biến thiên của hàm số sau

$$a) y = \sqrt[3]{x} + 3;$$

$$b) y = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$$

Hướng dẫn

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt[3]{x_1} < \sqrt[3]{x_2} \Rightarrow \sqrt[3]{x_1} + 3 < \sqrt[3]{x_2} + 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Vậy, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Tập xác định: $D = [0; +\infty) \setminus \{1\}$

$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$, ta có:

$$A = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-1}{(\sqrt{x_1} - 1)(\sqrt{x_2} - 1)(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})}$$

Do đó:

$$\triangleright \forall x_1, x_2 \in [0; 1), x_1 \neq x_2 \Rightarrow 0 \leq x_1 < 1; 0 \leq x_2 < 1 \Rightarrow \sqrt{x_1} - 1 < 0, \sqrt{x_2} - 1 < 0 \Rightarrow A < 0$$

Vậy, hàm số nghịch biến trên $[0; 1)$

$$\triangleright \forall x_1, x_2 \in (1; +\infty), x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 > 1; x_2 > 1 \Rightarrow \sqrt{x_1} - 1 > 0, \sqrt{x_2} - 1 > 0 \Rightarrow A < 0$$

Vậy, hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

Ví dụ 4: Tìm a để hàm số $f(x) = ax - \sqrt{1-a}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Hàm số } f(x) = ax - \sqrt{1-a} \text{ đồng biến trên } \mathbb{R} \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} a > 0 \\ 1-a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a \leq 1$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y = 3 - x$.

B. $y = 3x + 1$.

C. $y = 4$.

D. $y = x^2 - 2x + 3$.

Lời giải

Chọn B

$y = 3x + 1$ có $a = 3 > 0$ hàm số đồng biến trên TXĐ.

Câu 2: Xét sự biến thiên của hàm số $f(x) = \frac{3}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- B. Hàm số vừa đồng biến, vừa nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- D. Hàm số không đồng biến, không nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$$\forall x_1, x_2 \in (0; +\infty): x_1 \neq x_2$$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{3}{x_2} - \frac{3}{x_1} = \frac{-3(x_2 - x_1)}{x_2 x_1} \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -\frac{3}{x_2 x_1} < 0$$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 3: Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = x$.
- B. $y = -2x$.
- C. $y = 2x$.
- D. $y = \frac{1}{2}x$

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = ax + b$ với $a \neq 0$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a < 0$.

Câu 4. Chọn khẳng định đúng?

- A. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên K nếu $\forall x_1; x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- B. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1; x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- C. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1; x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- D. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1; x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Lời giải

Chọn D

Lý thuyết định nghĩa hàm số đồng biến, nghịch biến

Câu 5. Tìm m để hàm số $y = (2m - 1)x + 7$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m > \frac{1}{2}$.
- B. $m \geq \frac{1}{2}$.
- C. $m = \frac{1}{2}$.
- D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải**Chọn A**

hàm số $y = (2m-1)x + 7$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $2m-1 > 0$.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (2m+3)x + m+3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A.** $m \leq -\frac{3}{2}$. **B.** $m \geq -\frac{3}{2}$. **C.** $m > -\frac{3}{2}$. **D.** $m < -\frac{3}{2}$.

Lời giải**Chọn D**

Hàm số $y = (2m+3)x + m+3$ có dạng hàm số bậc nhất.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow 2m+3 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{3}{2}$.

Câu 7. Tổng tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = -2x^2 + (m+1)x + 3$ nghịch biến trên khoảng $(1; 5)$ là

- A.** 6. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 15.

Lời giải**Chọn A**

Hàm số $y = -2x^2 + (m+1)x + 3$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{m+1}{4}; +\infty\right)$.

Để hàm số $y = -2x^2 + (m+1)x + 3$ nghịch biến trên khoảng $(1; 5)$ thì ta phải có $(1; 5) \subset \left(\frac{m+1}{4}; +\infty\right) \Leftrightarrow \frac{m+1}{4} \leq 1 \Leftrightarrow m \leq 3$.

Các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = -2x^2 + (m+1)x + 3$ nghịch biến trên khoảng $(1; 5)$ là $m=1, m=2, m=3$.

Tổng tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = -2x^2 + (m+1)x + 3$ nghịch biến trên khoảng $(1; 5)$ là $S = 1 + 2 + 3 = 6$.

Câu 8. Cho hàm số $y = (m+2)x + \sqrt{2-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A.** 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Hướng dẫn giải**Chọn C.**

Hàm số có dạng $y = ax + b$, nên để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m+2 > 0 \\ 2-m \geq 0 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m \leq 2 \end{cases}$. Mặt khác do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 0; 1; 2\}$. Vậy có 4 giá trị nguyên của m .

Câu 9. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m+2}{x-m}$ xác định trên $(-1; 2)$.

A. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases}$.

D. $-1 < m < 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Hàm số $y = \frac{x+m+2}{x-m}$ xác định khi $x \neq m$.

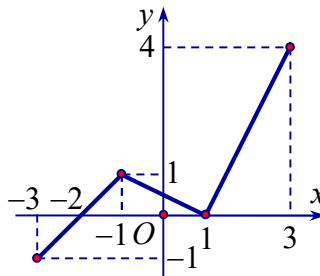
Để hàm số $y = \frac{x+m+2}{x-m}$ xác định trên $(-1; 2)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{cases}$.

Dạng 4: Dựa vào đồ thị tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $[-3; 3]$ và đồ thị của nó được biểu diễn như hình dưới đây



Khẳng định nào sau đây **đúng** ?

A. Hàm số nghịch biến trên $(-1; 0)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(-3; -1)$ và $(1; 4)$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-3; 3)$.

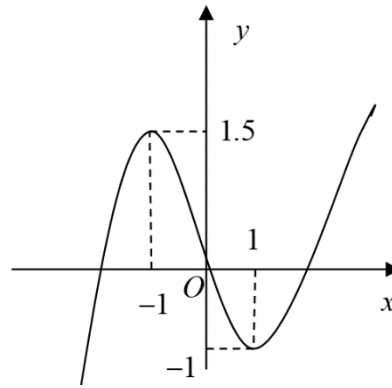
D. Hàm số đồng biến trên $(-3; -1)$ và $(1; 3)$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số đồng biến có đồ thị đi lên và hàm số nghịch biến có đồ thị đi xuống (tính từ trái sang phải).

Câu 2: Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên chỉ đồng biến trên tập



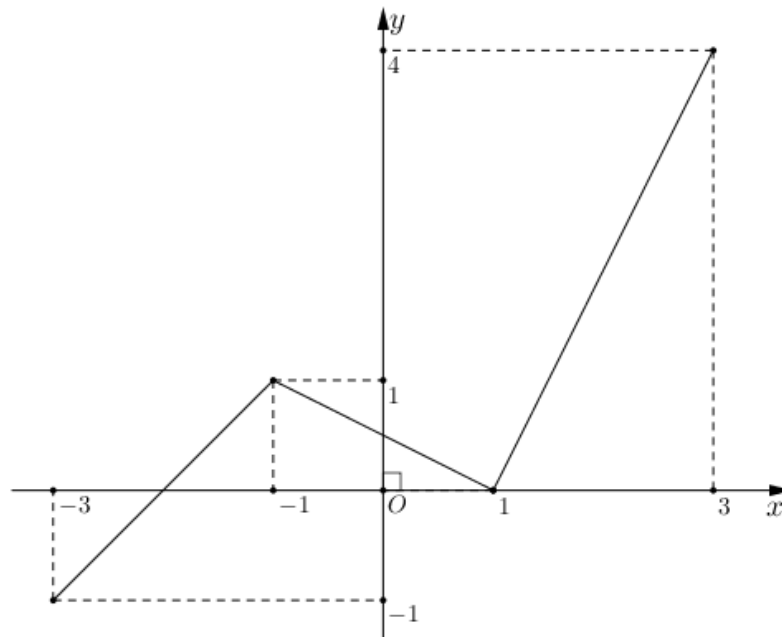
- A. $(-\infty; -1)$. B. $(1; +\infty)$.
 C. $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$. D. $(-\infty; -1]$ và $[1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên ta thấy hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $[-3; 3]$, có đồ thị được biểu diễn bởi hình vẽ dưới đây.



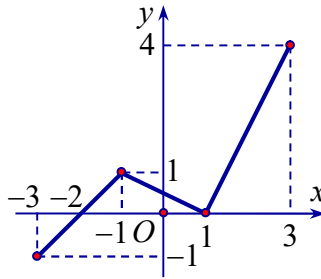
Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-3; 1)$. B. Đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.
 C. Hàm số nghịch biến trên $(-2; 1)$. D. Hàm số đồng biến trên $(-3; -1)$ và $(1; 3)$.

Lời giải

Chọn D

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $[-3; 3]$ và đồ thị của nó được biểu diễn như hình dưới đây.



Khẳng định nào sau đây **đúng** ?

A. Hàm số nghịch biến trên $(-1; 2)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(-3; -1)$ và $(1; 4)$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-3; 3)$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-3; -1)$ và $(1; 3)$.

Lời giải

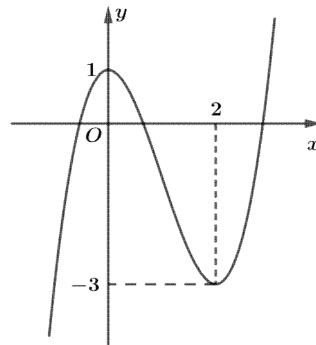
Chọn D

Hàm số đồng biến có đồ thị đi lên và hàm số nghịch biến có đồ thị đi xuống (tính từ trái sang phải).

Câu 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-3; 3]$ để hàm số $f(x) = (m+1)x + m - 2$ đồng biến trên

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hàm số có đồ thị như hình bên dưới.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

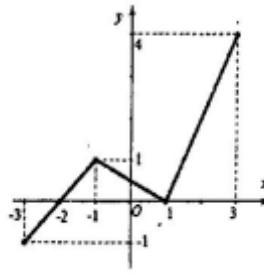
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Lời giải

Chọn C

Trên khoảng $(0; 2)$, đồ thị hàm số đi xuống từ trái sang phải nên hàm số nghịch biến.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $[-3; 3]$ và có đồ thị được biểu diễn bởi hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



- A. Hàm số $y = f(x) + 2018$ đồng biến trên các khoảng $(-3; -1)$ và $(1; 3)$.
- B. Hàm số $y = f(x) + 2018$ đồng biến trên các khoảng $(-2; 1)$ và $(1; 3)$.
- C. Hàm số $y = f(x) + 2018$ nghịch biến trên các khoảng $(-2; -1)$ và $(0; 1)$.
- D. Hàm số $y = f(x) + 2018$ nghịch biến trên khoảng $(-3; -2)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $(C): y = f(x)$, $(C'): y = f(x) + 2018$. Khi tịnh tiến đồ thị (C) theo phương song song trục tung lên phía trên 2018 đơn vị thì được đồ thị (C') . Nên tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$, $y = f(x) + 2018$ trong từng khoảng tương ứng không thay đổi.

Dựa vào đồ thị ta thấy:

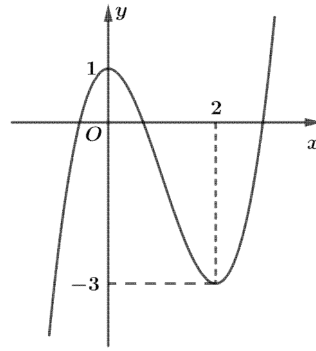
Hàm số $y = f(x) + 2018$ đồng biến trên các khoảng $(-3; -1)$ và $(1; 3)$.

Hàm số $y = f(x) + 2018$ đồng biến trên các khoảng $(-2; 1)$ và $(1; 3)$.

Hàm số $y = f(x) + 2018$ nghịch biến trên các khoảng $(-2; -1)$ và $(0; 1)$.

Hàm số $y = f(x) + 2018$ nghịch biến trên khoảng $(-3; -2)$.

Câu 3. Cho hàm số có đồ thị như hình bên dưới.



Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

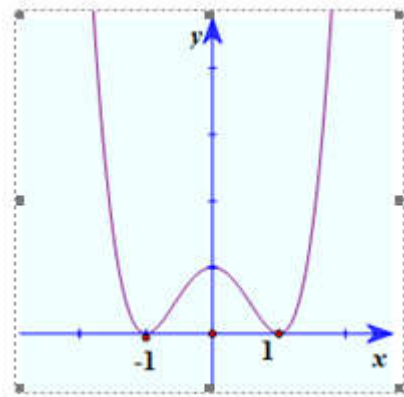
- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;3)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Lời giải

Chọn C

Trên khoảng $(0;2)$, đồ thị hàm số đi xuống từ trái sang phải nên hàm số nghịch biến.

Câu 4. Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ.



Chọn đáp án sai.

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Lời giải

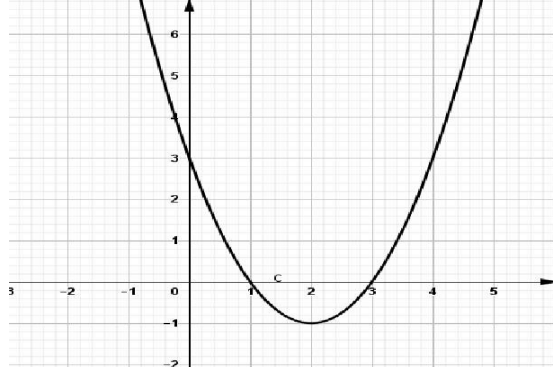
Chọn C

Từ đồ thị hàm số ta thấy:

Hàm số nghịch biến trong các khoảng: $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Hàm số đồng biến trong các khoảng: $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 5. Hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Mệnh đề nào sau đây **đúng** ?

- A.** Đồ thị hàm số cắt trục hoành theo một dây cung có độ dài bằng 2 .
- B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 5)$.
- C.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.
- D.** $f(\sqrt{2019}) < f(\sqrt{2017})$.

Lời giải

Chọn A

Nhìn vào đồ thị hàm số ta có :

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm $M(1; 0), N(3; 0) \Rightarrow MN = 2 \Rightarrow A$ đúng.

Trên khoảng $(0; 2)$ đồ thị hàm số đi xuống nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ và trên khoảng $(2; 5)$ đồ thị hàm số đi lên nên hàm số đồng biến trên khoảng $(2; 5) \Rightarrow B$ sai.

Trên khoảng $(0; 2)$ đồ thị hàm số đi xuống nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ và trên khoảng $(2; 3)$ đồ thị hàm số đi lên nên hàm số đồng biến trên khoảng $(2; 3) \Rightarrow C$ sai.

Ta có : $\sqrt{2019}, \sqrt{2017} \in (2; +\infty)$ và trên khoảng $(2; +\infty)$ hàm số đồng biến nên

$$\begin{cases} \sqrt{2019} > \sqrt{2017} \\ f(\sqrt{2019}) > f(\sqrt{2017}) \end{cases} \Rightarrow D \text{ sai.}$$

§2

HÀM SỐ BẬC HAI. ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC HAI VÀ ỨNG DỤNG

Cầu cảng Sydney là một trong những hình ảnh biểu tượng của thành phố Sydney và nước Australia. Độ cao y (m) của một điểm thuộc vòng cung thành cầu cảng Sydney có thể biểu thị theo độ dài x (m) tính từ chân cầu bên trái dọc theo đường nối với chân cầu bên phải như sau (Hình 10):

$$y = -0,00188(x - 251,5)^2 + 118.$$



(Nguồn: Passy's World of Mathematics)

Hình 10

Hàm số $y = -0,00188(x - 251,5)^2 + 118$ có gì đặc biệt?



I. HÀM SỐ BẬC HAI

1 Cho hàm số $y = -0,00188(x - 251,5)^2 + 118$.

- Viết công thức xác định hàm số trên về dạng đa thức theo lũy thừa với số mũ giảm dần của x .
- Bậc của đa thức trên bằng bao nhiêu?
- Xác định hệ số của x^2 , hệ số của x và hệ số tự do.

Hàm số bậc hai là hàm số được cho bằng biểu thức có dạng $y = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những hằng số và a khác 0. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1 Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc hai? Với những hàm số bậc hai đó, xác định a, b, c lần lượt là hệ số của x^2 , hệ số của x và hệ số tự do.

- $y = 8x^2 - 6x + 1$;
- $y = 2x + 2\,021$.

Giải

- Hàm số $y = 8x^2 - 6x + 1$ là hàm số bậc hai có hệ số của x^2 bằng 8, hệ số của x bằng -6 , hệ số tự do bằng 1.
- Hàm số $y = 2x + 2\,021$ không phải là hàm số bậc hai.

1 Cho hai ví dụ về hàm số bậc hai.

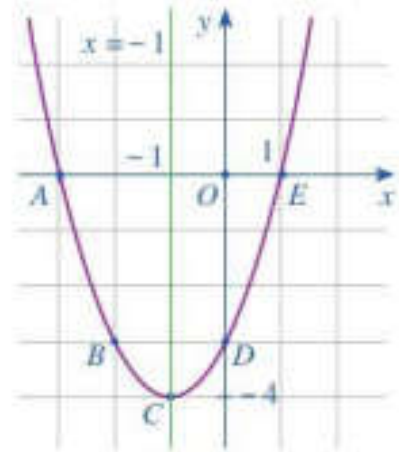
II. ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC HAI

2 Cho hàm số $y = x^2 + 2x - 3$.

- Tìm giá trị y tương ứng với giá trị của x trong bảng sau:

x	-3	-2	-1	0	1
y	?	?	?	?	?

- b) Vẽ các điểm $A(-3; 0)$, $B(-2; -3)$, $C(-1; -4)$, $D(0; -3)$, $E(1; 0)$ của đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x - 3$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy .
- c) Vẽ đường cong đi qua 5 điểm A, B, C, D, E . Đường cong đó là đường parabol và cũng chính là đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x - 3$ (Hình 11).
- d) Cho biết tọa độ của điểm thấp nhất và phương trình trục đối xứng của parabol đó. Đồ thị hàm số đó quay bề lõm lên trên hay xuống dưới?



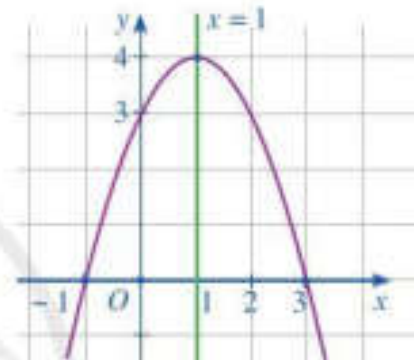
Hình 11

Nhận xét: Đường cong (liền nét) đi qua 5 điểm A, B, C, D, E (Hình 11) cho ta đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x - 3$, $x \in \mathbb{R}$. Đó là đường parabol quay bề lõm lên trên, có tọa độ của điểm thấp nhất là $(-1; -4)$ và có trục đối xứng là đường thẳng $x = -1$.



3 Cho hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$.

- a) Tìm tọa độ 5 điểm thuộc đồ thị hàm số trên có hoành độ lần lượt là $-1, 0, 1, 2, 3$ rồi vẽ chúng trong mặt phẳng tọa độ Oxy .
- b) Vẽ đường cong đi qua 5 điểm trên. Đường cong đó cũng là đường parabol và là đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$ (Hình 12).
- c) Cho biết tọa độ của điểm cao nhất và phương trình trục đối xứng của parabol đó. Đồ thị hàm số đó quay bề lõm lên trên hay xuống dưới?



Hình 12

Đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) là một đường parabol có đỉnh là điểm với tọa độ $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ và trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$.

Nhận xét: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), ta có: $-\frac{\Delta}{4a} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

Để vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), ta thực hiện các bước:

- Xác định tọa độ đỉnh: $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$;
- Vẽ trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$;
- Xác định một số điểm đặc biệt, chẳng hạn: giao điểm với trục tung (có tọa độ $(0; c)$) và trục hoành (nếu có), điểm đối xứng với điểm có tọa độ $(0; c)$ qua trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$.

Ví dụ 3 Nêu khoảng đồng biến, nghịch biến của mỗi hàm số sau:

a) $y = 3x^2 + 5x - 2$;

b) $y = -4x^2 + 6x + 3$.

Giải

a) Ta có: $a = 3 > 0$, $b = 5$, $-\frac{b}{2a} = -\frac{5}{6}$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{5}{6}\right)$;
đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{5}{6}; +\infty\right)$.

b) Ta có: $a = -4 < 0$, $b = 6$, $-\frac{b}{2a} = \frac{3}{4}$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$; nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

3 Lập bảng biến thiên của mỗi hàm số sau:

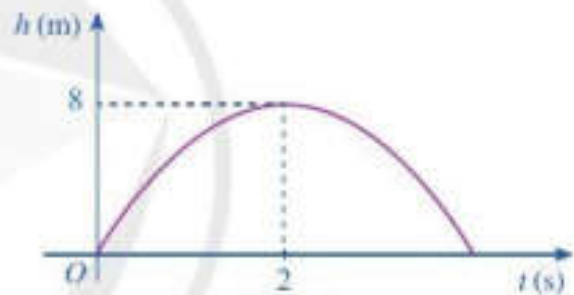
a) $y = x^2 - 3x + 4$;

b) $y = -2x^2 + 5$.

III. ỨNG DỤNG

Các hàm số bậc hai có nhiều ứng dụng trong việc giải quyết những vấn đề thực tiễn. Chẳng hạn, ta sẽ tìm hiểu ứng dụng đó thông qua ví dụ sau:

Ví dụ 4 Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Hình 14 minh họa quỹ đạo của quả bóng là một phần của cung parabol trong mặt phẳng tọa độ Oth , trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi quả bóng được đá lên và h là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá từ mặt đất. Sau khoảng 2 s, quả bóng lên đến vị trí cao nhất là 8 m.



Hình 14

- Tìm hàm số bậc hai biểu thị độ cao h theo thời gian t và có phần đồ thị trùng với quỹ đạo của quả bóng trong tình huống này.
- Tính độ cao của quả bóng sau khi đá lên được 3 s.
- Sau bao nhiêu giây thì quả bóng chạm đất kể từ khi đá lên?

Giải

a) Gọi hàm số bậc hai biểu thị độ cao h (m) theo thời gian t (s) là: $h = f(t) = at^2 + bt + c$ ($a < 0$). Theo giả thiết, quả bóng được đá lên từ mặt đất, nghĩa là $f(0) = c = 0$, do đó $f(t) = at^2 + bt$. Sau 2 s, quả bóng lên đến vị trí cao nhất là 8 m nên

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ f(2) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ -4a = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 8 \end{cases}$$

Vậy $f(t) = -2t^2 + 8t$.

b) Độ cao của quả bóng sau khi đá lên được 3 s là:

$$h = f(3) = -2 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 = 6 \text{ (m)}.$$

c) **Cách 1.** Quả bóng chạm đất (trở lại) khi độ cao $h = 0$, tức là:

$$\begin{cases} t > 0 \\ -2t^2 + 8t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 4.$$

Vì thế sau 4 s quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi đá lên.

Cách 2. Quỹ đạo chuyển động của quả bóng là một phần của cung parabol có trục đối xứng là đường thẳng $t = 2$. Điểm xuất phát và điểm quả bóng chạm đất (trở lại) đối xứng nhau qua đường thẳng $t = 2$. Vì thế sau 4 s quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi đá lên.

4 Trong bài toán ở phần mở đầu, độ cao y (m) của một điểm thuộc vòng cung thành cầu cảng Sydney đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

BÀI TẬP

1. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc hai? Với những hàm số bậc hai đó, xác định a , b , c lần lượt là hệ số của x^2 , hệ số của x và hệ số tự do.

a) $y = -3x^2$;

b) $y = 2x(x^2 - 6x + 1)$;

c) $y = 4x(2x - 5)$.

2. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + 4$ trong mỗi trường hợp sau:

a) Đi qua điểm $M(1; 12)$ và $N(-3; 4)$;

b) Có đỉnh là $I(-3; -5)$.

3. Vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau:

a) $y = 2x^2 - 6x + 4$;

b) $y = -3x^2 - 6x - 3$.

4. Cho đồ thị hàm số bậc hai ở Hình 15.

a) Xác định trục đối xứng, tọa độ đỉnh của đồ thị hàm số.

b) Xác định khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số.

c) Tìm công thức xác định hàm số.

5. Nêu khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của mỗi hàm số sau:

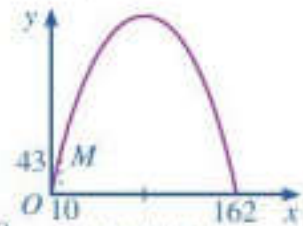
a) $y = 5x^2 + 4x - 1$;

b) $y = -2x^2 + 8x + 6$.

6. Khi du lịch đến thành phố St. Louis (Mỹ), ta sẽ thấy một cái cổng lớn có hình parabol hướng bề lõm xuống dưới, đó là cổng Arch. Giả sử ta lập một hệ tọa độ Oxy sao cho một chân cổng đi qua gốc O như Hình 16 (x và y tính bằng mét), chân kia của cổng ở vị trí có tọa độ $(162; 0)$. Biết một điểm M trên cổng có tọa độ là $(10; 43)$. Tính chiều cao của cổng (tính từ điểm cao nhất trên cổng xuống mặt đất), làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.



Cổng Arch (St. Louis, Mỹ)
(Nguồn: <https://visaf.vn>)



Hình 16

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP**Dạng 1: Bảng biến thiên, tính đơn điệu, GTLN và GTNN của hàm số bậc hai****1. Phương pháp**

Bảng biến thiên:

$a > 0$		
x	$-\infty$	$+\infty$
y	$+\infty$	$+\infty$
		$-\Delta/4a$
$a < 0$		
x	$-\infty$	$+\infty$
y	$-\infty$	$-\infty$
		$-\Delta/4a$

Như vậy:

- Khi $a > 0$ hàm nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$, đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ và có

$$\text{GTNN là } \frac{-\Delta}{4a} \text{ khi } x = -\frac{b}{2a}$$

- Khi $a < 0$ hàm đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ và có

$$\text{GTLN là } \frac{-\Delta}{4a} \text{ khi } x = -\frac{b}{2a}$$

* **Chú ý:** Nếu đề bài yêu cầu tìm GTLN, GTNN của hàm số trên $[c, d] \subset \mathbb{R}$ thì ta phải xem trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$ có thuộc đoạn $[c, d]$ hay không? Từ đó phát thảo ra bảng biến thiên và dựa vào bảng biến thiên để tìm GTLL, GTNN

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = f(x) = x^2 - 3x$ trên đoạn $[0; 2]$.

Lời giải

Hàm số $y = x^2 - 3x$ có $a = 1 > 0$ nên bề lõm hướng lên.

$$\text{Hoành độ đỉnh } x = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \in [0; 2].$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} m = \min y = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4} \\ M = \max y = \max\{f(0), f(2)\} = \max\{0, -2\} = 0 \end{cases}.$$

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = f(x) = -x^2 - 4x + 3$ trên đoạn $[0; 4]$.

Lời giải

Hàm số $y = -x^2 - 4x + 3$ có $a = -1 < 0$ nên bề lõm hướng xuống.

Hoành độ đỉnh $x = -\frac{b}{2a} = -2 \notin [0; 4]$.

Ta có $\begin{cases} f(4) = -29 \\ f(0) = 3 \end{cases} \longrightarrow m = \min y = f(4) = -29; M = \max y = f(0) = 3.$

Ví dụ 3: Tìm giá trị thực của tham số $m \neq 0$ để hàm số $y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng -10 trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Ta có $x = -\frac{b}{2a} = \frac{2m}{2m} = 1$, suy ra $y = -4m - 2$.

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -10 khi và chỉ khi $m > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -4m - 2 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Bảng biến thiên nào dưới đây là của hàm số $y = -x^2 + 2x + 1$:

A.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	2	$+\infty$

B.

x	$-\infty$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\infty$

C.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	2	$-\infty$

D.

x	$-\infty$	$+\infty$
y	$-\infty$	$+\infty$

Hướng dẫn giải**Chọn C.**

Xét hàm số $y = -x^2 + 2x + 1$ có $a = -1 < 0$, tọa độ đỉnh $I(1; 2)$ do đó hàm số trên tăng trên khoảng $(-\infty; 1)$ và giảm trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 2. Trục đối xứng của parabol $y = -x^2 + 5x + 3$ là đường thẳng có phương trình

A. $x = \frac{5}{4}$.

B. $x = -\frac{5}{2}$.

C. $x = -\frac{5}{4}$.

D. $x = \frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải**Chọn D.**

Trục đối xứng của parabol $y = ax^2 + bx + c$ là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$.

Trục đối xứng của parabol $y = -x^2 + 5x + 3$ là đường thẳng $x = \frac{5}{2}$.

Câu 3. Cho hàm số $y = x^2 - 2x + 3$. Chọn câu đúng.

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Hướng dẫn giải**Chọn B.**

Ta có $a = 1 > 0$, $b = -2$, $c = 3$ nên hàm số có đỉnh là $I(1; 2)$. Từ đó suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 4. Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 5$ trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$, đồng biến trên $(2; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$, nghịch biến trên $(2; +\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải**Chọn A.**

$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}.$$

Tọa độ đỉnh $I(2;1)$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$, đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Câu 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 4x + 1$.

A. -3 .

B. 1 .

C. 3 .

D. 13 .

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$y = x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3 \geq -3.$$

Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$.

Vậy hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất là -3 tại $x = 2$.

Câu 6. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{2}{x^2 - 5x + 9}$ bằng

A. $\frac{11}{8}$.

B. $\frac{11}{4}$.

C. $\frac{8}{11}$.

D. $\frac{4}{11}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } x^2 - 5x + 9 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4} \Rightarrow \frac{2}{x^2 - 5x + 9} \leq \frac{2}{\frac{11}{4}} = \frac{8}{11}$$

$$\frac{2}{x^2 - 5x + 9} = \frac{8}{11} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{2}{x^2 - 5x + 9}$ bằng $\frac{8}{11}$.

Câu 8. Hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(1; 3)$.

B. $(-\infty; 2)$.

C. $(-\infty; +\infty)$.

D. $(2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Trục đối xứng $x = 2$. Ta có $a = 1 > 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 9. Cho parabol (P) có phương trình $y = 3x^2 - 2x + 4$. Tìm trục đối xứng của parabol

- A. $x = -\frac{2}{3}$. B. $x = -\frac{1}{3}$. C. $x = \frac{2}{3}$. D. $x = \frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

+ Có $a = 3$; $b = -2$; $c = 4$.

+ Trục đối xứng của parabol là $x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{3}$.

Câu 10. Cho hàm số $y = 2x^2 - 4x + 3$ có đồ thị là parabol (P) . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. (P) không có giao điểm với trục hoành. B. (P) có đỉnh là $S(1; 1)$.
C. (P) có trục đối xứng là đường thẳng $y = 1$. D. (P) đi qua điểm $M(-1; 9)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

(P) có đỉnh là $S(1; 1)$; trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$ nên C sai.

và (P) đi qua điểm $M(-1; 9) \Rightarrow$ B, D đều đúng.

Xét phương trình $2x^2 - 4x + 3 = 0$ vô nghiệm trên $\mathbb{R}$ nên (P) không có giao điểm với trục hoành $\Rightarrow$ A đúng.

Câu 11. Hàm số $y = -x^2 + 2x - 5$ đồng biến trên khoảng:

- A. $(-1; +\infty)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(-\infty; 1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có đồ thị hàm số là một parabol có hoành độ đỉnh: $x = -\frac{b}{2a} = 1$

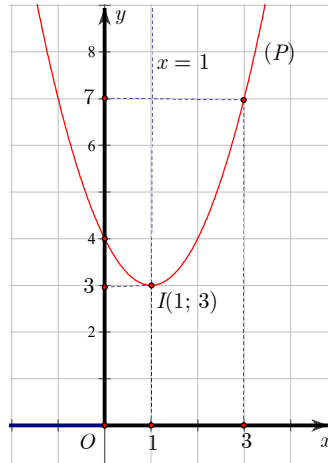
Mà hệ số $a = -1 < 0$ nên đồ thị hàm số có bề lõm quay xuống

Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$.

Câu 12. Cho hàm số $y = x^2 - 2x + 4$ có đồ thị (P) . Tìm mệnh đề **sai**.

- A. (P) có đỉnh $I(1; 3)$. B. $\min y = 4, \forall x \in [0; 3]$.
C. (P) có trục đối xứng $x = 1$. D. $\max y = 7, \forall x \in [0; 3]$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x + 4 : (P)$, ta nhận thấy:

(P) có đỉnh $I(1; 3)$ nên A đúng.

$\min y = 3, \forall x \in [0; 3]$, đạt được khi $x = 1$ nên B sai.

(P) có trục đối xứng $x = 1$ nên C đúng.

$\max y = 7, \forall x \in [0; 3]$, đạt được khi $x = 3$ nên D đúng.

Câu 13. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $(3; 4)$?

A. $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

B. $y = x^2 - 7x + 2$.

C. $y = -3x + 1$.

D. $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

+ Hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ đồng biến trên $(2; +\infty)$ nên đồng biến trên $(3; 4)$. **Chọn A**

+ Hàm số $y = x^2 - 7x + 2$ đồng biến trên $\left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$. Loại **B**.

+ Hàm số $y = -3x + 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Loại **C**.

+ Hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$ đồng biến trên $(-\infty; 1)$. Loại **D**.

Câu 14. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình bên?

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$-\infty$

A. $y = -x^2 + 5x + 2$.

B. $y = -\frac{1}{2}x^2 + x$.

C. $y = x^2 - 3x + 1$.

D. $y = \frac{1}{4}x^2 - x + 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị có bề lõm hướng xuống nên loại C, D.

Đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2 + x$ có tọa độ đỉnh $I\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 16. Bảng biến thiên của hàm số $y = -2x^2 + 4x + 1$ là bảng nào sau đây?

A.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	1	$+\infty$

B.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	3	$-\infty$

C.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$-\infty$	1	$-\infty$

D.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	3	$+\infty$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Do hệ số $a = -2 < 0$ nên parabol có bề lõm hướng xuống và đỉnh có tọa độ $I(1; 3)$.

Câu 17. Tìm m để hàm số $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2; 5]$ bằng -3 .

A. $m = -3$.

B. $m = -9$.

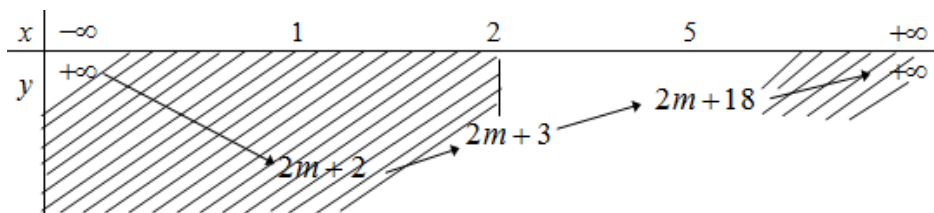
C. $m = 1$.

D. $m = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ trên đoạn $[2; 5]$:



Do đó giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2; 5]$ của hàm số $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ bằng $2m + 3$.

Theo giả thiết $2m + 3 = -3 \Leftrightarrow m = -3$.

- Câu 18.** Cho hàm số $y = x^2 - 2\left(m + \frac{1}{m}\right)x + m$ ($m > 0$) xác định trên $[-1; 1]$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1; 1]$ lần lượt là y_1, y_2 thỏa mãn $y_1 - y_2 = 8$. Khi đó giá trị của m bằng
- A. $m = 1$. B. $m \in \emptyset$. C. $m = 2$. D. $m = 1, m = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $y = f(x) = x^2 - 2\left(m + \frac{1}{m}\right)x + m$.

Hoành độ đỉnh của đồ thị hàm số là $x = m + \frac{1}{m} \geq 2$.

Vì hệ số $a = 1 > 0$ nên hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty; m + \frac{1}{m}\right)$.

Suy ra, hàm số nghịch biến $[-1; 1]$.

$$\Rightarrow y_1 = f(-1) = 3m + \frac{2}{m} + 1.$$

$$y_2 = f(1) = 1 - m - \frac{2}{m}.$$

Theo đề bài ta có: $y_1 - y_2 = 8$

$$\Leftrightarrow 3m + \frac{2}{m} + 1 - 1 + m + \frac{2}{m} = 8 \quad (m > 0) \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

- Câu 19.** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^3 - x^2 + 10x - 3$ trên đoạn $[-1; 4]$ là

A. $y_{\min} = -\frac{37}{4}, y_{\max} = 21$.

B. $y_{\max} = \frac{37}{4}, y_{\min} = -21$.

C. $y_{\min} = \frac{37}{4}, y_{\max} = 21$.

D. $y_{\max} = 5, y_{\min} = -\frac{37}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. “Tránh mua các trang và các cá nhân khác”

Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT: 0834 332 133

Ta có $y = x^4 - 4x^3 - x^2 + 10x - 3 = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x^2 + 10x - 5 + 2$

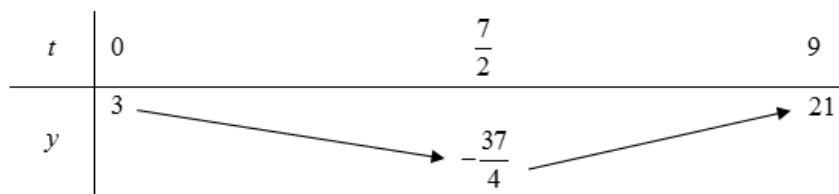
$$= (x^2 - 2x)^2 - 5(x-1)^2 + 2 = [(x-1)^2 - 1]^2 - 5(x-1)^2 + 2.$$

Đặt $t = (x-1)^2$, $x \in [-1; 4] \Rightarrow t \in [0; 9]$.

$$y = (t-1)^2 - 5t + 2 = t^2 - 7t + 3 = \left(t - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{37}{4}.$$

Cách 1: Ta có $0 \leq \left(t - \frac{7}{2}\right)^2 \leq \frac{121}{4} \Leftrightarrow -\frac{37}{4} \leq y \leq 21$.

Cách 2: Vẽ BBT



Vậy $y_{\min} = -\frac{37}{4}$, $y_{\max} = 21$.

Dạng 2: Xác định hàm số bậc hai

1. Phương pháp

- $M(x_0; y_0) \in (P) \Leftrightarrow y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$
- (P) có đỉnh $I(x_0; y_0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{b}{2a} \\ y_0 = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$ hoặc: $\begin{cases} x_0 = -\frac{b}{2a} \\ y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c \end{cases}$
- (P) nhận $x = x_0$ làm trục đối xứng $\Leftrightarrow x_0 = -\frac{b}{2a}$
- (P) có giá trị nhỏ nhất (hay lớn nhất) bằng $y_0 \Leftrightarrow \frac{-\Delta}{4a} = y_0$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1. Xác định Parabol $y = ax^2 + bx + c$ đạt cực tiểu bằng 4 tại $x = -2$ và đồ thị đi qua $A(0; 6)$

Hướng dẫn giải

Parabol có đỉnh $I(-2; 4)$ và đi qua $A(0; 6)$ nên ta có

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 4 \\ c = 6 \\ -\frac{b}{2a} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 2 \\ c = 6 \end{cases} \text{ . Vậy } y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 \text{ .}$$

Ví dụ 2. Parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua $A(8;0)$ và có đỉnh $I(6;-12)$. Xác định a, b, c

Hướng dẫn giải

$$\text{Từ giả thiết ta có hệ } \begin{cases} 64a + 8b + c = 0 \\ 36a + 6b + c = -12 \\ -\frac{b}{2a} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -36 \\ c = 96 \end{cases}$$

Ví dụ 3. Tìm các hệ số a, b, c của $(P): y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$

a) (P) đi qua $A(-1;0); B(2;0); C(0;-4)$;

b) (P) đi qua $A(-1;-2)$ và có đỉnh $I(1;2)$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$$A(-1;0) \in (P) \Rightarrow a - b + c = 0$$

$$B(2;0) \in (P) \Rightarrow 4a + 2b + c = 0$$

$$C(0;-4) \in (P) \Rightarrow c = -4$$

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} a - b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \\ c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \\ c = -4 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a = 2, b = -2, c = -4$$

b) Vì (P) đi qua $A(-1;-2)$ nên $a - b + c = -2$

Mặt khác, vì (P) có đỉnh là $I(1;2)$ nên $I(1;2) \in (P)$ hay $a + b + c = 2$

$$\text{Và } -\frac{b}{2a} = 1 \Leftrightarrow 2a + b = 0$$

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} a - b + c = -2 \\ a + b + c = 2 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a = -1; b = 2; c = 1$$

Ví dụ 4. Tìm các hệ số a, b, c của $(P): y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$

a) y nhận giá trị bằng -3 khi $x = 2$ và (P) cắt $d: y = x + 1$ tại hai điểm có hoành độ bằng 0 và bằng 1 .

b) (P) đi qua hai điểm $A(-1; 6), B(4; 3)$ và có trục đối xứng là $x = 2$.

Hướng dẫn giải

a) Theo đề : y nhận giá trị bằng -3 khi $x = 2$ nên $4a + 2b + c = -3$

Gọi (P) cắt $d: y = x + 1$ tại hai điểm M và N . Suy ra: $M(0; 1), N(1; 6)$

$$M(0; 1) \in (P) \Rightarrow c = 1$$

$$N(1; 6) \in (P) \Rightarrow a + b + c = 6$$

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} 4a + 2b + c = -3 \\ a + b + c = 6 \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -7 \\ b = 12 \\ c = 1 \end{cases}$$

Vậy $a = -7, b = 12, c = 1$

b) (P) đi qua hai điểm $A(-1; 6), B(4; 3)$ nên

$$A(-1; 6) \in (P) \Rightarrow a - b + c = 6$$

$$B(4; 3) \in (P) \Rightarrow 16a + 4b + c = 3$$

(P) và có trục đối xứng là $x = 2$ nên $-\frac{b}{2a} = 2 \Leftrightarrow 4a + b = 0$

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} a - b + c = 6 \\ 16a + 4b + c = 3 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{5} \\ b = -\frac{12}{5} \\ c = 3 \end{cases}$$

Vậy $a = \frac{3}{5}; b = -\frac{12}{5}; c = 3$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ là hàm số bậc hai.

B. $f(x) = 2x - 4$ là hàm số bậc hai.

C. $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$ là hàm số bậc hai.

D. $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ là hàm số bậc hai.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

* Theo định nghĩa tam thức bậc hai thì $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ là tam thức bậc hai.

Câu 2. Xác định parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ biết (P) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 và có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ khi $x = \frac{1}{2}$

A. $(P): y = -x^2 + x + 1$.

B. $(P): y = x^2 - x + 1$.

C. $(P): y = 2x^2 - 2x + 1$.

D. $(P): y = x^2 + x + 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có (P) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1: Khi $x = 0$ thì $y = 1 \Rightarrow c = 1$.

(P) có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ khi $x = \frac{1}{2}$ nên:

$$\begin{cases} y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \\ \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + 1 = \frac{3}{4} \\ \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b = -\frac{1}{4} \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Vậy $(P): y = x^2 - x + 1$.

Câu 3. Đồ thị của hàm số nào sau đây là parabol có đỉnh $I(-1;3)$.

A. $y = 2x^2 + 4x - 3$.

B. $y = x^2 - x + 1$.

C. $y = 2x^2 + 4x + 5$.

D. $y = 2x^2 - 2x - 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Đỉnh Parabol là } I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).$$

Do đó chỉ có đáp án C thỏa.

Câu 4. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$. Khi đó $4a + 2b$ bằng

A. -1.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Hướng dẫn giải**Chọn B.**

Do parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$ nên $-\frac{b}{2a} = 1$

$$\Leftrightarrow 2a = -b \Leftrightarrow 2a + b = 0 \Leftrightarrow 4a + 2b = 0.$$

Câu 5. Đồ thị hàm số $y = mx^2 - 2mx - m^2 - 2$ ($m \neq 0$) là parabol có đỉnh nằm trên đường thẳng $y = x - 3$ thì m nhận giá trị nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(1; 6)$.

B. $(-\infty; -2)$.

C. $(-3; 3)$.

D. $(0; +\infty)$.

Hướng dẫn giải**Chọn C.**

Ta có đồ thị hàm số $y = mx^2 - 2mx - m^2 - 2$ là parabol có đỉnh $I(1; -m^2 - m - 2)$.

$$I \in d: y = x - 3 \Leftrightarrow -m^2 - m - 2 = 1 - 3 \Leftrightarrow m^2 + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases} \Rightarrow m \in (-3; 3).$$

Câu 6. Xác định a, b, c biết Parabol có đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đi qua các điểm $M(0; -1)$, $N(1; -1)$, $P(-1; 1)$.

A. $y = x^2 - x - 1$.

B. $y = x^2 - x + 1$.

C. $y = -2x^2 - 1$.

D. $y = -x^2 + x - 1$.

Hướng dẫn giải**Chọn A.**

Vì $M \in (P)$, $N \in (P)$, $P \in (P)$ nên ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} c = -1 \\ a + b + c = -1 \\ a - b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

Vậy $(P): y = -x^2 - x - 1$.

Câu 7. Tìm parabol $(P): y = ax^2 + 3x - 2$, biết rằng parabol có trục đối xứng $x = -3$.

A. $y = x^2 + 3x - 2$.

B. $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 2$.

C. $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 2$.

D. $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$.

Hướng dẫn giải**Chọn D.**

Trục đối xứng của (P) có dạng:

$$x = -\frac{b}{2a} = -3 \Leftrightarrow -\frac{3}{2a} = -3 \Leftrightarrow -3 = -6a \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Vậy (P) có phương trình: $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$.

Câu 8. Biết rằng hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) đạt cực tiểu bằng 4 tại $x = 2$ và có đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;6)$. Tính tích $P = abc$.

- A. $P = -6$. B. $P = -3$. C. $P = 6$. D. $P = \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Nhận xét: Hàm số đi qua điểm $A(0;6)$; đạt cực tiểu bằng 4 tại $x = 2$ nên đồ thị hàm số đi qua $I(2;4)$ và nhận $x = 2$ làm trục đối xứng, hàm số cũng đi qua điểm $A(0;6)$ suy ra:

$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + c = 4 \\ c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = 6 \end{cases} \Rightarrow abc = -6.$$

Câu 9. Xác định phương trình của Parabol có đỉnh $I(0;-1)$ và đi qua điểm $A(2;3)$.

- A. $y = (x-1)^2$. B. $y = x^2 + 1$. C. $y = (x+1)^2$. D. $y = x^2 - 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Parabol (P) có dạng $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Do $I \in (P) \Rightarrow c = -1$.

$I(0;-1)$ là đỉnh của $(P) \Rightarrow \frac{-b}{2a} = 0 \Rightarrow b = 0$.

Lại có $A(2;3) \in (P) \Rightarrow 3 = 4a + 2b + c \Rightarrow a = 1$.

Nên $(P): y = x^2 - 1$.

Câu 10. Tìm m để Parabol $(P): y = mx^2 - 2x + 3$ có trục đối xứng đi qua điểm $A(2;3)$.

- A. $m = 2$. B. $m = -1$. C. $m = 1$. D. $m = \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải**Chọn D.**

Với $m = 0$ ta có phương trình $y = -2x + 3$ là phương trình đường thẳng nên loại $m = 0$.

Với $m \neq 0$. Ta có phương trình của Parabol:

$$\text{Trục đối xứng: } x = -\frac{-2}{2m} \Leftrightarrow x = \frac{1}{m}.$$

$$\text{Trục đối xứng đi qua điểm } A(2;3) \text{ nên } 2 = \frac{1}{m} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Câu 11. Cho hàm số $y = -x^2 - 2x + 1$. Chọn câu **sai**.

A. Đồ thị hàm số có trục đối xứng $x = -1$.

B. Hàm số không chẵn, không lẻ.

C. Hàm số tăng trên khoảng $(-\infty; -1)$.

D. Đồ thị hàm số nhận $I(-1;4)$ làm đỉnh.

Hướng dẫn giải**Chọn D.**

Ta có $a = -1$, $b = -2$, $c = 1$ nên đồ thị có trục đối xứng là $x = -\frac{-2}{2 \cdot (-1)} = -1$ và tọa độ đỉnh của parabol là $I(-1;2)$.

Câu 12. Cho parabol $y = ax^2 + bx + 4$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = \frac{1}{3}$ và đi qua điểm $A(1;3)$.

Tổng giá trị $a + 2b$ là

A. $-\frac{1}{2}$.

B. 1.

C. $\frac{1}{2}$.

D. -1.

Hướng dẫn giải**Chọn B.**

Vì parabol $y = ax^2 + bx + 4$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = \frac{1}{3}$ và đi qua điểm $A(1;3)$

$$\text{Nên ta có: } \begin{cases} a + b + 4 = 3 \\ -\frac{b}{2a} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ 2a + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } a + 2b = -3 + 4 = 1$$

Câu 15. Đồ thị hàm số $y = mx^2 - 2mx - m^2 - 1$ ($m \neq 0$) có đỉnh nằm trên đường thẳng $y = x - 2$ thì m nhận giá trị nằm trong khoảng nào dưới đây?

- A. $(2; 6)$. B. $(-\infty; -2)$. C. $(0; 2)$. D. $(-2; 2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đồ thị hàm số $y = mx^2 - 2mx - m^2 - 1$ ($m \neq 0$) có đỉnh là $I(1; -m^2 - m - 1)$.

Để $I(1; -m^2 - m - 1)$ nằm trên đường thẳng $y = x - 2$ thì $-m^2 - m - 1 = -1$

$$\Leftrightarrow m^2 + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 & (l) \\ m = -1 & (n) \end{cases}. \text{ Vậy } m = -1 \in (-2; 2).$$

Câu 16. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + 2$. Xác định hệ số a, b biết (P) có đỉnh $I(2; -2)$.

- A. $a = -1, b = 4$. B. $a = 1, b = 4$. C. $a = 1, b = -4$. D. $a = 4, b = -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

+ Điều kiện: $a \neq 0$.

$$+ (P) \text{ có đỉnh } I(2; -2) \text{ nên ta có hệ: } \begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ -2 = a.2^2 + b.2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b = 0 \\ 4a + 2b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}.$$

Câu 17. Parabol $(P): y = -2x^2 - ax + b$ có điểm $M(1; 3)$ với tung độ lớn nhất. Khi đó giá trị của b là

- A. 5. B. 1. C. -2. D. -3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Do bề lõm của (P) quay xuống và M có tung độ lớn nhất nên M là đỉnh của (P) .

Ta có $M(1; 3)$ là đỉnh của parabol nên $\frac{a}{-4} = 1 \Leftrightarrow a = -4$.

Suy ra $y = -2x^2 + 4x + b$ qua $M(1; 3)$ nên $b = 1$.

Câu 18. Xác định các hệ số a và b để Parabol $(P): y = ax^2 + 4x - b$ có đỉnh $I(-1; -5)$.

- A. $\begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$. C. $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$. D. $\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $x_I = -1 \Rightarrow -\frac{4}{2a} = -1 \Rightarrow a = 2.$

Hơn nữa: $I \in (P)$ nên $-5 = a - 4 - b \Rightarrow b = 3.$

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$. Biểu thức $f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1)$ có giá trị bằng

- A.** $ax^2 - bx - c$. **B.** $ax^2 + bx - c$. **C.** $ax^2 - bx + c$. **D.** $ax^2 + bx + c$.

Lời giải

Chọn D

$$f(x+3) = a(x+3)^2 + b(x+3) + c = ax^2 + (6a+b)x + 9a+3b+c.$$

$$f(x+2) = a(x+2)^2 + b(x+2) + c = ax^2 + (4a+b)x + 4a+2b+c.$$

$$f(x+1) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c = ax^2 + (2a+b)x + a+b+c.$$

$$\Rightarrow f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) = ax^2 + bx + c.$$

Dạng 3: Đồ thị hàm số bậc hai

1. Phương pháp

Để vẽ đường parabol $y = ax^2 + bx + c$ ta có thể thực hiện các bước như sau:

- Xác định tọa độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.
- Xác định trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$ và hướng bề lõm của parabol.
- Xác định một số điểm cụ thể của parabol (chẳng hạn, giao điểm của parabol với các trục tọa độ và các điểm đối xứng với chúng qua trục trục đối xứng).
- Căn cứ vào tính đối xứng, bề lõm và hình dáng parabol để vẽ parabol.

Để vẽ đồ thị hàm số $y = |ax^2 + bx + c|$ ta lần lượt làm như sau:

Trước hết ta vẽ đồ thị $(P): y = ax^2 + bx + c$

Ta có:

$$y = |ax^2 + bx + c| = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & \text{khi } ax^2 + bx + c \geq 0 \\ -\left(ax^2 + bx + c\right), & \text{khi } ax^2 + bx + c < 0 \end{cases}$$

Vậy đồ thị hàm số $y = |ax^2 + bx + c|$ bao gồm hai phần

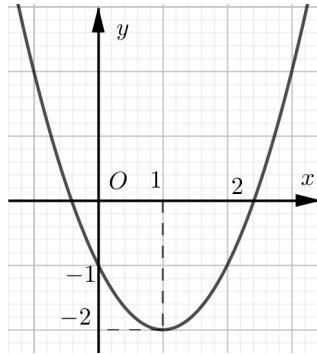
- Phần 1: Chính là đồ thị (P) lấy phần phía trên trục Ox

- Phần 2: Lấy đối xứng phần đồ thị (P) phía dưới trục Ox qua trục Ox.

Vẽ đồ thị hàm số (P_1) và (P_2)

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Câu 1. Đồ thị dưới đây là của hàm số nào sau đây?



A. $y = -x^2 - 2x + 3$.

B. $y = x^2 + 2x - 2$.

C. $y = 2x^2 - 4x - 2$.

D. $y = x^2 - 2x - 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

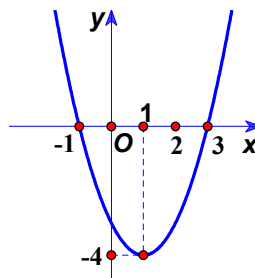
Do parabol có bề lõm quay lên nên $a > 0$, từ đó ta loại **A**.

Trục đối xứng của parabol là $x = -\frac{b}{2a} = 1$ nên ta loại **B**.

Khi $x = 0$ thì $y = -1$ nên loại **C**.

Vậy đồ thị trên là của hàm số $y = x^2 - 2x - 1$.

Câu 2. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Khi đó $2a + b + 2c$ có giá trị là



A. -9.

B. 9.

C. -6.

D. 6.

Hướng dẫn giải

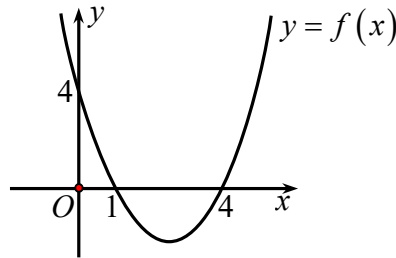
Chọn C.

Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ đi qua các điểm $A(-1; 0)$, $B(1; -4)$, $C(3; 0)$ nên có

$$\text{hệ phương trình: } \begin{cases} a - b + c = 0 \\ a + b + c = -4 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases}.$$

Khi đó: $2a + b + 2c = 2.1 - 2 + 2(-3) = -6$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$, tìm dấu của a và Δ .



A. $a > 0, \Delta > 0$.

B. $a < 0, \Delta > 0$.

C. $a > 0, \Delta = 0$.

D. $a < 0, \Delta = 0$.

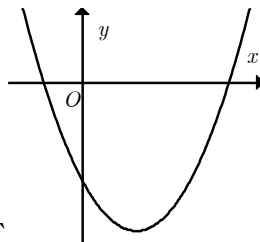
Hướng dẫn giải

Chọn A.

* Đồ thị hàm số là một Parabol quay lên nên $a > 0$ và đồ thị hàm số cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt nên $\Delta > 0$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $a > 0, b < 0, c < 0$.

B. $a > 0, b < 0, c > 0$.

C. $a > 0, b > 0, c > 0$.

D. $a < 0, b < 0, c < 0$.

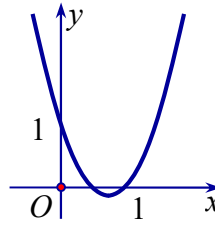
Hướng dẫn giải

Chọn A.

Parabol có bề lõm quay lên $\Rightarrow a > 0$ loại D.

Parabol cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$ loại B, C. Chọn A.

Câu 2. Đồ thị hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào?



A. $y = -2x^2 + 3x - 1$.

B. $y = -x^2 + 3x - 1$.

C. $y = 2x^2 - 3x + 1$.

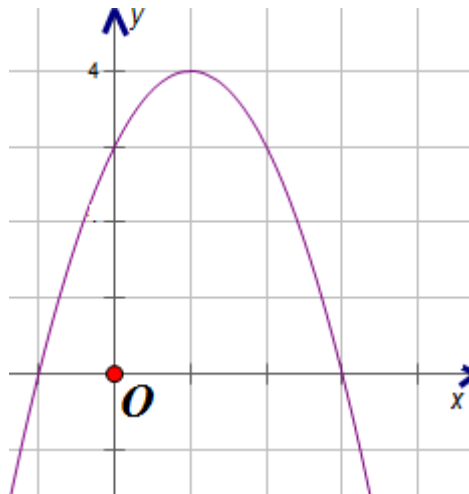
D. $y = x^2 - 3x + 1$.

Hướng dẫn giải**Chọn C.**

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1

Đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1, phương trình hoành độ giao điểm phải có

$$\text{nghiệm } x = 1, \text{ ta chỉ có phương trình } 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Câu 3. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ, thì dấu các hệ số của nó là

A. $a < 0, b < 0, c > 0$.

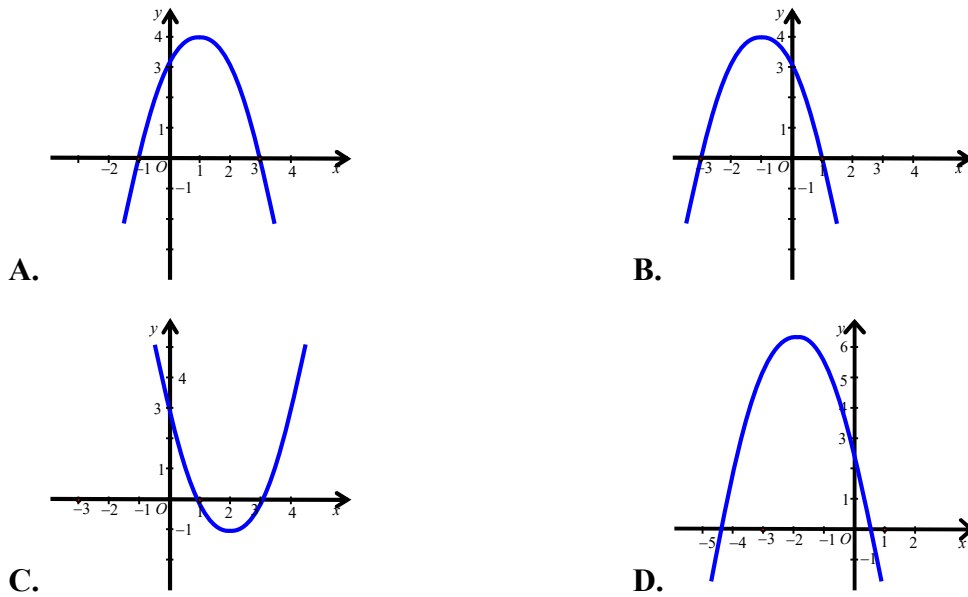
B. $a < 0, b > 0, c > 0$.

C. $a > 0, b > 0, c > 0$.

D. $a < 0, b > 0, c < 0$.

Hướng dẫn giải**Chọn B.**Đồ thị là parabol có bề lõm hướng xuống dưới nên $a < 0$.Đồ thị cắt chiều dương trục Oy nên $c > 0$.Trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a} > 0$, mà $a < 0$, nên $b > 0$.

Câu 4. Hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$ có đồ thị là hình nào trong các hình sau?



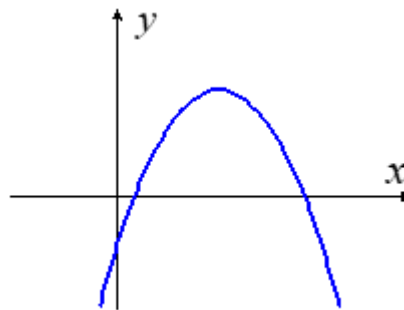
Hướng dẫn giải

Chọn A.

Do $a = -1$ nên đồ thị lõm xuống dưới $\Rightarrow$ Loại C.

Đồ thị có đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow I(1; 4)$

Câu 5. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $a < 0, b > 0, \Delta > 0$.

B. $a < 0, b < 0, \Delta > 0$.

C. $a > 0, b > 0, \Delta < 0$.

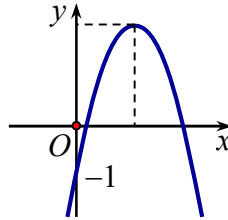
D. $a > 0, b > 0, \Delta > 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Quan sát bề lõm của parabol như hình vẽ ta có $a < 0$ loại C. và D. , parabol cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt nên $\Delta > 0$. Cho $x = 0$ thì giao của parabol với trục tung Oy là $c < 0$.

Câu 6. Hàm số nào có đồ thị như hình vẽ sau



A. $y = x^2 - 3x - 1$.

B. $y = -2x^2 + 5x - 1$.

C. $y = 2x^2 - 5x - 1$.

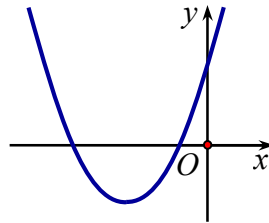
D. $y = -2x^2 + 5x$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Do bề lõm parabol hướng xuống nên $a < 0$ và qua $A(0; -1)$.

Câu 7. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Mệnh nào sau đây đúng?



A. $a > 0, b = 0, c > 0$.

B. $a > 0, b > 0, c > 0$.

C. $a > 0, b < 0, c > 0$.

D. $a < 0, b > 0, c > 0$.

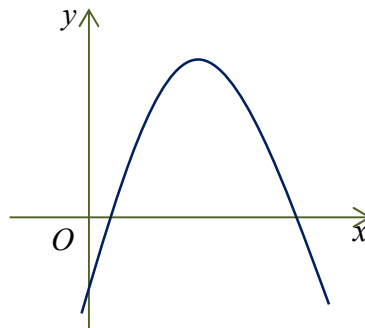
Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đồ thị có bề lõm quay lên trên $\Rightarrow a > 0$. Loại đáp án D.

Trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow a.b > 0 \Rightarrow b > 0$.

Câu 8. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $a < 0, b > 0, c > 0$.

B. $a > 0, b < 0, c > 0$.

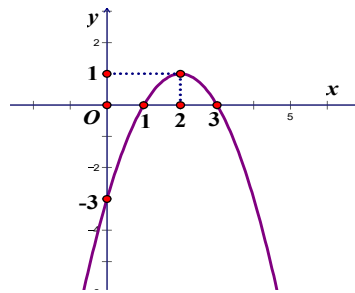
C. $a < 0, b > 0, c < 0$.

D. $a > 0, b > 0, c < 0$.

Hướng dẫn giải**Chọn C.**

Nhìn vào đồ thị ta có:

- ☐ Bề lõm hướng xuống $\Rightarrow a < 0$.
- ☐ Hoành độ đỉnh $x = -\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow \frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow b > 0$.
- ☐ Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow c < 0$.

Do đó: $a < 0, b > 0, c < 0$.**Câu 9.** Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?

A. $y = -x^2 + 2x - 3$.

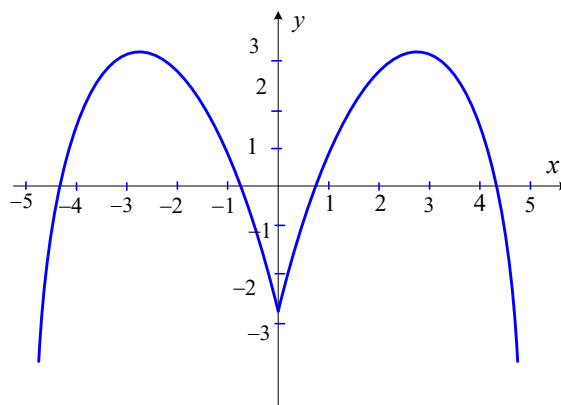
B. $y = -x^2 + 4x - 3$.

C. $y = x^2 - 4x + 3$.

D. $y = x^2 - 2x - 3$.

Hướng dẫn giải**Chọn B**Dựa vào đồ thị suy ra: $a < 0$ và hoành độ đỉnh là 2.

$$y = -x^2 + 4x - 3 \Rightarrow a = -1; I(2;1)$$

Câu 10. Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên

A. $y = x^2 - 3x - 3$.

B. $y = -x^2 + 5|x| - 3$.

C. $y = -x^2 - 3|x| - 3$.

D. $y = -x^2 + 5x - 3$.

Hướng dẫn giải**Chọn B.**

Quan sát đồ thị ta loại A. và D. Phần đồ thị bên phải trục tung là phần đồ thị (P) của hàm số $y = -x^2 + 5x - 3$ với $x > 0$, tọa độ đỉnh của (P) là $\left(\frac{5}{2}; \frac{13}{4}\right)$, trục đối xứng là $x = 2,5$. Phần đồ thị bên trái trục tung là do lấy đối xứng phần đồ thị bên phải của (P) qua trục tung Oy . Ta được cả hai phần là đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 5|x| - 3$.

Câu 11. Đồ thị hàm số $y = x^2 - 6|x| + 5$.

A. có tâm đối xứng $I(3; -4)$.

B. có tâm đối xứng $I(3; -4)$ và trục đối xứng có phương trình $x = 0$.

C. không có trục đối xứng.

D. có trục đối xứng là đường thẳng có phương trình $x = 0$.

Hướng dẫn giải**Chọn D.**

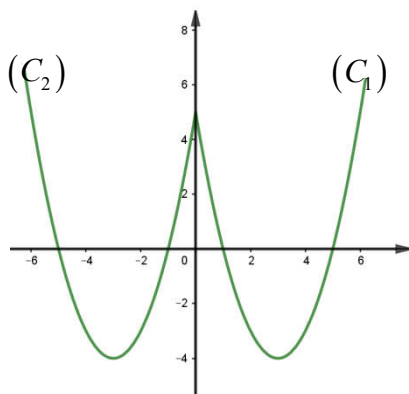
$$\text{Ta có: } y = x^2 - 6|x| + 5 = \begin{cases} y_1 = x^2 - 6x + 5 & \text{khi } x \geq 0 \ (C_1) \\ y_2 = x^2 + 6x + 5 & \text{khi } x < 0 \ (C_2) \end{cases}$$

Đồ thị (C) của hàm số $y = x^2 - 6|x| + 5$ gồm hai phần

Phần đồ thị (C_1) : là phần đồ thị của hàm số $y_1 = x^2 - 6x + 5$ nằm bên phải trục tung

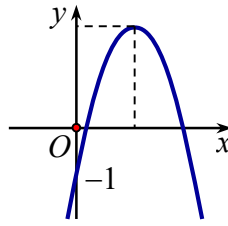
Phần đồ thị (C_2) : là phần đồ thị của hàm số $y_2 = x^2 + 6x + 5$ có được bằng cách lấy đối xứng phần đồ thị (C_1) qua trục tung

Ta có đồ thị (C) như hình vẽ



Vậy: đồ thị (C) có trục đối xứng có phương trình $x = 0$.

Câu 12. hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a < 0, b < 0, c < 0$.

B. $a < 0, b = 0, c < 0$.

C. $a > 0, b > 0, c < 0$.

D. $a < 0, b > 0, c < 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

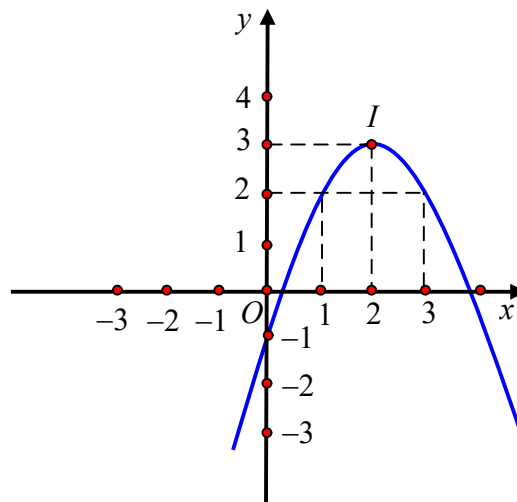
Quan sát đồ thị ta có:

Đồ thị quay bề lõm xuống dưới nên $a < 0$; có hoành độ đỉnh $x_I = -\frac{b}{2a} > 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a} < 0 \Rightarrow b > 0$.

Lại có: đồ thị cắt Ox tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$.

Vậy $a < 0, b > 0, c < 0$.

Câu 13. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình bên. Tìm các giá trị m để phương trình $|ax^2 + bx + c| = m$ có bốn nghiệm phân biệt.



A. $-1 < m < 3$.

B. $0 < m < 3$.

C. $0 \leq m \leq 3$.

D. $-1 \leq m \leq 3$.

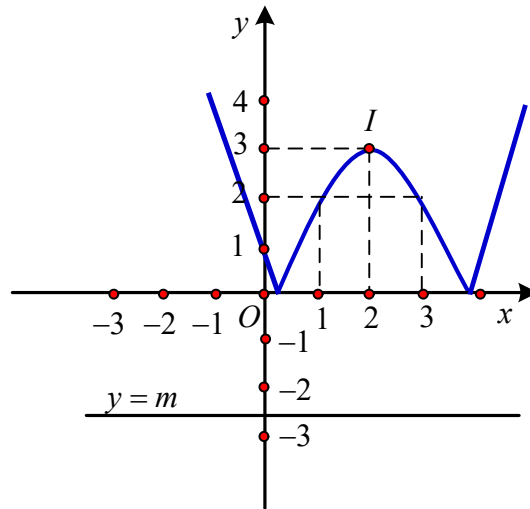
Hướng dẫn giải

Chọn B.

Quan sát đồ thị ta có đỉnh của parabol là $I(2;3)$ nên
$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ 3 = 4a + 2b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases}.$$

Mặt khác (P) cắt trục tung tại $(0; -1)$ nên $c = -1$. Suy ra $\begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases}$.

$(P): y = -x^2 + 4x - 1$ suy ra hàm số $y = |-x^2 + 4x - 1|$ có đồ thị là phần đồ thị phía trên trục hoành của (P) và phần có được do lấy đối xứng phần phía dưới trục hoành của (P) , như hình vẽ sau:



Phương trình $|ax^2 + bx + c| = m$ hay $|-x^2 + 4x - 1| = m$ có bốn nghiệm phân biệt khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = |-x^2 + 4x - 1|$ tại bốn điểm phân biệt.

Suy ra $0 < m < 3$.

Dạng 4: Sự tương giao

1. Phương pháp

- Thiết lập phương trình hoành độ giao điểm
- Khai thác các điều kiện
- Xử lý phương trình hoành độ giao điểm
- Lựa chọn các kết luận cần thiết

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Cho parabol $(P): y = x^2 - 2x + m - 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để parabol cắt Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox là

$$x^2 - 2x + m - 1 = 0. \quad (1)$$

Để parabol cắt Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm

$$\text{dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 2 - m > 0 \\ S = 2 > 0 \\ P = m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 2.$$

Ví dụ 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = mx$ cắt đồ thị hàm số $(P): y = x^3 - 6x^2 + 9x$ tại ba điểm phân biệt.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) với d là $x^3 - 6x^2 + 9x = mx$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 6x + 9 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 6x + 9 - m = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Để (P) cắt d tại ba điểm phân biệt khi và chỉ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 0^2 - 6 \cdot 0 + 9 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 9 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq 9 \end{cases}.$$

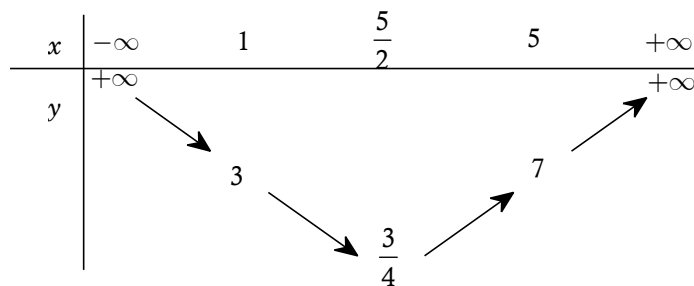
Ví dụ 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 - 5x + 7 + 2m = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 5]$.

Lời giải

Ta có $x^2 - 5x + 7 + 2m = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 7 = -2m$. (*)

Phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P): x^2 - 5x + 7$ và đường thẳng $y = -2m$ (song song hoặc trùng với trục hoành).

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = x^2 - 5x + 7$ trên $[1; 5]$ như sau:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $x \in [1; 5]$ thì $y \in [\frac{3}{4}; 7]$.

Do đó để phương trình (*) có nghiệm $x \in [1; 5] \Leftrightarrow \frac{3}{4} \leq -2m \leq 7 \Leftrightarrow -\frac{3}{8} \geq m \geq -\frac{7}{2}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị là parabol (P) . Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (1). Chọn khẳng định **sai**:

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Câu 2. Tọa độ giao điểm của đường thẳng $d: y = -x + 4$ và parabol $y = x^2 - 7x + 12$ là

- A.** $(-2; 6)$ và $(-4; 8)$. **B.** $(2; 2)$ và $(4; 8)$.
C. $(2; -2)$ và $(4; 0)$. **D.** $(2; 2)$ và $(4; 0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 7x + 12 = -x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 2 \\ x = 4 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$

Câu 3. Nghiệm của phương trình $x^2 - 8x + 5 = 0$ có thể xem là hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số:

- A.** $y = x^2$ và $y = -8x + 5$. **B.** $y = x^2$ và $y = -8x - 5$.
C. $y = x^2$ và $y = 8x - 5$. **D.** $y = x^2$ và $y = 8x + 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $x^2 - 8x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8x - 5$.

Do đó nghiệm của phương trình $x^2 - 8x + 5 = 0$ có thể xem là hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = x^2$ và $y = 8x - 5$.

Câu 4. Giao điểm của parabol $(P): y = x^2 - 3x + 2$ với đường thẳng $y = x - 1$ là

- A.** $(-1; 2); (2; 1)$. **B.** $(1; 0); (3; 2)$.
C. $(2; 1); (0; -1)$. **D.** $(0; -1); (-2; -3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$$x^2 - 3x + 2 = x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Vậy hai giao điểm của (P) và (d) là $(1;0); (3;2)$.

Câu 5. Cho đường thẳng $d: y = x + 1$ và Parabol $(P): y = x^2 - x - 2$. Biết rằng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B . Khi đó diện tích tam giác OAB bằng

- A. 4. B. 2. C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là $x^2 - x - 2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$.

Phương trình này có $a - b + c = 0$ nên có hai nghiệm $x_1 = -1, x_2 = 3$.

Suy ra $A(-1;0)$ và $B(3;4)$.

Diện tích tam giác OAB bằng $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = \frac{3}{2}$.

Câu 6. Biết đường thẳng $d: y = mx$ cắt Parabol $(P): y = x^2 - x + 1$ tại hai điểm phân biệt A, B . Khi đó tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

- A. $I\left(\frac{1+m}{2}; \frac{m^2+m}{2}\right)$. B. $I\left(\frac{1+m}{2}; \frac{-m^2-2m+3}{4}\right)$.
C. $I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$. D. $I\left(\frac{1}{2}; \frac{m}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) :

$$mx = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow x^2 - (m+1)x + 1 = 0$$

Vì hoành độ giao điểm x_A, x_B là hai nghiệm của phương trình nên ta có tọa độ trung điểm I

$$\text{là } \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{m(x_A + x_B)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{m+1}{2} \\ y_I = \frac{m^2+m}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{1+m}{2}; \frac{m^2+m}{2}\right).$$

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = 2x + 3$ cắt parabol $y = x^2 + (m+2)x - m$ tại hai điểm phân biệt nằm cùng phía với trục tung Oy .

A. $m > -3$.

B. $m < -3$.

C. $m > 3$.

D. $m < 0$.

Hướng dẫn giải**Chọn B.**

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 + (m+2)x - m = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + mx - m - 3 = 0. \quad (1)$$

Để đường thẳng d cắt parabol tại hai điểm phân biệt nằm cùng phía với trục tung Oy thì

$$\text{phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt cùng dấu} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4m + 12 > 0 \\ -m - 3 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m < -3.$$

Câu 8. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong nửa khoảng $[-10; -4)$ để đường thẳng $d: y = -(m+1)x + m + 2$ cắt Parabol $(P): y = x^2 + x - 2$ tại hai điểm phân biệt cùng phía với trục tung?

A. 6.

B. 5.

C. 7.

D. 8.

Hướng dẫn giải**Chọn A.**

$$\text{Xét phương trình: } -(m+1)x + m + 2 = x^2 + x - 2 \Leftrightarrow x^2 + x(m+2) - m - 4 = 0$$

Để đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt cùng phía với trục tung vậy điều kiện

$$\text{là } \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)^2 + 4(m+4) > 0 \\ -m - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 8m + 20 > 0, \forall m \\ m < -4 \end{cases}$$

Vậy trong nửa khoảng $[-10; -4)$ có 6 giá trị nguyên m .**Câu 9.** Tìm m để Parabol $(P): y = x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1 \cdot x_2 = 1$.

A. $m = 2$.

B. Không tồn tại m .

C. $m = -2$.

D. $m = \pm 2$.

Hướng dẫn giải**Chọn A.**

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm của } (P) \text{ với trục hoành: } x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0 \quad (1).$$

Parabol (P) cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1 \cdot x_2 = 1$

$$\Leftrightarrow (1) \text{ có 2 nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \text{ thỏa } x_1 \cdot x_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 - (m^2 - 3) > 0 \\ m^2 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 10. Cho hai hàm số $y_1 = x^2 + (m-1)x + m$, $y_2 = 2x + m + 1$. Khi đồ thị hai hàm số cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì m có giá trị là

- A. $m > 0$. B. $m < 0$. C. m tùy ý. D. không có giá trị nào.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 + (m-1)x + m = 2x + m + 1 \Leftrightarrow x^2 + (m-3)x - 1 = 0(1)$.

Khi đồ thị hai hàm số cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì pt(1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = (m-3)^2 + 4 > 0 \text{ luôn đúng } \forall m \in \mathbb{R}.$$

Câu 11. Đường thẳng $d_m: (m-2)x + my = -6$ luôn đi qua điểm:

- A. $(3; -3)$ B. $(2; 1)$ C. $(1; -5)$ D. $(3; 1)$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$(m-2)x + my = -6 \Leftrightarrow (x+y)m - 2x + 6 = 0 \quad (*)$$

Phương trình (*) luôn đúng với mọi m khi $\begin{cases} x+y=0 \\ -2x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases}$

Vậy d_m luôn đi qua điểm cố định $(3; -3)$.

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị m để đường thẳng $y = mx + 3 - 2m$ cắt parabol $y = x^2 - 3x - 5$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ trái dấu.

- A. $m < -3$. B. $-3 < m < 4$. C. $m < 4$. D. $m \leq 4$.

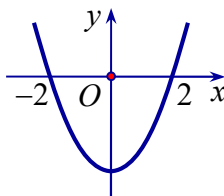
Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 3x - 5 = mx + 3 - 2m \Leftrightarrow x^2 - (m+3)x + 2m - 8 = 0 (*)$.

Đường thẳng cắt parabol tại hai điểm phân biệt có hoành độ trái dấu khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a.c < 0 \Leftrightarrow 2m - 8 < 0 \Leftrightarrow m < 4$.

Câu 13. Cho parabol $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), (P) có đồ thị như hình vẽ:



Biết đồ thị (P) cắt trục Ox tại các điểm lần lượt có hoành độ là $-2, 2$. Tập nghiệm của bất phương trình $y < 0$ là

A. $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

B. $(-2; 2)$.

C. $[-2; 2]$.

D. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ta thấy $y < 0$ khi $x \in (-2; 2)$.

Câu 14. Giá trị nào của m thì phương trình $(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt?

A. $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

B. $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}$.

C. $m \in \left(-\frac{3}{5}; 1\right)$.

D. $m \in \left(-\frac{3}{5}; +\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m-3 \neq 0 \\ \Delta = (m+3)^2 + 4(m-3)(m+1) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ 5m^2 - 2m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ \begin{cases} x < -\frac{3}{5} \\ x > 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}.$$

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị thực của m để đường thẳng $d: y = 4x - 2m$ tiếp xúc với parabol $(P): y = (m-2)x^2 + 2mx - 3m + 1$

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 0.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là $(m-2)x^2 + 2mx - 3m + 1 = 4x - 2m$

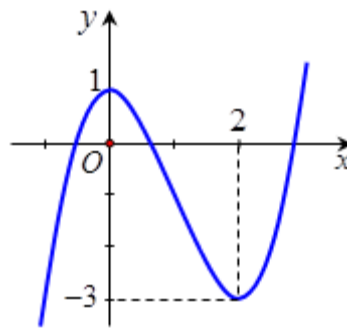
$$\Leftrightarrow (m-2)x^2 + 2(m-2)x - m + 1 = 0.$$

d tiếp xúc với $(P) \Rightarrow$ phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) có nghiệm kép.

$$\Rightarrow \begin{cases} m-2 \neq 0 \\ \Delta' = (m-2)^2 - (m-2)(-m+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m = 2 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}.$$

Vậy có 1 giá trị m để đường thẳng d tiếp xúc với (P) .

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình $2f(x) - 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$2f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}.$$

Số nghiệm phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng

$$y = \frac{1}{2}.$$

Dựa vào đồ thị hàm số suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$

Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $|f(x) - 1| = m$ có bốn nghiệm phân biệt.

A. $m = 1$.

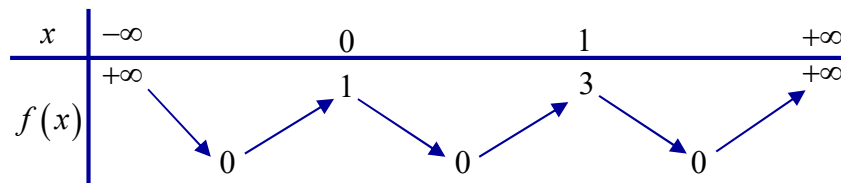
B. $1 < m < 3$.

C. $0 < m < 1$.

D. $m \geq 3$.

Hướng dẫn giải**Chọn B.**

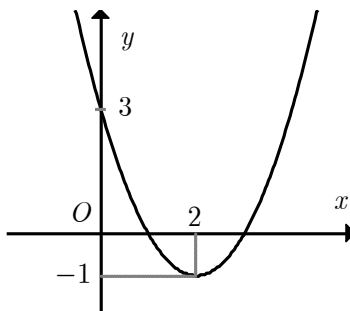
Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x) - 1|$.



Từ BBT suy ra phương trình $|f(x) - 1| = m$ có bốn nghiệm phân biệt khi $1 < m < 3$.

Vậy $1 < m < 3$.

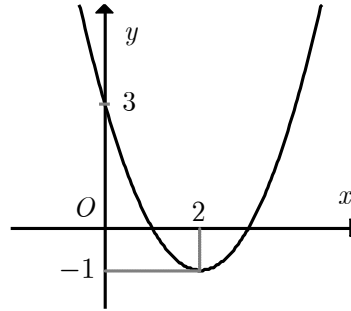
Câu 18. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ đồ thị như hình bên dưới. Hỏi với những giá trị nào của tham số m thì phương trình $f(|x|) - 1 = m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

A. $-2 < m < 2$.B. $m = 3$.C. $m > 3$.D. $m = 2$.**Hướng dẫn giải****Chọn D.**

Hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là (C) , lấy đối xứng phần đồ thị nằm bên phải Oy của (C) qua Oy ta được đồ thị (C') của hàm số $y = f(|x|)$.

Dựa vào đồ thị, phương trình $f(|x|) - 1 = m \Leftrightarrow (|x|) = m + 1$ có đúng 3 nghiệm phân biệt khi $m + 1 = 3 \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ đồ thị như hình bên dưới. Hỏi với những giá trị nào của tham số m thì phương trình $|f(x)| - 1 = m$ có đúng 2 nghiệm phân biệt.



A. $\begin{cases} m \geq 0 \\ m = -1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} m > 0 \\ m = -1 \end{cases}$

C. $m \geq -1$.

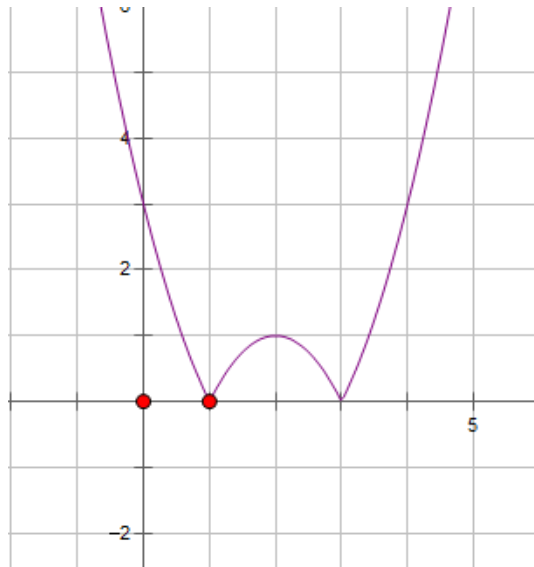
D. $m \geq 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

+ Phương trình $\Leftrightarrow |f(x)| = m + 1$.

+ Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có dạng:



+ Dựa vào đồ thị, để phương trình $|f(x)| = m + 1$ có hai nghiệm phân biệt thì:

$$\begin{cases} m + 1 > 1 \\ m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m = -1 \end{cases}$$

Câu 20. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong nửa khoảng $(0; 2017]$ để phương trình $|x^2 - 4|x| - 5| - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 2016.

B. 2008.

C. 2009.

D. 2017.

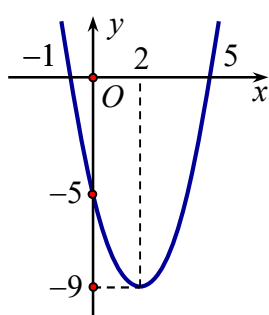
Hướng dẫn giải

Chọn B.

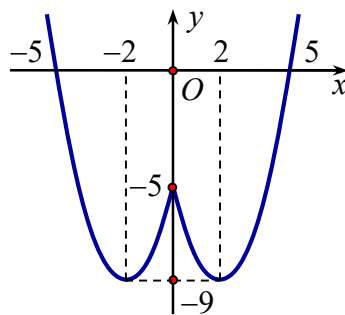
PT: $|x^2 - 4|x| - 5| - m = 0 \Leftrightarrow |x^2 - 4|x| - 5| = m$.

Số nghiệm phương trình (1) $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4|x| - 5|(P)$ và đường thẳng $y = m$.

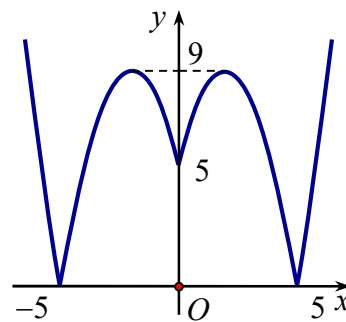
Xét hàm số $y = x^2 - 4x - 5 (P_1)$ có đồ thị như hình 1.



Hình 1.



Hình 2.



Hình 3.

Xét hàm số $y = x^2 - 4|x| - 5 (P_2)$ là hàm số chẵn nên có đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng. Mà $y = x^2 - 4|x| - 5 = x^2 - 4x - 5$ nếu $x \geq 0$. Suy ra đồ thị hàm số (P_2) gồm hai phần:

- ☐ Phần 1: Giữ nguyên đồ thị hàm số (P_1) phần bên phải Oy .
- ☐ Phần 2: Lấy đối xứng phần 1 qua trục Oy .

Ta được đồ thị (P_2) như hình 2.

Xét hàm số $y = |x^2 - 4|x| - 5|(P)$, ta có: $y = \begin{cases} x^2 - 4|x| - 5 & (y \geq 0) \\ -(x^2 - 4|x| - 5) & (y < 0) \end{cases}$.

Suy ra đồ thị hàm số (P) gồm hai phần:

- ☐ Phần 1: Giữ nguyên đồ thị hàm số (P_2) phần trên Ox .
- ☐ Phần 2: Lấy đối xứng đồ thị hàm số (P_2) phần dưới Ox qua trục Ox .

Ta được đồ thị (P) như hình 3.

Quan sát đồ thị hàm số (P) ta có: Để $|x^2 - 4|x| - 5| = m$ (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 9 \\ m = 0 \end{cases}$.

Mà $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (0; 2017] \end{cases} \Rightarrow m \in \{10; 11; 12; \dots; 2017\}$.

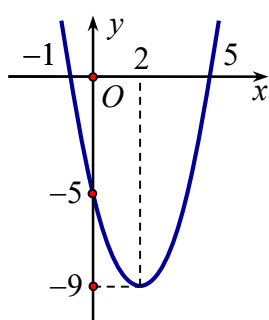
Câu 21. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong nửa khoảng $(0; 2017]$ để phương trình $|x^2 - 4|x| - 5| - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

- A. 2016. B. 2008. C. 2009. D. 2017.

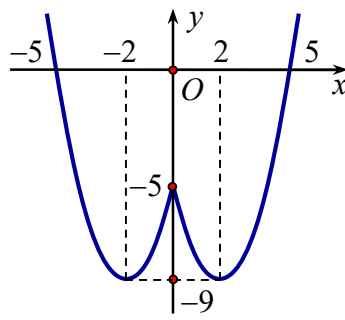
Hướng dẫn giải**Chọn B.**

PT: $|x^2 - 4|x| - 5| - m = 0 \Leftrightarrow |x^2 - 4|x| - 5| = m(1)$. Số nghiệm phương trình (1) $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4|x| - 5|(P)$ và đường thẳng $y = m$.

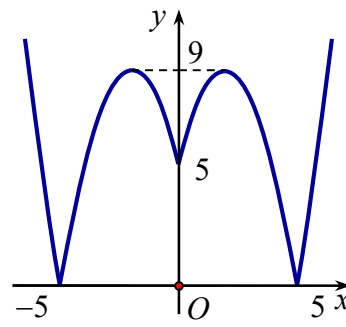
Xét hàm số $y = x^2 - 4x - 5 (P_1)$ có đồ thị như hình 1.



Hình 1.



Hình 2.



Hình 3.

Xét hàm số $y = x^2 - 4|x| - 5 (P_2)$ là hàm số chẵn nên có đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng. Mà $y = x^2 - 4|x| - 5 = x^2 - 4x - 5$ nếu $x \geq 0$. Suy ra đồ thị hàm số (P_2) gồm hai phần:

- ☐ Phần 1: Giữ nguyên đồ thị hàm số (P_1) phần bên phải Oy .
- ☐ Phần 2: Lấy đối xứng phần 1 qua trục Oy .

Ta được đồ thị (P_2) như hình 2.

Xét hàm số $y = |x^2 - 4|x| - 5|(P)$, ta có: $y = \begin{cases} x^2 - 4|x| - 5 & (y \geq 0) \\ -(x^2 - 4|x| - 5) & (y < 0) \end{cases}$.

Suy ra đồ thị hàm số (P) gồm hai phần:

- ☐ Phần 1: Giữ nguyên đồ thị hàm số (P_2) phần trên Ox .
- ☐ Phần 2: Lấy đối xứng đồ thị hàm số (P_2) phần dưới Ox qua trục Ox .

Ta được đồ thị (P) như hình 3.

Quan sát đồ thị hàm số (P) ta có: Để $|x^2 - 4|x| - 5| = m$ (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 9 \\ m = 0 \end{cases}$.

Mà $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (0; 2017] \end{cases} \Rightarrow m \in \{10; 11; 12; \dots; 2017\}$.

Dạng 4: Toán thực tế

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh học thấy rằng: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 360 - 10n$. Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích để trọng lượng cá sau một vụ thu được nhiều nhất?

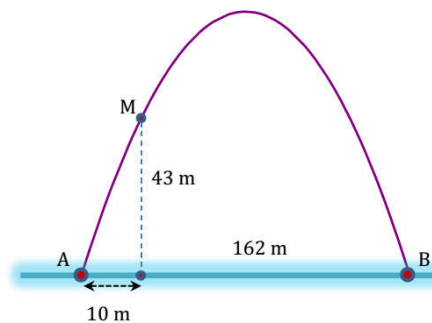
Hướng dẫn giải

Trọng lượng cá trên đơn vị diện tích là

$$T = (360 - 10n)n = 360n - 10n^2 = -10(n^2 - 36n + 324 - 324) = -10(n - 18)^2 + 3240$$

$$\Rightarrow T_{\max} = 3240 \text{ khi } n = 18.$$

Ví dụ 2: Cổng Arch tại thành phố St Louis của Mỹ có hình dạng là một parabol. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng bằng 162m. Trên thành cổng, tại vị trí có độ cao 43m so với mặt đất, người ta thả một sợi dây chạm đất. Vị trí chạm đất của đầu sợi dây này cách chân cổng A một đoạn 10m. Giả sử các số liệu trên là chính xác. Hãy tính độ cao của cổng Arch.



Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Phương trình Parabol (P) có dạng $y = ax^2 + bx + c$.

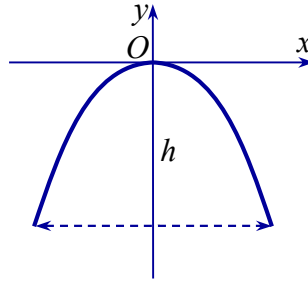
Parabol (P) đi qua điểm $A(0;0)$, $B(162;0)$, $M(10;43)$ nên ta có

$$\begin{cases} c = 0 \\ 162^2 a + 162b + c = 0 \\ 10^2 a + 10b + c = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = -\frac{43}{1520} \\ b = \frac{3483}{760} \end{cases} \Rightarrow (P): y = -\frac{43}{1520}x^2 + \frac{3483}{760}x.$$

$$\text{Do đó chiều cao của cổng là } h = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \approx 185,6 \text{ m.}$$

3. Bài tập trắc nghiệm

- Câu 1.** Một chiếc cổng hình parabol có phương trình $y = -\frac{1}{2}x^2$. Biết cổng có chiều rộng $d = 5$ mét. Hãy tính chiều cao h của cổng.



- A. $h = 4,45$ mét. B. $h = 3,125$ mét. C. $h = 4,125$ mét. D. $h = 3,25$ mét.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi A và B là hai điểm ứng với hai chân cổng như hình vẽ.

Vì cổng hình parabol có phương trình $y = -\frac{1}{2}x^2$ và cổng có chiều rộng $d = 5$ mét nên:

$$AB = 5 \text{ và } A\left(-\frac{5}{2}; -\frac{25}{8}\right); B\left(\frac{5}{2}; -\frac{25}{8}\right).$$

Vậy chiều cao của cổng là $\left| -\frac{25}{8} \right| = \frac{25}{8} = 3,125$ mét.

- Câu 2.** Một cửa hàng buôn giày nhập một đôi với giá là 40 đôla. Cửa hàng ước tính rằng nếu đôi giày được bán với giá x đôla thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua $(120 - x)$ đôi. Hỏi cửa hàng bán một đôi giày giá bao nhiêu thì thu được nhiều lãi nhất?

- A. 80 USD. B. 160 USD. C. 40 USD. D. 240 USD.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi y là số tiền lãi của cửa hàng bán giày.

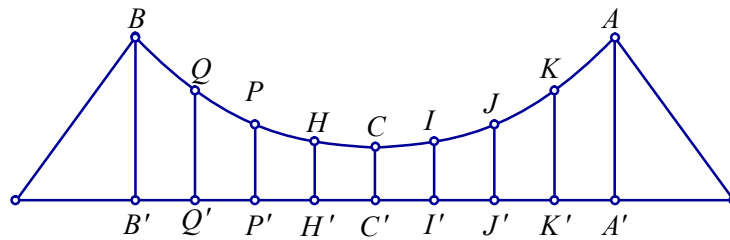
$$\text{Ta có } y = (120 - x)(x - 40) = -x^2 + 160x - 4800 = -(x - 80)^2 + 1600 \leq 1600.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 80$.

Vậy cửa hàng lãi nhiều nhất khi bán đôi giày với giá 80 USD.

- Câu 3.** Dây truyền đỡ trên cầu treo có dạng Parabol ACB như hình vẽ. Đầu, cuối của dây được gắn vào các điểm A, B trên mỗi trụ AA' và BB' với độ cao 30m. Chiều dài đoạn $A'B'$ trên nền cầu bằng 200m. Độ cao ngắn nhất của dây truyền trên cầu là $OC = 5$ m. Gọi $Q', P', H', O, I', J', K'$ là các điểm chia đoạn $A'B'$ thành các phần bằng nhau. Các thanh thẳng đứng nối

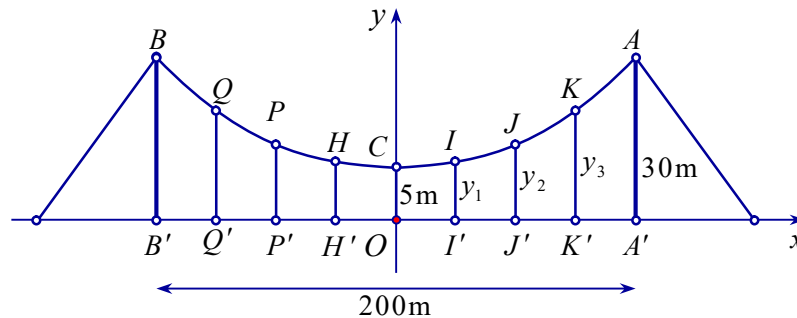
nền cầu với dây dây treo: QQ' , PP' , HH' , OC , II' , JJ' , KK' gọi là các dây cáp treo.
 Tính tổng độ dài của các dây cáp treo?



- A. Đáp án khác. B. 36,87 m. C. 73,75 m. D. 78,75 m.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Giả sử Parabol có dạng: $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ, khi đó parabol đi qua điểm $A(100; 30)$, và có đỉnh $C(0; 5)$.
 Đoạn AB chia làm 8 phần, mỗi phần 25 m.

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} 30 = 10000a + 100b + c \\ \frac{-b}{2a} = 0 \\ 5 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{400} \\ b = 0 \\ c = 5 \end{cases} \Rightarrow (P): y = \frac{1}{400}x^2 + 5.$$

Khi đó, tổng độ dài của các dây cáp treo bằng $OC + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3$

$$\begin{aligned} &= 5 + 2\left(\frac{1}{400} \cdot 25^2 + 5\right) + 2\left(\frac{1}{400} \cdot 50^2 + 5\right) + 2\left(\frac{1}{400} \cdot 75^2 + 5\right) \\ &= 78,75(\text{m}). \end{aligned}$$

Câu 4. Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe hơn đa Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm là sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp

phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất.

- A. 30 triệu đồng. B. 29 triệu đồng.
C. 30,5 triệu đồng. D. 29,5 triệu đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi x đồng là số tiền mà doanh nghiệp A dự định giảm giá; $(0 \leq x \leq 4)$.

Khi đó:

Lợi nhuận thu được khi bán một chiếc xe là $31 - x - 27 = 4 - x$.

Số xe mà doanh nghiệp sẽ bán được trong một năm là $600 + 200x$.

Lợi nhuận mà doanh nghiệp thu được trong một năm là

$$f(x) = (4 - x)(600 + 200x) = -200x^2 + 200x + 2400.$$

Xét hàm số $f(x) = -200x^2 + 200x + 2400$ trên đoạn $[0; 4]$ có bảng biến thiên

$$\text{Vậy } \max_{[0;4]} f(x) = 2450 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy giá mới của chiếc xe là 30,5 triệu đồng thì lợi nhuận thu được là cao nhất.

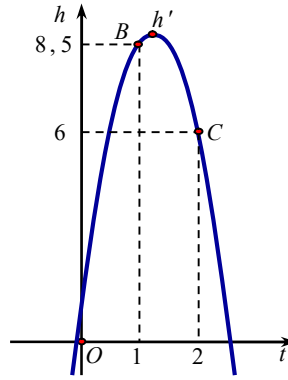
Câu 5. Khi quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt độ cao nào đó rồi rơi xuống đất. Biết rằng quỹ đạo của quả là một cung parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oth , trong đó t là thời gian, kể từ khi quả bóng được đá lên; h là độ cao của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao 1,2m. Sau đó 1 giây, nó đạt độ cao 8,5m và 2 giây sau khi đá lên, nó ở độ cao 6m. Hãy tìm hàm số bậc hai biểu thị độ cao h theo thời gian t và có phần đồ thị trùng với quỹ đạo của quả bóng trong tình huống trên.

- A. $y = 4,9t^2 + 12,2t + 1,2$. B. $y = -4,9t^2 + 12,2t + 1,2$.
C. $y = -4,9t^2 + 12,2t - 1,2$. D. $y = -4,9t^2 - 12,2t + 1,2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tại $t = 0$ ta có $y = h = 1,2$; tại $t = 1$ ta có $y = h = 8,5$; tại $t = 2$, ta có $y = h = 6$.



Chọn hệ trục Oth như hình vẽ.

Parabol (P) có phương trình: $y = at^2 + bt + c$, với $a \neq 0$.

Giả sử tại thời điểm t' thì quả bóng đạt độ cao lớn nhất h' .

Theo bài ra ta có: tại $t = 0$ thì $h = 1,2$ nên $A(0; 1,2) \in (P)$.

Tại $t = 1$ thì $h = 8,5$ nên $B(1; 8,5) \in (P)$.

Tại $t = 2$ thì $h = 6$ nên $C(2; 6) \in (P)$.

$$\text{Vậy ta có hệ: } \begin{cases} c = 1,2 \\ a + b + c = 8,5 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1,2 \\ a = -4,9 \\ b = 12,2 \end{cases}.$$

Vậy hàm số Parabol cần tìm có dạng: $y = -4,9t^2 + 12,2t + 1,2$.

§3 DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

Để xây dựng phương án kinh doanh cho một loại sản phẩm, doanh nghiệp tính toán lợi nhuận y (đồng) theo công thức sau: $y = -200x^2 + 92\,000x - 8\,400\,000$, trong đó x là số sản phẩm được bán ra. Như vậy, việc đánh giá hiệu quả kinh doanh loại sản phẩm trên dẫn tới việc xét dấu của $y = -200x^2 + 92\,000x - 8\,400\,000$, tức là ta cần xét dấu của tam thức bậc hai $f(x) = -200x^2 + 92\,000x - 8\,400\,000$.



Làm thế nào để xét dấu của tam thức bậc hai?

Đa thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) còn gọi là *tam thức bậc hai*. Sau đây, ta sẽ làm quen với việc xét dấu của tam thức bậc hai.

I. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

Xét tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

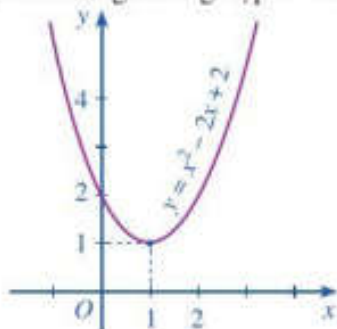
Ta đã biết:

- $ax^2 + bx + c > 0$ ứng với phần parabol $y = ax^2 + bx + c$ nằm phía trên trục hoành.
- $ax^2 + bx + c < 0$ ứng với phần parabol $y = ax^2 + bx + c$ nằm phía dưới trục hoành.

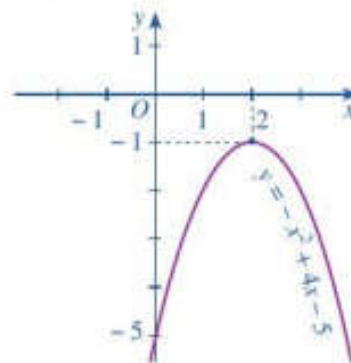
Như vậy, ta có thể nhận ra dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ là “+” (hoặc “-”) thông qua việc nhận ra phần parabol $y = ax^2 + bx + c$ nằm phía trên (hoặc phía dưới) trục hoành.



- Quan sát Hình 17 và cho biết dấu của tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 2x + 2$.
- Quan sát Hình 18 và cho biết dấu của tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 4x - 5$.
- Từ đó rút ra mối liên hệ về dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) với dấu của hệ số a trong trường hợp $\Delta < 0$.



Hình 17

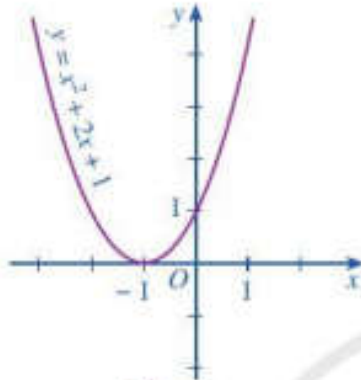


Hình 18

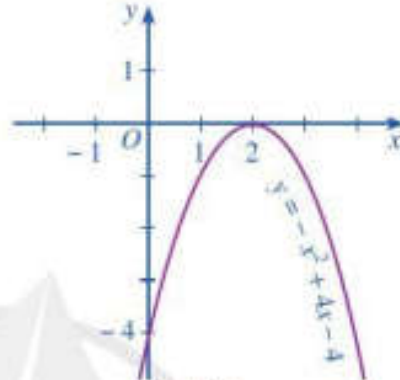
Nhận xét: Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.



- a) Quan sát *Hình 19* và cho biết dấu của tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + 2x + 1$.
- b) Quan sát *Hình 20* và cho biết dấu của tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 4x - 4$.
- c) Từ đó rút ra mối liên hệ về dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) với dấu của hệ số a trong trường hợp $\Delta = 0$.



Hình 19

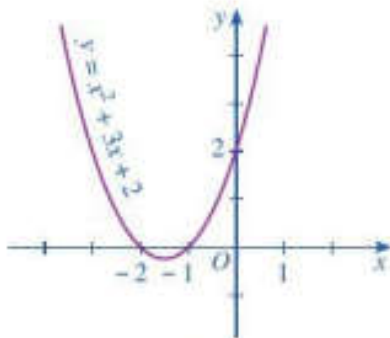


Hình 20

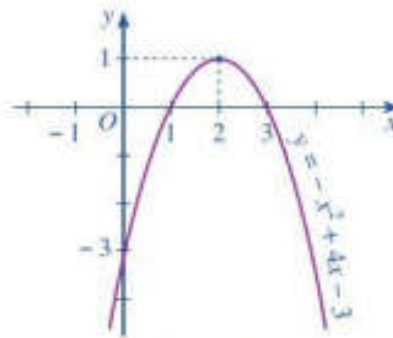
Nhận xét: Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$.



- a) Quan sát *Hình 21* và cho biết dấu của tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + 3x + 2$ tùy theo các khoảng của x .
- b) Quan sát *Hình 22* và cho biết dấu của tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ tùy theo các khoảng của x .
- c) Từ đó rút ra mối liên hệ về dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) với dấu của hệ số a tùy theo các khoảng của x trong trường hợp $\Delta > 0$.



Hình 21



Hình 22

Nhận xét: Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi x thuộc các khoảng $(-\infty; x_1)$ và $(x_2; +\infty)$; $f(x)$ trái dấu với hệ số a với mọi x thuộc khoảng $(x_1; x_2)$, trong đó x_1, x_2 là hai nghiệm của $f(x)$ và $x_1 < x_2$.

Người ta đã chứng minh được định lý về dấu tam thức bậc hai sau:



Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), $\Delta = b^2 - 4ac$.

+ Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.

+ Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$.

+ Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2 ($x_1 < x_2$). Khi đó:

$f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi x thuộc các khoảng $(-\infty; x_1)$ và $(x_2; +\infty)$;

$f(x)$ trái dấu với hệ số a với mọi x thuộc khoảng $(x_1; x_2)$.

Nhận xét: Trong định lý, có thể thay biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ bằng biệt thức thu gọn $\Delta' = (b')^2 - ac$ với $b = 2b'$.

II. Ví dụ

Ví dụ 1 Xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = 3x^2 - x + 1$;

b) $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$.

Giải

a) Tam thức bậc hai $f(x) = 3x^2 - x + 1$ có $\Delta = -11 < 0$, hệ số $a = 3 > 0$ nên $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Tam thức bậc hai $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$ có $\Delta = 0$, nghiệm kép $x_0 = -\frac{1}{2}$ và hệ số $a = 4 > 0$ nên $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$.

Ví dụ 2 Lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai

$f(x) = x^2 - 3x + 2$.

Giải

Tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 3x + 2$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1, x_2 = 2$ và hệ số $a = 1 > 0$.

Ta có bảng xét dấu $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

1 Xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau:

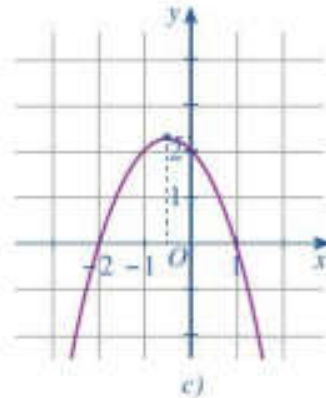
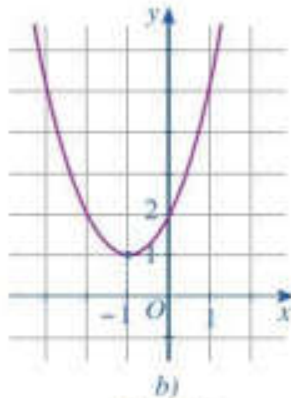
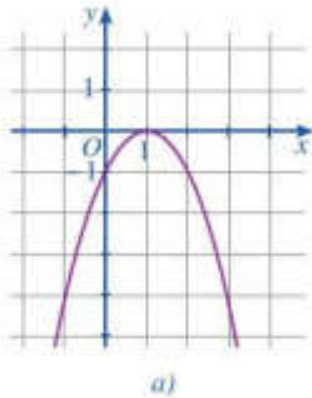
a) $f(x) = -2x^2 + 4x - 5$;

b) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$.

2 Lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai:

$f(x) = -x^2 - 2x + 8$.

Ví dụ 3 Tìm nghiệm và lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x)$ ứng với đồ thị hàm số $y = f(x)$ được cho ở mỗi Hình 23a, 23b, 23c.



Hình 23

Giải

a) Từ đồ thị Hình 23a ta có nghiệm của tam thức bậc hai $f(x)$ là $x = 1$. Bảng xét dấu tam thức $f(x)$ là:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	-	0	-

b) Từ đồ thị Hình 23b ta có tam thức bậc hai $f(x)$ vô nghiệm. Bảng xét dấu tam thức $f(x)$ là:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	+	+

c) Từ đồ thị Hình 23c ta có tam thức bậc hai $f(x)$ có hai nghiệm là $x_1 = -2$ và $x_2 = 1$. Bảng xét dấu tam thức $f(x)$ là:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Ví dụ 4 Trong bài toán ở phần mở đầu, dựa theo số sản phẩm bán ra, cho biết doanh nghiệp có lãi khi nào, bị lỗ khi nào.

Giải

Xét tam thức bậc hai $f(x) = -200x^2 + 92\,000x - 8\,400\,000$.

Nhận thấy $f(x)$ có hai nghiệm là $x_1 = \frac{-460 + \sqrt{43\,600}}{-2} \approx 125,6$; $x_2 = \frac{-460 - \sqrt{43\,600}}{-2} \approx 334,4$

và hệ số $a = -200 < 0$. Ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

Vì x là số nguyên dương nên:

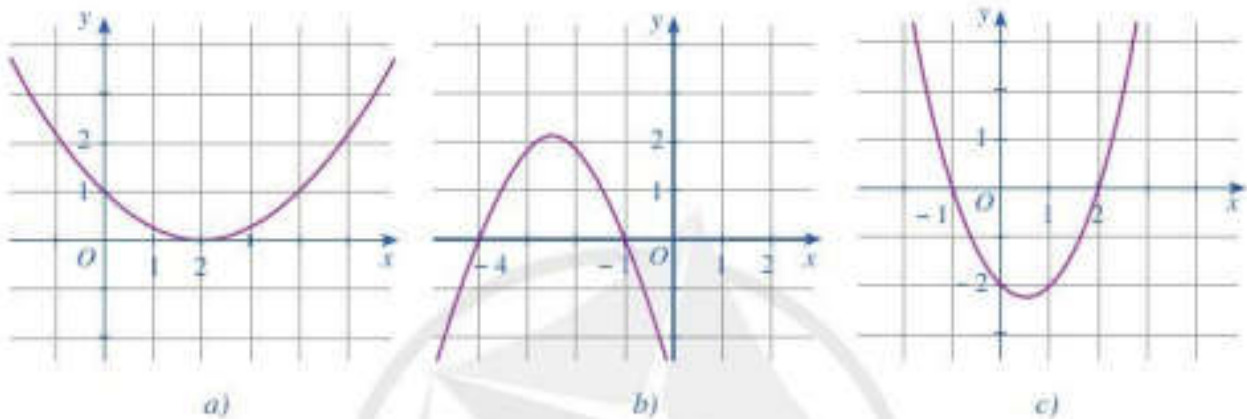
+) Doanh nghiệp có lãi khi và chỉ khi $f(x) > 0$, tức là $126 \leq x \leq 334$.

+) Doanh nghiệp bị lỗ khi và chỉ khi $f(x) < 0$, tức là $x \leq 125$ hoặc $x \geq 335$.

Vậy doanh nghiệp có lãi khi bán từ 126 đến 334 sản phẩm, doanh nghiệp bị lỗ khi bán tối đa 125 sản phẩm hoặc bán tối thiểu 335 sản phẩm.

BÀI TẬP

- Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?
 - $x^2 - 2x - 3 > 0$ khi và chỉ khi $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.
 - $x^2 - 2x - 3 < 0$ khi và chỉ khi $x \in [-1; 3]$.
- Tìm nghiệm và lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x)$ với đồ thị được cho ở mỗi Hình 24a, 24b, 24c.



Hình 24

- Xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau:
 - $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$;
 - $f(x) = 9x^2 + 6x + 1$;
 - $f(x) = 2x^2 - 3x + 10$;
 - $f(x) = -5x^2 + 2x + 3$;
 - $f(x) = -4x^2 + 8x - 4$;
 - $f(x) = -3x^2 + 3x - 1$.
- Một công ty du lịch thông báo giá tiền cho chuyến đi tham quan của một nhóm khách du lịch như sau:
50 khách đầu tiên có giá là 300 000 đồng/người. Nếu có nhiều hơn 50 người đăng kí thì cứ có thêm 1 người, giá vé sẽ giảm 5 000 đồng/người cho toàn bộ hành khách.
 - Gọi x là số lượng khách từ người thứ 51 trở lên của nhóm. Biểu thị doanh thu theo x .
 - Số người của nhóm khách du lịch nhiều nhất là bao nhiêu thì công ty không bị lỗ? Biết rằng chi phí thực sự cho chuyến đi là 15 080 000 đồng.
- Bộ phận nghiên cứu thị trường của một xí nghiệp xác định tổng chi phí để sản xuất Q sản phẩm là $Q^2 + 180Q + 140 000$ (nghìn đồng). Giả sử giá mỗi sản phẩm bán ra thị trường là 1 200 nghìn đồng.
 - Xác định lợi nhuận xí nghiệp thu được sau khi bán hết Q sản phẩm đó, biết rằng lợi nhuận là hiệu của doanh thu trừ đi tổng chi phí để sản xuất.
 - Xí nghiệp sản xuất bao nhiêu sản phẩm thì hoà vốn?
 - Xí nghiệp cần sản xuất số sản phẩm là bao nhiêu để không bị lỗ?

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP**Dạng 1. Xét dấu của tam thức bậc****1. Phương pháp**

Dấu của tam thức bậc hai được thể hiện trong bảng sau

$f(x) = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$	
$\Delta < 0$	$a.f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
$\Delta = 0$	$a.f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$
$\Delta > 0$	$a.f(x) > 0, \forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$
	$a.f(x) < 0, \forall x \in (x_1; x_2)$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Xét dấu các tam thức sau

a) $3x^2 - 2x + 1$. b) $-2x^2 + 6x - 5$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\Delta' = -2 < 0, a = 3 > 0$ suy ra $3x^2 - 2x + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Ta có $\Delta' = -1 < 0, a < 0$ suy ra $-2x^2 + 6x - 5 < 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 2: Xét dấu các tam thức sau

a) $25x^2 + 10x + 1$. b) $-4x^2 + 12x - 9$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\Delta' = 0, a > 0$ suy ra $25x^2 + 10x + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{5}\right\}$.

b) Ta có $\Delta' = 0, a < 0$ suy ra $-4x^2 + 12x - 9 < 0 \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Ví dụ 3: Xét dấu các tam thức sau

a) $3x^2 - 2x - 8$. b) $-x^2 + 4x + 5$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $3x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	2	$+\infty$	
$3x^2-2x-8$	$+$	0	$-$	0	$+$

Suy ra $3x^2 - 2x - 8 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup (2; +\infty)$ và $3x^2 - 2x - 8 < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{4}{3}; 2\right)$.

b) Ta có $-x^2 + 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 5 \end{cases}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$	
$-x^2 + 4x + 5$	$-$	0	$+$	0	$-$

Suy ra $-x^2 + 4x + 5 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 5)$ và $-x^2 + 4x + 5 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Điều kiện để $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là

A. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ khi $a > 0$ và $\Delta < 0$.

Câu 2: Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Điều kiện để $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là

A. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

Lời giải

Chọn A

$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ khi $a > 0$ và $\Delta \leq 0$.

Câu 3: Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Điều kiện để $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là

- A. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

$f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ khi $a < 0$ và $\Delta < 0$.

Câu 4: Cho $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$. Điều kiện để $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là

- A. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

$f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ khi $a < 0$ và $\Delta \leq 0$.

Câu 5: Cho $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ có $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Khi đó mệnh đề nào đúng?

- A. $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. B. $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
C. $f(x)$ không đổi dấu. D. Tồn tại x để $f(x) = 0$.

Lời giải

Chọn C

Vì $\Delta < 0$ và $a \neq 0$ nên $f(x)$ không đổi dấu trên $\mathbb{R}$.

Câu 6: Tam thức bậc hai $f(x) = 2x^2 + 2x + 5$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

- A. $x \in (0; +\infty)$. B. $x \in (-2; +\infty)$. C. $x \in \mathbb{R}$. D. $x \in (-\infty; 2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases} a = 2 > 0 \\ \Delta' = 1 - 2.5 = -9 < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 7: Số giá trị nguyên của x để tam thức $f(x) = 2x^2 - 7x - 9$ nhận giá trị âm là

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{9}{2} \end{cases}$. Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$\frac{9}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < \frac{9}{2}$. Mà x nguyên nên $x \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Câu 8: Tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + (1 - \sqrt{3})x - 8 - 5\sqrt{3}$:

A. Dương với mọi $x \in \mathbb{R}$. B. Âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

C. Âm với mọi $x \in (-2 - \sqrt{3}; 1 + 2\sqrt{3})$. D. Âm với mọi $x \in (-\infty; 1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - \sqrt{3} \\ x = 1 + 2\sqrt{3} \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-2 - \sqrt{3}$		$1 + 2\sqrt{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) < 0 \Leftrightarrow -2 - \sqrt{3} < x < 1 + 2\sqrt{3}$.

Câu 9: Tam thức bậc hai $f(x) = (1 - \sqrt{2})x^2 + (5 - 4\sqrt{2})x - 3\sqrt{2} + 6$

A. Dương với mọi $x \in \mathbb{R}$. B. Dương với mọi $x \in (-3; \sqrt{2})$.

C. Dương với mọi $x \in (-4; \sqrt{2})$. D. Âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) > 0 \Leftrightarrow -3 < x < \sqrt{2}$.

Câu 10: Cho $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề đúng là:

A. $f(x) < 0, \forall x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$

B. $f(x) \leq 0, \forall x \in [1; 3]$

C. $f(x) \geq 0, \forall x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$

D. $f(x) > 0, \forall x \in [1; 3]$

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$.**Câu 11:** Dấu của tam thức bậc 2: $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ được xác định như sau:

A. $f(x) < 0$ với $2 < x < 3$ và $f(x) > 0$ với $x < 2$ hoặc $x > 3$.

B. $f(x) < 0$ với $-3 < x < -2$ và $f(x) > 0$ với $x < -3$ hoặc $x > -2$.

C. $f(x) > 0$ với $2 < x < 3$ và $f(x) < 0$ với $x < 2$ hoặc $x > 3$.

D. $f(x) > 0$ với $-3 < x < -2$ và $f(x) < 0$ với $x < -3$ hoặc $x > -2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

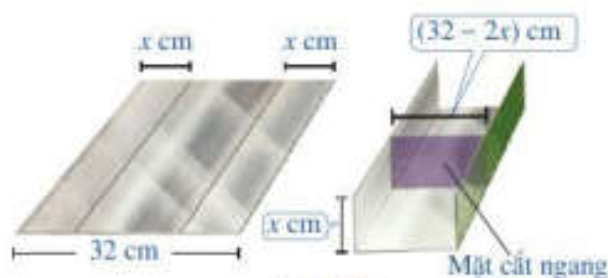
x	$-\infty$	2		3		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	0	-

Dựa vào bảng xét dấu ta được

$f(x) > 0$ với $2 < x < 3$ và $f(x) < 0$ với $x < 2$ hoặc $x > 3$.

S4 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Bác Dũng muốn uốn tấm tôn phẳng có dạng hình chữ nhật với bề ngang 32 cm thành một rãnh dẫn nước bằng cách chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông (Hình 25). Để đảm bảo kỹ thuật, diện tích mặt cắt ngang của rãnh dẫn nước phải lớn hơn hoặc bằng 120 cm^2 .



Hình 25

Rãnh dẫn nước phải có độ cao ít nhất là bao nhiêu xăng-ti-mét?



I. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

1 Quan sát và nêu đặc điểm của biểu thức ở vế trái của bất phương trình $3x^2 - 4x - 8 < 0$.

- Bất phương trình bậc hai ẩn x là bất phương trình có một trong các dạng sau: $ax^2 + bx + c < 0$; $ax^2 + bx + c \leq 0$; $ax^2 + bx + c > 0$; $ax^2 + bx + c \geq 0$, trong đó a, b, c là các số thực đã cho, $a \neq 0$.
- Đối với bất phương trình bậc hai có dạng $ax^2 + bx + c < 0$, mỗi số $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $ax_0^2 + bx_0 + c < 0$ được gọi là một nghiệm của bất phương trình đó. Tập hợp các nghiệm x_0 như thế còn được gọi là tập nghiệm của bất phương trình bậc hai đã cho.
- Nghiệm và tập nghiệm của các dạng bất phương trình bậc hai ẩn x còn lại được định nghĩa tương tự.

Ví dụ 1 Cho bất phương trình bậc hai một ẩn $x^2 - 4x + 3 < 0$ (1). Trong các giá trị sau đây của x , giá trị nào là nghiệm của bất phương trình (1)?

- a) $x = 2$; b) $x = 0$; c) $x = 3$.

Giải

- a) Với $x = 2$, ta có: $2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 < 0$. Vậy $x = 2$ là nghiệm của bất phương trình (1).
 b) Với $x = 0$, ta có: $0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 > 0$. Vậy $x = 0$ không phải là nghiệm của bất phương trình (1).
 c) Với $x = 3$, ta có: $3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 0$. Vậy $x = 3$ không phải là nghiệm của bất phương trình (1).

- 1** a) Cho hai ví dụ về bất phương trình bậc hai một ẩn.
 b) Cho hai ví dụ về bất phương trình mà không phải là bất phương trình bậc hai một ẩn.

Chú ý: Giải bất phương trình bậc hai ẩn x là đi tìm tập nghiệm của bất phương trình đó.

II. GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

1. Giải bất phương trình bậc hai một ẩn bằng cách xét dấu của tam thức bậc hai



a) Lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - x - 2$.

b) Giải bất phương trình $x^2 - x - 2 > 0$.

Nhận xét: Để giải bất phương trình bậc hai (một ẩn) có dạng $f(x) > 0$ ($f(x) = ax^2 + bx + c$), ta chuyển việc giải bất phương trình đó về việc tìm tập hợp những giá trị của x sao cho $f(x)$ mang dấu "+". Cụ thể, ta làm như sau:

Bước 1. Xác định dấu của hệ số a và tìm nghiệm của $f(x)$ (nếu có).

Bước 2. Sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai để tìm tập hợp những giá trị của x sao cho $f(x)$ mang dấu "+".

Chú ý: Các bất phương trình bậc hai có dạng $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$ được giải bằng cách tương tự.

Ví dụ 2 / Giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $2x^2 - 5x + 2 > 0$;

b) $-x^2 - 2x + 8 > 0$.

Giải

a) Tam thức bậc hai $2x^2 - 5x + 2$ có hai nghiệm $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$ và có hệ số $a = 2 > 0$.

Sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của x sao cho tam thức $2x^2 - 5x + 2$ mang dấu "+" là $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $2x^2 - 5x + 2 > 0$ là $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

b) Tam thức bậc hai $-x^2 - 2x + 8$ có hai nghiệm $x_1 = -4$, $x_2 = 2$ và có hệ số $a = -1 < 0$.

Sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của x sao cho tam thức $-x^2 - 2x + 8$ mang dấu "+" là $(-4; 2)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 - 2x + 8 > 0$ là $(-4; 2)$.

2. Giải bất phương trình bậc hai một ẩn bằng cách sử dụng đồ thị

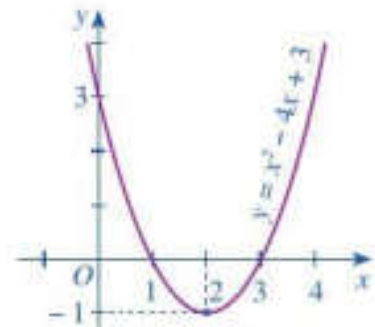


Cho bất phương trình $x^2 - 4x + 3 > 0$ (2).

Quan sát parabol (P): $y = x^2 - 4x + 3$ ở Hình 26 và cho biết:

- a) Bất phương trình (2) biểu diễn phần parabol (P) nằm ở phía nào của trục hoành.
b) Phần parabol (P) nằm phía trên trục hoành ứng với những giá trị nào của x .

Bất phương trình (2) biểu diễn phần parabol (P) nằm phía trên trục hoành tương ứng với $x < 1$ hoặc $x > 3$.



Hình 26

Nhận xét

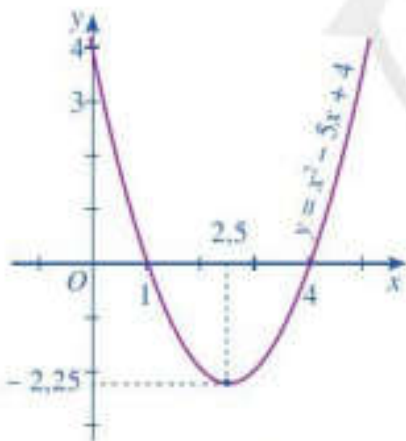
- Giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c > 0$ là tìm tập hợp những giá trị của x ứng với phần parabol $y = ax^2 + bx + c$ nằm phía trên trục hoành.
- Tương tự, giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c < 0$ là tìm tập hợp những giá trị của x ứng với phần parabol $y = ax^2 + bx + c$ nằm phía dưới trục hoành.

Như vậy, để giải bất phương trình bậc hai (một ẩn) có dạng $f(x) > 0$ ($f(x) = ax^2 + bx + c$) bằng cách sử dụng đồ thị, ta có thể làm như sau: Dựa vào parabol $y = ax^2 + bx + c$, ta tìm tập hợp những giá trị của x ứng với phần parabol đó nằm phía trên trục hoành. Đối với các bất phương trình bậc hai có dạng $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$, ta cũng làm tương tự.

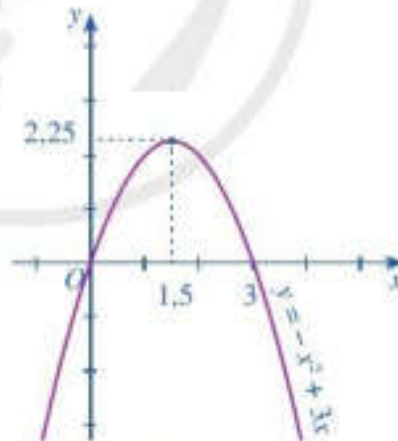
Ví dụ 3 Quan sát đồ thị ở Hình 27, Hình 28 và giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $x^2 - 5x + 4 < 0$.

b) $-x^2 + 3x > 0$.



Hình 27



Hình 28

Giải

- a) Quan sát đồ thị ở Hình 27, ta thấy: $x^2 - 5x + 4 < 0$ biểu diễn phần parabol $y = x^2 - 5x + 4$ nằm phía dưới trục hoành, tương ứng với $1 < x < 4$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 5x + 4 < 0$ là khoảng $(1 ; 4)$.

3 Giải mỗi bất phương trình bậc hai sau bằng cách sử dụng đồ thị:

a) $x^2 + 2x + 2 > 0$;

b) $-3x^2 + 2x - 1 > 0$.

- b) Quan sát đồ thị ở Hình 28, ta thấy: $-x^2 + 3x > 0$ biểu diễn phần parabol $y = -x^2 + 3x$ nằm phía trên trục hoành, tương ứng với $0 < x < 3$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 + 3x > 0$ là khoảng $(0 ; 3)$.

III. ỨNG DỤNG CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Bất phương trình bậc hai một ẩn có nhiều ứng dụng, chẳng hạn: giải một số hệ bất phương trình; ứng dụng vào tính toán lợi nhuận trong kinh doanh; tính toán điểm rơi trong pháo binh; ...

Chúng ta sẽ làm quen với những ứng dụng đó qua một số ví dụ sau đây.

Ví dụ 4 Giải bài toán ở phần mở đầu.

Giải

Khi chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông như Hình 25 thì kích thước của mặt cắt ngang là x (cm) và $32 - 2x$ (cm). Khi đó diện tích mặt cắt ngang là $(32 - 2x)x$ (cm²).

Ta thấy: Diện tích mặt cắt ngang của rãnh dẫn nước lớn hơn 120 cm² khi và chỉ khi

$$(32 - 2x)x \geq 120 \Leftrightarrow -2x^2 + 32x - 120 \geq 0.$$

Tam thức $-2x^2 + 32x - 120$ có hai nghiệm $x_1 = 6$, $x_2 = 10$ và hệ số $a = -2 < 0$. Sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của x sao cho tam thức $-2x^2 + 32x - 120$ mang dấu “+” là $(6 ; 10)$. Do đó tập nghiệm của bất phương trình $-2x^2 + 32x - 120 \geq 0$ là $[6 ; 10]$.

Vậy rãnh dẫn nước phải có độ cao ít nhất là 6 cm.

Ví dụ 5 Tìm giao các tập nghiệm của hai bất phương trình sau:

$$x^2 + 2x - 8 < 0 \quad (3) \text{ và } x^2 - 9 < 0 \quad (4)$$

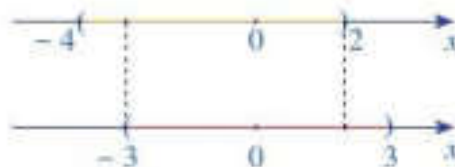
Giải

Ta có: $(3) \Leftrightarrow -4 < x < 2$. Tập nghiệm của bất phương trình (3) là $S_3 = (-4 ; 2)$;

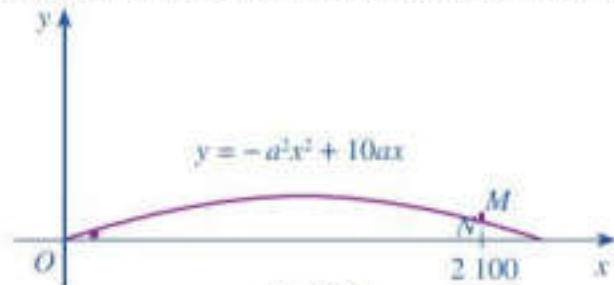
$(4) \Leftrightarrow -3 < x < 3$. Tập nghiệm của bất phương trình (4) là $S_4 = (-3 ; 3)$.

Giao các tập nghiệm của hai bất phương trình trên là:

$$S = S_3 \cap S_4 = (-4 ; 2) \cap (-3 ; 3) = (-3 ; 2).$$



Ví dụ 6 Một tình huống trong huấn luyện pháo binh được mô tả như sau: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , khẩu đại bác được biểu thị bằng điểm $O(0; 0)$ và bia mục tiêu được biểu thị bằng đoạn thẳng MN với $M(2\ 100; 25)$ và $N(2\ 100; 15)$ (Hình 29). Xạ thủ cần xác định parabol $y = -a^2x^2 + 10ax$ ($a > 0$) mô tả quỹ đạo chuyển động của viên đạn sao cho viên đạn bắn ra từ khẩu đại bác phải chạm vào bia mục tiêu. Tìm giá trị lớn nhất của a để xạ thủ đạt được mục đích trên.



Hình 29

Giải

Tại vị trí $x = 2\ 100$, độ cao của viên đạn là:

$$y = -a^2 \cdot 2\ 100^2 + 10a \cdot 2\ 100 = -4\ 410\ 000a^2 + 21\ 000a.$$

Viên đạn chạm được vào bia mục tiêu khi và chỉ khi a thỏa mãn các bất phương trình sau:

$$2100 \leq \frac{10}{a} \quad (5); \quad -4\ 410\ 000a^2 + 21\ 000a \leq 25 \quad (6); \quad -4\ 410\ 000a^2 + 21\ 000a \geq 15 \quad (7).$$

$$\bullet (5) \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq 210 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{210}. \text{ Vì } a > 0 \text{ nên } a \in \left(0; \frac{1}{210}\right].$$

$$\bullet (6) \Leftrightarrow 4\ 410\ 000a^2 - 21\ 000a + 25 \geq 0 \\ \Leftrightarrow (2\ 100a - 5)^2 \geq 0. \text{ Bất phương trình này đúng } \forall a > 0.$$

$$\bullet (7) \Leftrightarrow 4\ 410\ 000a^2 - 21\ 000a + 15 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2\ 100} \leq a \leq \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2\ 100} \\ \Leftrightarrow a \in \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2\ 100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2\ 100}\right].$$

$$\text{Do } \frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2\ 100} > 0 \text{ và } \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2\ 100} < \frac{1}{210} \text{ nên}$$

$$\left(0; \frac{1}{210}\right] \cap \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2\ 100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2\ 100}\right] = \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2\ 100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2\ 100}\right].$$

Vì thế, viên đạn chạm được vào bia mục tiêu khi và chỉ khi

$$a \in \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2\ 100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2\ 100}\right].$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của } a \text{ là } \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2\ 100}.$$

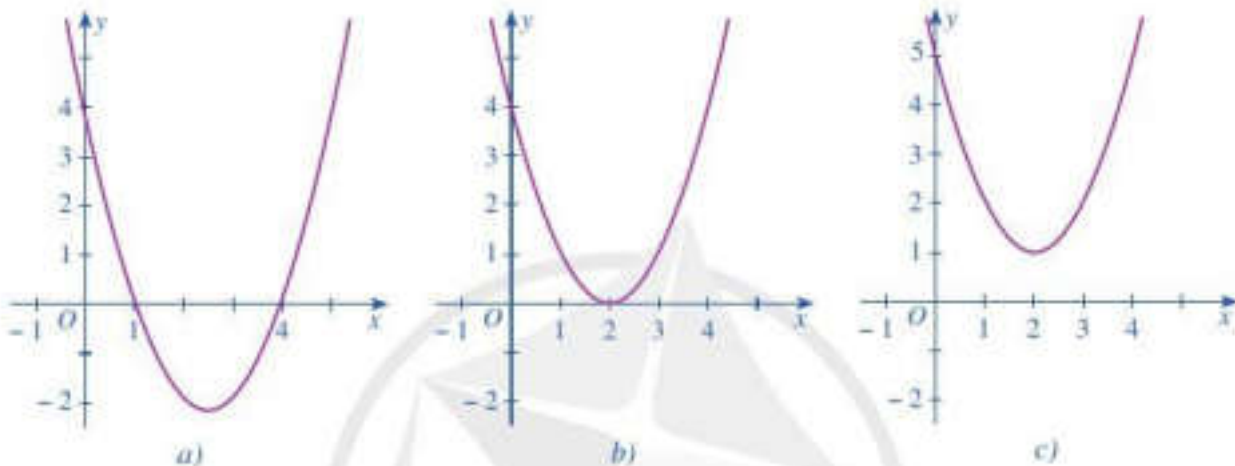
4 Tổng chi phí T (đơn vị tính: nghìn đồng) để sản xuất Q sản phẩm được cho bởi biểu thức $T = Q^2 + 30Q + 3\ 300$; giá bán của 1 sản phẩm là 170 nghìn đồng. Số sản phẩm được sản xuất trong khoảng nào để đảm bảo không bị lỗ (giả thiết các sản phẩm được bán hết)?

BÀI TẬP

1. Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào là bất phương trình bậc hai một ẩn? Vì sao?

a) $-2x + 2 < 0$; b) $\frac{1}{2}y^2 - \sqrt{2}(y + 1) \leq 0$; c) $y^2 + x^2 - 2x \geq 0$.

2. Dựa vào đồ thị hàm số bậc hai $y = f(x)$ trong mỗi Hình 30a, 30b, 30c, hãy viết tập nghiệm của mỗi bất phương trình sau: $f(x) > 0$; $f(x) < 0$; $f(x) \geq 0$; $f(x) \leq 0$.



Hình 30

3. Giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $2x^2 - 5x + 3 > 0$; b) $-x^2 - 2x + 8 \leq 0$;
c) $4x^2 - 12x + 9 < 0$; d) $-3x^2 + 7x - 4 \geq 0$.

4. Tìm m để phương trình $2x^2 + (m + 1)x + m - 8 = 0$ có nghiệm.
5. Xét hệ toạ độ Oht trên mặt phẳng, trong đó trục Ot biểu thị thời gian t (tính bằng giây) và trục Oh biểu thị độ cao h (tính bằng mét). Một quả bóng được đá lên từ điểm $A(0; 0,2)$ và chuyển động theo quỹ đạo là một cung parabol. Quả bóng đạt độ cao 8,5 m sau 1 giây và đạt độ cao 6 m sau 2 giây.

- a) Hãy tìm hàm số bậc hai biểu thị quỹ đạo chuyển động của quả bóng.
b) Trong khoảng thời gian nào thì quả bóng vẫn chưa chạm đất?

6. Công ty An Bình thông báo giá tiền cho chuyến đi tham quan của một nhóm khách du lịch như sau:

10 khách đầu tiên có giá là 800 000 đồng/người. Nếu có nhiều hơn 10 người đăng kí thì cứ có thêm 1 người, giá vé sẽ giảm 10 000 đồng/người cho toàn bộ hành khách.

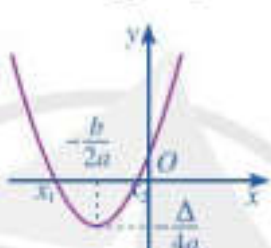
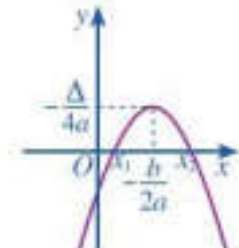
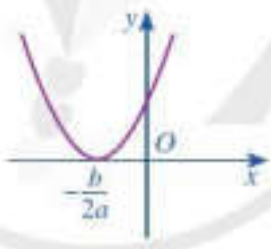
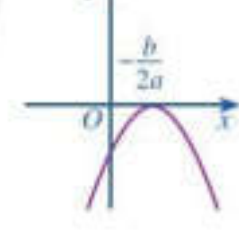
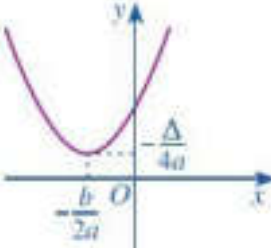
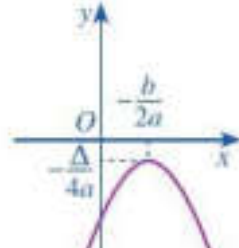
- a) Gọi x là số lượng khách từ người thứ 11 trở lên của nhóm. Biểu thị doanh thu theo x .
b) Số người của nhóm khách du lịch nhiều nhất là bao nhiêu thì công ty không bị lỗ? Biết rằng chi phí thực sự cho chuyến đi là 700 000 đồng/người.



TÌM HIỂU THÊM

Bảng dưới đây tổng kết các trường hợp có thể xảy ra khi giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c > 0$ (*) ($a \neq 0$).

Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Dấu của Δ \ Dấu của a	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$ $f(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)	$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x < x_1 \\ x > x_2 \end{cases}$ 	$(*) \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$ 
$\Delta = 0$ $f(x)$ có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$	$(*) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$ 	$(*)$ vô nghiệm 
$\Delta < 0$ $f(x)$ vô nghiệm	$(*) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ 	$(*)$ vô nghiệm 

Tương tự, em hãy lập bảng tổng kết các trường hợp có thể xảy ra khi giải các bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c < 0$; $ax^2 + bx + c \geq 0$; $ax^2 + bx + c \leq 0$ ($a \neq 0$).

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP**Dạng 1. Giải bất phương trình bậc hai 1 ẩn****1. Phương pháp**

Lập bảng xét dấu tam thức bậc hai, từ bản xét dấu ta suy ra tập nghiệm của bất phương trình

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Giải các bất phương trình sau

a) $3x^2 + 5x - 8 < 0$.

b) $-2x^2 - 3x - 1 \leq 0$.

c) $3x^2 - 4x > 0$.

Hướng dẫn giải

a) Tam thức $f(x) = 3x^2 + 5x - 8$ có hai nghiệm $x = 1; x = -\frac{8}{3}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{8}{3}$	1	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	−	0	+

Nghiệm của bất phương trình là $-\frac{8}{3} < x < 1$ hay $S = \left(-\frac{8}{3}; 1\right)$.

b) Tam thức $f(x) = -2x^2 - 3x - 1$ có hai nghiệm $x = -1; x = -\frac{1}{2}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Nghiệm của bất phương trình là $x \leq -1$ hoặc $x \geq -\frac{1}{2}$ hay $S = (-\infty; -1] \cup \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

c) Tam thức $f(x) = 3x^2 - 4x$ có hai nghiệm $x = 0; x = \frac{4}{3}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	0	$\frac{4}{3}$	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Nghiệm của bất phương trình là $x < 0$ hoặc $x > \frac{4}{3}$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tập nghiệm của bất phương trình: $2x^2 - 7x - 15 \geq 0$ là:

- A. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup [5; +\infty)$. B. $\left[-\frac{3}{2}; 5\right]$. C. $(-\infty; -5] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$. D. $\left[-5; \frac{3}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } 2x^2 - 7x - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		5	$+\infty$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

$$\text{Dựa vào bảng xét dấu } 2x^2 - 7x - 15 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Câu 2: Tập nghiệm của bất phương trình: $-x^2 + 6x + 7 \geq 0$ là:

- A. $(-\infty; -1] \cup [7; +\infty)$. B. $[-1; 7]$. C. $(-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$. D. $[-7; 1]$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } -x^2 + 6x + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -1 \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		7		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu $-x^2 + 6x + 7 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 7$.**Câu 3:** Tìm tập nghiệm của bất phương trình $-2x^2 + 3x - 7 \geq 0$.A. $S = 0$.B. $S = \{0\}$.C. $S = \emptyset$.D. $S = \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $-2x^2 + 3x - 7 = 0$ vô nghiệm.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	

Dựa vào bảng xét dấu $-2x^2 + 3x - 7 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$.**Câu 4:** Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 3x + 2 < 0$ là:A. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.B. $(2; +\infty)$.C. $(1; 2)$.D. $(-\infty; 1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$.**Câu 5:** Tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 + 5x - 4 < 0$ làA. $[1; 4]$.B. $(1; 4)$.C. $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$.D. $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = -x^2 + 5x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$		
$f(x)$		-	0	+	0	-

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 4 \end{cases}$.

Câu 6: Số thực dương lớn nhất thỏa mãn $x^2 - x - 12 \leq 0$ là ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x) = x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -3 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 4$. Suy ra số thực dương lớn nhất thỏa $x^2 - x - 12 \leq 0$ là 4.

Câu 7: Cho bất phương trình $x^2 - 8x + 7 \geq 0$. Trong các tập hợp sau đây, tập nào có chứa phần tử **không phải** là nghiệm của bất phương trình.

A. $(-\infty; 0]$.

B. $[8; +\infty)$.

C. $(-\infty; 1]$.

D. $[6; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x) = x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 7 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	1		7		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 7 \end{cases}$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 1] \cup [7; +\infty)$.

Vì $\frac{13}{2} \in [6; +\infty)$ và $\frac{13}{2} \notin S$ nên $[6; +\infty)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Dạng 2. Ứng dụng về dấu của tam thức bậc hai để giải bất phương trình tích

1. Phương pháp

Bước 1. Biến đổi bất phương trình về một trong các dạng $f(x) > 0$; $f(x) < 0$; $f(x) \geq 0$; $f(x) \leq 0$, trong đó $f(x)$ là tích hay thương của các nhị thức bậc nhất hoặc tam thức bậc hai.

Bước 2. Lập bảng xét dấu $f(x)$.

Bước 3. Dựa vào bảng xét dấu để suy ra tập nghiệm của bất phương trình.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Giải bất phương trình $(3x^2 - 10x + 3)(4x - 5) < 0$

Lời giải

Đặt $f(x) = (3x^2 - 10x + 3)(4x - 5)$

Phương trình $3x^2 - 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$ và $4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$.

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{4}$	3	$+\infty$
$3x^2 - 10x + 3$	+	0	-	+	+
$4x - 5$	-	-	0	+	+
$f(x)$	-	0	+	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy tập nghiệm của bất phương trình là $T = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{4}; 3\right)$

Ví dụ 2: Giải bất phương trình $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 \geq 0$

Lời giải

Bất phương trình $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 5x + 4) \geq 0$.

Phương trình $x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -1 \end{cases}$ và $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$	-4	-1	2	$+\infty$			
$x^2 + 5x + 4$		+	0	-	0	+		
$x - 2$		-		-		-	0	+
$(x - 2)(x^2 + 5x + 4)$		-	0	+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy tập nghiệm của bất phương trình là $T = [-4; -1] \cup [2; +\infty)$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giải bất phương trình $x(x+5) \leq 2(x^2+2)$.

A. $x \leq 1$.

B. $1 \leq x \leq 4$.

C. $x \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

D. $x \geq 4$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình $x(x+5) \leq 2(x^2+2) \Leftrightarrow x^2+5x \leq 2x^2+4 \Leftrightarrow x^2-5x+4 \geq 0$

Xét phương trình $x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases}$.

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
x^2-5x+4		+	0	-	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $x^2-5x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

Câu 3: Tập nghiệm của bất phương trình $(x-3)(x^2+x-6) > (x-2)(x^2+5x+4)$ có dạng $(a; b)$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Giá

trị của $a+b$ là

A. $\frac{3}{5}$.

B. $-\frac{2}{7}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $-\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $(x-3)(x^2+x-6) > (x-2)(x^2+5x+4) \Leftrightarrow 5x^2+3x-26 < 0 \Leftrightarrow -\frac{13}{5} < x < 2$.

Suy ra $a+b = -\frac{13}{5} + 2 = -\frac{3}{5}$.

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị m để mọi $x > 0$ đều thỏa bất phương trình $(x^2 + x + m)^2 \geq (x^2 - 3x - m)^2$?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } (x^2 + x + m)^2 \geq (x^2 - 3x - m)^2 \Leftrightarrow (4x + 2m)(2x^2 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow (2x + m)x(x - 1) \geq 0.$$

$$\text{Mặt khác } x > 0 \Rightarrow (2x + m)(x - 1) \geq 0, \forall x > 0 \Rightarrow m = -2$$

Dạng 3. Ứng dụng về dấu của tam thức bậc hai để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu

1. Phương pháp

Bước 1. Biến đổi bất phương trình về một trong các dạng $f(x) > 0$; $f(x) < 0$; $f(x) \geq 0$; $f(x) \leq 0$, trong đó $f(x)$ là tích hay thương của các nhị thức bậc nhất hoặc tam thức bậc hai.

Bước 2. Lập bảng xét dấu $f(x)$. Lưu ý các giá trị của x làm $f(x)$ không xác định.

Bước 3. Dựa vào bảng xét dấu để suy ra tập nghiệm của bất phương trình.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Giải bất phương trình $\frac{x-7}{4x^2-19x+12} > 0$

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } 4x^2 - 19x + 12 \neq 0 \Leftrightarrow (x-4)(4x-3) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 4 \\ x \neq \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\text{Phương trình } x-7=0 \Leftrightarrow x=7 \text{ và } 4x^2-19x+12=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=\frac{3}{4} \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\frac{5}{4}$	4	7	$+\infty$			
$x-7$		-		-		-	0	+
$4x^2-19x+12$		+		-		+		+
$f(x)$		-		+		-	0	+

$$\text{Dựa vào bảng xét dấu, bất phương trình } \frac{x-7}{4x^2-19x+12} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} < x < 4 \\ x > 7 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(\frac{3}{4}; 4\right) \cup (7; +\infty)$.

Ví dụ 2. Giải các bất phương trình sau

a) $\frac{1}{x^2 - 3x - 4} \geq \frac{1}{1 - x}$.

b) $x^2 + 10 \leq \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 8}$.

c) $x - \frac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4} \geq 0$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 - 3x - 4} \geq \frac{1}{1 - x} &\Leftrightarrow \frac{1}{1 - x} - \frac{1}{x^2 - 3x - 4} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x - 4 - (1 - x)}{(x^2 - 3x - 4)(1 - x)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 5}{(x^2 - 3x - 4)(1 - x)} \leq 0. \end{aligned}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{6}$	-1	1	$1 + \sqrt{6}$	4	$+\infty$
$x^2 - 2x - 5$	+	0	-	-	-	0	+
$x^2 - 3x - 4$	+	+	0	-	-	-	0
$1 - x$	+	+	+	0	-	-	-
VT	+	0	-	+	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta có

$$\frac{x^2 - 2x - 5}{(x^2 - 3x - 4)(1 - x)} \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1 - \sqrt{6}; -1) \cup (1; 1 + \sqrt{6}] \cup (4; +\infty).$$

b) Ta có $x^2 + 10 \leq \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 8} \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 8} - (x^2 + 10) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 1 - (x^2 - 8)(x^2 + 10)}{x^2 - 8} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{81-x^4}{x^2-8} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(9-x^2)(9+x^2)}{x^2-8} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{9-x^2}{x^2-8} \geq 0 \text{ (do } 9+x^2 > 0, \forall x)$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	$-2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	3	$+\infty$
$9-x^2$		-	0	+		
x^2-8		+		0	-	0
VT		-	0	+		

Từ bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = [-3; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; 3]$.

$$\text{c) Ta có } x - \frac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4} = \frac{-x^3 + 2x^2 + 5x - 6}{-x^2 + 3x + 4} = \frac{(x-1)(-x^2 + x + 6)}{-x^2 + 3x + 4}.$$

$$\text{Ta có } -x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}; -x^2 + 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	-1	1	3	4	$+\infty$
$x-1$		-		-	0	+	
$-x^2 + x + 6$		-	0	+			
$-x^2 + 3x + 4$		-	0	+			
$x - \frac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4}$		-	0	+			

Dựa vào bảng xét dấu, ta có $x - \frac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4} \geq 0 \quad x \in [-2; -1) \cup [1; 3] \cup (4; +\infty)$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{-2x^2 + 7x + 7}{x^2 - 3x - 10} \leq -1$ là

- A. Hai khoảng. B. Một khoảng và một đoạn.
C. Hai khoảng và một đoạn. D. Ba khoảng.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Điều kiện: } x^2 - 3x - 10 \neq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-5) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 5 \end{cases}.$$

Bất phương trình

$$\frac{-2x^2 + 7x + 7}{x^2 - 3x - 10} \leq -1 \Leftrightarrow \frac{-2x^2 + 7x + 7}{x^2 - 3x - 10} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 4x - 3}{x^2 - 3x - 10} \leq 0 \quad (*).$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	1	3	5	$+\infty$			
$-x^2+4x-3$	$-$	$ $	$-$	0	$+$	0	$-$	$ $	$-$
$x^2-3x-10$	$+$	$\parallel$	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	$\parallel$	$+$
$f(x)$	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, bất phương trình $(*) \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup [1; 3] \cup (5; +\infty)$.

Câu 2: Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của x thỏa mãn bất phương trình $\frac{x^4 - x^2}{x^2 + 5x + 6} \leq 0$?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Bất phương trình } \frac{x^4 - x^2}{x^2 + 5x + 6} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x^2 - 1)}{x^2 + 5x + 6} \leq 0 \quad (*).$$

Vì $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên bất phương trình

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 6} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 6} \leq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Phương trình } x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \text{ và } x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -3 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	-2	-1	1	$+\infty$				
x^2-1		+		+		+	0	-	0	+

$x^2 + 5x + 6$	+		-		+		+		+
$f(x)$	+		-		+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-3; -2) \cup [-1; 1]$

Kết hợp với $x \in \mathbb{Z}$, ta được $x = \{-1; 0; 1\}$.

Vậy có tất cả 3 giá trị nguyên cần tìm.

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của x thỏa mãn $\frac{x+3}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} < \frac{2x}{2x-x^2}$?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 4 \neq 0 \\ x + 2 \neq 0 \\ 2x - x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$. Bất phương trình:

$$\frac{x+3}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} < \frac{2x}{2x-x^2} \Leftrightarrow \frac{x+3}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} + \frac{2x}{x^2-2x} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x+9}{x^2-4} < 0.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\frac{9}{2}$	-2	2	$+\infty$		
$2x+9$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$
x^2-4	$+$	$ $	$+$	$ $	$-$	$ $	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$ $	$-$	$ $	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $\frac{2x+9}{x^2-4} < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{9}{2}\right) \cup (-2; 2)$.

Vậy có chỉ có duy nhất một giá trị nguyên dương của x ($x=1$) thỏa mãn yêu cầu.

Dạng 4. Ứng dụng về dấu của tam thức bậc hai để tìm tập xác định của hàm số

1. Phương pháp

Hàm số $y = \sqrt{f(x)}$ xác định khi $f(x) \geq 0$

Hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ xác định khi $f(x) > 0$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi $2x^2 - 5x + 2 \geq 0$.

$$\text{Phương trình } 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(2x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$		
$2x^2-5x+2$		+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $2x^2 - 5x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$.

Ví dụ 2: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{3-x}{\sqrt{4-3x-x^2}}$.

Lời giải

Hàm số xác định khi và chỉ khi $4 - 3x - x^2 > 0$.

$$\text{Phương trình } 4 - 3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$		
$4-3x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $4 - 3x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-4; 1)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-4; 1)$.

Ví dụ 3: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{x^2 + x - 6} + \frac{1}{\sqrt{x+4}}$.

Lời giải

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2 + x - 6 \geq 0 \\ x + 4 > 0 \end{cases}$.

Phương trình $x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$ và $x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-4		-3		2		$+\infty$
x^2+x-6		+		+	0	-	0	+	
$x+4$		-	0	+		+		+	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $\begin{cases} x^2 + x - 6 \geq 0 \\ x + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-4; -3] \cup [2; +\infty)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-4; -3] \cup [2; +\infty)$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giá trị nguyên dương lớn nhất để hàm số $y = \sqrt{5 - 4x - x^2}$ xác định là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi $5 - 4x - x^2 \geq 0$.

Phương trình $5 - 4x - x^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -5 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$		
$5-4x-x^2$		-	0	+	0	-

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $5 - 4x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-5; 1]$.

Vậy nghiệm dương lớn nhất để hàm số xác định là $x = 1$.

Câu 2: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{(2 - \sqrt{5})x^2 + (15 - 7\sqrt{5})x + 25 - 10\sqrt{5}}$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = (-\infty; 1)$.

C. $D = [-5; 1]$.

D. $D = [-5; \sqrt{5}]$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định khi và chỉ khi $(2 - \sqrt{5})x^2 + (15 - 7\sqrt{5})x + 25 - 10\sqrt{5} \geq 0$.

Phương trình

$$(2 - \sqrt{5})x^2 + (15 - 7\sqrt{5})x + 25 - 10\sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow (x + 5)(x - \sqrt{5}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = \sqrt{5} \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-5	$\sqrt{5}$	$+\infty$		
$(2-\sqrt{5})x^2+(15-7\sqrt{5})x+25-10\sqrt{5}$		-	0	+	0	-

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $(2 - \sqrt{5})x^2 + (15 - 7\sqrt{5})x + 25 - 10\sqrt{5} \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-5; \sqrt{5}]$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [-5; \sqrt{5}]$.

Câu 3: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{3x^2 - 4x + 1}}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{1; \frac{1}{3}\right\}$.

B. $D = \left(\frac{1}{3}; 1\right]$.

C. $D = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

D. $D = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup [1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định khi và chỉ khi $3x^2 - 4x + 1 > 0$.

Phương trình $3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(3x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$		
$3x^2-4x+1$		+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $3x^2 - 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

Câu 4: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 2x + 3} + \frac{1}{\sqrt{5 - 2x}}$.

A. $D = \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

B. $D = \left(-\infty; \frac{5}{2}\right]$.

C. $D = \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

D. $D = \left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2 + 2x + 3 \geq 0 \\ 5 - 2x > 0 \end{cases}$.

Phương trình $x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$ và $5 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$x^2 + 2x + 3$		+		+	
$5 - 2x$		+	0	-	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $\begin{cases} x^2 + 2x + 3 \geq 0 \\ 5 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$.

Câu 5: Tìm tập xác định D của hàm số $f(x) = \sqrt{\frac{3-3x}{-x^2-2x+15}} - 1$.

A. $D = [4; +\infty)$.

B. $D = (-5; -3] \cup (3; 4]$.

C. $D = (-\infty; -5)$.

D. $D = (-5; 3) \cup (3; 4]$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \frac{3-3x}{-x^2-2x+15} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2-x-12}{-x^2-2x+15} \geq 0$.

Phương trình $x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -3 \end{cases}$ và $-x^2 - 2x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 3 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-5		-3		3		4		$+\infty$
$x^2 - x - 12$		+		+	0	-		-	0	+	
$-x^2 - 2x + 15$		-		+		+		-		-	
$f(x)$		-		+	0	-		+	0	-	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $\frac{3-3x}{-x^2-2x+15} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-5; -3] \cup (3; 4]$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-5; -3] \cup (3; 4]$.

Câu 6: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\frac{x^2 + 5x + 4}{2x^2 + 3x + 1}}$.

A. $D = [-4; -1) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

B. $D = (-\infty; -4] \cup \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.

C. $D = (-\infty; -4] \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

D. $D = \left[-4; -\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định khi và chỉ khi $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{2x^2 + 3x + 1} \geq 0$.

$$\text{Phương trình } x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -4 \end{cases} \text{ và } 2x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-4	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$			
x^2+5x+4		+	0	-	0	+		+
$2x^2+3x+1$		+		+		-		+
$f(x)$		+	0	-		-		+

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $\frac{x^2 + 5x + 4}{2x^2 + 3x + 1} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -4] \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; -4] \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Câu 7: Tìm tập xác định D của hàm số $f(x) = \sqrt{\sqrt{x^2 + x - 12} - 2\sqrt{2}}$.

A. $D = (-5; 4]$.

B. $D = (-\infty; -5) \cup (4; +\infty)$.

C. $D = (-\infty; -4] \cup [3; +\infty)$.

D. $D = (-\infty; -5] \cup [4; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} \sqrt{x^2 + x - 12} - 2\sqrt{2} \geq 0 \\ x^2 + x - 12 \geq 0 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 12 \geq 8 \\ x^2 + x - 12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + x - 12 \geq 8 \Leftrightarrow x^2 + x - 20 \geq 0.$$

Phương trình $x^2 + x - 20 = 0 \Leftrightarrow (x+5)(x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 4 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-5		4		$+\infty$
x^2+x-20		+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $x^2 + x - 20 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -5] \cup [4; +\infty)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; -5] \cup [4; +\infty)$.

Dạng 5. Tìm điều kiện của tham số để phương trình bậc hai Vô nghiệm – Có nghiệm – Có hai nghiệm phân biệt

1. Phương pháp

Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ (hoặc $\Delta' = b'^2 - ac$)

- Có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta > 0$.
- Có nghiệm kép khi $\Delta = 0$.
- Vô nghiệm khi $\Delta < 0$.
- Có nghiệm khi $\Delta \geq 0$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt

$$-x^2 + (m+2)x - 4 = 0.$$

Hướng dẫn giải

Ta có $\Delta = (m+2)^2 - 16 = m^2 + 4m - 12$.

Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 12 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -6 \\ m > 2 \end{cases}$.

Vậy với $m \in (-\infty; -6) \cup (2; +\infty)$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Ví dụ 2: Tìm m để Phương trình $x^2 - (m+1)x + 1 = 0$ vô nghiệm

Lời giải

Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta_x < 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 4 < 0$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 < 0 \Leftrightarrow (m-1)(m+3) < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 1.$$

Ví dụ 3: Tìm m để phương trình $x^2 + 2(m+2)x - 2m - 1 = 0$ (m là tham số) có nghiệm

Lời giải

Xét phương trình $x^2 + 2(m+2)x - 2m - 1 = 0$, có $\Delta'_x = (m+2)^2 + 2m + 1$.

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 + 2m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 5 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (m+1)(m+5) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq -5 \end{cases} \text{ là giá trị cần tìm.}$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình sau vô nghiệm $(2m^2 + 1)x^2 - 4mx + 2 = 0$.

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m > 3$. C. $-\frac{3}{5} < m < 3$. D. $m > -\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2m^2 + 1 \neq 0 \\ \Delta'_x = 4m^2 - 2(2m^2 + 1) = -2 < 0 \end{cases}, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Vậy phương trình đã cho luôn vô nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Câu 2: Phương trình $mx^2 - 2mx + 4 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

- A. $0 < m < 4$. B. $\begin{cases} m < 0 \\ m > 4 \end{cases}$. C. $0 \leq m \leq 4$. D. $0 \leq m < 4$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét phương trình } mx^2 - 2mx + 4 = 0 \quad (*).$$

TH1. Với $m = 0$, khi đó phương trình $(*) \Leftrightarrow 4 = 0$ (vô lý).

Suy ra với $m = 0$ thì phương trình $(*)$ vô nghiệm.

TH2. Với $m \neq 0$, khi đó để phương trình $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x < 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow m(m-4) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$$

Kết hợp hai TH, ta được $0 \leq m < 4$ là giá trị cần tìm.

Câu 3: Phương trình $(m^2 - 4)x^2 + 2(m-2)x + 3 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

- A. $m \geq 0$. B. $m = \pm 2$. C. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m < -4 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -4 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $(m^2 - 4)x^2 + 2(m - 2)x + 3 = 0$ (*).

TH1. Với $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$.

• Khi $m = 2 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow 3 = 0$ (vô lý).

• Khi $m = -2 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow -8x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{8}$.

Suy ra với $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

TH2. Với $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq -2 \end{cases}$, khi đó để phương trình (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x < 0$

$$\Leftrightarrow (m - 2)^2 - 3(m^2 - 4) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 4 - 3m^2 + 12 < 0 \Leftrightarrow -2m^2 - 4m + 16 < 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 8 > 0 \Leftrightarrow (m - 2)(m + 4) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -4 \end{cases}.$$

Suy ra với $\begin{cases} m > 2 \\ m < -4 \end{cases}$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Kết hợp hai TH, ta được $\begin{cases} m \geq 2 \\ m < -4 \end{cases}$ là giá trị cần tìm.

Câu 4: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2x^2 + 2(m + 2)x + 3 + 4m + m^2 = 0$ có nghiệm?

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Xét $2x^2 + 2(m + 2)x + 3 + 4m + m^2 = 0$, có $\Delta'_x = (m + 2)^2 - 2(m^2 + 4m + 3)$.

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 - 2m^2 - 8m - 6 \geq 0 \Leftrightarrow -m^2 - 4m - 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow (m + 2)^2 \leq 2 \Leftrightarrow -2 - \sqrt{2} \leq m \leq -2 + \sqrt{2}.$$

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z}$, ta được $m = \{-3; -2; -1\}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 5: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $(m - 1)x^2 - 2(m + 3)x - m + 2 = 0$ có nghiệm.

A. $m \in \emptyset$.

B. $m \in \mathbb{R}$.

C. $-1 < m < 3$.

D. $-2 < m < 2$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $(m-1)x^2 - 2(m+3)x - m + 2 = 0$ (*).

TH1. Với $m-1=0 \Leftrightarrow m=1$, khi đó $(*) \Leftrightarrow -2.4x - 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{8}$.

Suy ra với $m=1$ thì phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{8}$.

TH2. Với $m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$, khi đó để phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0$

$$\Leftrightarrow (m+3)^2 - (m-1)(2-m) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 9 - (-m^2 + 3m - 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 3m + 11 \geq 0 \Leftrightarrow 2\left(m + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{79}{8} \geq 0, \forall m \in \mathbb{R} \text{ suy ra } \Delta'_x \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Do đó, với $m \neq 1$ thì phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Kết hợp hai TH, ta được $m \in \mathbb{R}$ là giá trị cần tìm.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $x^2 + (m+1)x + m - \frac{1}{3} = 0$ có nghiệm?

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m > 1$. C. $-\frac{3}{4} < m < 1$. D. $m > -\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Xét $x^2 + (m+1)x + m - \frac{1}{3} = 0$, có $\Delta_x = (m+1)^2 - 4\left(m - \frac{1}{3}\right) = m^2 - 2m + \frac{7}{3}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta'_m = 1 - \frac{7}{3} = -\frac{4}{3} < 0 \end{cases} \text{ suy ra } m^2 - 2m + \frac{7}{3} > 0, \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta_x > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Câu 7: Phương trình $(m-1)x^2 - 2x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi

- A. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. B. $m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.
C. $m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \setminus \{1\}$. D. $m \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \setminus \{1\}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Yêu cầu bài toán } \Leftrightarrow \begin{cases} a = m-1 \neq 0 \\ \Delta'_x = (-1)^2 - (m-1)(m+1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 1 - m^2 + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m^2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ -\sqrt{2} < m < \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \setminus \{1\}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \setminus \{1\}$.

Câu 8: Giá trị nào của m thì phương trình $(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

- A. $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}$.
 B. $m \in \left[-\frac{3}{5}; 1\right)$.
 C. $m \in \left[-\frac{3}{5}; +\infty\right)$.
 D. $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Yêu cầu bài toán} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = m-3 \neq 0 \\ \Delta_x = (m+3)^2 + 4(m-3)(m+1) > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m^2 + 6m + 9 + 4(m^2 - 2m - 3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ 5m^2 - 2m - 3 > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ (m-1)(5m+3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m > 1 \\ m < -\frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\} \text{ là giá trị cần tìm.} \end{aligned}$$

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m-6 = 0$ vô nghiệm?

- A. $m < 0$.
 B. $m > 2$.
 C. $\begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \end{cases}$.
 D. $\begin{cases} m \neq 2 \\ 1 < m < 3 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Xét phương trình } (m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m-6 = 0 \quad (*).$$

TH1. Với $m-2=0 \Leftrightarrow m=2$, khi đó $(*) \Leftrightarrow 2x+4=0 \Leftrightarrow x=-2$.

Suy ra với $m=2$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x=-2$.

Do đó $m=2$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH2. Với $m-2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$, khi đó để phương trình $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x < 0$

$$\Leftrightarrow (2m-3)^2 - (m-2)(5m-6) < 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 12m + 9 - (5m^2 - 16m + 12) < 0$$

$$\Leftrightarrow -m^2 + 4m - 3 < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \end{cases}$$

Do đó, với $\begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \end{cases}$ thì phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Kết hợp hai TH, ta được $\begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \end{cases}$ là giá trị cần tìm.

Câu 10: Tìm các giá trị của m để phương trình $(m-5)x^2 - 4mx + m-2 = 0$ có nghiệm.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. “Tránh mua các trang và các cá nhân khác”

Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT: 0834 332 133

A. $m \neq 5$. B. $-\frac{10}{3} \leq m \leq 1$. C. $\begin{cases} m \leq -\frac{10}{3} \\ m \geq 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \leq -\frac{10}{3} \\ 1 \leq m \neq 5 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $(m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$ (*).

TH1. Với $m-5=0 \Leftrightarrow m=5$, khi đó $(*) \Leftrightarrow -20x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{20}$.

Suy ra phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = \frac{3}{20}$.

TH2. Với $m-5 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 5$, khi đó để phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0$

$$\Leftrightarrow (-2m)^2 - (m-5)(m-2) \geq 0 \Leftrightarrow 4m^2 - (m^2 - 7m + 10) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 + 7m - 10 \geq 0 \Leftrightarrow (m-1)(3m+10) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -\frac{10}{3} \end{cases}$$

Do đó, với $\begin{cases} 5 \neq m \geq 1 \\ m \leq -\frac{10}{3} \end{cases}$ thì phương trình (*) có nghiệm.

Kết hợp hai TH, ta được $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -\frac{10}{3} \end{cases}$ là giá trị cần tìm.

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình $(m-1)x^2 + (3m-2)x + 3 - 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $m \neq 1$ B. $2 < m < 6$. C. $-1 < m < 6$. D. $-1 < m < 2$.

Lời giải

Chọn A

Kiểm tra với $m = 1$ không thỏa mãn ycbt. Do đó

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} a = m - 1 \neq 0 \\ \Delta_x = (3m - 2)^2 - 4(m - 1)(3 - 2m) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 9m^2 - 12m + 4 - 4(-2m^2 + 5m - 3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 17m^2 - 32m + 16 > 0 \end{cases} (*)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} a = 17 > 0 \\ \Delta'_m = 16^2 - 17 \cdot 16 = -16 < 0 \end{cases} \text{ suy ra } 17m^2 - 32m + 16 > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Do đó, hệ bất phương trình (*) $\Leftrightarrow m \neq 1$.

Dạng 6. Tìm điều kiện của tham số để phương trình bậc hai có nghiệm thỏa mãn điều kiện cho trước**1. Phương pháp**

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, $\Delta = b^2 - 4ac$, $S = \frac{-b}{a}$, $P = \frac{c}{a}$.

+ Phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$;

+ Phương trình có 2 nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$;

+ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$;

+ Phương trình có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0 (\Leftrightarrow ac < 0)$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Xét phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + 4m-1 = 0$. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình có

- a) Hai nghiệm phân biệt ;
- b) Hai nghiệm trái dấu ;
- c) Các nghiệm dương ;
- d) Các nghiệm âm.

Lời giải

Xét $\Delta' = (m-1)^2 - m(4m-1) = -3m^2 - m + 1, (m \neq 0)$

a) Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 + m - 1 < 0 \\ m \neq 0 \end{cases}$

tức là $\frac{-1-\sqrt{13}}{6} < m < 0$ hoặc $0 < m < \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$.

b) Để phương trình có hai trái dấu $\frac{4m-1}{m} < 0$ hay $m(4m-1) < 0$ tức là $0 < m < \frac{1}{4}$.

c) Phương trình có các nghiệm dương khi và chỉ khi
$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \end{cases}$$

hay
$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \frac{-1-\sqrt{13}}{6} \leq m \leq \frac{-1+\sqrt{13}}{6} \\ \frac{4m-1}{m} > 0 \\ \frac{2(m-1)}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \frac{-1-\sqrt{13}}{6} \leq m \leq \frac{-1+\sqrt{13}}{6} \\ m < 0 \text{ hoặc } m > \frac{1}{4} \\ m < 0 \text{ hoặc } m > 1. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{13}}{6} \leq m < 0.$$

d)
$$\frac{1}{4} < m \leq \frac{-1+\sqrt{13}}{6}.$$

Ví dụ 2:

a) Tìm m để phương trình $x^2 - mx - 3m^2 + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) < -4$

b) Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 4m + 1 = 0$. Xác định các giá trị của tham số m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + 14 < 4x_1x_2$

Lời giải

a) Ta có: $\Delta = 13m^2 - 4$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m > \frac{2}{\sqrt{13}}$ hay $m < -\frac{2}{\sqrt{13}}$. Theo Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = m$ và $x_1x_2 = 1 - 3m^2$.

Suy ra: $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) < -4 \Leftrightarrow 3m^2 - 2m - 5 > 0 \Leftrightarrow m < -1$ hoặc $m > \frac{5}{3}$

So sánh điều kiện thì $m < -1$ hay $m > \frac{5}{3}$ thỏa yêu cầu bài toán.

b) Phương trình có 2 nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 2m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$ hoặc $m \leq 0$ (1)

Khi đó $x_1^2 + x_2^2 + 14 < 4x_1x_2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 6x_1x_2 + 14 < 0$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 16m + 12 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 3$ (2)

Kết hợp (1) và (2) ta được $2 \leq m < 3$ thỏa yêu cầu bài toán.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tìm m để phương trình $x^2 - mx + m + 3 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

A. $m > 6$.

B. $m < 6$.

C. $6 > m > 0$.

D. $m > 0$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình đã cho có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4(m+3) > 0 \\ x_1 + x_2 = m > 0 \\ x_1 x_2 = m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m - 12 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 6.$$

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $(m-2)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

A. $2 < m < 6$.

B. $m < -3$ hoặc $2 < m < 6$.

C. $m < 0$ hoặc $-3 < m < 6$. D. $-3 < m < 6$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 \neq 0 \\ m^2 - (m-2)(m+3) > 0 \\ \frac{2m}{m-2} > 0 \\ \frac{m+3}{m-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < m < 6 \\ m < -3 \end{cases}.$$

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $x^2 + 2(m+1)x + 9m - 5 = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt.

- A. $m < 6$. B. $\frac{5}{9} < m < 1$ hoặc $m > 6$. C. $m > 1$. D. $1 < m < 6$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình đã cho có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - (9m-5) > 0 \\ -2(m+1) < 0 \\ 9m-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 7m + 6 > 0 \\ m > \frac{5}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 6 \\ \frac{5}{9} < m < 1 \end{cases}$$

Câu 4: Phương trình $x^2 - (3m-2)x + 2m^2 - 5m - 2 = 0$ có hai nghiệm không âm khi

- A. $m \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$. B. $m \in \left[\frac{5+\sqrt{41}}{4}; +\infty\right)$.
C. $m \in \left[\frac{2}{3}; \frac{5+\sqrt{41}}{4}\right]$. D. $m \in \left(-\infty; \frac{5-\sqrt{41}}{4}\right]$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình đã cho có hai nghiệm không âm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m-2)^2 - 4(2m^2 - 5m - 2) \geq 0 \\ 3m-2 \geq 0 \\ 2m^2 - 5m - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-2 \geq 0 \\ m^2 + 8m + 12 \geq 0 \\ 2m^2 - 5m - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{5+\sqrt{41}}{4}$$

Câu 5: Phương trình $2x^2 - (m^2 - m + 1)x + 2m^2 - 3m - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu khi và chỉ khi

- A. $m < -1$ hoặc $m > \frac{5}{2}$. B. $-1 < m < \frac{5}{2}$. C. $m \leq -1$ hoặc $m \geq \frac{5}{2}$. D. $-1 \leq m \leq \frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$$ac < 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (2m^2 - 3m - 5) < 0 \Leftrightarrow -1 < m < \frac{5}{2}.$$

Câu 6: Phương trình $(m^2 - 3m + 2)x^2 - 2m^2x - 5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi

- A. $m \in (1; 2)$. B. $m \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. C. $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$. D. $m \in \emptyset$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$$ac < 0 \Leftrightarrow (m^2 - 3m + 2) \cdot (-5) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 1 \end{cases}.$$

Câu 7: Giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m = 0$ có hai nghiệm trái dấu trong đó nghiệm âm có trị tuyệt đối lớn hơn là

A. $0 < m < 2$.

B. $0 < m < 1$.

C. $1 < m < 2$.

D. $\begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Phương trình } x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 + 2x - 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-m)^2 + 2(x-m) = 0 \Leftrightarrow (x-m)(x-m+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m \\ x_2 = m-2 \end{cases}.$$

$$\text{Để phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \neq x_2 \\ x_1 x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 2 \quad (\text{I}).$$

$$\text{Với } m \in (0; 2) \text{ suy ra } \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \end{cases}, \text{ theo bài ra, ta có } |x_2| > |x_1| \Leftrightarrow |x_2|^2 > |x_1|^2 \Leftrightarrow x_2^2 - x_1^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0 \Leftrightarrow (m-2-m)(m-2+m) > 0 \Leftrightarrow 2m-2 < 0 \Leftrightarrow m < 1.$$

Kết hợp với (I), ta được $0 < m < 1$ là giá trị cần tìm.

Câu 8: Với giá trị nào của m thì phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m-3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 + x_1 x_2 < 1$?

A. $1 < m < 2$.

B. $1 < m < 3$.

C. $m > 2$.

D. $m > 3$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Xét phương trình } (m-1)x^2 - 2(m-2)x + m-3 = 0 \quad (*), \text{ có } a+b+c=0.$$

$$\text{Suy ra phương trình } (*) \Leftrightarrow (x-1)[(m-1)x - m + 3] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (m-1)x = m-3 \end{cases}.$$

$$\text{Để phương trình } (*) \text{ có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \frac{m-3}{m-1} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 1 \quad (\text{I}).$$

$$\text{Khi đó, gọi } x_1, x_2 \text{ là hai nghiệm của phương trình } (*) \text{ suy ra } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m-4}{m-1} \\ x_1 x_2 = \frac{m-3}{m-1} \end{cases}.$$

Theo bài ra, ta có $x_1 + x_2 + x_1x_2 = \frac{3m-7}{m-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{2m-6}{m-1} < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 3$.

Kết hợp với (I), ta được $1 < m < 3$ là giá trị cần tìm.

Câu 9: Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $(m+1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 3$?

A. $m < 2 \vee m > 6$.

B. $-2 < m \neq -1 < 2 \vee m > 6$.

C. $2 < m < 6$.

D. $-2 < m < 6$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $(m+1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ (*), có $\Delta' = m + 2$.

Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 0 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ P \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ m+2 > 0 \\ m-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \{-1; 2\} \\ m > -2 \end{cases} \quad (I).$$

Khi đó, gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (*) suy ra $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m+1} \\ x_1x_2 = \frac{m-2}{m+1} \end{cases}$.

Theo bài ra, ta có $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{2m}{m-2} < 3 \Leftrightarrow \frac{m-6}{m-2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 6 \\ m < 2 \end{cases}$.

Kết hợp với (I), ta được $\begin{cases} m > 6 \\ m \in (-2; -1) \cup (-1; 2) \end{cases}$ là giá trị cần tìm.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 - (m-1)x + m + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} > 1$.

A. $m \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (7; +\infty)$.

B. $m \in (-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{11}{10}\right)$.

C. $m \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1)$.

D. $m \in (7; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x) = x^2 - (m-1)x + m + 2$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khác 0 khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m - 7 > 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 7 \\ m < -1. \end{cases} \quad (*)$$

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình đã cho. Theo Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 1 \\ x_1 x_2 = m + 2 \end{cases}$.

$$\text{Yêu cầu bài toán } \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2} > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(m-1)^2 - 2(m+2)}{(m+2)^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{8m+7}{(m+2)^2} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m < -\frac{7}{8} \end{cases} \xrightarrow{(*)} -2 \neq m < -1.$$

Dạng 7. Tìm điều kiện của tham số để bất phương trình vô nghiệm – có nghiệm – nghiệm đúng

1. Phương pháp

Nhận xét: Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\bullet \quad ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}.$$

$$\bullet \quad ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}.$$

$$\bullet \quad ax^2 + bx + c < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}.$$

$$\bullet \quad ax^2 + bx + c \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}.$$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để các biểu thức sau luôn âm

a) $f(x) = -x^2 - 2x - m$.

b) $g(x) = 4mx^2 - 4(m-1)x + m - 3$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{a) } f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' = 1 - m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

Vậy với $m > 1$ thì biểu thức $f(x)$ luôn âm.

b) Với $m = 0$ thì $g(x) = 4x - 3 < 0$ khi $x < \frac{3}{4}$ không thỏa mãn $\forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó $m = 0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m \neq 0$ thì $g(x) = 4mx^2 - 4(m-1)x + m - 3$ là tam thức bậc hai nên

$$g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4m < 0 \\ \Delta' = 4(m-1)^2 - 4m(m-3) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 4m + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1.$$

Vậy với $m < -1$ thì biểu thức $g(x)$ luôn âm.

Ví dụ 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để

a) $3x^2 - 2(m+1)x - 2m^2 + 3m - 2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

b) Hàm số $y = \sqrt{(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3}$ có nghĩa với mọi x .

Hướng dẫn giải

a) $3x^2 - 2(m+1)x - 2m^2 + 3m - 2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 + 3(2m^2 - 3m + 2) \leq 0 \text{ (do } a = 3 > 0)$$

$$\Leftrightarrow 7m^2 - 7m + 7 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m + 1 \leq 0 \text{ (vô nghiệm do } \Delta = -3 < 0).$$

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Hàm số có nghĩa với mọi x khi $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

- Với $m = -1$ thì biểu thức trở thành $4x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$ (không thỏa mãn $\forall x \in \mathbb{R}$).

- Với $m \neq -1$ thì ta có

$$(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ \Delta' = (m-1)(-2m-4) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \geq 1.$$

Vậy $m \geq 1$ thì hàm số $y = \sqrt{(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3}$ có nghĩa với mọi x .

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tam thức $f(x) = 3x^2 + 2(2m-1)x + m + 4$ dương với mọi x khi:

A. $-1 < m < \frac{11}{4}$. B. $-\frac{11}{4} < m < 1$. C. $-\frac{11}{4} \leq m \leq 1$. D. $\begin{cases} m < -1 \\ m > \frac{11}{4} \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Tam thức $f(x)$ có $a = 3 > 0$. Do đó $f(x) > 0, \forall x$ khi

$$\Delta' = (2m-1)^2 - 3(m+4) = 4m^2 - 7m - 11 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < \frac{11}{4}.$$

Câu 2: Tam thức $f(x) = -2x^2 + (m-2)x - m + 4$ không dương với mọi x khi:

A. $m \in \mathbb{R} \setminus \{6\}$. B. $m \in \emptyset$. C. $m = 6$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Tam thức $f(x)$ có $a = -2 < 0$. Do đó $f(x) \leq 0, \forall x$ (không dương) khi

$$\Delta = (m-2)^2 + 8(-m+4) = m^2 - 12m + 36 \leq 0 \Leftrightarrow m = 6.$$

Câu 3: Tam thức $f(x) = -2x^2 + (m+2)x + m - 4$ âm với mọi x khi:

A. $m < -14$ hoặc $m > 2$. B. $-14 \leq m \leq 2$. C. $-2 < m < 14$. D. $-14 < m < 2$.

Lời giải

Chọn D

Tam thức $f(x)$ có $a = -2 < 0$. Do đó $f(x) < 0, \forall x$ khi

$$\Delta = (m+2)^2 + 8(m-4) = m^2 + 12m - 28 \leq 0 \Leftrightarrow -14 < m < 2.$$

Câu 4: Tam thức $f(x) = x^2 - (m+2)x + 8m + 1$ không âm với mọi x khi:

A. $m > 28$. B. $0 \leq m \leq 28$. C. $m < 1$. D. $0 < m < 28$.

Lời giải

Chọn B

Tam thức $f(x)$ có $a = 1 > 0$ nên $f(x) \geq 0, \forall x$ (không âm) khi

$$\Delta = (m+2)^2 - 4(8m+1) = m^2 - 28m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 28.$$

Câu 5: Bất phương trình $x^2 - mx - m \geq 0$ có nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi:

A. $m \leq -4$ hoặc $m \geq 0$. B. $-4 < m < 0$. C. $m < -4$ hoặc $m > 0$. D. $-4 \leq m \leq 0$.

Lời giải

Chọn D

Tam thức $f(x) = x^2 - mx - m$ có hệ số $a = 1 > 0$ nên bất phương trình $f(x) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $\forall x$ khi và chỉ khi $\Delta = m^2 + 4m \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 0$.

Câu 6: Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $-x^2 + (2m-1)x + m < 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. $m = \frac{1}{2}$.

B. $m = -\frac{1}{2}$.

C. $m \in \mathbb{R}$.

D. Không tồn tại m .

Lời giải

Chọn D

Tam thức $f(x) = -x^2 + (2m-1)x + m$ có hệ số $a = -1 < 0$ nên bất phương trình $f(x) < 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi $\Delta = (2m-1)^2 + 4m = 4m^2 + 1 < 0 \Leftrightarrow m \in \emptyset$.

Câu 7: Bất phương trình $x^2 - (m+2)x + m + 2 \leq 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

B. $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

C. $m \in [-2; 2]$.

D. $m \in (-2; 2)$.

Lời giải

Chọn D

Bất phương trình $f(x) = x^2 - (m+2)x + m + 2 \leq 0$ khi và chỉ khi $f(x) > 0$ nghiệm đúng với mọi x .

Tam thức $f(x) = x^2 - (m+2)x + m + 2$ có hệ số $a = 1 > 0$ nên $f(x) > 0$ nghiệm đúng với mọi x khi $\Delta = (m+2)^2 - 4(m+2) = m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Câu 8: Tam thức $f(x) = (m^2 + 2)x^2 - 2(m+1)x + 1$ dương với mọi x khi:

A. $m < \frac{1}{2}$.

B. $m \leq \frac{1}{2}$.

C. $m > \frac{1}{2}$.

D. $m \geq \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Tam thức $f(x)$ có hệ số $a = m^2 + 2 > 0, \forall x$ nên $f(x)$ dương với mọi x khi $\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 + 2) = 2m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$.

Câu 9: Tam thức $f(x) = (m-4)x^2 + (2m-8)x + m-5$ không dương với mọi x khi:

A. $m \leq 4$.

B. $m \geq 4$.

C. $m < 4$.

D. $m > 4$.

Lời giải

Chọn A

• Với $m = 4$, ta có $f(x) = -1 < 0$: đúng với mọi x .

• Với $m \neq 4$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (m-4)x^2 + (2m-8)x + m-5 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-4 < 0 \\ (m-4)^2 - (m-4)(m-5) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m-4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 4.$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $m \leq 4$ là giá trị cần tìm.

Câu 10: Tam thức $f(x) = mx^2 - mx + m + 3$ âm với mọi x khi:

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. “Tránh mua các trang và các cá nhân khác”

Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng

Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT: 0834 332 133

A. $m \in (-\infty; -4]$.

B. $m \in (-\infty; -4)$.

C. $m \in (-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$.

D. $m \in (-\infty; -4] \cup (0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

• Với $m = 0$ thay vào ta được $f(x) = 3 < 0$ (vô lý) suy ra $m = 0$ không thỏa mãn.

• Với $m \neq 0$, yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 - 4m(m+3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -3m^2 - 12m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m < -4 \Leftrightarrow m < -4 \\ m > 0 \end{cases}$$

Câu 11: Tam thức $f(x) = (m+2)x^2 + 2(m+2)x + m+3$ không âm với mọi x khi:

A. $m \geq -2$.

B. $m \leq -2$.

C. $m > -2$.

D. $m < -2$.

Lời giải

Chọn A

• Với $m = -2$, tam thức bậc hai trở thành $1 > 0$: đúng với mọi x .

• Với $m \neq -2$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (m+2)x^2 + 2(m+2)x + m+3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 > 0 \\ (m+2)^2 - (m+2)(m+3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 > 0 \\ -m-2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2.$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $m \geq -2$ là giá trị cần tìm.

Câu 12: Bất phương trình $(3m+1)x^2 - (3m+1)x + m+4 \geq 0$ có nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi:

A. $m > -\frac{1}{3}$.

B. $m \geq -\frac{1}{3}$.

C. $m > 0$.

D. $m > 15$.

Lời giải

Chọn B

Xét bất phương trình $(3m+1)x^2 - (3m+1)x + m+4 \geq 0$. (*)

TH1. Với $3m+1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}$, bất phương trình (*) trở thành $4 - \frac{1}{3} \geq 0$ (luôn đúng).

TH2. Với $3m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\frac{1}{3}$, bất phương trình (*) nghiệm đúng với mọi x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m+1 > 0 \\ (3m+1)^2 - 4(3m+1)(m+4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m+1 > 0 \\ 3m^2 + 46m + 15 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -\frac{1}{3}.$$

Kết hợp hai trường hợp, ta được $m \geq -\frac{1}{3}$ là giá trị cần tìm.

Câu 13: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(2m^2 - 3m - 2)x^2 + 2(m-2)x - 1 \leq 0$

có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. $\frac{1}{3} \leq m < 2$.

B. $\frac{1}{3} \leq m \leq 2$.

C. $m \geq \frac{1}{3}$.

D. $m \leq 2$.

Lời giải

Chọn B

Xét $2m^2 - 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$ hoặc $m = 2$

• Khi $m = -\frac{1}{2}$ thì bất phương trình trở thành $-5x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{5}$: không nghiệm đúng với mọi x .

• Khi $m = 2$ thì bất phương trình trở thành $-1 \leq 0$: nghiệm đúng với mọi x .

• Khi $\begin{cases} m \neq -\frac{1}{2} \\ m \neq 2 \end{cases}$ thì yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (2m^2 - 3m - 2)x^2 + 2(m - 2)x - 1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 - 7m + 2 \leq 0 \\ 2m^2 - 3m - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} \leq m \leq 2 \\ -\frac{1}{2} < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq m < 2.$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $\frac{1}{3} \leq m \leq 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(m^2 - 4)x^2 + (m - 2)x + 1 < 0$ vô nghiệm.

A. $m \in \left(-\infty; -\frac{10}{3}\right] \cup [2; +\infty)$.

B. $m \in \left(-\infty; -\frac{10}{3}\right) \cup (2; +\infty)$.

C. $m \in \left(-\infty; -\frac{10}{3}\right) \cup (2; +\infty)$.

D. $m \in [2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

• Xét $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Với $m = -2$, bất phương trình trở thành $-4x + 1 < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}$: không thỏa mãn.

Với $m = 2$, bất phương trình trở thành $1 < 0$: vô nghiệm. Do đó $m = 2$ thỏa mãn.

• Xét $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$. Yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow (m^2 - 4)x^2 + (m - 2)x + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ \Delta = (m - 2)^2 - 4(m^2 - 4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ -3m^2 - 4m + 20 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{10}{3} \\ m > 2 \end{cases}.$$

Kết hợp hai trường hợp, ta được $m \leq -\frac{10}{3}$ hoặc $m \geq 2$.

Câu 15: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \sqrt{(m+4)x^2 - (m-4)x - 2m+1}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- A. $m \leq 0$. B. $-\frac{20}{9} \leq m \leq 0$. C. $m \geq -\frac{20}{9}$. D. $m > 0$.

Lời giải

Chọn D

$f(x)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

TH1: $m = -4$ thì $f(x) = 8x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{9}{8} \rightarrow m = -4$ không thỏa.

TH2: $m \neq -4$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -4 \\ 9m^2 + 20m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{20}{9} \leq m \leq 0$.

Câu 16: Hàm số $y = \sqrt{(m+1)x^2 - 2(m+1)x + 4}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$ khi

- A. $-1 \leq m \leq 3$. B. $-1 < m < 3$. C. $-1 < m \leq 3$. D. $m > -1$.

Lời giải

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x) = (m+1)x^2 - 2(m+1)x + 4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. (1)

• $m = -1$ thì $f(x) = 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$: thỏa mãn.

• $m \neq -1$, khi đó (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m^2 - 2m - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ -1 \leq m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 3$.

Kết hợp hai trường hợp ta được $-1 \leq m \leq 3$.

Câu 17: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để biểu thức $f(x) = \frac{-x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2}{-4x^2 + 5x - 2}$ luôn dương.

- A. $m \geq -\frac{5}{8}$. B. $m < -\frac{5}{8}$. C. $m < \frac{5}{8}$. D. $m \geq \frac{5}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $-4x^2 + 5x - 2 = -\left(2x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{7}{16} < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó $f(x) = \frac{-x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2}{-4x^2 + 5x - 2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' = 4(m+1)^2 + (1 - 4m^2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 8m + 5 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{5}{8}$.

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $-2x^2 + 2(m-2)x + m - 2 < 0$ có

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"

Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng

Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT: 0834 332 133

nghiệm.

A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. C. $m \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$. D. $m \in [0; 2]$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $f(x) = -2x^2 + 2(m-2)x + m-2$ và $\Delta' = (m-2)^2 + 2(m-2) = m^2 - 2m$.

- $\Delta' < 0 \xrightarrow{a=-2<0} f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow$ bất phương trình có nghiệm.
- $\Delta' = 0 \longrightarrow f(x) = 0$ tại $x = \frac{m-2}{2}$, còn ngoài ra thì $f(x) < 0$ nên bất phương trình có nghiệm.
- $\Delta' > 0 \longrightarrow f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$. Khi đó bất phương trình đã cho có nghiệm $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

Vậy cả ba trường hợp ta thấy bất phương trình đều có nghiệm.

Câu 19: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $-2x^2 + 2(m-2)x + m-2 \geq 0$ có nghiệm.

A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. C. $m \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$. D. $m \in [0; 2]$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x) = -2x^2 + 2(m-2)x + m-2$ và $\Delta' = (m-2)^2 + 2(m-2) = m^2 - 2m$.

- $\Delta' < 0 \xrightarrow{a=-2<0} f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow$ bất phương trình vô nghiệm.

Do đó trường hợp này không có m thỏa mãn.

- $\Delta' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \longrightarrow f(x) = 0 \text{ khi } x = -\frac{b}{2a} = -1 \\ m = 2 \longrightarrow f(x) = 0 \text{ khi } x = -\frac{b}{2a} = 0 \end{cases}$, còn ngoài ra thì $f(x) < 0$ nên bất phương trình vô nghiệm.

ngiệm.

Do đó trường hợp này có $m = 0$ hoặc $m = 2$ thỏa mãn.

- $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 2 \end{cases} \longrightarrow f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$. Khi đó bất phương trình đã cho có nghiệm $x \in [x_1; x_2]$.

Do đó trường hợp này có $m < 0$ hoặc $m > 2$ thỏa mãn.

Hợp các trường hợp ta được $m \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$ thỏa mãn.

Câu 20: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $mx^2 + 2(m+1)x + m-2 > 0$ có nghiệm.

A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right)$. C. $m \in \left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$. D. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x) = mx^2 + 2(m+1)x + m - 2$ và $\Delta' = (m+1)^2 - m(m-2) = 4m+1$.

- $m = 0 \longrightarrow$ bất phương trình trở thành $2x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Do đó $m = 0$ thỏa mãn.
- $m > 0$, ta biện luận các trường hợp như câu. Do đó $m > 0$ thỏa mãn.
- $m < 0$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{4} \longrightarrow f(x) = 0$

có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$.

Khi đó bất phương trình đã cho có nghiệm $x \in (x_1; x_2)$.

Do đó $-\frac{1}{4} < m < 0$ thỏa mãn. Hợp các trường hợp ta được $m > -\frac{1}{4}$.

Dạng 8. Hệ bất phương trình bậc hai**1. Phương pháp**

Bước 1: Ta đi tìm tập nghiệm từng bất phương trình

Bước 2: Giao các tập nghiệm đó lại ta được tập nghiệm của hệ bất phương trình

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Giải hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ x^2 - 11x + 28 \geq 0 \end{cases}$$

Lời giải

Tập nghiệm của $x^2 - 2x - 3 > 0$ là $S_1 = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Tập nghiệm của $x^2 - 11x + 28 \geq 0$ là $S_2 = (-\infty; 4] \cup [7; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = (-\infty; -1) \cup (3; 4] \cup [7; +\infty)$.

Ví dụ 2: Giải hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \leq 0 \\ x^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

Lời giải

Tập nghiệm của $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ là $S_1 = [1; 2]$.

Tập nghiệm của $x^2 - 1 \leq 0$ là $S_2 = [-1; 1]$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = \{1\}$.

Ví dụ 3: Tìm m để hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 2x + m < 0 & (1) \\ 3x^2 - x - 4 \leq 0 & (2) \end{cases}$$
 vô nghiệm

Lời giải

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{4}{3}$. Suy ra $S_1 = \left[-1; \frac{4}{3}\right]$

Bất phương trình (2) $\Leftrightarrow x < -\frac{m}{2}$. Suy ra $S_2 = \left(-\infty; -\frac{m}{2}\right)$.

Để hệ bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $S_1 \cap S_2 = \emptyset \Leftrightarrow -\frac{m}{2} \leq -1 \Leftrightarrow m \geq 2$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases}$ là:

A. $S = [1; 2)$.

B. $S = [1; 3)$.

C. $S = (1; 2]$.

D. $S = [2; 3)$.

Lời giải

Chọn C

Tập nghiệm của $2-x \geq 0$ là $S_1 = (-\infty; 2]$.

Tập nghiệm của $x^2 - 4x + 3 < 0$ là $S_2 = (1; 3)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = (1; 2]$.

Câu 2: Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 6x + 8 > 0 \end{cases}$ là:

A. $S = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

B. $S = (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$.

C. $S = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

D. $S = (1; 4)$.

Lời giải

Chọn B

Tập nghiệm của $x^2 - 4x + 3 > 0$ là $S_1 = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

Tập nghiệm của $x^2 - 6x + 8 > 0$ là $S_2 = (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$.

Câu 3: Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x^2 - 4x + 1 > 0 \\ 3x^2 - 5x + 2 \leq 0 \end{cases}$.

A. $x \geq 1$.

B. $x \leq \frac{1}{3}$.

C. $x \in \emptyset$.

D. $x \leq \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Tập nghiệm của $3x^2 - 4x + 1 > 0$ là $S_1 = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

Tập nghiệm của $3x^2 - 5x + 2 \leq 0$ là $S_2 = \left[\frac{2}{3}; 1\right]$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên của x thỏa mãn $\begin{cases} -2x^2 - 5x + 4 < 0 \\ -x^2 - 3x + 10 > 0 \end{cases}$?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Tập nghiệm của $-2x^2 - 5x + 4 < 0$ là $S_1 = \left(-\infty; \frac{-5 - \sqrt{57}}{4}\right) \cup \left(\frac{-5 + \sqrt{57}}{4}; +\infty\right)$.

Tập nghiệm của $-x^2 - 3x + 10 > 0$ là $S_2 = (-5; 2)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = \left(-5; \frac{-5 - \sqrt{57}}{4}\right) \cup \left(\frac{-5 + \sqrt{57}}{4}; 2\right)$.

Do đó các giá trị nguyên của x thuộc tập S là $\{-4; 1\}$.

Câu 5: Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 9 < 0 \\ (x-1)(3x^2 + 7x + 4) \geq 0 \end{cases}$ có nghiệm là:

A. $-1 \leq x < 2$.

B. $-3 < x \leq -\frac{4}{3}$ hoặc $-1 \leq x \leq 1$.

C. $-\frac{4}{3} \leq x \leq -1$ hay $1 \leq x \leq 3$.

D. $-\frac{4}{3} \leq x \leq -1$ hoặc $1 \leq x < 3$.

Lời giải

Chọn D

Tập nghiệm của $x^2 - 9 < 0$ là $S_1 = (-3; 3)$.

Tập nghiệm của $(x-1)(3x^2 + 7x + 4) \geq 0$ là $S_2 = \left[\frac{-4}{3}; -1\right] \cup [1; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = \left[\frac{-4}{3}; -1\right] \cup [1; 3)$.

Câu 6: Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 7x + 6 < 0 \\ |2x - 1| < 3 \end{cases}$ là:

A. $(1; 2)$.

B. $[1; 2]$.

C. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

D. $\emptyset$.

Lời giải

Chọn C

Tập nghiệm của $x^2 - 7x + 6 < 0$ là $S_1 = (1; 6)$.

Tập nghiệm của $|2x - 1| < 3$ là $S_2 = (-1; 2)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = (1; 2)$.

Câu 7: Hệ bất phương trình nào sau đây vô nghiệm?

A. $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ -2x^2 + x - 1 < 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0 \\ -2x^2 + x - 1 > 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ 2x^2 + x + 1 > 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0 \\ 2x^2 - x + 1 > 0 \end{cases}$

Lời giải

Chọn B

Đáp án A. Tập nghiệm của $x^2 - 2x - 3 > 0$ là $S_1 = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Tập nghiệm của $-2x^2 + x - 1 < 0$ là $S_2 = \mathbb{R}$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Đáp án B. Tập nghiệm của $x^2 - 2x - 3 < 0$ là $S_1 = (-1; 3)$.

Tập nghiệm của $-2x^2 + x - 1 > 0$ là $S_2 = \emptyset$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Đáp án C. Tập nghiệm của $x^2 - 2x - 3 > 0$ là $S_1 = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Tập nghiệm của $2x^2 + x + 1 > 0$ là $S_2 = \mathbb{R}$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Đáp án D. Tập nghiệm của $x^2 - 2x - 3 < 0$ là $S_1 = (-1; 3)$.

Tập nghiệm của $2x^2 - x + 1 > 0$ là $S_2 = \mathbb{R}$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = (-1; 3)$.

Câu 8: Số nghiệm nguyên của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases}$ là:

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Tập nghiệm của $x^2 + 4x + 3 \geq 0$ là $S_1 = (-\infty; -3] \cup [-1; +\infty)$.

Tập nghiệm của $2x^2 - x - 10 \leq 0$ là $S_2 = \left[-2; \frac{5}{2}\right]$.

Tập nghiệm của $2x^2 - 5x + 3 > 0$ là $S_3 = (-\infty; 1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = [-1; 1) \cup \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$.

Suy ra nghiệm nguyên là $\{-1; 0; 2\}$.

Câu 9: Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 1 \leq 0(1) \\ x - m > 0(2) \end{cases}$ có nghiệm khi:

A. $m > 1$.

B. $m = 1$.

C. $m < 1$.

D. $m \neq 1$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$. Suy ra $S_1 = [-1; 1]$.

Bất phương trình (2) $\Leftrightarrow x > m$. Suy ra $S_2 = (m; +\infty)$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow m < 1$.

Câu 10: Hệ bất phương trình $\begin{cases} (x+3)(4-x) > 0(1) \\ x < m-1(2) \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m < 5$.

B. $m > -2$.

C. $m = 5$.

D. $m > 5$.

Lời giải

Chọn B

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow -3 < x < 4$. Suy ra $S_1 = (-3; 4)$.

Bất phương trình có $S_2 = (-\infty; m-1)$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow m-1 > -3 \Leftrightarrow m > -2$.

Câu 11: Tìm m để $-9 < \frac{3x^2 + mx - 6}{x^2 - x + 1} < 6$ nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

A. $-3 < m < 6$.

B. $-3 \leq m \leq 6$.

C. $m < -3$.

D. $m > 6$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$-9(x^2 - x + 1) < 3x^2 + mx - 6 < 6(x^2 - x + 1) \text{ (do } x^2 - x + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2 + (m-9)x + 3 > 0 & (1) \\ 3x^2 - (m+6)x + 12 > 0 & (2) \end{cases}$$

Yêu cầu $\Leftrightarrow$ (1) và (2) nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} < 0 \\ \Delta_{(2)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-9)^2 - 144 < 0 \\ (m+6)^2 - 144 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 6.$$

Câu 12: Xác định m để với mọi x ta có $-1 \leq \frac{x^2 + 5x + m}{2x^2 - 3x + 2} < 7$.

A. $-\frac{5}{3} \leq m < 1$.

B. $1 < m \leq \frac{5}{3}$.

C. $m \leq -\frac{5}{3}$.

D. $m < 1$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình tương đương

$$\begin{cases} \frac{3x^2 + 2x + 2 + m}{2x^2 - 3x + 2} \geq 0 \\ \frac{13x^2 - 26x + 14 - m}{2x^2 - 3x + 2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x + 2 + m \geq 0 (1) \\ 13x^2 - 26x + 14 - m > 0 (2) \end{cases}$$

Yêu cầu $\Leftrightarrow$ (1) và (2) nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} \leq 0 \\ \Delta_{(2)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^2 - 4 \cdot 3(2 + m) \leq 0 \\ 26^2 - 4 \cdot 13(14 - m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{5}{3} \\ m < 1 \end{cases}$$

Câu 13: Hệ bất phương trình $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x^2 - 2mx + 1 \leq 0 \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m > 1$.

B. $m = 1$.

C. $m < 1$.

D. $m \neq 1$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Suy ra $S_1 = (1; +\infty)$.

Bất phương trình $x^2 - 2mx + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 \leq m^2 - 1 \Leftrightarrow (x - m)^2 \leq m^2 - 1$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{m^2 - 1} \leq x - m \leq \sqrt{m^2 - 1} \text{ (điều kiện: } m^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -1 \end{cases})}$$

$$\Leftrightarrow m - \sqrt{m^2 - 1} \leq x \leq m + \sqrt{m^2 - 1}. \text{ Suy ra } S_2 = [m - \sqrt{m^2 - 1}; m + \sqrt{m^2 - 1}].$$

Để hệ có nghiệm $\Leftrightarrow m + \sqrt{m^2 - 1} > 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 1} > 1 - m \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m < 0 \\ m^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \leq -1 \vee m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

Đối chiếu điều kiện, ta được $m > 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 14: Tìm m để hệ $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 - m \leq 0 & (1) \\ x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m \leq 0 & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. “Tránh mua các trang và các cá nhân khác”

Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng

Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT: 0834 332 133

A. $0 < m < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

B. $0 \leq m \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

C. $0 \leq m < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

D. $0 < m \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện để (1) có nghiệm là $\Delta' = m \geq 0$.Khi đó (1) có tập nghiệm $S_1 = [1-\sqrt{m}; 1+\sqrt{m}]$.Ta thấy (2) có tập nghiệm $S_2 = [m; m+1]$.

$$\text{Hệ có nghiệm} \Leftrightarrow S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1+\sqrt{m} \\ 1-\sqrt{m} \leq m+1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Câu 15: Tìm m sao cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0(1) \\ (m-1)x - 2 \geq 0(2) \end{cases}$ có nghiệm.

A. $-1 \leq m \leq \frac{3}{2}$.

B. $m \geq \frac{3}{2}$.

C. $m \in \emptyset$.

D. $m \geq -1$.

Lời giải

Chọn B

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4$. Suy ra $S_1 = [-1; 4]$.

Giải bất phương trình (2)

Với $m-1=0 \Leftrightarrow m=1$ thì bất phương trình (2) trở thành $0x \geq 2$: vô nghiệm.Với $m-1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì bất phương trình (2) tương đương với $x \geq \frac{2}{m-1}$.Suy ra $S_2 = \left[\frac{2}{m-1}; +\infty \right)$. Hệ bất phương trình có nghiệm khi $\frac{2}{m-1} \leq 4 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}$.Với $m-1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì bất phương trình (2) tương đương với $x \leq \frac{2}{m-1}$.Suy ra $S_2 = \left(-\infty; \frac{2}{m-1} \right]$.Hệ bất phương trình có nghiệm khi $\frac{2}{m-1} \geq -1 \Leftrightarrow m \leq -1$ (không thỏa)Để hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq \frac{3}{2}$.

Câu 16: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 + 10x + 16 \leq 0(1) \\ mx \geq 3m+1(2) \end{cases}$ vô nghiệm.

A. $m > -\frac{1}{5}$.

B. $m > \frac{1}{4}$.

C. $m > -\frac{1}{11}$.

D. $m > \frac{1}{32}$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow -8 \leq x \leq -2$. Suy ra $S_1 = [-8; -2]$.

Giải bất phương trình (2)

Với $m = 0$ thì bất phương trình (2) trở thành $0x \geq 1$: vô nghiệm.

Với $m > 0$ thì bất phương trình (2) tương đương với $x \geq \frac{3m+1}{m}$.

Suy ra $S_2 = \left[\frac{3m+1}{m}; +\infty \right)$.

Hệ bất phương trình vô nghiệm khi $\frac{3m+1}{m} > -2 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{5}$.

Với $m < 0$ thì bất phương trình (2) tương đương với $x \leq \frac{3m+1}{m}$.

Suy ra $S_2 = \left(-\infty; \frac{3m+1}{m} \right]$. Hệ bất phương trình vô nghiệm khi

$$\frac{3m+1}{m} < -8 \Leftrightarrow m > \frac{-1}{11}$$

Để hệ bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $m > -\frac{1}{11}$.

Câu 17: Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 1 \leq 0(2) \\ x^2 - 6x + 5 \leq 0(1) \end{cases}$. Để hệ bất phương trình có nghiệm, giá trị thích hợp của tham số a là:

A. $0 \leq a \leq 2$.

B. $0 \leq a \leq 4$.

C. $2 \leq a \leq 4$.

D. $0 \leq a \leq 8$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5$. Suy ra $S_1 = [1; 5]$.

Ta thấy (2) có tập nghiệm $S_2 = [a+1-\sqrt{2a}; a+1+\sqrt{2a}]$.

$$\text{Hệ có nghiệm} \Leftrightarrow S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} a+1+\sqrt{2a} \geq 1 \\ a+1-\sqrt{2a} \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 2.$$

§5

HAI DẠNG PHƯƠNG TRÌNH
QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Hai ô tô xuất phát tại cùng một thời điểm với vận tốc trung bình như nhau là 40 km/h từ hai vị trí A và B trên hai con đường vuông góc với nhau để đi về bến O là giao của hai con đường. Vị trí A cách bến 8 km, vị trí B cách bến 7 km. Gọi x là thời gian hai xe bắt đầu chạy cho tới khi cách nhau 5 km (Hình 31).

Bạn Dương xác định được x thỏa mãn phương

$$\text{trình } \sqrt{(8 - 40x)^2 + (7 - 40x)^2} = 5.$$



Hình 31



Làm thế nào để tìm được giá trị của x?

I. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CÓ DẠNG $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ (I)

($f(x) = ax^2 + bx + c$ và $g(x) = mx^2 + nx + p$ với $a \neq m$)

Để giải phương trình (I), ta làm như sau:

Bước 1. Bình phương hai vế của (I) dẫn đến phương trình $f(x) = g(x)$ rồi tìm nghiệm của phương trình này.

Bước 2. Thay từng nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ vào bất phương trình $f(x) \geq 0$ (hoặc $g(x) \geq 0$). Nghiệm nào thỏa mãn bất phương trình đó thì giữ lại, nghiệm nào không thỏa mãn thì loại đi.

Bước 3. Trên cơ sở những nghiệm giữ lại ở Bước 2, ta kết luận nghiệm của phương trình (I).

Chú ý:

- Trong hai bất phương trình $f(x) \geq 0$ và $g(x) \geq 0$, ta thường chọn bất phương trình có dạng đơn giản hơn để thực hiện Bước 2.
- Người ta chứng minh được rằng tập hợp (số thực) giữ lại ở Bước 2 chính là tập nghiệm của phương trình (I).

Ví dụ 1 Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 6x - 4} = \sqrt{x - 4}$ (1).

Giải

Bình phương hai vế của (1) ta được $x^2 - 6x - 4 = x - 4$ (2).

Ta có: (2) $\Leftrightarrow x^2 - 7x = 0$.

Do đó, phương trình (2) có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = 7$.

Thay lần lượt hai giá trị trên vào bất phương trình $x - 4 \geq 0$, ta thấy chỉ có $x = 7$ thỏa mãn bất phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x = 7$.

Ví dụ 2 Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 3x + 1} = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$ (3).

Giải

Bình phương hai vế của (3) ta được $2x^2 + 3x + 1 = x^2 + 4x + 3$ (4).

Ta có: (4) $\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$.

Do đó, phương trình (4) có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = 2$.

Thay lần lượt hai giá trị trên vào bất phương trình $x^2 + 4x + 3 \geq 0$, ta thấy cả hai giá trị đều thỏa mãn bất phương trình.

Vậy phương trình (3) có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = 2$.

1 Giải phương trình:

$$\sqrt{3x^2 - 4x + 1} = \sqrt{x^2 + x - 1}.$$

II. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CÓ DẠNG $\sqrt{f(x)} = g(x)$ (II)

($f(x) = ax^2 + bx + c$ và $g(x) = dx + e$ với $a \neq d^2$)

Để giải phương trình (II), ta làm như sau:

Bước 1. Giải bất phương trình $g(x) \geq 0$ để tìm tập nghiệm của bất phương trình đó.

Bước 2. Bình phương hai vế của (II) dẫn đến phương trình $f(x) = [g(x)]^2$ rồi tìm tập nghiệm của phương trình đó.

Bước 3. Trong những nghiệm của phương trình $f(x) = [g(x)]^2$, ta chỉ giữ lại những nghiệm thuộc tập nghiệm của bất phương trình $g(x) \geq 0$. Tập nghiệm giữ lại đó chính là tập nghiệm của phương trình (II).

Ví dụ 3 Giải phương trình

$$\sqrt{x^2 - 6x + 6} = 2x - 1 \quad (5).$$

Giải

Trước hết ta giải bất phương trình $2x - 1 \geq 0$ (6).

Ta có: (6) $\Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$.

Bình phương hai vế của (5) ta được $x^2 - 6x + 6 = (2x - 1)^2$ (7).

Ta có: $(7) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 6 = 4x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 5 = 0$.

Do đó, phương trình (7) có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = -\frac{5}{3}$.

Trong hai giá trị trên, chỉ có giá trị $x = 1$ là thỏa mãn $x \geq \frac{1}{2}$.

Vậy phương trình (5) có nghiệm là $x = 1$.

2 Giải phương trình:

$$\sqrt{3x - 5} = x - 1.$$

Ví dụ 4 Trong bài toán ở phần mở đầu, hãy giải thích vì sao thời gian x (giờ) để hai xe bắt đầu chạy cho tới khi cách nhau 5 km thỏa mãn phương trình $\sqrt{(8 - 40x)^2 + (7 - 40x)^2} = 5$. Sau đó, hãy giải phương trình trên.

Giải. (Hình 32)

Quãng đường xe ô tô xuất phát từ A, B đi được sau x giờ là $40x$ (km).

Sau x giờ, ô tô xuất phát từ vị trí A đến C cách O một khoảng $OC = 8 - 40x$ (km).

Sau x giờ, ô tô xuất phát từ vị trí B đến D cách O một khoảng $OD = 7 - 40x$ (km).

Để $8 - 40x \geq 0$ và $7 - 40x \geq 0$ thì $0 \leq x \leq 0,175$. Do tam giác OCD là tam giác vuông nên

$$CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = \sqrt{(8 - 40x)^2 + (7 - 40x)^2}.$$

Ta có phương trình: $\sqrt{(8 - 40x)^2 + (7 - 40x)^2} = 5$.

Bình phương hai vế ta có:

$$(8 - 40x)^2 + (7 - 40x)^2 = 25.$$

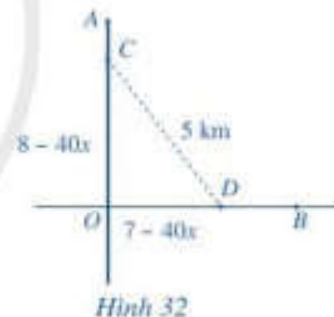
$$\Leftrightarrow 1\,600x^2 - 640x + 64 + 1\,600x^2 - 560x + 49 = 25$$

$$\Leftrightarrow 3\,200x^2 - 1\,200x + 88 = 0$$

$$\Leftrightarrow 400x^2 - 150x + 11 = 0.$$

Phương trình có hai nghiệm là $x = 0,1$ hoặc $x = 0,275$. Đối chiếu với điều kiện $0 \leq x \leq 0,175$, ta chọn $x = 0,1$.

Vậy thời gian để hai xe cách nhau 5 km là 0,1 giờ.



BÀI TẬP

1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x^2 - 3x - 1} = \sqrt{2x + 3};$

b) $\sqrt{4x^2 - 6x - 6} = \sqrt{x^2 - 6};$

c) $\sqrt{x + 9} = 2x - 3;$

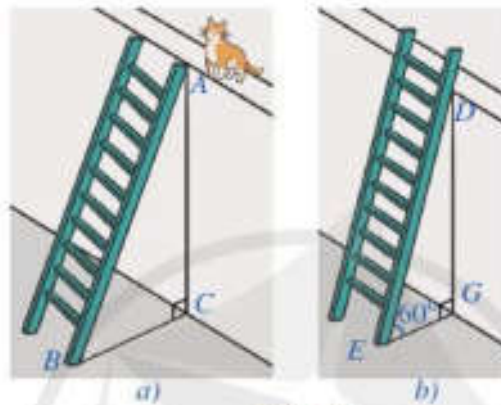
d) $\sqrt{-x^2 + 4x - 2} = 2 - x.$

2. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2-x} + 2x = 3$;

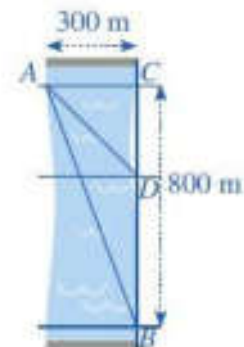
b) $\sqrt{-x^2 + 7x - 6} + x = 4$.

3. Để leo lên một bức tường, bác Nam dùng một chiếc thang có chiều dài cao hơn bức tường đó 1 m. Ban đầu, bác Nam đặt chiếc thang mà đầu trên của chiếc thang đó vừa chạm đúng vào mép trên bức tường (Hình 33a). Sau đó, bác Nam dịch chuyển chân thang vào gần chân tường thêm 0,5 m thì bác Nam nhận thấy thang tạo với mặt đất một góc 60° (Hình 33b). Bức tường cao bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



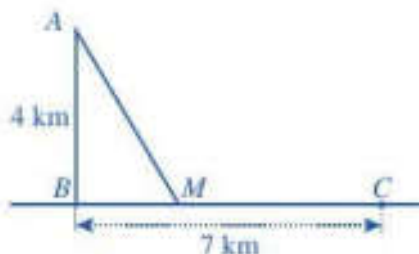
Hình 33

4. Một người đứng ở điểm A trên một bờ sông rộng 300 m, chèo thuyền đến vị trí D, sau đó chạy bộ đến vị trí B cách C một khoảng 800 m như Hình 34. Vận tốc chèo thuyền là 6 km/h, vận tốc chạy bộ là 10 km/h và giả sử vận tốc dòng nước không đáng kể. Tính khoảng cách từ vị trí C đến D, biết tổng thời gian người đó chèo thuyền và chạy bộ từ A đến B là 7,2 phút.



Hình 34

5. Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng cách $AB = 4$ km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 7 km. Người canh hải đăng có thể chèo thuyền từ A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc 3 km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 5 km/h như Hình 35. Tính khoảng cách từ vị trí B đến M, biết thời gian người đó đi từ A đến C là 148 phút.



Hình 35



B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. **“Tránh mua các trang và các cá nhân khác”**

Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng

Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT: 0834 332 133

Dạng 1: Hai phương trình đưa về phương trình bậc hai thường gặp**1. Phương pháp**

* $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases}$ hoặc $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \end{cases}$ (Tùy theo mức độ đơn giản của biểu thức A hay B mà ta lựa chọn cách biến đổi nào.)

$$* \sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 3x - 5} = x + 1$

Lời giải

$$\text{Ta có : } \sqrt{2x^2 + 3x - 5} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 2x^2 + 3x - 5 = (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

BTT. Giải phương trình $\sqrt{2x^2 - 8x + 4} = x - 2$.

Hướng dẫn giải

$$\sqrt{2x^2 - 8x + 4} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2x^2 - 8x + 4 = (x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Ví dụ 2. Giải phương trình: $x^2 + 5x + 2 + 2\sqrt{x^2 + 5x + 10} = 0$

Hướng dẫn giải

Điều kiện xác định $x^2 + 5x + 10 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow x^2 + 5x + 10 + 2\sqrt{x^2 + 5x + 10} - 8 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 5x + 10} = 2 \\ \sqrt{x^2 + 5x + 10} = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 5x + 10} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Ví dụ 3. Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 5x + 4} = \sqrt{-2x^2 - 3x + 12}$

Hướng dẫn.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 4 = -2x^2 - 3x + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-4) \geq 0 \\ 3x^2 - 2x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-4}{3}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{-4}{3}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Số nghiệm nguyên dương của phương trình $\sqrt{x-1} = x-3$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\sqrt{x-1} = x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x-1 = (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{cases} x = 2 \Rightarrow x = 5 \\ x = 5 \end{cases} \end{cases}$$

Đổi chiều điều kiện suy ra phương trình có một nghiệm $x = 4$.

Câu 2. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình: $\sqrt{x^2 + 3x - 2} = \sqrt{1+x}$ là

- A. 3. B. -3. C. -2. D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\sqrt{x^2 + 3x - 2} = \sqrt{1+x} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x \geq 0 \\ x^2 + 3x - 2 = 1+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Câu 3. Phương trình $\sqrt{x^2 + 4x - 1} = x - 3$ có nghiệm là

- A. $x = 1$ hoặc $x = 3$. B. Vô nghiệm. C. $x = 1$. D. $x = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\sqrt{x^2 + 4x - 1} = x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x^2 + 4x - 1 = x^2 - 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Câu 4. Số nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 8 = 4\sqrt{(4-x)(x+2)}$ là

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Hướng dẫn giải**Chọn D.**Điều kiện: $(4-x)(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2; 4]$.

$$x^2 - 2x - 8 = 4\sqrt{(4-x)(x+2)} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 4\sqrt{-(x^2 - 2x - 8)}(1).$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{-(x^2 - 2x - 8)}, t \geq 0 \Leftrightarrow t^2 = -(x^2 - 2x - 8) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = -t^2.$$

$$(1) \Leftrightarrow -t^2 = 4t \Leftrightarrow t^2 + 4t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0(n) \\ t = -4(l) \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{-(x^2 - 2x - 8)} = 0 \Leftrightarrow -(x^2 - 2x - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2(n) \\ x = 4(l) \end{cases}. \text{ Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.}$$

Câu 5. Tổng các bình phương các nghiệm của phương trình $(x-1)(x-3) + 3\sqrt{x^2 - 4x + 5} - 2 = 0$ là

A. 17.

B. 4.

C. 16.

D. 8.

Hướng dẫn giải**Chọn B.**

$$\text{Ta có } (x-1)(x-3) + 3\sqrt{x^2 - 4x + 5} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 + 3\sqrt{x^2 - 4x + 5} - 4 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 5} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Câu 6. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên không dương của tham số m để phương trình $\sqrt{2x+m} = x-1$ có nghiệm duy nhất?

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Hướng dẫn giải**Chọn B.**

$$\sqrt{2x+m} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2x+m = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 4x + 1 - m = 0(*) \end{cases}.$$

Phương trình có nghiệm duy nhất khi hệ có nghiệm duy nhất.

$$\text{Xét } x^2 - 4x + 1 - m = 0; \Delta' = 3 + m$$

$$\text{TH1: } \Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -3 \text{ thì có nghiệm kép } x = 2 \geq 1.$$

TH2: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -3$ thì phương trình có nghiệm duy nhất khi có 2 nghiệm thỏa $x_1 < 1 < x_2$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0 \Leftrightarrow 1 - m - 4 + 1 < 0 \Leftrightarrow m > -2.$$

m không dương nên $m \in \{-3; -1; 0\}$.

Câu 7. Tìm các giá trị của m để phương trình $2\sqrt{x+1} = x + m$ có nghiệm:

A. $m > 2$.

B. $m \geq 2$.

C. $m \leq 2$.

D. $m < 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$2\sqrt{x+1} = x + m \quad (1)$$

$$\text{Phương trình tương đương: } \begin{cases} x + m \geq 0 \\ 4(x+1) = x^2 + 2mx + m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -m \\ x^2 + 2(m-2)x + m^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ pt (2) có ít nhất một nghiệm lớn hơn hoặc bằng $-m$.

$$\Delta' = 8 - 4m$$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2$

Dạng 2: Phương trình tích

1. Phương pháp

Phương trình tích dạng có dạng: $A(x) \cdot B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ hoặc $B(x) = 0$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1. Giải phương trình $(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x-2} = 0$

Hướng dẫn giải

$$(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x-2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Ví dụ 2. Giải phương trình $(x-2)\sqrt{2x+7} = x^2 - 4$

Hướng dẫn giải

Điều kiện xác định của phương trình $2x+7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{2}$.

$$\text{Ta có } (x-2)\sqrt{2x+7} = x^2 - 4 \Leftrightarrow (x-2)\sqrt{2x+7} = (x-2)(x+2)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\sqrt{2x+7}-(x+2)\right]=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ \sqrt{2x+7}-(x+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \sqrt{2x+7}=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \sqrt{2x+7}=x+2 \end{cases} \quad (1)$$

Giải phương trình

$$(1) : \sqrt{2x+7}=x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 2x+7=(x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2+2x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=1, x=2$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Phương trình $(x^2-6x)\sqrt{17-x^2}=x^2-6x$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện: $17-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{17} \leq x \leq \sqrt{17}$.

Ta có: $(x^2-6x)\sqrt{17-x^2}=x^2-6x \Leftrightarrow (x^2-6x)(\sqrt{17-x^2}-1)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x=0 \\ \sqrt{17-x^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-6)=0 \\ 16-x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \quad (T) \\ x=6 \quad (L) \\ x=\pm 4 \quad (T) \end{cases}. \text{ Vậy phương trình có 3 thực phân biệt.}$$

Câu 2. Phương trình $(x^2+5x+4)\sqrt{x+3}=0$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq -3$.

$$\text{Phương trình tương đương với } \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ \begin{cases} x=-1 \\ x=-4 \\ x=-3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-3 \end{cases}.$$

Câu 3. Số nghiệm của phương trình: $(\sqrt{x-4}-1)(x^2-7x+6)=0$ là

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Hướng dẫn giải

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. “Tránh mua các trang và các cá nhân khác”

Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng

Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Chọn D.

Điều kiện xác định của phương trình $x \geq 4$.

Phương trình tương đương với
$$\begin{cases} \sqrt{x-4}=1 \\ x^2-7x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=1 \\ x=6 \end{cases} \text{ kết hợp điều kiện suy ra } \begin{cases} x=5 \\ x=6 \end{cases}.$$

Câu 4. Tìm phương trình tương đương với phương trình $\frac{(x^2+x-6)\sqrt{x+1}}{|x|-2}=0$ trong các phương trình sau:

A. $\frac{x^2+4x+3}{\sqrt{x+4}}=0$.

B. $\sqrt{x}+\sqrt{2+x}=1$.

C. $x^3+1=0$.

D. $(x-3)^2=\frac{-x}{\sqrt{x-2}}$.

Hướng dẫn giải**Chọn C.**

Xét phương trình $\frac{(x^2+x-6)\sqrt{x+1}}{|x|-2}=0$ (1). ĐK: $x \geq -1$ và $x \neq 2$.

Với điều kiện ở trên, ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}=0 \\ x^2+x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-3 \\ x=2 \end{cases}$.

Đối chiếu điều kiện, phương trình (1) có nghiệm $x=-1$.

Xét phương trình $\frac{x^2+4x+3}{\sqrt{x+4}}=0$ (2). ĐK: $x > -4$. (2) $\Leftrightarrow x^2+4x+3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-3 \end{cases}$. Loại A

Xét phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{2+x}=1$. ĐK: $x \geq 0$. Loại B

Xét phương trình $x^3+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Xét phương trình $(x-3)^2=\frac{-x}{\sqrt{x-2}}$. ĐK: $x > 2$. Loại D

Đã sửa đáp án C từ $x^2=1$ thành $x^3+1=0$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG

PHẦN I: TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tính giá trị của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{x-2}$ tại $x = 1$.

- A. $f(1) = 1$. B. $f(1) = -1$ C. $f(1) = 0$. D. $f(1) = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f(1) = \frac{1}{1-2} = -1.$$

Câu 3: Hàm số bậc hai $y = x^2 - 4x + 1$ đồng biến trên khoảng nào trong các đáp án dưới đây?

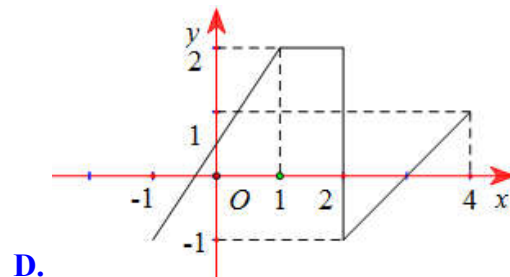
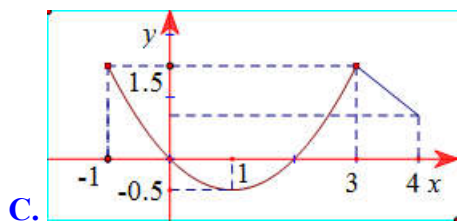
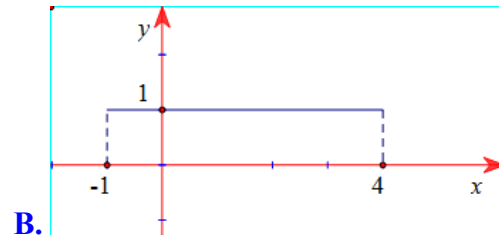
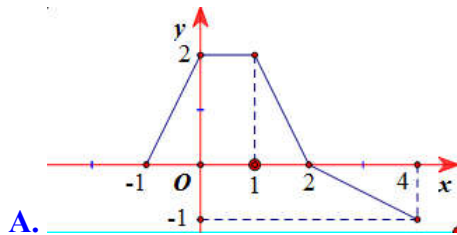
- A. $(-1; 3)$. B. $(0; 2)$. C. $(1; 2)$. D. $(2; 3)$

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = x^2 - 4x + 1$ có hệ số $a = 1 > 0$ và $-\frac{b}{2a} = 2$ nên hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty; 2)$

Câu 4: Đường nào trong các đáp án sau **không** thể là đồ thị của một hàm số y theo biến số x ?



Lời giải

Chọn D

Trong Đáp án D, ứng với $x = 2$ có vô số giá trị y tương ứng $\in [-1; 2]$ nên đường trong đáp án D không thể là đồ thị của một hàm số.

Câu 5: Xác định tọa độ tất cả giao điểm của parabol $y = x^2 - 3x + 2$ với trục hoành (Ox).

- A. $M(1; 0), N(2; 0)$. B. $M(0; 2)$. C. $M(0; 1), N(0; 2)$. D. $M(1; 2)$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của $y = x^2 - 3x + 2$ với trục hoành

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 0 \\ x = 2 \Rightarrow y = 0 \end{cases}.$$

Vậy có hai giao điểm là $M(1;0)$, $N(2;0)$.

Câu 6: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x-1}$.

A. $D = [-3; +\infty) \setminus \{1\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{1; -3\}$.

C. $D = [-3; +\infty)$.

D. $D = (-3; +\infty) \setminus \{1\}$.

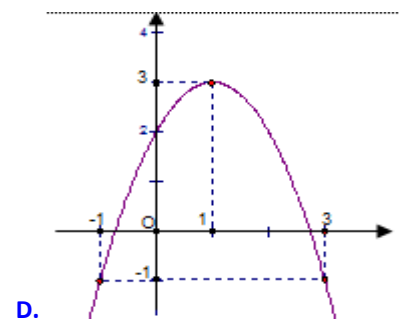
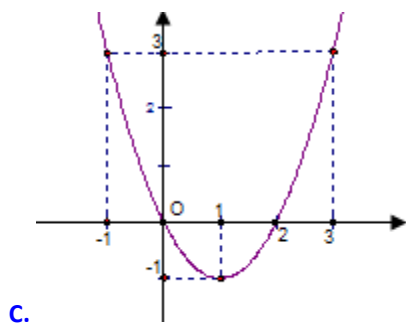
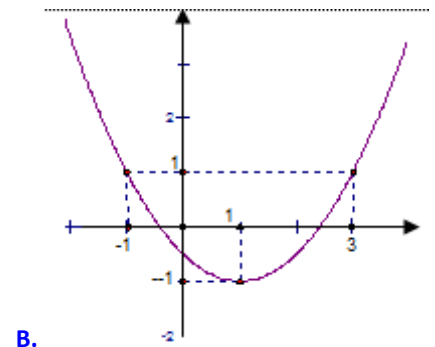
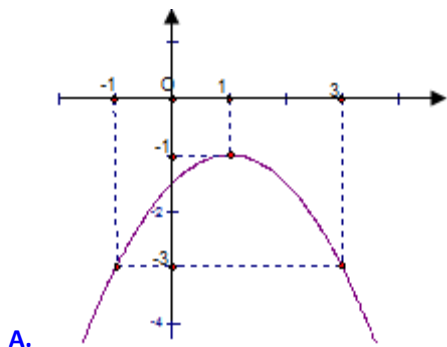
Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-3; +\infty) \setminus \{1\}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [-3; +\infty) \setminus \{1\}$.

Câu 7: Hình nào dưới đây cho ta đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x$?



Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x$ đi qua gốc tọa độ.

Vì hệ số $a = 1$ nên đồ thị là parabol có bề lõm quay lên.

Câu 8: Khẳng định nào dưới đây là **sai** khi nói về sự biến thiên của hàm số.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. “Tránh mua các trang và các cá nhân khác”

Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng

Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT: 0834 332 133

A. Hàm số $y = f(x)$ gọi là nghịch biến (giảm) trên khoảng $(a; b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a; b): x_1 < x_2$

$$\Rightarrow f(x_2) < f(x_1).$$

B. Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến (giảm) trên khoảng $(a; b)$ thì đồ thị “đi xuống” từ trái sang phải trên khoảng đó.

C. Hàm số $y = f(x)$ gọi là đồng biến (tăng) trên khoảng $(a; b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a; b): x_1 < x_2$

$$\Rightarrow f(x_2) < f(x_1).$$

D. Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến (tăng) trên khoảng $(a; b)$ thì đồ thị “đi lên” từ trái sang phải trên khoảng đó.

Lời giải

Chọn C

Theo lý thuyết sách giáo khoa.

Câu 9: Biết rằng parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $A(2; 3)$ và có đỉnh $I(1; 2)$. Tính tổng bình phương các hệ số của (P) .

A. 5.

B. 30.

C. 25.

D. 14.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } A(2; 3) \in (P) \Leftrightarrow 4a + 2b + c = 3 \quad (1)$$

$$I(1; 2) \in (P) \Leftrightarrow a + b + c = 2 \quad (2)$$

$$x_I = 1 \Leftrightarrow -\frac{b}{2a} = 1 \Leftrightarrow 2a + b = 0 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có $a = 1, b = -2, c = 3$. Vậy $a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 4 + 9 = 14$.

Câu 10: Gọi m_0 là giá trị thực của tham số m để parabol $(P): y = x^2 - 2x + 3 - m$ cắt trục hoành (Ox) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho độ dài đoạn thẳng AB bằng 4. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $m_0 \in \emptyset$.

B. $m_0 \in (-2; 3)$.

C. $m_0 \in (4; 10)$.

D. $m_0 \in (15; 30)$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

$$(P) \text{ cắt } Ox \text{ tại hai điểm } A, B \text{ nên hoành độ của hai điểm là nghiệm của } x^2 - 2x + 3 - m = 0 \quad (1)$$

$$(1) \text{ có hai nghiệm khi } \Delta' = m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2.$$

$$\text{Nghiệm của (1) là } x_1 = 1 - \sqrt{m - 2}; \quad x_2 = 1 + \sqrt{m - 2}.$$

Tọa độ $A(1-\sqrt{m-2}; 0)$ và $B(1+\sqrt{m-2}; 0)$.

$$\text{Ta có } AB = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(2\sqrt{m-2})^2 + 0^2} = 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{m-2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{m-2} = 2 \Leftrightarrow m-2 = 4 \Leftrightarrow m = 6.$$

Cách 2:

Gọi $A(x_1; 0)$ và $B(x_2; 0)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của $x^2 - 2x + 3 - m = 0$.

Theo định lý Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = 2$ và $x_1 x_2 = 3 - m$.

Ta có :

$$AB = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{2^2 - 4(3 - m)} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{m - 2} = 2 \\ \Leftrightarrow m - 2 = 4 \Leftrightarrow m = 6.$$

Câu 11: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{2x}{\sqrt{x-m}-1}$ xác định trên khoảng $(0; 1)$.

- A. $(-\infty; -1) \cup \{0\}$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(-\infty; -1]$. D. $(-\infty; -1] \cup \{0\}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định trên khoảng $(0; 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - m \geq 0 \\ \sqrt{x - m} - 1 \neq 0 \end{cases} \quad \forall x \in (0; 1) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ \sqrt{x - m} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ m + 1 \neq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m + 1 \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \notin (-1; 0) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; -1] \cup \{0\}.$$

Câu 12: Cho hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị (P) , đỉnh của (P) được xác định bởi công thức nào?

- A. $I\left(-\frac{b}{a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$. B. $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{2a}\right)$. C. $I\left(\frac{b}{a}; \frac{\Delta}{a}\right)$. D. $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - x^2 + 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $f(x)$ không chẵn không lẻ. B. $f(x)$ là hàm số chẵn. C. $f(x)$ là hàm số lẻ. D. $f(x)$ là hàm số vừa chẵn vừa lẻ.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 + 3 = x^4 - x^2 + 3 = f(x)$ nên $f(x)$ là hàm số chẵn.

Đồng thời $f(1) = 3 \neq -f(-1) = -3$ nên hàm số $f(x)$ không lẻ.

Vậy $f(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 14: Tập xác định của hàm số $y = \frac{2}{x-4}$ là:

A. $\mathbb{R}$

B. $(4; +\infty)$

C. $\mathbb{R} \setminus \{4\}$

D. $(-\infty; 4)$

Lời giải

Chọn C

Câu 15: Tọa độ giao điểm của $d : y = x - 4$ và $(P) : y = x^2 - x - 7$ là:

A. $M(3;1), N(-1;5)$

B. $M(-3;-1), N(-1;5)$

C. $M(3;-1), N(-1;-5)$

D. $M(3;1), N(1;5) [1;6]$.

Lời giải

Chọn C

Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = x^2 - x - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 4 \\ x^2 - x - 7 = x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 4 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -1 \\ y = -5 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy (d) và (P) có hai điểm chung là: $M(3;-1), N(-1;-5)$

Câu 16: Cho hàm số $y = x^2 - 4x - 5$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	-9	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Câu 17: Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ bên.

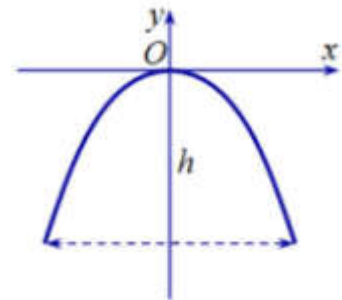
Phương trình của (P) đó là:

A. $y = x^2 - 2x + 3$. B. $y = 4x^2 - 8x + 3$.

C. $y = 2x^2 - 4x + 4$. D. $y = 2x^2 - 4x + 3$.

Lời giải

Chọn D



Dựa vào đồ thị, ta thấy: (P) đi qua $I(1;1)$

Xét các phương án:

A. Thay $x = 1, y = 1$ vào $y = x^2 - 2x + 3$ ta được: $1 = 1^2 - 2.1 + 3 \Leftrightarrow 1 = 2$ (sai) $\Rightarrow$ loại A

B. Thay $x = 1, y = 1$ vào $y = 4x^2 - 8x + 3$ ta được: $1 = 4.1^2 - 8.1 + 3 \Leftrightarrow 1 = -1$ (sai) $\Rightarrow$ loại B

C. Thay $x = 1, y = 1$ vào $y = 2x^2 - 4x + 4$ ta được: $1 = 2.1^2 - 4.1 + 4 \Leftrightarrow 1 = 2$ (sai) $\Rightarrow$ loại C

D. Thay $x = 1, y = 1$ vào $y = 2x^2 - 4x + 3$ ta được: $1 = 2.1^2 - 4.1 + 3 \Leftrightarrow 1 = 1$ (đúng) $\Rightarrow$ Chọn D

Câu 18: Một chiếc cổng hình parabol có phương trình $y = -\frac{1}{2}x^2$. Biết cổng có chiều rộng $d = 5$ mét

(như hình vẽ). Hãy tính chiều cao h của cổng.

A. $h = 3,125$ mét. B. $h = 4,125$ mét.

C. $h = 4.45$ mét. D. $h = 3,25$ mét.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng chứa chiều rộng $d = 5m$ cắt parabol tại $A\left(\frac{5}{2}; -h\right)$.

Điểm $A\left(\frac{5}{2}; -h\right) \in (P) \Rightarrow -h = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow h = 3,125$ mét.

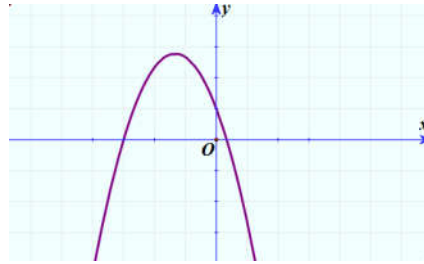
Câu 19: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như bên dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. “Tránh mua các trang và các cá nhân khác”

Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng

Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT: 0834 332 133

- A. $a < 0, b < 0, c < 0$.
- B. $a > 0, b < 0, c > 0$.
- C. $a < 0, b > 0, c > 0$.
- D. $a < 0, b < 0, c > 0$.



Lời giải

Chọn D

Từ dáng điệu của parabol suy ra:

- $a < 0$.

- Parabol cắt trục tung tại điểm $(0; c)$ tại điểm nằm trên trục hoành nên $c > 0$.

- Parabol có hoành độ đỉnh $x = -\frac{b}{2a} < 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a} > 0 \Leftrightarrow b < 0$ (vì $a < 0$).

Câu 20: Tập xác định D của hàm số $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{x}$ là:

- A. $D = [1; +\infty)$.
- B. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$.
- C. $D = [-1; +\infty) \setminus \{0\}$.
- D. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Câu 21. Cho bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	+	

Hỏi bảng xét dấu trên là của biểu thức nào sau đây?

A. $f(x) = x^2 - x\sqrt{3} - \frac{3}{4}$.

B. $f(x) = 4x^2 - x\sqrt{3} - 3$.

C. $f(x) = x^2 - x\sqrt{3} + \frac{3}{4}$.

D. $f(x) = 4x^2 - x\sqrt{3} + 3$.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng xét dấu ta thấy: $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Từ bảng xét dấu, suy ra: $f(x) = a \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = a \left(x^2 - x\sqrt{3} + \frac{3}{4} \right)$

$$\Rightarrow a > 0, c > 0$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - x\sqrt{3} + \frac{3}{4} \text{ thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$$

Câu 22. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 - 3x - 4 < 0$ là

A. $S = (-\infty; -4) \cup (-1; +\infty)$.

B. $S = (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.

C. $S = (-4; -1)$.

D. $S = \mathbb{R}$.

Lời giải**Chọn D**

Xét tam thức bậc hai $-x^2 - 3x - 4 < 0$ có $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4) = -7$ nên

$-x^2 - 3x - 4 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó, tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 - 3x - 4 < 0$ là $S = \mathbb{R}$.

Câu 23. Giá trị của m để tam thức $f(x) = x^2 - (m+2)x + 8m+1$ đổi dấu hai lần là

A. $m \leq 0$ hoặc $m \geq 28$.

B. $m < 0$ hoặc $m > 28$.

C. $m > 0$.

D. $0 < m < 28$.

Lời giải**Chọn B**

Ta có $f(x) = x^2 - (m+2)x + 8m+1$ là một tam thức bậc hai. Để $f(x)$ đổi dấu 2 lần thì

$$f(x) \text{ có } \Delta > 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 - 4(8m+1) > 0$$

$$m^2 - 28m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 28 \end{cases}$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1: Giải bất phương trình: $\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} \geq 0 \quad (1)$.

Lời giải**Cách 1:**

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 3 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 1 \leq x < 2 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S = [1; 2) \cup [3; +\infty)$.

Cách 2:

Ta có: $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$ và $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$		
$x^2 - 4x + 3$	+	0	-		-	0	+
$x - 2$	-		-	0	+		+
$\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$	-	0	+		-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình là: $S = [1; 2) \cup [3; +\infty)$.

Câu 2:

Tìm m để hàm số $y = \sqrt{\frac{-x^2 - 2}{(m-1)x^2 + 2(m-1)x + m - 5}}$ xác định với mọi giá trị của x .

Lời giải

TH1: Với $m = 1$ thì hàm số trở thành: $y = \sqrt{\frac{-x^2 - 2}{-4}} = \sqrt{\frac{x^2 + 2}{4}}$ nên hàm số xác định với mọi giá trị của $x \in \mathbb{R}$. Vậy $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu.

TH2: Với $m \neq 1$ thì hàm số trở thành: $y = \sqrt{\frac{x^2 + 2}{(1-m)x^2 + 2(1-m)x + 5 - m}}$.

Để hàm số xác định với mọi giá trị của x thì $(1-m)x^2 + 2(1-m)x + 5 - m > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Do đó: } \begin{cases} 1-m > 0 \\ \Delta' = (1-m)^2 - (1-m)(5-m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ 4m-4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 1.$$

Vậy từ hai trường hợp trên thì $m \leq 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 \leq 0 \\ x-1 > \frac{5x-m}{2} \end{cases}$ vô nghiệm.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 \leq 0 \\ x-1 > \frac{5x-m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \\ 2x-2 > 5x-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \\ 3x < m-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \\ x < \frac{m-2}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Hệ vô nghiệm} \Leftrightarrow \frac{m-2}{3} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow m-2 \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow m \leq \frac{7}{2}.$$

Câu 4: Tìm các giá trị dương của m để mọi $x \in [-1; 1]$ đều là nghiệm của bất phương trình $3x^2 - 2(m+5)x - m^2 + 2m + 8 \leq 0$.

Lời giải

Ta có thể hiểu đề bài theo cách sau: Tìm các giá trị dương của m để:

$$3x^2 - 2(m+5)x - m^2 + 2m + 8 \leq 0, \forall x \in [-1; 1]$$

$$\text{Xét } f(x) = 3x^2 - 2(m+5)x - m^2 + 2m + 8, \Delta' = 4m^2 + 4m + 1 = (2m+1)^2 \Rightarrow \Delta \geq 0.$$

TH 1: Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-1}{2}$ ta có $f(x) = 3x^2 - 9x + \frac{27}{4}$.

Tam thức $f(x)$ có nghiệm kép $x = \frac{3}{2}$ và hệ số $a = 3 > 0$ nên $f(x) > 0, \forall x \neq \frac{3}{2}$. (Loại)

TH 2: Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{-1}{2}$. Khi đó: Tam thức $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

Từ bảng biến thiên, ta thấy:

$$3x^2 - 2(m+5)x - m^2 + 2m + 8 \leq 0, \forall x \in [-1; 1]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) \leq 0 \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 4m + 21 \leq 0 \\ -m^2 + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq 7 \\ m \geq 1 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 7 \\ m \leq -3 \end{cases}$$

Vì $m > 0$ nên ta chọn $m \geq 7$.

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $\frac{x^2 + mx - 1}{2x^2 - 2x + 3} \leq 1$ thỏa mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $2x^2 - 2x + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên

$$\frac{x^2 + mx - 1}{2x^2 - 2x + 3} \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + mx - 1 \leq 2x^2 - 2x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + (m+2)x - 4 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow (m+2)^2 - 16 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow m \in [-6; 2].$$

CHƯƠNG IV

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC. VECTO

Trong chương này, chúng ta tìm hiểu những nội dung sau: giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180° , định lí cosin và định lí sin trong tam giác, giải tam giác; vectơ, tổng và hiệu hai vectơ, tích của một số với một vectơ, tích vô hướng của hai vectơ; ứng dụng vào giải các bài toán thực tiễn.

§1

GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180° . ĐỊNH LÍ CÔSIN VÀ ĐỊNH LÍ SIN TRONG TAM GIÁC

Cột cờ Lũng Cú là cột cờ Quốc gia, nằm ở đỉnh Lũng Cú hay còn gọi là đỉnh núi Rồng (Long Sơn) thuộc xã Lũng Cú, huyện Đồng Văn, tỉnh Hà Giang, cách cực Bắc Việt Nam khoảng 3,3 km. Thời nhà Lý, cột cờ Lũng Cú chỉ được làm bằng cây sa mộc. Ngày nay, cột cờ có độ cao 33,15 m bao gồm bệ cột cao 20,25 m và cán cờ cao 12,9 m. Chân bệ cột cờ có 8 mặt phù điêu bằng đá xanh mô phỏng hoa văn mặt của trống đồng Đông Sơn và những hoa tiết minh họa các giai đoạn qua từng thời kì lịch sử của đất nước, cũng như con người, tập quán của các dân tộc ở Hà Giang. Trên đỉnh cột là Quốc kì Việt Nam có diện tích 54 m², biểu tượng cho 54 dân tộc của đất nước ta.

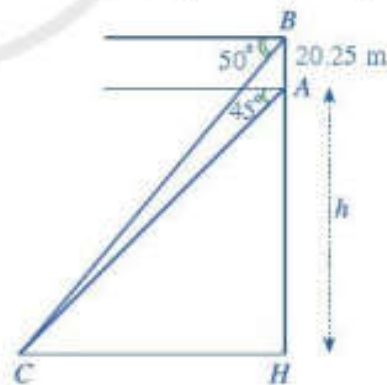
(Nguồn: <http://baophutho.vn>)

Từ chân bệ cột cờ và đỉnh bệ cột cờ bạn Nam đo được góc nâng (so với phương nằm ngang) tới một vị trí dưới chân núi lần lượt là 45° và 50° (Hình 1).



Cột cờ Lũng Cú (Hà Giang)

(Nguồn: <http://baophutho.vn>)



Hình 1



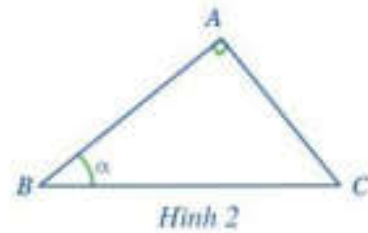
Chiều cao h của đỉnh Lũng Cú so với chân núi là bao nhiêu mét?

I. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°

1 Cho tam giác ABC vuông tại A có góc $\widehat{ABC} = \alpha$ (Hình 2).

a) Nhắc lại định nghĩa $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$.

b) Biểu diễn tỉ số lượng giác của góc $90^\circ - \alpha$ theo tỉ số lượng giác của góc α .



$$\sin \alpha = \frac{AC}{BC}, \cos \alpha = \frac{AB}{BC}, \tan \alpha = \frac{AC}{AB}, \cot \alpha = \frac{AB}{AC},$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha,$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha, \cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha.$$



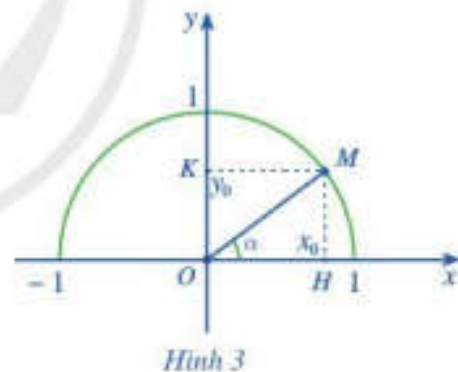
2 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , nửa đường tròn tâm O nằm phía trên trục hoành bán kính $R = 1$ được gọi là nửa đường tròn đơn vị (Hình 3). Với mỗi góc nhọn α ta có thể xác định một điểm M duy nhất trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$. Giả sử điểm M có tọa độ (x_0, y_0) . Hãy tính $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ theo x_0, y_0 .

Để tính $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ theo x_0, y_0 , ta làm như sau:

Xét tam giác vuông OMH , ta có:

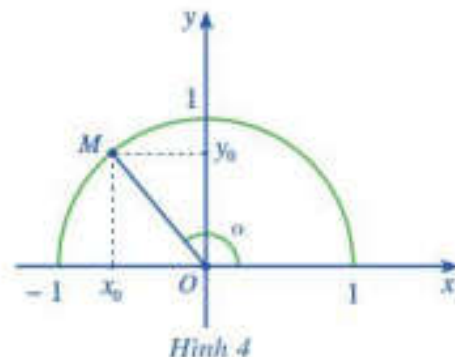
$$\sin \alpha = \frac{MH}{OM} = \frac{y_0}{1} = y_0, \cos \alpha = \frac{OH}{OM} = \frac{x_0}{1} = x_0,$$

$$\tan \alpha = \frac{MH}{OH} = \frac{y_0}{x_0}, \cot \alpha = \frac{OH}{MH} = \frac{x_0}{y_0}.$$



Mở rộng khái niệm tỉ số lượng giác đối với góc nhọn cho những góc α từ 0° đến 180° , ta có định nghĩa sau đây:

Với mỗi góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$), ta xác định một điểm $M(x_0, y_0)$ trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$ (Hình 4). Khi đó:





- sin của góc α , kí hiệu là $\sin \alpha$, được xác định bởi: $\sin \alpha = y_0$;
- cosin của góc α , kí hiệu là $\cos \alpha$, được xác định bởi: $\cos \alpha = x_0$;
- tang của góc α , kí hiệu là $\tan \alpha$, được xác định bởi: $\tan \alpha = \frac{y_0}{x_0} (x_0 \neq 0)$;
- cotang của góc α , kí hiệu là $\cot \alpha$, được xác định bởi: $\cot \alpha = \frac{x_0}{y_0} (y_0 \neq 0)$.

Các số $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ được gọi là các *giá trị lượng giác* của góc α .

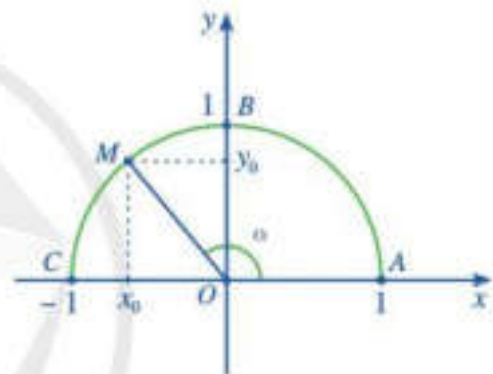
Ví dụ 1 Tính các giá trị lượng giác của các góc: 0° , 90° , 180° .

Giải. (Hình 5)

Với $\alpha = 0^\circ$: Khi đó, M trùng với $A(1; 0)$. Do đó $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\tan 0^\circ = 0$, $\cot 0^\circ$ không xác định.

Với $\alpha = 90^\circ$: Khi đó, M trùng với $B(0; 1)$. Do đó $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, $\tan 90^\circ$ không xác định, $\cot 90^\circ = 0$.

Với $\alpha = 180^\circ$: Khi đó, M trùng với $C(-1; 0)$. Do đó $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\tan 180^\circ = 0$, $\cot 180^\circ$ không xác định.



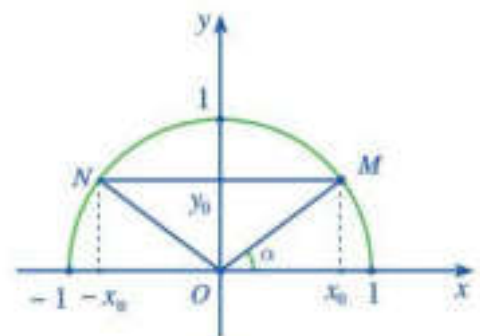
Hình 5

Chú ý

- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (\alpha \neq 90^\circ)$;
 $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (0 < \alpha < 180^\circ)$.
- $\sin (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha (0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$;
 $\cos (90^\circ - \alpha) = \sin \alpha (0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$;
 $\tan (90^\circ - \alpha) = \cot \alpha (0^\circ < \alpha \leq 90^\circ)$;
 $\cot (90^\circ - \alpha) = \tan \alpha (0^\circ \leq \alpha < 90^\circ)$.



3 Trên nửa đường tròn đơn vị ta có dây cung MN song song với trục Ox và $\widehat{xOM} = \alpha$ (Hình 6).



Hình 6

a) Chứng minh $\widehat{xON} = 180^\circ - \alpha$.

b) Biểu diễn giá trị lượng giác của góc $180^\circ - \alpha$ theo giá trị lượng giác của góc α .



Với $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ thì:

- $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$,
- $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$,
- $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$ ($\alpha \neq 90^\circ$),
- $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$ ($\alpha \neq 0^\circ, \alpha \neq 180^\circ$).

Ví dụ 2 Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị của biểu thức sau:

$$T = \cos 15^\circ - \sin 35^\circ + \cos 55^\circ + \cos 165^\circ - \cos 180^\circ.$$

Giải

$$\begin{aligned} T &= \cos 15^\circ - \sin 35^\circ + \cos(90^\circ - 35^\circ) + \cos(180^\circ - 15^\circ) + 1 \\ &= \cos 15^\circ - \sin 35^\circ + \sin 35^\circ - \cos 15^\circ + 1 = 1. \end{aligned}$$

Ví dụ 3 Viết giá trị lượng giác của góc 120° .

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \sin 120^\circ &= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; & \cos 120^\circ &= -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}; \\ \tan 120^\circ &= -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}; & \cot 120^\circ &= -\cot 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Tương tự ta có bảng giá trị lượng giác (GTLG) của một số góc đặc biệt:

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
GTLG									
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot \alpha$	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\parallel$

 Ta có thể tìm giá trị lượng giác (đúng hoặc gần đúng) của một góc (từ 0° đến 180°) bằng cách sử dụng các phím: **sin**, **cos**, **tan** trên máy tính cầm tay.

Tính $\sin 75^\circ$, $\cos 175^\circ$, $\tan 64^\circ$ (làm tròn đến hàng phần chục nghìn).

Để tính các giá trị lượng giác trên, sau khi đưa máy tính về chế độ “độ” ta làm như sau:

	Nút ấn	Kết quả
$\sin 75^\circ$	sin 7 5 =	0.9659
$\cos 175^\circ$	cos 1 7 5 =	- 0.9962
$\tan 64^\circ$	tan 6 4 =	2.0503

 Ta có thể tìm số đo (đúng hoặc gần đúng) của một góc từ 0° đến 180° khi biết giá trị lượng giác của góc đó bằng cách sử dụng các phím: **SHIFT** cùng với **sin**; **cos**; **tan** trên máy tính cầm tay.

Tìm số đo góc α (từ 0° đến 180°) và làm tròn đến độ, biết:

- a) $\cos \alpha = -0,97$; b) $\tan \alpha = 0,68$; c) $\sin \alpha = 0,45$.

Để tính gần đúng số đo góc α trong mỗi trường hợp trên, sau khi đưa máy tính về chế độ “độ”, ta làm như sau:

	Nút ấn	Kết quả
$\cos \alpha = -0,97$	SHIFT cos - 0 . 9 7 =	166°
$\tan \alpha = 0,68$	SHIFT tan 0 . 6 8 =	34°
$\sin \alpha = 0,45$	SHIFT sin 0 . 4 5 =	27°

Chú ý: Khi tìm góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) nếu đã biết $\sin \alpha$, trên máy tính chỉ hiện lên kết quả góc α trong khoảng từ 0° đến 90° . Giá trị còn lại cần tìm là $180^\circ - \alpha$.

Chẳng hạn trong hoạt động trên, giá trị còn lại cần tìm của α với $\sin \alpha = 0,45$ là khoảng $180^\circ - 27^\circ = 153^\circ$.

 **1** Hãy tính chiều cao h của đỉnh Lũng Cú so với chân núi trong bài toán ở phần mở đầu.

II. ĐỊNH LÝ CÔSIN

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$, $\widehat{BAC} = \alpha$. Kẻ đường cao BH . Thực hiện các hoạt động sau:

 6 Cho α là góc nhọn, chứng minh:

a) $HC = |AC - AH|$ và $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AH \cdot AC$;

b) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.

Để chứng minh các đẳng thức trên, ta làm như sau:

a) Nếu góc C nhọn thì H nằm giữa A và C . Do đó

$$HC = AC - AH = |AC - AH| \text{ (Hình 7).}$$

Nếu góc C tù thì C nằm giữa A và H . Do đó

$$HC = AH - AC = |AC - AH| \text{ (Hình 8).}$$

Nếu góc C vuông thì C trùng với H . Do đó

$$HC = 0 = |AC - AH|.$$

Trong mọi trường hợp, ta đều có $HC = |AC - AH|$.

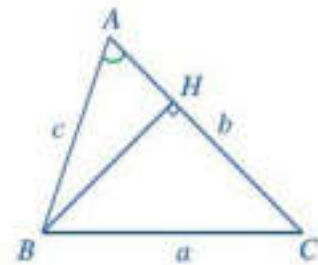
Xét các tam giác vuông BHC và AHB , áp dụng định lý Pythagore, ta có:

$$\begin{aligned} BC^2 &= BH^2 + HC^2 = BH^2 + (AC - AH)^2 = (BH^2 + AH^2) + AC^2 - 2AH \cdot AC \\ &= AB^2 + AC^2 - 2AH \cdot AC. \end{aligned}$$

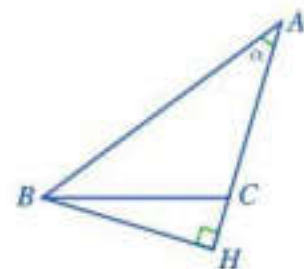
b) Xét tam giác vuông AHB , ta có: $AH = AB \cos A = c \cos \alpha$.

$$\text{Do đó } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AH \cdot AC = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

$$\text{Vậy } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$



Hình 7



Hình 8

 7 Cho α là góc tù. Chứng minh:

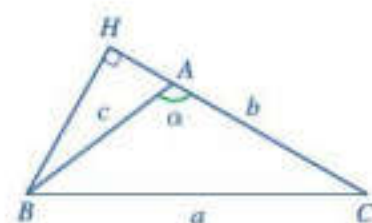
a) $HC = AC + AH$ và $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AH \cdot AC$;

b) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.

Để chứng minh các đẳng thức trên, ta làm như sau:

a) (Hình 9). Xét các tam giác vuông BHC và AHB , áp dụng định lý Pythagore, ta có:

$$\begin{aligned} BC^2 &= BH^2 + HC^2 = BH^2 + (AC + AH)^2 \\ &= (BH^2 + AH^2) + AC^2 + 2AH \cdot AC \\ &= AB^2 + AC^2 + 2AH \cdot AC. \end{aligned}$$



Hình 9

b) Xét tam giác vuông AHB , ta có:

$$AH = AB \cos(180^\circ - \alpha); = -c \cos \alpha.$$

$$\text{Do đó } BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AH \cdot AC = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

$$\text{Vậy } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

8 Cho α là góc vuông. Chứng minh $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.

Như vậy, trong tam giác ABC tùy ý ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

Bằng cách chứng minh tương tự, ta có định lí côsin sau đây:

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Khi đó:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

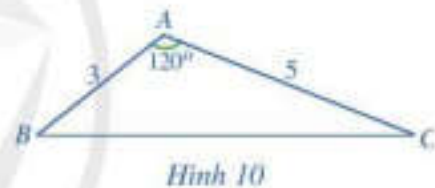
$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Ví dụ 4 Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 5$ và $\widehat{A} = 120^\circ$ (Hình 10).

a) Tính $\cos A$;

b) Tính độ dài cạnh BC .



Giải

a) Ta có: $\cos A = \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$.

b) Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

Thay số ta có:

$$BC^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 49.$$

$$\text{Do đó } BC = \sqrt{49} = 7.$$

2 Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 6$, $BC = 7$.
Tính $\cos A$.

Ví dụ 5 Hai máy bay cùng xuất phát từ một sân bay A và bay theo hai hướng khác nhau, tạo với nhau góc 60° . Máy bay thứ nhất bay với vận tốc 650 km/h, máy bay thứ hai bay với vận tốc 900 km/h. Sau 2 giờ, hai máy bay cách nhau bao nhiêu ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)? Biết rằng cả hai máy bay bay theo đường thẳng và sau 2 giờ bay đều chưa hạ cánh.

Giải

Giả sử sau 2 giờ, máy bay thứ nhất đến vị trí B, máy bay thứ hai đến vị trí C.

Ta có: $AB = 2 \cdot 650 = 1\,300$ (km), $AC = 2 \cdot 900 = 1\,800$ (km),

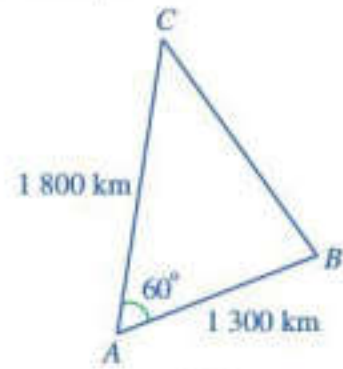
$\widehat{BAC} = 60^\circ$ (Hình 11).

Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC, ta có:

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} \\ &= 1\,300^2 + 1\,800^2 - 2 \cdot 1\,300 \cdot 1\,800 \cdot \cos 60^\circ = 2\,590\,000. \end{aligned}$$

Do đó $BC \approx 1\,609,35$ (km).

Vậy sau 2 giờ hai máy bay cách nhau khoảng 1 609,35 km.



Hình 11

III. ĐỊNH LÍ SIN

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R và có $BC = a$, $\widehat{BAC} = \alpha$. Kẻ đường kính BD của đường tròn (O). Thực hiện các hoạt động sau:

9 Cho α là góc nhọn. Chứng minh:

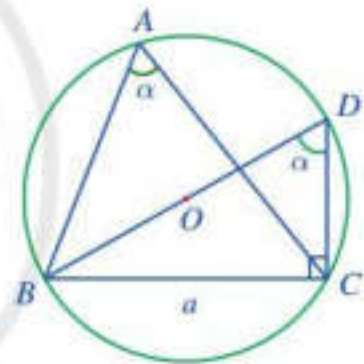
a) $\widehat{BDC} = \alpha$; b) $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$.

Để chứng minh đẳng thức ở câu b, ta làm như sau (Hình 12):

Xét tam giác BDC, ta có $\widehat{BDC} = \alpha$.

Vì BD là đường kính của đường tròn (O) nên $\widehat{BCD} = 90^\circ$.

Do đó $\sin D = \frac{BC}{BD}$, tức là $\sin \alpha = \frac{a}{2R}$ hay $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$.



Hình 12

10 Cho α là góc tù. Chứng minh:

a) $\widehat{BDC} = 180^\circ - \alpha$; b) $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$.

Để chứng minh đẳng thức ở câu b, ta làm như sau (Hình 13):

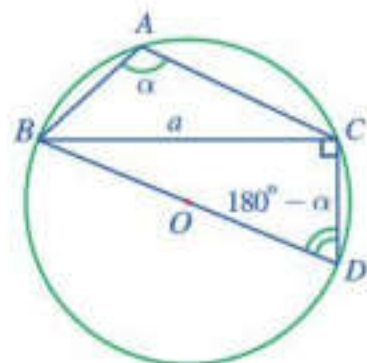
Xét tam giác BCD, ta có:

$\widehat{BDC} = 180^\circ - \alpha$ và $\widehat{BCD} = 90^\circ$.

Do đó: $\sin D = \frac{BC}{BD}$.

Tức là $\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{a}{2R}$.

Mà $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ nên $\sin \alpha = \frac{a}{2R}$ hay $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$.



Hình 13

11 Cho α là góc vuông. Chứng minh: $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$.

Như vậy, trong tam giác ABC tùy ý ta có: $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$.

Bằng cách chứng minh tương tự, ta có định lí sin sau đây:



Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp là R . Khi đó:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$



$$\begin{aligned} a &= 2R \sin A, \\ b &= 2R \sin B, \\ c &= 2R \sin C. \end{aligned}$$

Ví dụ 6 Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 120^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$ và $CA = 20$ (Hình 14). Tính:

a) $\sin A$;

b) Độ dài cạnh BC và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Giải

a) Ta có: $\sin A = \sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC , ta có:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = 2R.$$

Do đó

$$BC = \frac{CA \cdot \sin A}{\sin B} = \frac{20 \cdot \sin 120^\circ}{\sin 45^\circ} = 10\sqrt{6};$$

$$R = \frac{CA}{2 \cdot \sin B} = \frac{20}{2 \cdot \sin 45^\circ} = 10\sqrt{2}.$$



3 Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có bán kính $R = 6$ và có các góc $\hat{B} = 65^\circ$, $\hat{C} = 85^\circ$. Tính độ dài cạnh BC .

Ví dụ 7 Các nhà khảo cổ học tìm được một mảnh chiếc đĩa cổ hình tròn bị vỡ. Để xác định đường kính của chiếc đĩa, các nhà khảo cổ lấy ba điểm trên vành đĩa và tiến hành đo đạc thu được kết quả như sau: $BC \approx 28,5$ cm; $\widehat{BAC} \approx 120^\circ$ (Hình 15). Tính đường kính của chiếc đĩa theo đơn vị xăng-ti-mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Giải

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC , ta có:

$$2R = \frac{BC}{\sin A} \approx \frac{28,5}{\sin 120^\circ} \approx 33 \text{ (cm)}.$$

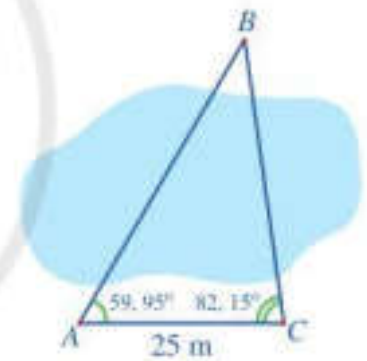
Vậy đường kính của chiếc đĩa khoảng 33 cm.



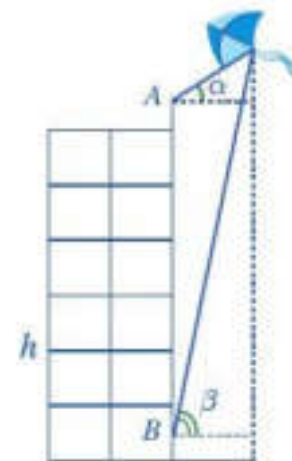
Hình 15

BÀI TẬP

- Cho tam giác ABC có $AB = 3,5$; $AC = 7,5$; $\widehat{A} = 135^\circ$. Tính độ dài cạnh BC và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).
- Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 75^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$ và $BC = 50$. Tính độ dài cạnh AB .
- Cho tam giác ABC có $AB = 6$, $AC = 7$, $BC = 8$. Tính $\cos A$, $\sin A$ và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- Tính giá trị đúng của các biểu thức sau (không dùng máy tính cầm tay):
 - $A = \cos 0^\circ + \cos 40^\circ + \cos 120^\circ + \cos 140^\circ$;
 - $B = \sin 5^\circ + \sin 150^\circ - \sin 175^\circ + \sin 180^\circ$;
 - $C = \cos 15^\circ + \cos 35^\circ - \sin 75^\circ - \sin 55^\circ$;
 - $D = \tan 25^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \tan 115^\circ$;
 - $E = \cot 10^\circ \cdot \cot 30^\circ \cdot \cot 100^\circ$.
- Cho tam giác ABC . Chứng minh:
 - $\sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B+C}{2}$;
 - $\tan \frac{B+C}{2} = \cot \frac{A}{2}$.
- Để đo khoảng cách từ vị trí A đến vị trí B ở hai bên bờ một cái ao, bạn An đi dọc bờ ao từ vị trí A đến vị trí C và tiến hành đo các góc BAC , BCA . Biết $AC = 25$ m, $\widehat{BAC} = 59,95^\circ$, $\widehat{BCA} = 82,15^\circ$ (Hình 16). Hỏi khoảng cách từ vị trí A đến vị trí B là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?
- Hai tàu đánh cá cùng xuất phát từ bến A và đi thẳng đều về hai vùng biển khác nhau, theo hai hướng tạo với nhau góc 75° . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ 8 hải lí một giờ và tàu thứ hai chạy với tốc độ 12 hải lí một giờ. Sau 2,5 giờ thì khoảng cách giữa hai tàu là bao nhiêu hải lí (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?
- Bạn A đứng ở đỉnh của toà nhà và quan sát chiếc điều, nhận thấy góc nâng (góc nghiêng giữa phương từ mắt của bạn A tới chiếc điều và phương nằm ngang) là $\alpha = 35^\circ$; khoảng cách từ đỉnh toà nhà tới mắt bạn A là 1,5 m. Cùng lúc đó ở dưới chân toà nhà, bạn B cũng quan sát chiếc điều và thấy góc nâng là $\beta = 75^\circ$; khoảng cách từ mặt đất đến mắt bạn B cũng là 1,5 m. Biết chiều cao của toà nhà là $h = 20$ m (Hình 17). Chiếc điều bay cao bao nhiêu mét so với mặt đất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Hình 16



Hình 17

Dạng 1 : Xác định giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

1. Phương pháp giải.

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của một góc
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Tính giá trị các biểu thức sau:

- a) $A = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ$
b) $B = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$
c) $C = \sin^2 45^\circ - 2 \sin^2 50^\circ + 3 \cos^2 45^\circ - 2 \sin^2 40^\circ + 4 \tan 55^\circ \cdot \tan 35^\circ$

Lời giải

- a) $A = a^2 \cdot 1 + b^2 \cdot 0 + c^2 \cdot (-1) = a^2 - c^2$
b) $B = 3 - (1)^2 + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$
c) $C = \sin^2 45^\circ + 3 \cos^2 45^\circ - 2(\sin^2 50^\circ + \sin^2 40^\circ) + 4 \tan 55^\circ \cdot \cot 55^\circ$
 $C = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2(\sin^2 50^\circ + \cos^2 40^\circ) + 4 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 + 4 = 4$

Ví dụ 2: Tính giá trị các biểu thức sau:

- a) $A = \sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$
b) $B = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$
c) $C = \tan 5^\circ \tan 10^\circ \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \tan 85^\circ$

Lời giải

- a) $A = (\sin^2 3^\circ + \sin^2 87^\circ) + (\sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ)$
 $= (\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ) + (\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ)$
 $= 1 + 1 = 2$
b) $B = (\cos 0^\circ + \cos 180^\circ) + (\cos 20^\circ + \cos 160^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ)$
 $= (\cos 0^\circ - \cos 0^\circ) + (\cos 20^\circ - \cos 20^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ - \cos 80^\circ)$
 $= 0$
c) $C = (\tan 5^\circ \tan 85^\circ)(\tan 15^\circ \tan 75^\circ) \dots (\tan 45^\circ \tan 45^\circ)$
 $= (\tan 5^\circ \cot 5^\circ)(\tan 15^\circ \cot 15^\circ) \dots (\tan 45^\circ \cot 45^\circ)$
 $= 1$

Ví dụ 3: Tính theo hàm số lượng giác của các góc bé hơn 90° :

$$\sin 100^\circ, \sin 160^\circ, \cos 170^\circ, \tan 103^\circ 45', \cot 124^\circ 15'.$$

Lời giải.

$$\sin 100^\circ = \sin(180^\circ - 100^\circ) = \sin 80^\circ;$$

$$\sin 160^\circ = \sin(180^\circ - 160^\circ) = \sin 20^\circ;$$

$$\tan 103^\circ 45' = -\tan(180^\circ - 103^\circ 45') = \tan 76^\circ 15'$$

$$\cot 124^\circ 15' = -\cot(180^\circ - 124^\circ 15') = -\cot 55^\circ 45'$$

Dạng 2 : Xác định giá trị của một biểu thức lượng giác có điều kiện.

1. Phương pháp giải.

- Dựa vào các hệ thức lượng giác cơ bản
- Dựa vào dấu của giá trị lượng giác
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: a) Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính $\cos \alpha$ và $\tan \alpha$

b) Cho $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. Tính $\sin \alpha$ và $\cot \alpha$

c) Cho $\tan \gamma = -2\sqrt{2}$. Tính giá trị lượng giác còn lại.

Lời giải

a) Vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\cos \alpha < 0$ mặt khác $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ suy ra

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Do đó } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{b) Vì } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ nên } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ và } \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{c) Vì } \tan \gamma = -2\sqrt{2} < 0 \Rightarrow \cos \alpha < 0 \text{ mặt khác } \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \text{ nên } \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{\tan^2 \alpha + 1}} = -\sqrt{\frac{1}{8+1}} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Ta có } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Ví dụ 2: a) Cho $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Tính $A = \frac{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$.

b) Cho $\tan \alpha = \sqrt{2}$. Tính $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } A = \frac{\tan \alpha + 3 \frac{1}{\tan \alpha}}{\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{\tan^2 \alpha + 3}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 2}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = 1 + 2 \cos^2 \alpha$$

$$\text{Suy ra } A = 1 + 2 \cdot \frac{9}{16} = \frac{17}{8}$$

$$\text{b) } B = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos^3 \alpha}}{\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{3 \cos^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{2 \sin \alpha}{\cos^3 \alpha}} = \frac{\tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1) - (\tan^2 \alpha + 1)}{\tan^3 \alpha + 3 + 2 \tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1)}$$

$$\text{Suy ra } B = \frac{\sqrt{2}(2+1) - (2+1)}{2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2}(2+1)} = \frac{3(\sqrt{2}-1)}{3+8\sqrt{2}}$$

Dạng 3: Sử dụng định lý sin và định lý cosin

1. Phương pháp.

Định lý cô – sin: Trong tam giác ABC với $BC = a, AC = b$ và $AB = c$. Ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

Ta có thể suy ra hệ quả sau

Hệ quả 1.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Định lý sin : Trong tam giác ABC với $BC = a, AC = b, AB = c$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp.

$$\text{Ta có } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

2. Các ví dụ.

Câu 1. Cho tam giác ABC , biết

a) $a = 12, b = 13, c = 15$. Tính độ lớn góc A . b) $AB = 5, AC = 8, \hat{A} = 60^\circ$. Tính cạnh BC

Lời giải.

- a) Ta có $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{13^2 + 15^2 - 12^2}{2.13.15} = \frac{25}{39}$. Suy ra $\hat{A} \approx 50^\circ$
b) Ta có $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC.AB.\cos A = 8^2 + 5^2 - 2.8.5.\cos 60^\circ = 49$. Vậy $BC = 7$

Câu 2. Cho tam giác ABC , biết

- a) $\hat{A} = 60^\circ, \hat{B} = 45^\circ, b = 4$. Tính cạnh b và c .
b) $\hat{A} = 60^\circ, a = 6$. Tính R

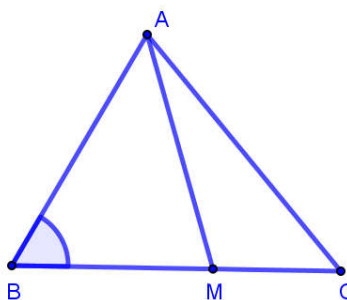
Lời giải.

- a) Ta có $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow C = 180^\circ - A - B = 75^\circ$.
Suy ra $a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{4 \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 4,9$ và $c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{4 \sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 5,5$
b) Ta có $R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{6}{2 \sin 60^\circ} \approx 3,5$.

Câu 3. Cho tam giác ABC , có $AB = 8, AC = 9, BC = 10$. Một điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $BM = 7$. Tính độ dài đoạn thẳng AM .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{83}{160}$$



Áp dụng định lí cô-sin cho tam giác ABM , ta có

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB.BM.\cos B = 8^2 + 7^2 - 2.8.7.\frac{83}{160} = \frac{549}{10}$$

$$\text{Vậy } AM = 3\sqrt{6,1}$$

Câu 4. Cho tam giác ABC , có $\hat{B} = 60^\circ, \hat{C} = 45^\circ, BC = a$

- a) Tính độ dài hai cạnh AB, AC .
b) Chứng minh $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

Lời giải.

a) Ta có $\hat{A} = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$. Đặt $AC = b, AB = c$. Theo định lí hàm số sin, ta có

$$\frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sin 75^\circ} = \frac{c}{\sin 45^\circ}. \text{ Suy ra } b = \frac{a\sqrt{3}}{2 \sin 75^\circ}; c = \frac{a\sqrt{2}}{2 \sin 75^\circ}$$

b) Kẻ $AH \perp BC$ do $\hat{B}, \hat{C}$ đều là góc nhọn nên H thuộc đoạn BC , hay $BC = HB + HC$.

$$\text{Ta có } HC = \frac{b\sqrt{2}}{2}; HB = \frac{c}{2}.$$

$$\text{Suy ra } a = HC + HB = b\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{c}{2} = \frac{a\sqrt{6} + a\sqrt{2}}{4\sin 75^\circ}.$$

$$\text{Do đó } \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ và}$$

$$\cos 75^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 75^\circ} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{8 - 2\sqrt{12}} = \frac{1}{4}\sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hai góc α và β với $\alpha + \beta = 90^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $P = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$.

- A. $P = 0$. B. $P = 1$. C. $P = -1$. D. $P = 2$.

Lời giải

Chọn B

Hai góc α và β phụ nhau nên $\sin \alpha = \cos \beta$; $\cos \alpha = \sin \beta$.

Do đó, $P = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Câu 2: Cho hai góc α và β với $\alpha + \beta = 90^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $P = \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha$.

- A. $P = 0$. B. $P = 1$. C. $P = -1$. D. $P = 2$.

Lời giải

Chọn A

Hai góc α và β phụ nhau nên $\sin \alpha = \cos \beta$; $\cos \alpha = \sin \beta$.

Do đó, $P = \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha = \cos \alpha \sin \alpha - \cos \alpha \sin \alpha = 0$.

Câu 3: Cho α là góc tù. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\sin \alpha < 0$. B. $\cos \alpha > 0$. C. $\tan \alpha < 0$. D. $\cot \alpha > 0$.

Lời giải

Chọn C

Lấy góc $\alpha = 120^\circ$ sau đó thử ngược

Câu 4: Cho hai góc nhọn α và β trong đó $\alpha < \beta$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $\cos \alpha < \cos \beta$. B. $\sin \alpha < \sin \beta$.
C. $\cot \alpha > \cot \beta$. D. $\tan \alpha + \tan \beta > 0$.

Lời giải

Chọn A

Lấy $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$ sau đó thử ngược.

Câu 5: Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\cos 75^\circ > \cos 50^\circ$. B. $\sin 80^\circ > \sin 50^\circ$.
C. $\tan 45^\circ < \tan 60^\circ$. D. $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$.

Lời giải

Giao viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. “Tránh mua các trang và các cá nhân khác”

Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT: 0834 332 133

Chọn A

Trong khoảng từ 0° đến 90° , khi giá trị của góc tăng thì giá trị $\cos$ tương ứng của góc đó giảm.

Câu 6: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sin 90^\circ < \sin 100^\circ$.

B. $\cos 95^\circ > \cos 100^\circ$.

C. $\tan 85^\circ < \tan 125^\circ$.

D. $\cos 145^\circ > \cos 125^\circ$.

Lời giải

Chọn B

Trong khoảng từ 90° đến 180° , khi giá trị của góc tăng thì:

- Giá trị $\sin$ tương ứng của góc đó giảm.
- Giá trị $\cos$ tương ứng của góc đó giảm.

Câu 7: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sin 90^\circ < \sin 150^\circ$.

B. $\sin 90^\circ 15' < \sin 90^\circ 30'$.

C. $\cos 90^\circ 30' > \cos 100^\circ$.

D. $\cos 150^\circ > \cos 120^\circ$.

Lời giải

Chọn C

Trong khoảng từ 90° đến 180° , khi giá trị của góc tăng thì:

- Giá trị $\sin$ tương ứng của góc đó giảm.
- Giá trị $\cos$ tương ứng của góc đó giảm.

Câu 8: Chọn hệ thức đúng được suy ra từ hệ thức $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$?

A. $\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

B. $\cos^2 \frac{\alpha}{3} + \sin^2 \frac{\alpha}{3} = \frac{1}{3}$.

C. $\cos^2 \frac{\alpha}{4} + \sin^2 \frac{\alpha}{4} = \frac{1}{4}$.

D. $5 \left(\cos^2 \frac{\alpha}{5} + \sin^2 \frac{\alpha}{5} \right) = 5$.

Lời giải

Chọn D

Từ biểu thức $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ ta suy ra $\cos^2 \frac{\alpha}{5} + \sin^2 \frac{\alpha}{5} = 1$.

Do đó ta có $5 \left(\cos^2 \frac{\alpha}{5} + \sin^2 \frac{\alpha}{5} \right) = 5$.

Câu 9: Cho biết $\sin \frac{\alpha}{3} = \frac{3}{5}$. Giá trị của $P = 3 \sin^2 \frac{\alpha}{3} + 5 \cos^2 \frac{\alpha}{3}$ bằng bao nhiêu?

A. $P = \frac{105}{25}$.

B. $P = \frac{107}{25}$.

C. $P = \frac{109}{25}$.

D. $P = \frac{111}{25}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có biểu thức $\sin^2 \frac{\alpha}{3} + \cos^2 \frac{\alpha}{3} = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \frac{\alpha}{3} = 1 - \sin^2 \frac{\alpha}{3} = \frac{16}{25}$.

Do đó ta có $P = 3 \sin^2 \frac{\alpha}{3} + 5 \cos^2 \frac{\alpha}{3} = 3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 5 \cdot \frac{16}{25} = \frac{107}{25}$.

Câu 10: Cho biết $\tan \alpha = -3$. Giá trị của $P = \frac{6 \sin \alpha - 7 \cos \alpha}{6 \cos \alpha + 7 \sin \alpha}$ bằng bao nhiêu?

- A. $P = \frac{4}{3}$. B. $P = \frac{5}{3}$. C. $P = -\frac{4}{3}$. D. $P = -\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $P = \frac{6 \sin \alpha - 7 \cos \alpha}{6 \cos \alpha + 7 \sin \alpha} = \frac{6 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 7}{6 + 7 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{6 \tan \alpha - 7}{6 + 7 \tan \alpha} = \frac{5}{3}$.

Câu 11: Cho biết $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. Giá trị của $P = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha}$ bằng bao nhiêu?

- A. $P = -\frac{19}{13}$. B. $P = \frac{19}{13}$. C. $P = \frac{25}{13}$. D. $P = -\frac{25}{13}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có biểu thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{5}{9}$.

Ta có $P = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha} = \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + 3 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha + 3 \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 3 \cdot \frac{5}{9}}{2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}} = \frac{19}{13}$.

Câu 12: Cho biết $\cot \alpha = 5$. Giá trị của $P = 2 \cos^2 \alpha + 5 \sin \alpha \cos \alpha + 1$ bằng bao nhiêu?

- A. $P = \frac{10}{26}$. B. $P = \frac{100}{26}$. C. $P = \frac{50}{26}$. D. $P = \frac{101}{26}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P = 2 \cos^2 \alpha + 5 \sin \alpha \cos \alpha + 1 = \sin^2 \alpha \left(2 \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + 5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right)$
 $= \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} (2 \cot^2 \alpha + 5 \cot \alpha + 1 + \cot^2 \alpha) = \frac{3 \cot^2 \alpha + 5 \cot \alpha + 1}{\cot^2 \alpha + 1} = \frac{101}{26}$.

Câu 13: Cho biết $3 \cos \alpha - \sin \alpha = 1$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Giá trị của $\tan \alpha$ bằng

- A. $\tan \alpha = \frac{4}{3}$. B. $\tan \alpha = \frac{3}{4}$. C. $\tan \alpha = \frac{4}{5}$. D. $\tan \alpha = \frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$3 \cos \alpha - \sin \alpha = 1 \Leftrightarrow 3 \cos \alpha = \sin \alpha + 1 \rightarrow 9 \cos^2 \alpha = (\sin \alpha + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 9 \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha + 1 \Leftrightarrow 9(1 - \sin^2 \alpha) = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha + 1$$

$$\Leftrightarrow 10\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = -1 \\ \sin \alpha = \frac{4}{5} \end{cases}$$

- $\sin \alpha = -1$: không thỏa mãn vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

$$- \sin \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3}.$$

Câu 14: Cho biết $2\cos \alpha + \sqrt{2}\sin \alpha = 2$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Tính giá trị của $\cot \alpha$.

A. $\cot \alpha = \frac{\sqrt{5}}{4}$.

B. $\cot \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

C. $\cot \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

D. $\cot \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 2\cos \alpha + \sqrt{2}\sin \alpha = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin \alpha = 2 - 2\cos \alpha \rightarrow 2\sin^2 \alpha = (2 - 2\cos \alpha)^2$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 \alpha = 4 - 8\cos \alpha + 4\cos^2 \alpha \Leftrightarrow 2(1 - \cos^2 \alpha) = 4 - 8\cos \alpha + 4\cos^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow 6\cos^2 \alpha - 8\cos \alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 1 \\ \cos \alpha = \frac{1}{3} \end{cases}$$

• $\cos \alpha = 1$: không thỏa mãn vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

• $\cos \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \rightarrow \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$

Câu 15: Cho biết $\sin \alpha + \cos \alpha = a$. Tính giá trị của $\sin \alpha \cos \alpha$.

A. $\sin \alpha \cos \alpha = a^2$.

B. $\sin \alpha \cos \alpha = 2a$.

C. $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{a^2 - 1}{2}$.

D. $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{a^2 - 11}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \sin \alpha + \cos \alpha = a \rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2\sin \alpha \cos \alpha = a^2 \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{a^2 - 1}{2}.$$

Câu 16: Cho biết $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{1}{3}$. Giá trị của $P = \sqrt{\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha}$ bằng bao nhiêu?

A. $P = \frac{5}{4}$.

B. $P = \frac{7}{4}$.

C. $P = \frac{9}{4}$.

D. $P = \frac{11}{4}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \cos \alpha + \sin \alpha = \frac{1}{3} \rightarrow (\cos \alpha + \sin \alpha)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{4}{9}.$$

$$\text{Ta có } P = \sqrt{\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha} = \sqrt{(\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2\tan \alpha \cot \alpha} = \sqrt{\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right)^2 - 2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}\right)^2} - 2 = \sqrt{\left(\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}\right)^2} - 2 = \sqrt{\left(-\frac{9}{4}\right)^2} - 2 = \frac{7}{4}.$$

Câu 17: Cho biết $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Giá trị của $P = \sqrt{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}$ bằng bao nhiêu?

- A. $P = \frac{\sqrt{15}}{5}$. B. $P = \frac{\sqrt{17}}{5}$. C. $P = \frac{\sqrt{19}}{5}$. D. $P = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \rightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{5}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \sqrt{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha} = \sqrt{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \\ &= \sqrt{1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2} = \frac{\sqrt{17}}{5}. \end{aligned}$$

Câu 18: Tam giác ABC có $AB = 5, BC = 7, CA = 8$. Số đo góc $\hat{A}$ bằng:

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải

Chọn C

$$\text{Theo định lí hàm cosin, ta có } \cos \hat{A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{1}{2}.$$

Do đó, $\hat{A} = 60^\circ$.

Câu 19: Tam giác ABC có $AB = 2, AC = 1$ và $\hat{A} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh BC.

- A. $BC = 1$. B. $BC = 2$. C. $BC = \sqrt{2}$. D. $BC = \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Theo định lí hàm cosin, ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \hat{A} = 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = 3 \Rightarrow BC = \sqrt{3}.$$

Câu 20: Tam giác ABC có đoạn thẳng nối trung điểm của AB và BC bằng 3, cạnh $AB = 9$ và $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh cạnh BC.

- A. $BC = 3 + 3\sqrt{6}$. B. $BC = 3\sqrt{6} - 3$.
C. $BC = 3\sqrt{7}$. D. $BC = \frac{3 + 3\sqrt{33}}{2}$.

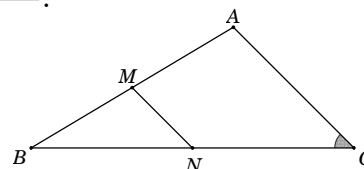
Lời giải

Chọn A

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC .

—→ MN là đường trung bình của $\triangle ABC$.

—→ $MN = \frac{1}{2}AC$. Mà $MN = 3$, suy ra $AC = 6$.



Theo định lí hàm cosin, ta có

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 - 2.AC.BC.\cos \widehat{ACB} \\ \Leftrightarrow 9^2 &= 6^2 + BC^2 - 2.6.BC.\cos 60^\circ \\ \Rightarrow BC &= 3 + 3\sqrt{6} \end{aligned}$$

Câu 21: Tam giác ABC có $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{C} = 45^\circ$ và $AB = 5$. Tính độ dài cạnh AC.

- A. $AC = \frac{5\sqrt{6}}{2}$. B. $AC = 5\sqrt{3}$. C. $AC = 5\sqrt{2}$. D. $AC = 10$.

Lời giải

Chọn A

Theo định lí hàm sin, ta có $\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} \Leftrightarrow \frac{5}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 60^\circ} \Rightarrow AC = \frac{5\sqrt{6}}{2}$.

Câu 22: Cho hình thoi ABCD cạnh bằng 1 cm và có $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh AC.

- A. $AC = \sqrt{3}$. B. $AC = \sqrt{2}$. C. $AC = 2\sqrt{3}$. D. $AC = 2$.

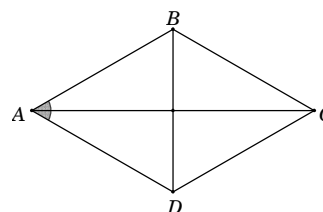
Lời giải

Chọn A

Do ABCD là hình thoi, có $\widehat{BAD} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 120^\circ$.

Theo định lí hàm cosin, ta có

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC.\cos \widehat{ABC} \\ &= 1^2 + 1^2 - 2.1.1.\cos 120^\circ = 3 \Rightarrow AC = \sqrt{3} \end{aligned}$$



Câu 23: Tam giác ABC có $BC = 10$ và $\hat{A} = 30^\circ$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

- A. $R = 5$. B. $R = 10$. C. $R = \frac{10}{\sqrt{3}}$. D. $R = 10\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng định lí sin, ta có $\frac{BC}{\sin \hat{A}} = 2R \Rightarrow R = \frac{BC}{2.\sin \hat{A}} = \frac{10}{2.\sin 30^\circ} = 10$.

Câu 24: Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 6$ và $\hat{A} = 60^\circ$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

- A. $R = 3$. B. $R = 3\sqrt{3}$. C. $R = \sqrt{3}$. D. $R = 6$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng định lí Cosin, ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos \hat{A}$
 $= 3^2 + 6^2 - 2.3.6.\cos 60^\circ = 27 \Leftrightarrow BC^2 = 27 \Leftrightarrow BC^2 + AB^2 = AC^2$.

Suy ra tam giác ABC vuông tại B, do đó bán kính $R = \frac{AC}{2} = 3$.

Câu 25: Tam giác ABC có $AB = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$, $BC = \sqrt{3}$, $CA = \sqrt{2}$. Gọi D là chân đường phân giác trong góc A. Khi đó góc ADB bằng bao nhiêu độ?

- A. 45° . B. 60° . C. 75° . D. 90° .

Lời giải

Chọn C

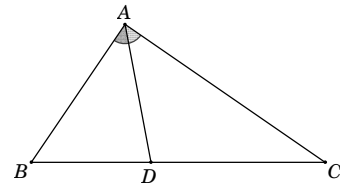
Theo định lí hàm cosin, ta có:

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BAD} = 60^\circ$$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{ABC} = 45^\circ$$

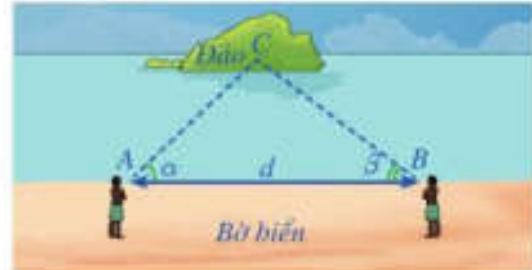
Trong $\triangle ABD$ có $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{ABD} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{ADB} = 75^\circ$.



§2 GIẢI TAM GIÁC

Từ xa xưa, con người đã cần đo đạc các khoảng cách mà không thể trực tiếp đo được. Chẳng hạn, để đo khoảng cách từ vị trí A trên bờ biển tới một hòn đảo (hay con tàu, ...) trên biển, người xưa đã tìm ra một cách đo khoảng cách đó như sau:

Từ vị trí A, đo góc nghiêng α so với bờ biển tới một vị trí C quan sát được trên đảo. Sau đó đi chuyển dọc bờ biển đến vị trí B cách A một khoảng d và tiếp tục đo góc nghiêng β so với bờ biển tới vị trí C đã chọn (Hình 18). Bằng cách giải tam giác ABC, họ tính được khoảng cách AC.



Hình 18

Giải tam giác được hiểu như thế nào?



I. TÍNH CÁC CẠNH VÀ GÓC CỦA TAM GIÁC DỰA TRÊN MỘT SỐ ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Như ta đã biết, một tam giác hoàn toàn xác định nếu biết một trong những dữ kiện sau:

- Biết độ dài hai cạnh và độ lớn góc xen giữa hai cạnh đó;
- Biết độ dài ba cạnh;
- Biết độ dài một cạnh và độ lớn hai góc kề với cạnh đó.

Giải tam giác là tính các cạnh và các góc của tam giác dựa trên những dữ kiện cho trước.

1 Cho tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$, $\hat{A} = \alpha$. Viết công thức tính BC theo b, c, α .

Ví dụ 1 Cho tam giác ABC có $AB = 15$, $AC = 35$, $\hat{A} = 60^\circ$ (Hình 19). Tính cạnh BC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) và góc B (làm tròn kết quả đến độ).

Giải

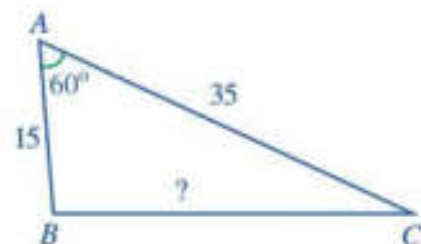
Áp dụng định lý côsin trong tam giác ABC, ta có:

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A \\ &= 15^2 + 35^2 - 2 \cdot 15 \cdot 35 \cdot \cos 60^\circ = 925. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } BC = \sqrt{925} \approx 30,4.$$

$$\text{Ta có: } \cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{15^2 + 925 - 35^2}{2 \cdot 15 \cdot \sqrt{925}}$$

$$\text{Do đó } \hat{B} \approx 95^\circ.$$



Hình 19

2 Cho tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Viết công thức tính $\cos A$ theo a, b, c .

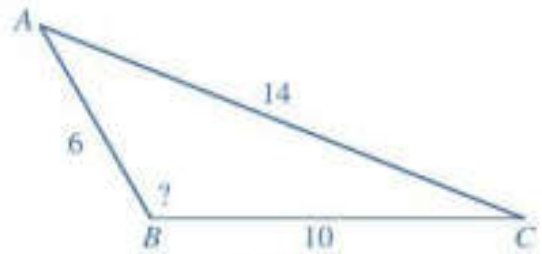
Ví dụ 2 Cho tam giác ABC có $AB = 6$, $BC = 10$, $CA = 14$ (Hình 20). Tính số đo góc B .

Giải

Áp dụng định lý côsin trong tam giác ABC , ta có:

$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} \\ &= \frac{6^2 + 10^2 - 14^2}{2 \cdot 6 \cdot 10} = -0,5.\end{aligned}$$

Do đó $\widehat{B} = 120^\circ$.



Hình 20

3 Viết công thức định lý sin cho tam giác ABC .

Ví dụ 3 Cho tam giác ABC có $BC = 100$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 40^\circ$ (Hình 21). Tính góc A và các cạnh AB, AC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) của tam giác đó.

Giải

Ta có:

$$\widehat{A} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ - (60^\circ + 40^\circ) = 80^\circ.$$

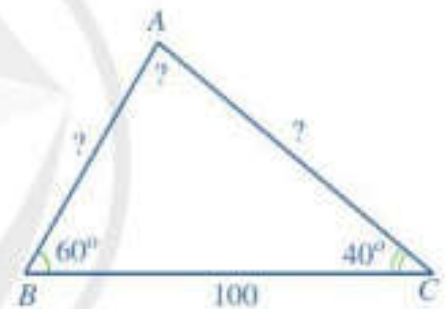
Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC , ta có:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B}.$$

Do đó

$$AB = \frac{BC \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{100 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 65,3;$$

$$AC = \frac{BC \cdot \sin B}{\sin A} = \frac{100 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 87,9.$$



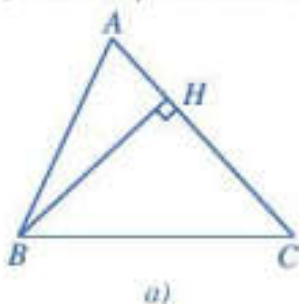
Hình 21

II. TÍNH DIỆN TÍCH TAM GIÁC

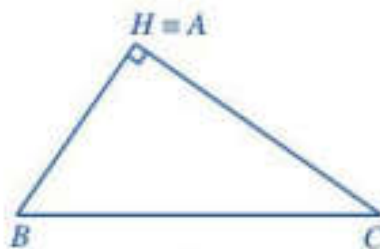
4 Cho tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Kẻ đường cao BH .

a) Tính BH theo c và $\sin A$.

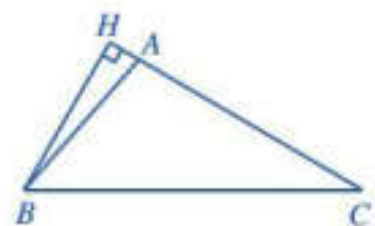
b) Tính diện tích S của tam giác ABC theo b, c và $\sin A$.



a)



b)



c)

Để tính độ dài BH và diện tích tam giác ABC , ta làm như sau:

a) Xét các trường hợp:

Với $\hat{A} < 90^\circ$ (Hình 22a). Xét tam giác vuông AHB , ta có: $BH = AB \cdot \sin A = c \sin A$.

Với $\hat{A} = 90^\circ$ (Hình 22b). Khi đó, $BH = BA = c = c \sin A$.

Với $\hat{A} > 90^\circ$ (Hình 22c). Xét tam giác vuông AHB , ta có: $\widehat{BAH} = 180^\circ - \hat{A}$.

Do đó $BH = AB \cdot \sin(180^\circ - \hat{A}) = AB \cdot \sin A = c \sin A$.

Như vậy, trong mọi trường hợp ta đều có $BH = c \sin A$.

b) Ta có:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} bc \sin A.$$

Bằng cách chứng minh tương tự, ta có công thức tính diện tích tam giác như sau:

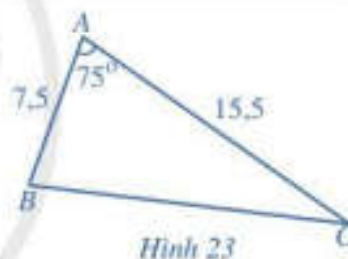
Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Khi đó, diện tích S của tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

Ví dụ 4 Cho tam giác ABC có $AB = 7,5$; $AC = 15,5$; $\hat{A} = 75^\circ$ (Hình 23). Tính diện tích S của tam giác ABC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A \\ &= \frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot 15,5 \cdot \sin 75^\circ \\ &\approx 56,1. \end{aligned}$$



1 Cho tam giác ABC có $AB = 12$; $\hat{B} = 60^\circ$; $\hat{C} = 45^\circ$. Tính diện tích của tam giác ABC .

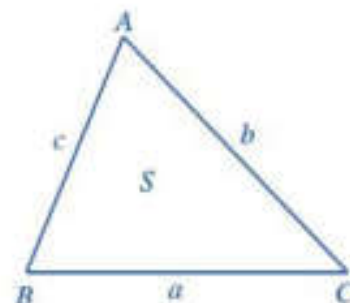
5 Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và diện tích là S (Hình 24).

a) Từ định lý côsin, chứng tỏ rằng:

$$\sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ ở đó } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

b) Bằng cách sử dụng công thức $S = \frac{1}{2} bc \sin A$, hãy chứng tỏ rằng:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$



Ta có công thức Heron để tính diện tích tam giác theo độ dài ba cạnh của nó như sau:



Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $p = \frac{a+b+c}{2}$. Khi đó, diện tích S của tam giác ABC là:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

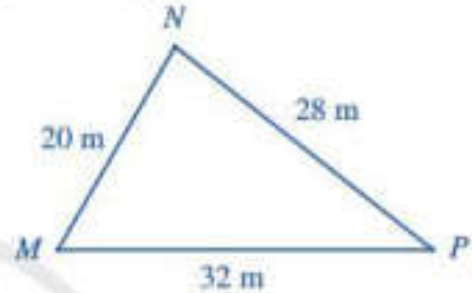
Ví dụ 5 Mảnh vườn hình tam giác của gia đình bạn Nam có chiều dài các cạnh là $MN = 20$ m, $NP = 28$ m, $MP = 32$ m (Hình 25). Hỏi diện tích mảnh vườn của gia đình bạn Nam là bao nhiêu mét vuông (làm tròn đến hàng phần mười)?

Giải

Ta có: $p = \frac{20+28+32}{2} = 40$ (m).

Diện tích mảnh vườn là:

$$S = \sqrt{40(40-20)(40-28)(40-32)} \\ \approx 277,1 \text{ (m}^2\text{)}.$$

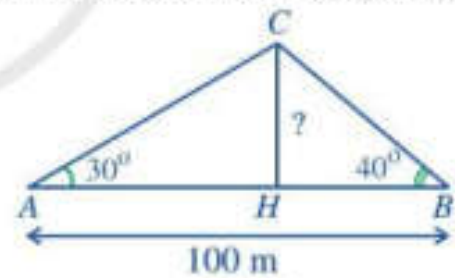


Hình 25

III. ỨNG DỤNG VÀO BÀI TOÁN THỰC TIỄN

Ví dụ 6 Đứng ở vị trí A trên bờ biển, bạn Minh đo được góc nghiêng so với bờ biển tới một vị trí C trên đảo là 30° . Sau đó di chuyển dọc bờ biển đến vị trí B cách A một khoảng 100 m và đo được góc nghiêng so với bờ biển tới vị trí C đã chọn là 40° .

Tính khoảng cách từ vị trí C trên đảo tới bờ biển theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 26

Giải

Xét tam giác ABC (Hình 26), ta có: $\widehat{C} = 180^\circ - (30^\circ + 40^\circ) = 110^\circ$.

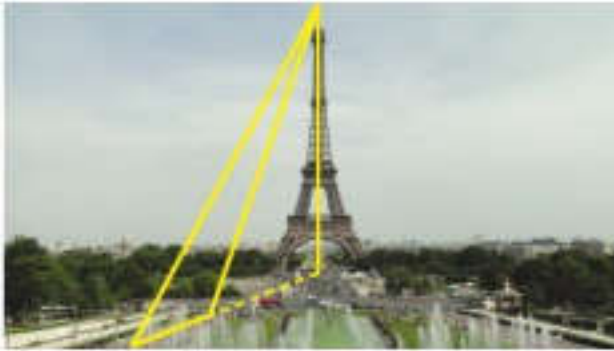
Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC , ta có: $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$.

$$\text{Do đó } AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{100 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 110^\circ} \approx 68,4 \text{ (m)}.$$

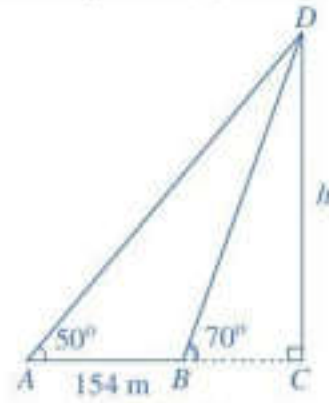
Xét tam giác vuông AHC , ta có: $CH = AC \cdot \sin 30^\circ \approx 68,4 \cdot 0,5 \approx 34,2$ (m).

Vậy khoảng cách từ vị trí C trên đảo tới bờ biển khoảng 34,2 m.

Ví dụ 7 Trong lần đến tham quan tháp Eiffel (ở Thủ đô Paris, Pháp), bạn Phương muốn ước tính độ cao của tháp. Sau khi quan sát, bạn Phương đã minh hoạ lại kết quả đo đạc ở Hình 27. Em hãy giúp bạn Phương tính độ cao h của tháp Eiffel (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



(Nguồn: <https://pixabay.com>)



Hình 27

Giải

Xét tam giác ABD , sử dụng tính chất góc ngoài, ta có:
 $\widehat{ADB} = 70^\circ - 50^\circ = 20^\circ$.

Áp dụng định lí sin cho tam giác ABD , ta có:

$$\frac{BD}{\sin \widehat{BAD}} = \frac{AB}{\sin \widehat{ADB}}$$

$$\text{Do đó } BD = \frac{154 \cdot \sin 50^\circ}{\sin 20^\circ} \approx 345 \text{ (m)}.$$

Xét tam giác vuông BCD , ta có:

$$CD = BD \cdot \sin \widehat{CBD} \approx 345 \cdot \sin 70^\circ \approx 324 \text{ (m)}.$$

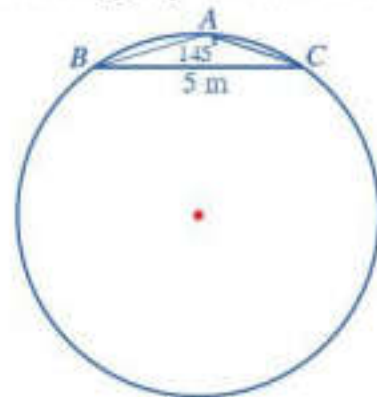
Vậy chiều cao h của tháp Eiffel khoảng 324 m.

2 Từ trên nóc của một toà nhà cao 18,5 m, bạn Nam quan sát một cái cây cách toà nhà 30 m và dùng giác kế đo được góc lệch giữa phương quan sát gốc cây và phương nằm ngang là 34° , góc lệch giữa phương quan sát ngọn cây và phương nằm ngang là 24° . Biết chiều cao của chân giác kế là 1,5 m. Chiều cao của cái cây là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Ví dụ 8 Để tính đường kính và diện tích của một giếng nước cổ có dạng hình tròn, người ta tiến hành đo đạc tại ba vị trí A, B, C trên thành giếng. Kết quả đo được là: $BC = 5$ m, $\widehat{BAC} = 145^\circ$ (Hình 28). Diện tích của giếng là bao nhiêu mét vuông (lấy $\pi \approx 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



(Nguồn: <https://thoibaonganhang.vn>)



Hình 28

Giải

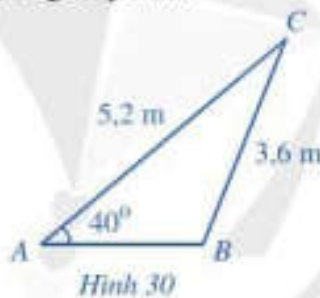
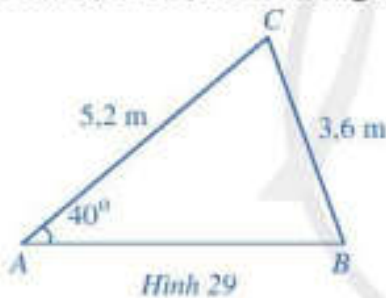
Áp dụng định lý sin cho tam giác ABC , ta có: $\frac{BC}{\sin A} = 2R$.

$$\text{Do đó } R = \frac{BC}{2 \cdot \sin A} = \frac{5}{2 \cdot \sin 145^\circ} \approx 4,36 \text{ (m)}.$$

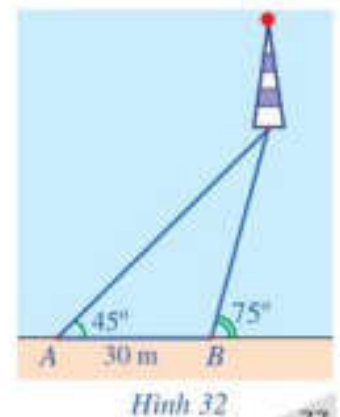
Vậy diện tích của giếng là: $S = \pi R^2 \approx 3,14 \cdot 4,36^2 \approx 59,69 \text{ (m}^2\text{)}.$

BÀI TẬP

- Cho tam giác ABC có $BC = 12$, $CA = 15$, $\widehat{C} = 120^\circ$. Tính:
 - Độ dài cạnh AB ;
 - Số đo các góc A , B ;
 - Diện tích tam giác ABC .
- Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $BC = 7$, $\widehat{A} = 120^\circ$. Tính độ dài cạnh AC .
- Cho tam giác ABC có $AB = 100$, $\widehat{B} = 100^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$. Tính:
 - Độ dài các cạnh AC , BC ;
 - Diện tích tam giác ABC .
- Cho tam giác ABC có $AB = 12$, $AC = 15$, $BC = 20$. Tính:
 - Số đo các góc A , B , C ;
 - Diện tích tam giác ABC .
- Tính độ dài cạnh AB trong mỗi trường hợp sau:



- Để tính khoảng cách giữa hai địa điểm A và B mà ta không thể đi trực tiếp từ A đến B (hai địa điểm nằm ở hai bên bờ một hồ nước, một đầm lầy, ...), người ta tiến hành như sau: Chọn một địa điểm C sao cho ta đo được các khoảng cách AC , CB và góc ACB . Sau khi đo, ta nhận được: $AC = 1 \text{ km}$, $CB = 800 \text{ m}$ và $\widehat{ACB} = 105^\circ$ (Hình 31). Tính khoảng cách AB (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị mét).
- Một người đi dọc bờ biển từ vị trí A đến vị trí B và quan sát một ngọn hải đăng. Góc nghiêng của phương quan sát từ các vị trí A , B tới ngọn hải đăng với đường đi của người quan sát là 45° và 75° . Biết khoảng cách giữa hai vị trí A , B là 30 m (Hình 32). Ngọn hải đăng cách bờ biển bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Dạng 1: Giải tam giác.

1. Phương pháp.

- Giải tam giác là tính các cạnh và các góc của tam giác dựa trên một số điều kiện cho trước.
- Trong các bài toán giải tam giác người ta thường cho tam giác với ba yếu tố như sau : biết một cạnh và hai góc kề cạnh đó; biết một góc và hai cạnh kề góc đó; biết ba cạnh.

Để tìm các yếu tố còn lại ta sử dụng định lý côsin và định lý sin ; định lý tổng ba góc trong một tam giác bằng 180° và trong một tam giác đối diện với góc lớn hơn thì có cạnh lớn hơn và ngược lại đối diện với cạnh lớn hơn thì có góc lớn hơn.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Giải tam giác ABC biết $b = 32$; $c = 45$ và $\hat{A} = 87^\circ$.

Lời giải

Theo định lý côsin ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = 32^2 + 45^2 - 2 \cdot 32 \cdot 45 \cdot \sin 87^\circ$$

Suy ra $a \approx 53,8$

Theo định lý sin ta có

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{32 \sin 87^\circ}{53,8} \Rightarrow \hat{B} \approx 36^\circ$$

$$\text{Suy ra } \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} \approx 180^\circ - 87^\circ - 36^\circ = 57^\circ$$

Ví dụ 2: Giải tam giác ABC biết $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 40^\circ$ và $c = 14$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$$

Theo định lý sin ta có

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{14 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \Rightarrow a \approx 12,3$$

$$b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{14 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \Rightarrow b \approx 9,1$$

Dạng 2: Xác định các yếu tố trong tam giác.

1. Phương pháp

- Sử dụng định lý côsin và định lý sin
- Sử dụng công thức xác định độ dài đường trung tuyến và mối liên hệ của các yếu tố trong các công thức tính diện tích trong tam giác.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 5$ và $\cos A = \frac{3}{5}$.

Tính cạnh BC , và độ dài đường cao kẻ từ A .

Lời giải

$$\text{Áp dụng định lý côsin ta có } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 29$$

$$\text{Suy ra } BC = \sqrt{29}$$

$$\text{Vì } \sin^2 A + \cos^2 A = 1 \text{ nên } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

Theo công thức tính diện tích ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}.4.5.\frac{4}{5} = 8$ (1)

Mặt khác $S_{ABC} = \frac{1}{2} a.h_a = \frac{1}{2}.\sqrt{29}.h_a$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{2}.\sqrt{29}.h_a = 8 \Rightarrow h_a = \frac{16\sqrt{29}}{29}$

Vậy độ dài đường cao kẻ từ A là $h_a = \frac{16\sqrt{29}}{29}$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính bằng 3, biết $\hat{A} = 30^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$. Tính độ dài trung tuyến kẻ từ A và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

Lời giải

Ta có $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$

Theo định lí sin ta có $a = 2R \sin A = 2.3.\sin 30^\circ = 3$, $b = 2R \sin B = 2.3.\sin 45^\circ = 6.\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

$c = 2R \sin C = 2.3.\sin 105^\circ \approx 5,796$

Theo công thức đường trung tuyến ta có $m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \approx \frac{2(18 + 5,796^2) - 9}{4} = 23,547$

Theo công thức tính diện tích tam giác ta có

$S_{ABC} = pr = \frac{1}{2} bc \sin A \Rightarrow r = \frac{bc \sin A}{2p} \approx \frac{3\sqrt{2}.5,796 \sin 30^\circ}{3 + 3\sqrt{2} + 5,796} \approx 0,943$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC biết $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Tính góc lớn nhất của tam giác.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $c < b < a$ suy ra $\hat{C} < \hat{B} < \hat{A}$ do đó góc A là lớn nhất.

Theo định lí cosin ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8 + (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 - 12}{2.2\sqrt{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{4 - 4\sqrt{3}}{8\sqrt{3} - 8} = -\frac{1}{2}$$

Suy ra $\hat{A} = 120^\circ$

Vậy góc lớn nhất là góc A có số đo là 120° .

Dạng 3: Chứng Minh Đẳng Thức, Bất Đẳng Thức Liên Quan Đến Các Yếu Tố Của Tam Giác, Tứ Giác.

1. Phương pháp giải.

- Để chứng minh đẳng thức ta sử dụng các hệ thức cơ bản để biến đổi về này thành về kia, hai về cùng bằng một về hoặc biến đổi tương đương về một đẳng thức đúng.
- Để chứng minh bất đẳng thức ta sử dụng các hệ thức cơ bản, bất đẳng thức cạnh trong tam giác và bất đẳng thức cô điển (Cauchy, bunhiacôpxki,...)

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin^2 A = \sin B.\sin C$. Chứng minh rằng

a) $a^2 = bc$

b) $\cos A \geq \frac{1}{2}$

Lời giải

a) Áp dụng định lý sin ta có $\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$

Suy ra $\sin^2 A = \sin B \cdot \sin C \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} \Leftrightarrow a^2 = bc$ đpcm

b) Áp dụng định lý cosin và câu a) ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - bc}{2bc} \geq \frac{2bc - bc}{2bc} = \frac{1}{2} \text{ đpcm}$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC , chứng minh rằng: $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$

Lời giải:

Áp dụng định lý cosin và công thức $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ ta có:

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc \sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} \text{ đpcm}$$

Dạng 4: Nhận Dạng Tam Giác

1. Phương pháp giải.

Sử dụng định lý cosin; sin; công thức đường trung tuyến; công thức tính diện tích tam giác để biến đổi giả thiết về hệ thức liên hệ cạnh(hoặc góc) từ đó suy ra dạng của tam giác.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin C = 2 \sin B \cos A$. Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

Lời giải

Áp dụng định lý cosin và sin ta có:

$$\sin C = 2 \sin B \cos A \Leftrightarrow \frac{c}{2R} = 2 \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$c^2 = b^2 + c^2 - a^2 \Leftrightarrow a = b$$

Suy ra tam giác ABC cân tại đỉnh C.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} \Leftrightarrow \sin A(\cos B + \cos C) = \sin B + \sin C$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2R} \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) = \frac{b + c}{2R}$$

$$\Leftrightarrow b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) = 2b^2c + 2c^2b$$

$$\Leftrightarrow b^3 + c^3 + b^2c + bc^2 - a^2b - a^2c = 0 \Leftrightarrow (b + c)(b^2 + c^2) - a^2(b + c) = 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại A.}$$

Ví dụ 3: Nhận dạng tam giác ABC trong các trường hợp sau:

a) $a \cdot \sin A + b \sin B + c \sin C = h_a + h_b + h_c$

$$b) \frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cot^2 A + \cot^2 B)$$

Lời giải

a) Áp dụng công thức diện tích ta có $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ah_a$ suy ra

$$a \cdot \sin A + b \sin B + c \sin C = h_a + h_b + h_c \Leftrightarrow a \cdot \frac{2S}{bc} + b \cdot \frac{2S}{ca} + c \cdot \frac{2S}{ab} = \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b = c$$

Vậy tam giác ABC đều

b) Ta có: $\frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cot^2 A + \cot^2 B)$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 A + \cos^2 B + \sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cot^2 A + 1 + \cot^2 B + 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B}\right) \Leftrightarrow (\sin^2 A + \sin^2 B)^2 = 4\sin^2 A \sin^2 B$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A = \sin^2 B \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ cân tại } C.$$

Dạng 5: Sử dụng các công thức liên quan đến diện tích tam giác**1. Phương pháp.****Công thức diện tích tam giác**

Với tam giác ABC ta kí hiệu h_a, h_b, h_c là độ dài đường cao lần lượt tương ứng với các cạnh BC, CA, AB ;

R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ; $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác ;

S là diện tích tam giác. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c \\ &= \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C \\ &= \frac{abc}{4R} \\ &= pr \\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{aligned}$$

2. Các ví dụ.

Câu 1. Cho tam giác ABC , biết

a) $a = 7, b = 8, c = 6$. Tính S và h_a .

b) $b = 7, c = 5, \cos A = \frac{3}{5}$. Tính S và R, r

Lời giải.

a) Áp dụng công thức Hê-rông với $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{21}{2}$

$$\text{Ta có } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{21}{2}\left(\frac{21}{2}-7\right)\left(\frac{21}{2}-8\right)\left(\frac{21}{2}-6\right)} = \frac{21\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{Vì } S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow \frac{21\sqrt{15}}{4} = \frac{1}{2}7.h_a \Rightarrow h_a = \frac{3\sqrt{15}}{2}$$

$$\text{b) Ta có } \sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin A = \frac{4}{5} \text{ (vì } \sin A > 0 \text{)}.$$

$$\text{Mà } S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 14$$

$$\text{Theo Định lí Cô-sin ta có } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 32 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$$

$$\text{Từ } S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{28}{4\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Theo định lí sin: } \frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{4\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{4}{5}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Ta có } S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{14}{5+7+4\sqrt{2}} = \frac{14}{12+4\sqrt{2}} = \frac{7}{6+2\sqrt{2}}$$

Câu 2. Cho tam giác ABC , biết $a=3, b=4, c=6$. Tính góc lớn nhất và đường cao tương ứng với cạnh lớn nhất

Lời giải.

Ta có $c=6$ là cạnh lớn nhất của tam giác, do đó là góc lớn nhất.

$$\text{Áp dụng định lí cô-sin, ta có } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{3^2 + 4^2 - 6^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = -\frac{11}{24} \Rightarrow \hat{C} \approx 117^\circ 17'$$

Ta có h_c là đường cao ứng với cạnh lớn nhất. Theo công thức Hê-rông

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ với } p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13}{2}$$

$$\text{Nên } S = \sqrt{\frac{13}{2}\left(\frac{13}{2}-3\right)\left(\frac{13}{2}-4\right)\left(\frac{13}{2}-6\right)} = \frac{\sqrt{455}}{4}$$

$$\text{Ta có: } h_c = \frac{2S}{c} = \frac{\sqrt{455}}{2 \cdot 6} = \frac{\sqrt{455}}{12}$$

Câu 3. Tính các góc A, B và h_a, R của tam giác ABC biết $a=\sqrt{6}, b=2, c=\sqrt{3}+1$

Lời giải.

Theo định lí cô-sin, ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - 6^2}{2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3}+1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ,$$

$$\cos B = \frac{(\sqrt{3}+1)^2 + 6 - 4}{2 \cdot (\sqrt{3}+1) \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{B} = 45^\circ$$

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{ac \sin B}{a} = c \sin B = (\sqrt{3} + 1) \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Áp dụng định lí sin ta có } \frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow R = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Câu 4. Cho tam giác ABC , biết $a = 21, b = 17, c = 10$

- a) Tính diện tích S của tam giác ABC và chiều cao h_a .
b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp r và trung tuyến m_a .

Lời giải.

$$\text{a) Ta có } p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{21+17+10}{2} = 24$$

Theo công thức Hê-rông, ta có

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)} = 84$$

$$\text{Do đó: } h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 84}{21} = 8.$$

$$\text{b) Ta có } S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{84}{24} = 3,5.$$

$$\text{Độ dài trung tuyến } m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{17^2 + 10^2}{2} - \frac{21^2}{4} = \frac{337}{4} = 84,25$$

Câu 5. Cho tam giác ABC , có $\hat{A} = 60^\circ, b = 20, c = 25$.

- a) Tính diện tích S và chiều cao h_a .
b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp R và bán kính đường tròn nội tiếp r

Lời giải.

$$\text{a) Ta có } S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 125\sqrt{3}$$

$$\text{Hơn nữa } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 20^2 + 25^2 - 2 \cdot 20 \cdot 25 \cdot \frac{1}{2} = 925$$

$$\text{Vậy } a = \sqrt{925} \approx 30,41$$

$$\text{Từ công thức } S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{250\sqrt{3}}{\sqrt{925}} \approx 19,94$$

$$\text{b) Từ công thức } \frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{\sqrt{925}}{\sqrt{3}} \approx 17,56$$

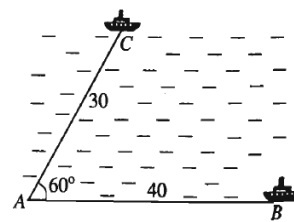
$$\text{Từ công thức } S = pr \text{ với } p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\text{ta có } r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{bc \sin A}{a+b+c} = \frac{20 \cdot 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{925} + 20 + 25} \approx 7,10$$

Dạng 6: Bài toán thực tế

Câu 1: Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60° . Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lý một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lý một giờ. Sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lý? Kết quả gần nhất với số nào sau đây?

- A. 61 hải lý. B. 36 hải lý.
C. 21 hải lý. D. 18 hải lý.

**Lời giải****Chọn B**

Sau 2 giờ tàu B đi được 40 hải lý, tàu C đi được 30 hải lý. Vậy tam giác ABC có $AB = 40$, $AC = 30$ và $\widehat{A} = 60^\circ$.

Áp dụng định lý côsin vào tam giác ABC , ta có

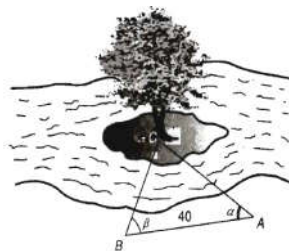
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 30^2 + 40^2 - 2 \cdot 30 \cdot 40 \cdot \cos 60^\circ = 900 + 1600 - 1200 = 1300.$$

Vậy $BC = \sqrt{1300} \approx 36$ (hải lý).

Sau 2 giờ, hai tàu cách nhau khoảng 36 hải lý.

Câu 2: Để đo khoảng cách từ một điểm A trên bờ sông đến gốc cây C trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm B cùng ở trên bờ với A sao cho từ A và B có thể nhìn thấy điểm C . Ta đo được khoảng cách $AB = 40\text{ m}$, $\widehat{CAB} = 45^\circ$ và $\widehat{CBA} = 70^\circ$. Vậy sau khi đo đạc và tính toán được khoảng cách AC gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. 53 m .
B. 30 m .
C. 41,5 m .
D. 41 m .

**Lời giải****Chọn C**

Áp dụng định lý sin vào tam giác ABC , ta có $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$

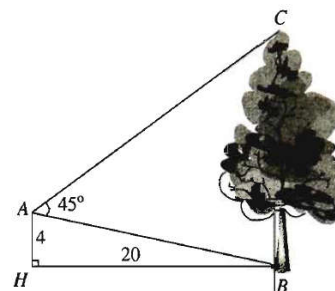
$$\text{Vì } \sin C = \sin(\alpha + \beta) \text{ nên } AC = \frac{AB \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{40 \cdot \sin 70^\circ}{\sin 115^\circ} \approx 41,47 \text{ m.}$$

Câu 3: Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao (hình vẽ).

Biết $AH = 4\text{ m}$, $HB = 20\text{ m}$, $\widehat{BAC} = 45^\circ$.

Chiều cao của cây gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. 17,5m . B. 17m .
C. 16,5m . D. 16m .

**Lời giải****Chọn B**

Trong tam giác AHB , ta có $\tan \widehat{ABH} = \frac{AH}{BH} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \longrightarrow \widehat{ABH} \approx 11^\circ 19'$.

Suy ra $\widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{ABH} = 78^\circ 41'$.

Suy ra $\widehat{ACB} = 180^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{ABC}) = 56^\circ 19'$.

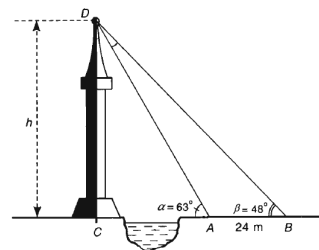
Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC , ta được

$$\frac{AB}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{CB}{\sin \widehat{BAC}} \longrightarrow CB = \frac{AB \cdot \sin \widehat{BAC}}{\sin \widehat{ACB}} \approx 17\text{m}.$$

Câu 4: Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B và C thẳng hàng. Ta đo được $AB = 24\text{ m}$, $\widehat{CAD} = 63^\circ$, $\widehat{CBD} = 48^\circ$.

Chiều cao h của tháp gần với giá trị nào sau đây?

- A. 18m . B. 18,5m .
C. 60m . D. 60,5m .



Lời giải

Chọn D

Áp dụng định lý sin vào tam giác ABD , ta có $\frac{AD}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin D}$.

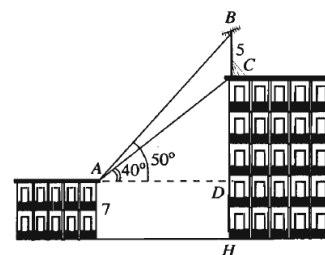
Ta có $\alpha = \widehat{D} + \beta$ nên $\widehat{D} = \alpha - \beta = 63^\circ - 48^\circ = 15^\circ$.

$$\text{Do đó } AD = \frac{AB \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{24 \cdot \sin 48^\circ}{\sin 15^\circ} \approx 68,91\text{ m}.$$

Trong tam giác vuông ACD , có $h = CD = AD \cdot \sin \alpha \approx 61,4\text{ m}$.

Câu 5: Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao 5 m. Từ vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc 50° và 40° so với phương nằm ngang. Chiều cao của tòa nhà gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. 12m . B. 19m .
C. 24m . D. 29m .



Lời giải

Chọn B

Từ hình vẽ, suy ra $\widehat{BAC} = 10^\circ$ và $\widehat{ABD} = 180^\circ - (\widehat{BAD} + \widehat{ADB}) = 180^\circ - (50^\circ + 90^\circ) = 40^\circ$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC , ta có

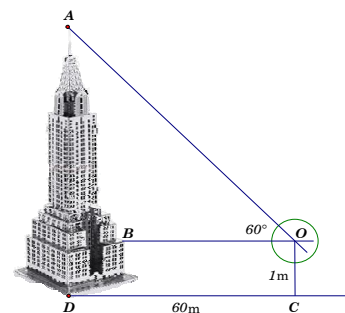
$$\frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{AC}{\sin \widehat{ABC}} \longrightarrow AC = \frac{BC \cdot \sin \widehat{ABC}}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{5 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 10^\circ} \approx 18,5\text{ m}.$$

Trong tam giác vuông ADC , ta có $\sin \widehat{CAD} = \frac{CD}{AC} \longrightarrow CD = AC \cdot \sin \widehat{CAD} = 11,9\text{ m}$.

Vậy $CH = CD + DH = 11,9 + 7 = 18,9\text{ m}$.

Câu 6: Xác định chiều cao của một tháp mà không cần lên đỉnh của tháp. Đặt kế giác thẳng đứng cách chân tháp một khoảng $CD = 60\text{m}$, giả sử chiều cao của giác kế là $OC = 1\text{m}$. Quay thanh giác kế sao cho khi ngắm theo thanh ta nhìn thấy đỉnh A của tháp. Đọc trên giác kế số đo của góc $\widehat{AOB} = 60^\circ$. Chiều cao của ngọn tháp gần với giá trị nào sau đây:

- A. 40m . B. 114m .
C. 105m . D. 110m .



Lời giải

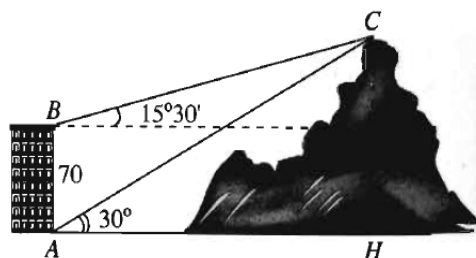
Chọn C

Tam giác OAB vuông tại B , có $\tan \widehat{AOB} = \frac{AB}{OB} \Rightarrow AB = \tan 60^\circ \cdot OB = 60\sqrt{3}\text{m}$.

Vậy chiều cao của ngọn tháp là $h = AB + OC = (60\sqrt{3} + 1)\text{m}$.

Câu 7: Từ hai vị trí A và B của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao $AB = 70\text{m}$, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang góc 30° , phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang góc $15^\circ 30'$. Ngọn núi đó có độ cao so với mặt đất gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. 135m . B. 234m .
C. 165m . D. 195m .



Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết, ta suy ra tam giác ABC có $\widehat{CAB} = 60^\circ$, $\widehat{ABC} = 105^\circ 30'$ và $c = 70$.

Khi đó $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 180^\circ - 165^\circ 30' = 14^\circ 30'$.

Theo định lí sin, ta có $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ hay $\frac{b}{\sin 105^\circ 30'} = \frac{70}{\sin 14^\circ 30'}$

Do đó $AC = b = \frac{70 \cdot \sin 105^\circ 30'}{\sin 14^\circ 30'} \approx 269,4\text{ m}$.

Gọi CH là khoảng cách từ C đến mặt đất. Tam giác vuông ACH có cạnh CH đối diện với góc 30° nên

$CH = \frac{AC}{2} = \frac{269,4}{2} = 134,7\text{ m}$. Vậy ngọn núi cao khoảng 135 m.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tam giác ABC có $BC = 21\text{cm}$, $CA = 17\text{cm}$, $AB = 10\text{cm}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $R = \frac{85}{2}\text{cm}$. B. $R = \frac{7}{4}\text{cm}$.
C. $R = \frac{85}{8}\text{cm}$. D. $R = \frac{7}{2}\text{cm}$.

Lời giải

Chọn C

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. “Tránh mua các trang và các cá nhân khác”

Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT: 0834 332 133

Đặt $p = \frac{AB+BC+CA}{2} = 24$. Áp dụng công thức Hê – rông, ta có

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-CA)} = \sqrt{24.(24-21).(24-17).(24-10)} = 84 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Vậy bán kính cần tìm là } S_{\triangle ABC} = \frac{AB.BC.CA}{4R} \Rightarrow R = \frac{AB.BC.CA}{4.S_{\triangle ABC}} = \frac{21.17.10}{4.84} = \frac{85}{8} \text{ cm}.$$

Câu 2: Tam giác đều cạnh a nội tiếp trong đường tròn bán kính R . Khi đó bán kính R bằng:

A. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $R = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

D. $R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Xét tam giác ABC đều cạnh a , gọi M là trung điểm của BC .

$$\text{Ta có } AM \perp BC \text{ suy ra } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}.AM.BC = \frac{1}{2}.\sqrt{AB^2 - BM^2}.BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Vậy bán kính cần tính là } S_{\triangle ABC} = \frac{AB.BC.CA}{4R} \Rightarrow R = \frac{AB.BC.CA}{4.S_{\triangle ABC}} = \frac{a^3}{4.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 3: Cho tam giác ABC có $AB=3\sqrt{3}$, $BC=6\sqrt{3}$ và $CA=9$. Gọi D là trung điểm BC . Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD .

A. $R = \frac{9}{6}$.

B. $R = 3$.

C. $R = 3\sqrt{3}$.

D. $R = \frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Vì } D \text{ là trung điểm của } BC \Rightarrow AD^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = 27 \Rightarrow AD = 3\sqrt{3}.$$

Tam giác ABD có $AB=BD=DA=3\sqrt{3} \Rightarrow$ tam giác ABD đều.

$$\text{Nên có bán kính đường tròn ngoại tiếp là } R = \frac{\sqrt{3}}{3}AB = \frac{\sqrt{3}}{3}.3\sqrt{3} = 3.$$

Câu 4: Tam giác ABC có $AB=3$, $AC=6$, $\widehat{BAC}=60^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC .

A. $S_{\triangle ABC} = 9\sqrt{3}$.

B. $S_{\triangle ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

C. $S_{\triangle ABC} = 9$.

D. $S_{\triangle ABC} = \frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin \widehat{A} = \frac{1}{2}.3.6.\sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 5: Tam giác ABC có $AC=4$, $\widehat{BAC}=30^\circ$, $\widehat{ACB}=75^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC .

A. $S_{\triangle ABC} = 8$.

B. $S_{\triangle ABC} = 4\sqrt{3}$.

C. $S_{\triangle ABC} = 4$.

D. $S_{\triangle ABC} = 8\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\widehat{ABC} = 180^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{ACB}) = 75^\circ = \widehat{ACB}$.

Suy ra tam giác ABC cân tại A nên $AB = AC = 4$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \widehat{BAC} = 4$.

Câu 6: Tam giác ABC có $a = 21$, $b = 17$, $c = 10$. Diện tích của tam giác ABC bằng:

A. $S_{\triangle ABC} = 16$.

B. $S_{\triangle ABC} = 48$.

C. $S_{\triangle ABC} = 24$.

D. $S_{\triangle ABC} = 84$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $p = \frac{21+17+10}{2} = 24$.

Do đó $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)} = 84$.

Câu 7: Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 6$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính độ dài đường cao h_a của tam giác.

A. $h_a = 3\sqrt{3}$.

B. $h_a = \sqrt{3}$.

C. $h_a = 3$.

D. $h_a = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng định lý hàm số cosin, ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A = 27 \longrightarrow BC = 3\sqrt{3}.$$

Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Lại có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h_a \longrightarrow h_a = \frac{2S}{BC} = 3$.

Câu 8: Tam giác ABC có $a = 21$, $b = 17$, $c = 10$. Gọi B' là hình chiếu vuông góc của B trên cạnh AC . Tính BB' .

A. $BB' = 8$.

B. $BB' = \frac{84}{5}$.

C. $BB' = \frac{168}{17}$.

D. $BB' = \frac{84}{17}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $p = \frac{21+17+10}{2} = 24$.

Suy ra $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)} = 84$.

Lại có $S = \frac{1}{2} b \cdot BB' \longleftrightarrow 84 = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot BB' \longrightarrow BB' = \frac{168}{17}$.

Câu 9: Tam giác ABC có $AB = 8$ cm, $AC = 18$ cm và có diện tích bằng 64 cm^2 . Giá trị $\sin A$ bằng:

A. $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\sin A = \frac{3}{8}$.

C. $\sin A = \frac{4}{5}$.

D. $\sin A = \frac{8}{9}$.

Lời giải

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. “Tránh mua các trang và các cá nhân khác”

*Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT: 0834 332 133*

Chọn D

$$\text{Ta có } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} \Leftrightarrow 64 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 18 \cdot \sin A \Leftrightarrow \sin A = \frac{8}{9}.$$

Câu 10: Hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$ và $\widehat{BAD} = 45^\circ$. Khi đó hình bình hành có diện tích bằng:

A. $2a^2$.

B. $a^2\sqrt{2}$.

C. a^2 .

D. $a^2\sqrt{3}$.

Lời giải**Chọn C**

$$\text{Diện tích tam giác } ABD \text{ là } S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Vậy diện tích hình bình hành } ABCD \text{ là } S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\triangle ABD} = 2 \cdot \frac{a^2}{2} = a^2.$$

Câu 11: Tam giác đều nội tiếp đường tròn bán kính $R = 4$ cm có diện tích bằng:

A. 13 cm^2

B. $13\sqrt{2} \text{ cm}^2$

C. $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$

D. 15 cm^2 .

Lời giải**Chọn C**

Xét tam giác ABC đều, có độ dài cạnh bằng a .

$$\text{Theo định lí sin, ta có } \frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = 2R \Leftrightarrow \frac{a}{\sin 60^\circ} = 2 \cdot 4 \Leftrightarrow a = 8 \cdot \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy diện tích cần tính là } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot (4\sqrt{3})^2 \cdot \sin 60^\circ = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Câu 12: Tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và có diện tích S . Nếu tăng cạnh BC lên 2 lần đồng thời tăng cạnh AC lên 3 lần và giữ nguyên độ lớn của góc C thì khi đó diện tích của tam giác mới được tạo nên bằng:

A. $2S$.

B. $3S$.

C. $4S$.

D. $6S$.

Lời giải**Chọn D**

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ ban đầu là } S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin \widehat{ACB}.$$

Khi tăng cạnh BC lên 2 lần và cạnh AC lên 3 lần thì diện tích tam giác ABC lúc này là

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot (3AC) \cdot (2BC) \cdot \sin \widehat{ACB} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin \widehat{ACB} = 6S.$$

Câu 13: Tam giác ABC có $BC = a$ và $CA = b$. Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi góc C bằng:

A. 60° .

B. 90° .

C. 150° .

D. 120° .

Lời giải**Chọn B**

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin \widehat{ACB}.$$

Vì a, b không đổi và $\sin \widehat{ACB} \leq 1, \forall C$ nên suy ra $S_{\triangle ABC} \leq \frac{ab}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\sin \widehat{ACB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{ACB} = 90^\circ$.

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích tam giác ABC là $S = \frac{ab}{2}$.

Câu 14: Tam giác ABC có hai đường trung tuyến BM, CN vuông góc với nhau và có $BC = 3$, góc $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC .

- A. $S_{\triangle ABC} = 3\sqrt{3}$. B. $S_{\triangle ABC} = 6\sqrt{3}$. C. $S_{\triangle ABC} = 9\sqrt{3}$. D. $S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $BM \perp CN \longrightarrow 5a^2 = b^2 + c^2$. (Áp dụng hệ quả đã có trước)

Trong tam giác ABC , ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = 5a^2 - 2bc \cos A \longrightarrow bc = \frac{2a^2}{\cos A}$.

Khi đó $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a^2}{\cos A} \cdot \sin A = a^2 \tan A = 3\sqrt{3}$.

Câu 15: Tam giác ABC có $AB = 5, AC = 8$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

- A. $r = 1$. B. $r = 2$. C. $r = \sqrt{3}$. D. $r = 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng định lý hàm số cosin, ta có

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A = 49 \longrightarrow BC = 7$.

Diện tích $S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$.

Lại có $S = p \cdot r \longrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{2S}{AB + BC + CA} = \sqrt{3}$.

Câu 16: Tam giác ABC có $a = 21, b = 17, c = 10$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

- A. $r = 16$. B. $r = 7$. C. $r = \frac{7}{2}$. D. $r = 8$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $p = \frac{21+17+10}{2} = 24$.

Suy ra $S = \sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)} = 84$.

Lại có $S = p \cdot r \longrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{84}{24} = \frac{7}{2}$.

Câu 17: Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh a .

- A. $r = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $r = \frac{a\sqrt{2}}{5}$. C. $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. D. $r = \frac{a\sqrt{5}}{7}$.

Lời giải

Chọn C

Diện tích tam giác đều cạnh a bằng: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$$\text{Lại có } S = pr \longrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{3a}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 18: Tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r = 1$ cm.

B. $r = \sqrt{2}$ cm.

C. $r = 2$ cm.

D. $r = 3$ cm.

Lời giải

Chọn C

Dùng Pitago tính được $AC = 8$, suy ra $p = \frac{AB + BC + CA}{2} = 12$.

Diện tích tam giác vuông $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = 24$. Lại có $S = p \cdot r \longrightarrow r = \frac{S}{p} = 2$ cm.

Câu 19: Tam giác ABC vuông cân tại A , có $AB = a$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r = \frac{a}{2}$.

B. $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

C. $r = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}$.

D. $r = \frac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết, ta có $AC = AB = a$ và $BC = a\sqrt{2}$.

$$\text{Suy ra } p = \frac{AB + BC + CA}{2} = a \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right).$$

$$\text{Diện tích tam giác vuông } S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Lại có } S = p \cdot r \longrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}.$$

Câu 20: Tam giác ABC vuông cân tại A và nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R . Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Khi đó tỉ số $\frac{R}{r}$ bằng:

A. $1 + \sqrt{2}$.

B. $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$.

D. $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Giả sử } AC = AB = a \longrightarrow BC = a\sqrt{2}. \text{ Suy ra } R = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Ta có } p = \frac{AB + BC + CA}{2} = a \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right).$$

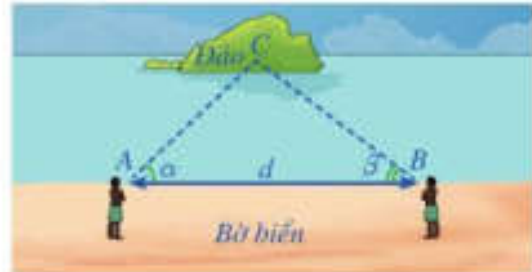
$$\text{Diện tích tam giác vuông } S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Lại có } S = p \cdot r \longrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}. \text{ Vậy } \frac{R}{r} = 1 + \sqrt{2}.$$

§2 GIẢI TAM GIÁC

Từ xa xưa, con người đã cần đo đạc các khoảng cách mà không thể trực tiếp đo được. Chẳng hạn, để đo khoảng cách từ vị trí A trên bờ biển tới một hòn đảo (hay con tàu, ...) trên biển, người xưa đã tìm ra một cách đo khoảng cách đó như sau:

Từ vị trí A, đo góc nghiêng α so với bờ biển tới một vị trí C quan sát được trên đảo. Sau đó đi chuyển dọc bờ biển đến vị trí B cách A một khoảng d và tiếp tục đo góc nghiêng β so với bờ biển tới vị trí C đã chọn (Hình 18). Bằng cách giải tam giác ABC, họ tính được khoảng cách AC.



Hình 18

Giải tam giác được hiểu như thế nào?



I. TÍNH CÁC CẠNH VÀ GÓC CỦA TAM GIÁC DỰA TRÊN MỘT SỐ ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Như ta đã biết, một tam giác hoàn toàn xác định nếu biết một trong những dữ kiện sau:

- Biết độ dài hai cạnh và độ lớn góc xen giữa hai cạnh đó;
- Biết độ dài ba cạnh;
- Biết độ dài một cạnh và độ lớn hai góc kề với cạnh đó.

Giải tam giác là tính các cạnh và các góc của tam giác dựa trên những dữ kiện cho trước.

1 Cho tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$, $\hat{A} = \alpha$. Viết công thức tính BC theo b, c, α .

Ví dụ 1 Cho tam giác ABC có $AB = 15$, $AC = 35$, $\hat{A} = 60^\circ$ (Hình 19). Tính cạnh BC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) và góc B (làm tròn kết quả đến độ).

Giải

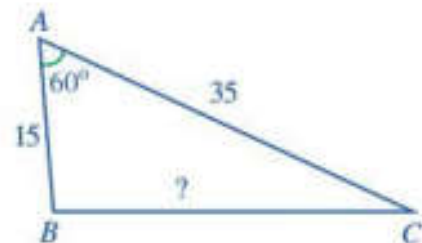
Áp dụng định lý côsin trong tam giác ABC, ta có:

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A \\ &= 15^2 + 35^2 - 2 \cdot 15 \cdot 35 \cdot \cos 60^\circ = 925. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } BC = \sqrt{925} \approx 30,4.$$

$$\text{Ta có: } \cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{15^2 + 925 - 35^2}{2 \cdot 15 \cdot \sqrt{925}}$$

$$\text{Do đó } \hat{B} \approx 95^\circ.$$



Hình 19

2 Cho tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Viết công thức tính $\cos A$ theo a, b, c .

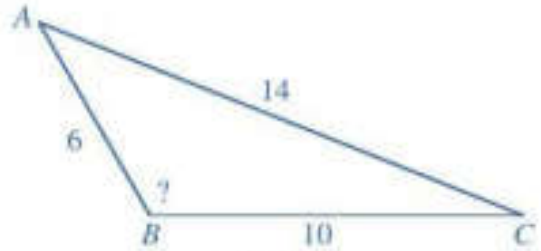
Ví dụ 2 Cho tam giác ABC có $AB = 6$, $BC = 10$, $CA = 14$ (Hình 20). Tính số đo góc B .

Giải

Áp dụng định lý côsin trong tam giác ABC , ta có:

$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} \\ &= \frac{6^2 + 10^2 - 14^2}{2 \cdot 6 \cdot 10} = -0,5.\end{aligned}$$

Do đó $\widehat{B} = 120^\circ$.



Hình 20

3 Viết công thức định lý sin cho tam giác ABC .

Ví dụ 3 Cho tam giác ABC có $BC = 100$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 40^\circ$ (Hình 21). Tính góc A và các cạnh AB , AC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) của tam giác đó.

Giải

Ta có:

$$\widehat{A} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ - (60^\circ + 40^\circ) = 80^\circ.$$

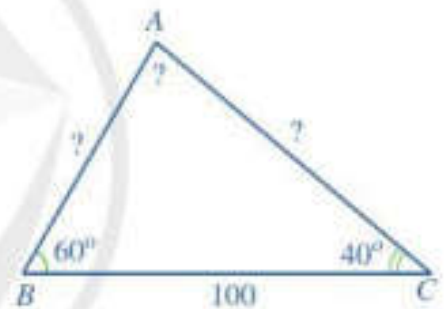
Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC , ta có:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B}.$$

Do đó

$$AB = \frac{BC \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{100 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 65,3;$$

$$AC = \frac{BC \cdot \sin B}{\sin A} = \frac{100 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 87,9.$$



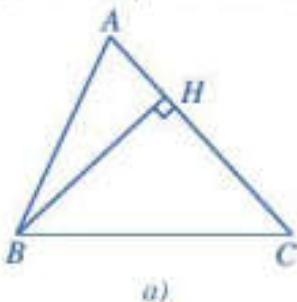
Hình 21

II. TÍNH DIỆN TÍCH TAM GIÁC

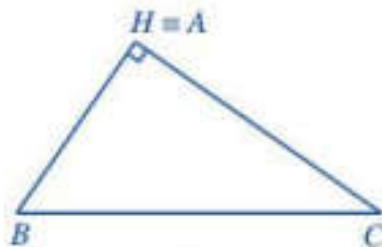
4 Cho tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Kẻ đường cao BH .

a) Tính BH theo c và $\sin A$.

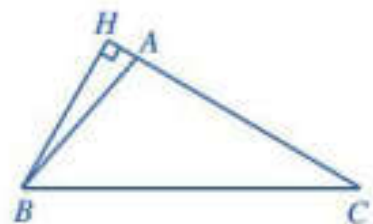
b) Tính diện tích S của tam giác ABC theo b, c và $\sin A$.



a)



b)



c)

Để tính độ dài BH và diện tích tam giác ABC , ta làm như sau:

a) Xét các trường hợp:

Với $\hat{A} < 90^\circ$ (Hình 22a). Xét tam giác vuông AHB , ta có: $BH = AB \cdot \sin A = c \sin A$.

Với $\hat{A} = 90^\circ$ (Hình 22b). Khi đó, $BH = BA = c = c \sin A$.

Với $\hat{A} > 90^\circ$ (Hình 22c). Xét tam giác vuông AHB , ta có: $\widehat{BAH} = 180^\circ - \hat{A}$.

Do đó $BH = AB \cdot \sin(180^\circ - \hat{A}) = AB \cdot \sin A = c \sin A$.

Như vậy, trong mọi trường hợp ta đều có $BH = c \sin A$.

b) Ta có:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} bc \sin A.$$

Bằng cách chứng minh tương tự, ta có công thức tính diện tích tam giác như sau:

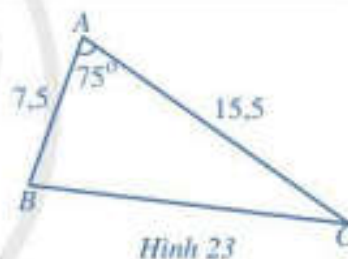
Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Khi đó, diện tích S của tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

Ví dụ 4 Cho tam giác ABC có $AB = 7,5$; $AC = 15,5$; $\hat{A} = 75^\circ$ (Hình 23). Tính diện tích S của tam giác ABC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A \\ &= \frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot 15,5 \cdot \sin 75^\circ \\ &\approx 56,1. \end{aligned}$$



1 Cho tam giác ABC có $AB = 12$; $\hat{B} = 60^\circ$; $\hat{C} = 45^\circ$. Tính diện tích của tam giác ABC .

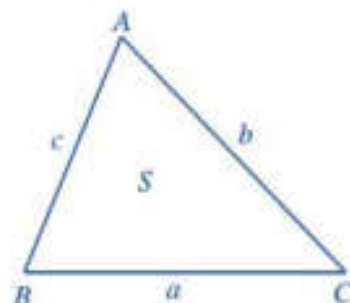
5 Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và diện tích là S (Hình 24).

a) Từ định lý côsin, chứng tỏ rằng:

$$\sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ ở đó } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

b) Bằng cách sử dụng công thức $S = \frac{1}{2} bc \sin A$, hãy chứng tỏ rằng:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$



Ta có công thức Heron để tính diện tích tam giác theo độ dài ba cạnh của nó như sau:



Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $p = \frac{a+b+c}{2}$. Khi đó, diện tích S của tam giác ABC là:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

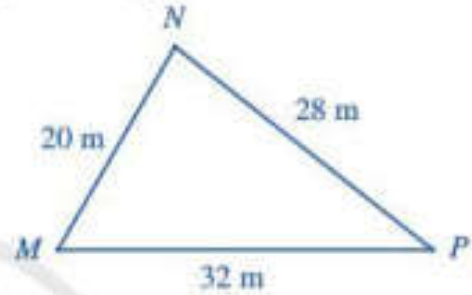
Ví dụ 5 Mảnh vườn hình tam giác của gia đình bạn Nam có chiều dài các cạnh là $MN = 20$ m, $NP = 28$ m, $MP = 32$ m (Hình 25). Hỏi diện tích mảnh vườn của gia đình bạn Nam là bao nhiêu mét vuông (làm tròn đến hàng phần mười)?

Giải

Ta có: $p = \frac{20+28+32}{2} = 40$ (m).

Diện tích mảnh vườn là:

$$S = \sqrt{40(40-20)(40-28)(40-32)} \\ \approx 277,1 \text{ (m}^2\text{)}.$$

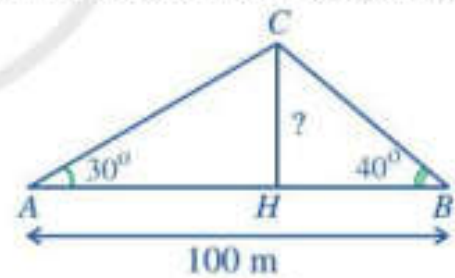


Hình 25

III. ỨNG DỤNG VÀO BÀI TOÁN THỰC TIỄN

Ví dụ 6 Đứng ở vị trí A trên bờ biển, bạn Minh đo được góc nghiêng so với bờ biển tới một vị trí C trên đảo là 30° . Sau đó di chuyển dọc bờ biển đến vị trí B cách A một khoảng 100 m và đo được góc nghiêng so với bờ biển tới vị trí C đã chọn là 40° .

Tính khoảng cách từ vị trí C trên đảo tới bờ biển theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 26

Giải

Xét tam giác ABC (Hình 26), ta có: $\widehat{C} = 180^\circ - (30^\circ + 40^\circ) = 110^\circ$.

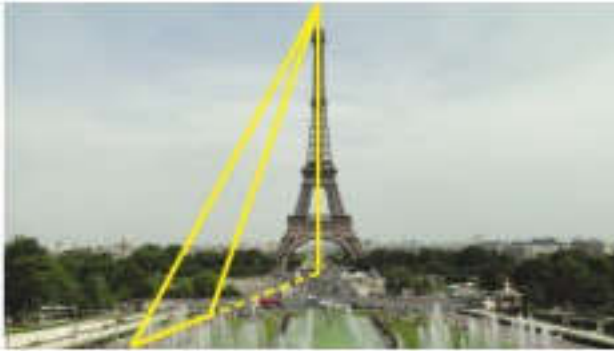
Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC , ta có: $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$.

$$\text{Do đó } AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{100 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 110^\circ} \approx 68,4 \text{ (m)}.$$

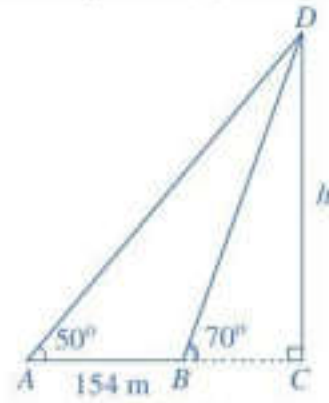
Xét tam giác vuông AHC , ta có: $CH = AC \cdot \sin 30^\circ \approx 68,4 \cdot 0,5 \approx 34,2$ (m).

Vậy khoảng cách từ vị trí C trên đảo tới bờ biển khoảng 34,2 m.

Ví dụ 7 Trong lần đến tham quan tháp Eiffel (ở Thủ đô Paris, Pháp), bạn Phương muốn ước tính độ cao của tháp. Sau khi quan sát, bạn Phương đã minh hoạ lại kết quả đo đạc ở Hình 27. Em hãy giúp bạn Phương tính độ cao h của tháp Eiffel (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



(Nguồn: <https://pixabay.com>)



Hình 27

Giải

Xét tam giác ABD , sử dụng tính chất góc ngoài, ta có:
 $\widehat{ADB} = 70^\circ - 50^\circ = 20^\circ$.

Áp dụng định lí sin cho tam giác ABD , ta có:

$$\frac{BD}{\sin \widehat{BAD}} = \frac{AB}{\sin \widehat{ADB}}$$

$$\text{Do đó } BD = \frac{154 \cdot \sin 50^\circ}{\sin 20^\circ} \approx 345 \text{ (m)}.$$

Xét tam giác vuông BCD , ta có:

$$CD = BD \cdot \sin \widehat{CBD} \approx 345 \cdot \sin 70^\circ \approx 324 \text{ (m)}.$$

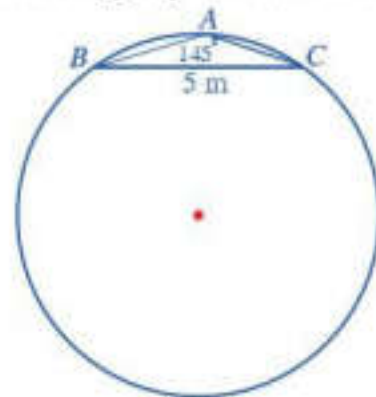
Vậy chiều cao h của tháp Eiffel khoảng 324 m.

2 Từ trên nóc của một toà nhà cao 18,5 m, bạn Nam quan sát một cái cây cách toà nhà 30 m và dùng giác kế đo được góc lệch giữa phương quan sát gốc cây và phương nằm ngang là 34° , góc lệch giữa phương quan sát ngọn cây và phương nằm ngang là 24° . Biết chiều cao của chân giác kế là 1,5 m. Chiều cao của cái cây là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Ví dụ 8 Để tính đường kính và diện tích của một giếng nước cổ có dạng hình tròn, người ta tiến hành đo đạc tại ba vị trí A, B, C trên thành giếng. Kết quả đo được là: $BC = 5$ m, $\widehat{BAC} = 145^\circ$ (Hình 28). Diện tích của giếng là bao nhiêu mét vuông (lấy $\pi \approx 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



(Nguồn: <https://thoibaonganhong.vn>)



Hình 28

Giải

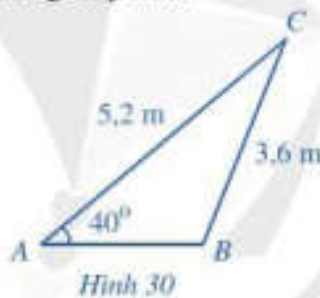
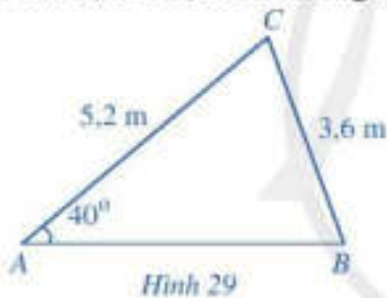
Áp dụng định lý sin cho tam giác ABC , ta có: $\frac{BC}{\sin A} = 2R$.

$$\text{Do đó } R = \frac{BC}{2 \cdot \sin A} = \frac{5}{2 \cdot \sin 145^\circ} \approx 4,36 \text{ (m)}.$$

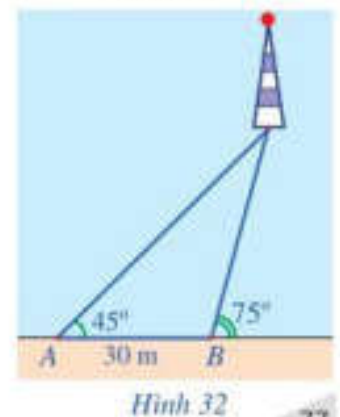
Vậy diện tích của giếng là: $S = \pi R^2 \approx 3,14 \cdot 4,36^2 \approx 59,69 \text{ (m}^2\text{)}.$

BÀI TẬP

- Cho tam giác ABC có $BC = 12$, $CA = 15$, $\widehat{C} = 120^\circ$. Tính:
 - Độ dài cạnh AB ;
 - Số đo các góc A , B ;
 - Diện tích tam giác ABC .
- Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $BC = 7$, $\widehat{A} = 120^\circ$. Tính độ dài cạnh AC .
- Cho tam giác ABC có $AB = 100$, $\widehat{B} = 100^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$. Tính:
 - Độ dài các cạnh AC , BC ;
 - Diện tích tam giác ABC .
- Cho tam giác ABC có $AB = 12$, $AC = 15$, $BC = 20$. Tính:
 - Số đo các góc A , B , C ;
 - Diện tích tam giác ABC .
- Tính độ dài cạnh AB trong mỗi trường hợp sau:



- Để tính khoảng cách giữa hai địa điểm A và B mà ta không thể đi trực tiếp từ A đến B (hai địa điểm nằm ở hai bên bờ một hồ nước, một đầm lầy, ...), người ta tiến hành như sau: Chọn một địa điểm C sao cho ta đo được các khoảng cách AC , CB và góc ACB . Sau khi đo, ta nhận được: $AC = 1 \text{ km}$, $CB = 800 \text{ m}$ và $\widehat{ACB} = 105^\circ$ (Hình 31). Tính khoảng cách AB (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị mét).
- Một người đi dọc bờ biển từ vị trí A đến vị trí B và quan sát một ngọn hải đăng. Góc nghiêng của phương quan sát từ các vị trí A , B tới ngọn hải đăng với đường đi của người quan sát là 45° và 75° . Biết khoảng cách giữa hai vị trí A , B là 30 m (Hình 32). Ngọn hải đăng cách bờ biển bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Dạng 1: Giải tam giác.

1. Phương pháp.

- Giải tam giác là tính các cạnh và các góc của tam giác dựa trên một số điều kiện cho trước.
- Trong các bài toán giải tam giác người ta thường cho tam giác với ba yếu tố như sau : biết một cạnh và hai góc kề cạnh đó; biết một góc và hai cạnh kề góc đó; biết ba cạnh.

Để tìm các yếu tố còn lại ta sử dụng định lý côsin và định lý sin ; định lý tổng ba góc trong một tam giác bằng 180° và trong một tam giác đối diện với góc lớn hơn thì có cạnh lớn hơn và ngược lại đối diện với cạnh lớn hơn thì có góc lớn hơn.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Giải tam giác ABC biết $b = 32$; $c = 45$ và $\hat{A} = 87^\circ$.

Lời giải

Theo định lý côsin ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = 32^2 + 45^2 - 2 \cdot 32 \cdot 45 \cdot \sin 87^\circ$$

Suy ra $a \approx 53,8$

Theo định lý sin ta có

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{32 \sin 87^\circ}{53,8} \Rightarrow \hat{B} \approx 36^\circ$$

$$\text{Suy ra } \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} \approx 180^\circ - 87^\circ - 36^\circ = 57^\circ$$

Ví dụ 2: Giải tam giác ABC biết $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 40^\circ$ và $c = 14$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$$

Theo định lý sin ta có

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{14 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \Rightarrow a \approx 12,3$$

$$b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{14 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \Rightarrow b \approx 9,1$$

Dạng 2: Xác định các yếu tố trong tam giác.

1. Phương pháp

- Sử dụng định lý côsin và định lý sin
- Sử dụng công thức xác định độ dài đường trung tuyến và mối liên hệ của các yếu tố trong các công thức tính diện tích trong tam giác.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 5$ và $\cos A = \frac{3}{5}$.

Tính cạnh BC , và độ dài đường cao kẻ từ A .

Lời giải

$$\text{Áp dụng định lý côsin ta có } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 29$$

$$\text{Suy ra } BC = \sqrt{29}$$

$$\text{Vì } \sin^2 A + \cos^2 A = 1 \text{ nên } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

Theo công thức tính diện tích ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}.4.5.\frac{4}{5} = 8$ (1)

Mặt khác $S_{ABC} = \frac{1}{2} a.h_a = \frac{1}{2}.\sqrt{29}.h_a$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{2}.\sqrt{29}.h_a = 8 \Rightarrow h_a = \frac{16\sqrt{29}}{29}$

Vậy độ dài đường cao kẻ từ A là $h_a = \frac{16\sqrt{29}}{29}$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính bằng 3, biết $\hat{A} = 30^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$. Tính độ dài trung tuyến kẻ từ A và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

Lời giải

Ta có $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$

Theo định lí sin ta có $a = 2R \sin A = 2.3.\sin 30^\circ = 3$, $b = 2R \sin B = 2.3.\sin 45^\circ = 6.\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

$c = 2R \sin C = 2.3.\sin 105^\circ \approx 5,796$

Theo công thức đường trung tuyến ta có $m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \approx \frac{2(18 + 5,796^2) - 9}{4} = 23,547$

Theo công thức tính diện tích tam giác ta có

$S_{ABC} = pr = \frac{1}{2} bc \sin A \Rightarrow r = \frac{bc \sin A}{2p} \approx \frac{3\sqrt{2}.5,796 \sin 30^\circ}{3 + 3\sqrt{2} + 5,796} \approx 0,943$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC biết $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Tính góc lớn nhất của tam giác.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $c < b < a$ suy ra $\hat{C} < \hat{B} < \hat{A}$ do đó góc A là lớn nhất.

Theo định lí cosin ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8 + (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 - 12}{2.2\sqrt{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{4 - 4\sqrt{3}}{8\sqrt{3} - 8} = -\frac{1}{2}$$

Suy ra $\hat{A} = 120^\circ$

Vậy góc lớn nhất là góc A có số đo là 120° .

Dạng 3: Chứng Minh Đẳng Thức, Bất Đẳng Thức Liên Quan Đến Các Yếu Tố Của Tam Giác, Tứ Giác.

1. Phương pháp giải.

- Để chứng minh đẳng thức ta sử dụng các hệ thức cơ bản để biến đổi về này thành về kia, hai về cùng bằng một về hoặc biến đổi tương đương về một đẳng thức đúng.
- Để chứng minh bất đẳng thức ta sử dụng các hệ thức cơ bản, bất đẳng thức cạnh trong tam giác và bất đẳng thức cô điển (Cauchy, bunhiacôpxki,...)

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin^2 A = \sin B.\sin C$. Chứng minh rằng

a) $a^2 = bc$

b) $\cos A \geq \frac{1}{2}$

Lời giải

a) Áp dụng định lý sin ta có $\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$

Suy ra $\sin^2 A = \sin B \cdot \sin C \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} \Leftrightarrow a^2 = bc$ đpcm

b) Áp dụng định lý cosin và câu a) ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - bc}{2bc} \geq \frac{2bc - bc}{2bc} = \frac{1}{2} \text{ đpcm}$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC , chứng minh rằng: $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$

Lời giải:

Áp dụng định lý cosin và công thức $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ ta có:

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc \sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} \text{ đpcm}$$

Dạng 4: Nhận Dạng Tam Giác

1. Phương pháp giải.

Sử dụng định lý cosin; sin; công thức đường trung tuyến; công thức tính diện tích tam giác để biến đổi giả thiết về hệ thức liên hệ cạnh(hoặc góc) từ đó suy ra dạng của tam giác.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin C = 2 \sin B \cos A$. Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

Lời giải

Áp dụng định lý cosin và sin ta có:

$$\sin C = 2 \sin B \cos A \Leftrightarrow \frac{c}{2R} = 2 \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$c^2 = b^2 + c^2 - a^2 \Leftrightarrow a = b$$

Suy ra tam giác ABC cân tại đỉnh C.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} \Leftrightarrow \sin A(\cos B + \cos C) = \sin B + \sin C$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2R} \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) = \frac{b + c}{2R}$$

$$\Leftrightarrow b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) = 2b^2c + 2c^2b$$

$$\Leftrightarrow b^3 + c^3 + b^2c + bc^2 - a^2b - a^2c = 0 \Leftrightarrow (b + c)(b^2 + c^2) - a^2(b + c) = 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại A.}$$

Ví dụ 3: Nhận dạng tam giác ABC trong các trường hợp sau:

a) $a \cdot \sin A + b \sin B + c \sin C = h_a + h_b + h_c$

$$b) \frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cot^2 A + \cot^2 B)$$

Lời giải

a) Áp dụng công thức diện tích ta có $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ah_a$ suy ra

$$a \cdot \sin A + b \sin B + c \sin C = h_a + h_b + h_c \Leftrightarrow a \cdot \frac{2S}{bc} + b \cdot \frac{2S}{ca} + c \cdot \frac{2S}{ab} = \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b = c$$

Vậy tam giác ABC đều

b) Ta có: $\frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cot^2 A + \cot^2 B)$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 A + \cos^2 B + \sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cot^2 A + 1 + \cot^2 B + 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B}\right) \Leftrightarrow (\sin^2 A + \sin^2 B)^2 = 4\sin^2 A \sin^2 B$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A = \sin^2 B \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ cân tại } C.$$

Dạng 5: Sử dụng các công thức liên quan đến diện tích tam giác

1. Phương pháp.

Công thức diện tích tam giác

Với tam giác ABC ta kí hiệu h_a, h_b, h_c là độ dài đường cao lần lượt tương ứng với các cạnh BC, CA, AB ;

R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ; $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác ;

S là diện tích tam giác. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c \\ &= \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C \\ &= \frac{abc}{4R} \\ &= pr \\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{aligned}$$

2. Các ví dụ.

Câu 6. Cho tam giác ABC , biết

a) $a = 7, b = 8, c = 6$. Tính S và h_a .

b) $b = 7, c = 5, \cos A = \frac{3}{5}$. Tính S và R, r

Lời giải.

a) Áp dụng công thức Hê-rông với $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{21}{2}$

$$\text{Ta có } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{21}{2}\left(\frac{21}{2}-7\right)\left(\frac{21}{2}-8\right)\left(\frac{21}{2}-6\right)} = \frac{21\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{Vì } S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow \frac{21\sqrt{15}}{4} = \frac{1}{2}7.h_a \Rightarrow h_a = \frac{3\sqrt{15}}{2}$$

$$\text{b) Ta có } \sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin A = \frac{4}{5} \text{ (vì } \sin A > 0 \text{)}.$$

$$\text{Mà } S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 14$$

$$\text{Theo Định lí Cô-sin ta có } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 32 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$$

$$\text{Từ } S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{28}{4\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Theo định lí sin: } \frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{4\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{4}{5}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Ta có } S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{14}{5+7+4\sqrt{2}} = \frac{14}{12+4\sqrt{2}} = \frac{7}{6+2\sqrt{2}}$$

Câu 7. Cho tam giác ABC , biết $a=3, b=4, c=6$. Tính góc lớn nhất và đường cao tương ứng với cạnh lớn nhất

Lời giải.

Ta có $c=6$ là cạnh lớn nhất của tam giác, do đó là góc lớn nhất.

$$\text{Áp dụng định lí cô-sin, ta có } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{3^2 + 4^2 - 6^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = -\frac{11}{24} \Rightarrow \hat{C} \approx 117^\circ 17'$$

Ta có h_c là đường cao ứng với cạnh lớn nhất. Theo công thức Hê-rông

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ với } p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13}{2}$$

$$\text{Nên } S = \sqrt{\frac{13}{2}\left(\frac{13}{2}-3\right)\left(\frac{13}{2}-4\right)\left(\frac{13}{2}-6\right)} = \frac{\sqrt{455}}{4}$$

$$\text{Ta có: } h_c = \frac{2S}{c} = \frac{\sqrt{455}}{2 \cdot 6} = \frac{\sqrt{455}}{12}$$

Câu 8. Tính các góc A, B và h_a, R của tam giác ABC biết $a=\sqrt{6}, b=2, c=\sqrt{3}+1$

Lời giải.

Theo định lí cô-sin, ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - 6^2}{2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3}+1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ,$$

$$\cos B = \frac{(\sqrt{3}+1)^2 + 6 - 4}{2 \cdot (\sqrt{3}+1) \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{B} = 45^\circ$$

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{ac \sin B}{a} = c \sin B = (\sqrt{3} + 1) \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Áp dụng định lí sin ta có } \frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow R = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Câu 9. Cho tam giác ABC , biết $a = 21, b = 17, c = 10$

- a) Tính diện tích S của tam giác ABC và chiều cao h_a .
b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp r và trung tuyến m_a .

Lời giải.

$$\text{a) Ta có } p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{21+17+10}{2} = 24$$

Theo công thức Hê-rông, ta có

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)} = 84$$

$$\text{Do đó: } h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 84}{21} = 8.$$

$$\text{b) Ta có } S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{84}{24} = 3,5.$$

$$\text{Độ dài trung tuyến } m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{17^2 + 10^2}{2} - \frac{21^2}{4} = \frac{337}{4} = 84,25$$

Câu 10. Cho tam giác ABC , có $\hat{A} = 60^\circ, b = 20, c = 25$.

- a) Tính diện tích S và chiều cao h_a .
b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp R và bán kính đường tròn nội tiếp r

Lời giải.

$$\text{a) Ta có } S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 125\sqrt{3}$$

$$\text{Hơn nữa } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 20^2 + 25^2 - 2 \cdot 20 \cdot 25 \cdot \frac{1}{2} = 925$$

$$\text{Vậy } a = \sqrt{925} \approx 30,41$$

$$\text{Từ công thức } S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{250\sqrt{3}}{\sqrt{925}} \approx 19,94$$

$$\text{b) Từ công thức } \frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{\sqrt{925}}{\sqrt{3}} \approx 17,56$$

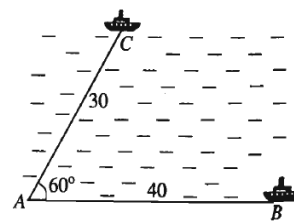
$$\text{Từ công thức } S = pr \text{ với } p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\text{ta có } r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{bc \sin A}{a+b+c} = \frac{20 \cdot 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{925} + 20 + 25} \approx 7,10$$

Dạng 6: Bài toán thực tế

Câu 21: Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60° . Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lý một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lý một giờ. Sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lý? Kết quả gần nhất với số nào sau đây?

- A. 61 hải lý. B. 36 hải lý.
C. 21 hải lý. D. 18 hải lý.

**Lời giải****Chọn B**

Sau 2 giờ tàu B đi được 40 hải lý, tàu C đi được 30 hải lý. Vậy tam giác ABC có $AB = 40$, $AC = 30$ và $\widehat{A} = 60^\circ$.

Áp dụng định lý côsin vào tam giác ABC , ta có

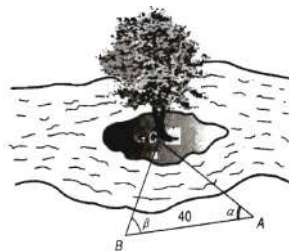
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 30^2 + 40^2 - 2 \cdot 30 \cdot 40 \cdot \cos 60^\circ = 900 + 1600 - 1200 = 1300.$$

Vậy $BC = \sqrt{1300} \approx 36$ (hải lý).

Sau 2 giờ, hai tàu cách nhau khoảng 36 hải lý.

Câu 22: Để đo khoảng cách từ một điểm A trên bờ sông đến gốc cây C trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm B cùng ở trên bờ với A sao cho từ A và B có thể nhìn thấy điểm C . Ta đo được khoảng cách $AB = 40\text{ m}$, $\widehat{CAB} = 45^\circ$ và $\widehat{CBA} = 70^\circ$. Vậy sau khi đo đạc và tính toán được khoảng cách AC gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. 53 m .
B. 30 m .
C. 41,5 m .
D. 41 m .

**Lời giải****Chọn C**

Áp dụng định lý sin vào tam giác ABC , ta có $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$

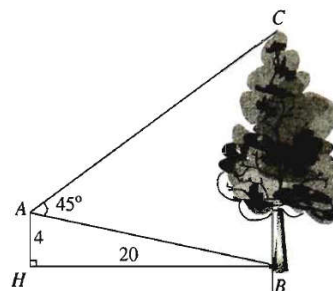
$$\text{Vì } \sin C = \sin(\alpha + \beta) \text{ nên } AC = \frac{AB \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{40 \cdot \sin 70^\circ}{\sin 115^\circ} \approx 41,47 \text{ m.}$$

Câu 23: Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao (hình vẽ).

Biết $AH = 4\text{ m}$, $HB = 20\text{ m}$, $\widehat{BAC} = 45^\circ$.

Chiều cao của cây gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. 17,5m . B. 17m .
C. 16,5m . D. 16m .

**Lời giải****Chọn B**

Trong tam giác AHB , ta có $\tan \widehat{ABH} = \frac{AH}{BH} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \longrightarrow \widehat{ABH} \approx 11^\circ 19'$.

Suy ra $\widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{ABH} = 78^\circ 41'$.

Suy ra $\widehat{ACB} = 180^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{ABC}) = 56^\circ 19'$.

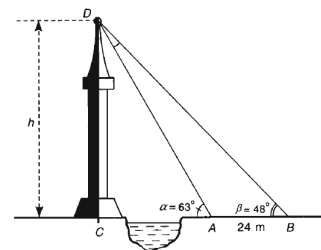
Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC , ta được

$$\frac{AB}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{CB}{\sin \widehat{BAC}} \longrightarrow CB = \frac{AB \cdot \sin \widehat{BAC}}{\sin \widehat{ACB}} \approx 17 \text{ m.}$$

Câu 24: Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B và C thẳng hàng. Ta đo được $AB = 24 \text{ m}$, $\widehat{CAD} = 63^\circ$, $\widehat{CBD} = 48^\circ$.

Chiều cao h của tháp gần với giá trị nào sau đây?

- A. 18m . B. 18,5m .
C. 60m . D. 60,5m .



Lời giải

Chọn D

Áp dụng định lý sin vào tam giác ABD , ta có $\frac{AD}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin D}$.

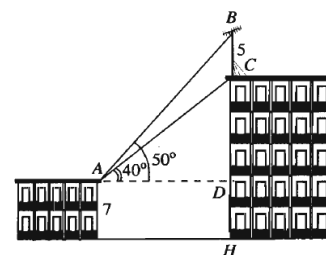
Ta có $\alpha = \widehat{D} + \beta$ nên $\widehat{D} = \alpha - \beta = 63^\circ - 48^\circ = 15^\circ$.

$$\text{Do đó } AD = \frac{AB \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{24 \cdot \sin 48^\circ}{\sin 15^\circ} \approx 68,91 \text{ m.}$$

Trong tam giác vuông ACD , có $h = CD = AD \cdot \sin \alpha \approx 61,4 \text{ m}$.

Câu 25: Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao 5 m. Từ vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc 50° và 40° so với phương nằm ngang. Chiều cao của tòa nhà gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. 12m . B. 19m .
C. 24m . D. 29m .



Lời giải

Chọn B

Từ hình vẽ, suy ra $\widehat{BAC} = 10^\circ$ và $\widehat{ABD} = 180^\circ - (\widehat{BAD} + \widehat{ADB}) = 180^\circ - (50^\circ + 90^\circ) = 40^\circ$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC , ta có

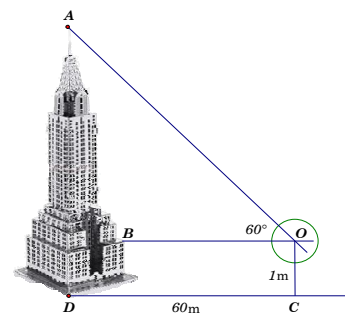
$$\frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{AC}{\sin \widehat{ABC}} \longrightarrow AC = \frac{BC \cdot \sin \widehat{ABC}}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{5 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 10^\circ} \approx 18,5 \text{ m.}$$

Trong tam giác vuông ADC , ta có $\sin \widehat{CAD} = \frac{CD}{AC} \longrightarrow CD = AC \cdot \sin \widehat{CAD} = 11,9 \text{ m}$.

Vậy $CH = CD + DH = 11,9 + 7 = 18,9 \text{ m}$.

Câu 26: Xác định chiều cao của một tháp mà không cần lên đỉnh của tháp. Đặt kế giác thẳng đứng cách chân tháp một khoảng $CD = 60\text{m}$, giả sử chiều cao của giác kế là $OC = 1\text{m}$. Quay thanh giác kế sao cho khi ngắm theo thanh ta nhìn thấy đỉnh A của tháp. Đọc trên giác kế số đo của góc $\widehat{AOB} = 60^\circ$. Chiều cao của ngọn tháp gần với giá trị nào sau đây:

- A. 40m . B. 114m .
C. 105m . D. 110m .



Lời giải

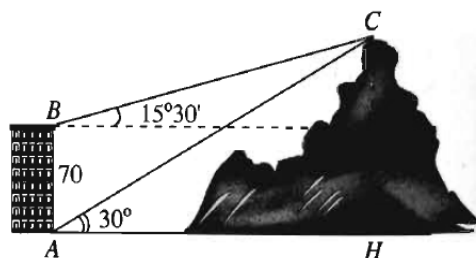
Chọn C

Tam giác OAB vuông tại B , có $\tan \widehat{AOB} = \frac{AB}{OB} \Rightarrow AB = \tan 60^\circ \cdot OB = 60\sqrt{3}\text{m}$.

Vậy chiều cao của ngọn tháp là $h = AB + OC = (60\sqrt{3} + 1)\text{m}$.

Câu 27: Từ hai vị trí A và B của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao $AB = 70\text{m}$, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang góc 30° , phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang góc $15^\circ 30'$. Ngọn núi đó có độ cao so với mặt đất gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. 135m . B. 234m .
C. 165m . D. 195m .



Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết, ta suy ra tam giác ABC có $\widehat{CAB} = 60^\circ$, $\widehat{ABC} = 105^\circ 30'$ và $c = 70$.

Khi đó $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 180^\circ - 165^\circ 30' = 14^\circ 30'$.

Theo định lí sin, ta có $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ hay $\frac{b}{\sin 105^\circ 30'} = \frac{70}{\sin 14^\circ 30'}$

Do đó $AC = b = \frac{70 \cdot \sin 105^\circ 30'}{\sin 14^\circ 30'} \approx 269,4\text{ m}$.

Gọi CH là khoảng cách từ C đến mặt đất. Tam giác vuông ACH có cạnh CH đối diện với góc 30° nên

$CH = \frac{AC}{2} = \frac{269,4}{2} = 134,7\text{ m}$. Vậy ngọn núi cao khoảng 135 m .

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 28: Tam giác ABC có $BC = 21\text{cm}$, $CA = 17\text{cm}$, $AB = 10\text{cm}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $R = \frac{85}{2}\text{cm}$. B. $R = \frac{7}{4}\text{cm}$.
C. $R = \frac{85}{8}\text{cm}$. D. $R = \frac{7}{2}\text{cm}$.

Lời giải

Chọn C

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. “Tránh mua các trang và các cá nhân khác”

Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT: 0834 332 133

Đặt $p = \frac{AB+BC+CA}{2} = 24$. Áp dụng công thức Hê – rông, ta có

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-CA)} = \sqrt{24.(24-21).(24-17).(24-10)} = 84 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Vậy bán kính cần tìm là } S_{\Delta ABC} = \frac{AB.BC.CA}{4R} \Rightarrow R = \frac{AB.BC.CA}{4.S_{\Delta ABC}} = \frac{21.17.10}{4.84} = \frac{85}{8} \text{ cm}.$$

Câu 29: Tam giác đều cạnh a nội tiếp trong đường tròn bán kính R . Khi đó bán kính R bằng:

A. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $R = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

D. $R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Xét tam giác ABC đều cạnh a , gọi M là trung điểm của BC .

$$\text{Ta có } AM \perp BC \text{ suy ra } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AM.BC = \frac{1}{2}.\sqrt{AB^2 - BM^2}.BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Vậy bán kính cần tính là } S_{\Delta ABC} = \frac{AB.BC.CA}{4R} \Rightarrow R = \frac{AB.BC.CA}{4.S_{\Delta ABC}} = \frac{a^3}{4.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 30: Cho tam giác ABC có $AB=3\sqrt{3}$, $BC=6\sqrt{3}$ và $CA=9$. Gọi D là trung điểm BC . Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD .

A. $R = \frac{9}{6}$.

B. $R = 3$.

C. $R = 3\sqrt{3}$.

D. $R = \frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Vì } D \text{ là trung điểm của } BC \Rightarrow AD^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = 27 \Rightarrow AD = 3\sqrt{3}.$$

Tam giác ABD có $AB=BD=DA=3\sqrt{3} \Rightarrow$ tam giác ABD đều.

$$\text{Nên có bán kính đường tròn ngoại tiếp là } R = \frac{\sqrt{3}}{3}AB = \frac{\sqrt{3}}{3}.3\sqrt{3} = 3.$$

Câu 31: Tam giác ABC có $AB=3$, $AC=6$, $\widehat{BAC}=60^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC .

A. $S_{\Delta ABC} = 9\sqrt{3}$.

B. $S_{\Delta ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

C. $S_{\Delta ABC} = 9$.

D. $S_{\Delta ABC} = \frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin \widehat{A} = \frac{1}{2}.3.6.\sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 32: Tam giác ABC có $AC=4$, $\widehat{BAC}=30^\circ$, $\widehat{ACB}=75^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC .

A. $S_{\Delta ABC} = 8$.

B. $S_{\Delta ABC} = 4\sqrt{3}$.

C. $S_{\Delta ABC} = 4$.

D. $S_{\Delta ABC} = 8\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\widehat{ABC} = 180^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{ACB}) = 75^\circ = \widehat{ACB}$.

Suy ra tam giác ABC cân tại A nên $AB = AC = 4$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \widehat{BAC} = 4$.

Câu 33: Tam giác ABC có $a = 21$, $b = 17$, $c = 10$. Diện tích của tam giác ABC bằng:

A. $S_{\triangle ABC} = 16$.

B. $S_{\triangle ABC} = 48$.

C. $S_{\triangle ABC} = 24$.

D. $S_{\triangle ABC} = 84$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $p = \frac{21+17+10}{2} = 24$.

Do đó $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)} = 84$.

Câu 34: Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 6$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính độ dài đường cao h_a của tam giác.

A. $h_a = 3\sqrt{3}$.

B. $h_a = \sqrt{3}$.

C. $h_a = 3$.

D. $h_a = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng định lý hàm số cosin, ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A = 27 \longrightarrow BC = 3\sqrt{3}.$$

Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Lại có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h_a \longrightarrow h_a = \frac{2S}{BC} = 3$.

Câu 35: Tam giác ABC có $a = 21$, $b = 17$, $c = 10$. Gọi B' là hình chiếu vuông góc của B trên cạnh AC . Tính BB' .

A. $BB' = 8$.

B. $BB' = \frac{84}{5}$.

C. $BB' = \frac{168}{17}$.

D. $BB' = \frac{84}{17}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $p = \frac{21+17+10}{2} = 24$.

Suy ra $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)} = 84$.

Lại có $S = \frac{1}{2} b \cdot BB' \longleftrightarrow 84 = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot BB' \longrightarrow BB' = \frac{168}{17}$.

Câu 36: Tam giác ABC có $AB = 8$ cm, $AC = 18$ cm và có diện tích bằng 64 cm^2 . Giá trị $\sin A$ ằng:

A. $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\sin A = \frac{3}{8}$.

C. $\sin A = \frac{4}{5}$.

D. $\sin A = \frac{8}{9}$.

Lời giải

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"

Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng

Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT: 0834 332 133

Chọn D

$$\text{Ta có } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} \Leftrightarrow 64 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 18 \cdot \sin A \Leftrightarrow \sin A = \frac{8}{9}.$$

Câu 37: Hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$ và $\widehat{BAD} = 45^\circ$. Khi đó hình bình hành có diện tích bằng:

A. $2a^2$.

B. $a^2\sqrt{2}$.

C. a^2 .

D. $a^2\sqrt{3}$.

Lời giải**Chọn C**

$$\text{Diện tích tam giác } ABD \text{ là } S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Vậy diện tích hình bình hành } ABCD \text{ là } S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\triangle ABD} = 2 \cdot \frac{a^2}{2} = a^2.$$

Câu 38: Tam giác đều nội tiếp đường tròn bán kính $R = 4$ cm có diện tích bằng:

A. 13 cm^2

B. $13\sqrt{2} \text{ cm}^2$

C. $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$

D. 15 cm^2 .

Lời giải**Chọn C**

Xét tam giác ABC đều, có độ dài cạnh bằng a .

$$\text{Theo định lí sin, ta có } \frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = 2R \Leftrightarrow \frac{a}{\sin 60^\circ} = 2 \cdot 4 \Leftrightarrow a = 8 \cdot \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy diện tích cần tính là } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot (4\sqrt{3})^2 \cdot \sin 60^\circ = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Câu 39: Tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và có diện tích S . Nếu tăng cạnh BC lên 2 lần đồng thời tăng cạnh AC lên 3 lần và giữ nguyên độ lớn của góc C thì khi đó diện tích của tam giác mới được tạo nên bằng:

A. $2S$.

B. $3S$.

C. $4S$.

D. $6S$.

Lời giải**Chọn D**

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ ban đầu là } S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin \widehat{ACB}.$$

Khi tăng cạnh BC lên 2 lần và cạnh AC lên 3 lần thì diện tích tam giác ABC lúc này là

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot (3AC) \cdot (2BC) \cdot \sin \widehat{ACB} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin \widehat{ACB} = 6S.$$

Câu 40: Tam giác ABC có $BC = a$ và $CA = b$. Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi góc C bằng:

A. 60° .

B. 90° .

C. 150° .

D. 120° .

Lời giải**Chọn B**

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin \widehat{ACB}.$$

Vì a, b không đổi và $\sin \widehat{ACB} \leq 1, \forall C$ nên suy ra $S_{\triangle ABC} \leq \frac{ab}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\sin \widehat{ACB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{ACB} = 90^\circ$.

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích tam giác ABC là $S = \frac{ab}{2}$.

Câu 41: Tam giác ABC có hai đường trung tuyến BM, CN vuông góc với nhau và có $BC = 3$, góc $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC .

- A. $S_{\triangle ABC} = 3\sqrt{3}$. B. $S_{\triangle ABC} = 6\sqrt{3}$. C. $S_{\triangle ABC} = 9\sqrt{3}$. D. $S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $BM \perp CN \longrightarrow 5a^2 = b^2 + c^2$. (Áp dụng hệ quả đã có trước)

Trong tam giác ABC , ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = 5a^2 - 2bc \cos A \longrightarrow bc = \frac{2a^2}{\cos A}$.

Khi đó $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a^2}{\cos A} \cdot \sin A = a^2 \tan A = 3\sqrt{3}$.

Câu 42: Tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 8$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

- A. $r = 1$. B. $r = 2$. C. $r = \sqrt{3}$. D. $r = 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng định lý hàm số cosin, ta có

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A = 49 \longrightarrow BC = 7$.

Diện tích $S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$.

Lại có $S = p \cdot r \longrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{2S}{AB + BC + CA} = \sqrt{3}$.

Câu 43: Tam giác ABC có $a = 21$, $b = 17$, $c = 10$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

- A. $r = 16$. B. $r = 7$. C. $r = \frac{7}{2}$. D. $r = 8$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $p = \frac{21+17+10}{2} = 24$.

Suy ra $S = \sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)} = 84$.

Lại có $S = p \cdot r \longrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{84}{24} = \frac{7}{2}$.

Câu 44: Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh a .

- A. $r = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $r = \frac{a\sqrt{2}}{5}$. C. $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. D. $r = \frac{a\sqrt{5}}{7}$.

Lời giải

Chọn C

Diện tích tam giác đều cạnh a bằng: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$$\text{Lại có } S = pr \longrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{3a}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 45: Tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r = 1$ cm.

B. $r = \sqrt{2}$ cm.

C. $r = 2$ cm.

D. $r = 3$ cm.

Lời giải

Chọn C

Dùng Pitago tính được $AC = 8$, suy ra $p = \frac{AB + BC + CA}{2} = 12$.

Diện tích tam giác vuông $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = 24$. Lại có $S = p \cdot r \longrightarrow r = \frac{S}{p} = 2$ cm.

Câu 46: Tam giác ABC vuông cân tại A , có $AB = a$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r = \frac{a}{2}$.

B. $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

C. $r = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}$.

D. $r = \frac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết, ta có $AC = AB = a$ và $BC = a\sqrt{2}$.

Suy ra $p = \frac{AB + BC + CA}{2} = a \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right)$.

Diện tích tam giác vuông $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a^2}{2}$.

Lại có $S = p \cdot r \longrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}$.

Câu 47: Tam giác ABC vuông cân tại A và nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R . Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Khi đó tỉ số $\frac{R}{r}$ bằng:

A. $1 + \sqrt{2}$.

B. $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$.

D. $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $AC = AB = a \longrightarrow BC = a\sqrt{2}$. Suy ra $R = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $p = \frac{AB + BC + CA}{2} = a \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right)$.

Diện tích tam giác vuông $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a^2}{2}$.

Lại có $S = p \cdot r \longrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}$. Vậy $\frac{R}{r} = 1 + \sqrt{2}$.

§4 TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

Quan sát hình ảnh hai người cùng kéo một chiếc thuyền theo hai hướng khác nhau (Hình 48). Tuy nhiên, chiếc thuyền lại không di chuyển theo cùng hướng với một trong hai người đó mà di chuyển theo một hướng khác.



Hình 48

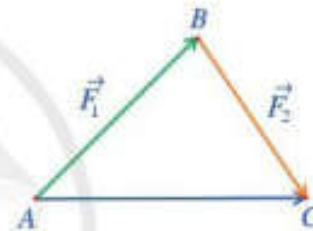
Tại sao chiếc thuyền lại di chuyển như vậy?



I. TỔNG CỦA HAI VECTƠ

1. Định nghĩa

1 Một vật dịch chuyển từ A đến B sau khi chịu tác động của lực $\vec{F}_1$. Vật tiếp tục dịch chuyển từ B đến C sau khi chịu tác động của lực $\vec{F}_2$ (Hình 49). Sau khi chịu tác động của hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$, vật đó dịch chuyển từ vị trí A đến vị trí nào?



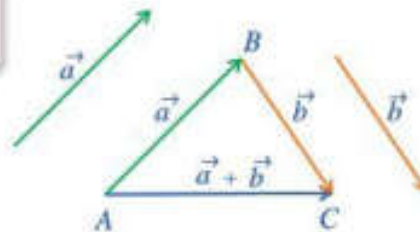
Hình 49

Ta có định nghĩa sau:

Với ba điểm bất kì A, B, C , vectơ $\vec{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{BC}$, kí hiệu là $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$.

2 Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý.

- Vẽ $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{BC} = \vec{b}$ (Hình 50).
- Tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng vectơ nào?



Hình 50

Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{BC} = \vec{b}$. Vectơ $\vec{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

Phép lấy tổng của hai vectơ còn được gọi là *phép cộng vectơ*.

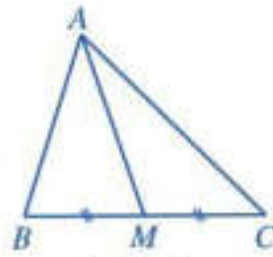
Ví dụ 1 Cho tam giác ABC có trung tuyến AM (Hình 51).

Chứng minh $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AM}$.

Giải

Vì $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BM}$ nên

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}.$$



Hình 51

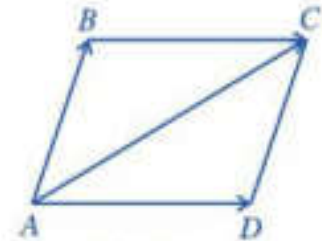
1 Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chứng minh $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AN}$.

2. Quy tắc hình bình hành

3 Cho $ABCD$ là hình bình hành (Hình 52). So sánh:

a) Hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$.

b) Vectơ tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ và vectơ $\overrightarrow{AC}$.



Hình 52

Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Ví dụ 2 Cho hình chữ nhật $ABCD$.

Chứng minh $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$.

Giải

Theo quy tắc hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$.

Suy ra $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC$, $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BD}| = BD$.

Do $AC = BD$ nên $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$.

2 Hãy giải thích hướng đi của thuyền ở Hình 48.

3. Tính chất

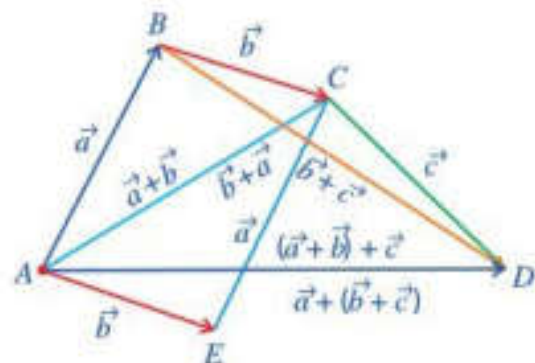
Với ba vectơ tùy ý $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ta có:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (tính chất kết hợp);
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ (tính chất của vectơ-không).

(Hình 53)

Chú ý: Tổng ba vectơ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ được xác định theo một trong hai cách:

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ hoặc $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.



Hình 53. Minh họa tính chất phép cộng các vectơ

Ví dụ 3 Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.$$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}. \end{aligned}$$

3 Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm E bất kì. Chứng minh
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}.$

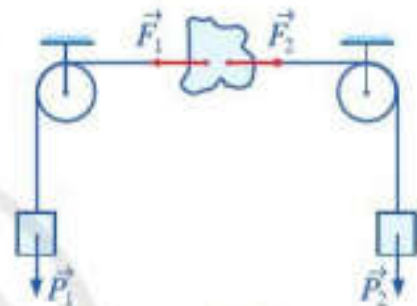
II. HIỆU CỦA HAI VECTƠ

1. Hai vectơ đối nhau

4 Trong Hình 54, hai ròng rọc có trục quay nằm ngang và song song với nhau, hai vật có trọng lượng bằng nhau. Mỗi dây có một đầu buộc vào vật, một đầu buộc vào một mảnh nhựa cứng. Hai vật lần lượt tác động lên mảnh nhựa các lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$. Nhận xét về hướng và độ dài của mỗi cặp vectơ sau:

- $\overrightarrow{P_1}$ và $\overrightarrow{P_2}$ biểu diễn trọng lực của hai vật;
- $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$.

(Bỏ qua trọng lượng của các dây và các lực ma sát)



Hình 54

Vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ được gọi là *vectơ đối* của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$. Hai vectơ $\vec{a}$ và $-\vec{a}$ được gọi là hai vectơ đối nhau.

Quy ước: Vectơ đối của vectơ $\vec{0}$ là vectơ $\vec{0}$.

Nhận xét: • $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$.

- Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ đối nhau khi và chỉ khi $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.
- Với hai điểm A, B , ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.
- Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

Cho hai điểm A, B . Khi đó, hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$ là hai vectơ đối nhau, tức là $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Ví dụ 4 Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Chứng tỏ $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$ là hai vectơ đối nhau. Viết đẳng thức liên hệ giữa hai vectơ đó.

Giải

Hai vectơ $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}$ là hai vectơ đối nhau vì chúng ngược hướng và cùng độ dài, $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Chú ý: I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Ví dụ 5 Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi M là trung điểm của BC và D là điểm đối xứng với G qua M (Hình 55). Chứng minh:

- a) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$; b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Giải

a) Vì tứ giác $BGCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên tứ giác $BGCD$ là hình bình hành. Suy ra $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$.

b) Vì hai điểm A, D cùng thuộc đường thẳng GM nên các điểm A, G, M, D thẳng hàng.

Ta có: $GA = GD$. Suy ra G là trung điểm của AD .

Vì thế $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Vậy $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Chú ý: G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

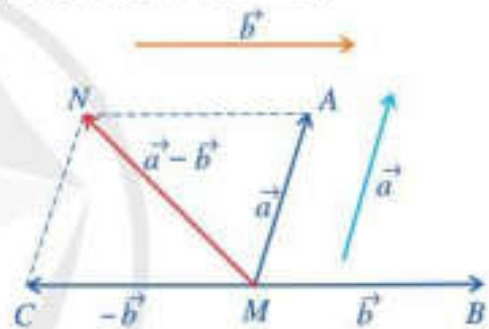
2. Hiệu của hai vector

5 Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$. Lấy một điểm M tùy ý.

a) Vẽ $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{MC} = -\vec{b}$ (Hình 56).

b) Tổng của hai vector $\vec{a}$ và $(-\vec{b})$ bằng vector nào?

Hiệu của vector $\vec{a}$ và vector $\vec{b}$ là tổng của vector $\vec{a}$ và vector đối của vector $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$.



Hình 56

Phép lấy hiệu của hai vector còn được gọi là **phép trừ vector**.

Ví dụ 6 Cho ba điểm A, B, O (Hình 57). Vector $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ là vector nào?

Giải

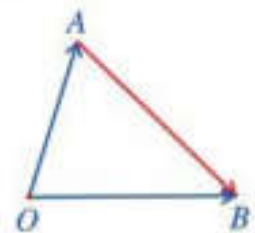
Ta có: $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + (-\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$.

Nhận xét: Với ba điểm bất kì A, B, O ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Ví dụ 7 Cho bốn điểm bất kì A, B, C, D . Chứng minh $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = \vec{0}$.

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB})$
 $= \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DD} = \vec{0}$.



Hình 57

4 Cho tam giác ABC có M là trung điểm AC , N là trung điểm BC và $AB = a$. Tính độ dài vector $\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{NB}$.

BÀI TẬP

- Cho ba điểm M, N, P . Vectơ $\vec{u} = \vec{NP} + \vec{MN}$ bằng vectơ nào sau đây?
A. $\vec{PN}$; B. $\vec{PM}$; C. $\vec{MP}$; D. $\vec{NM}$.
- Cho ba điểm D, E, G . Vectơ $\vec{v} = \vec{DE} + (-\vec{DG})$ bằng vectơ nào sau đây?
A. $\vec{EG}$; B. $\vec{GE}$; C. $\vec{GD}$; D. $\vec{ED}$.
- Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh:
a) $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$;
b) $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{BC} + \vec{DA} = \vec{0}$.
- Cho hình bình hành $ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD . Các khẳng định sau đúng hay sai?
a) $|\vec{AB} + \vec{AD}| = |\vec{AC}|$;
b) $\vec{AB} + \vec{BD} = \vec{CB}$;
c) $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC} + \vec{OD}$.
- Cho đường tròn tâm O . Giả sử A, B là hai điểm nằm trên đường tròn. Tìm điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{OA}$ và $\vec{OB}$ đối nhau.
- Cho $ABCD$ là hình bình hành. Chứng minh $\vec{MB} - \vec{MA} = \vec{MC} - \vec{MD}$ với mỗi điểm M trong mặt phẳng.
- Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a . Tính độ dài của các vectơ sau:
a) $\vec{DA} + \vec{DC}$;
b) $\vec{AB} - \vec{AD}$;
c) $\vec{OA} + \vec{OB}$ với O là giao điểm của AC và BD .
- Cho ba lực $\vec{F}_1 = \vec{OA}$, $\vec{F}_2 = \vec{OB}$ và $\vec{F}_3 = \vec{OC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm O và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ đều là 120 N và $\widehat{AOB} = 120^\circ$. Tìm cường độ và hướng của lực $\vec{F}_3$.
- Một dòng sông chảy từ phía bắc xuống phía nam với vận tốc là 10 km/h. Một chiếc ca nô chuyển động từ phía đông sang phía tây với vận tốc 40 km/h so với mặt nước. Tìm vận tốc của ca nô so với bờ sông.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP**Dạng 1: Xác định độ dài tổng, hiệu của các vector.****1. Phương pháp giải.**

Để xác định độ dài tổng hiệu của các vector

- Trước tiên sử dụng định nghĩa về tổng, hiệu hai vector và các tính chất, quy tắc để xác định định phép toán vector đó.
- Dựa vào tính chất của hình, sử dụng định lý Pitago, hệ thức lượng trong tam giác vuông để xác định độ dài vector đó.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 30^\circ$ và $BC = a\sqrt{5}$.

Tính độ dài của các vector $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Lời giải (hình 1.10)

Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\bullet \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad \text{Mà} \quad \sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$$

$$\Rightarrow AC = BC \cdot \sin \widehat{ABC} = a\sqrt{5} \cdot \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Do đó} \quad |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\bullet \quad \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$$

$$\text{Ta có} \quad AC^2 + AB^2 = BC^2 \Rightarrow AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{5a^2 - \frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

$$\text{Vì vậy} \quad |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AB}| = AB = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

- Gọi D là điểm sao cho tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.

Khi đó theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

Vì tam giác ABC vuông ở A nên tứ giác $ABDC$ là hình chữ nhật suy ra $AD = BC = a\sqrt{5}$

$$\text{Vậy} \quad |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD = a\sqrt{5}$$

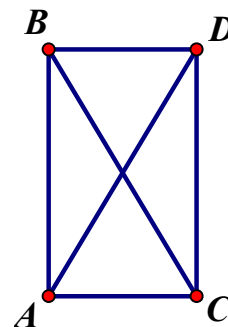
Ví dụ 2: Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O và cạnh a . M là một điểm bất kỳ.

$$\text{a) Tính} \quad |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|, |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}|, |\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}|$$

b) Chứng minh rằng $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$ không phụ thuộc vị trí điểm M . Tính độ dài vector $\vec{u}$

Lời giải (hình 1.11)

$$\text{a) + Theo quy tắc hình bình hành ta có} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$



Hình 1.10

Suy ra $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC$.

Áp dụng định lý Pitago ta có

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2a^2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}a$$

Vậy $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = a\sqrt{2}$

+ Vì O là tâm của hình vuông nên $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$ suy ra
 $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC}$

Vậy $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{BC}| = a$

+ Do ABCD là hình vuông nên $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ suy ra
 $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$

Mà $|\overrightarrow{BD}| = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$ suy ra

$$|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}| = a\sqrt{2}$$

b) Theo quy tắc phép trừ ta có

$$\vec{u} = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD}) = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB}$$

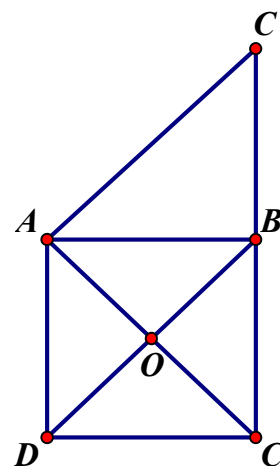
Suy ra $\vec{u}$ không phụ thuộc vị trí điểm M.

Qua A kẻ đường thẳng song song với DB cắt BC tại C'.

Khi đó tứ giác ADC'B là hình bình hành (vì có cặp cạnh đối song song) suy ra $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC'}$

Do đó $\vec{u} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{CC'}$

Vì vậy $|\vec{u}| = |\overrightarrow{CC'}| = BC + BC' = a + a = 2a$



Hình 1.11

Dạng 2: Chứng minh đẳng thức vector.

1. Phương pháp giải.

- Để chứng minh đẳng thức vector ta có các cách biến đổi: vẽ này thành vẽ kia, biến đổi tương đương, biến đổi hai vế cùng bằng một đại lượng trung gian. Trong quá trình biến đổi ta cần sử dụng linh hoạt ba quy tắc tính vector.

Lưu ý: Khi biến đổi cần phải *hướng đích*, chẳng hạn biến đổi về phải, ta cần xem vế trái có đại lượng nào để từ đó liên tưởng đến kiến thức đã có để làm sao xuất hiện các đại lượng ở vế phải. Và ta thường biến đổi vế phức tạp về vế đơn giản hơn.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho năm điểm A, B, C, D, E. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$

b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$

Lời giải

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. “Tránh mua các trang và các cá nhân khác”

Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT: 0834 332 133

a) Biến đổi về trái ta có

$$\begin{aligned} VT &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}) \\ &= (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{DA} \\ &= (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}) + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} = VP \quad \text{ĐPCM} \end{aligned}$$

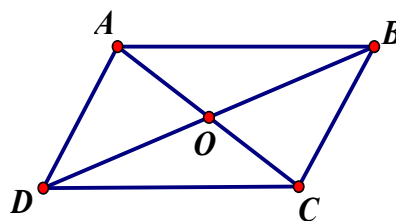
b) Đẳng thức tương đương với

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} &= \vec{0} \quad (\text{đúng}) \quad \text{ĐPCM.} \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

- a) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$
b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$
c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

Lời giải (Hình 1.12)



Hình 1.12

- a) Ta có $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$
 $= -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AC}$

Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ suy ra

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

b) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên ta có: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AO} = \vec{0}$

Tương tự: $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

- c) Cách 1: Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$
 $\Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}$
 $= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$

Cách 2: Đẳng thức tương đương với

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \quad (\text{đúng do } ABCD \text{ là hình bình hành})$$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chứng minh rằng

- a) $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$
b) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$
c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ với O là điểm bất kì.

Lời giải (Hình 1.13)

a) Vì PN, MN là đường trung bình của tam giác ABC nên
 $PN \parallel BM, MN \parallel BP$ suy ra tứ giác $BMNP$ là hình bình hành
 $\Rightarrow \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{PN}$

N là trung điểm của $AC \Rightarrow \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NA}$

Do đó theo quy tắc ba điểm ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} &= (\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NA}) + \overrightarrow{AP} \\ &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}\end{aligned}$$

b) Vì tứ giác $APMN$ là hình bình hành nên theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}$, kết hợp với quy tắc trừ

$$\Rightarrow \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM}$$

Mà $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ do M là trung điểm của BC .

Vậy $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$.

c) Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} &= (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}) + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NC}) \\ &= (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}) + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC} \\ &= (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}) - (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP})\end{aligned}$$

Theo câu a) ta có $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$ suy ra $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NP}$.

C. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB}$.

D. $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$.

Lời giải

Chọn B

Xét các đáp án:

- Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{BC}$ (với D là điểm thỏa mãn $ABDC$ là hình bình hành). Vậy A sai.
- Đáp án B. Ta có $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NP}$. Vậy B đúng.
- Đáp án C. Ta có $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} = -(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) = -\overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{CB}$ (với D là điểm thỏa mãn $ABDC$ là hình bình hành). Vậy C sai.
- Đáp án D. Ta có $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{BB} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \neq \overrightarrow{AB}$. Vậy D sai.

Câu 2: Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là các vectơ khác $\vec{0}$ với $\vec{a}$ là vectơ đối của $\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương.

B. Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng.

C. Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng độ dài.

D. Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ chung điểm đầu.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\vec{a} = -\vec{b}$. Do đó, $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, cùng độ dài và ngược hướng nhau.

Câu 3: Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\vec{CA} - \vec{BA} = \vec{BC}$.

B. $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{BC}$.

C. $\vec{AB} + \vec{CA} = \vec{CB}$.

D. $\vec{AB} - \vec{BC} = \vec{CA}$.

Lời giải

Chọn C.

Xét các đáp án:

• Đáp án A. Ta có $\vec{CA} - \vec{BA} = \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CB} = -\vec{BC}$. Vậy A sai.

• Đáp án B. Ta có $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD} \neq \vec{BC}$ (với D là điểm thỏa mãn $ABDC$ là hình bình hành). Vậy B sai.

• Đáp án C. Ta có $\vec{AB} + \vec{CA} = \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CB}$. Vậy C đúng.

Câu 4: Cho $\vec{AB} = -\vec{CD}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\vec{AB}$ và $\vec{CD}$ cùng hướng.

B. $\vec{AB}$ và $\vec{CD}$ cùng độ dài.

C. $ABCD$ là hình bình hành.

D. $\vec{AB} + \vec{DC} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\vec{AB} = -\vec{CD} = \vec{DC}$. Do đó:

• $\vec{AB}$ và $\vec{CD}$ ngược hướng.

• $\vec{AB}$ và $\vec{CD}$ cùng độ dài.

• $ABCD$ là hình bình hành nếu $\vec{AB}$ và $\vec{CD}$ không cùng giá.

• $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{0}$.

Câu 5: Tính tổng $\vec{MN} + \vec{PQ} + \vec{RN} + \vec{NP} + \vec{QR}$.

A. $\vec{MR}$.

B. $\vec{MN}$.

C. $\vec{PR}$.

D. $\vec{MP}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\vec{MN} + \vec{PQ} + \vec{RN} + \vec{NP} + \vec{QR} = \vec{MN} + \vec{NP} + \vec{PQ} + \vec{QR} + \vec{RN} = \vec{MN}$.

Câu 6: Cho hai điểm A và B phân biệt. Điều kiện để I là trung điểm AB là:

A. $IA = IB$.

B. $\vec{IA} = \vec{IB}$.

C. $\vec{IA} = -\vec{IB}$.

D. $\vec{AI} = \vec{BI}$.

Lời giải

Chọn C.

Câu 7: Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để I là trung điểm của đoạn thẳng AB ?

A. $IA = IB$.

B. $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$.

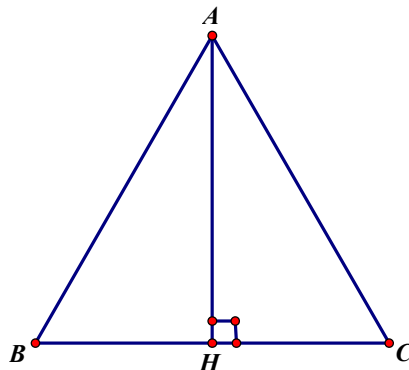
C. $\vec{IA} - \vec{IB} = \vec{0}$.

D. $\vec{IA} = \vec{IB}$.

Lời giải

Chọn B.Điều kiện cần và đủ để I là trung điểm của đoạn thẳng AB là $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.**Câu 8:** Cho tam giác ABC cân ở A , đường cao AH . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{HC} = -\overrightarrow{HB}$. C. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$. D. $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{HC}$.

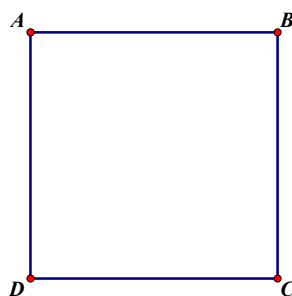
Lời giải**Chọn A.**Tam giác ABC cân ở A , đường cao AH . Do đó, H là trung điểm BC .

Ta có:

- $AB = AC \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$
- H là trung điểm $BC \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{HC} = -\overrightarrow{HB} \\ \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{HC} \end{cases}$

Câu 9: Cho hình vuông $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. C. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. D. $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}|$.

Lời giải**Chọn D.**

$$ABCD \text{ là hình vuông} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB} \Rightarrow |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}|.$$

Câu 10: Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Nếu M là trung điểm đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
 B. Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
 C. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$.

D. Nếu ba điểm phân biệt A, B, C nằm tùy ý trên một đường thẳng thì $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}|$.

Lời giải

Chọn D.

Với ba điểm phân biệt A, B, C nằm trên một đường thẳng, đẳng thức

$$|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| \Leftrightarrow AB + BC = AC \text{ xảy ra khi } B \text{ nằm giữa } A \text{ và } C.$$

Câu 11: Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CD}$.

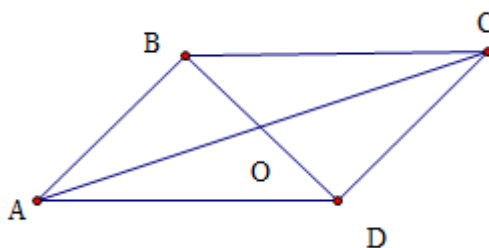
B. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$.

C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$.

D. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}$.

Lời giải

Chọn B.



Xét các đáp án:

• Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$. Vậy A đúng.

• Đáp án B. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD} \end{cases}$. Vậy B sai.

• Đáp án C. Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$. Vậy C đúng.

• Đáp án D. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} \end{cases}$. Vậy D đúng.

Câu 12: Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB}$.

B. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$.

C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$.

D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn A.

Do $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$.

Câu 13: Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

A. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DA}$.

C. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$.

D. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.

Câu 14: Cho tam giác ABC đều cạnh a . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$.
B. $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB}$.
C. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}| = a$.
D. $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn C.

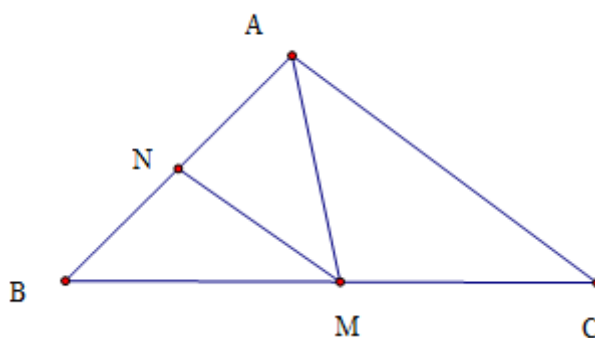
Độ dài các cạnh của tam giác là a thì độ dài các vector $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}| = a$.

Câu 15: Cho tam giác ABC với M là trung điểm BC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.
B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$.
C. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$.
D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}$.

Lời giải

Chọn A.



Xét các đáp án:

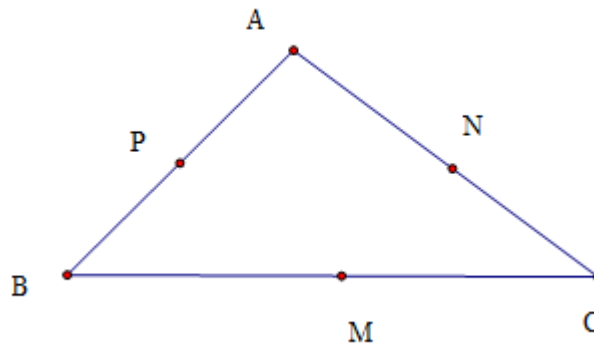
- Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ (theo quy tắc ba điểm).
- Đáp án B, C. Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC}$ (với điểm N là trung điểm của AB).
- Đáp án D. Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$.

Câu 16: Cho tam giác ABC với M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.
B. $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$.
C. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} = \vec{0}$.
D. $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MP}$.

Lời giải

Chọn D.



Xét các đáp án:

- Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
- Đáp án B. Ta có $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$
- Đáp án C. Ta có $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MM} = \vec{0}$.
- Đáp án D. Ta có $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{PM} = -\overrightarrow{MP}$.

Câu 17: Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $AB + BC = AC$.
 B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.
 C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow |\overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{BC}|$.
 D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn B.

Đáp án A chỉ đúng khi ba điểm A, B, C thẳng hàng và B nằm giữa A, C .

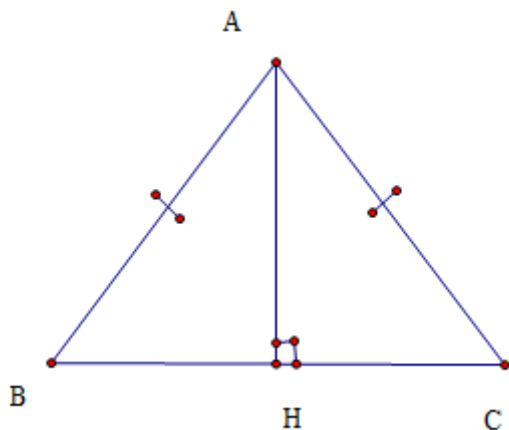
Đáp án B đúng theo quy tắc ba điểm.

Câu 18: Cho tam giác ABC có $AB = AC$ và đường cao AH . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}$.
 B. $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$.
 C. $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$.
 D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn C.



Do $\triangle ABC$ cân tại A , AH là đường cao nên H là trung điểm BC .

Xét các đáp án:

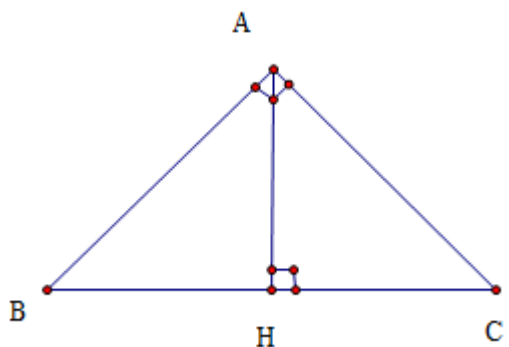
- Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AH}$.
- Đáp án B. Ta có $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} + \vec{0} = \overrightarrow{HA} \neq \vec{0}$.
- Đáp án C. Ta có $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$ (do H là trung điểm BC).
- Đáp án D. Do $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{AC}$.

Câu 19: Cho tam giác ABC vuông cân đỉnh A , đường cao AH . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}| = |\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}|$. B. $\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC}$.
- C. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA}$. D. $|\overrightarrow{AH}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AH}|$.

Lời giải

Chọn B.



Do $\triangle ABC$ cân tại A , AH là đường cao nên H là trung điểm BC .

Xét các đáp án:

- Đáp án A. Ta có $\begin{cases} |\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}| = |\overrightarrow{AB}| = a \\ |\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}| = |\overrightarrow{AC}| = a \end{cases}$
 $\Rightarrow |\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}| = |\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}|$.

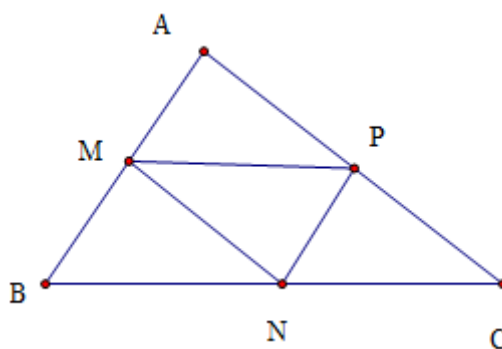
- Đáp án B. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BH} \\ \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CH} = -\overrightarrow{BH} \end{cases}$. Do đó B sai.
- Đáp án C. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{AC} \end{cases} \longrightarrow \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA}$.
- Đáp án D. Ta có $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AH}| = |\overrightarrow{HB}| = |\overrightarrow{AH}|$ (do $\triangle ABC$ vuông cân tại A).

Câu 20: Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC . Hỏi vectơ $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP}$ bằng vectơ nào trong các vectơ sau?

- A. $\overrightarrow{AP}$. B. $\overrightarrow{BP}$. C. $\overrightarrow{MN}$. D. $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NB}$.

Lời giải

Chọn B.



Ta có $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{BM} \longrightarrow \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BP}$.

Câu 21: Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA}$.
C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Chọn A.

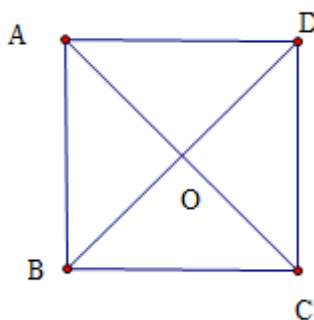
Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

Câu 22: Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Vectơ nào trong các vectơ dưới đây bằng $\overrightarrow{CA}$?

- A. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$. B. $-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$. C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$. D. $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Chọn C.



Xét các đáp án:

- Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$.
- Đáp án B. Ta có $-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$.
- Đáp án C. Ta có $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = -(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) = -\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}$.
- Đáp án D. Ta có $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} = -(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}) = -\overrightarrow{CA}$.

Câu 23: Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$.

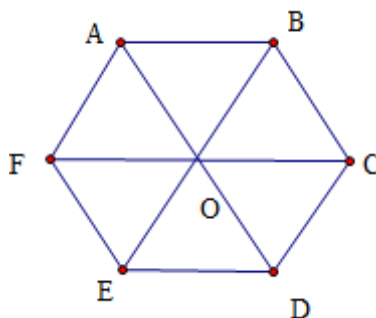
B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{EB}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$.

Lời giải

Chọn D.



Ta có

- $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$. Do đó A đúng.
- $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OB}$
 $= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{EB}$. Do đó B đúng.
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{EF} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}) + \overrightarrow{EF}$
 $= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Do đó C đúng.

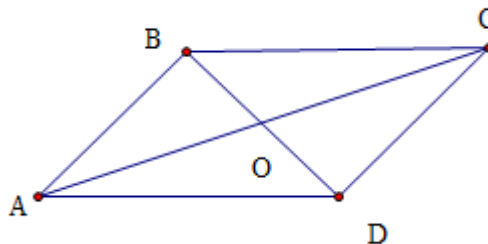
Dùng phương pháp loại trừ, suy ra D sai.

Câu 24: Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Hỏi vector $(\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DO})$ bằng vector nào trong các vector sau?

A. $\overrightarrow{BA}$.B. $\overrightarrow{BC}$.C. $\overrightarrow{DC}$.D. $\overrightarrow{AC}$.

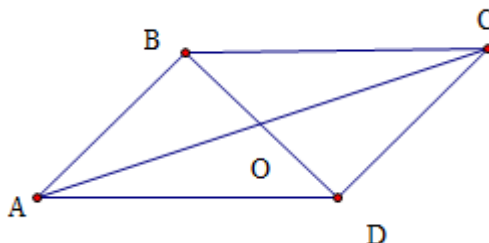
Lời giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DO} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.**Câu 25:** Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Đẳng thức nào sau đây sai?A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.B. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.C. $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}|$.D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Chọn D.

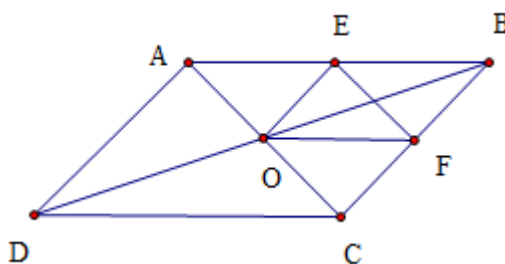


Xét các đáp án:

• Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = \vec{0}$.• Đáp án B. Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (quy tắc hình bình hành).• Đáp án C. Ta có
$$\begin{cases} |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BD}| = BD \\ |\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{DB}| = BD \end{cases}$$
• Đáp án D. Do $\overrightarrow{CD} \neq \overrightarrow{CB} \Rightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) \neq (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB})$.**Câu 26:** Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC . Đẳng thức nào sau đây sai?A. $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{EO}$.B. $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EO}$.C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$.D. $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{DO} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn D.



Ta có OF, OE lần lượt là đường trung bình của tam giác ΔBCD và ΔABC .

$\Rightarrow BEOF$ là hình bình hành.

$$\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BO} \Rightarrow \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BD}.$$

Câu 27: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{BD}.$

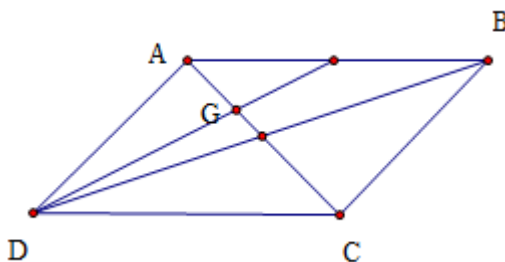
B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{CD}.$

C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$

D. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{CD}.$

Lời giải

Chọn A.



Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GB}.$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = -\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GD} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{BD}.$$

Câu 28: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}.$

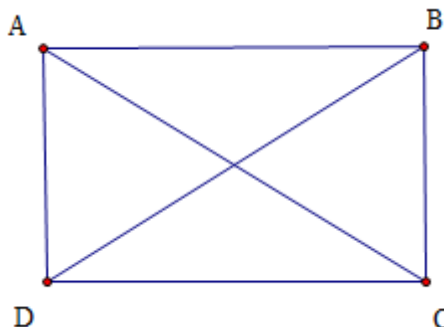
B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}.$

C. $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|.$

D. $|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|.$

Lời giải

Chọn C.



Ta có
$$\begin{cases} |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DB}| = BD \\ |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC \end{cases}$$

Mà $BD = AC \Rightarrow |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$.

Câu 29: Cho tam giác ABC đều cạnh a . Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

A. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}$.

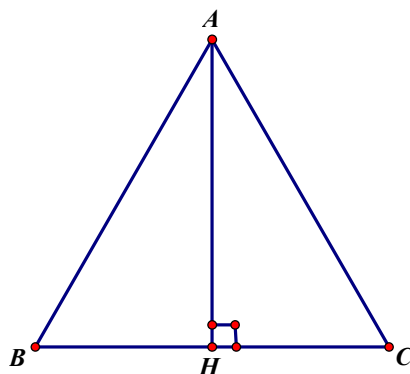
B. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2a$.

D. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow AH \perp BC$.

Suy ra $AH = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta lại có $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AH}| = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Câu 30: Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = a$. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

A. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{2}$.

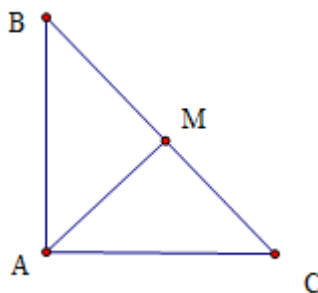
B. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2a$.

D. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi M là trung điểm $BC \longrightarrow AM = \frac{1}{2}BC$.

Ta có $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AM}| = 2AM = BC = a\sqrt{2}$.

Câu 31: Cho tam giác ABC vuông cân tại C và $AB = \sqrt{2}$. Tính độ dài của $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

A. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \sqrt{5}$.

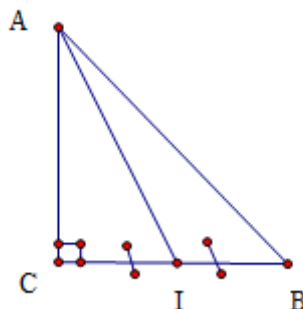
B. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{5}$.

C. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \sqrt{3}$.

D. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A.



Ta có $AB = \sqrt{2} \Rightarrow AC = CB = 1$.

Gọi I là trung điểm $BC \Rightarrow AI = \sqrt{AC^2 + CI^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Khi đó $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI} \Rightarrow |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}| = 2|\overrightarrow{AI}| = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$.

Câu 32: Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB = 3$, $AC = 4$. Tính $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}|$.

A. $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}| = 2$.

B. $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{13}$.

C. $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}| = 5$.

D. $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}| = \sqrt{13}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CB}| = CB = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Câu 33: Tam giác ABC có $AB = AC = a$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

A. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}$.

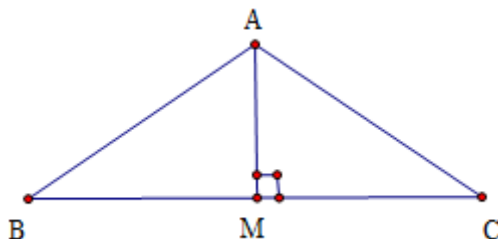
B. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a$.

C. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \frac{a}{2}$.

D. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2a$.

Lời giải

Chọn B.



Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow AM \perp BC$.

Trong tam giác vuông AMB , ta có $AM = AB \cdot \sin \widehat{ABM} = a \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{2}$.

Ta có $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AM}| = 2AM = a$.

Câu 34: Cho tam giác ABC đều cạnh a , H là trung điểm của BC . Tính $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}|$.

A. $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = \frac{a}{2}$.

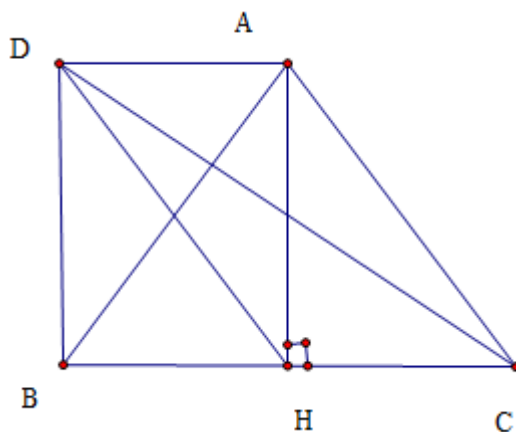
B. $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = \frac{3a}{2}$.

C. $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

D. $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Lời giải

Chọn D.



Gọi D là điểm thỏa mãn tứ giác $ACHD$ là hình bình hành

$\Rightarrow AHBD$ là hình chữ nhật.

$$|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CH}| = |\overrightarrow{CD}| = CD.$$

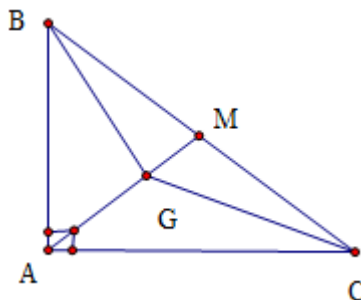
$$\text{Ta có } CD = \sqrt{BD^2 + BC^2} = \sqrt{AH^2 + BC^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + a^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

Câu 35: Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC với cạnh huyền $BC=12$. Tính độ dài của vector $\vec{v} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.

- A. $|\vec{v}| = 2$. B. $|\vec{v}| = 2\sqrt{3}$. C. $|\vec{v}| = 8$. D. $|\vec{v}| = 4$.

Lời giải

Chọn D.



Gọi M là trung điểm của BC .

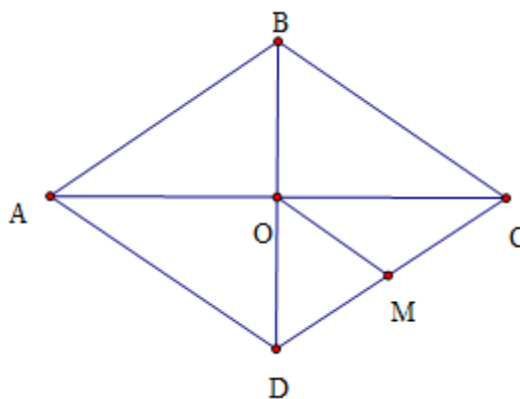
$$\text{Ta có } |\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| = |2\overrightarrow{GM}| = 2GM = 2 \cdot \frac{1}{3} AM = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} BC \right) = \frac{BC}{3} = 4.$$

Câu 36: Cho hình thoi $ABCD$ có $AC=2a$ và $BD=a$. Tính $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}|$.

- A. $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = 3a$. B. $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = a\sqrt{3}$.
C. $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = a\sqrt{5}$. D. $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = 5a$.

Lời giải

Chọn C.



Gọi $O = AC \cap BD$ và M là trung điểm của CD .

$$\text{Ta có } |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = 2|\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}| = 2|2\overrightarrow{OM}| = 4OM$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2} CD = 2\sqrt{OD^2 + OC^2} = 2\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = a\sqrt{5}.$$

Câu 37: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}|$.

A. $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}| = 0.$

B. $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}| = a.$

C. $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}| = a\sqrt{2}.$

D. $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}| = 2a.$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = a\sqrt{2}.$

Câu 38: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O . Tính $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}|.$

A. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = a.$

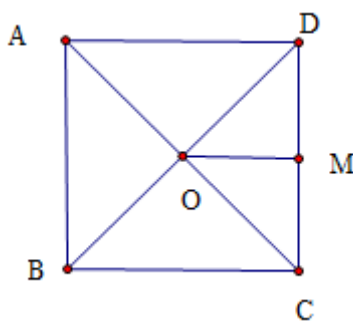
B. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = a\sqrt{2}.$

C. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = \frac{a}{2}.$

D. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$

Lời giải

Chọn A.

Gọi M là trung điểm của BC .

Ta có $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 2|\overrightarrow{OM}| = 2OM = AB = a.$

Câu 39: Cho tam giác ABC có M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Xác định vị trí điểm M .A. M là điểm thứ tư của hình bình hành $ACBM$.B. M là trung điểm của đoạn thẳng AB .C. M trùng với C .D. M là trọng tâm tam giác ABC .

Lời giải

Chọn D.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC .

Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow M \equiv G.$

Câu 40: Cho tam giác ABC . Tập hợp tất cả các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}|$ làA. đường thẳng AB .B. trung trực đoạn BC .C. đường tròn tâm A , bán kính BC .

D. đường thẳng qua A và song song với BC .

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{AM}| \Rightarrow AM = BC$$

Mà A, B, C cố định $\Rightarrow$ Tập hợp điểm M là đường tròn tâm A , bán kính BC .

Câu 41: Cho hình bình hành $ABCD$. Tập hợp tất cả các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$ là

A. một đường tròn.

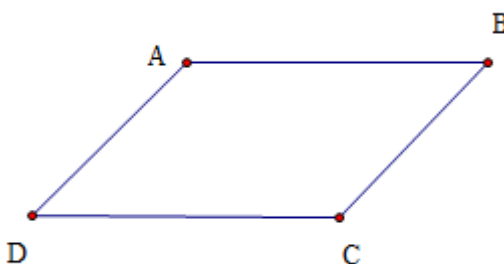
B. một đường thẳng.

C. tập rỗng.

D. một đoạn thẳng.

Lời giải

Chọn C.



$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MA} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} : \text{ vô lí}$$

$\Rightarrow$ Không có điểm M thỏa mãn.

Câu 42: Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$. Tìm vị trí điểm M .

A. M là trung điểm của AC .

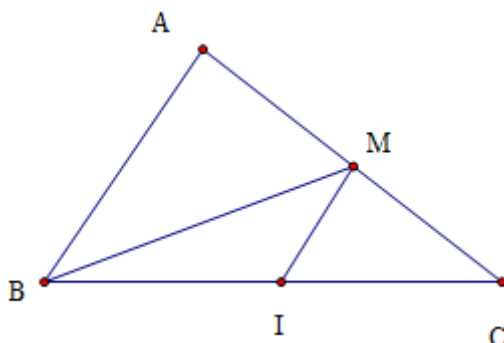
B. M là trung điểm của AB .

C. M là trung điểm của BC .

D. M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$.

Lời giải

Chọn A.



$$\text{Gọi } I \text{ là trung điểm của } BC \Rightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MI} \Rightarrow M \text{ là trung điểm } AC.$$

Câu 43: Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây

sai?

A. $MABC$ là hình bình hành.

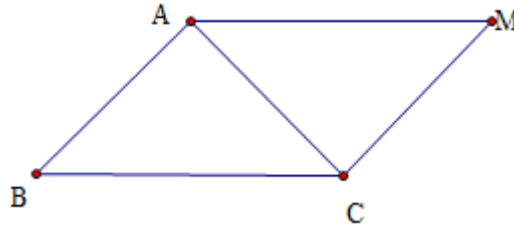
B. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM}$.

D. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn D.



Ta có $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow MABC$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CB}$.

Do đó D sai.

§5 TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

Hai đoàn tàu chạy song song (Hình 58).
Gọi $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ lần lượt là các vectơ mô tả vận tốc của hai đoàn tàu.



Mối liên hệ giữa hai vectơ vận tốc $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ là như thế nào?



(Nguồn: <https://pixabay.com>)

Hình 58

I. ĐỊNH NGHĨA

Cho B là trung điểm của đoạn thẳng AC . Quan sát Hình 59 và thực hiện các hoạt động sau:



Hình 59

1 Chứng tỏ rằng $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AB}$.

Để chứng tỏ đẳng thức trên, ta làm như sau: $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{AB}$.

Tương tự cách viết tổng $a + a$ ở dạng $2a$ ($a \in \mathbb{R}$), ta có thể viết tổng $\vec{AB} + \vec{AB}$ ở dạng $2\vec{AB}$.

Vectơ $2\vec{AB}$ gọi là tích của số 2 với vectơ $\vec{AB}$. Do đó tích của số 2 với vectơ $\vec{AB}$ là vectơ $\vec{AC}$.

2 Quan sát vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$, nêu mối liên hệ về hướng và độ dài của vectơ $2\vec{AB}$ với $\vec{AB}$.



Vectơ $2\vec{AB}$ cùng hướng với $\vec{AB}$ và $|2\vec{AB}| = 2|\vec{AB}|$.

Một cách tổng quát, ta có:



Cho số thực $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

- Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k < 0$;
- Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

Quy ước: $0\vec{a} = \vec{0}$, $k\vec{0} = \vec{0}$.

Phép lấy tích của một số với một vectơ gọi là *phép nhân số với vectơ*.

Ví dụ 1 Cho B là trung điểm của đoạn thẳng AC .
 Tìm số k trong mỗi trường hợp sau:

a) $\overrightarrow{CA} = k\overrightarrow{CB}$; b) $\overrightarrow{CA} = k\overrightarrow{AB}$.

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ là hai vectơ cùng hướng và
 $|\overrightarrow{CA}| = 2|\overrightarrow{CB}|$.

Suy ra $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CB}$. Vậy $k = 2$.

b) Ta có: $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}$ là hai vectơ ngược hướng và $|\overrightarrow{CA}| = 2|\overrightarrow{AB}|$.

Suy ra $\overrightarrow{CA} = -2\overrightarrow{AB}$. Vậy $k = -2$.

1 Cho tam giác ABC . Hai đường trung tuyến AM và BN cắt nhau tại G .

Tìm các số a, b biết:

$\overrightarrow{AG} = a\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{GN} = b\overrightarrow{GB}$.

Ví dụ 2 Vật thứ nhất chuyển động thẳng đều từ A đến B với tốc độ là 9 m/s và vật thứ hai chuyển động thẳng đều từ B đến A với tốc độ là 6 m/s . Gọi $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ lần lượt là các vectơ vận tốc của vật thứ nhất và vật thứ hai. Có hay không số thực k thoả mãn $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$?

Giải

Do tỉ số tốc độ của vật thứ nhất và vật thứ hai là $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ đồng thời hai vật chuyển động ngược hướng nên hai vectơ vận tốc ngược hướng. Suy ra $\vec{v}_1 = -\frac{3}{2}\vec{v}_2$. Vậy $k = -\frac{3}{2}$.

II. TÍNH CHẤT

Với hai vectơ bất kì $\vec{a}, \vec{b}$ và hai số thực h, k , ta có:

- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}; k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b};$
- $(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a};$
- $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a};$
- $1\vec{a} = \vec{a}; (-1)\vec{a} = -\vec{a}.$

Nhận xét: $k\vec{a} = \vec{0}$ khi và chỉ khi $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.

Ví dụ 3 Cho ba điểm A, B, C . Chứng minh:

a) $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC};$

b) $3(5\overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{CB} - 14\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.$

2 Cho ba điểm A, B, C .
 Chứng minh

$3(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}) - 2(\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC})$
 $= \overrightarrow{AB}.$

Giải

a) Ta có: $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 2\overrightarrow{AC}$.

b) Ta có: $3(5\overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{CB} - 14\overrightarrow{AC} = 15\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - 14\overrightarrow{AC}$
 $= 15\overrightarrow{AC} - 14\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.

III. MỘT SỐ ỨNG DỤNG

1. Trung điểm của đoạn thẳng

 **3** Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB và điểm M tùy ý. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Để chứng minh đẳng thức trên, ta làm như sau:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{MI} + \vec{0} = 2\overrightarrow{MI}.$$

Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ với điểm M bất kì.

2. Trọng tâm của tam giác

 **4** Cho G là trọng tâm của tam giác ABC và điểm M tùy ý. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Để chứng minh đẳng thức trên, ta làm như sau:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) \\ &= 3\overrightarrow{MG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{MG} + \vec{0} = 3\overrightarrow{MG}.\end{aligned}$$

Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ với điểm M bất kì.

Ví dụ 4 Cho tứ giác $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD . Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng MN .

Chứng minh $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Giải

Vì M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM}$.

Vì N là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GN}$.

Suy ra $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = 2(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}) = 2 \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

3 Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Chứng minh $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}$.

3. Điều kiện để hai vectơ cùng phương. Điều kiện để ba điểm thẳng hàng

5 Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$ với k là số thực khác 0. Nêu nhận xét về phương của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là có một số thực k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

6 Cho ba điểm phân biệt A, B, C .

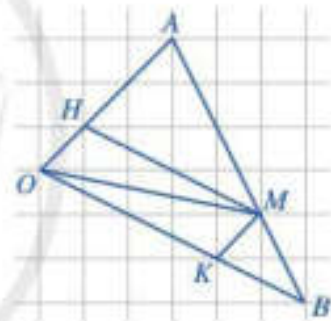
- Nếu ba điểm A, B, C thẳng hàng thì hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ có cùng phương hay không?
- Ngược lại, nếu hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương thì ba điểm A, B, C có thẳng hàng hay không?

Điều kiện cần và đủ để ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng là có số thực k để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Ví dụ 5 Cho tam giác OAB . Điểm M thuộc cạnh AB sao cho $AM = \frac{2}{3}AB$. Kẻ $MH \parallel OB, MK \parallel OA$ (Hình 60).

Giả sử $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

- Biểu thị $\overrightarrow{OH}$ theo $\vec{a}$ và $\overrightarrow{OK}$ theo $\vec{b}$.
- Biểu thị $\overrightarrow{OM}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.



Hình 60

Giải

a) Ta có: $MK \parallel OA, MH \parallel OB$ suy ra

$$\frac{OK}{OB} = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}, \quad \frac{OH}{OA} = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{3}.$$

Vì $\overrightarrow{OH}$ và $\overrightarrow{OA}$ cùng hướng và $OH = \frac{1}{3}OA$ nên

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\vec{a}.$$

Vì $\overrightarrow{OK}$ và $\overrightarrow{OB}$ cùng hướng và $OK = \frac{2}{3}OB$ nên

$$\overrightarrow{OK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\vec{b}.$$

b) Vì tứ giác $OHEM$ là hình bình hành nên

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}.$$

4 Ở Hình 61, tìm k trong mỗi trường hợp sau:

- $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AD}$,
- $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{DC}$.



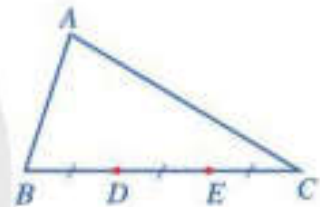
Hình 61

Nhận xét: Trong mặt phẳng, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Với mỗi vectơ $\vec{c}$ có duy nhất cặp số $(x; y)$ thoả mãn $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

BÀI TẬP

- Cho hình thang $MNPQ$, $MN \parallel PQ$, $MN = 2PQ$. Phát biểu nào sau đây là đúng?
A. $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{PQ}$; B. $\overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{NP}$; C. $\overrightarrow{MN} = -2\overrightarrow{PQ}$; D. $\overrightarrow{MQ} = -2\overrightarrow{NP}$.
- Cho đoạn thẳng $AB = 6$ cm.
a) Xác định điểm C thoả mãn $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
b) Xác định điểm D thoả mãn $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
- Cho tam giác ABC có M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chứng minh:
a) $\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AN}$; b) $\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BA}$.
- Cho tam giác ABC . Các điểm D, E thuộc cạnh BC thoả mãn $BD = DE = EC$ (Hình 62). Giả sử $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$ theo $\vec{a}, \vec{b}$.
- Cho tứ giác $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD . Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng MN , E là trọng tâm tam giác BCD . Chứng minh:
a) $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = 4\overrightarrow{EG}$;
b) $\overrightarrow{EA} = 4\overrightarrow{EG}$;
c) Điểm G thuộc đoạn thẳng AE và $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$.
- Cho hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{CG}$ theo hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$.
- Cho tam giác ABC . Các điểm D, E, H thoả mãn
$$\overrightarrow{DB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

a) Biểu thị mỗi vectơ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{HE}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
b) Chứng minh D, E, H thẳng hàng.



Hình 62

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Dựng và tính độ dài vector chứa tích một vector với một số.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng định nghĩa tích của một vector với một số và các quy tắc về phép toán vector để dựng vector chứa tích một vector với một số, kết hợp với các định lý pitago và hệ thức lượng trong tam giác vuông để tính độ dài của chúng.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác đều ABC cạnh a . điểm M là trung điểm BC . Dựng các vector sau và tính độ dài của chúng.

a) $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MA}$

b) $\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

c) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

d) $\frac{3}{4}\overrightarrow{MA} - 2,5\overrightarrow{MB}$

Lời giải (Hình 1.14)

a) Do $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}$ suy ra theo quy tắc ba điểm ta có

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CA}$$

Vậy $\left| \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MA} \right| = CA = a$

b) Vì $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM}$ nên theo quy tắc trừ ta có

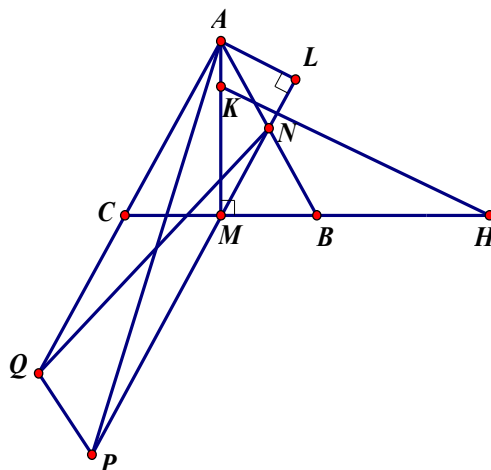
$$\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MA}$$

Theo định lý Pitago ta có

$$MA = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Vậy $\left| \overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \right| = MA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

c) Gọi N là trung điểm AB , Q là điểm đối xứng của A qua C và P là đỉnh của hình bình hành $AQPN$.



Hình 1.14

Khi đó ta có $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN}$, $2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AQ}$ suy ra theo quy tắc hình bình hành ta có

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP}$$

Gọi L là hình chiếu của A lên PN

Vì $MN \parallel AC \Rightarrow \widehat{ANL} = \widehat{MNB} = \widehat{CAB} = 60^\circ$

Xét tam giác vuông ANL ta có $\sin \widehat{ANL} = \frac{AL}{AN} \Rightarrow AL = AN \cdot \sin \widehat{ANL} = \frac{a}{2} \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

$$\cos \widehat{ANL} = \frac{NL}{AN} \Rightarrow NL = AN \cdot \cos \widehat{ANL} = \frac{a}{2} \cos 60^\circ = \frac{a}{4}$$

Ta lại có $AQ = PN \Rightarrow PL = PN + NL = AQ + NL = 2a + \frac{a}{4} = \frac{9a}{4}$

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác ALP ta có

$$AP^2 = AL^2 + PL^2 = \frac{3a^2}{16} + \frac{81a^2}{16} = \frac{21a^2}{4} \Rightarrow AP = \frac{a\sqrt{21}}{2}$$

$$\text{Vậy } \left| \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \right| = AP = \frac{a\sqrt{21}}{2}$$

d) Gọi K là điểm nằm trên đoạn AM sao cho $MK = \frac{3}{4}MA$, H thuộc tia MB sao cho $MH = 2,5MB$.

Khi đó $\frac{3}{4}\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MK}$, $2,5\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MH}$

Do đó $\frac{3}{4}\overrightarrow{MA} - 2,5\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MH} = \overrightarrow{HK}$

Ta có $MK = \frac{3}{4}AM = \frac{3}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a}{8}$, $MH = 2,5MB = 2,5 \cdot \frac{a}{2} = \frac{5a}{4}$

Áp dụng định lý Pitago cho tam giác vuông KMH ta có

$$KH = \sqrt{MH^2 + MK^2} = \sqrt{\frac{25a^2}{16} + \frac{27a^2}{64}} = \frac{a\sqrt{127}}{8}$$

$$\text{Vậy } \left| \frac{3}{4}\overrightarrow{MA} - 2,5\overrightarrow{MB} \right| = KH = \frac{a\sqrt{127}}{8}$$

Ví dụ 2: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a .

a) Chứng minh rằng $\vec{u} = 4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M .

b) Tính độ dài vector $\vec{u}$

Lời giải (Hình 1.15)

a) Gọi O là tâm hình vuông.

Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\begin{aligned}\vec{u} &= 4(\vec{MO} + \vec{OA}) - 3(\vec{MO} + \vec{OB}) + (\vec{MO} + \vec{OC}) - 2(\vec{MO} + \vec{OD}) \\ &= 4\vec{OA} - 3\vec{OB} + \vec{OC} - 2\vec{OD}\end{aligned}$$

Mà $\vec{OD} = -\vec{OB}$, $\vec{OC} = -\vec{OA}$ nên $\vec{u} = 3\vec{OA} - \vec{OB}$

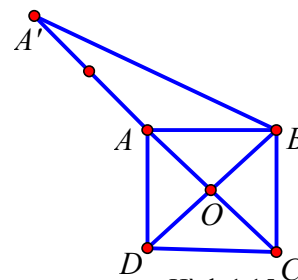
Suy ra $\vec{u}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M

b) Lấy điểm A' trên tia OA sao cho $OA' = 3OA$ khi đó

$$\vec{OA'} = 3\vec{OA} \text{ do đó } \vec{u} = \vec{OA'} - \vec{OB} = \vec{BA'}$$

$$\text{Mặt khác } BA' = \sqrt{OB^2 + OA'^2} = \sqrt{OB^2 + 9OA^2} = a\sqrt{5}$$

$$\text{Suy ra } |\vec{u}| = a\sqrt{5}$$



Hình 1.15

Dạng 2: Chứng minh đẳng thức vector.

1. Phương pháp giải

Sử dụng các kiến thức sau để biến đổi vế này thành vế kia hoặc cả hai biểu thức ở hai vế cùng bằng biểu thức thứ ba hoặc biến đổi tương đương về đẳng thức đúng:

- Các tính chất phép toán vector
- Các quy tắc: quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành và quy tắc phép trừ
- Tính chất trung điểm:

$$M \text{ là trung điểm đoạn thẳng } AB \Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0}$$

$$M \text{ là trung điểm đoạn thẳng } AB \Leftrightarrow \vec{OA} + \vec{OB} = 2\vec{OM} \text{ (Với } O \text{ là điểm tùy ý)}$$

- Tính chất trọng tâm:

$$G \text{ là trọng tâm của tam giác } ABC \Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$$

$$G \text{ là trọng tâm của tam giác } ABC \Leftrightarrow \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG} \text{ (Với } O \text{ là điểm tùy ý)}$$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD , O là trung điểm của IJ . Chứng minh rằng:

$$a) \vec{AC} + \vec{BD} = 2\vec{IJ}$$

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$ với M là điểm bất kì

Lời giải (Hình 1.16)

a) Theo quy tắc ba điểm ta có

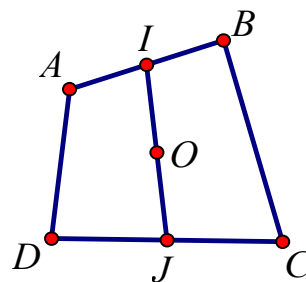
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC}$$

Tương tự $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD}$

Mà I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD nên

$$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}, \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}$$

Vậy $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI}) + (\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD}) + 2\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IJ}$ đpcm



Hình 1.16

b) Theo hệ thức trung điểm ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OJ}$

Mặt khác O là trung điểm IJ nên $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$

Suy ra $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}) = \vec{0}$ đpcm

c) Theo câu b ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ do đó với mọi điểm M thì

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO} \text{ đpcm}$$

Ví dụ 2: Cho hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm G. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm tam giác BCA_1, ABC_1, ACB_1 . Chứng minh rằng $\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3} = \vec{0}$

Lời giải

Vì G_1 là trọng tâm tam giác BCA_1 nên $3\overrightarrow{GG_1} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA_1}$

Tương tự G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm tam giác ABC_1, ACB_1 suy ra

$$3\overrightarrow{GG_2} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC_1} \text{ và } 3\overrightarrow{GG_3} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GB_1}$$

Cộng theo vế với vế các đẳng thức trên ta có

$$\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3} = 2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GC_1})$$

Mặt khác hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm G nên

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ và } \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GC_1} = \vec{0}$$

Suy ra $\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3} = \vec{0}$

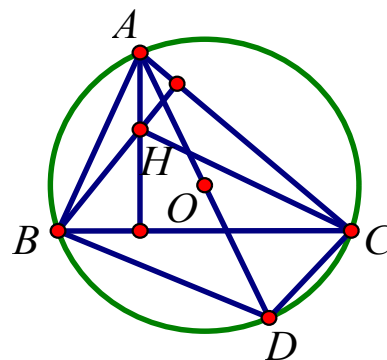
Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có trực tâm H , trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O . Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$

c) $\overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{GO} = \vec{0}$

Lời giải (Hình 1.17)



Hình 1.17

a) Dễ thấy $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$ nếu tam giác ABC vuông

Nếu tam giác ABC không vuông gọi D là điểm đối xứng của A qua O khi đó

$BH \parallel DC$ (vì cùng vuông góc với AC)

$BD \parallel CH$ (vì cùng vuông góc với AB)

Suy ra $BDCH$ là hình bình hành, do đó theo quy tắc hình bình hành thì $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$ (1)

Mặt khác vì O là trung điểm của AD nên $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$

b) Theo câu a) ta có

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OC}) = 2\overrightarrow{HO}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} \text{ đpcm}$$

c) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$

Mặt khác theo câu b) ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} \Leftrightarrow (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GH}) - 3\overrightarrow{OG} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{GO} = \vec{0}$$

Dạng 3: Phân tích một vector theo hai vector không cùng phương.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng các tính chất phép toán vector, ba quy tắc phép toán vector và tính chất trung điểm, trọng tâm trong tam giác.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC . Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

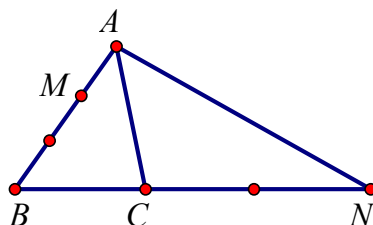
Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. “Tránh mua các trang và các cá nhân khác”

Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng

Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

- a) Hãy dựng các điểm M, N thỏa mãn: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$
- b) Hãy phân tích $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN}$ qua các véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
- c) Gọi I là điểm thỏa: $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{CM}$. Chứng minh I, A, N thẳng hàng

Lời giải (hình 1.23)



Hình 1.23

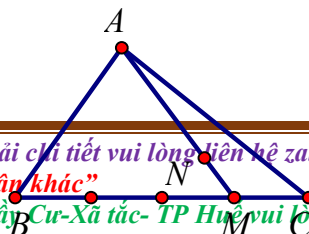
- a) Vì $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ suy ra M thuộc cạnh AB và $AM = \frac{1}{3}AB$; $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$, suy ra N thuộc tia BC và $CN = 2BC$.
- b) Ta có: $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$
- $$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -2\vec{a} + 3\vec{b}$$
- $$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3}\vec{a} - 2\vec{a} + 3\vec{b} = -\frac{7}{3}\vec{a} + 3\vec{b}.$$
- c) Ta có: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b} = -\frac{1}{3}(-2\vec{a} + 3\vec{b})$
- $$\Rightarrow \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AN} \Rightarrow A, I, N \text{ thẳng hàng.}$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC , trên cạnh BC lấy M sao cho $BM = 3CM$, trên đoạn AM lấy N sao cho $2AN = 5MN$. G là trọng tâm tam giác ABC .

- a) Phân tích các vector $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ qua các véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$
- b) Phân tích các vector $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{MN}$ qua các véc tơ $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GB}$

Lời giải (hình 1.24)

- a) Theo giả thiết ta có: $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AN} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AM}$



$$\text{suy ra } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{5}{7}\overrightarrow{AM}$$

$$= -\overrightarrow{AB} + \frac{5}{7}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{23}{28}\overrightarrow{AB} + \frac{15}{28}\overrightarrow{AC}$$

b) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ suy ra $\overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{7}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$= -\frac{1}{14}(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}) - \frac{3}{14}(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA})$$

$$= -\frac{1}{14}(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}) - \frac{3}{14}(-\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA})$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{GA} + \frac{1}{7}\overrightarrow{GB}$$

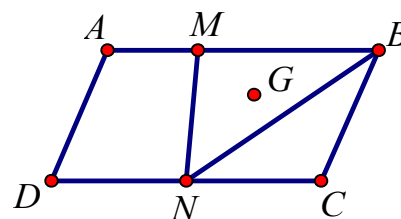
Ví dụ 3: Cho hình bình hành ABCD. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh AB và CD sao cho $AB = 3AM$, $CD = 2CN$ và G là trọng tâm tam giác MNB. Phân tích các vectơ $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AG}$ qua các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

Lời giải (hình 1.25)

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$= -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$



Hình 1.25

Vì G là trọng tâm tam giác MNB nên

$$3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{AB} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AG} = \frac{5}{18}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

Dạng 4: Tìm tập hợp điểm thỏa mãn điều kiện vector cho trước.**1. Phương pháp giải.**

Để tìm tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện vector ta quy về một trong các dạng sau

- Nếu $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$ với A, B phân biệt cho trước thì M thuộc đường trung trực của đoạn AB.
- Nếu $|\overrightarrow{MC}| = k \cdot |\overrightarrow{AB}|$ với A, B, C phân biệt cho trước thì M thuộc đường tròn tâm C, bán kính bằng $k \cdot |\overrightarrow{AB}|$.
- Nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BC}$ với A, B, C phân biệt và k là số thực thay đổi thì
 - + M thuộc đường thẳng qua A song song với BC với $k \in \mathbb{R}$
 - + M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và cùng hướng $\overrightarrow{BC}$ với $k > 0$
 - + M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và ngược hướng $\overrightarrow{BC}$ với $k < 0$
- Nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BC}$, $B \neq C$ với A, B, C thẳng hàng và k thay đổi thì tập hợp điểm M là đường thẳng BC

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC

- a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn : $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.
- b) Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn : $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|$.

Lời giải

a) Ta có: $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} + 3(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) + 4(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow 9\overrightarrow{IA} = -3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -\frac{3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}{9} \Rightarrow$ I tồn tại và duy nhất.

b) Với I là điểm được xác định ở câu a, ta có:

$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = 9\overrightarrow{MI} + (2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC}) = 9\overrightarrow{MI} \text{ và } \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} \text{ nên}$$

$$|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}| \Leftrightarrow |9\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow MI = \frac{AB}{9}$$

Vậy quỹ tích của M là đường tròn tâm I bán kính $\frac{AB}{9}$.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện sau :

a) $\left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \right| = \left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} \right|$

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC})$ với k là số thực thay đổi

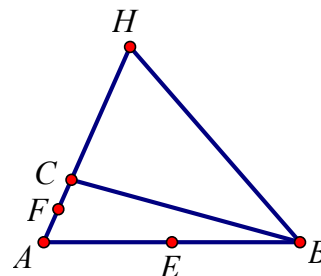
Lời giải (hình 1.28)

a) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC suy ra

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{ME} \quad \text{và} \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MF}$$

Khi đó $\left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \right| = \left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} \right|$

$$\Leftrightarrow \left| 2\overrightarrow{ME} \right| = \left| 2\overrightarrow{MF} \right| \Leftrightarrow ME = MF$$



Hình 1.28

Vậy tập hợp các điểm M là đường trung trực của EF

b) Ta có $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) - 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC})$

$$= 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{HB}$$

Với H là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Suy ra $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC})$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{ME} = 2k\overrightarrow{HB} \Leftrightarrow \overrightarrow{ME} = k\overrightarrow{HB}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua E và song song với HB

Ví dụ 3: Cho tứ giác ABCD. Với số k tùy ý, lấy các điểm M và N sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DC}$. Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn thẳng MN khi k thay đổi.

Lời giải (hình 1.29)

Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của AD và BC, ta có

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'B} \quad \text{và} \quad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'C}$$

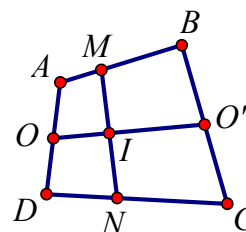
Suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{OO'}$

Tương tự vì O, I lần lượt là trung điểm của AD và MN nên

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{OI}$$

Do đó $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{DC}) = k\overrightarrow{OO'}$

Vậy khi k thay đổi, tập hợp điểm I là đường thẳng OO'



Hình 1.29

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho tam giác OAB vuông cân tại O , cạnh $OA = a$. Tính $|\overrightarrow{2OA} - \overrightarrow{OB}|$.

- A. a . B. $(1 + \sqrt{2})a$. C. $a\sqrt{5}$. D. $2a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi C là điểm đối xứng của O qua $A \Rightarrow OC = 2a$. Tam giác OBC vuông tại O , có $BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = a\sqrt{5}$.

Ta có $2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BC}$, suy ra $|\overrightarrow{2OA} - \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{BC}| = a\sqrt{5}$.

Câu 2: Cho tam giác OAB vuông cân tại O , cạnh $OA = a$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $|\overrightarrow{3OA} + 4\overrightarrow{OB}| = 5a$. B. $|\overrightarrow{2OA}| + |\overrightarrow{3OB}| = 5a$.
C. $|\overrightarrow{7OA} - 2\overrightarrow{OB}| = 5a$. D. $|\overrightarrow{11OA}| - |\overrightarrow{6OB}| = 5a$.

Lời giải

Chọn C.

Dựa vào các đáp án, ta có nhận xét sau:

- **A đúng**, gọi C nằm trên tia đối của tia AO sao cho $OC = 3OA \Rightarrow \overrightarrow{3OA} = \overrightarrow{OC}$. Và D nằm trên tia đối của tia BO sao cho $OD = 4OB \Rightarrow \overrightarrow{4OB} = \overrightarrow{OD}$. Dựng hình chữ nhật $OCED$ suy ra $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE}$ (quy tắc hình bình hành).

Ta có $|\overrightarrow{3OA} + 4\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}| = |\overrightarrow{OE}| = OE = CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = 5a$.

- **B đúng**, vì $|\overrightarrow{2OA}| + |\overrightarrow{3OB}| = 2|\overrightarrow{OA}| + 3|\overrightarrow{OB}| = 2a + 3a = 5a$.

- **C sai**, xử lý tương tự như ý đáp án A. Chọn C.

- **D đúng**, vì $|\overrightarrow{11OA}| - |\overrightarrow{6OB}| = 11|\overrightarrow{OA}| - 6|\overrightarrow{OB}| = 11a - 6a = 5a$.

Câu 3: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC , I là trung điểm của AM . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + 2\overrightarrow{IA} = \vec{0}$.
C. $2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn B.

Vì M là trung điểm BC nên $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IM}$. Mặt khác I là trung điểm AM nên $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IM} = \vec{0}$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"

Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT: 0834 332 133

Suy ra $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + 2\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IM} + 2\overrightarrow{IA} = 2(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IA}) = \vec{0}$.

Câu 4: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC , I là trung điểm của AM . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

B. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$.

C. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn A.

Vì M là trung điểm BC nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$. (1) Mặt khác I là trung điểm AM nên $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM}$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Câu 5: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC , G là trọng tâm của tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

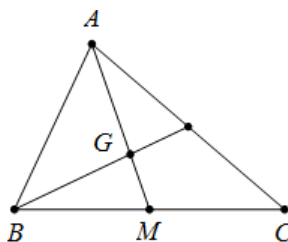
B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn B.



Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. Vì M là trung điểm của BC nên

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Do đó $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Câu 6: Cho tứ giác $ABCD$. Trên cạnh AB , CD lấy lần lượt các điểm M , N sao cho $3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$ và $3\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{DC}$. Tính vector $\overrightarrow{MN}$ theo hai vector $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$

D. $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}.$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } 3\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} + 2(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}) \\ &= (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{DN} + 2\overrightarrow{CN}). \end{aligned}$$

Theo bài ra, ta có $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{DN} + 2\overrightarrow{CN} = \vec{0}.$

$$\text{Vậy } 3\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Câu 7: Cho hình thang $ABCD$ có đáy là AB và CD . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DC}.$

B. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BN}.$

C. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}).$

D. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$

Lời giải

Chọn D.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của $AD, BC \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \vec{0} \\ \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0} \end{cases}$. Dựa vào đáp án, ta có

nhận xét sau:

- **A đúng**, vì $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{MN}.$
- **B đúng**, vì $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BN} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MN}.$
- **C đúng**, vì $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}.$

Suy ra

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MN} &= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + (\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN}) = \vec{0} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \\ \longrightarrow \overrightarrow{MN} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}). \end{aligned}$$

- **D sai**, vì theo phân tích ở đáp án C. **Chọn D.**

Câu 8: Cho hình bình hành $ABCD$ có M là trung điểm của AB . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}.$

B. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}.$

C. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC}.$

D. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}.$

Lời giải

Chọn C.

Xét các đáp án ta thấy bài toán yêu cầu phân tích vector $\overrightarrow{DM}$ theo hai vector $\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$. Vì M là trung điểm AB nên

$$2\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{DM} = 2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{DM} = -2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$$

suy ra $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC}.$

Câu 9: Cho tam giác ABC , điểm M thuộc cạnh AB sao cho $3AM = AB$ và N là trung điểm của AC . Tính $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$

B. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$

C. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$

D. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$

Lời giải

Chọn B.

Vì N là trung điểm AC nên

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}. \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

Suy ra $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$

Câu 10: Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N chia cạnh BC theo ba phần bằng nhau $BM = MN = NC$. Tính $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$

B. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$

C. $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$

D. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$

Câu 11: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC . Tính $\overrightarrow{AB}$ theo $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Câu 12: Cho tam giác ABC , gọi M là trung điểm AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NC = 2NA$. Gọi K là trung điểm của MN . Khi đó

A. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

Câu 13: Cho hình bình hành $ABCD$. Tính $\overrightarrow{AB}$ theo $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$.

A. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

B. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

D. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.

Lời giải

Chọn A.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} \end{cases}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} \longrightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

Câu 14: Cho tam giác ABC và đặt $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Cặp vectơ nào sau đây cùng phương?

A. $2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + 2\vec{b}$.

B. $2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} - 2\vec{b}$.

C. $5\vec{a} + \vec{b}$, $-10\vec{a} - 2\vec{b}$.

D. $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$.

Lời giải

Chọn C.

Để thấy $-10\vec{a} - 2\vec{b} = -2(5\vec{a} + \vec{b}) \longrightarrow$ hai vector $5\vec{a} + \vec{b}$, $-10\vec{a} - 2\vec{b}$ cùng phương.

Câu 15: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm và I là trung điểm của BC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\vec{GA} = 2\vec{GI}$.

B. $\vec{IG} = -\frac{1}{3}\vec{IA}$.

C. $\vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{GI}$.

D. $\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{GA}$.

Lời giải

Chọn C.

Vì I là trung điểm của BC suy ra $\vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \vec{GB} = \vec{GI} + \vec{IB} \\ \vec{GC} = \vec{GI} + \vec{IC} \end{cases} \Rightarrow \vec{GB} + \vec{GC} = \underbrace{\vec{IB} + \vec{IC}}_{\vec{0}} + 2\vec{GI} = 2\vec{GI}.$$

Câu 16: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm và M là trung điểm BC . Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\vec{GA} = -\frac{2}{3}\vec{AM}$.

B. $\vec{AB} + \vec{AC} = 3\vec{AG}$.

C. $\vec{GA} = \vec{BG} + \vec{CG}$.

D. $\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{GM}$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Vì } M \text{ là trung điểm của } BC \text{ suy ra } \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}. \text{ Ta có } \begin{cases} \vec{GB} = \vec{GM} + \vec{MB} \\ \vec{GC} = \vec{GM} + \vec{MC} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{GB} + \vec{GC} = \underbrace{\vec{MB} + \vec{MC}}_{\vec{0}} + 2\vec{GM} = 2\vec{GM}.$$

Câu 17: Cho tam giác ABC vuông tại A , M là trung điểm của BC . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\vec{AM} = \vec{MB} = \vec{MC}$.

B. $\vec{MB} = \vec{MC}$.

C. $\vec{MB} = -\vec{MC}$.

D. $\vec{AM} = \frac{\vec{BC}}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Vì M là trung điểm của BC nên $\vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{MB} = -\vec{MC}$.

Câu 18: Cho tam giác ABC . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC . Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\vec{AB} = 2\vec{AM}$.

B. $\vec{AC} = 2\vec{NC}$.

C. $\vec{BC} = -2\vec{MN}$.

D. $\vec{CN} = -\frac{1}{2}\vec{AC}$.

Lời giải

Chọn C.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Suy ra MN là đường trung bình của tam giác

$ABC \longrightarrow MN = \frac{1}{2}BC$. Mà $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MN}$ là hai vectơ cùng hướng nên $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$.

Câu 19: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$.

B. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BG}$.

C. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CG}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi E là trung điểm của $AC \Rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BE}$. (1) Mà G là trọng tâm của tam giác ABC

$\Rightarrow \overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BG}$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2 \cdot \frac{3}{2}\overrightarrow{BG} = 3\overrightarrow{BG}$.

Câu 20: Cho tam giác đều ABC và điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{CI} = \frac{\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB}}{3}$.

B. $\overrightarrow{CI} = \frac{\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}}{3}$.

C. $\overrightarrow{CI} = -\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$.

D. $\overrightarrow{CI} = \frac{\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}}{-3}$.

Lời giải

Chọn C.

Từ giả thiết $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB} \Rightarrow B$ là trung điểm của $IA \Rightarrow \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$.

Lại có $\begin{cases} \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BI} \\ \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB}$.

$= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + 3(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = -2\overrightarrow{CA} + 4\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CI} = -\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$.

Câu 21: Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$.

B. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

C. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.

D. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}.$$

Câu 22: Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$.

B. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

D. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB} \text{ (vì } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \text{)}.$$

Câu 23: Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$.

C. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{CD}$.

D. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC} + \underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}}_{\vec{0}} = 2\overrightarrow{BC}.$$

Câu 24: Cho hình bình hành $ABCD$ có M là giao điểm của hai đường chéo. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM}$.

D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}. \text{ Suy ra điều trên không thể xảy ra vì } \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC}.$$

Câu 25: Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CA}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. M trùng A .

B. M trùng B .

C. M trùng C .

D. M là trọng tâm của tam giác ABC .

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có } 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CA} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA}.$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}. (*)$$

Đẳng thức (*) suy ra M là trọng tâm của tam giác ABC .

Câu 26: Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Đặt $\overrightarrow{GA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{GB} = \vec{b}$. Hãy tìm m, n để có $\overrightarrow{BC} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

A. $m = 1, n = 2$.

B. $m = -1, n = -2$.

C. $m = 2, n = 1$.

D. $m = -2, n = -1$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{BG} - (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) = -\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB}$ (do $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$).

Câu 27: Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng và điểm M thỏa mãn đẳng thức vector $\overrightarrow{MA} = x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC}$. Tính giá trị biểu thức $P = x + y$.

A. $P = 0$.

B. $P = 2$.

C. $P = -2$.

D. $P = 3$.

Lời giải

Chọn B.

Do $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên tồn tại các số thực x, y sao cho

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}, \forall M \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = x(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) + y(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC})$$

$$\Leftrightarrow (1 - x - y)\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow (x + y - 1)\overrightarrow{MA} = x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC}.$$

Theo bài ra, ta có $\overrightarrow{MA} = x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC}$ suy ra $x + y - 1 = 1 \Leftrightarrow x + y = 2$.

Câu 28: Cho hình chữ nhật $ABCD$ và số thực $k > 0$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = k$ là

A. một đoạn thẳng.

B. một đường thẳng.

C. một đường tròn.

D. một điểm.

Lời giải

Chọn C.

Gọi I là tâm của hình chữ nhật $ABCD$, ta có
$$\begin{cases} 2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} \\ 2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} \end{cases}, \forall M.$$

$$\text{Do đó } |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = k \Leftrightarrow |2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MI}| = k \Leftrightarrow 4|\overrightarrow{MI}| = k \Leftrightarrow |\overrightarrow{MI}| = \frac{k}{4}. (*)$$

Vì I là điểm cố định nên tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức (*) là đường tròn tâm I ,

$$\text{bán kính } R = \frac{k}{4}.$$

Câu 29: Cho hình chữ nhật $ABCD$ và I là giao điểm của hai đường chéo. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ là

- A. trung trực của đoạn thẳng AB .
- B. trung trực của đoạn thẳng AD .
- C. đường tròn tâm I , bán kính $\frac{AC}{2}$.
- D. đường tròn tâm I , bán kính $\frac{AB + BC}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD . Khi đó $\begin{cases} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{ME} \\ \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MF} \end{cases}, \forall M.$

Do đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| \Leftrightarrow 2|\overrightarrow{ME}| = 2|\overrightarrow{MF}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{ME}| = |\overrightarrow{MF}|. (*)$

Vì E, F là hai điểm cố định nên từ đẳng thức $(*)$ suy ra tập hợp các điểm M là trung trực của đoạn thẳng EF hay chính là trung trực của đoạn thẳng AD .

Câu 30: Cho hai điểm A, B phân biệt và cố định, với I là trung điểm của AB . Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ là

- A. đường tròn tâm I , đường kính $\frac{AB}{2}$.
- B. đường tròn đường kính AB .
- C. đường trung trực của đoạn thẳng AB .
- D. đường trung trực đoạn thẳng IA .

Lời giải

Chọn A.

Vì I là trung điểm của AB suy ra $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Do đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow |2\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{BA}| \Leftrightarrow MI = \frac{AB}{2}. (*)$

Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $(*)$ là đường tròn tâm I , bán kính

Câu 31: Cho hai điểm A, B phân biệt và cố định, với I là trung điểm của AB . Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}|$ là

- A. đường trung trực của đoạn thẳng AB .
- B. đường tròn đường kính AB .
- C. đường trung trực đoạn thẳng IA .
- D. đường tròn tâm A , bán kính AB .

Lời giải

Chọn A.

Chọn điểm E thuộc đoạn AB sao cho $EB = 2EA \Rightarrow 2\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$.

Chọn điểm F thuộc đoạn AB sao cho $FA = 2FB \Rightarrow 2\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } |2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| &= |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow |2\overrightarrow{ME} + 2\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB}| = |2\overrightarrow{MF} + 2\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FA}| \\ &\Leftrightarrow \left| 3\overrightarrow{ME} + \underbrace{2\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB}}_{\vec{0}} \right| = \left| 3\overrightarrow{MF} + \underbrace{2\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB}}_{\vec{0}} \right| \Leftrightarrow |3\overrightarrow{ME}| = |3\overrightarrow{MF}| \Leftrightarrow ME = MF. (*) \end{aligned}$$

Vì E, F là hai điểm cố định nên từ đẳng thức $(*)$ suy ra tập hợp các điểm M là trung trực của đoạn thẳng EF . Gọi I là trung điểm của AB suy ra I cũng là trung điểm của EF .

Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn $|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}|$ là đường trung trực của đoạn thẳng AB .

Câu 32: Cho tam giác đều ABC cạnh a , trọng tâm G . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}|$ là

A. đường trung trực của đoạn BC .

B. đường tròn đường kính BC .

C. đường tròn tâm G , bán kính $\frac{a}{3}$.

D. đường trung trực đoạn thẳng AG .

Lời giải

Chọn A.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, AC . Khi đó $\begin{cases} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} \\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MJ} \end{cases}$.

Theo bài ra, ta có $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow |2\overrightarrow{MI}| = |2\overrightarrow{MJ}| \Leftrightarrow MI = MJ$.

Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}|$ là đường trung trực của đoạn thẳng IJ , cũng chính là đường trung trực của đoạn thẳng BC vì IJ là đường trung bình của tam giác ABC .

Câu 33: Cho tam giác đều ABC cạnh a . Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|$ là đường tròn cố định có bán kính R . Tính bán kính R theo a .

A. $R = \frac{a}{3}$.

B. $R = \frac{a}{9}$.

C. $R = \frac{a}{2}$.

D. $R = \frac{a}{6}$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Ta có

$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + 4(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}).$$

$$\text{Chọn điểm } I \text{ sao cho } 2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA} = \vec{0}.$$

$$\text{Vì } G \text{ là trọng tâm của tam giác } ABC \text{ nên } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IG}.$$

$$\text{Khi đó } 9\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA} = \vec{0} \Leftrightarrow 9\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 9\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{CA}. (*)$$

$$\text{Do đó } |2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}| \Leftrightarrow |9\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC}| = |\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow 9MI = AB.$$

Vì I là điểm cố định thỏa mãn $(*)$ nên tập hợp các điểm M cần tìm là đường tròn tâm I , bán

$$\text{kính } R = \frac{AB}{9} = \frac{a}{9}.$$

Câu 34: Cho tam giác ABC . Có bao nhiêu điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn D.

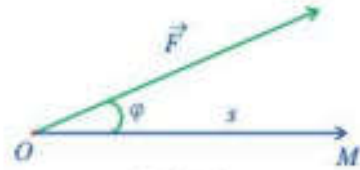
Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC nên G cố định duy nhất và $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

$$\text{Ta có } |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3 \Leftrightarrow |\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} - 3\overrightarrow{GM}| = 3 \Leftrightarrow 3|\overrightarrow{GM}| = 3 \Leftrightarrow GM = 1.$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm G bán kính bằng 1.

S6 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

Trong vật lí, nếu có một lực $\vec{F}$ tác động lên một vật tại điểm O và làm cho vật đó di chuyển một quãng đường $s = OM$ (Hình 63) thì công A của lực $\vec{F}$ được tính theo công thức $A = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{OM}| \cdot \cos \varphi$ trong đó $|\vec{F}|$ gọi là cường độ của lực $\vec{F}$ tính bằng Newton (N), $|\overrightarrow{OM}|$ là độ dài của vectơ $\overrightarrow{OM}$ tính bằng mét (m), φ là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\vec{F}$, còn công A tính bằng Jun (J).



Hình 63

Trong toán học, giá trị của biểu thức $A = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{OM}| \cdot \cos \varphi$ (không kể đơn vị đo) được gọi là gì?

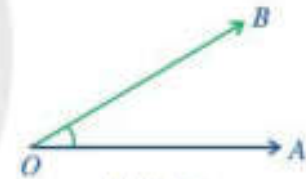


I. ĐỊNH NGHĨA

1. Tích vô hướng của hai vectơ có cùng điểm đầu

Cho hai vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ khác $\vec{0}$ trong mặt phẳng (Hình 64).

- Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ là góc giữa hai tia OA, OB và được kí hiệu là $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
- Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ là một số, kí hiệu $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$, được xác định bởi công thức:
 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.



Hình 64

Ví dụ 1 Cho tam giác ABC vuông cân tại A và $AB = 4$ cm.

- Tính độ dài cạnh huyền BC .
- Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Giải

a) $BC = AB\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ (cm).

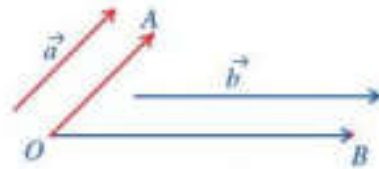
b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 4 \cdot 4 \cdot \cos \widehat{BAC} = 16 \cdot \cos 90^\circ = 16 \cdot 0 = 0$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} &= |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 4 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \cos \widehat{ABC} = 16\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ \\ &= 16\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 16. \end{aligned}$$

1 Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 30^\circ$, $AB = 3$ cm. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

2. Tích vô hướng của hai vectơ tùy ý

Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O và vẽ vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (Hình 65).



Hình 65

- Góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$, kí hiệu $(\vec{a}, \vec{b})$, là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$.
- Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} \cdot \vec{b}$, là tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$. Như vậy, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số thực được xác định bởi công thức: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Quy ước: Tích vô hướng của một vectơ bất kì với vectơ $\vec{0}$ là số 0.

Chú ý

- $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.
- Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$. Khi đó $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^\circ = 0$.
- Tích vô hướng của hai vectơ cùng hướng bằng tích hai độ dài của chúng.
- Tích vô hướng của hai vectơ ngược hướng bằng số đối của tích hai độ dài của chúng.

Ta có thể chứng minh chú ý thứ ba như sau:

Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ (khác $\vec{0}$) cùng hướng thì $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$. Do đó, $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$. Vì vậy, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Nếu một trong hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ là vectơ $\vec{0}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ và $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 0$ nên $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

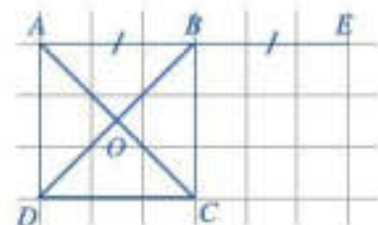
Chú ý thứ tư được chứng minh tương tự như trên.

Ví dụ 2 Cho hình vuông $ABCD$ tâm O có độ dài cạnh bằng a . Tính:

- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC}$; b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$; c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD}$.

Giải. (Hình 66)

- a) Ta có: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = \widehat{BAO} = 45^\circ$.



Hình 66

$$\begin{aligned}\text{Vậy } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{OC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}) \\ &= a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \cos 45^\circ = \frac{a^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2}.\end{aligned}$$

b) Vẽ vectơ $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$. Ta có:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BD}) = \widehat{EBD} = 135^\circ.$$

$$\begin{aligned}\text{Vậy } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) \\ &= a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ = a^2\sqrt{2} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = -a^2.\end{aligned}$$

c) Vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BO}) = \widehat{EBO} = 135^\circ$.

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{OD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OD}) = a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \cos 135^\circ = \frac{a^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = -\frac{a^2}{2}.$$

2 Cho tam giác ABC đều cạnh a , AH là đường cao. Tính:
a) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BA}$;
b) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$.

II. TÍNH CHẤT

Với hai vectơ bất kì $\vec{a}$, $\vec{b}$ và số thực k tùy ý, ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân phối);
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$;
- $\vec{a}^2 \geq 0$, $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

Trong đó, kí hiệu $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2$ và biểu thức này được gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

Ví dụ 3 Cho đoạn thẳng AB và I là trung điểm của AB. Chứng minh rằng với mỗi điểm O ta có:

a) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IB} = 0$;

b) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2)$.

Giải

a) Vì I là trung điểm AB nên $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

$$\text{Vậy } \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{OI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{OI} \cdot \vec{0} = 0.$$

b) Vì I là trung điểm AB nên $2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA})$.

$$\begin{aligned}\text{Vậy } \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}) \cdot (-\overrightarrow{OA}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2).\end{aligned}$$

Ví dụ 4 Cho tam giác ABC vuông tại A . Tính:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}.$$

Giải

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos 90^\circ \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

3 Chứng minh rằng với hai vectơ bất kì $\vec{a}, \vec{b}$, ta có:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2;$$

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2;$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2.$$

III. MỘT SỐ ỨNG DỤNG

1. Tính độ dài của đoạn thẳng

Nhận xét

Với hai điểm A, B phân biệt, ta có: $\overrightarrow{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$.

Do đó độ dài đoạn thẳng AB được tính như sau: $AB = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$.

Ví dụ 5 (Định lý cosin trong tam giác)

Chứng minh rằng trong tam giác ABC , ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

Giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\begin{aligned}\text{Suy ra: } BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}), \\ &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.\end{aligned}$$

4 Sử dụng tích vô hướng, chứng minh định lý Pythagore:

Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

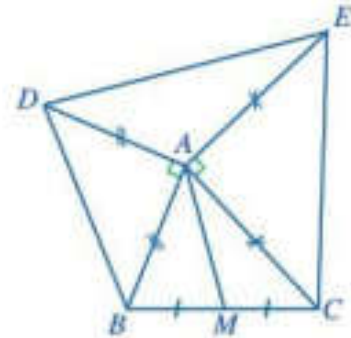
2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Nhận xét: Cho hai vectơ bất kì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$. Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

Hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Cũng như vậy, hai đường thẳng a và b vuông góc khi và chỉ khi $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, trong đó $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, giá của vectơ $\vec{u}$ song song hoặc trùng với đường thẳng a và giá của vectơ $\vec{v}$ song song hoặc trùng với đường thẳng b .

Ví dụ 6 Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$, $\widehat{A} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của BC . Về phía ngoài tam giác vẽ các tam giác vuông cân tại A là ABD và ACE (Hình 67).



Hình 67

- a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$;
b) Biểu diễn $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. Từ đó chứng minh $AM \perp DE$.

Giải

- a) Do $\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = 150^\circ$, $\widehat{CAD} = \widehat{CAB} + \widehat{BAD} = 150^\circ$ nên

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = AB \cdot AE \cdot \cos \widehat{BAE} = 3 \cdot 4 \cdot \cos 150^\circ = 12 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = -6\sqrt{3};$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = AC \cdot AD \cdot \cos \widehat{CAD} = 4 \cdot 3 \cdot \cos 150^\circ = 12 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = -6\sqrt{3}.$$

- b) Ta có:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \quad \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}.$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}).$$

Vì $AB \perp AD$, $AC \perp AE$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$.

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(-6\sqrt{3} + 0 - 0 + 6\sqrt{3}) = 0. \text{ Vậy } AM \perp DE.$$

BÀI TẬP

1. Nếu hai điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NM} = -4$ thì độ dài đoạn thẳng MN bằng bao nhiêu?

A. $MN = 4$; B. $MN = 2$; C. $MN = 16$; D. $MN = 256$.

2. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$;
B. Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) > 90^\circ$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$;
C. Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$;
D. Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) \neq 90^\circ$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$.

3. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$ trong mỗi trường hợp sau:

- a) $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, (\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$;
b) $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 6, (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$;
c) $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng;
d) $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

4. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính các tích vô hướng sau:

- a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$; b) $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$.

5. Cho tam giác ABC . Chứng minh:

$$AB^2 + \vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{AB} \cdot \vec{CA} = 0.$$

6. Cho tam giác nhọn ABC , kẻ đường cao AH . Chứng minh rằng:

- a) $\vec{AB} \cdot \vec{AH} = \vec{AC} \cdot \vec{AH}$;
b) $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \vec{HB} \cdot \vec{BC}$.

7. Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ 700 km/h thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ 40 km/h (Hình 68). Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị km/h).



Hình 68

8. Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Điểm D thỏa mãn $\vec{AD} = \frac{7}{12} \vec{AC}$.

- a) Tính $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
b) Biểu diễn $\vec{AM}, \vec{BD}$ theo $\vec{AB}, \vec{AC}$.
c) Chứng minh $AM \perp BD$.

CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.**Dạng 1: Tính tích vô hướng 2 vector và xác định góc của hai vectơ****1. Phương pháp giải.**

a) Để tính tích vô hướng của hai vectơ, ta có thể sử dụng:

+ Nếu có độ dài hai vectơ và góc giữa chúng, ta dùng định nghĩa $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$

+ Nếu là tích của tổng, hiệu các vectơ ta dùng tính chất của tích vô hướng

+ Nếu biết độ dài hai vectơ và độ dài của tổng hay hiệu của chúng, ta bình phương tổng hay hiệu của chúng

+ Nếu một vectơ cố định và một vectơ thay đổi ta có thể dùng định lý hình chiếu.

b) Để tính góc của hai vectơ, ta sử dụng công thức: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

2. Các ví dụ.

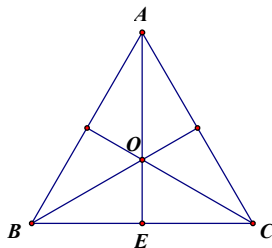
Câu 1. Cho tam giác ABC đều cạnh a , tâm O . Hãy tính:

a). $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

b). $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$

c). $(\vec{OB} + \vec{OC})(\vec{AB} - \vec{AC})$

d). $(\vec{AB} + 2\vec{AC})(\vec{AB} - 3\vec{BC})$

Lời giải

a). $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$

b). $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = -\vec{BA} \cdot \vec{BC} = -|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}| \cos(\vec{BA}, \vec{BC})$
 $= -BA \cdot BC \cdot \cos 60^\circ = -a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = -\frac{a^2}{2}$

c). Gọi E là trung điểm của BC có $\vec{OB} + \vec{OC} = 2\vec{OE}$, $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$;
 Do đó $(\vec{OB} + \vec{OC})(\vec{AB} - \vec{AC}) = 2\vec{OE} \cdot \vec{CB} = 2|\vec{OE}| \cdot |\vec{CB}| \cdot \cos(\vec{OE}, \vec{CB})$
 $= 2 \cdot OE \cdot CB \cos 90^\circ = 0$.

d). Khai triển biểu thức, ta được

$$D = (\vec{AB} + 2\vec{AC})(\vec{AB} - 3\vec{BC}) = \vec{AB}^2 - 3\vec{AB} \cdot \vec{BC} + 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} - 6\vec{AC} \cdot \vec{BC}$$

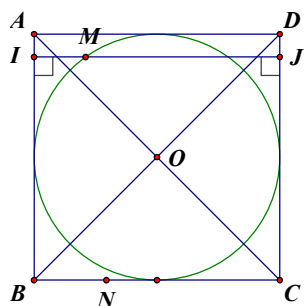
Chú ý rằng: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$

$$\text{Từ đó } D = a^2 + \frac{3a^2}{2} + a^2 - 3a^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Câu 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O . Hãy tính:

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$; $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$; $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$
- $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{AB}$ với N là điểm trên cạnh BC .
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$ với M nằm trên đường tròn nội tiếp hình vuông.

Lời giải

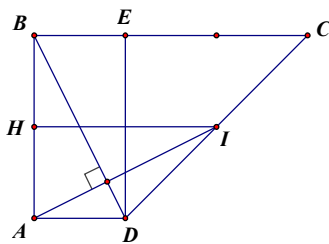


- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = -BA \cdot BC \cdot \cos 90^\circ = 0$
 - $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = -|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = -BA \cdot BD \cdot \cos 45^\circ = -a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -a^2$
 - $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$
 $= 0 + |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) = AC \cdot BC \cdot \cos 45^\circ = a^2$
- $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BO}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{AB}$ (do $\overrightarrow{BN} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$)
 $= \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA} = |\overrightarrow{BO}| \cdot |\overrightarrow{BA}| \cdot \cos(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2}$
 - $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BN}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}^2 = -a^2$
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA})(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB})$
 $= (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA})(\overrightarrow{MH} - \overrightarrow{HA}) = MH^2 - HA^2$

Câu 3. Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn $BC = 3a$, đáy nhỏ $AD = a$, đường cao $AB = 2a$

- Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$
- Gọi I là trung điểm của CD . Hãy tính góc giữa AI và BD .

Lời giải



$$\begin{aligned} & - \text{Dựng } DE \perp BC, E \in BC \Rightarrow ABED \text{ là hình chữ nhật. Do đó } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CD} \\ & = -\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC} = -|\overrightarrow{DE}| \cdot |\overrightarrow{DC}| \cdot \cos(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}) = -DE \cdot DC \cdot \cos 45^\circ = -2a \cdot 2a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -4a^2 \end{aligned}$$

$$- \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = 3 \cdot |\overrightarrow{BE}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \cos \widehat{DBE} = 3BE \cdot BD \cdot \frac{BE}{BD} = 3 \cdot a^2$$

$$\begin{aligned} & - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} - \underbrace{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 - \underbrace{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD}}_0 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} \\ & = |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos 0^\circ - \overrightarrow{AB}^2 = BC \cdot AD - AB^2 = 3a \cdot a - 4a^2 = -a^2 \end{aligned}$$

(Vì $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$; $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$).

b). Gọi H trung điểm của AB, suy ra HI là đường trung bình của hình thang ABCD, do đó

$$HI = \frac{AD + BC}{2} = 2a$$

$$\text{Có } \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{HI} - \overrightarrow{HA})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AD} - \underbrace{\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 - \underbrace{\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AD}}_0 + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AD} = HI \cdot AD \cdot \cos 0^\circ = 2a \cdot a = 2a^2$$

$$\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \text{ (do } \overrightarrow{HI} \perp \overrightarrow{AB}); \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \text{ (do } \overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{AD}).$$

$$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2 = -2a^2$$

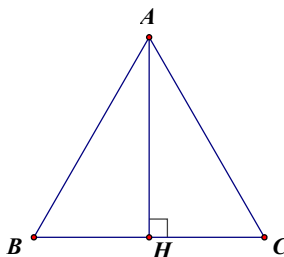
Vậy $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{BD} \Rightarrow$ góc giữa AI và BD bằng 90° .

Câu 4. Cho tam giác ABC đều cạnh a , đường cao AH. Tính:

a). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AH}$.

b). $(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH})$

Lời giải



a).

$$- \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$$

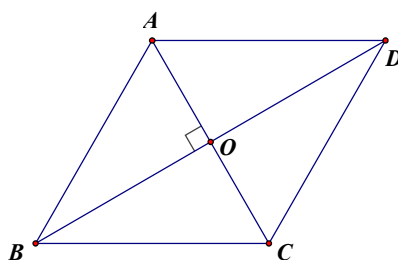
$$- \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -AB \cdot AH \cdot \cos \widehat{BAH} = -a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 30^\circ = -\frac{3a^2}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{b). } (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH}) &= \overrightarrow{AB}(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH}) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} \\ &= -2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -2 \cdot \frac{a^2}{2} - 3 \cdot \frac{3a^2}{4} = -\frac{13a^2}{4} \end{aligned}$$

Câu 5. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O cạnh bằng 7, góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB}$$

Lời giải



$$\text{Do } \widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC \text{ đều} \Rightarrow AC = 7, BO = \frac{7\sqrt{3}}{2} \text{ (đường cao tam giác đều } = \frac{\text{cạnh} \cdot \sqrt{3}}{2})$$

$$- \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = 7 \cdot 7 \cdot \cos 60^\circ = \frac{49}{2}.$$

$$- \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = -AB \cdot AO \cdot \cos 60^\circ = -7 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{49}{4}$$

$$- \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \text{ (do } \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD})$$

$$- \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BO} = BA \cdot BO \cdot \cos \widehat{ABO} = a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 30^\circ = \frac{3a^2}{4}$$

Câu 6. Cho các vector $\vec{a}, \vec{b}$ có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = 3$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Lời giải

$$\text{Ta có } |2\vec{a} - 3\vec{b}| = 3 \Leftrightarrow (2\vec{a} - 3\vec{b})^2 = 16 \Leftrightarrow 4\vec{a}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 - 12|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) + 9b^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow 4 - 12\cos(\vec{a}, \vec{b}) + 9 = 16 \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{4}.$$

Câu 7. Cho các vector $\vec{a}, \vec{b}$ có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai vector bằng 60° . Xác định cosin góc giữa hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ với $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$.

Lời giải

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. “Tránh mua các trang và các cá nhân khác”

Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT: 0834 332 133

$$\text{Ta có } \vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b}^2 = a^2 + |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) - 2b^2 = -\frac{1}{2}.$$

$$\bullet \vec{u}^2 = (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2 = 1 + 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ + 4 \cdot 1 = 7 \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{7}$$

$$\bullet \vec{v}^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ + 1 = 1 \Rightarrow |\vec{v}| = 1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{7} \cdot 1} = -\frac{\sqrt{7}}{14}.$$

Câu 8. Trong mặt phẳng Oxy cho $A(1;1), B(2;4), C(10;-2)$

a). Chứng minh rằng ABC là tam giác vuông.

b). Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ suy ra $\cos B$

Lời giải

$$\text{a). } |\overrightarrow{AB}| = AB = \sqrt{10}, |\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{90}, |\overrightarrow{BC}| = BC = \sqrt{100}$$

$$\text{Có } BC^2 = AB^2 + AC^2 = 100 \Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại } A.$$

$$\text{b). Có } \overrightarrow{BA} = (-1; -3), \overrightarrow{BC} = (8; -6) \Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-1) \cdot 8 + (-3) \cdot (-6) = 10$$

$$\text{Ngoài ra } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$$

$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{10}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{100}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Câu 9. Cho hai vector đơn vị $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn điều kiện $|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$; $|\vec{a} + \vec{b}|$

Lời giải

$$|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3} \Rightarrow (2\vec{a} - \vec{b})^2 = 3 \Leftrightarrow 4\vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 3 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{3 - 4 - 1}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Có } (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 1 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = 1$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vector cùng hướng và đều khác vector $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$.

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

$$\text{Do } \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ là hai vector cùng hướng nên } (\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \longrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1.$$

$$\text{Vậy } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$$

Câu 2. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

A. $\alpha = 180^\circ$.

B. $\alpha = 0^\circ$.

C. $\alpha = 90^\circ$.

D. $\alpha = 45^\circ$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

$$\text{Mà theo giả thiết } \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|, \text{ suy ra } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ.$$

Câu 3. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 30^\circ$.

B. $\alpha = 45^\circ$.

C. $\alpha = 60^\circ$.

D. $\alpha = 120^\circ$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \longrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3}{3 \cdot 2} = -\frac{1}{2} \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ.$$

Câu 4. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và hai vectơ $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 90^\circ$.

B. $\alpha = 180^\circ$.

C. $\alpha = 60^\circ$.

D. $\alpha = 45^\circ$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \vec{u} \perp \vec{v} \longrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b} \right) (\vec{a} + \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5}\vec{a}^2 - \frac{13}{5}\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b}^2 = 0$$

$$\xrightarrow{|\vec{a}|=|\vec{b}|=1} \vec{a} \cdot \vec{b} = -1.$$

$$\text{Suy ra } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = -1 \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ.$$

Câu 5. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 \right).$

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right).$

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right).$

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} \left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right).$

Lời giải

Chọn C

Nhận thấy C và D chỉ khác nhau về hệ số $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{4}$ nên đáp án sai sẽ rơi vào C hoặc D.

$$\text{Ta có } |\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b} \longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} \left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right).$$

$$\bullet \text{ A đúng, vì } |\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 \right).$$

• B đúng, vì $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right).$$

Câu 6. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2}$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ là góc $\widehat{A}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$.

Câu 7. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ là góc ngoài của góc $\widehat{B}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$.

Câu 8. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và có $AB = AC = a$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$.
C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ là góc ngoài của góc $\widehat{B}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 135^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ = -a^2$.

Câu 9. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB = c$, $AC = b$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2$. B. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2$.
C. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 + c^2$. D. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 - c^2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = BA \cdot BC \cdot \cos \widehat{B} = c \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = c^2$.

Cách khác. Tam giác ABC vuông tại A suy ra $AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 = c^2.$$

Câu 10. Cho tam giác ABC có $AB = 2 \text{ cm}$, $BC = 3 \text{ cm}$, $CA = 5 \text{ cm}$. Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

A. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 13$.

B. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 15$.

C. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 17$.

D. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 19$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $AB + BC = CA \Rightarrow$ ba điểm A, B, C thẳng hàng và B nằm giữa A, C .

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 3 \cdot 5 \cdot \cos 0^\circ = 15.$$

Cách khác. Ta có $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})^2 = CB^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + CA^2$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(CB^2 + CA^2 - AB^2) = \frac{1}{2}(3^2 + 5^2 - 2^2) = 15.$$

Câu 11. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Tính $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $P = b^2 - c^2$.

B. $P = \frac{c^2 + b^2}{2}$.

C. $P = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$.

D. $P = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

$$= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = AC^2 - AB^2 = b^2 - c^2.$$

Câu 12. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{b^2 - c^2}{2}$.

B. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2}{2}$.

C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$.

D. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Vì M là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$.

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2) = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2) = \frac{b^2 - c^2}{2}.$$

Câu 13. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$.

B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 \sqrt{2}$.

C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2$.

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} a^2$.

Lời giải

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa. “Tránh mua các trang và các cá nhân khác”

Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng

Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT: 0834 332 133

Chọn A

Ta có $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 45^\circ$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = a \cdot a \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$.

Câu 14. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $P = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA})$.

- A. $P = -1$. B. $P = 3a^2$. C. $P = -3a^2$. D. $P = 2a^2$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $AC = a\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC}^2 \\ &= -CA \cdot CD \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) - AC^2 = -a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 45^\circ - (a\sqrt{2})^2 = -3a^2. \end{aligned}$$

Câu 15. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA})$.

- A. $P = 2\sqrt{2}a$. B. $P = 2a^2$. C. $P = a^2$. D. $P = -2a^2$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} BD = a\sqrt{2} \\ \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BD} \end{cases}$$

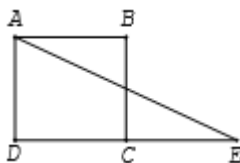
$$\begin{aligned} \text{Khi đó } P &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot 2\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} + 0 \\ &= -2 \cdot BA \cdot BD \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = -2 \cdot a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -2a^2. \end{aligned}$$

Câu 16. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua C . Tính $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}$.

- A. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$. B. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}a^2$. C. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a^2$. D. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 5a^2$.

Lời giải

Chọn A



Ta có C là trung điểm của DE nên $DE = 2a$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= DE \cdot AB \cdot \cos(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AB}) = DE \cdot AB \cdot \cos 0^\circ = 2a^2. \end{aligned}$$

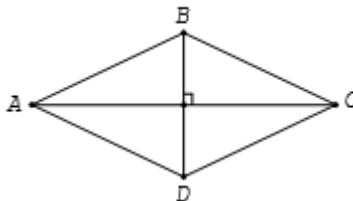
Câu 17. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8$, $AD = 5$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$.

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 62$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 64$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -62$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -64$.

Lời giải

Chọn D

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$ theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.



Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + 0 = -AB^2 = -64$.

Câu 18. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 8$ và $BD = 6$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 32$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $O = AC \cap BD$, giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.

Ta có

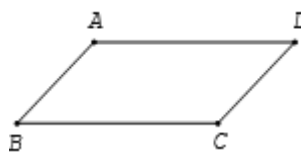
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + 0 = \frac{1}{2} AC^2 = 32.$$

Câu 19. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 8$ cm, $AD = 12$ cm, góc $\widehat{ABC}$ nhọn và diện tích bằng 54 cm². Tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.

- A. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \frac{2\sqrt{7}}{16}$. B. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{2\sqrt{7}}{16}$.
C. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \frac{5\sqrt{7}}{16}$. D. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{5\sqrt{7}}{16}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $S_{ABCD} = 2.S_{\triangle ABC} = 54 \Leftrightarrow S_{\triangle ABC} = 27$ cm². Diện tích tam giác ABC là:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{ABC}.$$

$$\Rightarrow \sin \widehat{ABC} = \frac{2 \cdot S_{\triangle ABC}}{AB \cdot AD} = \frac{2 \cdot 27}{8 \cdot 12} = \frac{9}{16}$$

$$\longrightarrow \cos \widehat{ABC} = \sqrt{1 - \sin^2 \widehat{ABC}} = \frac{5\sqrt{7}}{16} \text{ (vì } \widehat{ABC} \text{ nhọn)}.$$

Mặt khác góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ là góc ngoài của góc $\widehat{ABC}$

$$\text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \cos(180^\circ - \widehat{ABC}) = -\cos \widehat{ABC} = -\frac{5\sqrt{7}}{16}.$$

Câu 20. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD . Tính $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

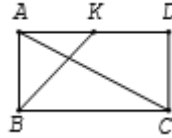
B. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2\sqrt{2}$.

C. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$.

D. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$.

Lời giải

Chọn A



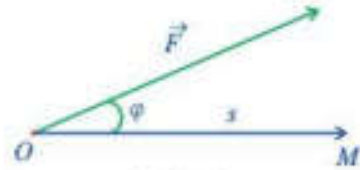
$$\text{Ta có } AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} &= \left(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \right) \\ &= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = -a^2 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(a\sqrt{2})^2 = 0. \end{aligned}$$

S6 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

Trong vật lí, nếu có một lực $\vec{F}$ tác động lên một vật tại điểm O và làm cho vật đó di chuyển một quãng đường $s = OM$ (Hình 63) thì công A của lực $\vec{F}$ được tính theo công thức $A = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{OM}| \cdot \cos \varphi$ trong đó $|\vec{F}|$ gọi là cường độ của lực $\vec{F}$ tính bằng Newton (N), $|\overrightarrow{OM}|$ là độ dài của vectơ $\overrightarrow{OM}$ tính bằng mét (m), φ là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\vec{F}$, còn công A tính bằng Jun (J).



Hình 63

Trong toán học, giá trị của biểu thức $A = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{OM}| \cdot \cos \varphi$ (không kể đơn vị đo) được gọi là gì?

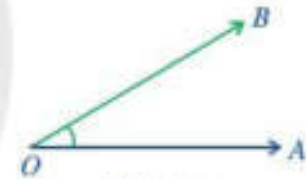


I. ĐỊNH NGHĨA

1. Tích vô hướng của hai vectơ có cùng điểm đầu

Cho hai vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ khác $\vec{0}$ trong mặt phẳng (Hình 64).

- Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ là góc giữa hai tia OA , OB và được kí hiệu là $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
- Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ là một số, kí hiệu $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$, được xác định bởi công thức:
 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.



Hình 64

Ví dụ 1 Cho tam giác ABC vuông cân tại A và $AB = 4$ cm.

- Tính độ dài cạnh huyền BC .
- Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Giải

a) $BC = AB\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ (cm).

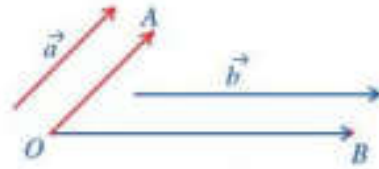
b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 4 \cdot 4 \cdot \cos \widehat{BAC} = 16 \cdot \cos 90^\circ = 16 \cdot 0 = 0$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} &= |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 4 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \cos \widehat{ABC} = 16\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ \\ &= 16\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 16. \end{aligned}$$

1 Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 30^\circ$, $AB = 3$ cm. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

2. Tích vô hướng của hai vectơ tùy ý

Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O và vẽ vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (Hình 65).



Hình 65

- Góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$, kí hiệu $(\vec{a}, \vec{b})$, là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$.
- Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} \cdot \vec{b}$, là tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$. Như vậy, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số thực được xác định bởi công thức: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Quy ước: Tích vô hướng của một vectơ bất kì với vectơ $\vec{0}$ là số 0.

Chú ý

- $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.
- Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$. Khi đó $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^\circ = 0$.
- Tích vô hướng của hai vectơ cùng hướng bằng tích hai độ dài của chúng.
- Tích vô hướng của hai vectơ ngược hướng bằng số đối của tích hai độ dài của chúng.

Ta có thể chứng minh chú ý thứ ba như sau:

Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ (khác $\vec{0}$) cùng hướng thì $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$. Do đó, $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$. Vì vậy, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Nếu một trong hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ là vectơ $\vec{0}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ và $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 0$ nên $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

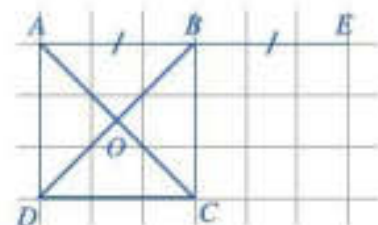
Chú ý thứ tư được chứng minh tương tự như trên.

Ví dụ 2 Cho hình vuông $ABCD$ tâm O có độ dài cạnh bằng a . Tính:

- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC}$; b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$; c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD}$.

Giải. (Hình 66)

- a) Ta có: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = \widehat{BAO} = 45^\circ$.



Hình 66

$$\begin{aligned}\text{Vậy } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{OC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}) \\ &= a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \cos 45^\circ = \frac{a^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2}.\end{aligned}$$

b) Vẽ vectơ $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$. Ta có:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BD}) = \widehat{EBD} = 135^\circ.$$

$$\begin{aligned}\text{Vậy } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) \\ &= a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ = a^2\sqrt{2} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = -a^2.\end{aligned}$$

c) Vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BO}) = \widehat{EBO} = 135^\circ$.

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{OD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OD}) = a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \cos 135^\circ = \frac{a^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{-a^2}{2}.$$

2 Cho tam giác ABC đều cạnh a , AH là đường cao. Tính:
a) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BA}$;
b) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$.

II. TÍNH CHẤT

Với hai vectơ bất kì $\vec{a}$, $\vec{b}$ và số thực k tùy ý, ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân phối);
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$;
- $\vec{a}^2 \geq 0$, $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

Trong đó, kí hiệu $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2$ và biểu thức này được gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

Ví dụ 3 Cho đoạn thẳng AB và I là trung điểm của AB. Chứng minh rằng với mỗi điểm O ta có:

- a) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IB} = 0$;
- b) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2)$.

Giải

a) Vì I là trung điểm AB nên $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

$$\text{Vậy } \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{OI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{OI} \cdot \vec{0} = 0.$$

b) Vì I là trung điểm AB nên $2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA})$.

$$\begin{aligned}\text{Vậy } \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}) \cdot (-\overrightarrow{OA}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2).\end{aligned}$$

Ví dụ 4 Cho tam giác ABC vuông tại A . Tính:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}.$$

Giải

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos 90^\circ \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

3 Chứng minh rằng với hai vectơ bất kì $\vec{a}, \vec{b}$, ta có:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2;$$

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2;$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2.$$

III. MỘT SỐ ỨNG DỤNG

1. Tính độ dài của đoạn thẳng

Nhận xét

Với hai điểm A, B phân biệt, ta có: $\overrightarrow{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$.

Do đó độ dài đoạn thẳng AB được tính như sau: $AB = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$.

Ví dụ 5 (Định lý cosin trong tam giác)

Chứng minh rằng trong tam giác ABC , ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

Giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\begin{aligned}\text{Suy ra: } BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}), \\ &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.\end{aligned}$$

4 Sử dụng tích vô hướng, chứng minh định lý Pythagore:

Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

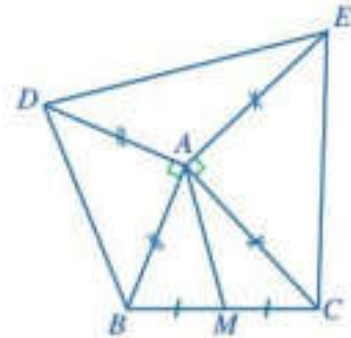
2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Nhận xét: Cho hai vectơ bất kì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$. Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

Hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Cũng như vậy, hai đường thẳng a và b vuông góc khi và chỉ khi $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, trong đó $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, giá của vectơ $\vec{u}$ song song hoặc trùng với đường thẳng a và giá của vectơ $\vec{v}$ song song hoặc trùng với đường thẳng b .

Ví dụ 6 Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$, $\widehat{A} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của BC . Về phía ngoài tam giác vẽ các tam giác vuông cân tại A là ABD và ACE (Hình 67).



Hình 67

- a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$;
b) Biểu diễn $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. Từ đó chứng minh $AM \perp DE$.

Giải

- a) Do $\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = 150^\circ$, $\widehat{CAD} = \widehat{CAB} + \widehat{BAD} = 150^\circ$ nên

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = AB \cdot AE \cdot \cos \widehat{BAE} = 3 \cdot 4 \cdot \cos 150^\circ = 12 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = -6\sqrt{3};$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = AC \cdot AD \cdot \cos \widehat{CAD} = 4 \cdot 3 \cdot \cos 150^\circ = 12 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = -6\sqrt{3}.$$

- b) Ta có:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \quad \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}.$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}).$$

Vì $AB \perp AD$, $AC \perp AE$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$.

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(-6\sqrt{3} + 0 - 0 + 6\sqrt{3}) = 0. \text{ Vậy } AM \perp DE.$$

BÀI TẬP

1. Nếu hai điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NM} = -4$ thì độ dài đoạn thẳng MN bằng bao nhiêu?

A. $MN = 4$; B. $MN = 2$; C. $MN = 16$; D. $MN = 256$.

2. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$;
B. Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) > 90^\circ$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$;
C. Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$;
D. Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) \neq 90^\circ$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$.

3. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$ trong mỗi trường hợp sau:

- a) $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, (\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$;
b) $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 6, (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$;
c) $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng;
d) $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

4. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính các tích vô hướng sau:

- a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$; b) $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$.

5. Cho tam giác ABC . Chứng minh:

$$AB^2 + \vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{AB} \cdot \vec{CA} = 0.$$

6. Cho tam giác nhọn ABC , kẻ đường cao AH . Chứng minh rằng:

- a) $\vec{AB} \cdot \vec{AH} = \vec{AC} \cdot \vec{AH}$;
b) $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \vec{HB} \cdot \vec{BC}$.

7. Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ 700 km/h thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ 40 km/h (Hình 68). Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị km/h).



Hình 68

8. Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Điểm D thỏa mãn $\vec{AD} = \frac{7}{12} \vec{AC}$.

- a) Tính $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
b) Biểu diễn $\vec{AM}, \vec{BD}$ theo $\vec{AB}, \vec{AC}$.
c) Chứng minh $AM \perp BD$.

CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Dạng 1: Tính tích vô hướng 2 vector và xác định góc của hai vectơ

1. Phương pháp giải.

a) Để tính tích vô hướng của hai vectơ, ta có thể sử dụng:

+ Nếu có độ dài hai vectơ và góc giữa chúng, ta dùng định nghĩa $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$

+ Nếu là tích của tổng, hiệu các vectơ ta dùng tính chất của tích vô hướng

+ Nếu biết độ dài hai vectơ và độ dài của tổng hay hiệu của chúng, ta bình phương tổng hay hiệu của chúng

+ Nếu một vectơ cố định và một vectơ thay đổi ta có thể dùng định lý hình chiếu.

b) Để tính góc của hai vectơ, ta sử dụng công thức: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

2. Các ví dụ.

Câu 10. Cho tam giác ABC đều cạnh a , tâm O . Hãy tính:

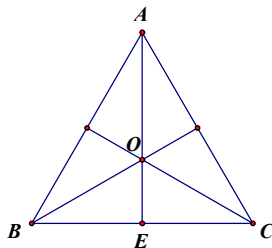
a). $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

b). $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$

c). $(\vec{OB} + \vec{OC})(\vec{AB} - \vec{AC})$

d). $(\vec{AB} + 2\vec{AC})(\vec{AB} - 3\vec{BC})$

Lời giải



a). $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$

b). $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = -\vec{BA} \cdot \vec{BC} = -|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}| \cos(\vec{BA}, \vec{BC})$
 $= -BA \cdot BC \cdot \cos 60^\circ = -a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = -\frac{a^2}{2}$

c). Gọi E là trung điểm của BC có $\vec{OB} + \vec{OC} = 2\vec{OE}$, $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$;
 Do đó $(\vec{OB} + \vec{OC})(\vec{AB} - \vec{AC}) = 2\vec{OE} \cdot \vec{CB} = 2|\vec{OE}| \cdot |\vec{CB}| \cdot \cos(\vec{OE}, \vec{CB})$
 $= 2 \cdot OE \cdot CB \cos 90^\circ = 0$.

d). Khai triển biểu thức, ta được

$$D = (\vec{AB} + 2\vec{AC})(\vec{AB} - 3\vec{BC}) = \vec{AB}^2 - 3\vec{AB} \cdot \vec{BC} + 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} - 6\vec{AC} \cdot \vec{BC}$$

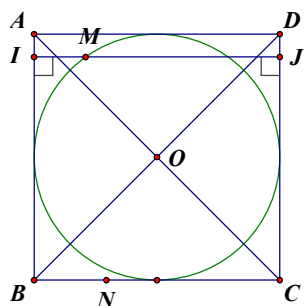
Chú ý rằng: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$

$$\text{Từ đó } D = a^2 + \frac{3a^2}{2} + a^2 - 3a^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Câu 11. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O . Hãy tính:

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$; $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$; $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$
- $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{AB}$ với N là điểm trên cạnh BC .
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$ với M nằm trên đường tròn nội tiếp hình vuông.

Lời giải



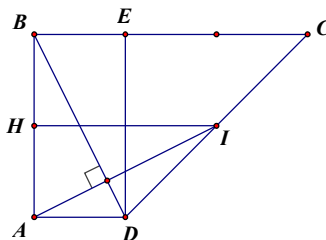
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = -BA \cdot BC \cdot \cos 90^\circ = 0$
 - $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = -|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = -BA \cdot BD \cdot \cos 45^\circ = -a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -a^2$
 - $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$
 $= 0 + |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) = AC \cdot BC \cdot \cos 45^\circ = a^2$
- $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BO}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{AB}$ (do $\overrightarrow{BN} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$)
 $= \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA} = |\overrightarrow{BO}| \cdot |\overrightarrow{BA}| \cdot \cos(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2}$
 - $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BN}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}^2 = -a^2$
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA})(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB})$
 $= (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA})(\overrightarrow{MH} - \overrightarrow{HA}) = MH^2 - HA^2$

Câu 12. Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn $BC = 3a$, đáy nhỏ $AD = a$, đường cao $AB = 2a$

- Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

b). Gọi I là trung điểm của CD . Hãy tính góc giữa AI và BD .

Lời giải



$$\begin{aligned} & - \text{Dựng } DE \perp BC, E \in BC \Rightarrow ABED \text{ là hình chữ nhật. Do đó } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CD} \\ & = -\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC} = -|\overrightarrow{DE}| \cdot |\overrightarrow{DC}| \cdot \cos(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}) = -DE \cdot DC \cdot \cos 45^\circ = -2a \cdot 2a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -4a^2 \end{aligned}$$

$$- \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = 3 \cdot |\overrightarrow{BE}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \cos \widehat{DBE} = 3BE \cdot BD \cdot \frac{BE}{BD} = 3 \cdot a^2$$

$$\begin{aligned} & - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} - \underbrace{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 - \underbrace{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD}}_0 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} \\ & = |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos 0^\circ - \overrightarrow{AB}^2 = BC \cdot AD - AB^2 = 3a \cdot a - 4a^2 = -a^2 \end{aligned}$$

(Vì $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$; $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$).

b). Gọi H trung điểm của AB , suy ra HI là đường trung bình của hình thang $ABCD$, do đó

$$HI = \frac{AD + BC}{2} = 2a$$

$$\text{Có } \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{HI} - \overrightarrow{HA})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AD} - \underbrace{\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 - \underbrace{\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AD}}_0 + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AD} = HI \cdot AD \cdot \cos 0^\circ = 2a \cdot a = 2a^2$$

$$\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \text{ (do } \overrightarrow{HI} \perp \overrightarrow{AB}); \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \text{ (do } \overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{AD}).$$

$$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2 = -2a^2$$

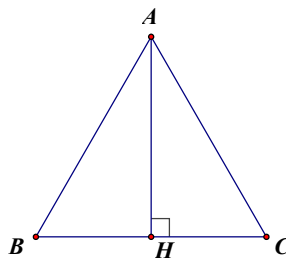
Vậy $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{BD} \Rightarrow$ góc giữa AI và BD bằng 90° .

Câu 13. Cho tam giác ABC đều cạnh a , đường cao AH . Tính:

a). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AH}$.

b). $(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH})$

Lời giải



a).

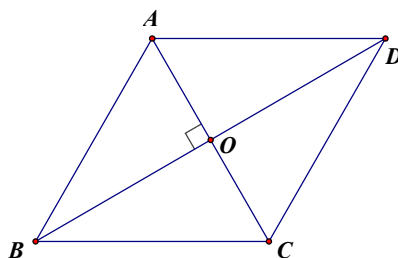
$$- \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$$

$$- \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -AB \cdot AH \cdot \cos \widehat{BAH} = -a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 30^\circ = -\frac{3a^2}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{b). } (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH}) &= \overrightarrow{AB}(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH}) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} \\ &= -2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -2 \cdot \frac{a^2}{2} - 3 \cdot \frac{3a^2}{4} = -\frac{13a^2}{4} \end{aligned}$$

Câu 14. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O cạnh bằng 7, góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính:
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB}$

Lời giải



Do $\widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ đều $\Rightarrow AC = 7, BO = \frac{7\sqrt{3}}{2}$ (đường cao tam giác đều $= \frac{\text{cạnh} \cdot \sqrt{3}}{2}$)

$$- \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = 7 \cdot 7 \cdot \cos 60^\circ = \frac{49}{2}.$$

$$- \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = -AB \cdot AO \cdot \cos 60^\circ = -7 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{49}{4}$$

$$- \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \text{ (do } \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD})$$

$$- \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BO} = BA \cdot BO \cdot \cos \widehat{ABO} = a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 30^\circ = \frac{3a^2}{4}$$

Câu 15. Cho các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = 3$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } |\vec{a} - 3\vec{b}| = 4 &\Leftrightarrow (2\vec{a} - 3\vec{b})^2 = 16 \Leftrightarrow 4\vec{a}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2 = 16 \\ &\Leftrightarrow 4a^2 - 12|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) + 9b^2 = 16 \\ &\Leftrightarrow 4 - 12\cos(\vec{a}, \vec{b}) + 9 = 16 \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Câu 16. Cho các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai vectơ bằng 60° . Xác định cosin góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ với $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{a} + 2\vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b}^2 = a^2 + |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) - 2b^2 = -\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \vec{u}^2 &= (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2 = 1 + 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ + 4 \cdot 1 = 7 \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{7} \\ \bullet \vec{v}^2 &= (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ + 1 = 1 \Rightarrow |\vec{v}| = 1 \end{aligned}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{7} \cdot 1} = -\frac{\sqrt{7}}{14}.$$

Câu 17. Trong mặt phẳng Oxy cho $A(1;1), B(2;4), C(10;-2)$

a). Chứng minh rằng ABC là tam giác vuông.

b). Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ suy ra $\cos B$

Lời giải

$$\text{a). } |\overrightarrow{AB}| = AB = \sqrt{10}, |\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{90}, |\overrightarrow{BC}| = BC = \sqrt{100}$$

$$\text{Có } BC^2 = AB^2 + AC^2 = 100 \Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại } A.$$

$$\text{b). Có } \overrightarrow{BA} = (-1; -3), \overrightarrow{BC} = (8; -6) \Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-1) \cdot 8 + (-3) \cdot (-6) = 10$$

$$\text{Ngoài ra } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$$

$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{10}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{100}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Câu 18. Cho hai vectơ đơn vị $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn điều kiện $|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$; $|\vec{a} + \vec{b}|$

Lời giải

$$|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3} \Rightarrow (2\vec{a} - \vec{b})^2 = 3 \Leftrightarrow 4\vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 3 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{3 - 4 - 1}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Có } (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 1 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = 1$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 21. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vector cùng hướng và đều khác vector $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Do $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vector cùng hướng nên $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \longrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$.

Vậy $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Câu 22. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

- A. $\alpha = 180^\circ$. B. $\alpha = 0^\circ$. C. $\alpha = 90^\circ$. D. $\alpha = 45^\circ$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Mà theo giả thiết $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, suy ra $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$.

Câu 23. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- A. $\alpha = 30^\circ$. B. $\alpha = 45^\circ$. C. $\alpha = 60^\circ$. D. $\alpha = 120^\circ$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \longrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3}{3 \cdot 2} = -\frac{1}{2} \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$.

Câu 24. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và hai vector $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- A. $\alpha = 90^\circ$. B. $\alpha = 180^\circ$. C. $\alpha = 60^\circ$. D. $\alpha = 45^\circ$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \longrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}\right)(\vec{a} + \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5}\vec{a}^2 - \frac{13}{5}\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b}^2 = 0$

$\xrightarrow{|\vec{a}|=|\vec{b}|=1} \vec{a} \cdot \vec{b} = -1$.

Suy ra $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = -1 \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$.

Câu 25. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$.

B. $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$.

C. $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$.

D. $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$.

Lời giải**Chọn C**

Nhận thấy C và D chỉ khác nhau về hệ số $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{4}$ nên đáp án sai sẽ rơi vào C hoặc D.

$$\text{Ta có } |\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2 = 4\vec{a}.\vec{b} \longrightarrow \vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2).$$

$$\bullet \text{ A đúng, vì } |\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}.\vec{a} + \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}.\vec{b}$$

$$\longrightarrow \vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2).$$

$$\bullet \text{ B đúng, vì } |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b}).(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}.\vec{a} - \vec{a}.\vec{b} - \vec{b}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}.\vec{b}$$

$$\longrightarrow \vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2).$$

Câu 26. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2a^2$.

B. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

C. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2}$.

D. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$.

Lời giải**Chọn D**

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ là góc $\widehat{A}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$.

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a.a.\cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

Câu 27. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = a^2$.

B. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

C. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$.

D. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$.

Lời giải**Chọn C**

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ là góc ngoài của góc $\widehat{B}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$.

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = AB.BC.\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = a.a.\cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}.$$

Câu 28. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và có $AB = AC = a$. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -a^2$.

B. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = a^2$.

C. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

D. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải**Chọn A**

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ là góc ngoài của góc $\widehat{B}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 135^\circ$.

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ = -a^2.$$

Câu 29. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB = c$, $AC = b$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2$.

B. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2$.

C. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 + c^2$.

D. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 - c^2$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = BA \cdot BC \cdot \cos \widehat{B} = c \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = c^2.$$

Cách khác. Tam giác ABC vuông tại A suy ra $AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 = c^2.$$

Câu 30. Cho tam giác ABC có $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm, $CA = 5$ cm. Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

A. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 13$.

B. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 15$.

C. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 17$.

D. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 19$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $AB + BC = CA \Rightarrow$ ba điểm A, B, C thẳng hàng và B nằm giữa A, C .

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 3 \cdot 5 \cdot \cos 0^\circ = 15.$$

$$\text{Cách khác. Ta có } AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})^2 = CB^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + CA^2$$

$$\longrightarrow \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(CB^2 + CA^2 - AB^2) = \frac{1}{2}(3^2 + 5^2 - 2^2) = 15.$$

Câu 31. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Tính $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $P = b^2 - c^2$.

B. $P = \frac{c^2 + b^2}{2}$.

C. $P = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$.

D. $P = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}).$$

$$= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = AC^2 - AB^2 = b^2 - c^2.$$

Câu 32. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{b^2 - c^2}{2}$.

B. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2}{2}$.

C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$.

D. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Vì M là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$.

$$\begin{aligned}\text{Khi đó } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2) = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2) = \frac{b^2 - c^2}{2}.\end{aligned}$$

Câu 33. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$. **B.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$. **C.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2$. **D.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a^2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 45^\circ$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = a \cdot a \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$.

Câu 34. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $P = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA})$.

A. $P = -1$. **B.** $P = 3a^2$. **C.** $P = -3a^2$. **D.** $P = 2a^2$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $AC = a\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}\text{Ta có } P &= \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC}^2 \\ &= -CA \cdot CD \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) - AC^2 = -a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 45^\circ - (a\sqrt{2})^2 = -3a^2.\end{aligned}$$

Câu 35. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA})$.

A. $P = 2\sqrt{2}a$. **B.** $P = 2a^2$. **C.** $P = a^2$. **D.** $P = -2a^2$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} BD = a\sqrt{2} \\ \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BD} \end{cases}$$

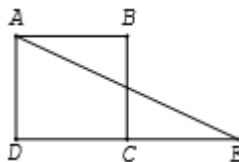
$$\begin{aligned}\text{Khi đó } P &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot 2\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} + 0 \\ &= -2 \cdot BA \cdot BD \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = -2 \cdot a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -2a^2.\end{aligned}$$

Câu 36. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua C . Tính $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}$.

A. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$. **B.** $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}a^2$. **C.** $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a^2$. **D.** $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 5a^2$.

Lời giải

Chọn A



Ta có C là trung điểm của DE nên $DE = 2a$.

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) \cdot \overrightarrow{AB} = \underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 + \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= DE \cdot AB \cdot \cos(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AB}) = DE \cdot AB \cdot \cos 0^\circ = 2a^2.$$

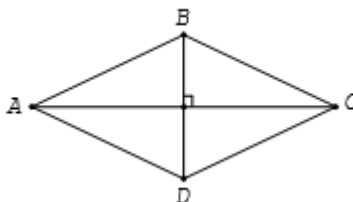
Câu 37. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8$, $AD = 5$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$.

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 62$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 64$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -62$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -64$.

Lời giải

Chọn D

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vector $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$ theo các vector có giá vuông góc với nhau.



$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + 0 = -AB^2 = -64.$$

Câu 38. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 8$ và $BD = 6$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 32$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $O = AC \cap BD$, giả thiết không cho góc, ta phân tích các vector $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ theo các vector có giá vuông góc với nhau.

Ta có

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + 0 = \frac{1}{2} AC^2 = 32.$$

Câu 39. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 8$ cm, $AD = 12$ cm, góc $\widehat{ABC}$ nhọn và diện tích bằng 54 cm².

Tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.

A. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \frac{2\sqrt{7}}{16}$.

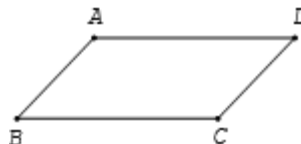
B. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{2\sqrt{7}}{16}$.

C. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \frac{5\sqrt{7}}{16}$.

D. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{5\sqrt{7}}{16}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $S_{ABCD} = 2.S_{\triangle ABC} = 54 \Leftrightarrow S_{\triangle ABC} = 27 \text{ cm}^2$. Diện tích tam giác ABC là:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{ABC}.$$

$$\Rightarrow \sin \widehat{ABC} = \frac{2.S_{\triangle ABC}}{AB \cdot AD} = \frac{2 \cdot 27}{8 \cdot 12} = \frac{9}{16}$$

$$\longrightarrow \cos \widehat{ABC} = \sqrt{1 - \sin^2 \widehat{ABC}} = \frac{5\sqrt{7}}{16} \text{ (vì } \widehat{ABC} \text{ nhọn)}.$$

Mặt khác góc giữa hai vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ là góc ngoài của góc $\widehat{ABC}$

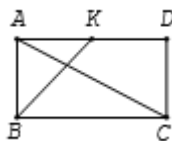
$$\text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \cos(180^\circ - \widehat{ABC}) = -\cos \widehat{ABC} = -\frac{5\sqrt{7}}{16}.$$

Câu 40. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD . Tính $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- A.** $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. **B.** $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2\sqrt{2}$. **C.** $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$. **D.** $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$.

Lời giải

Chọn A



$$\text{Ta có } AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} &= \left(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \right) \\ &= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = -a^2 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(a\sqrt{2})^2 = 0. \end{aligned}$$