

### CHỦ ĐỀ 3: VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

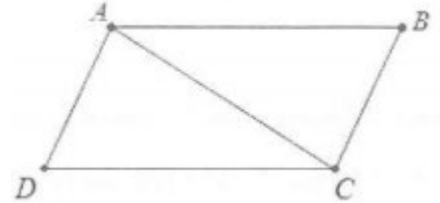
#### I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

##### 1. Định nghĩa:

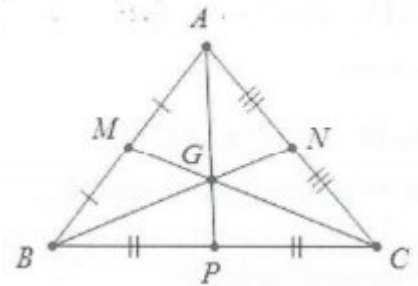
Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng. Kí hiệu  $\overrightarrow{AB}$  chỉ vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B. Vectơ còn được kí hiệu là  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$

##### 2. Các quy tắc về vectơ

- **Quy tắc 3 điểm:**  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$  hoặc  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$
- **Quy tắc hình bình hành:** Cho hình bình hành  $ACBD$  ta có:  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
- **Quy tắc trung điểm:** Nếu  $M$  là trung điểm của  $AB$  thì  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$
- **Quy tắc trung tuyến:** Nếu  $AP$  là trung tuyến của tam giác  $ABC$  thì  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$



Tương tự hình bên ta có: 
$$\begin{cases} \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BN} \\ \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CM} \end{cases}$$



- **Quy tắc trọng tâm:** Nếu  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  thì  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Khi đó với mọi điểm  $M$  ta có:  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

- **Quy tắc hình hộp:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  thì  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$

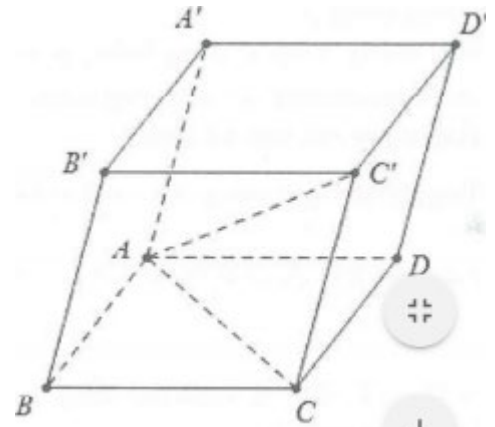
*Chứng minh:*

Ta có:  $ACC'A'$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'}$

Tương tự:  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$  suy ra  $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$

**Chú ý:** Nếu  $G$  là trọng tâm tứ diện  $ABCD$ , ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$$



##### 3. Sự đồng phẳng của các vectơ, điều kiện để ba vectơ đồng phẳng

**Định nghĩa:** Ba vectơ gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

**Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng:**

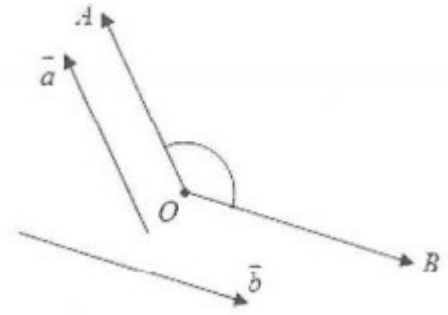
- **Định lý 1:** Điều kiện cần và đủ để ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng là  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương hoặc tồn tại các số  $m, n$  duy nhất sao cho  $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$

- **Định lí 2:** Nếu  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  là ba vector không đồng phẳng thì với mỗi vector  $\vec{d}$  trong không gian, ta tìm được các số  $m, n, p$  duy nhất sao cho

#### 4. Tích vô hướng của 2 vector

Góc giữa 2 vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$  được định nghĩa bằng góc  $AOB$  với  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}; \overrightarrow{OB} = \vec{b}$

Nếu  $\vec{a}$  hoặc  $\vec{b}$  bằng  $\vec{0}$  ta quy ước góc giữa chúng có thể nhận một giá trị tùy ý.



Tích vô hướng giữa 2 vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là một số, được kí

hiệu  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  và được xác định bởi  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}; \vec{b})$  từ đó suy ra cosin góc giữa 2 vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là

$$\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Đặc biệt khi  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \cos(\vec{a}; \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

**Tính chất:** Cho 3 vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  và số thực  $k$ . Khi đó ta có:

i)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

ii)  $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

iii)  $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \vec{a} \cdot (k\vec{b})$

iv)  $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$

#### Vector chỉ phương của đường thẳng:

Vector  $\vec{a} \neq \vec{0}$  được gọi là vector chỉ phương của đường thẳng  $d$  nếu giá của vector  $\vec{a}$  song song hoặc trùng với đường thẳng  $d$

Một đường thẳng  $d$  trong không gian hoàn toàn xác định nếu biết một điểm  $A$  thuộc  $d$  và một vector chỉ phương  $\vec{a}$  của đường thẳng  $d$ .

#### Ứng dụng của tích vô hướng

Tính độ dài đoạn thẳng  $AB$ :  $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$

Xác định góc giữa hai vector:  $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

## II. CÁC DẠNG TOÁN TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### Dạng 1: Chứng minh các đẳng thức vector, chứng minh 3 vector đồng phẳng.

*Phương pháp giải:*

Để chứng minh ba vector đồng phẳng, ta có thể chứng minh bằng một trong các cách:

- Chứng minh các giá của ba vector cùng song song với một mặt phẳng.

• Dựa vào điều kiện để ba vector đồng phẳng: tồn tại các số  $m, n$  duy nhất sao cho  $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$  thì 3 vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng.

Để biểu diễn vector  $\vec{x}$  theo 3 vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  không đồng phẳng ta tìm được các số  $m, n, p$  duy nhất sao cho  $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$

**Ví dụ 1:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I$  và  $J$  là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ .

- Hãy biểu diễn vector  $\vec{IJ}$  theo 3 vector  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$
- Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ . Hãy biểu diễn vector  $\vec{AG}$  theo 3 vector  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$

**Lời giải**

a) Ta có:  $\vec{IJ} = (\vec{IA} + \vec{AJ})$ , mặt khác  $\vec{IA} = -\vec{AI} = -\frac{1}{2}\vec{AB}$

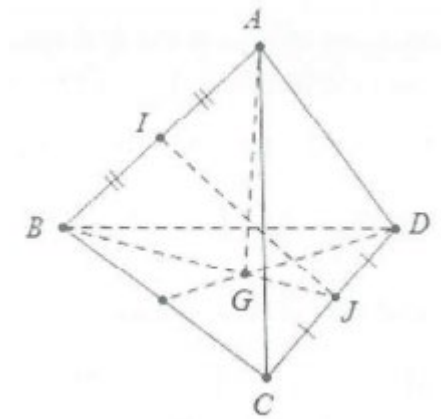
$$\vec{AJ} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AD}) \text{ (tính chất trung điểm)}$$

$$\text{Do đó } \vec{IJ} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AD}$$

b) Ta có: 
$$\begin{cases} \vec{AB} = \vec{AG} + \vec{GB} \\ \vec{AC} = \vec{AG} + \vec{GC} \\ \vec{AD} = \vec{AG} + \vec{GD} \end{cases}$$
 cộng vế theo vế ta được:

$$3\vec{AG} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}$$

Mặt khác  $\vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$  (do  $G$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ ). Do vậy  $\vec{AG} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}}{3}$



**Ví dụ 2:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Lấy các điểm  $M$  và  $N$  lần lượt thuộc  $AD$  và  $BC$  sao cho  $\vec{AM} = 3\vec{MD}$ ,  $\vec{NB} = -3\vec{NC}$ . Biết  $\vec{AB} = \vec{a}$ ,  $\vec{CD} = \vec{b}$ .

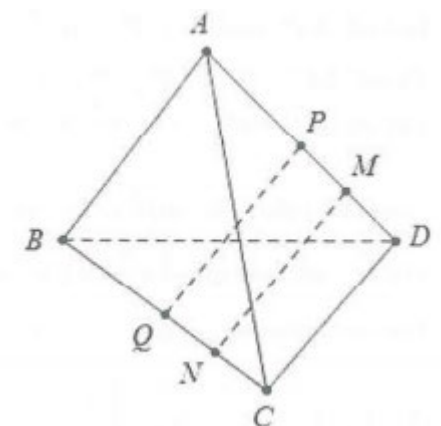
- Hãy biểu diễn vector  $\vec{MN}$  theo  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$
- Gọi  $P$  và  $Q$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Chứng minh rằng ba vector  $\vec{MN}, \vec{DC}, \vec{PQ}$  đồng phẳng.
- Gọi  $G$  là trung điểm của  $PQ$ , chứng minh rằng  $G$  là trọng tâm tứ diện  $ABCD$ .

**Lời giải**

a) Ta có:  $\vec{MN} = \vec{MD} + \vec{DC} + \vec{CN}$  (1)

Lại có:  $\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AB} + \vec{BN}$  (2)

Lấy (2) + 3.(1) ta được  $4\vec{MN} = \vec{AB} + 3\vec{DC}$



Do đó  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}$

b) Ta có: 
$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{DC}$$

Suy ra  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{DC}) \Rightarrow$  ba vector  $\overrightarrow{MN}$ ,  $\overrightarrow{DC}$ ,  $\overrightarrow{PQ}$  đồng phẳng.

c) Theo tính chất trung điểm ta có: 
$$\begin{cases} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GP} \\ \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GQ} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2(\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ})$$

Mặt khác  $\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Rightarrow G$  là trọng tâm tứ diện  $ABCD$ .

**Ví dụ 3:** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$

Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm của  $BB'$  và  $A'C'$ , điểm  $K$  thuộc  $B'C$  sao cho  $\overrightarrow{KC'} = -2\overrightarrow{KB'}$

- a) Hãy biểu thị vector  $\overrightarrow{B'C}$ ;  $\overrightarrow{CI}$  và  $\overrightarrow{BJ}$  qua 3 vector  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$   
 b) Biểu thị vector  $\overrightarrow{AK}$  theo vector  $\overrightarrow{AI}$  và  $\overrightarrow{AJ}$  từ đó suy ra 3 vector  $\overrightarrow{AK}$ ,  $\overrightarrow{AI}$ ,  $\overrightarrow{AJ}$  đồng phẳng.

**Lời giải**

a) Ta có:  $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'B}$  (theo quy tắc hình bình hành)

Suy ra  $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'} = \vec{c} - \vec{b} - \vec{a}$

Lại có:  $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BI} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = \vec{b} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}$

Mặt khác:

$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'J} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'C'} = -\vec{b} + \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\vec{b} + \vec{a} + \frac{\vec{c}}{2}$

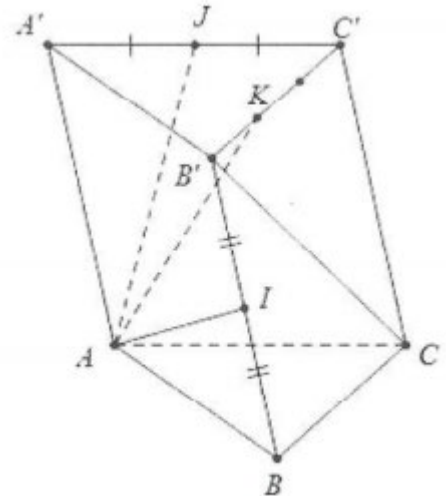
b) Ta có:  $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{B'K}$  (1)

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JC'} + \overrightarrow{C'K}$  (2)

Lấy 2.(1)+(2) ta được:

$3\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ} + 2\overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{JC'} + \underbrace{2\overrightarrow{B'K} + \overrightarrow{C'K}}_0 = 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{A'J} = 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AJ}$

Vậy  $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ})$ .



**Ví dụ 4:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Đặt  $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là hai điểm

nằm trên  $AC$  và  $DC'$  sao cho  $MN \parallel BD'$ . Tính tỷ số  $\frac{MN}{BD'}$

**Lời giải**

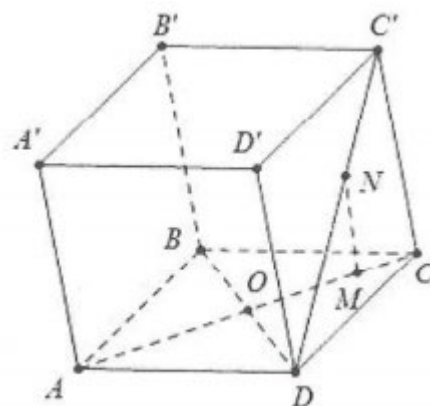
Giả sử:  $\overrightarrow{MC} = n\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{C'N} = m\overrightarrow{C'D'}$

Ta có:  $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Lại có:  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'N} = n\overrightarrow{AC} + \vec{b} + m\overrightarrow{C'D'}$   
 $= n(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) + \vec{b} + m(\overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{CD})$   
 $= n(\vec{c} - \vec{a}) + \vec{b} + m(-\vec{b} + \vec{a}) = (m - n)\vec{a} + (1 - m)\vec{b} + n\vec{c}$

Khi đó  $MN \parallel BD' \Rightarrow \overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BD'}$

$$\frac{m-n}{1} = \frac{1-m}{1} = \frac{n}{1} = k \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{MN}{B'D'} = k = \frac{1}{3}$$



**Ví dụ 5:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $I$  là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành  $ABB'A'$  và  $K$  là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành  $BCC'B'$ . Biểu thị vector  $\overrightarrow{BD}$  theo 2 vector  $\overrightarrow{IK}$  và  $\overrightarrow{C'B'}$  từ đó suy ra ba vector  $\overrightarrow{BD}$ ,  $\overrightarrow{IK}$ ,  $\overrightarrow{C'B'}$  đồng phẳng.

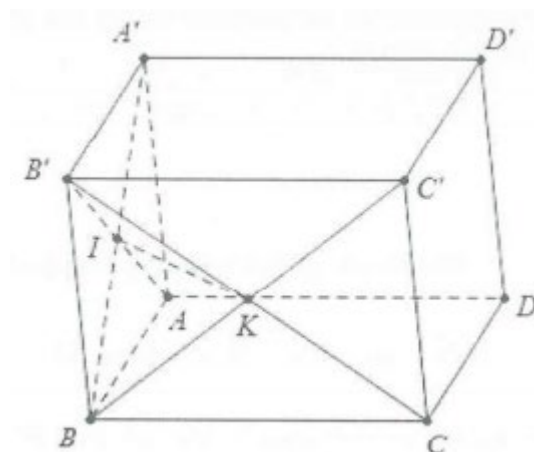
**Lời giải**

Ta có:  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{C'B} + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})$

$= -\overrightarrow{C'B'} + \overrightarrow{B'C'} - 2\overrightarrow{IK}$  (vì  $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IK}$ )

Suy ra  $\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{C'B'} - 2\overrightarrow{IK}$

Do đó ba vector  $\overrightarrow{BD}$ ,  $\overrightarrow{IK}$ ,  $\overrightarrow{C'B'}$  đồng phẳng.



**Ví dụ 6:** Trong không gian cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng nếu có một điểm  $O$  trong không gian sao cho  $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ , đồng thời,  $x + y + z = 1$  thì điểm  $M$  thuộc mặt phẳng  $(ABC)$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} \Leftrightarrow (x + y + z)\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$

$\Leftrightarrow x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Nếu  $x = 0 \Rightarrow y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Rightarrow M, B, C$  thẳng hàng nên  $A, B, C, M$  đồng phẳng

Nếu  $x \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{MA} = \frac{-y}{x} \overrightarrow{MB} - \frac{z}{x} \overrightarrow{MC} \Rightarrow A, B, C, M$  đồng phẳng.

**Ví dụ 7:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $P$  và  $Q$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB$  và  $CD$ . Trên các cạnh  $AB$  và  $CD$  lần lượt lấy các điểm  $M, N$  sao cho  $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BD} = k (k > 0)$ . Chứng minh rằng 3 vector  $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}$  đồng phẳng

**Lời giải**

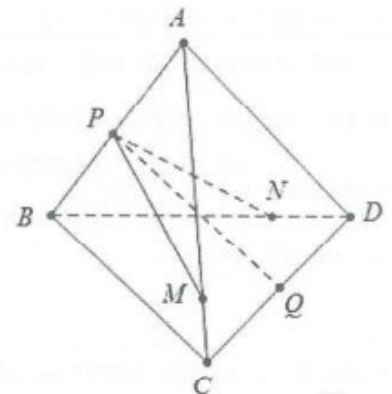
$$\text{Ta có: } \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) = \frac{1}{2}[(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) + (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BP})]$$

$$= \frac{1}{2}[\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} - (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP})] = \frac{1}{2} \frac{\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN}}{k}$$

$$\text{Lại có: } \begin{cases} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM} \\ \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PN} \end{cases} \text{ nên } \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2k}(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN})$$

(Do  $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} = \vec{0}$ )

$$\text{Do đó } \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2k}(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}) \Rightarrow M, N, P, Q \text{ đồng phẳng}$$



## Dạng 2: Tính độ dài đoạn thẳng, góc giữa hai vector, chứng minh 2 đường thẳng vuông góc

*Phương pháp giải:*

- Để tính độ dài đoạn thẳng  $AB$  ta sử dụng công thức:  $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$ , để tính độ dài vector  $\vec{u}$  ta sử dụng công thức  $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}^2}$
- Để tính góc giữa 2 vector ta sử dụng công thức:  $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$
- Để chứng minh 2 đường thẳng  $AB$  và  $CD$  vuông góc với nhau ta chứng minh:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

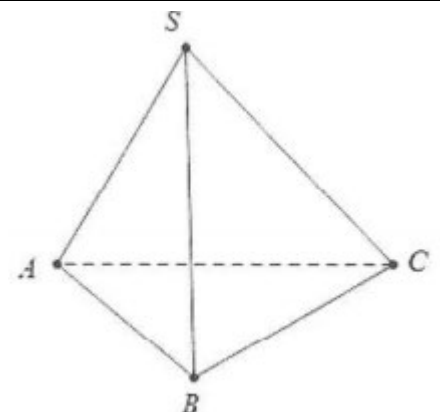
**Ví dụ 1:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA = SB = SC = AB = AC = a$  và  $BC = a\sqrt{2}$ . Tính góc giữa hai vector  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{SC}$ .

**Lời giải**

Do  $SB = SC = a$ ;  $BC = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta SBC$  vuông cân tại  $S$ .

Lấy điểm  $S$  làm điểm gốc ta phân tích:  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SC} = (\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}) \cdot \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC}$$



$$= a^2 \cdot \cos 90^\circ - a^2 \cdot \cos 60^\circ = -\frac{a^2}{2}$$

$$\text{Do đó } \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{SC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SC}}{AB \cdot SC} = \frac{-\frac{a^2}{2}}{a \cdot a} = -\frac{1}{2}$$

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{SC}) = 120^\circ$$

**Ví dụ 2:** Cho tứ diện  $ABCD$ .

- a) Chứng minh rằng:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$   
b) Từ đẳng thức trên hãy suy ra nếu tứ diện  $ABCD$  có  $AB \perp CD$  và  $AC \perp DB$  thì  $AD \perp BC$

**Lời giải**

- a) Lấy điểm  $A$  làm điểm gốc.

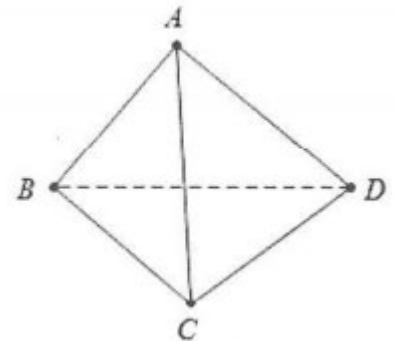
$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 0$$

- b) Do  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$$\text{Mặt khác: } \begin{cases} AB \perp CD \\ AC \perp DB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

Do đó  $AD \perp BC$



**Ví dụ 3:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = AC = AD$  và góc  $BAC = 60^\circ$ , góc  $BAD = 60^\circ$ , góc  $CAD = 90^\circ$ .

Chứng minh rằng:

- a)  $AB \perp CD$   
b) Nếu  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$  thì  $IJ \perp AB$

**Lời giải**

- a) Lấy điểm  $A$  là điểm gốc ta có  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})$

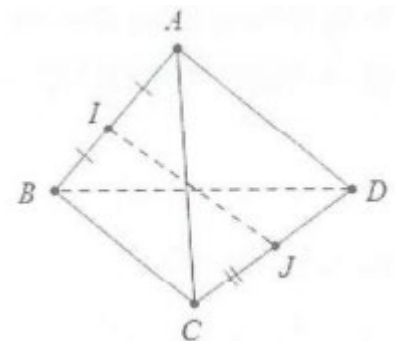
$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 \cos 60^\circ - a^2 \cos 60^\circ = 0 \Rightarrow AB \perp CD$$

- b) Ta có:  $\overrightarrow{IJ} = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AB} = (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= -\frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB})$$

$$= -\frac{1}{2}(-a^2 + a^2 \cos 60^\circ + a^2 \cos 60^\circ) = 0 \Rightarrow IJ \perp AB$$



**Ví dụ 4:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA = SB = SC$  và  $ASB = BSC = CSA$ . Chứng minh rằng  $SA \perp BC$ ,  $SB \perp AC$  và  $SC \perp AB$

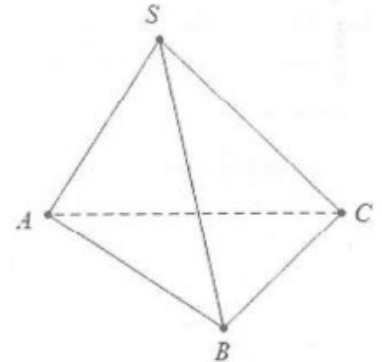
**Lời giải**

Giả sử  $ASB = BSC = CSA = \alpha$  và  $SA = SB = SC = a$

Lấy điểm  $S$  làm điểm gốc ta có:  $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SA} \cdot (\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB})$

$$= \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = a^2 \cos \alpha - a^2 \cos \alpha = 0$$

Tương tự chứng minh trên ta cũng có  $SB \perp AC$  và  $SC \perp AB$



**Ví dụ 5:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $P$  và  $Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Biết rằng  $AB \perp AC$ ,  $AB \perp BD$ . Chứng minh rằng  $AB$  và  $PQ$  vuông góc với nhau.

**Lời giải**

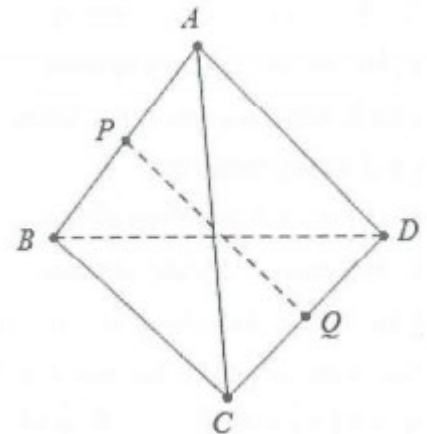
$$\text{Ta có: } AB \perp AC, AB \perp BD \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Lại có: } \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} \cdot \left[ -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \right]$$

$$= \frac{\overrightarrow{AB}^2}{2} + \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{2} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$$

Do đó  $AB \perp PQ$



**Ví dụ 6:** Trong không gian cho 2 vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  tạo với nhau một góc  $120^\circ$ . Biết rằng  $|\vec{a}| = 3$  và  $|\vec{b}| = 5$ .

Tính  $|\vec{a} + \vec{b}|$  và  $|\vec{a} - \vec{b}|$

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } |\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}; \vec{b}) + |\vec{b}|^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ + 5^2 = 19$$

$$\text{Do đó } |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}$$

$$\text{Lại có: } |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}; \vec{b}) + |\vec{b}|^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ + 5^2 = 49$$

$$\text{Do đó } |\vec{a} - \vec{b}| = 7$$



**Ví dụ 7:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Tính góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{DA'}$ .

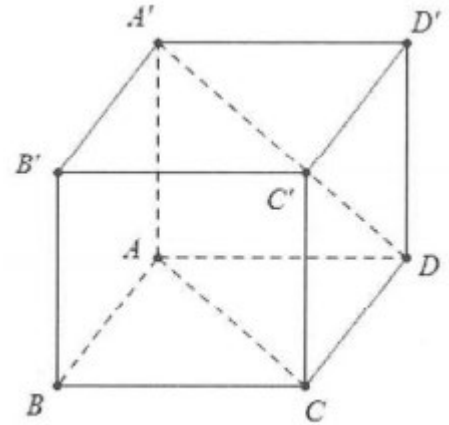
**Lời giải**

Ta có:  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DD'} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$

Đặt  $AB = a \Rightarrow AC = a\sqrt{2} = DA'$

Mặt khác  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA'} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(-\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) = -AD^2 = -a^2$

Suy ra  $\cos(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{DA'}) = \frac{-a^2}{2a^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{DA'}) = 120^\circ$



## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Câu 1:** Cho ba vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  không đồng phẳng.

Xét các vector  $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}, \vec{y} = -4\vec{a} + 2\vec{b}, \vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$ . Chọn khẳng định đúng?

A. Hai vector  $\vec{y}, \vec{z}$  cùng phương.

B. Hai vector  $\vec{x}, \vec{y}$  cùng phương.

C. Hai vector  $\vec{x}, \vec{z}$  cùng phương.

D. Ba vector  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  đồng phẳng.

**Câu 2:** Cho ba vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  không đồng phẳng. Xét các vector  $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}, \vec{y} = \vec{a} - \vec{b}, \vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$ . Chọn khẳng định đúng?

A. Ba vector  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  đồng phẳng.

B. Hai vector  $\vec{x}, \vec{a}$  cùng phương.

C. Hai vector  $\vec{x}, \vec{b}$  cùng phương.

D. Ba vector  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  đôi một cùng phương.

**Câu 3:** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A_1B_1C_1$ . Đặt  $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{BC} = \vec{d}$ , trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A.  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$

B.  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$

C.  $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$

D.  $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$

**Câu 4:** Cho hình hộp  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A.  $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = 2\overrightarrow{AC}$

B.  $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{CA_1} + 2\overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$

C.  $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = 2\overrightarrow{AA_1}$

D.  $\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CC_1}$

**Câu 5:** Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

A. Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành nếu  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

B. Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành nếu  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

C. Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Nếu có  $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$  thì tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành

D. Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành nếu  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

**Câu 6:** Trong không gian cho điểm  $O$  và bốn điểm  $A, B, C, D$  không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để  $A, B, C, D$  tạo thành hình bình hành là:

A.  $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$

B.  $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$

C.  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$

D.  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

**Câu 7:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Trên các cạnh  $AD$  và  $BC$  lần lượt lấy  $M, N$  sao cho  $AM = 3MD, BN = 3NC$ . Gọi  $P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. Các vector  $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$  không đồng phẳng.

B. Các vector  $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}$  đồng phẳng.

C. Các vector  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}$  đồng phẳng.

D. Các vector  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$  đồng phẳng.

**Câu 8:** Cho tứ diện  $ABCD$  có các cạnh đều bằng  $a$ . Hãy chỉ ra mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây:

A.  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

C.  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$

D.  $AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

**Câu 9:** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. Từ  $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$  ta suy ra  $\overrightarrow{BA} = -3\overrightarrow{CA}$

B. Nếu  $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$  thì  $B$  là trung điểm đoạn  $AC$ .

C. Vì  $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AD}$  nên bốn điểm  $A, B, C, D$  đồng phẳng

D. Từ  $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$  ta suy  $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$

**Câu 10:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$  và  $G$  là trung điểm của  $MN$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A.  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$

B.  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$

C.  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

D.  $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$

**Câu 11:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $G$  là điểm thỏa mãn:  $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A.  $G, S, O$  không thẳng hàng.

B.  $\overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG}$

C.  $\overrightarrow{GS} = 5\overrightarrow{OG}$

D.  $\overrightarrow{GS} = 3\overrightarrow{OG}$

**Câu 12:** Cho lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$ . Hãy phân tích (biểu thị) vector  $\overrightarrow{BC'}$  qua các vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

A.  $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

B.  $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

C.  $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

D.  $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

**Câu 13:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Tìm giá trị của  $k$  thích hợp điền vào đẳng thức vector:  $\overrightarrow{MN} = k(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$

A.  $k = \frac{1}{2}$

B.  $k = \frac{1}{3}$

C.  $k = 3$

D.  $k = 2$

**Câu 14:** Cho lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$ . Hãy phân tích (biểu thị) vector  $\overrightarrow{B'C}$  qua các vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

A.  $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

B.  $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

C.  $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

D.  $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

**Câu 15:** Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. Nếu  $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SD} = 6\overrightarrow{SO}$  thì  $ABCD$  là hình thang

B. Nếu  $ABCD$  là hình bình hành thì  $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$

C. Nếu  $ABCD$  là hình thang thì  $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SD} = 6\overrightarrow{SO}$

D. Nếu  $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$  thì  $ABCD$  là hình bình hành.

**Câu 16:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có tâm  $O$ . Đặt  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$ .  $M$  là điểm xác định bởi  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A.  $M$  là trung điểm  $BB'$

B.  $M$  là tâm hình bình hành  $BCC'B'$

C.  $M$  là tâm hình bình hành  $ABB'A'$

D.  $M$  là trung điểm  $CC'$

**Câu 17:** Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AC$  và  $BD$  của tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I$  là trung điểm đoạn  $MN$  và  $P$  là 1 điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị của  $k$  thích hợp điền vào đẳng thức vector:  $\overrightarrow{PI} = k(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD})$

A.  $k = 4$

B.  $k = \frac{1}{2}$

C.  $k = \frac{1}{4}$

D.  $k = 2$

**Câu 18:** Cho hình hộp  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ . Chọn đẳng thức sai?

A.  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{B_1A_1}$

B.  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{DC}$

C.  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BD_1}$

D.  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BC}$

**Câu 19:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $P, Q$  là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Chọn khẳng định đúng?

A.  $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$     B.  $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$     C.  $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD})$     D.  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$

**Câu 20:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M$  và  $P$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Đặt  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{AD} = \vec{d}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A.  $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} + \vec{b})$     B.  $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{c} - \vec{b})$     C.  $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} - \vec{d})$     D.  $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b})$

## LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Câu 1:** Ta có:  $\vec{y} = -2(2\vec{a} - \vec{b}) = -2\vec{x}$  do đó 2 vector  $\vec{x}, \vec{y}$  cùng phương. **Chọn B.**

**Câu 2:** Ta có:  $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b} = 2(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) - (-3\vec{b} - 2\vec{c}) = 2\vec{y} - \vec{z}$

Do vậy 3 vector  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  đồng phẳng. **Chọn A.**

**Câu 3:** Ta có  $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{AB} - \vec{AC} + \vec{BC} = \vec{CB} + \vec{BC} = \vec{0}$ . **Chọn C.**

**Câu 4:** Ta có:  $\vec{AC_1} + \vec{A_1C} = \vec{AA_1} + \vec{A_1C} + \vec{A_1C} = \vec{AA_1} + 2\vec{A_1C}$

Mặt khác  $\vec{A_1C} \neq \vec{0}$  do đó đẳng thức ở câu C sai. **Chọn C.**

**Câu 5:** Ta có:  $\vec{SB} + \vec{SD} = \vec{SA} + \vec{SC} \Leftrightarrow \vec{SB} - \vec{SA} = \vec{SC} - \vec{SD} \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{DC}$

Do đó  $ABCD$  là hình bình hành. **Chọn C.**

**Câu 6:**  $A, B, C, D$  tạo thành hình bình hành

$\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{DC} \Leftrightarrow \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{DO} + \vec{OC} \Leftrightarrow \vec{OB} - \vec{DO} = \vec{OC} - \vec{AO} \Leftrightarrow \vec{OB} + \vec{OD} = \vec{OC} + \vec{OA}$ . **Chọn C.**

**Câu 7:** Các vector  $\vec{AB}, \vec{DC}, \vec{PQ}$  không đồng phẳng nên C sai. **Chọn C.**

**Câu 8:** Ta có  $\vec{AD} \neq \vec{CD} \Rightarrow \vec{AC} \cdot \vec{AD} \neq \vec{AC} \cdot \vec{CD}$ . **Chọn C.**

**Câu 9:** Vì  $\vec{AB} = -2\vec{AC} + 5\vec{AD}$  nên bốn điểm  $A, B, C, D$  không đồng phẳng. **Chọn C.**

**Câu 10:** Do  $G$  là trung điểm của  $MN$  nên  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$

$\Rightarrow (\vec{MA} - \vec{MG}) + (\vec{MB} - \vec{MG}) + (\vec{MC} - \vec{MG}) + (\vec{MD} - \vec{MG}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MG}$ . **Chọn A.**

**Câu 11:**  $\vec{GS} + \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{GS} + 2\vec{GO} = 2\vec{GO} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{GS} = 4\vec{GO}$ . **Chọn B.**

**Câu 12:**  $\vec{BC'} = \vec{BC} + \vec{CC'} = \vec{BA} + \vec{AC} + \vec{CC'} = \vec{AA'} - \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ . **Chọn D.**

**Câu 13:**  $\vec{MN} = \vec{MC} + \vec{CN} = \vec{MA} + \vec{AC} + \vec{CN} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{CD} + \vec{AC}$

$\Rightarrow \vec{MN} = -\frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{CB}) + \frac{1}{2}(\vec{CB} + \vec{BD}) + \vec{AC} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{BD}) \rightarrow \vec{MN} = k(\vec{AC} + \vec{BD}) \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$ . **Chọn D.**

**Câu 14:**  $\vec{B'C} = \vec{B'C'} + \vec{C'C} = \vec{BC} - \vec{CC'} = \vec{BA} + \vec{AC} - \vec{CC'} = -\vec{AA'} - \vec{AB} + \vec{AC} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ . **Chọn D.**

**Câu 15:** Dựa vào các đáp án, ta có các nhận xét sau:

- $ABCD$  là hình bình hành thì  $O$  là trung điểm của  $AC$  và  $BD$ , khi đó 
$$\begin{cases} \vec{SA} + \vec{SC} = 2\vec{SO} \\ \vec{SB} + \vec{SD} = 2\vec{SO} \end{cases}$$

$\Rightarrow \vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = 4\vec{SO}$  và điều ngược lại luôn đúng.

- Tương tự,  $\vec{SA} + \vec{SB} + 2\vec{SC} + 2\vec{SD} = 6\vec{SO}$  thì  $ABCD$  là hình thang và điều ngược lại không đúng. **Chọn C.**

**Câu 16:** Ta có  $\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}) = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$

Mặt khác  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \Rightarrow \begin{cases} OM // BD \\ OM = \frac{1}{2}BD \end{cases}$ . Mà  $O$  là trung điểm của  $DB'$  suy ra  $M$  là trung

điểm của  $BB'$ . **Chọn A.**

**Câu 17:** Vì  $I$  là trung điểm của  $MN \Rightarrow \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}$

Ta có  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 4\overrightarrow{PI} + 2\overrightarrow{IM} + 2\overrightarrow{IN} = 4\overrightarrow{PI}$

Khi đó  $4\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} \Leftrightarrow \overrightarrow{PI} = k(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) \Rightarrow k = \frac{1}{4}$ . **Chọn C.**

**Câu 18:** Dựa vào đáp án, ta có các nhận xét sau:

- $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{B_1A_1}$
- $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC}$
- $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1D_1} = \overrightarrow{BD_1}$
- $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{BD_1}$

**Chọn D.**

**Câu 19:** Ta có  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

**Chọn B**

**Câu 20:** Ta có  $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b})$ . **Chọn D.**