

Liên hệ đăng ký khoá học – Hotline: 0976 266 202

Câu 1(4,0 điểm) Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ (1).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1).
2. Cho hai điểm A(1;2) và B(5;2). Viết phương trình tiếp tuyến của (1) cách đều A,B.
3. Tìm điểm M thuộc (1) có tổng khoảng cách đến 2 trục toạ độ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 2(4,0 điểm) Giải các phương trình

1. $\sqrt{2} \tan x(1 - \cos x) = \frac{1}{\cos x} - 1.$
2. $\sqrt{4 + \ln(x+1)} + x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0.$

Câu 3(1,5 điểm) Gọi S là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 3x + 1; y = -4x + 3$. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay S quanh trục hoành.

Câu 4(1,5 điểm) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $(1+i)z^2 - 2iz - 21 + i = 0$. Tính

$$A = |z_1^2 - z_2^2|.$$

Câu 5(1,0 điểm) Một trò chơi quay số trúng thưởng với mâm quay là một đĩa tròn được chia đều thành 10 ô và được đánh số tương ứng từ 1 đến 10. Người chơi tham gia bằng cách quay liên tiếp mâm quay 2 lần, khi mâm quay dừng kim quay chỉ tương ứng với ô đã được đánh số. Người chơi trúng thưởng nếu tổng của hai số kim quay chỉ khi mâm quay dừng là một số chia hết cho 3. Tính xác suất để người chơi trúng thưởng.

Câu 6(1,5 điểm) Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh AB, góc giữa đường thẳng A'C và mặt đáy bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (ACC'A').

Câu 7(3,5 điểm)

1. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho điểm A(1;0;-1) và mặt phẳng (P): $2x + 2y - z - 12 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A vuông góc với (P). Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc của A trên (P).
2. Trong mặt phẳng với trục toạ độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có đỉnh A(-4;8). Gọi M là điểm thuộc tia BC thoả mãn $CM = 2BC$, N là hình chiếu vuông góc của B trên DM. Tìm toạ độ điểm B, biết $N(83/13; -1/13)$ và đỉnh C thuộc đường thẳng $2x + y + 5 = 0$.

Câu 8(1,5 điểm) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4x - xy^2 - x^3 = (x^2 + y^2 - 4)(\sqrt{x} + \sqrt{y-1}) \\ (x-y)(x-1)(y-1)(xy+x+y) = 4 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 9(1,5 điểm) Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn $a \geq 7 \cdot \max\{b, c\}; a + b + c = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a(b-c)^5 + b(c-a)^5 + c(a-b)^5$.

---HẾT---

ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM – BÌNH LUẬN ĐỀ 01/50

Thang điểm tương ứng:

Câu 1: 1.1(2,0 điểm); 1.2 và 1.3 mỗi ý 1,0 điểm

Câu 2: 2.1 và 2.2 mỗi ý 2,0 điểm

Câu 7: 7.1(2,0 điểm); 7.2(1,5 điểm)

Câu 1(4,0 điểm) Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ (1).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1).
2. Cho hai điểm A(1;2) và B(5;2). Viết phương trình tiếp tuyến của (1) cách đều A,B.
3. Tìm điểm M thuộc (1) có tổng khoảng cách đến 2 trục tọa độ đạt giá trị nhỏ nhất.

1. Học sinh tự làm.

2. Đường thẳng AB có pt là $y = 2$; trung điểm của AB là điểm I(3;2).

Giả sử tiếp điểm $M(m; \frac{2m-1}{m-1}), m \neq 1$. Tiếp tuyến có dạng: $y = -\frac{1}{(m-1)^2}(x-m) + \frac{2m-1}{m-1}$.

Để d cách đều A,B có 2 trường hợp:

+ Nếu d//AB khi đó $k_d = k_{AB} \Leftrightarrow -\frac{1}{(m-1)^2} = 0$ (vô nghiệm).

+ Nếu d đi qua I khi đó $2 = -\frac{1}{(m-1)^2}(3-m) + \frac{2m-1}{m-1} \Leftrightarrow m-2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

Suy ra tiếp tuyến cần tìm là $y = -x + 5$.

3. Giả sử $M(m; \frac{2m-1}{m-1}), m \neq 1$. Khi đó $d(M; Ox) = \left| \frac{2m-1}{m-1} \right|; d(M; Oy) = |m|$.

Ta cần tìm GTNN của biểu thức $P = \left| \frac{2m-1}{m-1} \right| + |m|$.

+ Nếu $m > \frac{1}{2} \Rightarrow P > |m| > \frac{1}{2}$.

+ Nếu $m < 0 \Rightarrow P > \left| \frac{2m-1}{m-1} \right| > 1$.

+ Nếu $0 \leq m \leq \frac{1}{2} \Rightarrow P = \frac{2m-1}{m-1} + m = \frac{m^2 + m - 1}{m-1} = \frac{(2m-1)(m+1)}{2(m-1)} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$.

So sánh có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $m = \frac{1}{2} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

Vậy điểm cần tìm là $M\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

Câu 2(4,0 điểm) Giải các phương trình

1. $\sqrt{2} \tan x(1 - \cos x) = \frac{1}{\cos x} - 1$.
2. $\sqrt{4 + \ln(x+1)} + x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$.

1. Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Phương trình tương đương với: $\frac{\sqrt{2} \sin x(1 - \cos x)}{\cos x} = \frac{1 - \cos x}{\cos x}$.

$$\Leftrightarrow (1 - \cos x)(\sqrt{2} \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2. Điều kiện: $\begin{cases} x > -1 \\ \ln(x+1) + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1 + e^{-4}.$

Phương trình tương đương với: $\sqrt{4 + \ln(x+1)} + x(x-1)^2 - 2 = 0.$

+ Nếu $x > 0$ khi đó $VT > \sqrt{4 + \ln(x+1)} - 2 > 0$, pt vô nghiệm.

+ Nếu $x < 0$ khi đó $VT \leq \sqrt{4 + \ln(x+1)} - 2 < 0$, pt vô nghiệm.

Nhận thấy $x = 0$ thỏa mãn. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Chú ý. Có thể giải bằng pp hàm số.

Câu 3(1,5 điểm) Gọi S là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 3x + 1; y = -4x + 3$. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay S quanh trục hoành.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 3x + 1 = -4x + 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}.$

Vì vậy

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^1 |(x^2 - 3x + 1) - (-4x + 3)| dx = \pi \int_{-2}^1 |(x-1)(x+2)(x^2 - 7x + 4)| dx \\ &= \pi \int_{-2}^{\frac{7-\sqrt{33}}{2}} -(x-1)(x+2)(x^2 - 7x + 4) dx + \\ &\quad \int_{\frac{7-\sqrt{33}}{2}}^1 (x-1)(x+2)(x^2 - 7x + 4) dx = \left(\frac{7856}{15} - \frac{847\sqrt{33}}{10} \right) \pi \end{aligned}$$

Chú ý. Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = f(x); y = g(x)$ và các đường thẳng $x = a; x = b (a < b)$ được tính theo công thức

$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx.$$

Nhiều học sinh mắc sai lầm khi sử dụng công thức tự chế $V = \pi \int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx$. Các em cần chú ý.

Câu 4(1,5 điểm) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $(1+i)z^2 - 2iz - 21 + i = 0$. Tính $A = |z_1^2 - z_2^2|$.

Ta có $\Delta' = i^2 - (1+i)(-21+i) = 21 + 20i = (5+2i)^2$.

Suy ra $z = -3 + 2i; z = 4 - i$.

Vì vậy $A = |(-3+2i)^2 - (4-i)^2| = |(5-12i) - (15-8i)| = |10+4i| = 2\sqrt{29}$.

Chú ý. Một số học sinh tính toán sai giá trị của A nên bước tính toán các em đặc biệt lưu ý.

Câu 5(1,0 điểm) Một trò chơi quay số trúng thưởng với mâm quay là một đĩa tròn được chia đều thành 10 ô và được đánh số tương ứng từ 1 đến 10. Người chơi tham gia bằng cách quay liên tiếp mâm quay 2 lần, khi mâm quay dừng kim quay chỉ tương ứng với ô đã được đánh số. Người chơi trúng thưởng nếu tổng 2 số kim quay chỉ khi mâm quay dừng là một số chia hết cho 3. Tính xác suất để người chơi trúng thưởng.

+) Số cách xuất hiện kết quả của trò chơi là $10.10 = 100$.

+) Ta tìm số kết quả để tổng 2 số nhận được khi mâm quay dừng là một số chia hết cho 3.

Trước tiên phân chia 10 số ban đầu thành 3 loại: Loại I gồm các số chia hết cho 3 có 3 số (3,6,9); loại II gồm các số chia 3 dư 1 có 4 số (1,4,7,10); loại III gồm các số chia 3 dư 2 số có 3 số (2,5,8). Vậy có các khả năng sau:

+ Cả 2 lần kim quay đều chỉ số loại I có $3.3=9$ cách.

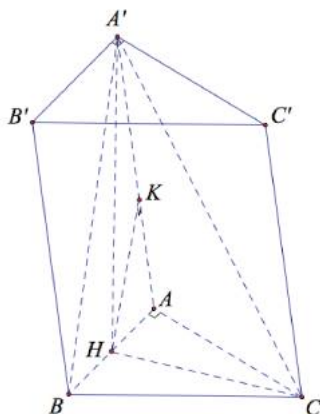
+ Có 1 lần quay chỉ số loại II và 1 lần quay chỉ số loại III có $2!.4.3=24$ cách.

Vậy số số kết quả để tổng 2 số nhận được khi mâm quay dừng là một số chia hết cho 3 là $9+24=33$ cách.

Vậy xác suất cần tính là $P = 33/100 = 0,33$.

Chú ý. Có thể giải bằng cách liệt kê số phần tử. Xem thêm bình luận cuối đề.

Câu 6(1,5 điểm) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh AB, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt đáy bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(ACC'A')$.



Gọi H là trung điểm cạnh AB theo giả thiết ta có $A'H \perp (ABC)$.

Tam giác ABC vuông cân tại A, suy ra $AB = AC = a\sqrt{2}$.

Tam giác AHC vuông có:

$$HC = \sqrt{AC^2 + AH^2} = \sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

Có HC là hình chiếu của $A'C$ trên (ABC) nên $\widehat{A'CH} = 60^\circ$.

$$\text{Suy ra } A'H = HC \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{30}}{2}.$$

$$\text{Vì vậy } V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{ABC} = \frac{a\sqrt{30}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (a\sqrt{2})^2 = \frac{a^3\sqrt{30}}{2} \text{ (đvtt)}.$$

Kẻ HK vuông góc với AA' tại K có $AC \perp (ABB'A') \Rightarrow AC \perp HK$.

Suy ra $HK \perp (ACC'A'), HK = d(H; (ACC'A'))$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{A'H^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{15a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{30}}{8}.$$

$$\text{Vì vậy } d(B; (ACC'A')) = \frac{BA}{HA} \cdot d(H; (ACC'A')) = 2HK = \frac{a\sqrt{30}}{4}.$$

Câu 7(3,5 điểm)

1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm $A(1;0;-1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 12 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A vuông góc với (P) . Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên (P) .
2. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có đỉnh $A(-4;8)$. Gọi M là điểm thuộc tia BC thỏa mãn $CM = 2BC$, N là hình chiếu vuông góc của B trên DM. Tìm tọa độ điểm B, biết $N(83/13; -1/13)$ và đỉnh C thuộc đường thẳng $2x + y + 5 = 0$.

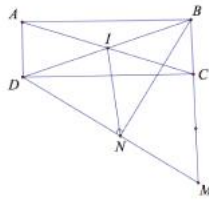
1. Đường thẳng d vuông góc với (P) nên d nhận vtcp $\vec{n} = (2;2;-1)$ của (P) làm véc tơ chỉ

phương. Vì vậy $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

Thay x, y, z từ phương trình của d vào pt của (P) ta được:

$$2(1+2t) + 2.2t - (-1-t) - 12 = 0 \Leftrightarrow 9t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Suy ra tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên (P) là điểm $H(3;2;-2)$.



2. Gọi $C(t; -2t - 5)$. Gọi I là tâm hình chữ nhật ABCD, suy ra I là trung điểm của AC và BD.

Do đó $I\left(\frac{t-4}{2}; \frac{-2t+3}{2}\right)$. Tam giác BDN vuông tại N có I là trung

điểm BD nên $IN = \frac{BD}{2} = IB = IA$.

Ta có pt: $\left(\frac{83}{13} - \frac{t-4}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{13} - \frac{-2t+3}{2}\right)^2 = \left(-4 - \frac{t-4}{2}\right)^2 + \left(8 - \frac{-2t+3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow t = 1.$

Suy ra $I\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right); C(1; -7)$.

Gọi $B(a; b)$ ta có $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{BC} = 2(1-a; -7-b) \Rightarrow M(3-2a; -21-2b)$.

Ta có $\overrightarrow{BN} = \left(\frac{83-13a}{13}; -\frac{1+13b}{13}\right), \overrightarrow{MN} = \left(\frac{44+26a}{13}; \frac{272+26b}{13}\right)$.

Do BN vuông góc với MN nên:

$$\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \Leftrightarrow (83-13a)(44+26a) - (1+13b)(272+26b) = 0 \quad (1).$$

Mặt khác: $IB^2 = IC^2 = \frac{125}{2} \Leftrightarrow \left(a + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{125}{2} \quad (2).$

Từ (1) và (2) ta có:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + 3a - b = 60 \\ 13(a^2 + b^2) - 61a + 137b - 130 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 3b = 13 \\ a^2 + b^2 + 3a - b = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4, b = -7 \\ a = \frac{83}{13}, b = -\frac{1}{13} \end{cases}$$

Đối chiếu B khác N suy ra $B(-4; -7)$.

Câu 8(1,5 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x - xy^2 - x^3 = (x^2 + y^2 - 4)(\sqrt{x} + \sqrt{y-1}) \\ (x-y)(x-1)(y-1)(xy+x+y) = 4 \end{cases}$.

Điều kiện: $x \geq 0; y \geq 1$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + x)(x^2 + y^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x} + \sqrt{y-1} = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

+ Với $x + \sqrt{x} + \sqrt{y-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ (thử lại thấy không thỏa mãn).

+ Với $x^2 + y^2 = 4$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (x-y)(x-1)(y-1)(xy+x+y) = 4 \end{cases} \quad (1).$

Viết lại pt thứ hai của hệ dưới dạng:

$$\begin{aligned} & (y^2 - 1)x^3 - (y^3 - 1)x^2 + y^3 - y^2 - 4 = 0 \\ & \Leftrightarrow (y^2 - 1)x^2 - (y^3 - 1)(4 - y^2) + y^3 - y^2 - 4 = 0 \\ & \Leftrightarrow (y^2 - 1)x^3 + y^2(y - 2)(y + 1)^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow (y^2 - 1)(4 - y^2)x + y^2(y - 2)(y + 1)^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow (y + 1)(y - 2)[y^2(y + 1) - (y - 1)(y + 2)x] = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1(l) \\ y = 2(t / m) \Rightarrow x = 0 \\ y^2(y + 1) = (y - 1)(y + 2)x \end{cases} \end{aligned}$$

Ta xét phương trình: $y^2(y + 1) = (y - 1)(y + 2)x \Leftrightarrow y^2(y + 1) = (y - 1)(y + 2)\sqrt{4 - y^2}$.

Mặt khác: $1 \leq y \leq 2$ suy ra :

$$\begin{aligned} y^2 &= y^2 + y - 2 + (2 - y) \geq y^2 + y - 2; \\ y + 1 &= \sqrt{y^2 + 2y + 1} = \sqrt{(4 - y^2) + (2y^2 + 2y - 3)} > \sqrt{4 - y^2}. \end{aligned}$$

Suy ra $VT > VP$. Tức phương trình trên vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (0; 2)$.

Chú ý. Ta có thể giải (1) bằng 2 cách khác sau:

Cách 2: Khi đó để hệ (1) có nghiệm ta phải có: $(x - y)(x - 1) \geq 0$.

Khi đó sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\begin{aligned} VT &= (y - 1)[(xy + x + y)(x^2 - xy - x + y)] \\ &\leq \frac{(y - 1)(x^2 + 2y)^2}{4} = \frac{(y - 1)(4 - y^2 + 2y)^2}{4} = \frac{\sqrt{4(y - 1)^2 \cdot (5 - (y - 1)^2)^4}}{8} \\ &\leq \frac{\sqrt{\left(\frac{4(y - 1)^2 + 4(5 - (y - 1)^2)}{5}\right)^5}}{8} = 4 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 4(y - 1)^2 = 5 - (y - 1)^2 \\ x^2 - xy - x + y = xy + x + y \Leftrightarrow x = 0; y = 2. \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

Chú ý. Bước cuối có thể chứng minh $\frac{(y - 1)(4 - y^2 + 2y)^2}{4} \leq 4$ bằng biến đổi tương đương hoặc hàm số.

Cách 3: Khi đó để hệ (1) có nghiệm ta phải có: $(x-y)(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq y \geq 1 \\ x \leq 1 \leq y \end{cases}$.

TH1: Nếu $x \geq y \geq 1$ khi đó sử dụng AM –GM ta có:

$$(x-y)(y-1) \leq \left(\frac{x-y+y-1}{2} \right)^2 = \frac{(x-1)^2}{4}.$$

Suy ra $P = (x-y)(y-1)(x-1)(xy+x+y) \leq \frac{(x-1)^3}{4}(xy+x+y)$.

Chú ý sử dụng bất đẳng thức Cauchy –Schwarz ta có:

$$\begin{aligned} (x-y)^2 + (y-1)^2 &\geq \frac{1}{2}(x-1)^2 \\ \Rightarrow \frac{3}{2}(x-1)^2 &\leq (x-1)^2 + (x-y)^2 + (y-1)^2 = 10 - 2(x+y+xy). \\ \Rightarrow (x-1)^2 &\leq \frac{4}{3}(5-xy-x-y) \end{aligned}$$

Đặt $t = x+y+xy \leq x^2+y^2+1=5 \Rightarrow t \in [3;5]$.

Khi đó $P^2 \leq \frac{(x-1)^6}{16}(xy+x+y)^2 \leq \frac{4^3}{3^3} \frac{(5-t)^3}{16} t^2 = \frac{4t^2(5-t)^3}{27}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{4t^2(5-t)^3}{27}$ trên đoạn $[3;5]$ ta có:

$$f'(t) = -\frac{20t(t-2)(t-5)^2}{27} < 0 \Rightarrow f(t) \leq f(3) = \frac{32}{3} < 16.$$

Suy ra $P < 4$ (mâu thuẫn với phương trình thứ hai của hệ) vậy trường hợp này vô nghiệm.

TH2: Nếu $y \geq 1 \geq x$ khi đó sử dụng bất đẳng thức AM –GM ta có:

$$(y-1)(1-x) \leq \left(\frac{y-x}{2} \right)^2.$$

Lập luận tương tự trên ta có:

$$P^2 \leq \frac{(y-x)^6}{16}(xy+x+y) \leq \frac{4t^2(5-t)^3}{27}, t = xy+x+y \in [1;3].$$

Xét hàm trên đoạn $[1;3]$ ta có $f(t) = \frac{4t^2(5-t)^3}{27}; f_{\max} = f(2) = 16$.

Tức là $P^2 \leq 16 \Rightarrow P \leq 4$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} t = xy+x+y = 2 \\ y-1 = 1-x \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = (0;2)$.

Câu 9(1,5 điểm) Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a \geq 7, \max\{b,c\}; a+b+c=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a(b-c)^5 + b(c-a)^5 + c(a-b)^5$.

Ta có

$$\begin{aligned}P &= (a-b)(b-c)(c-a)(a^3+b^3+c^3+ab(a+b)+bc(c+a)+ca(c+a)-9abc) \\&= (a-b)(b-c)(c-a) \left[\frac{1}{3}(a+b+c)^3 + \frac{2}{3}(a^3+b^3+c^3) - 11abc \right] \\&= (a-b)(b-c)(c-a) \left[\frac{2}{3}(a^3+b^3+c^3) - 11abc + \frac{1}{3} \right]\end{aligned}$$

Trước tiên chuyển về biểu thức đối xứng 3 biến để dễ xử lý.

Lấy trị tuyệt đối ta được:

$$\begin{aligned}|P| &= |(a-b)(b-c)(c-a)| \cdot \left| \frac{2}{3}(a^3+b^3+c^3) + \frac{1}{3} - 11abc \right| \\&\leq |(a-b)(b-c)(c-a)| \cdot \left| \frac{2}{3}(a^3+b^3+c^3) + \frac{1}{3} \right|\end{aligned}$$

Bởi vì

$$\begin{aligned}0 \leq abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3 = \frac{1}{27}; \\ \frac{2}{3}(a^3+b^3+c^3) + \frac{1}{3} - 11abc \geq \frac{2}{3} \cdot 3abc + \frac{1}{3} - 11abc = \frac{1}{3} - 9abc \geq 0\end{aligned}$$

Ta đi tìm giá trị lớn nhất của $|P|$ khi đó a,b,c vai trò như nhau kết hợp với giả thiết nên ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$.

$$\text{Khi đó } |P| \leq \frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{3} [2(a^3+b^3+c^3)+1].$$

+ Ta có các đánh giá cơ bản:

$$\begin{aligned}(a-b)(b-c)(a-c) &\leq ab(a-b) \leq b(1-b)(1-2b); \\ 2(a^3+b^3+c^3) &= 2b^3+2(a^3+c^3) \leq 2b^3+2(a+c)^3 = 2b^3+2(1-b)^3\end{aligned}$$

Suy ra

$$|P| \leq \frac{b(1-b)(1-2b)(2b^3+2(1-b)^3+1)}{3} = \frac{b(1-b)(1-2b)(2b^2-2b+1)}{3}.$$

Chú ý. Điều kiện $a \geq 7 \cdot \max\{b, c\}; a+b+c=1 \Rightarrow b \in \left[0; \frac{1}{8}\right]$.

Xét hàm số $f(b) = \frac{b(1-b)(1-2b)(2b^2-2b+1)}{3}$ trên đoạn $[0; 1/8]$ ta có

$$f'(b) = 20b^4 - 40b^3 + 30b^2 - 10b + 1;$$

$$f''(b) = 80b^3 - 120b^2 + 60b - 10 = 40b^2(2b-3) + 10(6b-1) < 0, \forall b \in \left[0; \frac{1}{8}\right].$$

Suy ra $f'(b) \geq f'\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{149}{1024} > 0$. Vì vậy f(b) đồng biến trên đoạn $[0; 1/8]$.

Suy ra $|P| \leq f\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{525}{8192} \Leftrightarrow -\frac{525}{8192} \leq P \leq \frac{525}{8192}$. Dấu bằng đạt tại $b = \frac{1}{8}; c = 0; a = \frac{7}{8}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng -525/8192.

Chú ý. Câu hỏi đặt ra là tại sao phân tích được P như trên. Nhận thấy khi $a=b=c \Rightarrow P=0$.

Do đó P có các nhân tử $(a-b)(b-c)(c-a)$. Nói thêm có thể không cần điều kiện

Khoá giải đề THPT Quốc Gia Môn Toán – Thầy Đặng Thành Nam – toanmath.com

$a \geq 7 \cdot \max\{b, c\}$. Việc chặn thêm điều kiện này chỉ nhằm mục đích bài toán có kết quả đẹp.

Dạng toán này bạn đọc tham khảo cuốn “**Kỹ thuật giải Bất đẳng thức bài toán Min-Max**” cùng tác giả. Để rèn luyện bạn đọc thử sức với bài toán mức độ vừa phải sau

Bài toán. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = a(b - c)^3 + b(c - a)^3 + c(a - b)^3$.

Đánh giá chung về đề thi và bài làm của học sinh cho đề số 01/50:

Lưu ý: Phần đánh giá này dựa vào phản hồi của học sinh khi làm bài.

Đề thi ở mức **tương đối khó** với đa số thí sinh và nếu không có cách trình bày tốt sẽ không có đủ thời gian để làm các câu khó. Các câu từ **câu 1 đến 7.1** để cho mức độ vừa phải riêng có **câu 1.3 ; câu 2.2 và câu 5 đòi hỏi tư duy**. Với câu 2.2 cần so sánh nghiệm với 0 (có thể xét hàm số tuy nhiên dài). **Câu 5** đòi hỏi các em phải tư duy phân chia tập hợp 10 số thành 3 loại với **số dư khi chia cho 3**. Chú ý nếu yêu cầu thay đổi chia cho m thì ta phân chia tập hợp thành các loại với số dư khi chia cho m (có thể giải bằng pp liệt kê số kết quả - tuy nhiên khi tăng số lần quay lên 3, 4, ... lần thì sẽ dài thì theo lời giải trên ta có cách giải tối ưu). Đây là một bài toán cũng tương tự như khi tung đồng thời các con xúc sắc vậy. Tuy nhiên thấy thấy một số bạn trình bày cách dài do vậy chiếm phần lớn thời gian để giải quyết các câu này mà chưa có thời gian tập trung suy nghĩ **các bài khó từ (7.2 đến 9)**. **Câu 7.2 nút thắt** quan trọng của bài toán là phát hiện **IN=IA**. **Câu số 8** về hệ phương trình sẽ khá lạ với nhiều bạn. Hầu hết tìm được $x^2 + y^2 = 4$ từ phương trình đầu tuy nhiên không xử lý được vế còn lại (**chiếm 80% số điểm của câu hỏi**) – Bằng kỹ năng biến đổi kết hợp đánh giá cơ bản ta có kết quả bài toán. **Chú ý thêm câu 8 là điều kiện $x \geq 0$ và $y \geq 1$ là cần thiết** để hoàn thiện lời giải cho **hệ (1)**. Riêng câu **số 3** một số bạn mắc sai lầm ở công thức tính thể tích khối tròn xoay về điểm này các em **cần lưu ý**. **Câu 9** thấy xuất phát từ một ý tưởng cũ + bài toán mới tuy nhiên đòi hỏi khéo léo trong quá trình tiếp cận và hiểu đề đến trình bày lời giải.

Cấu trúc đề cho đề số 01/50

Nhận biết, thông hiểu: Câu 1.1; 1.2; 2.1; 3; 4 (chiếm 8 điểm/20 điểm = 40%)

Vận dụng: 1.3; 2.2; 5; 6; 7.1 (7,5 điểm/20 điểm = 37,5%)

Vận dụng cao: 7.2; 8; 9 (4,5 điểm/20 điểm = 22,5%)

Thầy dự đoán mức độ nhận biết, thông hiểu năm nay chiếm 50-60%. Tuy nhiên vì là đề luyện nên thầy sẽ giữ ở mức độ cao hơn một chút khoảng 40-50%.

Mức điểm trong khoảng 14-16 điểm sẽ đạt yêu cầu.

Qua đây có một kinh nghiệm là các loại toán quen thuộc các em cố gắng hoàn thiện lời giải theo hướng tối ưu để tiết kiệm thời gian làm bài. Để làm được điều này đòi hỏi các em cần rèn luyện ngay từ bây giờ bằng cách giải chi tiết + suy nghĩ mở rộng các hướng có thể tiếp cận bài toán + theo dõi khoá học sát sao để giải đề ngay khi đề được phát hành với việc căn thời gian làm bài đúng 180 phút. Sau đó so sánh đáp án chi tiết kèm Video thầy phát hành sau đó!

Chúc các em có kết quả tốt trong các đề tiếp theo!

Thân ái!

Đông Hà Nội ngày 22.01.2015

Đặng Thành Nam