

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

Họ và tên:.....

LỚP 12 THPT

SỐ BÁO DANH:.....

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Đề gồm có 01 trang

**Câu 1 (2.0 điểm)**

Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C):  $y = \frac{x}{x-1}$ , biết rằng khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị (C) đến tiếp tuyến là lớn nhất.

**Câu 2 (2.0 điểm)**

Cho các số thực dương  $x, y$  thỏa mãn:  $x^3 + x + \log_2 \frac{x}{y} = 8y^3 + 2y + 1$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = -x^3 + x^2 + 4y^4 + y^2 - 2xy^2 + 2xy + 4$ .

**Câu 3 (2.0 điểm)**

a. Cho  $I_n = \int_1^e \ln^n x \cdot dx$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), chứng minh rằng:  $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$

b. Tính tích phân sau:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$

**Câu 4 (3.0 điểm)**

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là một hình bình hành. Gọi  $K$  là trung điểm của  $SC$ . Giả sử  $(P)$  là mặt phẳng đi qua hai điểm  $A, K$  và luôn cắt các cạnh  $SB, SD$  lần lượt tại  $M, N$  ( $M, N$  không trùng  $S$ ).

a. Chứng minh rằng:  $\frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} = 3$ .

b. Gọi  $V_1$  và  $V$  theo thứ tự là thể tích của khối chóp  $S.AMKN$  và  $S.ABCD$ .

Xác định vị trí của mặt phẳng  $(P)$  để tỷ số  $\frac{V_1}{V}$  đạt giá trị lớn nhất.

**Câu 5 (1.0 điểm)**

Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm, thỏa mãn  $a + b + c = 3$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b^2+1} + \frac{b^2}{c^2+1} + \frac{c^2}{a^2+1} \geq \frac{3}{2}$$

-----HẾT-----

YÊU CẦU CHUNG

\* Đáp án chỉ trình bày một lời giải cho mỗi bài. Trong bài làm của học sinh yêu cầu phải lập luận logic chặt chẽ, đầy đủ, chi tiết và rõ ràng.

\* Trong mỗi bài, nếu học sinh giải sai ở bước giải trước thì cho điểm 0 đối với những bước giải sau có liên quan. Ở câu 4 nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì cho điểm 0.

\* Điểm thành phần của mỗi bài nói chung phân chia đến 0,25 điểm. Đối với điểm thành phần là 0,5 điểm thì tùy tổ giám khảo thống nhất để chiết thành từng 0,25 điểm.

\* Học sinh có lời giải khác đáp án (nếu đúng) vẫn cho điểm tối đa tùy theo mức điểm của từng bài.

\* Điểm của toàn bài là tổng (không làm tròn số) của điểm tất cả các bài.

Câu	Nội dung	Điểm
<b>1</b> (2,0 điểm)	Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C): $y = \frac{x}{x-1}$ , biết rằng khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị (C) đến tiếp tuyến là lớn nhất.	<b>2,0</b>
	Gọi $M\left(x_0; \frac{x_0}{x_0-1}\right), x_0 \neq 1$ là tiếp điểm của tiếp tuyến và đồ thị (C), tiếp tuyến của (C) tại $M\left(x_0; \frac{x_0}{x_0-1}\right)$ là: $y = -\frac{1}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{x_0}{x_0-1} \Leftrightarrow x + (x_0-1)^2 y - x_0^2 = 0 (\Delta)$ Và tâm đối xứng của (C) là $I(1;1)$ .	0,50
	Khi đó: $d(I; \Delta) = \frac{ 1 + (x_0-1)^2 - x_0^2 }{\sqrt{1 + (x_0-1)^4}} = \frac{2 x_0-1 }{\sqrt{1 + (x_0-1)^4}}$ $= \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{(x_0-1)^2} + (x_0-1)^2}}$	0,50
	Mà $\sqrt{\frac{1}{(x_0-1)^2} + (x_0-1)^2} \geq \sqrt{2} \Rightarrow d(I; \Delta) \leq \sqrt{2}$ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1}{x_0-1} = x_0-1 \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{cases}$	0,50
	Với $x_0 = 0$ tiếp tuyến cần tìm là: $y = -x$ Với $x_0 = 2$ tiếp tuyến cần tìm là: $y = -x + 4$	0,50

<b>2</b> (2,0 điểm)	<p><b>Cho các số thực dương <math>x, y</math> thỏa mãn: <math>x^3 + x + \log_2 \frac{x}{y} = 8y^3 + 2y + 1</math>.</b></p> <p><b>Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức</b></p> $P = -x^3 + x^2 + 4y^4 + y^2 - 2xy^2 + 2xy + 4.$	<b>2,0</b>																			
	<p>Ta có: <math>x^3 + x + \log_2 \frac{x}{y} = 8y^3 + 2y + 1</math></p> $\Leftrightarrow x^3 + x + \log_2 x = (2y)^3 + 2y + \log_2(2y) \quad (*)$	0,25																			
	<p>Xét hàm số: <math>f(t) = t^3 + t + \log_2 t, \forall t &gt; 0</math>, ta có:</p> $f'(t) = 3t^2 + 1 + \frac{1}{t \ln 2} > 0, \forall t > 0$ <p>Do đó <math>f(t)</math> là hàm đồng biến trên <math>(0; +\infty)</math>.</p> <p>Khi đó <math>(*) \Leftrightarrow f(x) = f(2y) \Leftrightarrow x = 2y</math>.</p>	0,5																			
	<p>Khi đó, ta có:</p> $P = -x^3 + x^2 + 4y^4 + y^2 - 2xy^2 + 2xy + 4$ $= -8y^3 + 4y^2 + 4y^4 + y^2 - 4y^3 + 4y^2 + 4$ $= 4y^4 - 12y^3 + 9y^2 + 4$	0,25																			
	<p>Xét hàm số <math>P(y) = 4y^4 - 12y^3 + 9y^2 + 4, \forall y &gt; 0</math>, ta có:</p> $P'(y) = 16y^3 - 36y^2 + 18y$ $P'(y) = 0 \Leftrightarrow 16y^3 - 36y^2 + 18y = 0 \Leftrightarrow y = 0, y = \frac{3}{4}, y = \frac{3}{2}$	0,25																			
	<p><b>Bảng biến thiên</b></p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tbody> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>y</math></td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{3}{4}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{3}{2}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>P'(y)</math></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">+</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">-</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">+</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>P(y)</math></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{337}{64}</math></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"><math>4</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>+\infty</math></td> </tr> </tbody> </table> <p><i>(Note: In the original image, arrows indicate the function P(y) increases from 4 at y=0 to 337/64 at y=3/4, then decreases to 4 at y=3/2, and finally increases towards +infinity as y approaches +infinity.)</i></p>	$y$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	$P'(y)$		+	0	-	0	+	$P(y)$			$\frac{337}{64}$			$4$	$+\infty$
$y$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$																	
$P'(y)$		+	0	-	0	+															
$P(y)$			$\frac{337}{64}$			$4$	$+\infty$														
<p>Dựa vào bảng biến thiên, ta có:</p> $\min_{x, y > 0} P = 4, \text{ khi } x = 3, y = \frac{3}{2}$	0,25																				
<b>3</b> (2,0 điểm)	<p><b>a. Cho <math>I_n = \int_1^e \ln^n x \cdot dx \quad (n \in \mathbb{N}^*)</math>, chứng minh rằng: <math>I_{n+1} = e - (n+1)I_n</math></b></p>	<b>1,0</b>																			
	<p>Ta có: <math>I_n = \int_1^e \ln^n x \cdot dx \quad (n \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow I_{n+1} = \int_1^e \ln^{n+1} x \cdot dx \quad (n \in \mathbb{Z}^+)</math></p>	0,25																			
	<p>Đặt:</p> $u = \ln^{n+1} x \Rightarrow du = (n+1) \frac{1}{x} \ln^n x \cdot dx$ $dv = dx \Rightarrow v = x$	0,25																			
	<p>Khi đó: <math>I_{n+1} = \int_1^e \ln^{n+1} x \cdot dx = x \cdot \ln^{n+1} x \Big _1^e - (n+1) \int_1^e \ln^n x \cdot dx</math></p> $= e - (n+1)I_n$	0,5																			

	<p><b>b. Tính tích phân sau:</b> <math>I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx</math></p>	<b>1,0</b>
	<p>Đặt <math>x = \frac{\pi}{4} - t \Rightarrow dx = -dt</math>. Đổi cận: <math>x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 0</math></p>	0,25
	<p>Khi đó: <math>I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left[ 1 + \tan \left( \frac{\pi}{4} - t \right) \right] dt</math></p> $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left( 1 + \frac{1 - \tan t}{1 + \tan t} \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left( \frac{2}{1 + \tan t} \right) dt$	0,25
	$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t) dt = \frac{\pi}{4} \ln 2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$	0,25
	<p>Vậy <math>I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx = \frac{\pi}{8} \ln 2</math></p>	0,25
	<p><b>Cho hình chóp <math>S.ABCD</math> có đáy <math>ABCD</math> là một hình bình hành. Gọi <math>K</math> là trung điểm của <math>SC</math>. Giả sử <math>(P)</math> là mặt phẳng đi qua hai điểm <math>A, K</math> và luôn cắt các cạnh <math>SB, SD</math> lần lượt tại <math>M, N</math> (<math>M, N</math> không trùng <math>S</math>).</b></p>	<b>3,0</b>
	<p><b>a. Chứng minh rằng:</b> <math>\frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} = 3</math>.</p>	<b>1,5</b>
<b>4</b> <b>(3,0 điểm)</b>		0,5
	<p>Gọi <math>O = AC \cap BD, I = SO \cap AK</math>. Qua <math>I</math> dựng đường thẳng <math>d</math> sao cho <math>d</math> luôn cắt các cạnh <math>SB, SD</math> lần lượt tại <math>M, N</math>.</p> <p>Ta có: <math>V_{S.ADC} = V_{S.ABC} = V_{S.ABD} = V_{S.CBD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{1}{2} V</math></p>	

<p>Khi đó: <math>\frac{V_{S.ANK}}{V_{S.ADC}} = \frac{SN \cdot SK}{SD \cdot SC} = \frac{1 \cdot SN}{2 \cdot SD} \Rightarrow V_{S.ANK} = \frac{1 \cdot SN}{2 \cdot SD} \cdot V_{S.ADC} = \frac{SN}{4SD} V</math></p> <p>Tương tự</p> $V_{S.AMK} = \frac{SM}{4SB} V, V_{S.AMN} = \frac{SM \cdot SN \cdot V}{SB \cdot SD \cdot 2}, V_{S.MNK} = \frac{SM \cdot SN \cdot V}{SB \cdot SD \cdot 4}$	0,5												
<p>Do đó:</p> $V_{S.AMKN} = V_{S.ANK} + V_{S.AMK} = V_{S.AMN} + V_{S.KMN}$ $\Leftrightarrow \frac{SN}{4SD} V + \frac{SM}{4SB} V = \frac{SM \cdot SN \cdot V}{SB \cdot SD \cdot 2} + \frac{SM \cdot SN \cdot V}{SB \cdot SD \cdot 4} = \frac{SM \cdot SN \cdot 3V}{SB \cdot SD \cdot 4}$ $\Leftrightarrow \frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} = 3 \text{ (Chia cả 2 vế cho } \frac{SM \cdot SN \cdot V}{SB \cdot SD \cdot 4} \text{)}$	0,5												
<p><b>b. Gọi <math>V_1</math> và <math>V</math> theo thứ tự là thể tích của khối chóp <math>S.AMKN</math> và <math>S.ABCD</math>. Xác định vị trí của mặt phẳng <math>(P)</math> để tỷ số <math>\frac{V_1}{V}</math> đạt giá trị lớn nhất.</b></p>	1,5												
<p>Đặt <math>\frac{SM}{SB} = x, \frac{SN}{SD} = y; (0 &lt; x, y \leq 1)</math></p>													
<p>Theo câu a ta có: <math>V_1 = \frac{(x+y)}{4} V = \frac{3xy}{4} V \Leftrightarrow x+y = 3xy</math></p> $\Rightarrow y = \frac{x}{3x-1} \Rightarrow x > \frac{1}{3} \text{ (do } y > 0 \text{)}$ <p>và <math>y = \frac{SN}{SD} \leq 1 \Rightarrow \frac{x}{3x-1} \leq 1 \Leftrightarrow 2x-1 \geq 0 \text{ (do } 3x-1 &gt; 0 \text{) suy ra } x \geq \frac{1}{2}</math></p> <p>Do đó <math>\frac{1}{2} \leq x \leq 1</math></p>	0,5												
<p>Ta có <math>\frac{V_1}{V} = \frac{3xy}{4} = \frac{3x^2}{4(3x-1)}</math>. Đặt <math>f(x) = \frac{3x^2}{4(3x-1)}; \forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]</math></p> <p>Tính được <math>f'(x) = \frac{3(3x^2-2x)}{4(3x-1)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \frac{2}{3}</math></p>	0,5												
<p><b>Bảng biến thiên:</b></p> <table border="1" style="margin: 0 auto; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>x</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{1}{2}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{2}{3}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>1</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>f'(x)</math></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">-</td> <td style="padding: 5px;">+</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>f(x)</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{3}{8}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{1}{8}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{3}{8}</math></td> </tr> </table> <p style="text-align: center; margin-top: 10px;"> </p>	$x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$1$	$f'(x)$		-	+	$f(x)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	0,5
$x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$1$										
$f'(x)$		-	+										
$f(x)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$										
<p>Dựa vào bảng biến thiên, ta có:</p> $\frac{V_1}{V} \text{ có giá trị lớn nhất là } \frac{3}{8} \text{ khi } \begin{cases} x = 1 \Rightarrow M \equiv B \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{1}{2} \end{cases}$ <p>Vậy mặt phẳng <math>(P)</math> trùng với mặt phẳng <math>(ABK)</math> hoặc mặt phẳng <math>(P)</math> đi qua <math>AK</math> và trung điểm của <math>SB</math>.</p>													

	<p><b>Cho <math>a, b, c</math> là các số thực không âm, thỏa mãn <math>a + b + c = 3</math>. Chứng minh rằng:</b></p> $\frac{a^2}{b^2 + 1} + \frac{b^2}{c^2 + 1} + \frac{c^2}{a^2 + 1} \geq \frac{3}{2}$	<b>1,0</b>
	<p>Ta có :</p> <p>+) <math>9 = (a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 3</math></p> <p>+) <math>(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)</math></p> <p>+) <math>\frac{a^2}{m} + \frac{b^2}{n} + \frac{c^2}{p} \geq \frac{(a + b + c)^2}{m + n + p}; \forall m, n, p &gt; 0</math></p>	0,25
<p><b>5</b> <b>(1,0 điểm)</b></p>	<p>Khi đó:</p> $S = \frac{a^2}{b^2 + 1} + \frac{b^2}{c^2 + 1} + \frac{c^2}{a^2 + 1} = \frac{a^4}{a^2(b^2 + 1)} + \frac{b^4}{b^2(c^2 + 1)} + \frac{c^4}{c^2(a^2 + 1)}$ <p>Nên</p> $S \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{\frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)^2 + a^2 + b^2 + c^2}$ <p>Đặt <math>t = a^2 + b^2 + c^2 \geq 3</math> ta được:</p> $S \geq \frac{t^2}{\frac{1}{3}t^2 + t} = \frac{3t}{t + 3} = f(t), \forall t \in [3; +\infty)$	0,25
	<p>Do <math>f'(t) = \frac{9}{(t + 3)^2} &gt; 0, \forall t \in [3; +\infty)</math></p> <p>suy ra hàm số đồng biến trên <math>\forall t \in [3; +\infty)</math></p> <p>Từ đây: <math>S \geq f(t) \geq f(3) = \frac{3}{2}</math></p> <p>Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi <math>t = 3</math> hay <math>a = b = c = 1</math></p>	0,25