

CHUYÊN ĐỀ:

KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

Tác giả: **Trần Mạnh Tường**

Nhóm giáo viên Toán tiếp sức Chinh phục kì thi THPT năm 2020

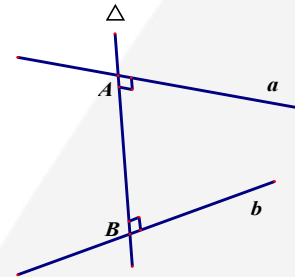
B. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Định nghĩa

Khoảng cách 2 đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó

$$\begin{cases} \Delta \perp a, \Delta \perp b \\ \Delta \cap a = A, \Delta \cap b = B \end{cases} \Rightarrow d(a, b) = AB$$



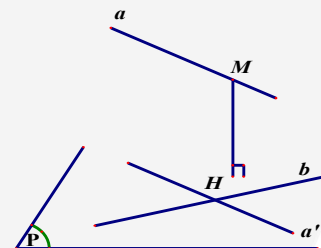
2. Các phương pháp tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau: Có 3 phương pháp thường dùng

a. Phương pháp 1: Dùng định nghĩa

- Xác định đoạn vuông góc chung AB của hai đường thẳng chéo nhau
- Tính độ dài đoạn AB.

b. Phương pháp 2:

- Chọn hoặc dựng 1 mặt phẳng (P) chứa 1 đường và song song với đường thẳng còn lại (chẳng hạn chứa b và song song với a)
- Khi đó $d(a, b) = d(a; (P)) = d(M; (P))$ với M là điểm tùy ý trên đường thẳng a

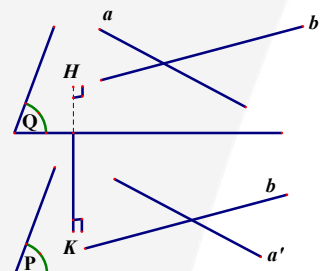


c. Phương pháp 3:

- Chọn hoặc dựng 2 mặt phẳng lần lượt chứa 1 đường thẳng và song song với đường thẳng còn lại.

- Khi đó $d(a, b) = d((P); (Q)) = d(H; (P)) = d(K; (Q))$ với

$$H \in (Q), K \in (P)$$



d. Sử dụng phương pháp vectơ (ít dùng)

II. BÀI TẬP VẬN DỤNG:

1. VÍ DỤ MINH HỌA:

Câu 1: (nhiều cách giải) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD' và BD .

Lời giải

Cách 1. Dựng đường vuông góc chung và tính độ dài đoạn vuông góc chung.

Do $\begin{cases} BD \parallel B'D' \\ AD' \subset (AB'D') \end{cases}$ nên $(AB'D')$ là mặt phẳng chứa AD' và song song với BD .

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta dựng hình chiếu của điểm O trên $(AB'D')$.

Do $\begin{cases} B'D' \perp A'C' \\ B'D' \perp CC' \end{cases} \Rightarrow B'D' \perp (CC'A') \Rightarrow B'D' \perp A'C \quad (1)$

Tương tự $A'C \perp AD' \quad (2)$.

Từ (1), (2) suy ra $A'C \perp (AB'D')$. Gọi $G = A'C \cap (AB'D')$.

Do $\triangle AB'D'$ đều và $AA' = A'E' = A'D'$ nên G là trọng tâm của tam giác $AB'D'$.

Vậy Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ thì AI là trung tuyến của tam giác $AB'D'$ nên A, G, I thẳng hàng.

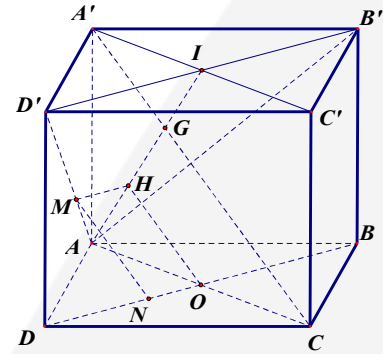
Trong $(ACCA')$ dựng $OH \parallel CA'$ cắt AI tại H thì H là hình chiếu của $O \in BD$ trên $(AB'D')$.

Từ H dựng đường thẳng song song với BD cắt AD' tại M , từ M dựng đường thẳng song song với OH cắt BD tại N thì MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD do đó $d(AD', BD) = MN$.

Để thấy $MNOH$ là hình chữ nhật nên $MN = OH$. Do OH là đường trung bình trong tam giác $ACG \Rightarrow OH = \frac{1}{2}CG$.

Mặt khác $\frac{GC}{GA'} = \frac{AC}{A'I} = 2 \Rightarrow CG = 2GA' \Rightarrow CG = \frac{2}{3}CA' = \frac{2}{3}a\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

$\Rightarrow OH = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}a}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Vậy $d(AD', BD) = MN = OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.



Cách 2. Tính độ dài đoạn vuông góc chung mà không cần dựng vị trí cụ thể của đoạn vuông góc chung.

Giả sử MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD với $M \in AD'$, $N \in BD$. Từ M kẻ $MP \perp AD$, từ N kẻ $NQ \perp AD$.

Dễ thấy $BD \perp (MNP) \Rightarrow BD \perp NP$;

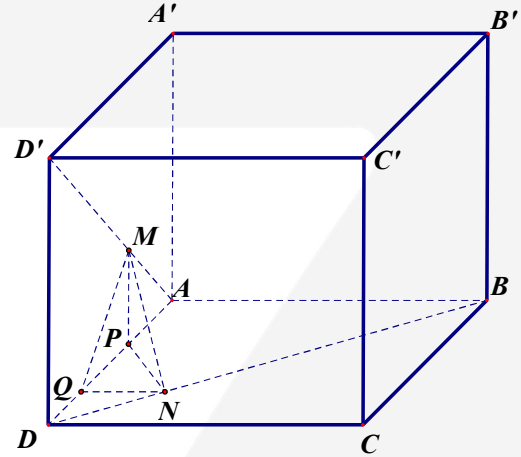
$AD' \perp (MNQ) \Rightarrow AD' \perp MQ$.

Hai tam giác AMQ và DNP vuông cân nên

$$QD = QN = QP = MP = PA = \frac{a}{3}.$$

$$\text{Lại có } PN = \frac{DP}{\sqrt{2}} = \frac{2a}{3\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Từ đó } MN^2 = PM^2 + PN^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



Cách 3. (dùng phương pháp 3)

Xem khoảng cách cần tìm bằng khoảng cách của hai mặt phẳng song song chứa hai đường đó.

$$\text{Dễ thấy } \begin{cases} AD' \in (AB'D') \\ BD \subset (BDC') \\ (AB'D') \parallel (BDC') \end{cases}$$

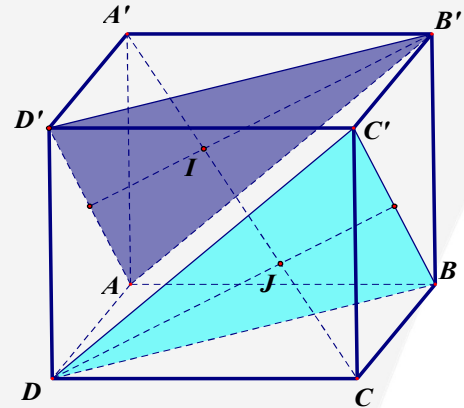
$$\Rightarrow d(AD', BD) = d((AB'D'), (BDC')).$$

Gọi I, J lần lượt là giao điểm của $A'C$ với các mặt phẳng $(AB'D')$, (BDC') .

Theo chứng minh trong cách 1 thì I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác $AB'D'$ và (BDC') .

Mặt khác dễ dàng chứng minh được $A'C \perp (AB'D')$, $A'C \perp (BDC')$.

$$\text{suy ra } d(AD', BD) = d((AB'D'), (BDC')) = IJ = \frac{1}{3} A'C = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



Cách 4. Sử dụng phương pháp vec to

Gọi MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD với $M \in AD', N \in BD$.

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{y}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{z} \Rightarrow |\vec{x}| = |\vec{y}| = |\vec{z}| = a$, $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} = 0$

$\overrightarrow{AD} = \vec{y} + \vec{z} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AD} = k(\vec{y} + \vec{z})$, $\overrightarrow{DB} = \vec{x} - \vec{y} \Rightarrow \overrightarrow{DN} = m(\vec{x} - \vec{y})$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{AM} = m\vec{x} + (1 - k - m)\vec{y} - k\vec{z}$.

Vì $MN \perp DB \Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow (m\vec{x} + (1 - k - m)\vec{y})(\vec{x} - \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow 2m + k - 1 = 0$.

Tương tự $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AD'} = 0 \Leftrightarrow 1 - m - 2k = 0$, từ đó ta có hệ $\begin{cases} 2m + k = 1 \\ m + 2k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = k = \frac{1}{3}$.

Vậy $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\vec{x} + \frac{1}{3}\vec{y} - \frac{1}{3}\vec{z} \Rightarrow MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{\frac{1}{9}(\vec{x}^2 + \vec{y}^2 + \vec{z}^2)} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 2: (dùng định nghĩa) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD , H là giao điểm của CN và DM . Biết SH vuông góc mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$. Khoảng cách giữa đường thẳng DM và SC là

A. $\frac{a\sqrt{57}}{19}$.

B. $\frac{a\sqrt{57}}{38}$.

C. $\frac{3a\sqrt{57}}{38}$.

D. $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\triangle ADM = \triangle DCN$ ($c - g - c$).

$\Rightarrow \widehat{ADM} = \widehat{DCN} \Rightarrow \widehat{ADM} + \widehat{CDM} = \widehat{DCN} + \widehat{CDM} = 90^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{DHC} = 90^\circ \Rightarrow DM \perp NC$

Ta có: $\left. \begin{matrix} CN \perp DM \\ SH \perp DM \end{matrix} \right\} \Rightarrow DM \perp (SNC)$.

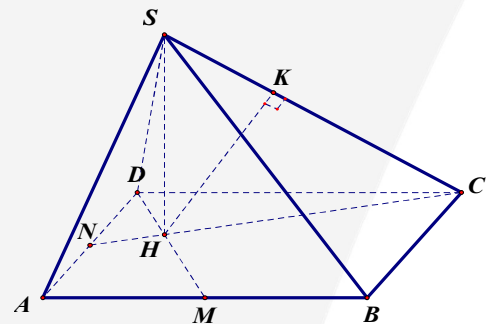
Kẻ $HK \perp SC$ ($K \in SC$).

Mặt khác $HK \perp DM$ vì $DM \perp (SNC)$.

$\Rightarrow HK$ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng DM và SC .

$\Rightarrow d(SC; DM) = HK$.

$$DC^2 = HC \cdot CN \Leftrightarrow HC = \frac{DC^2}{CN} = \frac{DC^2}{\sqrt{DN^2 + DC^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$



$$\text{Xét tam giác } SHC \text{ vuông tại } H: HK = \frac{SH \cdot HC}{\sqrt{SH^2 + HC^2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{2a\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{(a\sqrt{3})^2 + \left(\frac{2a\sqrt{5}}{5}\right)^2}} = \frac{2a\sqrt{57}}{19}.$$

Vậy khoảng cách giữa SC và DM bằng $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Câu 3: (dùng phương pháp 2) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a , $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SA = SB = SC = 2a$. Khoảng cách giữa AB và SC bằng.

A. $\frac{a\sqrt{11}}{12}$.

B. $\frac{a\sqrt{11}}{4}$.

C. $\frac{a\sqrt{11}}{8}$.

D. $\frac{3a\sqrt{11}}{4}$.

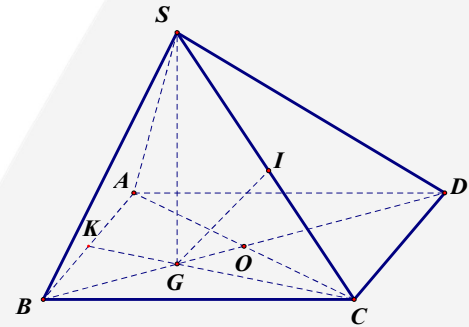
Lời giải.

Chọn B

Ta có: $\triangle ABC$ đều, $SA = SB = SC$, gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$

nên $SG \perp (ABC)$ hay $SG \perp (ABCD)$

Ta lại có: $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD)$.



$$\Rightarrow d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(B, (SCD)) = \frac{3}{2} d(G, (SCD))$$

Mặt khác: Kẻ $GI \perp SC$

$$\text{Mà } \begin{cases} CG \perp AB \\ AB \parallel CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp CG \Rightarrow \begin{cases} CD \perp CG \\ CD \parallel SG \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SCG) \Rightarrow CD \perp GI \text{ (do } GI \subset (SCG)) .$$

$$\begin{cases} GI \perp CD \\ GI \parallel SC \end{cases} \Rightarrow GI \perp (SCD) \Rightarrow d(G, (SCD)) = GI$$

Tam giác SGC vuông tại G , có $CG = \frac{2}{3} CK = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ suy ra

$$SG = \sqrt{SC^2 - GC^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{33}}{3} .$$

$$\frac{1}{GI^2} = \frac{1}{SG^2} + \frac{1}{GC^2} = \frac{3}{11a^2} + \frac{3}{a^2} = \frac{36}{11a^2} \Rightarrow GI = \frac{a\sqrt{11}}{6}$$

$$\text{Vậy } d(AB, SC) = \frac{3}{2} d(G, (SCD)) = \frac{a\sqrt{11}}{4} .$$

Câu 4: (dùng phương pháp 3) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các mặt bên là những hình vuông cạnh a . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và AB' .

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D

+ Gọi D, E lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$.

$$\Rightarrow AD \parallel A'E; B'D \parallel CE \Rightarrow (CA'E) \parallel (ADB')$$

$$\Rightarrow d(AB', A'C) = d((ADB'), (CEA')) = d(B', (CEA'))$$

$$+ B'C' \cap (CA'E) = E (EB' = EC') \Rightarrow d(B', (CA'E)) = d(C', (CA'E)).$$

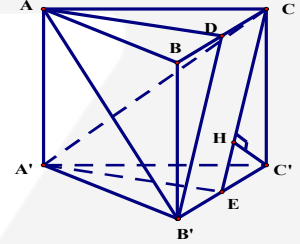
$$+ \Delta A'B'C' \Rightarrow A'E \perp B'C'.$$

$$\text{Vì } ABB'A' \text{ là hình vuông} \Rightarrow A'E \perp CC' \Rightarrow A'E \perp (CC'E) \Rightarrow (CA'E) \perp (CC'E)$$

mà $(CA'E) \cap (CC'E) = CE \Rightarrow$ từ C' hạ đường vuông góc xuống CE tại H thì $C'H = d(C', (CA'E)).$

+ Xét tam giác vuông tại $CC'E$ tại C' có

$$CC' = a; C'E = \frac{a}{2} \Rightarrow C'H = \frac{CC' \cdot C'E}{\sqrt{CC'^2 + C'E^2}} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow d(AB', A'C) = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$



Câu 5: (dùng phương pháp 2) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $AA' = 2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và CD' .

A. $2a$.

B. $a\sqrt{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D

$$+ \text{Ta có } BD \parallel B'D', B'D' \subset (CD'B') \Rightarrow BD \parallel (CD'B')$$

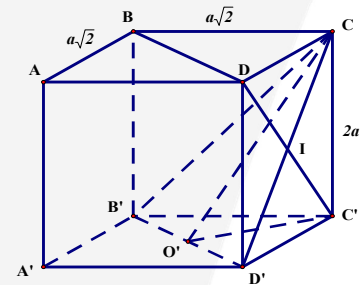
$$\Rightarrow d(CD', BD) = d(D, (CD'B')).$$

+ Gọi $I = DC' \cap D'C \Rightarrow I = DC' \cap (CD'B')$ mà I là trung điểm của $DC' \Rightarrow d(D, (CD'B')) = d(C', (CD'B')).$

$$+ \text{Vì } A'B'C'D' \text{ là hình vuông tâm } O' \text{ cạnh } a\sqrt{2} \Rightarrow C'O' = a \Rightarrow CO' = \sqrt{CC'^2 + C'O'^2} = a\sqrt{5}$$

$$\text{Ta có diện tích } S_{\Delta C'B'D'} = \frac{1}{2} CO' \cdot B'D' = \frac{1}{2} a\sqrt{5} \cdot 2a = a^2\sqrt{5}.$$

$$+ \text{Ta } V_{C'.CD'B'} = V_{C.C'B'D'} = \frac{1}{6} CC' \cdot CB \cdot CD = \frac{1}{6} (a\sqrt{2})^2 \cdot 2a = \frac{2}{3} a^3$$



$$\Rightarrow d(C', (CB'D')) = \frac{3V_{C.C'B'D'}}{S_{\Delta CB'D'}} = \frac{3 \cdot \frac{2}{3}a^3}{a^2\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

2. BÀI TẬP TỰ LUYỆN:

Câu 6. Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau tại O với $OA = 3a, OB = a, OC = 2a$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác OAB và OAC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng IJ và AC .

- A. $\frac{2a}{7}$. B. $\frac{4a}{7}$. C. $\frac{6a}{7}$. D. $\frac{8a}{7}$.

Câu 7. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B'$ và BC' .

- A. a . B. $\frac{3a}{7}$. C. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 8. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều ABC cạnh a . Gọi M là trung điểm của AB , tam giác $A'CM$ cân tại A' và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và CC' , biết rằng thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = \frac{\sqrt{3}}{8}a^3$.

- A. $d = \frac{\sqrt{21}}{14}a$. B. $d = \frac{2\sqrt{39}}{3}a$. C. $d = \frac{2\sqrt{39}}{13}a$. D. $d = \frac{\sqrt{21}}{7}a$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $4a$, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa cạnh SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° , M là trung điểm của BC , N là điểm thuộc cạnh AD sao cho $DN = a$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và MN .

- A. $\frac{8a\sqrt{618}}{103}$. B. $\frac{4a\sqrt{618}}{103}$. C. $\frac{3a\sqrt{618}}{103}$. D. $\frac{8a\sqrt{618}}{309}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $AB = a\sqrt{2}; AD = a$, các mặt bên $SBC; SCD$ là các tam giác vuông tại $B; D$. Góc tạo bởi cạnh SC và mặt phẳng đáy bằng 45° . Gọi M là trung điểm cạnh AD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và SC theo a .

- A. $\frac{2a\sqrt{30}}{15}$. B. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{10}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{15}$.

ĐÁP ÁN

Câu 6. Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau tại O với $OA = 3a, OB = a, OC = 2a$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác OAB và OAC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng IJ và AC .

A. $\frac{2a}{7}$.

B. $\frac{4a}{7}$.

C. $\frac{6a}{7}$.

D. $\frac{8a}{7}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi M là trung điểm cạnh OA .

Ta có $\frac{MI}{MB} = \frac{MJ}{MC} = \frac{1}{3}$ nên $IJ \parallel BC$.

$$d(IJ, AC) = d(IJ, (ABC)) = d(I, (ABC))$$

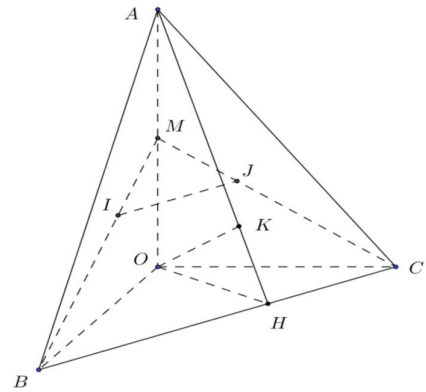
$$\text{Do đó: } = \frac{2}{3} d(M, (ABC)) = \frac{1}{3} d(O, (ABC)).$$

Tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau tại O nên:

$$\frac{1}{d^2(O, (ABC))} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{49}{36a^2}$$

$$\Rightarrow d(O, (ABC)) = \frac{6a}{7}.$$

$$\text{Vậy } d(IJ, AC) = \frac{1}{3} \cdot \frac{6a}{7} = \frac{2a}{7}.$$



Câu 7. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B'$ và BC' .

A. a .

B. $\frac{3a}{7}$.

C. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

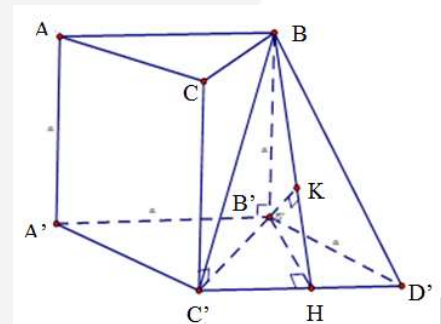
Dựng hình thoi $A'B'D'C'$, suy ra $C'D' \parallel A'B'$ nên

$$A'B' \parallel (BC'D').$$

$$\text{Khi đó: } d(A'B', BC') = d(A'B', (BC'D')) = d(B', (BC'D')).$$

$$\text{Dựng } B'H \perp C'D' \Rightarrow C'D' \perp (BB'H).$$

$$\text{Kẻ } B'K \perp BH \Rightarrow B'K \perp (BC'D'). \text{ Suy ra } d(B', (BC'D')) = B'K.$$



Xét tam giác đều $B'C'D'$ cạnh a , nên $B'H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác vuông $BB'H$ vuông tại B' , có $B'K$ là đường cao nên ta có

$$\frac{1}{B'K^2} = \frac{1}{BB'^2} + \frac{1}{B'H^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow B'K = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{Vậy } d(A'B', BC') = d(B', (BC'D')) = B'K = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 8. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều ABC cạnh a . Gọi M là trung điểm của AB , tam giác $A'CM$ cân tại A' và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và CC' , biết rằng thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = \frac{\sqrt{3}}{8}a^3$.

A. $d = \frac{\sqrt{21}}{14}a$.

B. $d = \frac{2\sqrt{39}}{3}a$.

C. $d = \frac{2\sqrt{39}}{13}a$.

D. $d = \frac{\sqrt{21}}{7}a$.

Lời giải

Chọn D

+ Ta có: $CC' \parallel (AA'B'B) \Rightarrow$

$$d(CC', AB) = d(CC', (AA'B'B)) = d(C, (AA'B'B))$$

+ Gọi H là trung điểm của CM , ta được $A'H \perp CM$
 $\Rightarrow A'H \perp (ABC)$.

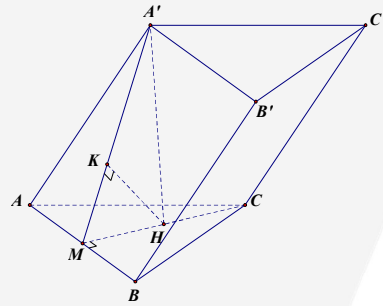
+ Dựng $HK \perp A'M \Rightarrow HK \perp (AA'B'B)$

$$\Rightarrow HK = d(H, (AA'B'B)).$$

Khi đó $d(C, (AA'B'B)) = 2d(H, (AA'B'B)) = 2HK$.

$$+ HM = \frac{MC}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a; A'H = \frac{V_{ABC.A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{8}a^3}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2} = \frac{a}{2}$$

$$+ \text{Vậy } HK = \frac{A'H \cdot HM}{\sqrt{A'H^2 + HM^2}} = \frac{\sqrt{21}}{14}a \Rightarrow d(CC', AB) = \frac{\sqrt{21}}{7}a.$$



Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $4a$, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa cạnh SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° , M là trung điểm của BC , N là điểm thuộc cạnh AD sao cho $DN = a$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và MN .

- A. $\frac{8a\sqrt{618}}{103}$. B. $\frac{4a\sqrt{618}}{103}$. C. $\frac{3a\sqrt{618}}{103}$. D. $\frac{8a\sqrt{618}}{309}$.

Lời giải

Chọn A

▪ Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow AC$ là hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$. Suy ra góc giữa cạnh SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCA} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^\circ$

Tam giác ABC vuông tại B , theo định lý Pytago

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 32a^2 \Rightarrow AC = 4a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow SA = AC \cdot \tan 60^\circ = 4a\sqrt{6}$$

▪ Gọi E là trung điểm của đoạn AD , F là trung điểm của AE

$$\Rightarrow BF \parallel MN \text{ nên } MN \parallel (SBF) \Rightarrow d(MN, SB) = d(MN, (SBF)) = d(N, (SBF))$$

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ kẻ $AH \perp BF, H \in BF$, trong mặt phẳng (SAH) kẻ $AK \perp SH, K \in SH$.

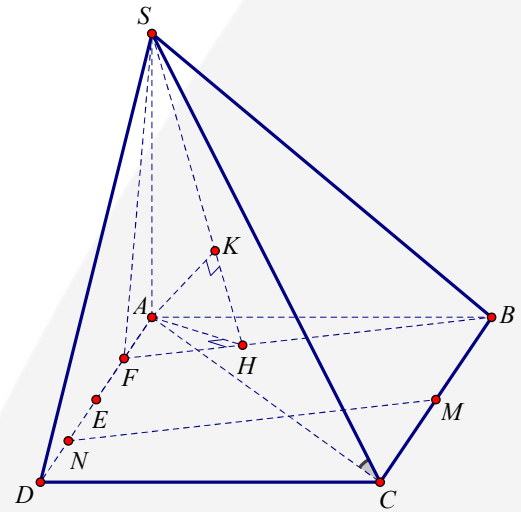
$$\text{Ta có } \begin{cases} BF \perp AH \\ BF \perp SA \end{cases} \Rightarrow BF \perp (SAH) \Rightarrow BF \perp AK.$$

$$\text{Do } \begin{cases} AK \perp SH \\ AK \perp BF \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SBF) \Rightarrow d(A, (SBF)) = AK$$

$$\text{Nên: } \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{103}{96a^2} \Rightarrow AK = \frac{4a\sqrt{618}}{103}$$

$$\text{Mà: } \frac{d(N, (SBF))}{d(A, (SBF))} = \frac{NF}{AF} = 2 \Rightarrow d(N, (SBF)) = \frac{8a\sqrt{618}}{103}.$$

$$\text{Vậy } d(MN, SB) = \frac{8a\sqrt{618}}{103}.$$



Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $AB = a\sqrt{2}$; $AD = a$, các mặt bên SBC ; SCD là các tam giác vuông tại B ; D . Góc tạo bởi cạnh SC và mặt phẳng đáy bằng 45° . Gọi M là trung điểm cạnh AD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và SC theo a .

A. $\frac{2a\sqrt{30}}{15}$.

B. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{10}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{15}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Ta có:

$$\begin{cases} BC \perp SB \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SA \quad (1)$$

$$\begin{cases} DC \perp DA \\ DC \perp SD \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SAD) \Rightarrow DC \perp SA \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SA \perp (ABCD)$

$$\Rightarrow (\widehat{SC; (ABCD)}) = \widehat{SCA} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta SAC \text{ vuông cân tại } A \Rightarrow SA = AC = a\sqrt{3}.$$

Dựng $CK \parallel BM$ ($M \in AD$) $\Rightarrow BM \parallel (SCK)$

$$\Rightarrow d(BM; SC) = d(BM; (SCK)) = d(M; (SCK)).$$

$$\text{Mặt khác } \frac{d(M; (SCK))}{d(A; (SCK))} = \frac{MK}{AK} = \frac{2}{3} \Rightarrow d(M; (SCK)) = \frac{2}{3} d(A; (SCK)).$$

$$\text{Kẻ } AH \perp CK; AN \perp SH \Rightarrow d(A; (SCK)) = AN.$$

$$\text{Tam giác } ABM \text{ vuông tại } A \Leftrightarrow BM^2 = AB^2 + AM^2 \Leftrightarrow BM^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a\sqrt{2})^2 = \frac{9a^2}{4}$$

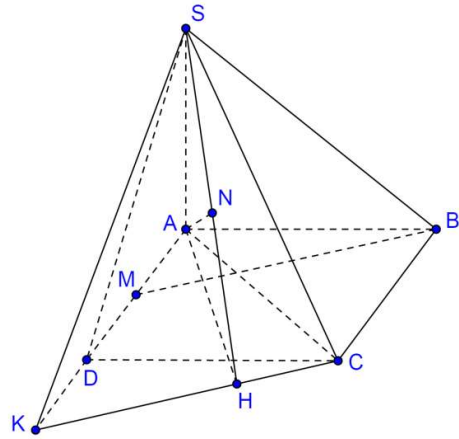
$$\Rightarrow BM = \frac{3a}{2} \Rightarrow CK = BM = \frac{3a}{2}.$$

$$S_{\Delta CK} = \frac{1}{2} AH \cdot CK = \frac{1}{2} CD \cdot AK \Rightarrow AH = \frac{CD \cdot AK}{CK} = \frac{a\sqrt{2} \cdot \frac{3a}{2}}{\frac{3a}{2}} = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Xét tam giác } SAH \text{ vuông tại } A \text{ ta có: } \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2}$$

$$\Rightarrow AN = \frac{SA \cdot AH}{\sqrt{SA^2 + AH^2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{3a^2 + 2a^2}} = \frac{\sqrt{30}a}{5}.$$

$$\Rightarrow d(M; (SCK)) = \frac{2a\sqrt{30}}{15} \Rightarrow d(BM; SC) = \frac{2a\sqrt{30}}{15}.$$



Cách 2:

Ta có:

$$\begin{cases} BC \perp SB \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SA \quad (1)$$

$$\begin{cases} DC \perp DA \\ DC \perp SD \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SAD) \Rightarrow DC \perp SA \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SA \perp (ABCD)$

$$\Rightarrow \widehat{(SC; (ABCD))} = \widehat{SCA} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta SAC \text{ vuông cân tại } A \Rightarrow SA = AC = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Gọi } AC \text{ cắt } BM \text{ tại } I \Rightarrow \frac{AM}{BC} = \frac{IA}{IC} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow IA = \frac{1}{3} AC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Từ } I \text{ kẻ } IH // SC (H \in SA) \Rightarrow \frac{AH}{SA} = \frac{AI}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow AH = \frac{1}{3} SA = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vì } \begin{cases} SC // IH \\ IH \in (HBM) \end{cases} \Rightarrow SC // (HBM) \Rightarrow d(BM; SC) = d(SC; (HBM)) = d(C; (HBM)).$$

$$\frac{d(C; (HBM))}{d(A; (HBM))} = \frac{CI}{AI} = 2 \Rightarrow d(C; (HBM)) = 2d(A; (HBM)).$$

Ta có AH, AB, AM đôi một vuông góc nên:

$$\frac{1}{d^2(A; (HBM))} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{3}{a^2} + \frac{4}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{15}{2a^2} \Rightarrow d(A; (HBM)) = \frac{\sqrt{30}a}{15}$$

$$\Rightarrow d(C; (HBM)) = \frac{2a\sqrt{30}}{15} \Rightarrow d(SC; BM) = \frac{2a\sqrt{30}}{15}.$$

