

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

TRẦN THỊ XUYẾN CHI

CÁC BÀI TOÁN VỀ HỆ THỨC LƯỢNG
TRONG TAM GIÁC

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

TRẦN THỊ XUYẾN CHI

CÁC BÀI TOÁN VỀ HỆ THỨC LƯỢNG
TRONG TAM GIÁC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Mã số: 60.46.0113

Người hướng dẫn khoa học
PGS. TS. PHAN HUY KHẢI

HÀ NỘI - 2014

Mục lục

Mở đầu	3
Một số ký hiệu	4
1 Kiến thức cơ sở	5
1.1 Các hệ thức lượng trong tam giác	5
1.2 Các công thức lượng giác	7
1.3 Các hệ thức lượng giác cơ bản trong tam giác	9
2 Hệ thức lượng trong tam giác thường	11
2.1 Hệ thức lượng giác không điều kiện	11
2.2 Hệ thức lượng giác có điều kiện	21
2.3 Bài tập đề nghị	23
3 Hệ thức lượng trong tam giác vuông	25
3.1 Sử dụng biến đổi đẳng thức nhận dạng tam giác vuông. . . .	25
3.2 Bài tập đề nghị	36
4 Hệ thức lượng trong tam giác cân	38
4.1 Sử dụng biến đổi đẳng thức nhận dạng tam giác cân.	38
4.2 Bài tập đề nghị	45
5 Hệ thức lượng trong tam giác đều	47
5.1 Sử dụng biến đổi đẳng thức nhận dạng tam giác đều	47
5.2 Nhận dạng tam giác đều từ hệ điều kiện	51
5.3 Bài tập đề nghị	55
6 Hệ thức lượng trong các tam giác đặc biệt khác	56
6.1 Các yếu tố trong tam giác được cho dưới dạng một cặp số . .	56
6.2 Các yếu tố trong tam giác được cho dưới dạng hình học . . .	65
6.3 Bài tập đề nghị	81
Phụ lục	83
Kết luận	98
Tài liệu tham khảo	99

Lời cảm ơn

Trước khi trình bày nội dung chính của khóa luận, em xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới PGS. TS Phan Huy Khải người đã tận tình hướng dẫn để em có thể hoàn thành khóa luận này.

Em cũng xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới toàn thể các thầy cô giáo trong khoa Toán - Cơ - Tin học, Đại học Khoa Học Tự Nhiên, Đại Học Quốc Gia Hà Nội đã dạy bảo em tận tình trong suốt quá trình học tập tại khoa.

Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đã động viên, khích lệ và giúp đỡ em trong suốt quá trình học tập và thực hiện khóa luận.

Hà Nội, ngày 15 tháng 02 năm 2014

Học viên

Trần Thị Xuyên Chi

Mở đầu

Hệ thức lượng trong tam giác là nội dung quan trọng trong trường phổ thông, thường gặp trong các đề thi tuyển sinh vào đại học và các kỳ thi học sinh giỏi các cấp. Đây là chuyên đề hay và tương đối khó với học sinh phổ thông. Để có cái nhìn toàn cảnh về chuyên đề này, luận văn đi sâu vào nghiên cứu các bài toán về hệ thức lượng trong tam giác.

Cấu trúc luận văn gồm 6 chương.

Chương 1. Kiến thức cơ sở.

Chương 2. Hệ thức lượng trong tam giác thường.

Chương 3. Hệ thức lượng trong tam giác vuông.

Chương 4. Hệ thức lượng trong tam giác cân.

Chương 5. Hệ thức lượng trong tam giác đều.

Chương 6. Hệ thức lượng trong các tam giác đặc biệt khác.

Bây giờ chúng tôi sẽ nói kỹ một chương tiêu biểu, ví dụ như chương 3. Trong chương này chúng tôi sẽ trình bày các phần sau:

1. Nhận dạng tam giác vuông. Trong mục này đưa ra những đặc điểm tiêu biểu nhất của tam giác vuông. Phương pháp để chứng minh tam giác vuông là biến đổi biểu thức đưa về một trong các đặc điểm này.

2. Các ví dụ về nhận dạng tam giác vuông. Ở đây chúng tôi trình bày những ví dụ tiêu biểu nhất được phân loại từ dễ đến khó.

3. Hệ thống và phân loại bài tập về tam giác vuông.

Phần cuối luận văn là phụ lục. Trong đó chúng tôi trình bày cách thiết lập các hệ thức lượng giác cơ bản trong tam giác dựa vào mối liên hệ giữa các yếu tố của tam giác và nghiệm phương trình bậc ba.

Mặc dù hết sức cố gắng nhưng luận văn không tránh khỏi những sai sót. Chúng tôi rất mong nhận được sự góp ý và những ý kiến phản biện của quý thầy cô và bạn đọc.

Xin chân thành cảm ơn!

Một số ký hiệu

ABC	Tam giác ABC .
A, B, C	Các góc đỉnh của tam giác ABC .
a, b, c	Các cạnh đối diện với đỉnh A, B, C .
h_a, h_b, h_c	Đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C .
m_a, m_b, m_c	Độ dài đường trung tuyến kẻ từ các đỉnh A, B, C .
l_a, l_b, l_c	Độ dài đường phân giác kẻ từ các đỉnh A, B, C .
R	Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.
r	Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.
r_a, r_b, r_c	Bán kính đường tròn bàng tiếp trong các góc A, B, C .
S	Diện tích tam giác.
$p = \frac{a + b + c}{2}$	Nửa chu vi tam giác.
đpcm	Điều phải chứng minh.

Chương 1

Kiến thức cơ sở

1.1 Các hệ thức lượng trong tam giác

Định lý hàm số sin

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Định lý hàm số cosin

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \\b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B. \\c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C.\end{aligned}$$

Định lý hàm số tang

$$\begin{aligned}\frac{a-b}{a+b} &= \frac{\tan \frac{A-B}{2}}{\tan \frac{A+B}{2}}. \\ \frac{b-c}{b+c} &= \frac{\tan \frac{B-C}{2}}{\tan \frac{B+C}{2}}. \\ \frac{c-a}{c+a} &= \frac{\tan \frac{C-A}{2}}{\tan \frac{C+A}{2}}.\end{aligned}$$

Định lý hàm số cotang

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}.$$

Độ dài đường trung tuyến

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}.$$

$$m_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}.$$

$$m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

Độ dài đường phân giác trong

$$l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2} = \frac{2bc}{b+c} \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

$$l_b = \frac{2ca}{c+a} \cos \frac{B}{2} = \frac{2ca}{c+a} \sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}}.$$

$$l_c = \frac{2ab}{a+b} \cos \frac{C}{2} = \frac{2ab}{a+b} \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}.$$

Công thức tính diện tích

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

$$= \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

$$= \frac{abc}{4R}$$

$$= pr$$

$$= (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Định lý hình chiếu

$$a = r \left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right) = b \cos C + c \cos B.$$

$$b = r \left(\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2} \right) = c \cos A + a \cos C.$$

$$c = r \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} \right) = a \cos B + b \cos A.$$

Công thức tính các bán kính.

Bán kính đường tròn nội tiếp.

$$r = \frac{S}{p} = (p-a) \tan \frac{A}{2} = (p-b) \tan \frac{B}{2} = (p-c) \tan \frac{C}{2}.$$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp.

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C}.$$

Bán kính đường tròn bàng tiếp.

$$\begin{aligned} r_a &= p \tan \frac{A}{2} = \frac{S}{p - a}. \\ r_b &= p \tan \frac{B}{2} = \frac{S}{p - b}. \\ r_c &= p \tan \frac{C}{2} = \frac{S}{p - c}. \end{aligned}$$

1.2 Các công thức lượng giác

Các hệ thức lượng giác cơ bản.

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1. & \tan \alpha \cdot \cot \alpha &= 1. \\ \cot \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. & 1 + \tan^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha}. \\ \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}. & 1 + \cot^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Công thức cộng cung.

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta. \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta. \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta. \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta. \\ \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}. \\ \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}. \end{aligned}$$

Công thức nhân cung.

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha. \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}. \\ \sin 3\alpha &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha. \\ \cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha. \\ \tan 3\alpha &= \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}.\end{aligned}$$

Công thức biến tổng thành tích.

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}. \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}. \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}. \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}. \\ \tan \alpha + \tan \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}. \\ \tan \alpha - \tan \beta &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}. \\ \cot \alpha + \cot \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}. \\ \cot \alpha - \cot \beta &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}.\end{aligned}$$

Công thức biến tích thành tổng.

$$\begin{aligned}\sin \alpha \cdot \cos \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}. \\ \cos \alpha \cdot \cos \beta &= \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}. \\ \sin \alpha \cdot \sin \beta &= \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}.\end{aligned}$$

Giá trị lượng giác của các góc (cung) có liên quan đặc biệt.

- Hai góc đối nhau:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha.$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha.$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha.$$

- Hai góc bù nhau

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha.$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha.$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha.$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha.$$

- Hai góc phụ nhau:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha.$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha.$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha.$$

- Hai góc hơn kém π :

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha.$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha.$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha.$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha.$$

1.3 Các hệ thức lượng giác cơ bản trong tam giác

Trong mọi tam giác ABC , ta có:

$$1) \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

$$2) \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C.$$

$$3) \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C).$$

$$4) \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

$$5) \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C.$$

$$6) \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C.$$

$$7) \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C \text{ (} ABC \text{ là tam giác không vuông)}.$$

$$8) \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}.$$

$$9) \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1.$$

$$10) \cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1.$$

Chương 2

Hệ thức lượng trong tam giác thường

Hệ thức lượng trong tam giác thường là dạng toán cơ bản nhất của bài toán hệ thức lượng trong tam giác. Vì các kết quả này đúng cho mọi tam giác đặc biệt khác như tam giác vuông, tam giác cân, tam giác đều... Bài toán về hệ thức lượng trong tam giác thường gồm hai dạng: chứng minh hệ thức lượng giác không điều kiện và chứng minh hệ thức lượng giác có điều kiện. Phương pháp để giải dạng toán này là:

Cách 1. Biến đổi vế phức tạp sang vế đơn giản.

Cách 2. Biến đổi hai vế về cùng một biểu thức trung gian.

Cách 3. Biến đổi tương đương về một biểu thức đúng.

Sau đây là một số ví dụ tiêu biểu.

2.1 Hệ thức lượng giác không điều kiện

Các bài toán này đưa ra yêu cầu chứng minh các hệ thức lượng áp dụng chung cho mọi tam giác.

Bài toán 2.1 Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC , ta có:

$$1) \quad \frac{b-c}{a} \cos^2 \frac{A}{2} + \frac{c-a}{b} \cos^2 \frac{B}{2} + \frac{a-b}{c} \cos^2 \frac{C}{2} = 0.$$

$$2) \quad \frac{a^2 \cos \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2}} + \frac{b^2 \cos \frac{A-C}{2}}{2 \sin \frac{B}{2}} + \frac{c^2 \cos \frac{A-B}{2}}{2 \sin \frac{C}{2}} = ab + bc + ca.$$

$$3) \quad (b+c) \cos A + (a+c) \cos B + (a+b) \cos C = a+b+c.$$

Chứng minh

1) Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{b-c}{a} \cos^2 \frac{A}{2} &= \frac{\sin B - \sin C}{\sin A} \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{2 \cos \frac{B+C}{2} \sin \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} \cos^2 \frac{A}{2} \\
&= \frac{2 \sin \frac{B-C}{2} \sin \frac{B+C}{2}}{2} = \frac{1}{2}(\cos C - \cos B).
\end{aligned} \tag{1}$$

Tương tự ta có:

$$\frac{c-a}{b} \cos^2 \frac{B}{2} = \frac{1}{2}(\cos A - \cos C). \tag{2}$$

$$\frac{a-b}{c} \cos^2 \frac{C}{2} = \frac{1}{2}(\cos B - \cos A). \tag{3}$$

Cộng theo vế (1), (2), (3) suy ra đpcm.

2) Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{a^2 \cos \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2}} &= a \cdot 2R \cdot \sin A \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2}} = a \cdot 2R \cdot 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2}} \\
&= aR(2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}) = aR(\sin B + \sin C) = \frac{ab+ac}{2}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Tương tự

$$\frac{b^2 \cos \frac{A-C}{2}}{2 \sin \frac{B}{2}} = \frac{bc+ba}{2}. \tag{2}$$

$$\frac{c^2 \cos \frac{A-B}{2}}{2 \sin \frac{C}{2}} = \frac{ca+cb}{2}. \tag{3}$$

Cộng theo vế của (1), (2), (3) suy ra đpcm.

3) Áp dụng định lý hàm số sin, ta có

$$\begin{aligned}
VT &= 2R(\sin B + \sin C) \cos A + 2R(\sin A + \sin C) \cos B + 2R(\sin A + \sin B) \cos C \\
&= 2R(\sin B \cos A + \sin A \cos B) + 2R(\sin C \cos A + \sin A \cos C) + 2R(\sin B \cos C + \sin C \cos B) \\
&= 2R \sin(B+A) + 2R \sin(C+A) + 2R \sin(B+C) \\
&= 2R \sin C + 2R \sin B + 2R \sin A = a + b + c = VP. \text{ Đpcm.}
\end{aligned}$$

Bài toán 2.2. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC , ta có:

- 1) $bc \cos A + ac \cos B + ab \cos C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$
- 2) $abc(\cos A + \cos B + \cos C) = a^2(p - a) + b^2(p - b) + c^2(p - c).$

Chứng minh

1) Áp dụng định lý hàm số cosin, ta có

$$VT = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = VP.$$

2) Áp dụng định lý hàm số cosin, ta có

$$\begin{aligned} VT &= a \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + b \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} + c \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \\ &= \frac{a^2}{2}(b + c - a) + \frac{b^2}{2}(a + c - b) + \frac{c^2}{2}(a + b - c) \\ &= a^2(p - a) + b^2(p - b) + c^2(p - c) = VP. \text{ Đpcm.} \end{aligned}$$

Bài toán 2.3. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC , ta có:

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} = \frac{\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2}}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}.$$

Chứng minh

$$\begin{aligned} VT &= \frac{1}{2} \left[\left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} \right) + \left(\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right) + \left(\tan \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}} + \frac{\sin \frac{B+C}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} + \frac{\sin \frac{C+A}{2}}{\cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2}} \right] \\ &= \frac{\cos^2 \frac{C}{2} + \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2}}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = VP. \text{ Đpcm.} \end{aligned}$$

Bài toán 2.4. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC , ta có:

- 1) $r_a - r = 4R \sin^2 \frac{A}{2}.$
- 2) $r_a - r_b = 4R \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{C}{2}.$
- 3) $a \cot A + b \cot B + c \cot C = 2(R + r).$
- 4) $(r_a^2 + p^2)(r_a - r) = 4Rr_a^2.$
- 5) $\frac{h_a - 2r}{h_a} = \frac{h_a}{2r_a + h_a} = \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}.$

Chứng minh

1) Ta có

$$\begin{aligned} r_a - r &= p \tan \frac{A}{2} - (p - a) \tan \frac{A}{2} = a \tan \frac{A}{2} = 2R \sin A \tan \frac{A}{2} \\ &= 2R \cdot 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \cdot \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = 4R \sin^2 \frac{A}{2}. \end{aligned}$$

$$2) \text{ Ta có } r_a - r_b = p \left(\tan \frac{A}{2} - \tan \frac{B}{2} \right). \quad (1)$$

Do

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2} \cdot 2R(\sin A + \sin B + \sin C) \\ &= 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta có

$$\begin{aligned} r_a - r_b &= p \left(\tan \frac{A}{2} - \tan \frac{B}{2} \right) \\ &= 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}} \\ &= 4R \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

3) Ta có

$$r = \frac{S}{p} = \frac{ab \sin C}{a + b + c}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2R \sin A \cdot 2R \sin B \cdot \sin C}{2R (\sin A + \sin B + \sin C)} \\
&= \frac{2R \cdot 8 \cdot \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \\
&= 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}. \tag{1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a \cot A + b \cot B + c \cot C &= 2R [\sin A \cot A + \sin B \cot B + \sin C \cot C] \\
&= 2R [\cos A + \cos B + \cos C] \\
&= 2R \left[1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right] \\
&= 2R + 2r = 2(R + r) \text{ do (1)}.
\end{aligned}$$

4) Ta có

$$\begin{aligned}
(r_a^2 + p^2)(r_a - r) &= p^2 \left(1 + \tan^2 \frac{A}{2} \right) \left[p \tan \frac{A}{2} - (p - a) \tan \frac{A}{2} \right] = \frac{p^2}{\cos^2 \frac{A}{2}} a \tan \frac{A}{2} \\
&= \frac{p^2}{\cos^2 \frac{A}{2}} 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \tan \frac{A}{2} = 4R \left(p \tan \frac{A}{2} \right)^2 = 4Rr_a^2.
\end{aligned}$$

5) Ta có

$$\begin{aligned}
\bullet \frac{h_a - 2r}{h_a} &= 1 - \frac{2r}{h_a} = 1 - \frac{\frac{2S}{a}}{\frac{2S}{a}} = 1 - \frac{a}{p} = \frac{p - a}{p}. \\
\bullet \frac{h_a}{2r_a + h_a} &= \frac{\frac{2S}{a}}{\frac{2S}{p - a} + \frac{2S}{a}} = \frac{1}{\frac{a}{p - a} + \frac{a}{a}} = \frac{1}{\frac{a}{p - a} + 1} = \frac{p - a}{p}. \\
\bullet \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} &= \frac{r_b}{p} \cdot \frac{r_c}{p} = \frac{S}{p(p - b)} \cdot \frac{S}{p(p - c)} = \frac{p(p - a)(p - b)(p - c)}{p^2(p - b)(p - c)} \\
&= \frac{p - a}{p}.
\end{aligned}$$

Dpcm.

Bài toán 2.5. (Bài toán phụ trợ) Trong mọi tam giác ABC , ta có các hệ thức sau:

- 1) $\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A = \frac{p^2 + 4Rr + r^2}{4R^2}.$
- 2) $\sin A \sin B \sin C = \frac{pr}{2R^2}.$
- 3) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{p^2 - 4Rr - r^2}{2R^2}.$
- 4) $\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C = \frac{p(p^2 - 6Rr - 3r^2)}{4R^3}.$
- 5) $(\sin A + \sin B)(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A) = \frac{p(p^2 + r^2 + 2Rr)}{4R^3}.$
- 6) $\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C = \frac{p^4 - (8Rr + 6r^2)p^2 + r^2(4R + r)^2}{8R^4}.$
- 7) $\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A = \frac{r^2 + p^2 - 4R^2}{4R^2}.$
- 8) $\cos A \cos B \cos C = \frac{p^2 - (2R + r)^2}{4R^2}.$
- 9) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{6R^2 + 4Rr + r^2 - p^2}{2R^2}.$
- 10) $\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C = \frac{2Rr^2 + r^3 + p^2r}{4R^3} - 1.$
- 11) $(\cos A + \cos B)(\cos B + \cos C)(\cos C + \cos A) = \frac{2Rr^2 + r^3 + p^2r}{4R^3}.$
- 12) $\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2pr}.$
- 13) $\frac{1}{\sin A \sin B} + \frac{1}{\sin B \sin C} + \frac{1}{\sin C \sin A} = \frac{2R}{r}.$
- 14) $\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} = \frac{(p^2 + r^2 + 4Rr)^2 - 16p^2Rr}{4p^2R^2}.$
- 15) $\frac{\sin A \sin B}{\sin C} + \frac{\sin B \sin C}{\sin A} + \frac{\sin C \sin A}{\sin B} = \frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{2Rr}.$
- 16) $\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} = \frac{p^2 + r^2 - 4R^2}{p^2 - (2R - r)^2}.$
- 17) $\frac{1}{\cos A \cos B} + \frac{1}{\cos B \cos C} + \frac{1}{\cos C \cos A} = \frac{4R(R + r)}{p^2 - (2R + r)^2}.$
- 18) $\frac{1}{\cos^2 A} + \frac{1}{\cos^2 B} + \frac{1}{\cos^2 C} = \frac{(p^2 + r^2 - 4R^2)^2 - 8R(R + r)[p^2 - (2R + r)^2]}{[p^2 - (2R + r)^2]^2}.$

$$\begin{aligned}
19) \quad & \frac{\cos A + \cos B}{\cos C} + \frac{\cos B + \cos C}{\cos A} + \frac{\cos C + \cos A}{\cos B} \\
& = \frac{(R+r)(p^2 + r^2 - 4R^2)}{R[p^2 - (2R+r)^2]} - 3. \\
20) \quad & \frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} \cdot \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} \cdot \frac{\sin C + \sin A}{\cos C + \cos A} = \frac{p}{r}. \\
21) \quad & \sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = \frac{2R-r}{2R}. \\
22) \quad & \sin^4 \frac{A}{2} + \sin^4 \frac{B}{2} + \sin^4 \frac{C}{2} = \frac{8R^2 + r^2 - p^2}{8R^2}. \\
23) \quad & \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{16R^2}. \\
24) \quad & \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} = \frac{4R+r}{2R}. \\
25) \quad & \cos^4 \frac{A}{2} + \cos^4 \frac{B}{2} + \cos^4 \frac{C}{2} = \frac{(4R+r)^2 - p^2}{8R^2}. \\
26) \quad & \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{p^2 + (4R+r)^2}{16R^2}. \\
27) \quad & \frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{C}{2}} = \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{r^2}. \\
28) \quad & \frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{C}{2} \sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{8R(2R-r)}{r^2}. \\
29) \quad & \frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{C}{2}} = \frac{p^2 + (4R+r)^2}{p^2}. \\
30) \quad & \frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{C}{2} \cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{8R(4R+r)}{p^2}. \\
31) \quad & \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = \frac{3R^2 + 4Rr + r^2 - p^2}{R^2}. \\
32) \quad & \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \frac{2pr}{R^2}. \\
33) \quad & \cot A + \cot B + \cot C = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2pr}.
\end{aligned}$$

$$34) \cot A \cot B \cot C = \frac{p^2 - (2R + r)^2}{2pr}.$$

$$35) \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C = \frac{(p^2 - r^2 - 4Rr)^2}{4p^2r^2} - 2.$$

$$36) (\cot A + \cot B)(\cot B + \cot C)(\cot C + \cot A) = \frac{2R^2}{p^2}.$$

$$37) \cot^3 A + \cot^3 B + \cot^3 C = \frac{(p^2 - r^2 - 4Rr)^3 - 48p^2R^2r^2}{8p^3r^3}.$$

$$38) \tan A + \tan B + \tan C = \frac{2pr}{p^2 - (2R + r)^2}.$$

$$39) \tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{p^2 - (2R + r)^2}.$$

$$40) \tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C = \frac{4p^2r^2 - 2(p^2 - r^2 - 4Rr)[p^2 - (2R + r)^2]}{[p^2 - (2R + r)^2]^2}.$$

$$41) \tan^3 A + \tan^3 B + \tan^3 C = \frac{8pr[p^2r^2 - 3R^2(p^2 - (2R + r)^2)]}{[p^2 - (2R + r)^2]^3}.$$

$$42) \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} = \frac{4R + r}{p}.$$

$$43) \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{r}{p}.$$

$$44) \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} \right) \left(\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right) \left(\tan \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2} \right) = \frac{4R}{p}.$$

$$45) \tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} = \frac{(4R + r)^2 - 2p^2}{p^2}.$$

$$46) \tan^3 \frac{A}{2} + \tan^3 \frac{B}{2} + \tan^3 \frac{C}{2} = \frac{(4R + r)^3 - 12p^2R}{p^3}.$$

$$47) \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} = \frac{p}{r}.$$

$$48) \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} + \cot \frac{C}{2} \cot \frac{A}{2} = \frac{4R + r}{p}.$$

$$49) \cot^2 \frac{A}{2} + \cot^2 \frac{B}{2} + \cot^2 \frac{C}{2} = \frac{p^2 - 2r(4R + r)}{r^2}.$$

$$50) \cot^3 \frac{A}{2} + \cot^3 \frac{B}{2} + \cot^3 \frac{C}{2} = \frac{p(p^2 - 12Rr)}{r^3}.$$

$$51) \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} \right) \left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right) \left(\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2} \right) = \frac{4pR}{r^2}.$$

$$52) \frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c} = \frac{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}}{\tan \frac{C}{2}} + \frac{\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}}{\tan \frac{A}{2}} + \frac{\tan \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2}}{\tan \frac{B}{2}} \\ = \frac{\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2}}{\cot \frac{C}{2}} + \frac{\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}}{\cot \frac{A}{2}} + \frac{\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2}}{\cot \frac{B}{2}} = \frac{4R - 2r}{r}.$$

$$53) a \tan \frac{A}{2} + b \tan \frac{B}{2} + c \tan \frac{C}{2} = 2(2R - r).$$

$$54) r_a + r_b + r_c = 4R + r.$$

$$55) r_a \cdot r_b + r_b \cdot r_c + r_c \cdot r_a = p^2.$$

$$56) r_a \cdot r_b \cdot r_c = p^2 r, S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}.$$

$$57) r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = (4R + r)^2 - 2p^2.$$

$$58) r_a^3 + r_b^3 + r_c^3 = (4R + r)^3 - 12p^2 R.$$

$$59) (r_a + r_b)(r_b + r_c)(r_c + r_a) = 4p^2 R.$$

$$60) \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}.$$

$$61) \frac{1}{r_a r_b} + \frac{1}{r_b r_c} + \frac{1}{r_c r_a} = \frac{4R + r}{p^2 r}.$$

$$62) \frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2} = \frac{p^2 - 2r(4R + r)}{p^2 r^2}.$$

$$63) \frac{r_a + r_b}{r_c} + \frac{r_b + r_c}{r_a} + \frac{r_c + r_a}{r_b} = \frac{4R - 2r}{r}.$$

$$64) h_a + h_b + h_c = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2R}.$$

$$65) h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a = \frac{2p^2 r}{R}.$$

$$66) h_a h_b h_c = \frac{2p^2 \cdot r^2}{R}, S = \sqrt{\frac{1}{2} R h_a h_b h_c}.$$

$$67) \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

$$68) \frac{1}{h_a h_b} + \frac{1}{h_b h_c} + \frac{1}{h_c h_a} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4p^2 r^2}.$$

$$69) \frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2p^2 r^2}.$$

$$70) \frac{h_a + h_b}{h_c} + \frac{h_b + h_c}{h_a} + \frac{h_c + h_a}{h_b} = \frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{2Rr}.$$

$$71) (p - a)(p - b) + (p - b)(p - c) + (p - c)(p - a) = 4Rr + r^2.$$

$$72) (p - a)^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 = p^2 - 2r(4R + r).$$

$$73) (p - a)^3 + (p - b)^3 + (p - c)^3 = p(p^2 - 12Rr).$$

$$74) \frac{1}{p - a} + \frac{1}{p - b} + \frac{1}{p - c} = \frac{4R + r}{pR}.$$

$$75) \frac{1}{(p - a)^2} + \frac{1}{(p - b)^2} + \frac{1}{(p - c)^2} = \frac{(4R + r)^2 - 2p^2}{p^2 r^2}.$$

$$76) l_a l_b l_c = \frac{16Rr^2 p^2}{p^2 + 2Rr + r^2}.$$

Nhận xét:

- Từ 76 hệ thức trên ta có một hệ thống các hệ thức lượng giác đóng vai trò quan trọng trong các bài toán về nhận dạng tam giác.
- Các hệ thức này đều thống nhất ở điểm về phải được tính theo ba đại lượng R, r, p .
- Phương pháp chứng minh chung cho tất cả các hệ thức là sử dụng định lý Viet đối với nghiệm của phương trình bậc ba. Phần chứng minh cho các hệ thức trên được trình bày trong phần phụ lục của luận văn.

2.2 Hệ thức lượng giác có điều kiện

Đối với các hệ thức lượng giác có điều kiện ta có thể chứng minh bằng một trong hai cách sau:

- Sử dụng điều kiện cho trước trong quá trình chứng minh.
- Biến đổi trực tiếp điều kiện cho trước về hệ thức cần chứng minh.

Bài toán 2.6. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức

$$\sin A + \sin B + \sin C = 2\left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}\right).$$

Chứng minh $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{l_a}$.

Giải

Ta có

$$\begin{aligned}\sin A + \sin B + \sin C &= 2\left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}\right) \\ \Leftrightarrow 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} &= 2\left(\cos \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}\right) \\ \Leftrightarrow 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} &= 2\left(\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \cos \frac{A}{2} &= \frac{1}{2}.\end{aligned}\tag{1}$$

Lại có

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{l_a} \Leftrightarrow \frac{b+c}{bc} = \frac{b+c}{2bc \cdot \cos \frac{A}{2}} \Leftrightarrow \cos \frac{A}{2} = \frac{1}{2}.\tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Bài toán 2.7. Chứng minh rằng nếu trong tam giác ABC , $B = 2A$ và $b^2 = a(a+c)$ là hai hệ thức tương đương.

Giải

Từ

$$\begin{aligned}B = 2A &\Leftrightarrow B - A = A \\ \Leftrightarrow \sin(B - A) &= (\text{do } B - A + A = B < 180^\circ) \\ \Leftrightarrow \sin C - 2 \sin A \cos B &= \sin A\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 2R \sin C - 4R \sin A \cos B = 2R \sin A \\
&\Leftrightarrow c - 2a \cos B = a \\
&\Leftrightarrow c^2 - 2ac \cos B = ac \text{ (do } c > 0) \\
&\Leftrightarrow a^2 + c^2 - 2ac \cos B = ac + a^2 \\
&\Leftrightarrow b^2 = a(a + c). \text{ Đpcm.}
\end{aligned}$$

Nhận xét: Ta xét bài toán có cùng điều kiện như trên:

Có tồn tại hay không một tam giác ABC có $B = 2A$ và ba cạnh của nó là ba số nguyên liên tiếp.

Giải

Từ $B = 2A \Leftrightarrow b^2 = a(a + c)$. Vì $b > a$ nên có các trường hợp sau:

- 1) a là cạnh bé nhất, c là cạnh trung bình, đặt $a = x$, $c = x + 1$, $b = x + 2$.
 $\Rightarrow (x + 2)^2 = x(2x + 1) \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$. Do $x > 0$ nên $x = 4$
 $\Rightarrow a = 4, b = 6, c = 5$.
- 2) a là cạnh bé nhất, b là cạnh trung bình, đặt $a = x$, $b = x + 1$, $c = x + 2$.
 $\Rightarrow (x + 1)^2 = x(2x + 2) \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow a = 1, b = 2, c = 3$.
 Loại vì không thỏa mãn yêu cầu về ba cạnh trong một tam giác ($3=2+1$).
- 3) a là cạnh trung bình, đặt $c = x$, $a = x + 1$, $b = x + 2$.
 $\Rightarrow (x + 2)^2 = (x + 1)(2x + 1) \Rightarrow x^2 - x - 3 = 0$. Loại vì không có nghiệm nguyên.

Vậy có duy nhất một tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán là tam giác ABC với $a = 4, b = 6, c = 5$.

Bài toán 2.8. Cho tam giác ABC có $\tan A \cdot \tan C = 3$ và $\tan B \cdot \tan C = 6$. Chứng minh rằng khi đó ta cũng có $\tan C = \tan A + \tan B$.

Giải

Từ:

$$\begin{aligned}
\tan A \tan C = 3 &\Rightarrow \tan C = \frac{3}{\tan A}. \\
\tan B \tan C = 6 &\Rightarrow \tan B = \frac{6}{\tan C} = 2 \tan A.
\end{aligned}$$

Áp dụng công thức

$$\begin{aligned}
 \tan A &= -\tan(B+C) = \frac{\tan B + \tan C}{\tan B \tan C - 1} \\
 \Rightarrow \tan A &= \frac{2 \tan A + \frac{3}{\tan A}}{5} \\
 \Rightarrow 5 \tan^2 A &= 2 \tan^2 A + 3 \\
 \Leftrightarrow \tan^2 A &= 1.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Từ giả thiết suy ra $\tan A, \tan B, \tan C$ cùng dấu, do đó A, B, C cùng nhọn (vì nếu không A, B, C cùng tù, điều này không thể xảy ra).

Vậy từ (1) suy ra $\tan A = 1, \tan C = 3, \tan B = 2$. Nói riêng $\tan C = \tan A + \tan B$.

Nhận xét: Thực chất từ $\tan A \tan B = 3, \tan B \tan C = 6$ suy ra $\hat{A} = \frac{\pi}{4}$.

Bài toán không có mệnh đề đảo, tức là từ $\tan C = \tan A + \tan B$ không thể suy ra $\tan A \tan C = 3$ và $\tan B \tan C = 6$. Thật vậy, xét tam giác ABC có

$$\tan A = \tan B = \sqrt{2}, \tan C = 2\sqrt{2}.$$

Rõ ràng tam giác này tồn tại vì từ đó có

$$\tan C = \frac{\tan A + \tan B}{\tan A \tan B - 1} = -\tan(A+B) \Rightarrow A+B+C = \pi, A, B, C > 0.$$

Tam giác này không có điều kiện $\tan A \tan C = 3$ và $\tan B \tan C = 6$.

2.3 Bài tập đề nghị

Bài toán 2.9. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC , ta có:

$$1) bc(b^2 - c^2) \cos A + ac(c^2 - a^2) \cos B + ab(a^2 - b^2) \cos C = 0.$$

$$2) a \sin(B-C) + b \sin(C-A) + c \sin(A-B) = 0.$$

$$3) \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} + \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2}} + \frac{\sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}} = 2.$$

$$4) \frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\cos A + \cos B - \cos C + 1} = \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}.$$

$$5) \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}.$$

$$= \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2}.$$

$$6) \tan \frac{A}{4} + \tan \frac{B}{4} + \tan \frac{C}{4} + \tan \frac{A}{4} \tan \frac{B}{4} + \tan \frac{B}{4} \tan \frac{C}{4} + \tan \frac{C}{4} \tan \frac{A}{4}$$

$$- \tan \frac{A}{4} \tan \frac{B}{4} \tan \frac{C}{4} = 1.$$

$$7) S = p^2 \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}.$$

$$8) a \cos A + b \cos B + c \cos C = \frac{2pr}{R}.$$

$$9) \tan \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} = \frac{h_a}{2r_a + h_a}.$$

$$10) b \cos^2 \frac{A}{2} + a \cos^2 \frac{B}{2} = p.$$

Bài toán 2.10. Cho tam giác ABC có:

$$\sin A + \sin B + \sin C - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = 2 \sin \frac{C}{2}.$$

Chứng minh rằng $\widehat{C} = \frac{2\pi}{3}$.

Bài toán 2.11. Cho tam giác ABC có:

$$\frac{\sin A + \sin B}{\sin 2A + \sin 2B} = \frac{\sin C}{\sin 2C}.$$

Chứng minh rằng $\cos A + \cos B = 1$.

Chương 3

Hệ thức lượng trong tam giác vuông

3.1 Sử dụng biến đổi đẳng thức nhận dạng tam giác vuông.

Trong chương này chúng tôi sẽ trình bày phương pháp biến đổi đẳng thức nhận dạng tam giác vuông. Để chứng minh tam giác ABC vuông ta có thể dùng các công thức lượng giác biến đổi về một trong các dấu hiệu nhận dạng tam giác vuông sau đây.

1. $\sin A = 1; \sin B = 1; \sin C = 1.$
2. $\cos A = 0; \cos B = 0; \cos C = 0.$
3. $\sin 2A = 0; \sin 2B = 0; \sin 2C = 0.$
4. $\cos 2A = -1; \cos 2B = -1; \cos 2C = -1.$
5. $\tan \frac{A}{2} = 1; \tan \frac{B}{2} = 1; \tan \frac{C}{2} = 1.$
6. $\tan A = \cot B; \tan B = \cot C; \tan C = \cot A.$
7. $\sin A = \sin(B - C); \sin B = \sin(C - A); \sin C = \sin(A - B).$
8. $\cos \frac{A}{2} = \cos \frac{B - C}{2}; \cos \frac{B}{2} = \cos \frac{C - A}{2}; \cos \frac{C}{2} = \cos \frac{A - B}{2}.$
9. $a^2 = b^2 + c^2; b^2 = c^2 + a^2; c^2 = a^2 + b^2.$
10. $\begin{cases} \sin A = \cos B \\ 0 < A < \frac{\pi}{2} \end{cases}; \begin{cases} \sin B = \cos C \\ 0 < B < \frac{\pi}{2} \end{cases}; \begin{cases} \sin C = \cos A \\ 0 < C < \frac{\pi}{2} \end{cases}.$

Ta xét các ví dụ sau đây.

Bài toán 3.1. Chứng minh rằng tam giác ABC thỏa mãn một trong các

điều kiện sau thì tam giác ABC là tam giác vuông:

$$1) \quad \sin 2A + \sin 2B = 4 \sin A \sin B.$$

$$2) \quad \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \frac{a}{p-a}.$$

$$3) \quad \frac{\cos B}{\cos C} + \frac{\cos C}{\cos B} = \frac{a^2}{bc}.$$

Chứng minh

1) Ta có

$$\begin{aligned} \sin 2A + \sin 2B &= 4 \sin A \sin B \\ \Leftrightarrow 2 \sin(A+B) \cos(A-B) &= 2[\cos(A-B) - \cos(A+B)] \\ \Leftrightarrow 2 \sin C \cos(A-B) &= 2[\cos(A-B) + \cos C] \\ \Leftrightarrow 0 &= \cos(A-B)[1 - \sin C] + \cos C \\ \Leftrightarrow 0 &= \cos(A-B) \cos C[1 - \sin C] + \cos^2 C \\ \Leftrightarrow 0 &= \cos(A-B) \cos C[1 - \sin C] + 1 - \sin^2 C \\ \Leftrightarrow 0 &= [1 - \sin C][\cos(A-B) \cos C + 1 + \sin C] \\ \Leftrightarrow 1 - \sin C &= 0 \Leftrightarrow \sin C = 1 \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Vậy tam giác ABC vuông. Dpcm.

$$2) \quad \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \frac{a}{p-a} \Leftrightarrow \frac{\sin \frac{B+C}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{2R \sin A}{R(\sin B + \sin C - \sin A)} \quad (1)$$

Dựa vào $\sin B + \sin C - \sin A = 4 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$, nên từ (1) ta có

$$\frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{4 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} = 1 \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2}. \quad \text{Dpcm.}$$

3) Ta có

$$\begin{aligned} \frac{\cos B}{\cos C} + \frac{\cos C}{\cos B} &= \frac{a^2}{bc} \\ \Leftrightarrow \frac{\cos^2 B + \cos^2 C}{\cos B \cos C} &= \frac{a^2}{bc} \\ \Leftrightarrow \frac{\cos^2 B + \cos^2 C}{\cos B \cos C} &= \frac{\sin^2 A}{\sin B \sin C} \end{aligned} \quad (1)$$

Chỉ có hai khả năng xảy ra:

- a) nếu $A = \frac{\pi}{2}$, khi đó (1) đúng (do $\cos C = \sin B, \cos B = \sin C$).
b) nếu $A \neq \frac{\pi}{2}$. Từ (1) theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 B + \cos^2 C}{\cos B \cos C} &= \frac{\cos^2 B + \cos^2 C - \sin^2 A}{\cos B \cos C - \sin B \sin C} \\ &= \frac{\cos^2 B + \cos^2 C + \cos^2 A - 1}{\cos(B + C)} \\ &= \frac{1 - 2 \cos A \cos B \cos C - 1}{-\cos A} = 2 \cos B \cos C. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \cos^2 B + \cos^2 C &= 2 \cos^2 B \cos^2 C \\ \Rightarrow \cos^2 B(1 - \cos^2 C) + \cos^2 C(1 - \cos^2 B) &= 0 \\ \Rightarrow \cos^2 B \sin^2 C + \cos^2 C \sin^2 B &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} \cos B \sin C = 0 \\ \cos C \sin B = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \cos B = 0 \\ \cos C = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

(do $\sin C > 0, \sin B > 0$).

Từ (2) suy ra $B = C = \frac{\pi}{2}$ vô lý. Vậy giả thiết $A \neq \frac{\pi}{2}$ là sai $\Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 3.2. Cho tam giác ABC thỏa mãn một trong các điều kiện sau, chứng minh rằng tam giác ABC vuông:

- 1) $S = \frac{1}{4}b^2 \sin 2C$.
- 2) $2R = 5r, r_a = 3r$.
- 3) $2R + r = p$.

Giải

1) Ta có

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4}b^2 \sin 2C \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}ab \sin C &= \frac{1}{4}b^2 2 \sin C \cos C \\ \Leftrightarrow a &= b \cos C \quad (\text{do } \sin C > 0) \\ \Leftrightarrow 2 \sin A &= 2 \sin B \cos C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 2 \sin A = \sin(B + C) + \sin(B - C) \\
&\Leftrightarrow \sin A = \sin(B - C) \Leftrightarrow A = B - C \\
&\Leftrightarrow A + C = B \Leftrightarrow B = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Vậy ABC là tam giác vuông tại B.

2) Ta có

$$\begin{aligned}
r_a &= 3r \\
\Leftrightarrow \frac{S}{p-a} &= 3 \frac{S}{p} \\
\Leftrightarrow p &= 3p - 3a \\
\Leftrightarrow 3a &= a + b + c \\
\Leftrightarrow b + c &= 2a.
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\text{Từ } 2R = 5r \Leftrightarrow \frac{abc}{2S} = 5 \frac{S}{p} \text{ (áp dụng } S = \frac{abc}{4R}) \Leftrightarrow abcp = 10S^2. \tag{2}$$

Theo công thức Hêrông ta có

$$(2) \Leftrightarrow abcp = 10p(p-a)(p-b)(p-c) \Leftrightarrow abc = 10(p-a)(p-b)(p-c). \tag{3}$$

Từ (1) có $p - a = \frac{b+c-a}{2} = \frac{a}{2}$. Thay vào (3) và có

$$\begin{aligned}
abc &= 5a(p-b)(p-c) \\
\Leftrightarrow bc &= 5(p-b)(p-c) \\
\Leftrightarrow bc &= 5p^2 - 5p(b+c) + 5bc \\
\Leftrightarrow 5p^2 - 5p(b+c) + 4bc &= 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Do $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3a}{2}$ và từ (4) có

$$5 \frac{9a^2}{4} - \frac{15a}{2} 2a + 4bc = 0 \Rightarrow bc = \frac{15a^2}{16}.$$

Vậy kết hợp với (1) ta có

$$\begin{cases} b + c = 2a \\ bc = \frac{15}{16}a^2. \end{cases}$$

Theo định lý Viet thì b và c là các nghiệm phương trình

$$x^2 - 2ax + \frac{15}{16}a^2 = 0. \quad (*)$$

Giải (*) ta được:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5a}{4} \\ x = \frac{3a}{4} \end{cases}$$

Vậy $b = \frac{5a}{4}, c = \frac{3a}{4}$ (hoặc $b = \frac{3a}{4}, c = \frac{5a}{4}$).

Từ $\left(\frac{5a}{4}\right)^2 = \left(\frac{3a}{4}\right)^2 + a^2$ suy ra ABC là tam giác vuông đỉnh B hoặc C.

3) Ta có

$$\begin{aligned} 2R + r &= p \\ \Leftrightarrow 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} &= 2R + 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \\ \Leftrightarrow 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} &= 1 \\ \Leftrightarrow \cos \frac{A}{2} \left(\cos \frac{B+C}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \right) - \sin \frac{A}{2} \left(\cos \frac{B-C}{2} - \cos \frac{B+C}{2} \right) &= 1 \\ \Leftrightarrow \cos \frac{A}{2} \left(\sin \frac{A}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \right) - \sin \frac{A}{2} \left(\cos \frac{B-C}{2} - \sin \frac{A}{2} \right) \\ &\quad - \left(\sin^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow \cos \frac{A}{2} \left(\sin \frac{A}{2} - \cos \frac{A}{2} \right) - \cos \frac{B-C}{2} \left(\sin \frac{A}{2} - \cos \frac{A}{2} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\sin \frac{A}{2} - \cos \frac{A}{2} \right) \left(\cos \frac{A}{2} - \cos \frac{B-C}{2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan \frac{A}{2} = 1 \\ \cos \frac{A}{2} = \cos \frac{B-C}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} = \frac{\pi}{2} \\ \begin{cases} \hat{A} = \hat{B} - \hat{C} \\ \hat{A} = \hat{C} - \hat{B} \end{cases} \end{cases}$$

Suy ra $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$, hoặc $\hat{B} = \frac{\pi}{2}$, hoặc $\hat{C} = \frac{\pi}{2}$.

Vậy ABC là tam giác vuông. Đpcm.

Bài toán 3.3. Cho tam giác ABC thỏa mãn một trong các điều kiện sau, chứng minh rằng tam giác ABC vuông:

$$1) \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{b+c}{2c}}.$$

$$2) \tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{b-c}{b+c}}.$$

$$3) \cos(B-C) = \frac{2bc}{a^2}.$$

$$4) \tan \frac{A}{2} + \cot \frac{A}{2} + 2 \cot A = \frac{2a}{b-c}.$$

$$5) \frac{a}{\sin B \sin C} = \frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C}.$$

$$6) \sin A - \sin(A-B) \sin C + \cos B = \frac{3}{2}.$$

Giải

1) Ta có

$$\begin{aligned} \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{b+c}{2c}} &\Leftrightarrow \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{b+c}{2c} \Leftrightarrow \frac{1+\cos A}{2} = \frac{b+c}{2c} \\ &\Leftrightarrow 1+\cos A = \frac{b}{c} + 1 \\ &\Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = 2b^2 \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Theo định lý Pitago suy ra $\triangle ABC$ là tam giác vuông tại C.

2) Ta có

$$\begin{aligned} \tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{b-c}{b+c}} &\Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}} \\ &\Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{2 \cos \frac{B+C}{2} \sin \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}} \\ &\Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} = \sqrt{\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B-C}{2}} \quad (\text{do } \frac{A}{2} \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{B}-\hat{C}}{2} \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{C} = \hat{B} \Leftrightarrow \hat{B} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $\triangle ABC$ là tam giác vuông tại B.

3) Ta có

$$\begin{aligned}
\cos(B - C) &= \frac{2bc}{a^2} \\
\Leftrightarrow \cos(B - C) &= \frac{2 \sin B \sin C}{\sin^2 A} \\
\Leftrightarrow 2 \sin(B + C) \cos(B - C) &= \frac{4 \sin B \sin C}{\sin A} \\
\Leftrightarrow \sin 2B + \sin 2C &= \frac{4 \sin B \sin C}{\sin A} \\
\Leftrightarrow \sin B \cos B + \sin C \cos C &= \frac{2 \sin B \sin C}{\sin A} \\
\Leftrightarrow \sin B \cos B + \sin C \cos C - \frac{\sin B \sin C}{\sin A} - \frac{\sin B \sin C}{\sin A} &= 0 \\
\Leftrightarrow \sin B \left(\cos B - \frac{\sin C}{\sin A} \right) + \sin C \left(\cos C - \frac{\sin B}{\sin A} \right) &= 0 \\
\Leftrightarrow \sin B [\sin A \cos B - \sin(A + C)] + \sin C [\sin A \cos C - \sin(A + B)] &= 0 \\
\Leftrightarrow -\sin B \sin C \cos A - \sin C \sin B \cos A &= 0 \\
\Leftrightarrow (\sin^2 B + \sin^2 C) \cos A &= 0 \Leftrightarrow \cos A = 0 \text{ (do } \sin B > 0, \sin C > 0) \\
\Leftrightarrow \hat{A} &= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Vậy ABC là tam giác vuông tại A .

4) Ta có

$$\begin{aligned}
\tan \frac{A}{2} + \cot \frac{A}{2} + 2 \cot A &= \frac{2a}{b - c} \\
\Leftrightarrow \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} + \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} + 2 \frac{\cos A}{\sin A} &= \frac{2 \sin A}{\sin B - \sin C} \\
\Leftrightarrow \frac{2}{\sin A} + \frac{2 \cos A}{\sin A} &= \frac{2 \sin A}{2 \cos \frac{B + C}{2} \sin \frac{B - C}{2}} \\
\Leftrightarrow \frac{2.2 \cos^2 \frac{A}{2}}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} &= \frac{4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B - C}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B-C}{2}} \\
& \Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} = \sin \frac{B-C}{2} \quad \left(\text{do } \frac{A}{2} \neq 0 \right). \\
& \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{B} - \hat{C} \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{C} = \hat{B} \Leftrightarrow \hat{B} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Vậy tam giác ABC vuông tại B . Đpcm.

5) Ta có

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{\sin B \sin C} = \frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} \\
& \Leftrightarrow \frac{\sin A}{\sin B \sin C} = \frac{\sin B \cos C + \sin C \cos B}{\cos B \cos C} \\
& \Leftrightarrow \frac{\sin A}{\sin B \sin C} = \frac{\sin(B+C)}{\cos B \cos C} \\
& \Leftrightarrow \sin B \sin C = \cos B \cos C \quad (\text{do } \sin(B+C) = \sin A > 0) \\
& \Leftrightarrow \cos(B+C) = 0 \Leftrightarrow \hat{B} + \hat{C} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \hat{A} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Vậy ABC là tam giác vuông tại A . Đpcm.

6) Ta có

$$\begin{aligned}
& \sin A - \sin(A-B) \sin C + \cos B = \frac{3}{2} \\
& \Leftrightarrow 2 \sin A - 2 \sin(A+B) \sin(A-B) + 2 \cos B - 3 = 0 \\
& \Leftrightarrow 2 \sin A + \cos 2A - \cos 2B + 2 \cos B - 3 = 0. \\
& \Leftrightarrow 2 \sin A + 1 - 2 \sin^2 A - 2 \cos^2 B + 1 + 2 \cos B - 3 = 0 \\
& \Leftrightarrow \sin^2 A - \sin A + \cos^2 B - \cos B + \frac{1}{2} = 0 \\
& \Leftrightarrow \left(\sin A - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\cos B - \frac{1}{2} \right)^2 = 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sin A = \frac{1}{2} \\ \cos B = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \hat{A} = \frac{\pi}{6}, \hat{B} = \frac{\pi}{3}, \hat{C} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Vậy ABC là tam giác vuông tại C và là nửa tam giác đều.

Bài toán 3.4. Cho tam giác ABC thỏa mãn một trong các điều kiện sau, chứng minh rằng tam giác ABC vuông:

- 1) $r_c = r + r_a + r_b$.
- 2) $a \cot A + b \cot B = \sqrt{2}c \cos \frac{A-B}{2}$.
- 3) $r(\sin A + \sin B) = \sqrt{2}c \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$.
- 4) $\sin A + \sin B + \sin C = \cos A + \cos B + \cos C + 1$.
- 5) $r + r_a + r_b + r_c = a + b + c$.

Giải

1) Ta có

$$\begin{aligned}
 r_c &= r + r_a + r_b \\
 \Leftrightarrow \frac{S}{p-c} &= \frac{S}{p} + \frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{p-c} &= \frac{1}{p} + \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \\
 \Leftrightarrow \frac{c}{(p-c)p} &= \frac{2p-(a+b)}{(p-a)(p-b)}. \tag{1}
 \end{aligned}$$

Do $2p - (a+b) = c$ nên

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow (p-c)p = (p-a)(p-b) \\
 &\Leftrightarrow -pc = -p(a+b) + ab \Leftrightarrow p(a+b-c) = ab \\
 &\Leftrightarrow 2p(a+b-c) = 2ab \Leftrightarrow (a+b+c)(a+b-c) = 2ab \\
 &\Leftrightarrow (a+b)^2 - c^2 = 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab - c^2 = 2ab \\
 &\Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2.
 \end{aligned}$$

Vậy ABC là tam giác vuông tại C .

2) Ta có

$$\begin{aligned}
 a \cot A + b \cot B &= c\sqrt{2} \cos \frac{A-B}{2} \\
 \Leftrightarrow 2R \sin A \frac{\cos A}{\sin A} + 2R \sin B \frac{\cos B}{\sin B} &= 2R \sin C \sqrt{2} \cos \frac{A-B}{2} \\
 \Leftrightarrow \cos A + \cos B &= 2\sqrt{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\
 \Leftrightarrow 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} &= 2\sqrt{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2}. \tag{2}
 \end{aligned}$$

Do

$$\cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2} > 0, \cos \frac{A-B}{2} > 0$$

nên từ (2) có:

$$(2) \Leftrightarrow 1 = \sqrt{2} \cos \frac{C}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\widehat{C}}{2} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \widehat{C} = \frac{\pi}{2}.$$

Vậy ABC là tam giác vuông tại C .

3) Ta có

$$r(\sin A + \sin B) = \sqrt{2}c \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A-B}{2}. \quad (3)$$

Áp dụng $r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$ ta có

$$\begin{aligned} (3) &\Leftrightarrow 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ &= 2\sqrt{2}R 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ &\Leftrightarrow 2 \sin \frac{A}{2} = \sqrt{2} \quad (\text{do } \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A-B}{2} > 0) \\ &\Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow \widehat{A} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Vậy ABC là tam giác vuông tại A .

4) Ta có

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B + \sin C &= \cos A + \cos B + \cos C + 1 \\ \Leftrightarrow 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos^2 \frac{C}{2} \\ \Leftrightarrow \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} &= \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \\ \Leftrightarrow \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{C}{2} \right) - \sin \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{C}{2} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\cos \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2} \right) \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{C}{2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{C}{2} = \sin \frac{C}{2} \\ \cos \frac{A-B}{2} = \cos \frac{C}{2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \tan \frac{C}{2} = 1 \\ \begin{cases} \frac{\hat{A}-\hat{B}}{2} = \frac{\hat{C}}{2} \\ \frac{\hat{B}-\hat{A}}{2} = \frac{\hat{C}}{2} \end{cases} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{C} = \frac{\pi}{2} \\ \hat{A}-\hat{B} = \hat{C} \\ \hat{B}-\hat{A} = \hat{C} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{C} = \frac{\pi}{2} \\ \hat{A} = \frac{\pi}{2} \\ \hat{B} = \frac{\pi}{2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy ABC là tam giác vuông.

5) Ta có

$$\begin{aligned}
&r + r_a + r_b + r_c = a + b + c \\
&\Leftrightarrow 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + p \tan \frac{A}{2} + p \tan \frac{B}{2} + p \tan \frac{C}{2} = 2p. \quad (4)
\end{aligned}$$

Chú ý rằng $p = \frac{a+b+c}{2} = R(\sin A + \sin B + \sin C) = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

Vậy

$$\begin{aligned}
(4) &\Leftrightarrow 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + 4R \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \\
&\quad + 4R \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = 8R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \\
&\Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \\
&\quad + \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \\
&\Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} + \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B+C}{2} = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \\
&\Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} = \cos \frac{A}{2} (\cos \frac{B+C}{2} + \cos \frac{B-C}{2} - \sin \frac{B+C}{2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \cos \frac{B-C}{2} \left(\sin \frac{A}{2} - \cos \frac{A}{2} \right) = \cos \frac{A}{2} \left(\sin \frac{A}{2} - \cos \frac{A}{2} \right) \\
&\Leftrightarrow \left(\cos \frac{B-C}{2} - \cos \frac{A}{2} \right) \left(\sin \frac{A}{2} - \cos \frac{A}{2} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{A}{2} = \cos \frac{A}{2} \\ \cos \frac{B-C}{2} = \cos \frac{A}{2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \tan \frac{A}{2} = 1 \\ \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2} = \frac{\widehat{A}}{2} \\ \frac{\widehat{C} - \widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{A}}{2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \frac{\pi}{2} \\ \widehat{B} - \widehat{C} = \widehat{A} \\ \widehat{C} - \widehat{B} = \widehat{A} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \frac{\pi}{2} \\ \widehat{B} = \frac{\pi}{2} \\ \widehat{C} = \frac{\pi}{2} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Vậy ABC là tam giác vuông.

3.2 Bài tập đề nghị

Bài toán 3.5. Cho tam giác ABC thỏa mãn một trong các điều kiện sau, chứng minh rằng tam giác ABC vuông:

- 1) $\sin(A+B) \cos(A-B) = 2 \sin A \sin B.$
- 2) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 = 0.$
- 3) $3(\cos B + 2 \sin C) + 4(\sin B + 2 \cos C) = 15.$
- 4) $\sin B + \cos B = \frac{a^2(p-a) + b^2(p-b) + c^2(p-c)}{abc}.$
- 5) $(a-b) \cot \frac{C}{2} + (c-a) \cot \frac{B}{2} = c-b.$
- 6) $(a^2 + b^2) \sin(A-B) = (a^2 - b^2) \sin(A+B).$

$$7) \quad a + b = (a \tan B + b \tan A) \tan \frac{C}{2}.$$

$$8) \quad a \cos B - b \cos A = a \sin A - b \sin B.$$

$$9) \quad m_a = \frac{b^2 + c^2}{4R} (b \neq c).$$

$$10) \quad \sin B + \cos B = 1 + \frac{r}{R}.$$

Chương 4

Hệ thức lượng trong tam giác cân

4.1 Sử dụng biến đổi đẳng thức nhận dạng tam giác cân.

Tam giác cân là tam giác có hai cạnh bằng nhau hoặc hai góc bằng nhau, đây là lớp bài toán quan trọng trong nhận dạng tam giác. Phương pháp để chứng minh tam giác ABC cân là biến đổi hệ thức đã cho về các dấu hiệu nhận dạng tam giác cân sau:

1. $a = b; b = c; c = a.$
2. $\sin A = \sin B; \sin B = \sin C; \sin C = \sin A.$
 $\sin \frac{A}{n} = \sin \frac{B}{n}; \sin \frac{B}{n} = \sin \frac{C}{n}; \sin \frac{C}{n} = \sin \frac{A}{n}.$
3. $\cos A = \cos B; \cos B = \cos C; \cos C = \cos A.$
 $\cos \frac{A}{n} = \cos \frac{B}{n}; \cos \frac{B}{n} = \cos \frac{C}{n}; \cos \frac{C}{n} = \cos \frac{A}{n}.$
4. $\tan A = \tan B; \tan B = \tan C; \tan C = \tan A.$
 $\tan \frac{A}{n} = \tan \frac{B}{n}; \tan \frac{B}{n} = \tan \frac{C}{n}; \tan \frac{C}{n} = \tan \frac{A}{n}.$
5. $\cot A = \cot B; \cot B = \cot C; \cot C = \cot A.$
 $\cot \frac{A}{n} = \cot \frac{B}{n}; \cot \frac{B}{n} = \cot \frac{C}{n}; \cot \frac{C}{n} = \cot \frac{A}{n}.$
6. $\sin(A - B) = 0; \sin(B - C) = 0; \sin(C - A) = 0.$
 $\sin \frac{A - B}{n} = 0; \sin \frac{B - C}{n} = 0; \sin \frac{C - A}{n} = 0.$
7. $\tan(A - B) = 0; \tan(B - C) = 0; \tan(C - A) = 0.$
 $\tan \frac{A - B}{n} = 0; \tan \frac{B - C}{n} = 0; \tan \frac{C - A}{n} = 0.$

$$8. \quad \cos(A - B) = 1; \cos(B - C) = 1; \cos(C - A) = 1.$$

$$\cos \frac{A - B}{n} = 1; \cos \frac{B - C}{n} = 1; \cos \frac{C - A}{n} = 1.$$

Dưới đây ta xét một số bài toán cụ thể.

Bài toán 4.1. Cho tam giác ABC có:

$$a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2) = 0.$$

Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

Giải

$$\begin{aligned} 0 &= a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2) \\ &= a^3(b^2 - c^2) - a^2(b^3 - c^3) + b^2c^2(b - c) \\ &= (b - c)[a^3(b + c) - a^2(b^2 + bc + c^2) + b^2c^2] \\ &= (b - c)(a - c)[a^2b + a^2c - b^2a - b^2c] \\ &= (b - c)(a - b)(a - c)(ab + bc + ca). \end{aligned}$$

Do $ab + bc + ca \neq 0$ nên

$$\Rightarrow \begin{cases} b - c = 0 \\ a - b = 0 \\ c - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ a = b \\ c = a. \end{cases}$$

Vậy tam giác ABC cân. Đpcm.

Bài toán 4.2. Cho tam giác ABC có:

$$\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_b}{h_c} + \frac{h_c}{h_a} = \frac{h_b}{h_a} + \frac{h_c}{h_b} + \frac{h_a}{h_c}.$$

Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

Giải

Biến đổi đẳng thức:

$$\begin{aligned} \frac{h_a}{h_b} + \frac{h_b}{h_c} + \frac{h_c}{h_a} &= \frac{h_b}{h_a} + \frac{h_c}{h_b} + \frac{h_a}{h_c} \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{2S}{a}}{\frac{b}{2S}} + \frac{\frac{2S}{b}}{\frac{c}{2S}} + \frac{\frac{2S}{c}}{\frac{a}{2S}} &= \frac{\frac{2S}{b}}{\frac{a}{2S}} + \frac{\frac{2S}{c}}{\frac{b}{2S}} + \frac{\frac{2S}{a}}{\frac{c}{2S}} \\ \Leftrightarrow \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} &= \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow b^2c + c^2a + a^2b = a^2c + b^2a + c^2b \\
&\Leftrightarrow b^2(c - a) + ca(c - a) - b(c^2 - a^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow (c - a)(b - c)(b - a) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} b - c = 0 \\ a - b = 0 \\ c - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ a = b \\ c = a. \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy tam giác ABC cân.

Bài toán 4.3. Cho tam giác ABC thỏa mãn một trong các điều kiện sau, chứng minh rằng tam giác ABC cân:

- 1) $4rr_a = a^2$.
- 2) $\sin \frac{A}{2} \cos^3 \frac{B}{2} = \sin \frac{B}{2} \cos^3 \frac{A}{2}$.
- 3) $\frac{1 + \cos B}{\sin B} = \frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}}$.
- 4) $(p - a) \cot \frac{B}{2} = p \tan \frac{A}{2}$.
- 5) $h_a = \sqrt{p(p - a)}$.

Giải

1) Ta có

$$\begin{aligned}
&4rr_a = a^2 \\
&\Leftrightarrow \frac{4S}{p} \cdot \frac{S}{p - a} = a^2 \\
&\Leftrightarrow 4S^2 = p(p - a)a^2. \tag{1}
\end{aligned}$$

Theo công thức Heron, từ (1) ta có

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow 4p(p - a)(p - b)(p - c) = a^2p(p - a) \\
&\Leftrightarrow 4(p - b)(p - c) = a^2 \\
&\Leftrightarrow (a + c - b)(a + b - c) = a^2 \\
&\Leftrightarrow a^2 - (b - c)^2 = a^2 \\
&\Leftrightarrow (b - c)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow b = c.
\end{aligned}$$

Vậy ABC là tam giác cân đỉnh A .

$$2) \sin \frac{A}{2} \cos^3 \frac{B}{2} = \sin \frac{B}{2} \cos^3 \frac{A}{2} \quad (1)$$

Chia cả hai vế của (1) cho $\cos^3 \frac{A}{2} \cos^3 \frac{B}{2} \neq 0$, ta có

$$\begin{aligned} \tan \frac{A}{2} (1 + \tan^2 \frac{A}{2}) &= \tan \frac{B}{2} (1 + \tan^2 \frac{B}{2}) \\ \Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} + \tan^3 \frac{A}{2} - \tan \frac{B}{2} - \tan^3 \frac{B}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\tan \frac{A}{2} - \tan \frac{B}{2} \right) \left(1 + \tan^2 \frac{A}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Do $1 + \tan^2 \frac{A}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} > 1$ nên từ (2) có

$$\frac{A}{2} - \frac{B}{2} = 0 \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{B}.$$

Vậy ABC là tam giác cân đỉnh C .

3) Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos B}{\sin B} &= \frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}} \\ \Leftrightarrow \frac{(1 + \cos B)^2}{(1 + \cos B)(1 - \cos B)} &= \frac{(2a + c)^2}{(2a + c)(2a - c)} \\ \Leftrightarrow \frac{1 + \cos B}{1 - \cos B} &= \frac{2a + c}{2a - c} \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{2 \cos B}{1 - \cos B} &= 1 + \frac{2c}{2a - c} \\ \Leftrightarrow \frac{\cos B}{1 - \cos B} &= \frac{c}{2a - c} \\ \Leftrightarrow \frac{\cos B}{1 - \cos B} &= \frac{\sin C}{2 \sin A - \sin C} \\ \Leftrightarrow 2 \sin A \cos B - \sin C \cos B &= \sin C - \sin C \cos B \\ \Leftrightarrow 2 \sin A \cos B &= \sin C \\ \Leftrightarrow \sin(A + B) + \sin(A - B) &= \sin(A + B) \\ \Leftrightarrow \sin(A - B) = 0 &\Leftrightarrow \hat{A} = \hat{B}. \end{aligned}$$

Vậy ABC là tam giác cân đỉnh C .

$$4) \text{ Ta có } (p - a) \cot \frac{B}{2} = p \tan \frac{A}{2}. \quad (1)$$

Sử dụng công thức $p = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$, $p - a = 4R \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$ thì

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 4R \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}} = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} \\ &\Leftrightarrow \cos \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} \\ &\Leftrightarrow \sin \left(\frac{A}{2} - \frac{C}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Vậy ABC là tam giác cân đỉnh B .

5) Ta có

$$\begin{aligned} h_a &= \sqrt{p(p - a)} \\ &\Leftrightarrow \frac{2S}{a} = \sqrt{p(p - a)} \\ &\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}}{a} = \sqrt{p(p - a)} \\ &\Leftrightarrow 4(p - b)(p - c) = a^2. \end{aligned}$$

Biến đổi như phần (1) suy ra $b = c$. Vậy ABC là tam giác cân đỉnh A .

Bài toán 4.4. Cho tam giác ABC thỏa mãn một trong các điều kiện sau, chứng minh rằng tam giác ABC cân:

$$\begin{aligned} 1) \quad &h_a = \sqrt{r_b r_c}. \\ 2) \quad &h_a = \frac{a}{2} \cot \frac{A}{2}. \\ 3) \quad &l_a^2 = \frac{4bc - a^2}{4}. \end{aligned}$$

Giải

1) Ta có

$$h_a = \sqrt{r_b r_c} \Leftrightarrow h_a^2 = r_b r_c \Leftrightarrow \frac{4S^2}{a^2} = \frac{S^2}{(p - b)(p - c)}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 4(p - b)(p - c).$$

Biến đổi như phần 1 bài toán 4.3 suy ra $\hat{B} = \hat{C}$.

Vậy ABC là tam giác cân đỉnh A .

2) Ta có

$$\begin{aligned}
 h_a &= \frac{a}{2} \cot \frac{A}{2} \\
 \Leftrightarrow 2 \sin B \sin C &= 2 \cos^2 \frac{A}{2} \\
 \Leftrightarrow \cos(B - C) - \cos(B + C) &= 1 + \cos A \\
 \Leftrightarrow \cos(B - C) = 1 &\Leftrightarrow \widehat{B} = \widehat{C}.
 \end{aligned}$$

Vậy ABC là tam giác cân đỉnh A .

3) Từ $l_a^2 = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b + c}$, suy ra

$$\begin{aligned}
 l_a^2 &= \frac{4bc - a^2}{4} \\
 \Leftrightarrow 4 \frac{4b^2c^2 \cos^2 \frac{A}{2}}{(b + c)^2} &= \frac{4bc - a^2}{4} \\
 \Leftrightarrow \frac{2b^2c^2}{(b + c)^2} [1 + \cos A] &= \frac{4bc - a^2}{4} \\
 \Leftrightarrow \frac{2b^2c^2}{(b + c)^2} \left[1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right] &= \frac{4bc - a^2}{4} \\
 \Leftrightarrow \frac{2b^2c^2}{(b + c)^2} \cdot \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc} &= \frac{4bc - a^2}{4} \\
 \Leftrightarrow bc - \frac{a^2bc}{(b + c)^2} &= bc - \frac{a^2}{4} \\
 \Leftrightarrow 4bc = (b + c)^2 &\Leftrightarrow (b - c)^2 = 0 \Leftrightarrow b = c.
 \end{aligned}$$

Vậy ABC là tam giác cân đỉnh A .

Trong bài toán nhận dạng tam giác cân ta xét một số tam giác cân đặc biệt như tam giác vuông cân, tam giác cân có một góc bằng $\frac{2\pi}{3}$... Dưới đây một bài toán tiêu biểu.

Bài toán 4.5. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức

$$\cos 2A + \sqrt{3}(\cos 2B + \cos 2C) + \frac{5}{2} = 0.$$

Chứng minh rằng ABC là tam giác cân với góc ở đỉnh A bằng $\frac{\pi}{6}$.

Giải

Ta có

$$\begin{aligned}
& \cos 2A + \sqrt{3}(\cos 2B + \cos 2C) + \frac{5}{2} = 0 \\
& \Leftrightarrow 2\cos^2 A - 1 + 2\sqrt{3}\cos(B+C)\cos(B-C) + \frac{5}{2} = 0 \\
& \Leftrightarrow 2\cos^2 A + 2\sqrt{3}\cos(B+C)\cos(B-C) + \frac{3}{2} = 0 \\
& \Leftrightarrow \cos^2 A - \sqrt{3}\cos A\cos(B-C) + \frac{3}{4} = 0 \\
& \Leftrightarrow \left[\cos A - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(B-C) \right]^2 + \frac{3}{4}\sin^2(B-C) = 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(B-C) = 0 & (1) \\ \cos A - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(B-C) = 0. & (2) \end{cases}
\end{aligned}$$

Từ (1) suy ra $\widehat{B} = \widehat{C}$. Thay vào (2) ta có

$$\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{A} = \frac{\pi}{6}.$$

Vậy tam giác ABC cân đỉnh A với $\widehat{A} = \frac{\pi}{6}$.

Nhận xét

1. Ta có bài toán tổng quát sau:

Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức

$$\cos 2A + x(\cos 2B + \cos 2C) + \frac{x^2}{2} + 1 = 0,$$

điều kiện $-2 < x < 2, x \neq 0$.

Khi đó ABC là tam giác cân với góc ở đỉnh $\widehat{A} = \arccos \frac{x}{2}$.

Thật vậy

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow \begin{cases} x \sin(B-C) = 0 & (1) \\ \cos A - \frac{x \cos(B-C)}{2} = 0. & (2) \end{cases}
\end{aligned}$$

Từ (1) và do $x \neq 0$ suy ra $\sin(B-C) = 0 \Rightarrow B = C$.

Thay vào (2) ta có $\cos A = \frac{x}{2} \Rightarrow \widehat{A} = \arccos \frac{x}{2}$.

2. Lấy $x = -1$ ta có kết quả:

Nếu tam giác ABC thỏa mãn hệ thức

$$\cos 2A - \cos 2B - \cos 2C + \frac{3}{2} = 0$$

thì ABC là tam giác cân với góc ở đỉnh A bằng $\frac{2\pi}{3}$.

3. Lấy $x = \sqrt{2}$ ta có kết quả:

Nếu tam giác ABC thỏa mãn hệ thức

$$\cos 2A + \sqrt{2}(\cos 2B + \cos 2C) + 2 = 0$$

thì ABC là tam giác cân với góc ở đỉnh A bằng $\frac{\pi}{4}$.

4.2 Bài tập đề nghị

Bài toán 4.6. Cho tam giác ABC có:

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{C}{2}.$$

Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

Bài toán 4.7. Cho tam giác ABC có:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + 2 \sin A \sin B = \frac{9}{4} + 3 \cos C + \cos^2 C.$$

Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

Bài toán 4.8. Cho tam giác ABC có: $\frac{\sin C}{\sin B} = 2 \cos A$. Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

Bài toán 4.9. Cho tam giác ABC có:

$$2 \cos A \sin B \sin C + \sqrt{3}(\sin A + \cos B + \cos C) = \frac{17}{4}.$$

Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

Bài toán 4.10. Cho tam giác ABC có:
$$\begin{cases} \sin B = (\sqrt{2} - \cos C) \sin A \\ \sin C = (\sqrt{2} - \cos B) \sin A. \end{cases}$$

Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

Bài toán 4.11. Cho tam giác ABC thỏa mãn một trong các điều kiện sau, chứng minh rằng tam giác ABC cân:

- 1) $a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A = c^2 \cot \frac{C}{2}.$
- 2) $\tan \frac{A}{2} = \frac{a}{2\sqrt{p(p-a)}}.$
- 3) $\sin \frac{A}{2} = \frac{a}{2\sqrt{bc}}.$
- 4) $a^2 + b^2 = \tan \frac{C}{2}(a^2 \tan A + b^2 \tan B).$
- 5) $2 \sin \frac{A}{2} + \cos A - 1 = \frac{r}{R}.$

Bài toán 4.12. Cho tam giác ABC thỏa mãn một trong các điều kiện sau, chứng minh rằng tam giác ABC cân:

- 1) $\tan A + \tan B = 2 \cot \frac{C}{2}.$
- 2) $\tan A + 2 \tan B = \tan A \tan^2 B.$
- 3) $\tan A \sin A + \tan B \sin B = (\sin A + \sin B) \cot \frac{C}{2}.$
- 4) $a \sin(B - C) + b \sin(C - A) = 0.$

Chương 5

Hệ thức lượng trong tam giác đều

Nói chung trong các đẳng thức hoặc bất đẳng thức mà ba cạnh hoặc ba góc trong tam giác có vai trò như nhau, ta đều có thể chứng minh được $a = b = c$ hay $A = B = C = \frac{\pi}{3}$, tức là tam giác đó đều. Ta có thể sáng tác được rất nhiều bài toán có tính chất như vậy. Đối với các bài toán mà ba cạnh hoặc ba góc trong tam giác có tính chất đối xứng trong bất đẳng thức, tam giác đều là trường hợp đặc biệt khi dấu bằng xảy ra. Giới hạn trong luận văn này chúng tôi xin trình bày phương pháp biến đổi đẳng thức để nhận dạng tam giác đều. Sau đây ta xét một số bài toán tiêu biểu có tính chất như trên.

5.1 Sử dụng biến đổi đẳng thức nhận dạng tam giác đều

Bài toán 5.1. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức

$$\frac{a^2 \cos \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2}} + \frac{a^2 \cos \frac{C-A}{2}}{2 \sin \frac{B}{2}} + \frac{a^2 \cos \frac{A-B}{2}}{2 \sin \frac{C}{2}} = a^2 + b^2 + c^2.$$

Chứng minh ABC là tam giác đều.

Giải

Thực hiện biến đổi đại diện ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 \cos \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2}} &= a \frac{2R \sin A \cos \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2}} \\ &= aR 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= aR(\sin B + \sin C) \\
&= \frac{ab + ac}{2}.
\end{aligned}$$

Từ đó hệ thức đã cho có dạng sau:

$$\begin{aligned}
&\frac{ab + ac}{2} + \frac{ba + bc}{2} + \frac{ca + cb}{2} = a^2 + b^2 + c^2 \\
&\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0 \\
&\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow a = b = c.
\end{aligned}$$

Vậy ABC là tam giác đều. Đpcm.

Bài toán 5.2. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức

$$\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} = \frac{1}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}.$$

Chứng minh ABC là tam giác đều.

Giải

Do $\sin A \sin B \sin C > 0$ nên đẳng thức điều kiện đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&(\sin A \sin B \sin C) \left(\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} \right) = \frac{\sin A \sin B \sin C}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \\
&\Leftrightarrow \frac{\sin B \sin C}{\sin A} + \frac{\sin A \sin C}{\sin B} + \frac{\sin A \sin B}{\sin C} = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}. \quad (1)
\end{aligned}$$

Do

$$4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \sin A + \sin B + \sin C,$$

nên áp dụng định lý hàm số sin suy ra

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} = a + b + c \\
&\Leftrightarrow b^2 c^2 + a^2 c^2 + a^2 b^2 = abc(a + b + c) \\
&\Leftrightarrow (ab - bc)^2 + (bc - ca)^2 + (ca - ab)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} ab = bc \\ bc = ca \\ ca = ab \end{cases} \\
&\Leftrightarrow a = b = c.
\end{aligned}$$

Vậy ABC là tam giác đều. Đpcm.

Bài toán 5.3. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức

$$\frac{a \cos A + b \cos B + c \cos C}{a \sin B + b \sin C + c \sin A} = \frac{2p}{9R}.$$

Chứng minh ABC là tam giác đều.

Giải

Áp dụng định lý hàm số sin, và công thức $\sin A = \frac{2S}{bc}$, đưa đẳng thức điều kiện về hệ thức tương đương sau:

$$\begin{aligned} & \frac{R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)}{a \frac{2S}{ac} + b \frac{2S}{ab} + c \frac{2S}{bc}} = \frac{2p}{9R} \\ \Leftrightarrow & \frac{4R \sin A \sin B \sin C}{2S \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)} = \frac{a + b + c}{9R}. \end{aligned} \quad (1)$$

Áp dụng công thức $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$, ta thấy:

$$\begin{aligned} (1) & \Leftrightarrow (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 9 \\ & \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 2 \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} - 2 \right) = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{(a - b)^2}{ab} + \frac{(b - c)^2}{bc} + \frac{(c - a)^2}{ca} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Do vế trái của (2) là tổng của ba số không âm nên

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ b = c \\ c = a \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c.$$

Vậy ABC là tam giác đều. Đpcm.

Bài toán 5.4. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức

$$\frac{(a + b)(b + c)(c + a)}{4abc} = \frac{R}{r}.$$

Chứng minh ABC là tam giác đều.

Giải

Áp dụng định lý hàm số sin, đưa giả thiết đã cho về dạng tương đương sau

$$\begin{aligned}
& \frac{(\sin A + \sin B)(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A)}{4 \sin A \sin B \sin C} = \frac{R}{4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \\
& \Leftrightarrow \frac{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} 2 \sin \frac{C+A}{2} \cos \frac{C-A}{2}}{4 \cdot 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \\
& \qquad \qquad \qquad = \frac{1}{4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \\
& \Leftrightarrow \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{C-A}{2} = 1. \tag{1}
\end{aligned}$$

Vì $0 < \cos \frac{A-B}{2} \leq 1, 0 < \cos \frac{B-C}{2} \leq 1, 0 < \cos \frac{C-A}{2} \leq 1$ nên

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{A-B}{2} = 1 \\ \cos \frac{B-C}{2} = 1 \\ \cos \frac{C-A}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow A = B = C.$$

Vậy ABC là tam giác đều. Đpcm.

Tuy nhiên tam giác ABC đều không nhất thiết trong đẳng thức ở đề bài các góc hoặc các cạnh phải có tính chất đối xứng. Ví dụ bài toán sau.

Bài toán 5.5. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức

$$\sqrt{3}h_a + \frac{a}{2} = b + c.$$

Chứng minh ABC là tam giác đều.

Giải

Ta có

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{4R^2 \sin A \sin B \sin C}{2R \sin A} = 2R \sin B \sin C.$$

Vậy

$$\sqrt{3}h_a + \frac{a}{2} = b + c$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin B \sin C + \sin A = 2\sin B + 2\sin C \\
&\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin B \sin C + \frac{1}{2}\sin(B+C) = \sin B + \sin C \\
&\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B \sin C + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B \sin C + \frac{1}{2}\sin B \cos C + \frac{1}{2}\sin C \cos B = \sin B + \sin C \\
&\Leftrightarrow \sin B \left[1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C + \frac{1}{2}\cos C \right) \right] + \sin C \left[1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B + \frac{1}{2}\cos B \right) \right] = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin B \left[1 - \sin \left(C + \frac{\pi}{6} \right) \right] + \sin C \left[1 - \sin \left(B + \frac{\pi}{6} \right) \right] = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \sin \left(C + \frac{\pi}{6} \right) = 1 \\ \sin \left(B + \frac{\pi}{6} \right) = 1 \end{cases} \quad \left(\text{vì } 1 - \sin \left(B + \frac{\pi}{6} \right) \geq 0 \text{ và } 1 - \sin \left(C + \frac{\pi}{6} \right) \geq 0 \right) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} C = \frac{\pi}{3} \\ B = \frac{\pi}{3} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Vậy ABC là tam giác đều. Đpcm.

5.2 Nhận dạng tam giác đều từ hệ điều kiện

Bài toán nhận dạng tam giác đều từ hệ điều kiện có phương pháp giải chung như sau: từ một hệ thức ta chứng minh được tam giác đó cân và từ hệ thức còn lại ta chứng minh tam giác đó có một góc bằng $\frac{\pi}{3}$ hoặc tam giác cân một trong hai đỉnh còn lại.

Bài toán 5.6. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức

$$\begin{cases} a^2 = \frac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} \\ a = 2b \cos C. \end{cases}$$

Chứng minh ABC là tam giác đều.

Giải

Từ giả thiết thứ nhất suy ra

$$\begin{aligned}
a^3 - b^3 - c^3 &= a^3 - a^2(b+c) \\
\Leftrightarrow (b+c)(b^2 - bc + c^2) &= a^2(b+c) \\
\Leftrightarrow b^2 - bc + c^2 &= a^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow b^2 - bc + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\
&\Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow A = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Từ giả thiết thứ hai ta có

$$\begin{aligned}
&\sin A = 2 \sin B \cos C \\
&\Leftrightarrow \sin A = \sin(B + C) + \sin(B - C) \\
&\Leftrightarrow \sin(B - C) = 0 \text{ (do } \sin(B + C) = \sin A) \\
&\Leftrightarrow B = C.
\end{aligned} \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra ABC là tam giác đều. Đpcm.

Bài toán 5.7. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức

$$\begin{cases} \sin B + \sin C = 2 \sin A \\ \cos B + \cos C = 2 \cos A. \end{cases}$$

Chứng minh ABC là tam giác đều.

Giải

Từ giả thiết thứ nhất và thứ hai sau khi bình phương hai vế rồi cộng lại ta có:

$$\begin{aligned}
&2 + 2(\cos B \cos C + \sin B \sin C) = 4 \\
&\Leftrightarrow \cos(B - C) = 1 \\
&\Leftrightarrow \widehat{B} = \widehat{C}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Thay (1) vào hệ điều kiện đã cho ta có

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} \sin B = \sin A \\ \cos B = \cos A \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \widehat{B} = \widehat{A}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra ABC là tam giác đều. Đpcm.

Bài toán 5.8. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức

$$\begin{cases} \sin B + \sin C = 2 \sin A \\ \tan B + \tan C = 2 \tan A. \end{cases}$$

Chứng minh ABC là tam giác đều.

Giải

Từ giả thiết thứ nhất ta có

$$2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}.$$

Vì $\sin \frac{B+C}{2} = \cos \frac{A}{2} > 0$, nên ta có

$$\begin{aligned} \cos \frac{B-C}{2} &= 2 \cos \frac{B+C}{2} \\ \Rightarrow \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} &= 2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - 2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \\ \Rightarrow 3 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} &= \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \\ \Rightarrow \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} &= \frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (1)$$

Từ giả thiết thứ hai ta có

$$\tan B + \tan C = -2 \tan(B+C) = 2 \frac{\tan B + \tan C}{\tan B \tan C - 1}.$$

Do

$$\begin{aligned} \tan B + \tan C \neq 0 &\Rightarrow \tan B \tan C = 3 \\ \Rightarrow \frac{2 \tan \frac{B}{2}}{1 - \tan^2 \frac{B}{2}} \frac{2 \tan \frac{C}{2}}{1 - \tan^2 \frac{C}{2}} &= 3 \\ \Rightarrow \frac{4 \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}}{1 - \left(\tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} \right) + \tan^2 \frac{B}{2} \tan^2 \frac{C}{2}} &= 3. \end{aligned} \quad (2)$$

Do

$$\tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} = \left(\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right)^2 - 2 \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}.$$

Thay vào (2) với chú ý $\tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{3}$, ta sẽ có $\left(\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right)^2 = \frac{4}{3}$.

Vì $\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} > 0$ suy ra $\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. (3)

Từ (1), (3) thì $\tan \frac{B}{2}, \tan \frac{C}{2}$ là các nghiệm của phương trình

$$x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 0.$$

Từ đó $\tan \frac{B}{2} = \tan \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = \frac{\pi}{3}.$

Vậy ABC là tam giác đều. Đpcm.

Bài toán 5.9. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức

$$\begin{cases} r_a = 3r \\ m_a = 3r. \end{cases}$$

Chứng minh ABC là tam giác đều.

Giải Ta có

$$\begin{aligned} r_a &= 3r \\ \Leftrightarrow \frac{S}{p-a} &= 3\frac{S}{p} \\ \Leftrightarrow p &= 3(p-a) \\ \Leftrightarrow 3a &= 2p \\ \Leftrightarrow 3a &= a+b+c \\ \Leftrightarrow b+c &= 2a. \end{aligned} \tag{1}$$

Lại có

$$\begin{aligned} m_a &= 3r \\ \Leftrightarrow m_a^2 &= 9r^2 \\ \Leftrightarrow \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} &= 9\frac{S^2}{p^2} \\ \Leftrightarrow \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} &= 9\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2} \\ \Leftrightarrow \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} &= 9\frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4(a+b+c)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Thay (1) vào (2) ta có

$$2b^2 + 2c^2 - a^2 = \frac{9a[a^2 - (b-c)^2]}{3a}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 2b^2 + 2c^2 - a^2 = 3a^2 - 3(b - c)^2 \\
&\Leftrightarrow 5b^2 + 5c^2 - 6bc = 4a^2 \\
&\Leftrightarrow (b - c)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow b = c.
\end{aligned}$$

Từ (1) và (3) ta có $a = b = c$.

Vậy ABC là tam giác đều. Đpcm.

5.3 Bài tập đề nghị

Bài toán 5.10. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức

$$\frac{a}{m_a} = \frac{b}{m_b} = \frac{c}{m_c}.$$

Chứng minh ABC là tam giác đều.

Bài toán 5.11. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \sqrt{3}(\cos A + \cos B + \cos C).$$

Chứng minh ABC là tam giác đều.

Bài toán 5.12. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức

$$2 \left[\frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} - \sqrt{3} \right] = \cot B + \cot C.$$

Chứng minh ABC là tam giác đều.

Bài toán 5.13. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức

$$\begin{cases} \sin A \sin B = \frac{3}{4} \\ a^2 = \frac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c}. \end{cases}$$

Chứng minh ABC là tam giác đều.

Bài toán 5.14. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức

$$\begin{cases} \sin A \sin B = \frac{3}{4} \\ a^2 = \frac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c}. \end{cases}$$

Chứng minh ABC là tam giác đều.

Chương 6

Hệ thức lượng trong các tam giác đặc biệt khác

6.1 Các yếu tố trong tam giác được cho dưới dạng một cấp số

Trong mục này ta xét các bài toán mà các góc hoặc các cạnh có tính chất đặc biệt như lập thành một cấp số cộng hoặc cấp số nhân.

6.1.1 Điều kiện cho dưới dạng cấp số cộng

Bài toán 6.1. Cho tam giác ABC có ba cạnh a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng:

$$1) \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{3},$$

$$2) \sin A \sin C = 3 \sin^2 \frac{B}{2},$$

$$3) \text{ Công sai } d \text{ của cấp số cộng được tính bằng hệ thức } d = \frac{3}{2}r \left(\tan \frac{C}{2} - \tan \frac{A}{2} \right),$$

$$4) h_b = 3r,$$

$$5) h_b = r_b,$$

$$6) S = \frac{2}{3}l_b^2 \sin B.$$

Giải

1) Theo giả thiết ta có $a + c = 2b$, hay

$$\sin A + \sin C = 2 \sin B \Leftrightarrow 2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} = 2.2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \quad (1)$$

Vì $\sin \frac{A+C}{2} = \cos \frac{B}{2} \neq 0$, nên từ (1) ta có

$$\begin{aligned} \cos \left(\frac{A}{2} - \frac{C}{2} \right) &= 2 \cos \left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2} \right) \\ \Rightarrow \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} &= 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} \\ \Rightarrow 3 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} &= \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} \\ \Rightarrow \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} &= \frac{1}{3}. \text{ Đpcm.} \end{aligned}$$

2) Ta có

$$\begin{aligned} \sin A \sin C &= 3 \sin^2 \frac{B}{2} \quad (2) \\ \Leftrightarrow \sin A \sin C &= \frac{3.4 \sin^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{B}{2}}{4 \cos^2 \frac{B}{2}} \\ \Leftrightarrow \sin A \sin C &= \frac{3 \sin^2 B}{2(1 + \cos B)} \\ \Leftrightarrow \frac{a}{2R} \cdot \frac{c}{2R} &= \frac{3 \frac{b^2}{4R^2}}{2 \left(1 + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \right)} \\ \Leftrightarrow ac &= \frac{3acb^2}{(a+c)^2 - b^2} \\ \Leftrightarrow (a+c)^2 - b^2 &= 3b^2 \\ \Leftrightarrow (a+c)^2 &= 4b^2 \\ \Leftrightarrow a+c &= 2b \text{ (do } a, b, c \text{ là 3 cạnh tam giác).} \end{aligned}$$

Điều này đúng theo giả thiết suy ra (2) đúng. Đpcm.

3) Áp dụng công thức $r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$, ta có

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}r \left(\tan \frac{C}{2} - \tan \frac{A}{2} \right) &= \frac{3}{2}4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \frac{\sin \frac{C-A}{2}}{\cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2}} \\
&= 6R \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C-A}{2} \quad (3)
\end{aligned}$$

Áp dụng phần (1), nên từ (3) có

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}r \left(\tan \frac{C}{2} - \tan \frac{A}{2} \right) &= 2R \cos \frac{C+A}{2} \sin \frac{C-A}{2} \\
&= R(\sin C - \sin A) = \frac{c-a}{2} = d. \text{ Dpcm.}
\end{aligned}$$

4) Ta có

$$\begin{aligned}
h_b &= 3r \quad (4) \\
\Leftrightarrow 2R \sin A \sin C &= 3.4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \\
\Leftrightarrow 8R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} &= 12R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \\
\Leftrightarrow 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} &= 3 \sin \frac{B}{2} \\
\Leftrightarrow 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} &= 3 \cos \left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2} \right) \\
\Leftrightarrow 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} &= 3 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} - 3 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} \\
\Leftrightarrow 3 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} &= \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} \\
\Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} &= \frac{1}{3} \\
\Leftrightarrow a + c &= 2b.
\end{aligned}$$

Điều này đúng theo giả thiết suy ra (4) đúng. Dpcm.

5)

$$\begin{aligned}
h_b &= r_b \quad (5) \\
\Leftrightarrow 2R \sin A \sin C &= p \tan \frac{B}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 2R.4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} \\
&\Leftrightarrow 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} = \sin \frac{B}{2} \\
&\Leftrightarrow 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} = \cos \left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2} \right) \\
&\Leftrightarrow 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} \\
&\Leftrightarrow 3 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} \\
&\Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{3} \\
&\Leftrightarrow a + c = 2b.
\end{aligned}$$

Điều này đúng theo giả thiết suy ra (5) đúng. Dpcm.

6) Ta có

$$l_b = \frac{2ac \cos \frac{B}{2}}{a + c}.$$

Vì thế

$$\begin{aligned}
l_b^2 &= \frac{4a^2c^2 \cos^2 \frac{B}{2}}{(a + c)^2} = \frac{2a^2c^2(1 + \cos B)}{(a + c)^2} \\
&= \frac{2a^2c^2}{(a + c)^2} \left(1 + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \right) = \frac{ac}{(a + c)^2} [(a + c)^2 - b^2].
\end{aligned}$$

Từ đó do a, b, c lập thành cấp số cộng nên

$$\begin{aligned}
a + c = 2b &\Leftrightarrow l_b^2 = \frac{ac(4b^2 - b^2)}{4b^2} \Leftrightarrow l_b^2 = \frac{3}{4}ac \\
&\Leftrightarrow l_b^2 = \frac{3}{4} \frac{2S}{\sin B} \Leftrightarrow S = \frac{2}{3} l_b^2 \sin B. \text{ Dpcm.}
\end{aligned}$$

Bài toán 6.2. Cho tam giác ABC trong đó $\tan \frac{A}{2}, \tan \frac{B}{2}, \tan \frac{C}{2}$ theo thứ tự trên lập thành một cấp số cộng. Chứng minh $\cos A, \cos B, \cos C$ cũng lập thành một cấp số cộng.

Giải

Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned}
 \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{C}{2} &= 2 \tan \frac{B}{2} \\
 \Rightarrow \frac{\sin \frac{A+C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}} &= 2 \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} \\
 \Rightarrow \cos^2 \frac{B}{2} &= 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} \\
 \Rightarrow \frac{1 + \cos B}{2} &= \sin \frac{B}{2} \left[\cos \frac{A+C}{2} + \cos \frac{A-C}{2} \right] \\
 \Rightarrow 1 + \cos B &= 2 \sin^2 \frac{B}{2} + 2 \cos \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} \\
 \Rightarrow 1 + \cos B &= 1 - \cos B + \cos A + \cos C \\
 \Rightarrow 2 \cos B &= \cos A + \cos C.
 \end{aligned}$$

Vậy $\cos A, \cos B, \cos C$ lập thành một cấp số cộng. Đpcm.

Bài toán 6.3. Cho tam giác ABC trong đó $\cot A, \cot B, \cot C$ lập thành một cấp số cộng. Chứng minh a^2, b^2, c^2 cũng lập thành một cấp số cộng.

Giải

Từ giả thiết ta có

$$\cot A + \cot C = 2 \cot B \quad (1)$$

Áp dụng định lý hàm số cot, từ (1) ta có

$$\begin{aligned}
 \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S} &= 2 \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4S} \\
 \Rightarrow 2b^2 &= 2a^2 + 2c^2 - 2b^2 \\
 \Rightarrow 2b^2 &= a^2 + c^2
 \end{aligned}$$

Suy ra a^2, b^2, c^2 lập thành một cấp số cộng. Đpcm.

6.1.2 Điều kiện cho dưới dạng cấp số nhân

Bài toán 6.4. Ba góc A, B, C của một tam giác theo thứ tự lập thành một cấp số nhân với công bội $q = 2$. Chứng minh rằng:

$$1) h_a = h_b + h_c,$$

$$2) a^2 + b^2 + c^2 = 7R^2,$$

3) $OH = R\sqrt{2}$, ở đây O và H tương ứng là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm tam giác ABC,

$$4) bc = a(b + c); bc = c^2 - a^2,$$

$$5) \cos A \cos B \cos C = -\frac{1}{8},$$

$$6) \sin A \sin B \sin C = \frac{\sqrt{7}}{8},$$

$$7) \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{5}{4},$$

$$8) \cos A + \cos B + \cos C = \frac{b}{a} - \frac{1}{2},$$

$$9) l_a = 2a \cos \frac{A}{2}.$$

Giải

Từ giả thiết ba góc A, B, C lập thành cấp số nhân với công bội $q = 2$ suy ra $B = 2A; C = 4A \Rightarrow A = \frac{\pi}{7}; B = \frac{2\pi}{7}; C = \frac{4\pi}{7}$. Ta có

1)

$$\begin{aligned} h_a = h_b + h_c &\Leftrightarrow \frac{2S}{a} = \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}. \end{aligned} \quad (1)$$

Theo giả thiết ta có $\widehat{B} = 2\widehat{A}, \widehat{C} = 4\widehat{A} \Rightarrow \widehat{A} = \frac{\pi}{7}, \widehat{B} = \frac{2\pi}{7}, \widehat{C} = \frac{4\pi}{7}$.
 Từ đó

$$\begin{aligned} VP(1) &= \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin \frac{4\pi}{7}} = \frac{2 \sin \frac{3\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7}} \\ &= \frac{2 \sin \frac{3\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7}} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin A} = VT. \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng, suy ra đpcm.

2)

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 7R^2 \\ \Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C &= \frac{7}{4} \\ \Leftrightarrow 2(1 - \cos 2A + 1 - \cos 2B + 1 - \cos 2C) &= 7 \\ \Leftrightarrow \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} &= -\frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Ta cần chứng minh (2) đúng. Đặt $S = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7}$.

Ta có

$$\begin{aligned} 2S \sin \frac{\pi}{7} &= 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7} \\ &= \sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \pi - \sin \frac{5\pi}{7} \\ &= -\sin \frac{\pi}{7}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $S = -\frac{1}{2}$.

Vậy (2) đúng, suy ra đpcm.

3) Theo kết quả đã biết ta có

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Vì vậy từ phần (2) suy ra $OH^2 = 2R^2$ hay $OH = R\sqrt{2}$.

4)

$$\begin{aligned}
bc = a(b + c) &\Leftrightarrow \sin B \sin C = \sin A(\sin B + \sin C) \\
&\Leftrightarrow \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7} = \sin \frac{\pi}{7} \left(\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} \right) \\
&\Leftrightarrow \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7} = 2 \sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \\
&\Leftrightarrow \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7} = \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7} \\
&\Leftrightarrow \sin \frac{4\pi}{7} = \sin \frac{3\pi}{7}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Vì (3) đúng, suy ra đpcm.

Đẳng thức $bc = c^2 - a^2$ chứng minh tương tự.

5)

$$\begin{aligned}
\cos A \cos B \cos C = -\frac{1}{8} &\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8} \\
&\Leftrightarrow 8 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = -\sin \frac{\pi}{7} \\
&\Leftrightarrow 4 \sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = -\sin \frac{\pi}{7}.
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } VT(4) &= 4 \sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = 2 \sin \frac{4\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = \sin \frac{8\pi}{7} = \\
&= -\sin \frac{\pi}{7}.
\end{aligned}$$

Vậy (4) đúng, suy ra đpcm.

6) Ta nhận thấy $\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}$ là các nghiệm của phương trình

$$\cos^2 4x = \cos^2 3x. \tag{5}$$

Đặt $y = \cos^2 x > 0$ thì (5) trở thành

$$\begin{aligned}
(8y^2 - 8y + 1)^2 &= y(4y - 3)^2 \\
&\Leftrightarrow 64y^4 - 144y^3 + 104y^2 - 25y + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow 64(y - 1) \left(y^3 - \frac{5}{4}y^2 + \frac{3}{8}y - \frac{1}{64} \right) = 0
\end{aligned}$$

Do $\cos^2 \frac{\pi}{7}, \cos^2 \frac{2\pi}{7}, \cos^2 \frac{3\pi}{7}$ khác nhau và khác 1 nên suy ra $\cos^2 \frac{\pi}{7}, \cos^2 \frac{2\pi}{7}, \cos^2 \frac{4\pi}{7}$

Chú ý $\cos^2 \frac{4\pi}{7} = \cos^2 \frac{3\pi}{7}$ là 3 nghiệm của phương trình

$$y^3 - \frac{5}{4}y^2 + \frac{3}{8}y - \frac{1}{64} = 0. \tag{6}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
& \sin^2 \frac{\pi}{7} \sin^2 \frac{2\pi}{7} \sin^2 \frac{4\pi}{7} \\
&= \left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{7}\right) \left(1 - \cos^2 \frac{2\pi}{7}\right) \left(1 - \cos^2 \frac{4\pi}{7}\right) \\
&= 1 - \left(\cos^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{2\pi}{7} + \cos^2 \frac{4\pi}{7}\right) + \left(\cos^2 \frac{\pi}{7} \cos^2 \frac{2\pi}{7} + \right. \\
&\quad \left. \cos^2 \frac{2\pi}{7} \cos^2 \frac{4\pi}{7} + \cos^2 \frac{\pi}{7} \cos^2 \frac{4\pi}{7} - \cos^2 \frac{\pi}{7} \cos^2 \frac{2\pi}{7} \cos^2 \frac{4\pi}{7}\right).
\end{aligned}$$

Vì thế theo định lý Viet với phương trình (6) suy ra

$$\begin{aligned}
& \sin^2 \frac{\pi}{7} \sin^2 \frac{2\pi}{7} \sin^2 \frac{4\pi}{7} = 1 - \frac{5}{4} + \frac{3}{8} - \frac{1}{64} = \frac{7}{64} \\
&\Rightarrow \sin A \sin B \sin C = \sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{8}.
\end{aligned}$$

7)

$$\begin{aligned}
& \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{5}{4} \\
&\Leftrightarrow \cos^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{2\pi}{7} + \cos^2 \frac{4\pi}{7} = \frac{5}{4} \\
&\Leftrightarrow 1 + \cos \frac{2\pi}{7} + 1 + \cos \frac{4\pi}{7} + 1 + \cos \frac{8\pi}{7} = \frac{5}{2} \\
&\Leftrightarrow \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Từ (2) suy ra (7) đúng, suy ra đpcm.

8)

$$\begin{aligned}
& \cos A + \cos B + \cos C = \frac{b}{a} - \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} = \frac{\sin \frac{2\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} - \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} - 2 \cos \frac{\pi}{7} = -\frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} - \cos \frac{\pi}{7} = -\frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Theo (2) suy ra đpcm.

9) Ta có

$$l_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}.$$

Theo phần (4) thì $bc = a(b+c)$.

Từ đó suy ra $l_a = 2a \cos \frac{A}{2}$ suy ra đpcm.

6.2 Các yếu tố trong tam giác được cho dưới dạng hình học

Trong mục này ta sử dụng các công thức lượng giác kết hợp với hình học để chứng minh hệ thức lượng trong tam giác.

6.2.1 Hệ thức lượng trong hình học phẳng

Bài toán 6.5. Cho $ABCD$ là tứ giác lồi và không có góc nào vuông. Chứng minh rằng:

$$\frac{\tan A + \tan B + \tan C + \tan D}{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C \cdot \tan D} = \cot A + \cot B + \cot C + \cot D.$$

Giải

Ta xét hai khả năng sau:

$$\begin{aligned} & - 1. \widehat{A} + \widehat{B} \neq \frac{\pi}{2} \text{ (hoặc } \widehat{A} + \widehat{B} \neq \frac{3\pi}{2} \text{)}, \text{ Khi đó } \tan(A+B) \text{ và } \tan(C+D) \\ & \text{có nghĩa} \\ & \Rightarrow (\widehat{A} + \widehat{B}) + (\widehat{C} + \widehat{D}) = 2\pi \\ & \Rightarrow \tan(A+B) + \tan(C+D) = 0 \\ & \Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} + \frac{\tan C + \tan D}{1 - \tan C \tan D} = 0 \\ & \Rightarrow \frac{(\tan A + \tan B)(1 - \tan C \tan D) + (\tan C + \tan D)(1 - \tan A \tan B)}{(1 - \tan A \tan B)(1 - \tan C \tan D)} = 0 \\ & \Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C + \tan D = \tan A \tan B \tan C + \tan A \tan B \tan D \\ & \quad + \tan B \tan C \tan D + \tan A \tan C \tan D \\ & \Rightarrow \frac{\tan A + \tan B + \tan C + \tan D}{\tan A \tan B \tan C \tan D} = \frac{1}{\tan D} + \frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan A} + \\ & \quad \frac{1}{\tan C} \\ & \qquad \qquad \qquad = \cot A + \cot B + \cot C + \cot D. \end{aligned}$$

– 2. $\hat{A} + \hat{B} = \frac{\pi}{2}$ (khi đó $\hat{C} + \hat{D} = \frac{3\pi}{2}$).

Do $\hat{C} + \hat{D} = \frac{3\pi}{2}$ và không có góc nào vuông và $ABCD$ là tứ giác lồi nên suy ra $\frac{\pi}{2} < \hat{D} < \pi$ (vì nếu $\hat{D} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \hat{C} > \pi$ vô lý vì $ABCD$ là tứ giác lồi nên mọi góc của nó nhỏ hơn π).

Do

$$\hat{A} + \hat{B} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \hat{A} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \hat{A} + \hat{D} < \frac{3\pi}{2}.$$

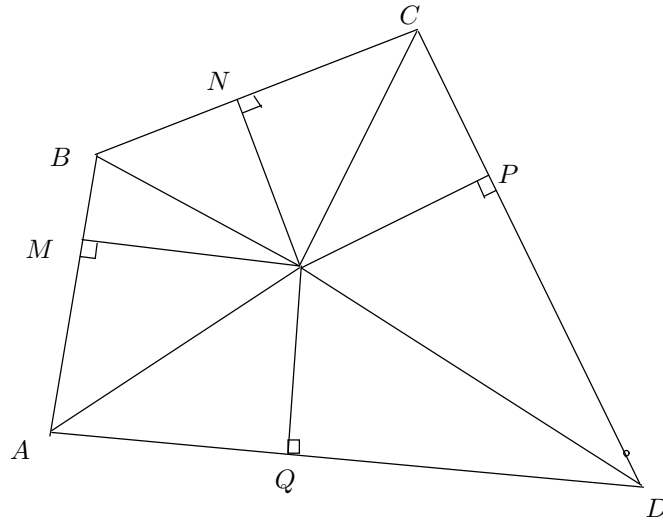
Áp dụng phần (1) với $\hat{A} + \hat{D}$ và $\hat{B} + \hat{C}$ suy ra kết luận của bài toán là đúng. Suy ra đpcm.

Bài toán 6.6. Cho $ABCD$ là tứ giác vừa nội tiếp vừa ngoại tiếp. Gọi S và p tương ứng là diện tích và nửa chu vi của tứ giác. Chứng minh rằng

$$S = p^2 \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{D}{2} \right)^{-1}.$$

Giải

Gọi O là tâm hình tròn nội tiếp của tứ giác và r là bán kính của nó.



Ta có

$$p = AM + BN + CP + DQ = r \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} + \cot \frac{D}{2} \right). \quad (1)$$

Vì $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên ta có:

$$\begin{aligned}\widehat{A} + \widehat{C} &= \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ \\ \Rightarrow \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} &= \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{D}}{2} = 90^\circ \\ \Rightarrow \cot \frac{A}{2} &= \tan \frac{C}{2}; \cot \frac{B}{2} = \tan \frac{D}{2}; \cot \frac{C}{2} = \tan \frac{A}{2}; \cot \frac{D}{2} = \tan \frac{B}{2}.\end{aligned}$$

Thay vào (1) ta có

$$p = r \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{D}{2} \right). \quad (2)$$

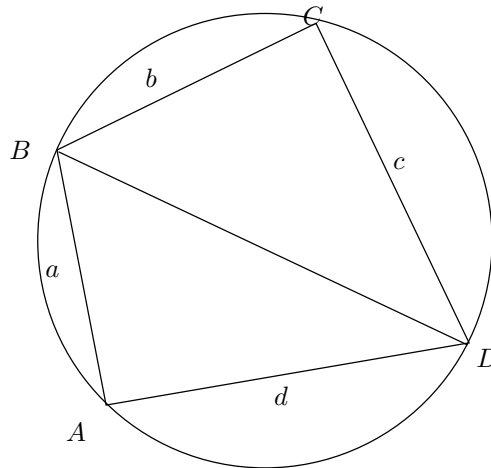
Do $S = pr$, nên từ (2) suy ra

$$S = p^2 \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{D}{2} \right)^{-1}. \text{ Đpcm.}$$

Bài toán 6.7. Cho $ABCD$ là tứ giác nội tiếp với $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ và p là nửa chu vi. Chứng minh

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}.$$

Giải



Áp dụng định lý hàm số *cosin* trong các tam giác ABD , BCD ta có

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos C = b^2 + c^2 + 2bc \cos A,$$

do $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$.

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} a^2 + d^2 - 2ad \cos A &= b^2 + c^2 + 2bc \cos A \\ \Rightarrow \cos A &= \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2bc + 2ad}. \end{aligned} \quad (1)$$

Từ (1) ta có

$$\begin{aligned} \tan \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} \\ &= \sqrt{\frac{b^2 + c^2 + 2bc - (a^2 + d^2 - 2ad)}{a^2 + d^2 + 2ad - (b^2 + c^2 - 2bc)}} \\ &= \sqrt{\frac{(b + c)^2 - (a - d)^2}{(a + d)^2 - (b - c)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(b + c + a - d)(b + c + d - a)}{(a + d + b - c)(a + d + c - b)}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Do $a + b + c + d = 2p$ nên từ (2) ta có

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(2p - 2d)(2p - 2a)}{(2p - 2c)(2p - 2b)}} = \sqrt{\frac{(p - a)(p - d)}{(p - b)(p - c)}}.$$

Bài toán 6.8. (Công thức Heron cho diện tích tứ giác)

Cho $ABCD$ là tứ giác nội tiếp với $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ và p là nửa chu vi, S là diện tích tứ giác. Chứng minh rằng

$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd \cos^2 \frac{B + D}{2}}.$$

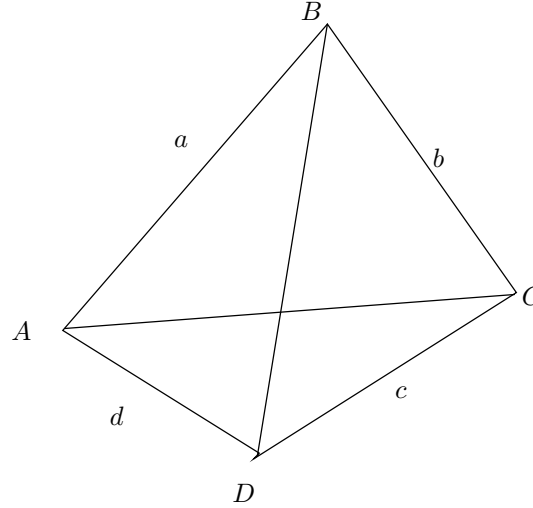
Giải

Áp dụng định lý hàm số *cosin* trong các tam giác ABD , CBD ta có

$$\begin{aligned} BD^2 &= a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos C \\ \Rightarrow a^2 + d^2 - 2ad \cos A &= b^2 + c^2 - 2bc \cos C \\ \Rightarrow a^2 + d^2 - b^2 - c^2 &= 2ad \cos A - 2bc \cos C. \end{aligned} \quad (1)$$

Bình phương hai vế của (1) ta có

$$(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = 4(ad \cos A - bc \cos C)^2. \quad (2)$$



Ta có

$$\begin{aligned}
 S &= S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}ad \sin A + \frac{1}{2}bc \sin C \\
 \Rightarrow 16S^2 &= 4(ad \sin A + bc \sin C)^2
 \end{aligned} \tag{3}$$

Cộng từng vế (2), (3) ta được

$$\begin{aligned}
 (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 + 16S^2 &= 4[a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd(\cos A \cos C - \sin A \sin C)] \\
 &= 4[a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd \cos(A + C)] \\
 &= 4 \left[a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd \left(2 \cos^2 \frac{A+C}{2} - 1 \right) \right] \\
 &= 4 \left[(ad + bc)^2 - 4abcd \cos^2 \frac{A+C}{2} \right]. \tag{4}
 \end{aligned}$$

Từ (4) suy ra

$$\begin{aligned}
 16S^2 &= 4(ad + bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 16abcd \cos^2 \frac{A+C}{2} \\
 &= (2ad + 2bc + a^2 + d^2 - b^2 - c^2)(2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2) \\
 &\quad - 16abcd \cos^2 \frac{A+C}{2} \\
 &= [(a + d)^2 - (b - c)^2][(b + c)^2 - (a - d)^2] - 16abcd \cos^2 \frac{A+C}{2} \\
 &= (a + d + b - c)(a + d + c - b)(b + c + a - d)(b + c + d - a) \\
 &\quad - 16abcd \cos^2 \frac{A+C}{2} \\
 &= (2p - 2c)(2p - 2b)(2p - 2d)(2p - 2a) - 16abcd \cos^2 \frac{A+C}{2}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Vì

$$\frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} + \frac{\widehat{B} + \widehat{D}}{2} = 180^\circ \Rightarrow \cos^2 \frac{B + D}{2} = \cos^2 \frac{A + C}{2},$$

nên từ (5) suy ra

$$\begin{aligned} S^2 &= (p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd \cos^2 \frac{B + D}{2} \\ \Rightarrow S &= \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd \cos^2 \frac{B + D}{2}}. \end{aligned}$$

Nhận xét.

- 1) Ta biết rằng với tam giác có công thức Heron quen biết để tính diện tích tam giác

$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Ở đây a, b, c là ba cạnh của tam giác, còn p là nửa chu vi của nó. Chính vì thế công thức và chứng minh ở trên gọi là công thức Heron suy rộng để tính diện tích tứ giác.

- 2) Xét một vài trường hợp đặc biệt sau

- a) Nếu $ABCD$ là tứ giác nội tiếp. Khi đó

$$\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ \Rightarrow \cos \frac{B + D}{2} = 0.$$

Trong trường hợp này ta có

$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}.$$

- b) Nếu $ABCD$ là tứ giác ngoại tiếp. Khi đó ta có

$$a + c = b + d = p$$

$$\Rightarrow p - a = c, p - b = d, p - c = a, p - d = b.$$

Trong trường hợp này ta có

$$S = \sqrt{abcd - abcd \cos^2 \frac{B + D}{2}} = \sqrt{abcd \sin^2 \frac{B + D}{2}} = \sin \frac{B + D}{2} \sqrt{abcd}.$$

- c) Nếu $ABCD$ vừa là tứ giác nội tiếp vừa là tứ giác ngoại tiếp, thì do $\sin \frac{B + D}{2} = 1$, nên trong trường hợp này ta có $S = \sqrt{abcd}$.

Bài toán 6.9. (Định lý Ptô-lê-mê)

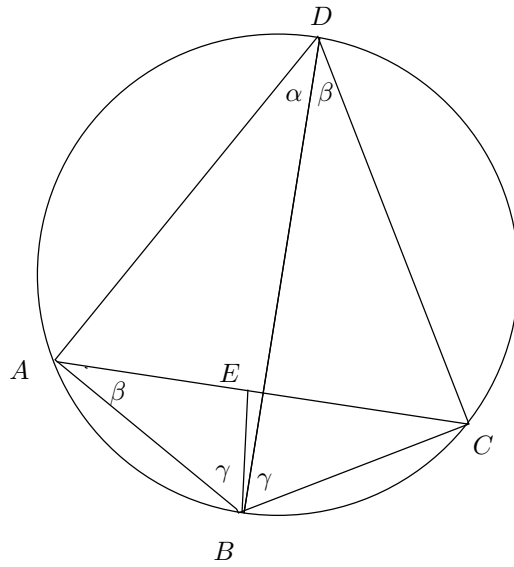
Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn với hai đường chéo là AC , BD . Chứng minh rằng

$$AB.CD + BC.AD = AC.BD.$$

Giải

Cách 1.

Trên AC lấy điểm E sao cho $\widehat{ABE} = \gamma$.



Xét hai tam giác ABE và DBC ta có

$$\widehat{BAE} = \widehat{BDC} = \beta, \widehat{ABE} = \widehat{DBC} = \gamma.$$

Vậy $\triangle ABE$ đồng dạng với tam giác $\triangle DBC$. Do đó

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AE}{DC} \Rightarrow AB.DC = DB.AE. \quad (1)$$

Mặt khác dễ thấy $\triangle CBE$ đồng dạng với tam giác $\triangle DBA$, nên

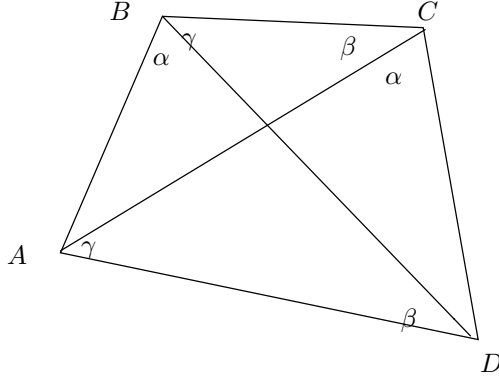
$$\frac{CB}{DB} = \frac{CE}{DA} \Rightarrow BC.DA = DB.CE. \quad (2)$$

Cộng từng vế (1) và (2) ta có

$$AB.DC + BC.DA = DB(AE + CE) = DB.AC.$$

Cách 2.

Giả sử $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn bán kính R .



Đặt $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = \alpha$, $\widehat{ACB} = \widehat{BDA} = \beta$, $\widehat{CAD} = \widehat{CBD} = \gamma$. Áp dụng định lý hàm số sin trong các tam giác ABC , BAD , và CAD (với chú ý đường tròn ngoại tiếp các tam giác này cũng chính là đường tròn ngoại tiếp tam giác tứ giác $ABCD$) ta có:

$$AB = 2R \sin \beta; AD = 2R \sin \alpha; CD = 2R \sin \gamma.$$

Tương tự ta có

$$AC = 2R \sin(\alpha + \gamma); BD = 2R \sin(\alpha + \beta);$$

$$BC = 2R \sin \widehat{BAC} = 2R \sin(\alpha + \beta + \gamma) \text{ (vì } \widehat{BAC} + (\alpha + \beta + \gamma) = 180^\circ).$$

Ta có

$$\begin{aligned} AC \cdot BD &= 2R \sin(\alpha + \gamma) 2R \sin(\alpha + \beta) \\ &= 2R^2 [\cos(\beta - \gamma) - \cos(2\alpha + \beta + \gamma)]. \end{aligned} \quad (1)$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} &AB \cdot CD + AD \cdot BC \\ &= 2R \sin \beta \cdot 2R \sin \gamma + 2R \sin \alpha \cdot 2R \sin(\alpha + \beta + \gamma) \\ &= 2R^2 [\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma) + \cos(\beta + \gamma) - \cos(2\alpha + \beta + \gamma)] \\ &= 2R^2 [\cos(\beta - \gamma) - \cos(2\alpha + \beta + \gamma)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

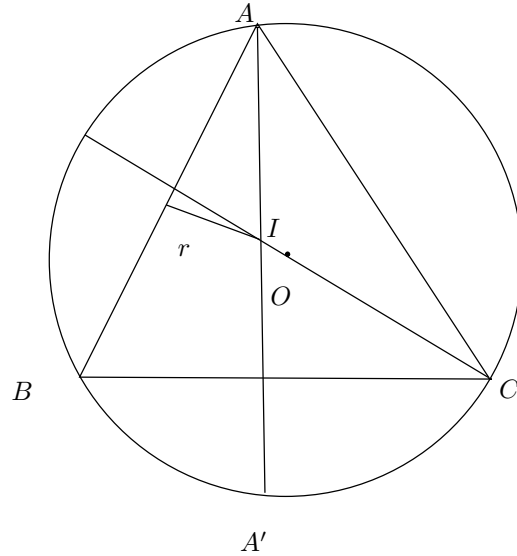
Bài toán 6.10. (Hệ thức Ôle) Cho tam giác ABC . Gọi I và O là tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác. Kí hiệu $d_e = IO$. Chứng minh hệ thức sau:

$$d_e^2 = R^2 - 2dR.$$

Ở đây R, r tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC .

Giải

Theo công thức tính phương tích, ta có



$$P_I(O) = IO^2 - R^2 = d_e^2 - R^2. \quad (1)$$

Giả sử đường phân giác trong của góc A cắt đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC tại A' . Ta cũng có

$$P_I O = -IA \cdot IA' = -\frac{r}{\sin \frac{A}{2}} IA'. \quad (2)$$

Ta có $\widehat{A'IC} = \widehat{IAC} + \widehat{ICA} = \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2}$ (góc ngoài tam giác AIC), mặt

khác $\widehat{ICA'} = \frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2}$ (tính chất góc nội tiếp).

Từ đó suy ra $IA'C$ là tam giác cân đỉnh A' , nên $IA' = A'C$. (3)

Từ (1), (2), (3) ta có:

$$R^2 - d_e^2 = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}} A'C. \quad (4)$$

Áp dụng định lý hàm số sin trong tam giác $AA'C$, có:

$$A'C = 2R \sin \frac{A}{2}. \quad (5)$$

(Vì tam giác $AA'C$ và ABC chung đường tròn ngoại tiếp).
Thay (5) vào (4) và có

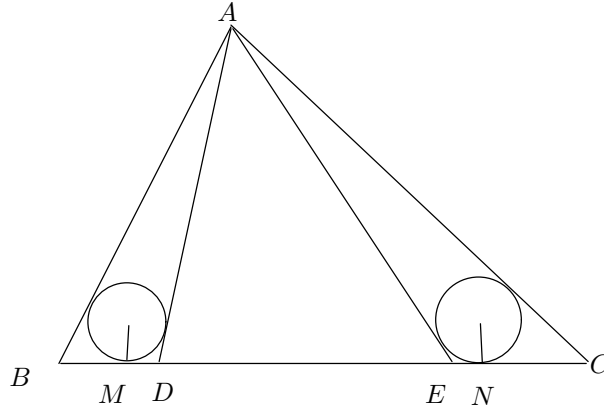
$$R^2 - d_e^2 = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}} 2R \sin \frac{A}{2} \Rightarrow d_e^2 = R^2 - 2Rr.$$

Bài toán 6.11. Cho tam giác ABC . Giả sử D và E là hai điểm trên cạnh BC sao cho $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$. Đường tròn nội tiếp các tam giác ABD , ACE tiếp xúc với cạnh BC tương ứng tại M , N . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{MB} + \frac{1}{MD} = \frac{1}{NC} + \frac{1}{NE}.$$

Giải

Theo tính chất của hai tiếp tuyến xuất phát từ một điểm, ta có:



$$BM = p_1 - AD; DM = p_1 - AB.$$

Ở đây p_1 là nửa chu vi của tam giác ABD .

Do đó

$$\begin{aligned} BM &= \frac{AB + AD + BD}{2} - AD = \frac{AB + BD - AD}{2}. \\ DM &= \frac{AB + AD + BD}{2} - AB = \frac{AD + BD - AB}{2}. \end{aligned}$$

Từ đó

$$\begin{aligned} \frac{1}{MB} + \frac{1}{MD} &= \frac{2}{AB - AD + BD} - \frac{2}{AB - AD - BD} \\ &= \frac{4BD}{BD^2 - (AB - AD)^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Theo định lý hàm số *cosin* trong tam giác ABD , ta có

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \alpha \text{ (ở đây } \widehat{BAD} = \widehat{EAC} = \alpha).$$

Thay vào (1) và có

$$\frac{1}{MB} + \frac{1}{MD} = \frac{2BD}{AB \cdot AD(1 - \cos \alpha)}. \quad (2)$$

Tương tự có

$$\frac{1}{NC} + \frac{1}{NE} = \frac{2EC}{AE \cdot AC(1 - \cos \alpha)}. \quad (3)$$

Hai tam giác ABD và AEC có cùng chiều cao kẻ từ A nên

$$\begin{aligned} \frac{BD}{EC} &= \frac{S_{ABD}}{S_{AEC}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AD \cdot \sin \alpha}{\frac{1}{2}AE \cdot AC \cdot \sin \alpha} = \frac{AB \cdot AD}{AE \cdot AC} \\ \Rightarrow \frac{BD}{AB \cdot AD} &= \frac{EC}{AE \cdot AC}. \end{aligned} \quad (4)$$

Từ (2), (3), (4) suy ra

$$\frac{1}{MB} + \frac{1}{MD} = \frac{1}{NC} + \frac{1}{NE}. \quad \text{Epcm.}$$

6.2.2 Hệ thức lượng trong hình học không gian

Bài toán 6.12. Tứ diện $SABC$ có góc tam diện đỉnh S là tam diện vuông (tức là SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau). Đáy ABC có ba góc $\widehat{BAC} = \alpha, \widehat{ABC} = \beta, \widehat{ACB} = \gamma$. Đặt $SA = a, SB = b, SC = c$. Chứng minh rằng:

$$a^2 \tan \alpha = b^2 \tan \beta = c^2 \tan \gamma.$$

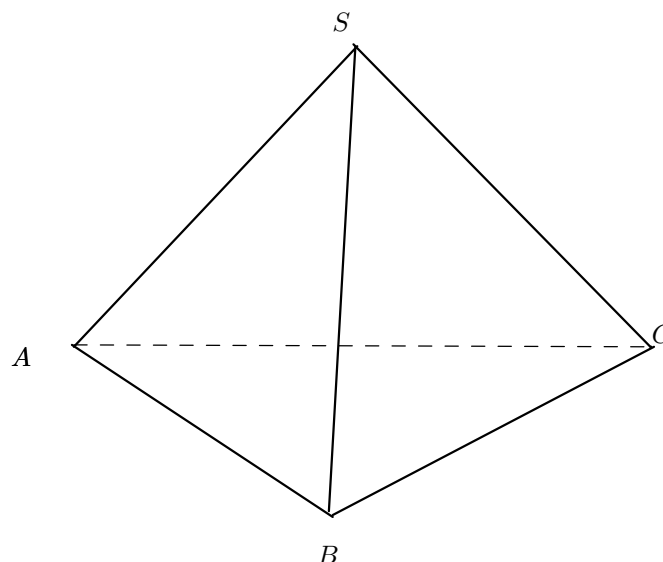
Giải

Theo định lý hàm số *cot* trong tam giác ABC , có:

$$\cot \alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{4S_{ABC}} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{4S_{ABC}}{AB^2 + AC^2 - BC^2}. \quad (1)$$

Mặt khác theo định lý Pitago, ta có

$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = a^2 + b^2 + a^2 + c^2 - b^2 - c^2 = 2a^2. \quad (2)$$



Thay (2) vào (1) và có

$$\tan \alpha = \frac{2S_{ABC}}{a^2} \Rightarrow a^2 \tan \alpha = 2S_{ABC}. \quad (3)$$

Lập luận tương tự có

$$b^2 \tan \beta = c^2 \tan \gamma = 2S_{ABC}. \quad (4)$$

Từ (3), (4) suy ra đpcm.

Bài toán 6.13. Cho tứ diện $OABC$ có tam diện đỉnh O là tam diện vuông. Vẽ chiều cao OH của tứ diện. Đặt:

$$\widehat{A} = \widehat{CAB}, \widehat{B} = \widehat{ABC}, \widehat{C} = \widehat{BCA}, \alpha = \widehat{AOH}, \beta = \widehat{BOH}, \gamma = \widehat{COH}.$$

Chứng minh rằng:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin 2A} = \frac{\sin^2 \beta}{\sin 2B} = \frac{\sin^2 \gamma}{\sin 2C}$$

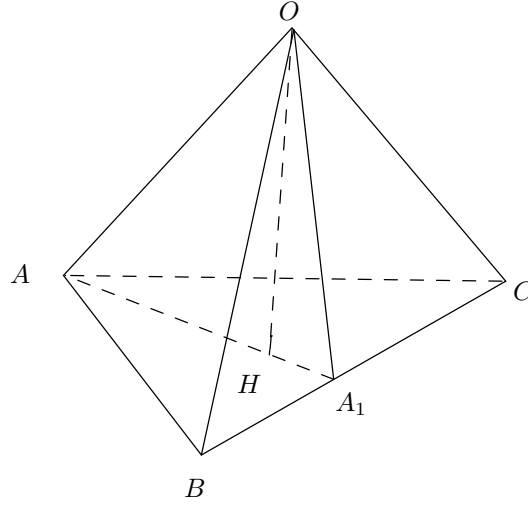
Giải

Kẻ $OH \perp (ABC)$ suy ra H là trực tâm tam giác ABC .

$AH \cap BC = \{A_1\}$, thì $AA_1 \perp BC$. Từ đó $OA_1 \perp BC$ (định lý ba đường vuông góc).

Trong tam giác vuông AOA_1

$$OA^2 = AH \cdot AA_1, \quad (1)$$



$$\sin^2 \alpha = \frac{AH^2}{OA^2}. \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) và có

$$\sin^2 \alpha = \frac{AH}{AA_1}. \quad (3)$$

Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , và gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác này. Khi đó H, I, G thẳng hàng, ở đây G là trọng tâm tam giác (theo đường thẳng Euler). Ta cũng có $HG = 2GI \Rightarrow AH = 2IM$ (M là trung điểm cạnh BC).

Ta có

$$\begin{aligned} \widehat{A} &= \widehat{CAB} = \widehat{BIM}, \\ \sin 2A &= 2 \sin A \cos A = 2 \sin \widehat{BIM} \cos \widehat{BIM} \\ &= 2 \frac{BM}{BI} \cdot \frac{IM}{BI} = 2 \frac{BC}{2BI} \cdot \frac{AH}{2BI} = \frac{BC \cdot AH}{2R^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Từ (3), (4) suy ra

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin 2A} = \frac{2R^2}{BC \cdot AA_1} = \frac{R^2}{S}.$$

Ở đây $S = S_{ABC}$.

Tương tự có

$$\frac{\sin^2 \beta}{\sin 2B} = \frac{\sin^2 \gamma}{\sin 2C} = \frac{R^2}{S}.$$

Vậy

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin 2A} = \frac{\sin^2 \beta}{\sin 2B} = \frac{\sin^2 \gamma}{\sin 2C}.$$

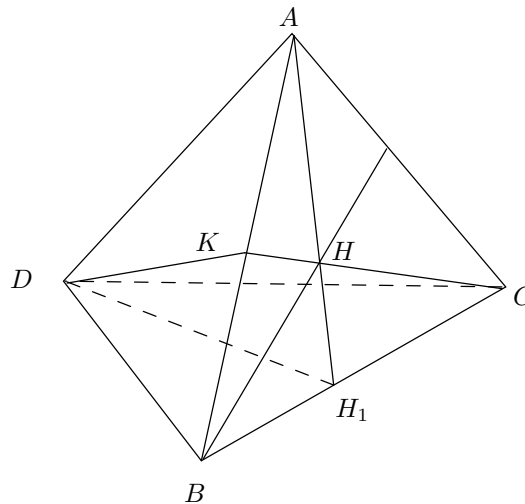
Дрцм.

Bài toán 6.14. Cho hình chóp $D.ABC$, trong đó góc tam diện đỉnh D là vuông. Gọi H là trọng tâm tam giác ABC . Đặt $\alpha = \widehat{DAH}, \beta = \widehat{DBH}, \gamma = \widehat{DCH}, \varphi = \widehat{AHB}$. Chứng minh rằng:

$$\sin \varphi = \frac{\sin \gamma}{\cos \alpha \cos \beta}; \cos \varphi = -\tan \alpha \tan \beta.$$

Giải

Do $D.ABD$ là tứ diện có góc tam diện đỉnh D là vuông nên nếu H là



trực tâm tam giác ABC , thì $DH \perp (ABC)$.

Giả sử $AH \cap BC = H_1$, thì $AH_1 \perp BC$ và $DH_1 \perp BC$.

Trong tam giác vuông ADH_1 đỉnh D , theo hệ thức lượng ta có

$$DH^2 = HA.HH_1. \quad (1)$$

Trong tam giác vuông BHH_1 , ta có

$$HH_1 = BH \cos \widehat{BHH_1} = BH \cos(180^\circ - \varphi) = -BH \cos \varphi. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) và có

$$DH^2 = -AH.BH \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = -\frac{DH}{AH} \cdot \frac{DH}{BH} \Rightarrow \cos \varphi = -\tan \alpha \cdot \tan \beta. \quad (3)$$

Bây giờ xét hệ thức $\sin \varphi = \frac{\sin \gamma}{\cos \alpha \cos \beta}$.

Giả sử $CH \cap AB = K$. Do $CD \perp (DAB)$ (vì $CD \perp DB, CD \perp AD$), mà $CK \perp AB$ (do H là trực tâm tam giác ABC), nên $DK \perp AB$ (định lý ba đường vuông góc) $\Rightarrow \widehat{DKC}$ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (ADB) và (ABC) . Dễ thấy tam giác HAB là hình chiếu của tam giác DAB trong phép chiếu vuông góc mặt phẳng (DAB) xuống mặt phẳng (ABC) . Từ đó ta có

$$S_{HAB} = S_{DAB} \cos \widehat{DKC}. \quad (4)$$

Trong tam giác vuông KDC đỉnh D , ta có $\cos \widehat{DKC} = \sin \gamma$.
Thay vào (4) và có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} HA \cdot HB \sin \varphi &= \frac{1}{2} DA \cdot DB \sin \gamma \\ \Rightarrow \sin \varphi &= \frac{DA \cdot DB}{HA \cdot HB} \sin \gamma = \frac{\sin \gamma}{\frac{HA}{DA} \cdot \frac{HB}{DB}} \\ \Rightarrow \sin \varphi &= \frac{\sin \gamma}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}. \end{aligned}$$

Dpcm.

Bài toán 6.15.

1. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a$ và chân các đường cao kẻ từ một đỉnh đều nằm bên trong mặt đối diện. Gọi S_1, S_2 là diện tích hai mặt của tứ diện có chung cạnh a và α là góc nhị diện giữa hai mặt ấy. Gọi V là thể tích tứ diện. Chứng minh rằng:

$$V = \frac{2S_1 S_2 \sin \alpha}{3a}.$$

2. Chứng minh rằng trong tứ diện, tích của các cặp đối diện chia cho tích của sin các nhị diện của từng cặp cạnh đó là bằng nhau.

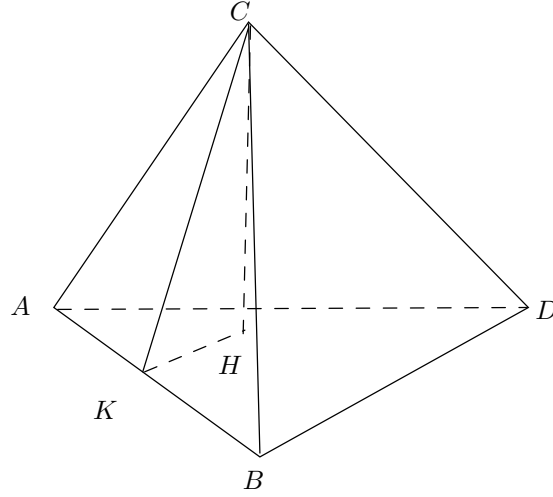
Giải

1. Kẻ $CH \perp (ADB)$ và $CK \perp AB$ (định lý ba đường vuông góc). Từ đó suy ra $\widehat{CKH} = \alpha$ là góc phẳng nhị diện cạnh AB .

Theo giả thiết ta có $S_1 = S_{ABC}, S_2 = S_{ABD}$. Vậy

$$V = \frac{1}{3} CH \cdot S_2. \quad (1)$$

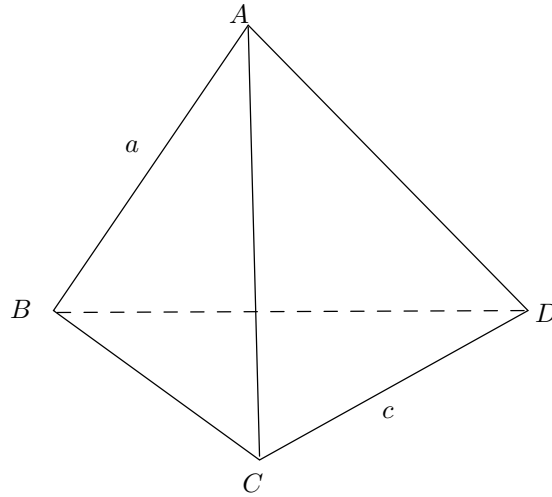
Ta có



$$CH = CK \sin \alpha = \frac{2S_1}{AB} \sin \alpha = \frac{2S_1 \sin \alpha}{a}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) suy ra $V = \frac{2S_1 S_2 \sin \alpha}{3a}$

2. Giả sử $AB = a, CD = c$, α là góc nhị diện cạnh AB , β là góc nhị



diện cạnh CD . Đặt

$$S_1 = S_{ABC}, S_2 = S_{ABD}, S_3 = S_{BCD}, S_4 = S_{ACD}.$$

Theo phần (1) nếu gọi V là thể tích tứ diện $ABCD$ ta có

$$\begin{aligned} V &= \frac{2S_1 S_2 \sin \alpha}{3a} = \frac{2S_3 S_4 \sin \beta}{3c} \\ \Rightarrow V^2 &= \frac{4S_1 S_2 S_3 S_4 \sin \alpha \cdot \sin \beta}{9ac} \\ \Rightarrow \frac{ac}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} &= \frac{4S_1 S_2 S_3 S_4}{9V^2}. \end{aligned}$$

Vế phải của (3) là biểu thức hoàn toàn bình đẳng với các cạnh và sin của các góc nhị diện tương ứng, nên nó là giá trị chung cho tỉ số của tích

các cặp cạnh đối của tứ diện với tích các sin của các nhị diện của từng cặp đối đó.

6.3 Bài tập đề nghị

Bài toán 6.16. Chứng minh rằng trong tam giác ABC thì $\cot \frac{A}{2}, \cot \frac{B}{2}, \cot \frac{C}{2}$ theo thứ tự trên lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi a, b, c theo thứ tự trên cũng lập thành một cấp số cộng.

Bài toán 6.17. Chứng minh rằng trong tam giác ABC thì $\cot A, \cot B, \cot C$ lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi $\cos B = \frac{b^2}{2ac}$.

Bài toán 6.18. Ba góc A, B, C của một tam giác theo thứ tự lập thành một cấp số nhân với công bội $q = 2$. Chứng minh rằng:

- 1) $\frac{1}{\cos A} - \frac{1}{\cos B} - \frac{1}{\cos C} = 4,$
- 2) $\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} = 8,$
- 3) $\frac{1}{\cos^4 A} + \frac{1}{\cos^4 B} + \frac{1}{\cos^4 C} = 416.$

Bài toán 6.19. Cho tứ giác $ABCD$ thỏa mãn điều kiện

$$\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 0.$$

Chứng minh $\cot A + \cot B + \cot C + \cot D = 0$.

Bài toán 6.20. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp. Đường tròn với tâm trên cạnh AB tiếp xúc với ba cạnh kia. Chứng minh rằng $AD + BC = AB$.

Bài toán 6.21. Cho A, B, C, D là bốn đỉnh liên tiếp của một đa giác đều n cạnh thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AB}.$$

Chứng minh $n = 7$.

Bài toán 6.22. Cho hình thang $ABCD$ ($BC // AD$) ngoại tiếp trong đường tròn bán kính r . Giả sử $BC = b$, $DA = d$ ($d > b$) và $\widehat{AMD} = \alpha$ ở đây AB cắt CD tại M . Chứng minh rằng

$$r = \frac{db}{d-b} \tan \frac{\alpha}{2}.$$

Phụ lục

Trong phần này chúng tôi sẽ trình bày phương pháp sử dụng định lý Viet đối với nghiệm của phương trình bậc ba để giải bài toán phụ trợ 2.5.

Bổ đề 6.1. Các cạnh a, b, c của tam giác ABC là các nghiệm của phương trình bậc ba

$$x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4pRr = 0.$$

Chứng minh

Áp dụng định lý hàm

số *sin* ta có $\sin A = \frac{a}{2R}$.

Ta lại có

$$r = (p - a) \tan \frac{A}{2} \Rightarrow \tan \frac{A}{2} = \frac{r}{p - a}.$$

Từ hệ thức

$$\begin{aligned} \sin A &= \frac{2 \tan \frac{A}{2}}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}} \\ \Rightarrow \frac{a}{2R} &= \frac{\frac{2r}{p-a}}{1 + \frac{r^2}{(p-a)^2}} \\ \Rightarrow \frac{a}{2R} &= \frac{2r(p-a)}{r^2 + (p-a)^2} \Rightarrow a(p-a)^2 + r^2a - 4Rr(p-a) = 0 \\ \Rightarrow a^3 - 2pa^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)a - 4pRr &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Hệ thức (1) chứng minh rằng a là nghiệm của phương trình bậc ba.

$$x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4pRr = 0. \quad (2)$$

Lập luận tương tự với b, c cũng thỏa mãn (2) suy ra đpcm.

Bổ đề 6.2. $\sin A, \sin B, \sin C$ là ba nghiệm của phương trình bậc ba

$$4R^2x^3 - 4Rpx^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 2pr = 0.$$

Chứng minh

Thay biến $x = \frac{t}{2R}$, thì

$$\begin{aligned} & 4R^2x^3 - 4Rpx^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 2pr = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{t^3}{2R} - \frac{pt^2}{R} + (p^2 + r^2 + 4Rr)\frac{t}{2R} - 2pr = 0 \\ \Leftrightarrow & t^3 - 2pt^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)t - 4pRr = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Theo bổ đề (1) thì a, b, c là các nghiệm của (1). Do đó $\frac{a}{2R}, \frac{b}{2R}, \frac{c}{2R}$ là các nghiệm của phương trình đã cho, tức là $\sin A, \sin B, \sin C$ là ba nghiệm của phương trình

$$4R^2x^3 - 4Rpx^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 2pr = 0.$$

Suy ra đpcm.

Bổ đề 6.3. $\cos A, \cos B, \cos C$ là ba nghiệm của phương trình bậc ba

$$4R^2x^3 - 4R(R+r)x^2 + (p^2 + r^2 - 4R^2)x + (2R+r)^2 - p^2 = 0.$$

Chứng minh

Ta có

$$p = a + (p - a) \Leftrightarrow p = 2R \sin A + r \cot \frac{A}{2}. \quad (1)$$

Do trong mọi tam giác ABC thì $\sin A > 0, \cot \frac{A}{2} > 0$ nên

$$\begin{aligned} (1) & \Leftrightarrow p = 2R\sqrt{(1 - \cos A)(1 + \cos A)} + r\sqrt{\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A}} \\ & \Leftrightarrow p^2(1 - \cos A) = (1 + \cos A)[2R(1 - \cos A) + r]^2 \\ & \Leftrightarrow p^2 - p^2 \cos A = (1 + \cos A)(4R^2 \cos^2 A - 8R^2 \cos A + 4R^2 + \\ & \quad r^2 + 4Rr - 4Rr \cos A) \\ & \Leftrightarrow 4R^2 \cos^3 A - 4R(R + r) \cos^2 A + (p^2 + r^2 - 4R^2) \cos A \\ & \quad + (2R + r)^2 - p^2 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (2) suy ra $\cos A$ là nghiệm của phương trình bậc ba

$$4R^2x^3 - 4R(R+r)x^2 + (p^2 + r^2 - 4R^2)x + (2R+r)^2 - p^2 = 0.$$

Tương tự $\cos B, \cos C$ cũng là nghiệm của phương trình trên. Suy ra đpcm.

Bổ đề 6.4. $\frac{1}{\sin A}, \frac{1}{\sin B}, \frac{1}{\sin C}$ là ba nghiệm của phương trình bậc ba

$$2prx^3 - (p^2 + r^2 + 4Rr)x^2 + 4Rpx - 4R^2 = 0.$$

Chứng minh

Đặt $x = \frac{1}{t}$, khi đó

$$\begin{aligned} & 2prx^3 - (p^2 + r^2 + 4Rr)x^2 + 4Rpx - 4R^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{2pr}{t^3} - (p^2 + r^2 + 4Rr)\frac{1}{t^2} + 4Rp\frac{1}{t} - 4R^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & 4R^2t^3 - 4Rpt^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)t - 2pr = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Theo bổ đề (2) thì $\sin A, \sin B, \sin C$ là các nghiệm của (1). Do đó $\frac{1}{\sin A}, \frac{1}{\sin B}, \frac{1}{\sin C}$ là ba nghiệm của phương trình bậc ba

$$2prx^3 - (p^2 + r^2 + 4Rr)x^2 + 4Rpx - 4R^2 = 0.$$

Đpcm.

Bổ đề 6.5. $\frac{1}{\cos A}, \frac{1}{\cos B}, \frac{1}{\cos C}$ là ba nghiệm của phương trình bậc ba

$$[p^2 - (2R+r)^2]x^3 - (p^2 + r^2 - 4R^2)x^2 + 4R(r+R)x - 4R^2 = 0.$$

Chứng minh tương tự bổ đề 4 bằng cách thay biến $x = \frac{1}{t}$ rồi áp dụng bổ đề 3.

Bổ đề 6.6. $\sin^2 \frac{A}{2}, \sin^2 \frac{B}{2}, \sin^2 \frac{C}{2}$ là ba nghiệm của phương trình bậc ba

$$16R^2x^3 - 8R(2R-r)x^2 + (p^2 + r^2 - 8Rr)x - r^2 = 0.$$

Chứng minh

Đặt $x = \frac{1-t}{2}$, khi đó

$$\begin{aligned} & 16R^2x^3 - 8R(2R-r)x^2 + (p^2 + r^2 - 8Rr)x - r^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & 16R^2\frac{(1-t)^3}{8} - 8R(2R-r)\frac{(1-t)^2}{4} + (p^2 + r^2 - 8Rr)\frac{1-t}{2} - r^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & 4R^2(1-t)^3 - 4R(2R-r)(1-t)^2 + (p^2 + r^2 - 8Rr)(1-t) - r^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & 4R^2t^3 - 4R(R+r)t^2 + (p^2 + r^2 - 4R^2)t + (2R+r)^2 - p^2 = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Theo bổ đề (3) thì $\cos A, \cos B, \cos C$ là các nghiệm của (1). Do đó

$$\frac{1 - \cos A}{2}, \frac{1 - \cos B}{2}, \frac{1 - \cos C}{2}$$

là các nghiệm của phương trình

$$16R^2x^3 - 8R(2R - r)x^2 + (p^2 + r^2 - 8Rr)x - r^2 = 0.$$

Suy ra $\sin^2 \frac{A}{2}, \sin^2 \frac{B}{2}, \sin^2 \frac{C}{2}$ là ba nghiệm của phương trình trên. Suy ra đpcm.

Bổ đề 6.7. $\cos^2 \frac{A}{2}, \cos^2 \frac{B}{2}, \cos^2 \frac{C}{2}$ là ba nghiệm của phương trình bậc ba

$$16R^2x^3 - 8R(2R + r)x^2 + [p^2(4R + r)]x - p^2 = 0.$$

Chứng minh

Thay biến $x = \frac{1+t}{2}$ và dùng bổ đề 3. Suy ra đpcm.

Bổ đề 6.8. $\frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}}, \frac{1}{\sin^2 \frac{B}{2}}, \frac{1}{\sin^2 \frac{C}{2}}$ là ba nghiệm của phương trình bậc ba

$$r^2x^3 - (p^2 + r^2 - 8Rr)x^2 + 8R(2R - r)x - 16R^2 = 0.$$

Chứng minh

Đặt $x = \frac{1}{t}$, khi đó

$$\begin{aligned} & r^2x^3 - (p^2 + r^2 - 8Rr)x^2 + 8R(2R - r)x - 16R^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{r^2}{t^3} - \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{t^2} + \frac{8R(2R - r)}{t} - 16R^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & 16R^2t^3 - 8R(2R - r)t^2 + (p^2 + r^2 - 8Rr)t - r^2 = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Theo bổ đề (6) thì $\sin^2 \frac{A}{2}, \sin^2 \frac{B}{2}, \sin^2 \frac{C}{2}$ là ba nghiệm của phương trình (1).

Do đó $\frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}}, \frac{1}{\sin^2 \frac{B}{2}}, \frac{1}{\sin^2 \frac{C}{2}}$ là ba nghiệm của phương trình bậc ba

$$r^2x^3 - (p^2 + r^2 - 8Rr)x^2 + 8R(2R - r)x - 16R^2 = 0.$$

Suy ra đpcm.

Bổ đề 6.9. $\frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}}, \frac{1}{\cos^2 \frac{B}{2}}, \frac{1}{\cos^2 \frac{C}{2}}$ là ba nghiệm của phương trình bậc ba

$$p^2x^3 - [p^2 + (4R + r)^2]x^2 + 8R(4 + r)x - 16R^2 = 0.$$

Chứng minh

Đặt $x = \frac{1}{t}$ và dùng bổ đề 7. Suy ra đpcm.

Bổ đề 6.10. $\cot A, \cot B, \cot C$ là ba nghiệm của phương trình bậc ba

$$2prx^3 - (p^2 - r^2 - 4Rr)x^2 + 2prx + (2R + r)^2 - p^2 = 0.$$

Chứng minh

Ta có

$$\begin{aligned} a + p - a &= p \\ \Leftrightarrow 2R \sin A + r \cot \frac{A}{2} &= p \\ \Leftrightarrow \frac{2R}{\sqrt{1 + \cot^2 A}} + \frac{r}{\sin A} + r \cot A &= p \\ \Leftrightarrow \frac{2R}{\sqrt{1 + \cot^2 A}} + r\sqrt{1 + \cot^2 A} &= p - r \cot A \\ \Leftrightarrow [2R + r(1 + \cot^2 A)]^2 &= (1 + \cot^2 A)(p - r)^2 \\ \Leftrightarrow (2R + r + r \cot^2 A)^2 &= (1 + \cot^2 A)(p^2 - 2pr \cot A + r^2 \cot^2 A) \\ \Leftrightarrow 2pr \cot^3 A - (p^2 - r^2 - 4Rr) \cot^2 A &+ 2pr \cot A + (2R + r)^2 - p^2 = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Từ (1) suy ra $\cot A$ là nghiệm của phương trình

$$2prx^3 - (p^2 - r^2 - 4Rr)x^2 + 2prx + (2R + r)^2 - p^2 = 0.$$

Tương tự $\cot B, \cot C$ cũng là nghiệm của (*), suy ra đpcm.

Bổ đề 6.11. $\tan A, \tan B, \tan C$ là ba nghiệm của phương trình bậc ba.

$$[p^2 - (2R + r)^2]x^3 - 2prx^2 + (p^2 - 4Rr - r^2)x - 2pr = 0.$$

Chứng minh

Đặt $x = \frac{1}{t}$. Khi đó

$$\begin{aligned} &[p^2 - (2R + r)^2]x^3 - 2prx^2 + (p^2 - 4Rr - r^2)x - 2pr = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{p^2 - (2R + r)^2}{t^3} - \frac{2pr}{t^2} + \frac{p^2 - 4Rr - r^2}{t} - 2pr &= 0 \\ \Leftrightarrow 2prt^3 - (p^2 - 4Rr - r^2)t^2 + 2prt + (2R + r)^2 - p^2 &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Theo bổ đề 10 thì $\cot A, \cot B, \cot C$ là ba nghiệm của (1). Điều đó nghĩa là $\tan A, \tan B, \tan C$ là ba nghiệm phương trình bậc ba

$$[p^2 - (2R + r)^2]x^3 - 2prx^2 + (p^2 - 4Rr - r^2)x - 2pr = 0.$$

Suy ra đpcm.

Bổ đề 6.12. $\tan \frac{A}{2}, \tan \frac{B}{2}, \tan \frac{C}{2}$ là ba nghiệm của phương trình bậc ba

$$px^3 - (4R + r)x^2 + pr - r = 0.$$

Chứng minh

Ta có

$$\begin{aligned} a + (p - a) &= p \\ \Leftrightarrow 2R \sin A + r \cot \frac{A}{2} &= p \\ \Leftrightarrow \frac{4R \tan \frac{A}{2}}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}} + \frac{r}{\tan \frac{A}{2}} &= p \\ \Leftrightarrow 4R \tan^2 \frac{A}{2} + r + r \tan^2 \frac{A}{2} &= p \tan \frac{A}{2} + p \tan^3 \frac{A}{2} \\ \Leftrightarrow p \tan^3 \frac{A}{2} - (4R + r) \tan^2 \frac{A}{2} + p \tan \frac{A}{2} - r &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Từ (1) suy ra $\tan \frac{A}{2}$ là nghiệm của phương trình bậc ba

$$px^3 - (4R + r)x^2 + pr - r = 0. (*)$$

Lập luận tương tự $\tan \frac{B}{2}, \tan \frac{C}{2}$ cũng là nghiệm phương trình bậc ba (*), suy ra đpcm.

Bổ đề 6.13. $\cot \frac{A}{2}, \cot \frac{B}{2}, \cot \frac{C}{2}$ là ba nghiệm của phương trình bậc ba

$$rx^3 - px^2 + (4R + r)x - p = 0.$$

Chứng minh

Đặt $x = \frac{1}{t}$. Khi đó

$$\begin{aligned} rx^3 - px^2 + (4R + r)x - p &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{r}{t^3} - \frac{p}{t^2} + \frac{(4R + r)}{t} - p &= 0 \\ \Leftrightarrow pt^3 - (4R + r)t^2 + pt - r &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Theo bổ đề 12 thì $\tan \frac{A}{2}, \tan \frac{B}{2}, \tan \frac{C}{2}$ là các nghiệm của (1). Do đó $\frac{1}{\tan \frac{A}{2}}, \frac{1}{\tan \frac{B}{2}}, \frac{1}{\tan \frac{C}{2}}$

hay $\cot \frac{A}{2}, \cot \frac{B}{2}, \cot \frac{C}{2}$ là các nghiệm của phương trình bậc ba

$$rx^3 - px^2 + (4R + r)x - p = 0.$$

Suy ra đpcm.

Bổ đề 6.14. r_a, r_b, r_c là ba nghiệm của phương trình bậc ba

$$x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0.$$

Chứng minh

Đặt $x = pt$ ta có:

$$\begin{aligned} & x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0 \\ \Leftrightarrow & p^3t^3 - (4R + r)p^2t^2 + p^3t - p^2r = 0 \\ \Leftrightarrow & pt^3 - (4R + r)t^2 + pt - r = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Theo bổ đề 12 thì $\tan \frac{A}{2}, \tan \frac{B}{2}, \tan \frac{C}{2}$ là các nghiệm của (1). Do đó

$r_a = p \tan \frac{A}{2}, r_b = p \tan \frac{B}{2}, r_c = p \tan \frac{C}{2}$ là các nghiệm của phương trình bậc ba

$$x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0.$$

Suy ra đpcm.

Bổ đề 6.15. $\frac{1}{r_a}, \frac{1}{r_b}, \frac{1}{r_c}$ là ba nghiệm của phương trình bậc ba

$$p^2rx^3 - p^2x^2 + (4R + r)x - 1 = 0.$$

Chứng minh

Đặt $x = \frac{1}{t}$ và dùng bổ đề 14. Suy ra đpcm.

Bổ đề 6.16. h_a, h_b, h_c là ba nghiệm của phương trình bậc ba

$$2Rx^3 - (p^2 + r^2 + 4Rr)x^2 + 4p^2rx - 4p^2r^2 = 0.$$

Chứng minh

Đặt $x = \frac{2pr}{t}$, ta có

$$\begin{aligned}
& 2Rx^3 - (p^2 + r^2 + 4Rr)x^2 + 4p^2rx - 4p^2r^2 = 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{2R(2pr)^3}{t^3} - (p^2 + r^2 + 4Rr)\frac{(2pr)^2}{t^2} + 4p^2r\frac{2pr}{t} - 4p^2r^2 = 0 \\
& \Leftrightarrow p^2r^2t^3 - 2p^3r^2t^2 + p^2r^2(p^2 + r^2 + 4Rr)t - 4Rp^3r^3 = 0 \\
& \Leftrightarrow t^3 - 2pt^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)t - 4Rrp = 0. \tag{1}
\end{aligned}$$

Theo bổ đề (1) thì a, b, c là các nghiệm của (1). Do đó $h_a = \frac{2pr}{a}$, $h_b = \frac{2pr}{b}$, $h_c = \frac{2pr}{c}$ là các nghiệm của phương trình bậc ba

$$2Rx^3 - (p^2 + r^2 + 4Rr)x^2 + 4p^2rx - 4p^2r^2 = 0.$$

Suy ra đpcm.

Bổ đề 6.17. $\frac{1}{h_a}, \frac{1}{h_b}, \frac{1}{h_c}$ là ba nghiệm của phương trình bậc ba

$$4p^2r^2x^3 - 4p^2rx^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 2R = 0.$$

Chứng minh

Đặt $x = \frac{1}{t}$ và dùng bổ đề 16. Suy ra đpcm.

Ta áp dụng các bổ đề trên để giải bài toán phụ trợ như sau: Theo bổ đề 2, $\sin A, \sin B, \sin C$ là ba nghiệm của phương trình bậc ba

$$4R^2x^3 - 4Rpx^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 2pr = 0.$$

Áp dụng định lý Viet với phương trình trên ta có

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{4Rp}{4R^2} = \frac{p}{R}.$$

$$\begin{aligned}
1) \quad & \sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A = \frac{p^2 + 4Rr + r^2}{4R^2}. \\
2) \quad & \sin A \sin B \sin C = \frac{pr}{2R^2}.
\end{aligned}$$

Do

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = (\sin A + \sin B + \sin C)^2 - 2(\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A)$$

nên ta có

$$3) \quad \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \left(\frac{p}{R}\right)^2 - 2\frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2} = \frac{p^2 - 4Rr - r^2}{2R^2}$$

Ta lại có

$$\begin{aligned}
& \sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C \\
&= (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)^2 - 2(\sin^2 A \sin^2 B + \sin^2 B \sin^2 C + \sin^2 C \sin^2 A) \\
&= (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)^2 - 2[(\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A)^2 \\
&\quad - 2 \sin A \sin B \sin C (\sin A + \sin B + \sin C)].
\end{aligned}$$

Áp dụng các tính chất trên đi đến

6)

$$\begin{aligned}
& \sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C \\
&= \left(\frac{p^2 - 4Rr - r^2}{2R^2} \right)^2 - 2 \left(\frac{p^2 + 4Rr + r^2}{4R^2} \right)^2 + 4 \frac{pr}{2R^2} \cdot \frac{p}{R} \\
&= \frac{2(p^2 - 4Rr - r^2)p^2 - (p^2 + r^2 + 4Rr)^2 + 16p^2 r R}{8R^4} \\
&= \frac{p^4 - (8Rr + 6r^2)p^2 + r^2(4R + r)^2}{8R^4}
\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
& \sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C \\
&= (\sin A + \sin B + \sin C)^3 - 3 \sin A \sin B (\sin A + \sin B) - 3 \sin B \sin C \\
&\quad (\sin B + \sin C) - 3 \sin C \sin A (\sin C + \sin A) - 6 \sin A \sin B \sin C. \\
&= (\sin A + \sin B + \sin C)^3 - 3(\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A) \\
&\quad (\sin A + \sin B + \sin C) + 3 \sin A \sin B \sin C
\end{aligned}$$

Vì thế áp dụng các phép tính trên ta được

4)

$$\begin{aligned}
& \sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C \\
&= \frac{p^3}{R^3} - 3 \frac{p}{R} \left(\frac{p^2 + 4Rr + r^2}{4R^2} \right) + \frac{3pr}{2R^2} \\
&= \frac{p^3 - 3r^2 p - 12pRr + 6pRr}{4R^3} = \frac{p(p^2 - 6Rr - 3r^2)}{4R^3}
\end{aligned}$$

Sau hết ta có

5)

$$\begin{aligned}
& (\sin A + \sin B)(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A) \\
&= 2 \sin A \sin B \sin C + \sin A \sin B (\sin A + \sin B) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin B \sin C (\sin B + \sin C) + \sin C \sin A (\sin C + \sin A) \\
& = 2 \sin A \sin B \sin C + (\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A) \\
& \quad \cdot (\sin A + \sin B + \sin C) - 3 \sin A \sin B \sin C \\
& = (\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A) (\sin A + \sin B + \sin C) \\
& \quad - \sin A \sin B \sin C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2} \cdot \frac{p}{R} - \frac{pr}{2R^2} \\
& = \frac{p(p^2 + r^2 + 2Rr)}{4R^3}.
\end{aligned}$$

Vậy hệ thức 1-6 được chứng minh.

Lập luận tương tự bằng cách áp dụng bổ đề 3 và định lý Viet cho phương trình bậc ba ta suy ra hệ thức 7-11.

Theo bổ đề 4 thì $\frac{1}{\sin A}, \frac{1}{\sin B}, \frac{1}{\sin C}$ là ba nghiệm của phương trình bậc ba

$$2prx^3 - (p^2 + r^2 + 4Rr)x^2 + 4Rpx - 4R^2 = 0.$$

Áp dụng định lý Viet cho phương trình này ta được:

$$12) \quad \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2pr}.$$

$$13) \quad \frac{1}{\sin A \sin B} + \frac{1}{\sin B \sin C} + \frac{1}{\sin C \sin A} = \frac{2R}{r}.$$

14)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} \\
& = \left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \right)^2 - 2 \left(\frac{1}{\sin A \sin B} + \frac{1}{\sin B \sin C} + \frac{1}{\sin C \sin A} \right) \\
& = \left(\frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2pr} \right)^2 - \frac{4R}{r} \\
& = \frac{(p^2 + r^2 + 4Rr)^2 - 16p^2 Rr}{4p^2 R^2}.
\end{aligned}$$

15)

$$\begin{aligned}
& \frac{\sin A \sin B}{\sin C} + \frac{\sin B \sin C}{\sin A} + \frac{\sin C \sin A}{\sin B} \\
&= (\sin A + \sin B + \sin C) \left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \right) - 3 \\
&= \frac{p}{R} \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2pr} - 3 \\
&= \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2pr} - 3 \\
&= \frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{2pr}.
\end{aligned}$$

Bằng lập luận tương tự ta chứng minh được các hệ thức 16-20.

Theo bổ đề 6 thì $\sin^2 \frac{A}{2}, \sin^2 \frac{B}{2}, \sin^2 \frac{C}{2}$ là ba nghiệm của phương trình bậc ba

$$16R^2x^3 - 8R(2R - r)x^2 + (p^2 + r^2 - 8Rr)x - r^2 = 0.$$

Áp dụng định lý Viet cho phương trình trên ta có

21)

$$\begin{aligned}
\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} &= \frac{8R(2R - r)}{16R^2} = \frac{2R - r}{2R} \\
\sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \sin^2 \frac{A}{2} &= \frac{p^2 + R^2 - 8Rr}{16R^2} \\
\sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} &= \frac{r^2}{16R^2}.
\end{aligned}$$

Ta có

22)

$$\begin{aligned}
& \sin^4 \frac{A}{2} + \sin^4 \frac{B}{2} + \sin^4 \frac{C}{2} \\
&= \left(\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \right)^2 - 2 \left(\sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} \right. \\
&\quad \left. + \sin^2 \frac{C}{2} \sin^2 \frac{A}{2} \right) \\
&= \left(\frac{2R - r}{2R} \right)^2 - \frac{p^2 - r^2 - 8Rr}{8R^2} \\
&= \frac{8R^2 + r^2 - p^2}{8R^2}.
\end{aligned}$$

Như vậy các hệ thức 21-23 được chứng minh.

Lập luận tương tự (dùng bổ đề 7), thì hệ thức 24-26 được chứng minh.

Dùng bổ đề 8, 9 và kết hợp với định lý Viet suy ra hệ thức 27-32 được chứng minh.

Theo bổ đề 10 $\cot A, \cot B, \cot C$ là ba nghiệm của phương trình bậc ba.

$$2prx^3 - (p^2 - r^2 - 4Rr)x^2 + 2prx + (2R + r)^2 - p^2 = 0.$$

Áp dụng định lý Viet cho phương trình bậc ba trên ta được

$$33) \quad \cot A + \cot B + \cot C = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2pr}.$$

$$34) \quad \cot A \cot B \cot C = \frac{p^2 - (2R + r)^2}{2pr}.$$

(Ta kiểm tra lại hệ thức

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1.$$

Thật vậy theo định lý Viet thì

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = \frac{2pr}{2pr} = 1).$$

Ta thấy

35)

$$\begin{aligned} & \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C \\ &= (\cot A + \cot B + \cot C)^2 - 2(\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A) \\ &= \frac{(p^2 - r^2 - 4Rr)^2}{4p^2r^2} - 2. \end{aligned}$$

Do

$$\begin{aligned} & (\cot A + \cot B)(\cot B + \cot C)(\cot C + \cot A) \\ &= (\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A)(\cot A + \cot B + \cot C) - \cot A \cot B \cot C \end{aligned}$$

Áp dụng kết quả trên đi đến

36)

$$\begin{aligned} & (\cot A + \cot B)(\cot B + \cot C)(\cot C + \cot A) \\ &= \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2pr} - \frac{p^2 - (2R + r)^2}{2pr} - 2 \\ &= \frac{4R^2}{2pr} \\ &= \frac{2R^2}{pr}. \end{aligned}$$

Sử dụng hằng đẳng thức quen biết ta thấy

37)

$\cot^3 A + \cot^3 B + \cot^3 C = (\cot A + \cot B + \cot C)^3$
 $-3(\cot A + \cot B + \cot C)(\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A) + 3 \cot A \cot B \cot C.$
 Từ đó theo các tính toán trên suy ra

$$\begin{aligned}
 & \cot^3 A + \cot^3 B + \cot^3 C \\
 &= \frac{(p^2 - r^2 - 4Rr)^2}{8p^3r^3} - 3\frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2pr} + 3\frac{p^2 - (2R + r)^2}{2pr} \\
 &= \frac{(p^2 + r^2 - 4Rr)^3 - 12p^2r^2[p^2 - r^2 - 4Rr - p^2 + (2R + r)^2]}{8p^2r^3} \\
 &= \frac{(p^2 + r^2 - 4Rr)^3 - 48p^2Rr^2}{8p^2r^3}.
 \end{aligned}$$

Vậy các hệ thức 34-41 được chứng minh.

Bằng lập luận tương tự và sử dụng bổ đề 11 suy ra hệ thức 42 cũng được chứng minh.

Theo bổ đề 12 $\tan \frac{A}{2}, \tan \frac{B}{2}, \tan \frac{C}{2}$ là ba nghiệm của phương trình bậc ba.

$$px^3 - (4R + r)x^2 + pr - r = 0.$$

Áp dụng định lý Viet cho phương trình trên ta được

$$\begin{aligned}
 \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} &= \frac{4R + r}{p}, \\
 \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} &= \frac{r}{p}.
 \end{aligned}$$

(Ta cũng kiểm tra được hệ thức

$$\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = \frac{p}{p} = 1).$$

Sử dụng hằng đẳng thức ta có

42)

$$\begin{aligned}
& \tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} \\
&= \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right)^2 - 2 \left(\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \right. \\
&\quad \left. + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} \right) \\
&= \left(\frac{4R+r}{p} \right)^2 - 2 = \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{p^2} \tan^3 \frac{A}{2} + \tan^3 \frac{B}{2} + \tan^3 \frac{C}{2} \\
&= \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right)^3 - 3 \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right) \\
&\quad \left(\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} \right) + 3 \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \\
&= \frac{(4R+r)^3}{p^3} - 3 \frac{4R+r}{p} + 3 \frac{r}{p} \\
&= \frac{(4R+r)^3 - 3p^2(4R+r-r)}{p^3} \\
&= \frac{(4R+r)^3 - 12p^2R}{p^3}.
\end{aligned}$$

Áp dụng bổ đề 13 và định lý Viet suy ra hệ thức 43 - 46 được chứng minh.
Sử dụng bổ đề 14-17 và áp dụng định lý Viet cho phương trình bậc ba suy ra các hệ thức 47-75.

Sau hết xét hệ thức

$$76) l_a l_b l_c = \frac{16Rr^2p^2}{p^2 + 2Rr + r^2}$$

Áp dụng công thức tính đường phân giác trong ta có

$$\begin{aligned}
& l_a l_b l_c \\
&= \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c} \cdot \frac{2ac \cos \frac{B}{2}}{a+c} \cdot \frac{2ab \cos \frac{C}{2}}{a+b} \\
&= \frac{8(abc)^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\
&= \frac{8(abc)^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{(a+b+c)(ab+bc+ca)abc}. \quad (*)
\end{aligned}$$

Theo bổ đề 1: a, b, c là ba nghiệm của phương trình

$$x^3 - 2px^2 + (p^2 + 4Rr - r^2)x - 4pRr = 0.$$

Ngoài ra theo các hệ thức trên ta có

$$\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{1}{4}(\sin A + \sin B + \sin C) = \frac{p}{4R}.$$

Thay vào (*) ta được:

$$l_a l_b l_c = \frac{8 \cdot 16 R r^2 p^2 \frac{p}{4R}}{2p(p^2 + 4Rr + r^2) - 4pRr} = \frac{16 R r^2 p^2}{p^2 + 2Rr + r^2}.$$

Suy ra đpcm.

Như vậy bài toán phụ trợ được giải xong.

Kết luận

Luận văn *Các bài toán về hệ thức lượng trong tam giác* đã thu được một số kết quả chính sau đây:

1. Hệ thống hóa và phân loại các bài toán về hệ thức lượng trong tam giác thường, tam giác vuông, tam giác cân và tam giác đều. Với mỗi dạng luận văn đưa ra ví dụ tiêu biểu đặc trưng cho phương pháp giải.

2. Luận văn cũng đưa ra bài toán về hệ thức lượng trong các tam giác đặc biệt khác như: Các yếu tố trong tam giác được cho dưới dạng một cấp số cộng, cấp số nhân; Các bài toán về hệ thức lượng trong hình học phẳng, hình học không gian.

3. Đặc biệt luận văn đã đưa ra gần 80 hệ thức lượng giác tính theo các đại lượng R, r, p và phương pháp chứng minh các hệ thức này theo định lý Viet về nghiệm của phương trình bậc ba. Đây là cái nhìn khá mới về hệ thức lượng trong tam giác.

Mặc dù đã hết sức cố gắng nhưng luận văn không tránh khỏi sai sót. Tác giả rất mong sự đóng góp ý kiến của thầy cô và các bạn để luận văn được hoàn thiện hơn. Tác giả xin chân thành cảm ơn!

Tài liệu tham khảo

- [1] Doãn Minh Cường (2004), *Giới thiệu đề thi tuyển sinh vào đại học*, NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội.
- [2] Trần Văn Hạo (2001), *Lượng giác*, NXB Giáo Dục.
- [3] Võ Đại Mau (2003), *Phương pháp giải toán lượng giác*, NXB Trẻ.
- [4] Trần Thành Minh, Trần Quang Nghĩa, Lâm Văn Triệu, Dương Quốc Tuấn (2000), *Giải toán lượng giác*, NXB Giáo Dục.
- [5] Trần Phương (2010), *Hệ thức lượng giác*, NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội.
- [6] Tạ Duy Phượng (2006), *Phương trình bậc ba và các hệ thức trong tam giác*, NXB Giáo Dục.
- [7] Nguyễn Thượng Võ (1998), *Tuyển tập 300 bài toán về hệ thức lượng trong tam giác*, NXB Trẻ.