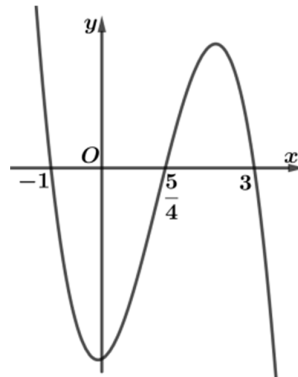


A. $m \leq 0$.**B.** $-2 \leq m \leq 0$.**C.** $-3 < m < -1$.**D.** $0 < m < 4$.

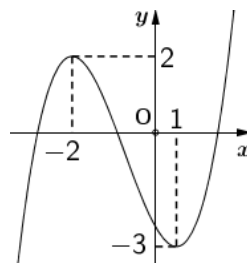
Câu 8: Cho hàm số $g(x) = \frac{2018}{h(x) - m^2 - m}$ với $h(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx$ ($m, n, p, q \in \mathbb{R}$). Hàm số $y = h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tìm các giá trị m nguyên để số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$ là 2.

A. 11.**B.** 10.**C.** 9.**D.** 20.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ:



Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = h(x) = \frac{6}{f^2(x) - 4}$.

A. 2.**B.** 4.**C.** 6.**D.** 5.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$, có bảng biến thiên như hình:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	1	5	$-\infty$	3

Tìm tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = h(x) = \frac{8}{f^2(x) - 6f(x) + 5}$.

A. 3.**B.** 4.**C.** 5.**D.** 6.

Câu 11: Cho $f(x)$ là hàm bậc 4 và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$									
	$-\infty$		1		-3		1		$-\infty$

Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x^2 - 2}{f^2(x) + 3f(x) - 4}$ có mấy đường tiệm cận đứng?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Câu 12: Cho $f(x)$ là hàm bậc 4 và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$	$-\infty$	1	-3	1	$-\infty$

Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x^4 - 2x^2}{f^2(x) + 2f(x) - 3}$ có mấy đường tiệm cận?

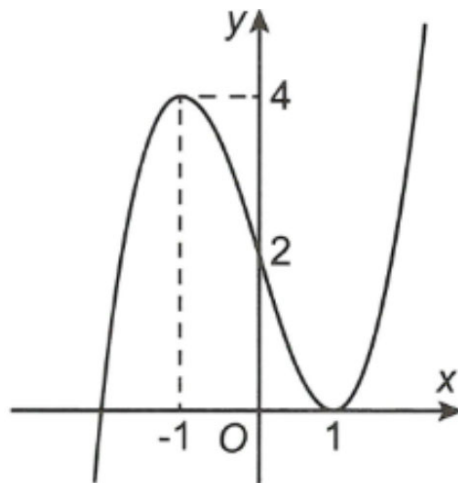
A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Câu 13: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như sau:



Đặt $g(x) = \frac{x^2 - x}{f^2(x) - f(x)}$. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 4.

B. 2.

C. 5.

D. 3.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số: $g(x) = \frac{14}{f\left(\frac{x^3}{3} + 3x\right) - 12}$ là:

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 3.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	1	-3	1

Tìm tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2020}{2020f(x) + 2021}$.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 16: Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x^3 - 3mx^2 + (2m^2+1)x - m}$ (C). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-10; 10)$ của tham số m để đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận là nhiều nhất?

- A. 20. B. 15. C. 16. D. 18.

Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x^3 - 3x^2 + (m+2)x - m}$. Tìm điều kiện của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?

- A. $m \leq 1$. B. $\begin{cases} m \leq 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$. C. $m < 1$. D. $\begin{cases} m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$.

Câu 18: Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x^2 - 2mx + 1}$. Tìm số các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 19: Đồ thị của hàm số $y = \frac{mx^3 - 2}{x^2 - 3x + 2}$ có hai tiệm cận đứng khi và chỉ khi?

- A. $m \neq 0$ và $m \neq 2$. B. $m \neq 1$ và $m \neq 2$. C. $m \neq 0$. D. $m \neq 2$ và $m \neq \frac{1}{4}$.

Câu 20: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x^2 - 2mx + 4}$ có đồ thị là (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C) có đúng 3 đường tiệm cận?

- A. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$. B. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$. C. $m > 2$. D. $\begin{cases} m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$.

Câu 21: Cho hàm số $y = \frac{12 + \sqrt{4x - x^2}}{\sqrt{x^2 - 6x + 2m}}$ có đồ thị (C_m) . Tìm tập S tất cả các giá trị của tham số thực m để (C_m) có đúng hai tiệm cận đứng.

- A. $S = [8; 9)$. B. $S = \left[4; \frac{9}{2}\right)$. C. $S = \left(4; \frac{9}{2}\right)$. D. $S = (0; 9]$.

Câu 22: Với giá trị nào của m , đồ thị hàm số $y = \frac{x+1 - \sqrt{x^2 + 3x}}{x^2 + (m+1)x - m - 2}$ có đúng hai đường tiệm cận?

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \\ m \neq -3 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \leq -2 \\ m \neq -3 \end{cases}$.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{\sqrt{x-m}-2}{x^2-3x+2}$ có đồ thị (C) . Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị (C) có đúng một tiệm cận đứng và một đường tiệm cận ngang. Số phần tử của tập S là:

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

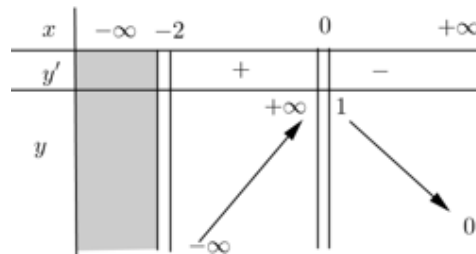
Câu 24: Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2-2x+m-1}-3|x|}{x-2}$ có đồ thị (C) . Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C) có đúng hai đường tiệm cận. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng?

- A. $\frac{31}{7}$. B. 25. C. $\frac{5}{9}$. D. $\frac{86}{5}$.

Câu 25: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{4x^2-2x-m}-x-1}$ có đúng bốn đường tiệm cận.

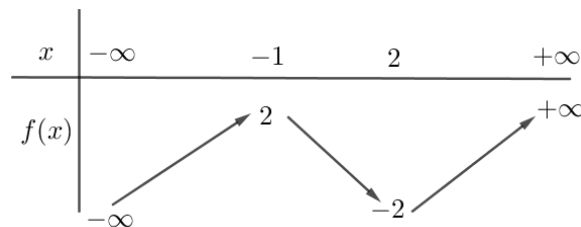
- A. $m \in \left[-\frac{7}{3}; 6\right] \setminus \{-2\}$. B. $m \in \left[-\frac{7}{3}; 6\right]$.
C. $m \in \left(-\frac{7}{3}; 6\right) \setminus \{-2\}$. D. $m \in \left(-\frac{7}{3}; 6\right] \setminus \{-2\}$.

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2f(x)+3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?



- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây:



Gọi tập S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để đồ thị hàm số

$y = \frac{\sqrt{x-2}}{f^2(x) - mf(x)}$ có đúng hai đường tiệm cận đứng. Số phần tử của tập S là:

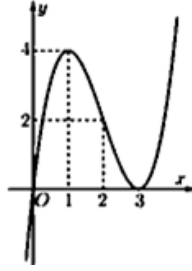
A. 9.

B. 12.

C. 13.

D. 8.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây:



Gọi tập S là tập chứa tất cả các giá trị tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x}{f(x)[f(2x - m) - 4]}$ có đúng ba đường tiệm cận đứng. Khẳng định nào sau đây là đúng:

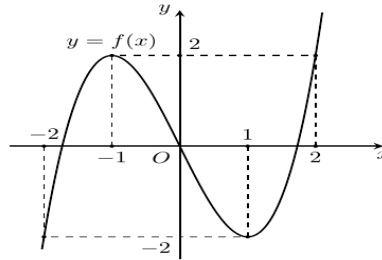
A. $(-\infty; 3) \subset S$.

B. $(-\infty; 2) \subset S$.

C. $S = \emptyset$.

D. $(6; 8) \subset S$.

Câu 29: Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Với giá trị nào của m thì hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{m-x}}{f^2(x) - 2f(x)}$ có 5 tiệm cận đứng?



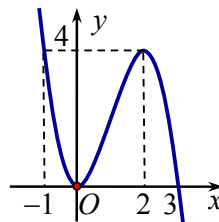
A. $m > 2$.

B. $m < 2$.

C. $m \leq 2$.

D. $m \geq 2$.

Câu 30: Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. có bao nhiêu giá trị của m để hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 2mx + m^2 + m + 1)\sqrt{x^2 - 3x}}{(x-4)[f^2(x) - 4f(x)]}$ có 3 tiệm cận đứng?



A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4

Câu 31: Cho hàm số $y = \frac{x-m}{2x+3} \left(m \neq -\frac{3}{2} \right)$ có đồ thị (C) . Giả sử $M(x_M; y_M)$ là 1 điểm bất kỳ thuộc (C) . Gọi A, B lần lượt là khoảng cách từ M tới các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của (C) . Biết diện tích ΔMAB bằng 1. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $m \in \left\{ \frac{5}{2}; -\frac{11}{2} \right\}$.

B. $m \in \left\{ -\frac{5}{2}; -\frac{11}{2} \right\}$.

C. $m \in \left\{ -\frac{5}{2}; \frac{11}{2} \right\}$.

D. $m \in \left\{ \frac{5}{2}; \frac{11}{2} \right\}$.

Câu 32: Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) . Giả sử $M(x_M; y_M)$ là điểm thuộc (C) thỏa mãn tổng khoảng cách từ M tới trục hoành và đường tiệm cận đứng của (C) đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $x_M + y_M$ bằng:

- A. 2. B. -2. C. 1. D. -1.

Câu 33: Cho hàm số $y = \frac{2mx+3}{x-m}$ có đồ thị (C) và I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C) . Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho tiếp tuyến tại điểm M trên đồ thị (C) cắt hai đường tiệm cận tại hai điểm A, B và tam giác IAB có diện tích bằng 64. Tổng các phần tử của tập hợp S là:

- A. $\sqrt{58}$. B. $2\sqrt{58}$. C. $-2\sqrt{58}$. D. 0.

Câu 34: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm trên đồ thị (C) có hoành độ dương sao cho tiếp tuyến tại M với (C) cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại hai điểm A, B thỏa mãn $IA^2 + IB^2 = 40$. Giá trị của biểu thức $P = x_0^2 + y_0^2 + x_0 y_0$ bằng:

- A. 8. B. 3. C. 5. D. 7.

Câu 35: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ có đồ thị là (C) . Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận và $M(x_0; y_0)$ là điểm nằm trên (C) với $x_0 > 0$. Biết tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại hai điểm P và Q sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác IPQ lớn nhất. Tính tổng $x_0 + y_0$.

- A. $x_0 + y_0 = 0$. B. $x_0 + y_0 = 2 + 2\sqrt{3}$. C. $x_0 + y_0 = 2$. D. $x_0 + y_0 = 2\sqrt{3}$.

Câu 36: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{2x-2}$ có đồ thị là (C) . Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận và M là điểm nằm trên (C) có hoành độ lớn hơn 1. Tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại hai điểm A và B . Hoành độ của điểm M thuộc khoảng nào sau đây để $P = IA + IB$ đạt giá trị nhỏ nhất?

- A. $(-4; 1)$. B. $(-\infty; -4)$. C. $(4; +\infty)$. D. $(1; 4)$.

Câu 37: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{3-x}$ có đồ thị (C) . Gọi $M(x_0; y_0)$ là một điểm thuộc (C) sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của (C) là nhỏ nhất. Tính $2x_0 - y_0$ biết $y_0 < 0$.

- A. $2x_0 - y_0 = 4$. B. $2x_0 - y_0 = 2$. C. $2x_0 - y_0 = 6$. D. $2x_0 - y_0 = 10$.

Câu 38: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+3}$ có đồ thị là (C) . Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận và $M(x_0; y_0)$ là một điểm thuộc (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của (C) lần lượt tại hai điểm A, B sao cho $IA^2 + IB^2 = 32$. Tìm tọa độ điểm M biết $y_0 > 0$.

- A. $(-5; 3)$. B. $\left(2; \frac{1}{5}\right)$. C. $\left(3; \frac{1}{3}\right)$. D. $(-1; -1)$.

Câu 39: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm M thuộc (C) sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm gấp 2 lần tích khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của (C) ?

- A. 0. B. 1. C. 4. D. 2.

Câu 40: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của (C) . Có bao nhiêu điểm trên (C) có hoành độ âm sao cho tam giác OMI có diện tích bằng $\frac{1}{2}$ biết O là gốc tọa độ?

- A. 0. B. 1. C. 4. D. 2.

II. BẢNG ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	A	A	A	D	D	A	B	D	B
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	C	C	A	C	B	D	D	D	A
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
B	C	C	D	B	C	B	D	D	B
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A	D	D	D	A	D	D	C	C	B

III. LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1-\sqrt{2x+1}}{x^2-x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là: $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \setminus \{0; 1\}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1-\sqrt{2x+1}}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} - \sqrt{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}}{1 - \frac{1}{x}} = 0.$$

Đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\text{Ta lại có: } \lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1-\sqrt{2x+1}}{x^2-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x+1-\sqrt{2x+1}}{x^2-x} = -\infty$$

Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} y = \lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} \frac{3x+1-\sqrt{2x+1}}{x^2-x} = -2$$

Đường thẳng $x=0$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận.

Câu 2: Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx + \sqrt{x^2 + 3} - 1}{\sqrt{x^2 + x}}$ có 2 đường tiệm cận đứng và 2 đường tiệm cận ngang tạo thành hình chữ nhật có diện tích bằng 2.

A. $m = -1$.

B. $m = 0$.

C. $m = 2$.

D. $m = 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{m - \sqrt{1^2 + \frac{3}{x^2}} - \frac{1}{x}}{-\sqrt{1^2 + \frac{1}{x}}} = 1 - m$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m + \sqrt{1^2 + \frac{3}{x^2}} - \frac{1}{x}}{\sqrt{1^2 + \frac{1}{x}}} = m + 1$$

Suy ra để đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang thì $m + 1 \neq 1 - m \Leftrightarrow m \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{mx + \sqrt{x^2 + 3} - 1}{\sqrt{x^2 + x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{mx + \sqrt{x^2 + 3} - 1}{\sqrt{x^2 + x}} = \begin{cases} +\infty & \text{khi } m < 1 \\ -\infty & \text{khi } m > 1 \end{cases}$$

Vậy khi $m \neq 0, m \neq 1$ thì đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang là $y = m + 1; y = 1 - m$ và

2 đường tiệm cận đứng là $x = 0; x = -1$. Để 2 đường tiệm cận đứng và 2 đường tiệm cận ngang

tạo thành hình chữ nhật có diện tích bằng 2 thì $1.2|m| = 2 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Đối chiếu điều kiện $m = -1$.

Câu 3: Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-10; 10)$ để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x(4x-m)} - 2}{x-2}$ có đúng ba đường tiệm cận?

A. 17.

B. 11.

C. 0.

D. 18.

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x(4x-m) \geq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$\text{+) Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\left(\sqrt{4 - \frac{m}{x}} + \frac{2}{x}\right)}{1 - \frac{2}{x}} = -2 \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4 - \frac{m}{x}} - \frac{2}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = 2.$$

Suy ra, $\forall m \in \mathbb{R}$, đồ thị hàm số luôn có 2 đường tiệm cận ngang là $y = \pm 2$.

$$+) \text{ Mà } y = \frac{\sqrt{x(4x-m)}-2}{x-2} = \frac{4x^2-mx-2}{(x-2)(\sqrt{x(4x-m)}+2)}, \text{ đặt } g(x) = 4x^2-mx-2.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x(4x-m)}-1}{x-2}$ có duy nhất 1 đường tiệm cận đứng là đường thẳng

$$x=2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2(4 \cdot 2 - m) \geq 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 8 \\ m \neq 7 \end{cases} \Rightarrow m \in \{-9; -8; \dots; 6; 8\}.$$

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2020 + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2 - mx - 2m}}$ có đúng hai tiệm cận đứng?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Đồ thị hàm số có đúng hai tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $x^2 - mx - 2m = 0$ (*) có 2 nghiệm phân biệt lớn hơn hoặc bằng -1 .

$$\text{Ta có } x^2 - mx - 2m = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+2} = m.$$

$$\text{Xét hàm số } y = f(x) = \frac{x^2}{x+2} \text{ với } x \in [-1; +\infty). \text{ Có } y' = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 0 \end{cases}.$$

x	-1	0	$+\infty$
y'		-	+
y	1	0	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt lớn hơn hoặc bằng -1 khi và chỉ khi $m \in (0; 1] \Rightarrow m = 1$.

Câu 5: Gọi m, n lần lượt là số đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$$y = \frac{x(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x-1})}{x^2-4}. \text{ Khi đó } m+n \text{ bằng:}$$

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq \sqrt{3} \\ x \neq 2 \end{cases}$$

+ Tiệm cận ngang:

$$\begin{aligned} \frac{x(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x-1})}{x^2-4} &= \frac{x|x|\left(\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x}\right)} = \frac{x^2\left(\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x}\right)} \quad (\text{do } x \geq \sqrt{3}) \\ &= \frac{\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{4}{x}} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} y &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{4}{x}} = 1 \end{aligned}$$

Suy ra đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y = 1$

+ Tiệm cận đứng:

Điều kiện cần: Xét phương trình $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Điều kiện đủ: Đặt $f(x) = x(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x-1})$

Xét $x = 2$, ta có $f(2) = 0$ nên ta sẽ đi tìm bậc của $(x-2)$ của $f(x)$

$$\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x-1} = \frac{(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x^2-3}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x^2-3}+\sqrt{x-1}} = \frac{x^2-x-2}{g(x)} = (x-2)h(x)$$

Suy ra $y = \frac{(x-2)h(x)}{(x-2)(x+2)} = \frac{h(x)}{x+2}$, suy ra $x = 2$ không phải là tiệm cận đứng

Xét $x = -2$, ta có $f(-2)$ không tồn tại hay $x = -2$ không phải là tiệm cận đứng.

Vậy $m = 1, n = 0 \Rightarrow m + n = 1$.

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{-x^2+2019x+2020}-\sqrt{4038}}{x-m}$ có tiệm cận đứng?

A. 1.

B. 2.

C. 2019.

D. 2020.

Lời giải

$\sqrt{-x^2+2019x+2020}$ xác định khi $-x^2+2019x+2020 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2020$

Đặt $f(x) = \sqrt{-x^2+2019x+2020} - \sqrt{4038}$

Xét $x - m = 0 \Leftrightarrow x = m$.

Đồ thị nếu có tiệm cận đứng chỉ có thể là $x = m$, khi đó điều kiện là:

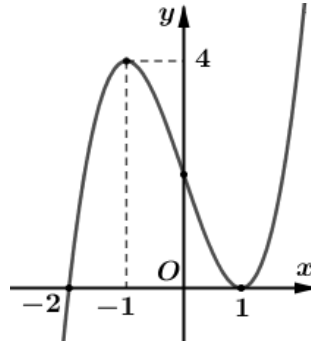
$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 2019 \\ f(m) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in [-1; 2019] \\ \sqrt{-m^2+2019m+2020} \neq 24\sqrt{7} (*) \end{cases} \quad (1)$$

Ta có (*) $\Leftrightarrow -m^2 + 2019m - 2018 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2018 \end{cases} \quad (2)$

Từ (1), (2) $\Rightarrow m \in [-1; 2020] \setminus \{1; 2019\}$

Vậy có $2022 - 2 = 2020$ số nguyên m thỏa mãn bài toán.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tìm m để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(x^2 - 3) - m}$ có đúng 6 tiệm cận đứng?

A. $m \leq 0$.

B. $-2 \leq m \leq 0$.

C. $-3 < m < -1$.

D. $0 < m < 4$.

Lời giải

Xét hàm số $h(x) = f(x^2 - 3) \Rightarrow h'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 3)$

$$\Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = -1 \\ x^2 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

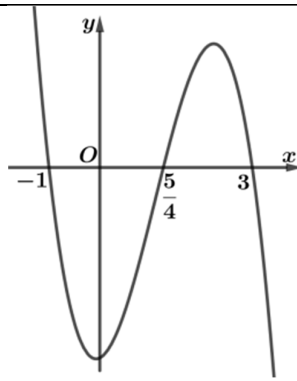
Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$
$2x$	$-$	$ $	$-$	$-$	$ $	$+$	$+$
$x^2 - 3$	$+\infty$	1	-1	-3	-1	1	$+\infty$
$f'(x^2 - 3)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$	0	4	0	4	0	$+\infty$

$f(-3) < 0$

Từ bảng biến thiên ta có đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(x^2 - 3) - m}$ có đúng 6 tiệm cận đứng $\Leftrightarrow h(x) = m$ có 6 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < m < 4$.

Câu 8: Cho hàm số $g(x) = \frac{2018}{h(x) - m^2 - m}$ với $h(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx$ ($m, n, p, q \in \mathbb{R}$). Hàm số $y = h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tìm các giá trị m nguyên để số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$ là 2.

A. 11.

B. 10.

C. 9.

D. 20.

Lời giải

Ta có $h'(x) = 4mx^3 + 3nx^2 + 2px + q$. Từ đồ thị ta có $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{4} \\ x = 3 \end{cases}$ và $(m < 0)$.

Suy ra $h'(x) = 4m(x+1)\left(x - \frac{5}{4}\right)(x-3) = 4mx^3 - 13mx^2 - 2mx + 15m$.

Suy ra $h(x) = mx^4 - \frac{13}{3}mx^3 - mx^2 + 15mx + C$. Từ đề bài ta có $C = 0$.

Vậy $h(x) = mx^4 - \frac{13}{3}mx^3 - mx^2 + 15mx$.

Xét $h(x) - m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m = x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x - 1$.

Xét hàm số $f(x) = x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x - 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 13x^2 - 2x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{4} \\ x = 3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

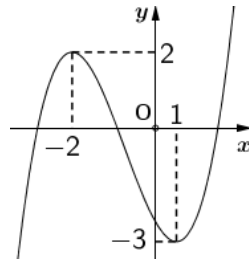
x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{4}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$				$\frac{7807}{768}$				$+\infty$
			$-\frac{35}{3}$				-1		

Để đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $h(x) - m^2 - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $m = x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x - 1$ có 2 nghiệm phân biệt.

Từ bảng biến thiên kết hợp thêm điều kiện $m < 0$ ta có $-\frac{35}{3} < m < -1$.

Do m nguyên nên $m \in \{-11; -10; \dots; -2\}$. Vậy có 10 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ:



Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = h(x) = \frac{6}{f^2(x) - 4}$.

A. 2.

B. 4.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Xét hàm số $y = h(x) = \frac{6}{f^2(x) - 4}$.

$$f^2(x) - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 \\ f(x) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = a \in (3; +\infty) \\ x = b \in (-\infty; -2) \\ x = c \in (-1; 1) \\ x = d \in (1; 3) \end{cases}$$

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow (-2)^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{6}{f^2(x) - 4} = -\infty; \lim_{x \rightarrow a^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{6}{f^2(x) - 4} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow b^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} \frac{6}{f^2(x) - 4} = -\infty; \lim_{x \rightarrow c^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{6}{f^2(x) - 4} = +\infty; \lim_{x \rightarrow d^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow d^+} \frac{6}{f^2(x) - 4} = -\infty.$$

Suy ra đồ thị hàm số $y = h(x)$ có tất cả 5 tiệm cận đứng $x = -2; x = a; x = b; x = c; x = d$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$, có bảng biến thiên như hình:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	1	5	$-\infty$	3

Tìm tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = h(x) = \frac{8}{f^2(x) - 6f(x) + 5}$.

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Xét hàm số $y = h(x) = \frac{8}{f^2(x) - 6f(x) + 5}$.

a/ Tìm tiệm cận đứng:

$$f^2(x) - 6f(x) + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 5 \\ f(x) = 1 \end{cases}.$$

Có $f(x) = 5 \Leftrightarrow x = 0$.

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (0; 1) \\ x = b \in (1; +\infty) \end{cases}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{8}{f^2(x) - 6f(x) + 5} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{8}{f^2(x) - 6f(x) + 5} = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow b^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} \frac{8}{f^2(x) - 6f(x) + 5} = -\infty$$

$\Rightarrow x = 0; x = a; x = b$ là các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = h(x)$.

b/ Tìm tiệm cận ngang:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8}{f^2(x) - 6f(x) + 5} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{f^2(x) - 6f(x) + 5} = -2 \Rightarrow y = -2 \text{ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số } y = h(x).$$

Vậy đồ thị hàm số $y = h(x)$ có tất cả 4 tiệm cận.

Câu 11: Cho $f(x)$ là hàm bậc 4 và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$		1		1	

Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x^2 - 2}{f^2(x) + 3f(x) - 4}$ có mấy đường tiệm cận đứng?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Để dàng chứng minh được nếu $x = x_0$ với $x_0 \neq \pm\sqrt{2}$ là nghiệm đơn của mẫu hoặc $x = x_0$ là nghiệm kép của mẫu thì đường thẳng $x = x_0$ là đường TCD của đồ thị hàm số $g(x)$.

Ta có $f^2(x) + 3f(x) - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = -4 \end{cases}$

Dựa vào BBT ta được PT $f(x) = 1$ có hai nghiệm kép là $x = -\sqrt{2}$ và $x = \sqrt{2}$

và PT $f(x) = -4$ có hai nghiệm đơn là $x = a < -\sqrt{2}$ và $x = b > \sqrt{2}$.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 4 đường TCD là $x = a$, $x = b$, $x = \sqrt{2}$ và $x = -\sqrt{2}$.

Câu 12: Cho $f(x)$ là hàm bậc 4 và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$	$-\infty$	1	-3	1	$-\infty$

Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x^4 - 2x^2}{f^2(x) + 2f(x) - 3}$ có mấy đường tiệm cận?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Ta có $x^4 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$, trong đó $x = 0$ là nghiệm kép.

Để dàng chứng minh được nếu $x = x_0$ với $x_0 \notin \{0; \pm\sqrt{2}\}$ là nghiệm đơn của mẫu hoặc $x = x_0$ là nghiệm kép khác 0 của mẫu thì đường thẳng $x = x_0$ là đường TCD của đồ thị hàm số $g(x)$. Nếu $x = 0$ là nghiệm kép bội hai của mẫu thì đường thẳng $x = 0$ không là TCD của đồ thị hàm số $g(x)$.

Ta có $f^2(x) + 2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = -3 \end{cases}$

Dựa vào BBT ta được PT $f(x) = 1$ có hai nghiệm kép là $x = -\sqrt{2}$ và $x = \sqrt{2}$

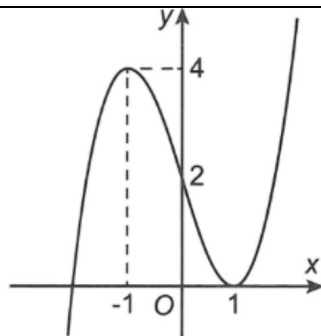
và PT $f(x) = -3$ có hai nghiệm đơn là $x = a < -\sqrt{2}$ và $x = b > \sqrt{2}$ và một nghiệm kép $x = 0$.

Khi đó đồ thị hàm số $g(x)$ có 4 đường TCD là $x = a$, $x = b$, $x = \sqrt{2}$ và $x = -\sqrt{2}$.

Mặt khác, bậc của tử là bậc 4 và bậc của mẫu là bậc 8 nên dễ tính được $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$. Khi đó đồ thị hàm số $g(x)$ có đường TCN là $y = 0$.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 5 đường tiệm cận.

Câu 13: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như sau:



Đặt $g(x) = \frac{x^2 - x}{f^2(x) - f(x)}$. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 4.

B. 2.

C. 5.

D. 3.

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } f^2(x) - f(x) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \neq 0 \\ f(x) \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{Xét } f^2(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 1 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta có $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x = x_1 < 0$ và $x = 1$ (nghiệm kép).

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_2 \ (x_1 < x_2 < -1) \\ x = x_3 \ (0 < x_3 < 1) \\ x = x_4 \ (x_4 > 1) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } f^2(x) - f(x) = f(x)[f(x) - 1] = a^2(x - x_1)(x - 1)^2(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x^2 - x}{f^2(x) - f(x)} \\ &= \frac{x(x-1)}{a^2(x-x_1)(x-1)^2(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)} \\ &= \frac{x}{a^2(x-x_1)(x-1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)} \end{aligned}$$

Vậy đồ thị hàm số có 5 tiệm cận đứng.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số: $g(x) = \frac{14}{f\left(\frac{x^3}{3} + 3x\right) - 12}$ là:

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Đặt $u = \frac{x^3}{3} + 3x$, ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{3} + 3x\right) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{3} + 3x\right) = -\infty$.

Mặt khác ta xét: $y = \frac{x^3}{3} + 3x$ có $y' = x^2 + 3 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên với mọi $u \in \mathbb{R}$ thì phương trình $\frac{x^3}{3} + 3x = u$ có duy nhất một nghiệm x .

Xét $f\left(\frac{x^3}{3} + 3x\right) - 12 = 0 \Rightarrow f\left(\frac{x^3}{3} + 3x\right) = 12$.

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có duy nhất một nghiệm nên đồ thị hàm số

$g(x) = \frac{14}{f\left(\frac{x^3}{3} + 3x\right) - 12}$ có một tiệm cận đứng.

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{14}{f\left(\frac{x^3}{3} + 3x\right) - 12} \right] = \lim_{u \rightarrow -\infty} \left[\frac{14}{f(u) - 12} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{14}{f\left(\frac{x^3}{3} + 3x\right) - 12} \right] = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[\frac{14}{f(u) - 12} \right] = 0$$

Vậy đồ thị hàm số $g(x) = \frac{14}{f\left(\frac{x^3}{3} + 3x\right) - 12}$ có duy nhất một tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'		0	
	–		+
y	1	–3	1

Tìm tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2020}{2020f(x) + 2021}$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2020}{2020f(x) + 2021} = \frac{2020}{4041}$. Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{2020}{2020f(x) + 2021}$ có 1 đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{2020}{4041}$.

Ta có $2020f(x) + 2021 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{2021}{2020}$ có hai nghiệm nghiệm vì đường thẳng $d: y = -\frac{2021}{2020}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại hai điểm phân biệt. Suy ra đồ thị hàm số $y = \frac{2020}{2020f(x) + 2021}$ có hai tiệm cận đứng.

$\Rightarrow$ tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2020}{2020f(x) + 2021}$ là 3.

Câu 16: Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m}$ (C). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-10; 10)$ của tham số m để đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận là nhiều nhất?

A. 20.

B. 15.

C. 16.

D. 18.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m} = 0$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-3}{x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m} = 0$ nên đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang là $y = 0$.

Do đó (C) có tổng số đường tiệm cận là nhiều nhất khi (C) có 3 đường tiệm cận đứng nên phương trình $x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m = 0$ (1) có 3 nghiệm phân biệt $x \neq 3$.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow (x-m)(x^2 - 2mx + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ g(x) = x^2 - 2mx + 1 = 0 \end{cases}$ (2)

Suy ra $m \neq 3$ và phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ \Delta > 0 \\ g(3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m^2 - 1 > 0 \\ 10 - 6m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases} \\ m \neq \frac{5}{3} \end{cases}$$

Mà m nguyên thuộc khoảng $(-10; 10)$ nên $m \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; 2; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x^3 - 3x^2 + (m+2)x - m}$. Tìm điều kiện của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?

- A. $m \leq 1$. B. $\begin{cases} m \leq 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$. C. $m < 1$. D. $\begin{cases} m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$.

Lời giải

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^3 - 3x^2 + (m+2)x - m}$.

$$\text{Ta có } y = \frac{x-2}{x^3 - 3x^2 + (m+2)x - m} = \frac{x-2}{(x-1)(x^2 - 2x + m)}$$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{x^3 - 3x^2 + (m+2)x - m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{m+2}{x^2} - \frac{m}{x^3}} = 0 \text{ nên đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang}$$

là $y = 0$.

Do đó (C) có 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi (C) có 3 đường tiệm cận đứng

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x + m) = 0 \text{ có 3 nghiệm phân biệt khác } 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + m = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt khác } 1; 2.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - m > 0 \\ 1^2 - 2 \cdot 1 + m \neq 0 \\ 2^2 - 2 \cdot 2 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \neq 1 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

Câu 18: Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x^2 - 2mx + 1}$. Tìm số các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x^2 - 2mx + 1}$. (C) có 1 đường tiệm cận đứng:

$\Leftrightarrow$ Phương trình $x^2 - 2mx + 1 = 0$ có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt (trong đó có một nghiệm bằng -3)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 1 = 0 \\ \Delta' = m^2 - 1 > 0 \\ (-3)^2 - 2m \cdot (-3) + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = -\frac{5}{3} \end{cases} \\ m = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Câu 19: Đồ thị của hàm số $y = \frac{mx^3 - 2}{x^2 - 3x + 2}$ có hai tiệm cận đứng khi và chỉ khi?

- A. $m \neq 0$ và $m \neq 2$. B. $m \neq 1$ và $m \neq 2$. C. $m \neq 0$. D. $m \neq 2$ và $m \neq \frac{1}{4}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \neq 1; x \neq 2$

Để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^3 - 2}{x^2 - 3x + 2}$ có hai tiệm cận đứng thì $x = 1$ và $x = 2$ không phải là nghiệm của phương trình $mx^3 - 2 = 0$.

Đặt $g(x) = mx^3 - 2$

Khi đó: YCBT $\Leftrightarrow \begin{cases} g(1) \neq 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 \neq 0 \\ 8m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq \frac{1}{4} \end{cases}$.

Câu 20: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x^2 - 2mx + 4}$ có đồ thị là (C) . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C) có đúng 3 đường tiệm cận?

A. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$

B. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$

C. $m > 2$.

D. $\begin{cases} m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện xác định: $x^2 - 2mx + 4 \neq 0$

Do $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ nên đồ thị hàm số luôn có tiệm cận ngang $y = 0$

Để đồ thị hàm số có đủ 3 tiệm cận thì $g(x) = x^2 - 2mx + 4$ có hai nghiệm phân biệt khác -1 .

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 4 > 0 \\ (-1)^2 - 2m(-1) + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$

Câu 21: Cho hàm số $y = \frac{12 + \sqrt{4x - x^2}}{\sqrt{x^2 - 6x + 2m}}$ có đồ thị (C_m) . Tìm tập S tất cả các giá trị của tham số thực m để (C_m) có đúng hai tiệm cận đứng.

A. $S = [8; 9)$.

B. $S = \left[4; \frac{9}{2}\right)$.

C. $S = \left(4; \frac{9}{2}\right)$.

D. $S = (0; 9]$.

Lời giải

ĐKXD: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ x^2 - 6x + 2m > 0 \end{cases}$

Ta có $12 + \sqrt{4x - x^2} \neq 0 \forall x$ nên để (C_m) có hai tiệm cận đứng thì phương trình $\sqrt{x^2 - 6x + 2m} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 2m = 0 (*)$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[0; 4]$.

Cách 1.

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì $\Delta' = 9 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{9}{2}$

Gọi 2 nghiệm phân biệt của (*) là $x_1 < x_2$ ta có $0 \leq x_1 < x_2 \leq 4$.

Theo định lí Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 \cdot x_2 = 2m \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{cases} x_1 x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 0 \\ (x_1 - 4)(x_2 - 4) \geq 0 \\ (x_1 - 4) + (x_2 - 4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 x_2 - 4(x_1 + x_2) + 16 \geq 0 \\ (x_1 + x_2) - 8 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \geq 0 \\ 6 \geq 0 \\ 2m - 24 + 16 \geq 0 \\ 6 - 8 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ 2m - 8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 4. \text{ Kết}$$

hợp nghiệm ta có $4 \leq m < \frac{9}{2}$.

Cách 2. $x^2 - 6x + 2m = 0 \Leftrightarrow 2m = -x^2 + 6x$

Xét hàm số $f(x) = -x^2 + 6x$ trên đoạn $[0; 4]$

$$\Rightarrow f'(x) = -2x + 6$$

$$\text{Cho } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Bảng biến thiên

x	0	3	4	
$f'(x)$		+	0	–
$f(x)$	0	9	8	

Phương trình có hai nghiệm phân biệt thuộc $[0; 4] \Leftrightarrow 8 \leq 2m < 9 \Leftrightarrow 4 \leq m < \frac{9}{2}$

Câu 22: Với giá trị nào của m , đồ thị hàm số $y = \frac{x+1-\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2}$ có đúng hai đường tiệm cận?

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \\ m \neq -3 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \leq -2 \\ m \neq -3 \end{cases}$.

Lời giải

$$y = \frac{x+1-\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2}. \text{ Hàm số xác định khi: } \begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq -m-2 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } y = \frac{x+1-\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2} = \frac{-x+1}{(x-1)(x+m+2)(x+1+\sqrt{x^2+3x})} = \frac{-1}{(x+m+2)(x+1+\sqrt{x^2+3x})}.$$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang.

Hàm số có hai tiệm cận khi có một tiệm cận đứng $\Leftrightarrow \begin{cases} -m-2 \leq -3 \\ -m-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{cases}$.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{\sqrt{x-m}-2}{x^2-3x+2}$ có đồ thị (C) . Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị (C) có đúng một tiệm cận đứng và một đường tiệm cận ngang. Số phần tử của tập S là

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

$$y = f(x) = \frac{\sqrt{x-m}-2}{x^2-3x+2} = \frac{x-m-4}{(x-1)(x-2)(\sqrt{x-m}+4)}$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq m \\ x \neq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y = 0$ do $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$

Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 1-m-4=0 \\ 2 \geq m \\ 2-m-4=0 \\ 1 \geq m \\ 2 \geq m \\ 1 < m \\ 2-m-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = -2 \\ 1 < m \leq 2 \end{cases} \text{ mà } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = -2 \\ m = 2 \end{cases}$$

Câu 24: Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2-2x+m-1}-3|x|}{x-2}$ có đồ thị (C) . Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C) có đúng hai đường tiệm cận. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. $\frac{31}{7}$.

B. 25.

C. $\frac{5}{9}$.

D. $\frac{86}{5}$.

Lời giải

Xét $m < 0$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang nên tối đa chỉ có một đường TCD.

Xét $m = 0$ thì đồ thị hàm số chỉ có duy nhất một tiệm cận ngang $y = 3$.

Xét $m > 0$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{mx^2-2x+m-1}-3x}{x-2} = \sqrt{m}-3, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{mx^2-2x+m-1}+3x}{x-2} = -\sqrt{m}+3$$

Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng thì $\sqrt{m \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + m - 1} - 3 \cdot |2| = 0 \Leftrightarrow m = \frac{41}{5}$.

Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang thì $\sqrt{m} - 3 = -\sqrt{m} + 3 \Leftrightarrow m = 9$.

Vậy với $m = \frac{41}{5}$ thì đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang và với $m = 9$ thì đồ thị hàm số đường tiệm cận ngang và một đường tiệm cận đứng.

Nên $S = \left\{ \frac{41}{5}; 9 \right\}$ suy ra tổng các phần tử của tập S bằng $\frac{86}{5}$.

Câu 25: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{4x^2-2x-m}-x-1}$ có đúng bốn đường tiệm cận.

A. $m \in \left[-\frac{7}{3}; 6 \right] \setminus \{-2\}$.

B. $m \in \left[-\frac{7}{3}; 6 \right]$.

C. $m \in \left(-\frac{7}{3}; 6 \right) \setminus \{-2\}$.

D. $m \in \left(-\frac{7}{3}; 6 \right] \setminus \{-2\}$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\frac{1}{3}$ suy ra đồ thị hàm số có đường hai tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = -\frac{1}{3}$.

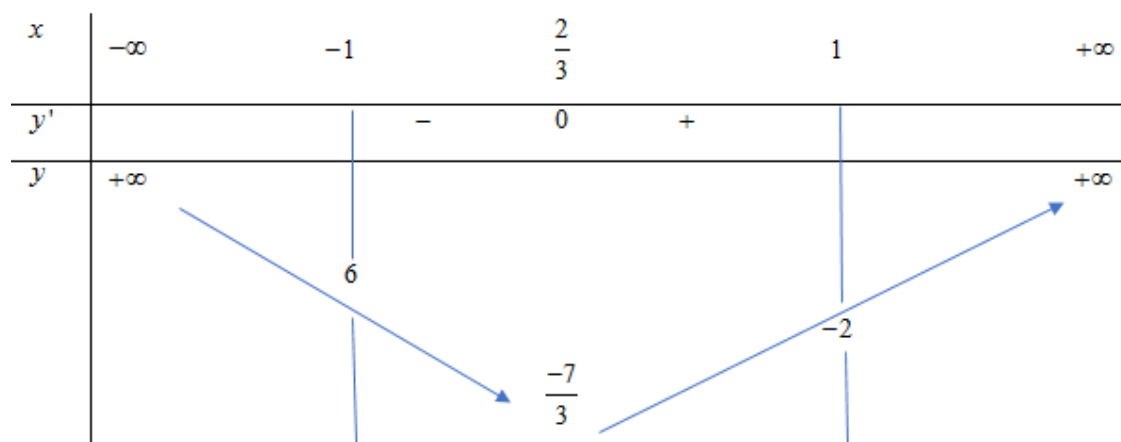
Để đồ thị có đúng bốn đường tiệm cận thì phương trình $\sqrt{4x^2-2x-m}-x-1=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\text{Ta có } \sqrt{4x^2-2x-m}-x-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2-2x-m}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 3x^2-4x-1=m \end{cases} \quad (1)$$

Yêu cầu bài toán tương đương phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x \geq -1$ và $x \neq 1$.

Xét hàm số $y = 3x^2 - 4x - 1$ với $x \geq -1$ và $x \neq 1$.

Bảng biến thiên:

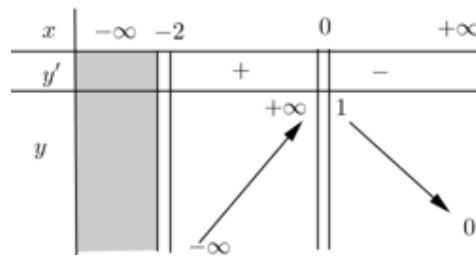


Dựa vào bảng biến thiên phương trình $3x^2 - 4x - 1 = m$ với $x \geq -1$ và $x \neq 1$ có hai nghiệm thì

$$m \in \left(-\frac{7}{3}; 6 \right] \setminus \{-2\}.$$

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị của hàm số

$$y = \frac{1}{2f(x)+3} \text{ có bao nhiêu đường tiệm cận?}$$



A. 1.

B. 3.

C. 2.

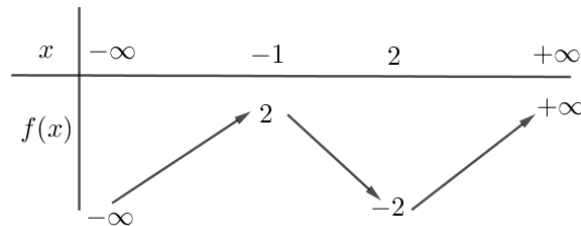
D. 0.

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2f(x)+3} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}$ là một tiệm cận ngang.

Ta có: $2f(x)+3=0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{3}{2}$. Căn cứ vào bảng biến thiên đồ thị $y = f(x)$, $y = -\frac{3}{2}$ cắt nhau tại một điểm nên đồ thị có một tiệm cận đứng.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây



Gọi tập S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để đồ thị hàm số

$y = \frac{\sqrt{x-2}}{f^2(x)-mf(x)}$ có đúng hai đường tiệm cận đứng. Số phần tử của tập S là:

A. 9.

B. 12.

C. 13.

D. 8.

Lời giải

Xét hàm $y = g(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{f^2(x)-mf(x)}$ với $x \geq 2$ (1).

Khi đó $f^2(x)-mf(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=m \\ f(x)=0 \end{cases}$

Phương trình $f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=a & (a < -1) \\ x=b & (-1 < b < 2) \\ x=c & (c > 2, c \neq n) \end{cases}$

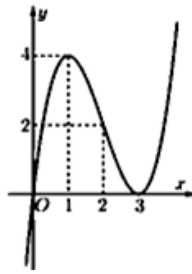
Với $x=a$, $x=b$ loại vì không thỏa điều kiện (1).

Với $x=c$, $\lim_{x \rightarrow c^+} g(x) = -\infty$ nên đường $x=c$ là một tiệm cận đứng của đồ thị $g(x)$.

Đồ thị $g(x)$ có hai đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow f(x)=m$ có một nghiệm $x \geq 2$ và $x \neq c$

Dựa vào BTT của $y = f(x)$, $f(x)=m$ có một nghiệm $x \geq 2$ và $x \neq c \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ m \neq 0 \end{cases}$.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



Gọi tập S là tập chứa tất cả các giá trị tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x}{f(x)[f(2x-m)-4]}$ có đúng ba đường tiệm cận đứng. Khẳng định nào sau đây là đúng:

A. $(-\infty; 3) \subset S$.

B. $(-\infty; 2) \subset S$.

C. $S = \emptyset$.

D. $(6; 8) \subset S$.

Lời giải

$$\text{Xét hàm } y = g(x) = \frac{x^2 - 3x}{f(x)[f(2x-m)-4]} = \frac{x(x-3)}{f(x)[f(2x-m)-4]}$$

$$\text{Khi đó } f(x)[f(2x-m)-4] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(2x-m)-4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Xét } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Với $x_1 = 0$ là nghiệm đơn nên $x = 0$ không là tiệm cận đứng của đồ thị $y = g(x)$.

Với $x_2 = 3$ là nghiệm kép nên $x = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị $y = g(x)$.

$$\text{Xét } f(2x-m)-4 = 0 \Leftrightarrow f(2x-m) = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-m=1 \\ 2x-m=c \quad (c > 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{1+m}{2} \\ x_4 = \frac{c+m}{2} \end{cases}$$

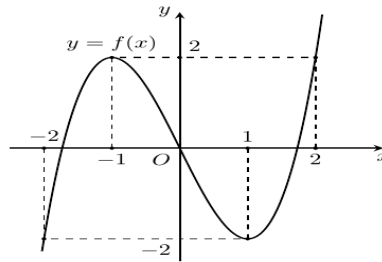
Với $x_3 = \frac{1+m}{2}$ là nghiệm kép nên $x = \frac{1+m}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị $y = g(x)$.

Đồ thị $y = g(x)$ có ba đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow x = \frac{c+m}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị $y = g(x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{c+m}{2} \neq 0 \\ \frac{c+m}{2} \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -c \\ m \neq 6-c \end{cases} \quad (c > 3).$$

Câu 29: Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Với giá trị nào của m thì

hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{m-x}}{f^2(x)-2f(x)}$ có 5 tiệm cận đứng?



A. $m > 2$.

B. $m < 2$.

C. $m \leq 2$.

D. $m \geq 2$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{m-x}}{f^2(x) - 2f(x)}$

Biểu thức $\sqrt{m-x}$ xác định khi $m-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq m$ (1)

Ta có

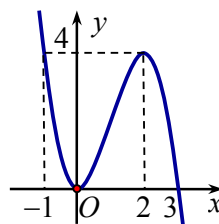
$$f^2(x) - 2f(x) = 0 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (-2; -1) \\ x = 0 \\ x = x_2 \in (1; 2) \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Hàm số có 5 tiệm cận đứng khi phương trình (2) có 5 nghiệm thỏa mãn điều kiện của (1) $\Leftrightarrow m \geq 2$

Câu 30: Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. có bao nhiêu giá trị của m

để hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 2mx + m^2 + m + 1)\sqrt{x^2 - 3x}}{(x-4)[f^2(x) - 4f(x)]}$ có 3 tiệm cận đứng?



A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 2mx + m^2 + m + 1)\sqrt{x^2 - 3x}}{(x-4)[f^2(x) - 4f(x)]}$

Biểu thức $\sqrt{x^2 - 3x}$ có điều kiện là: $x^2 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$

Ta có

$$(x-4)[f^2(x)-4f(x)]=0(1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4=0 \\ f^2(x)-4f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ f(x)=0 \\ f(x)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=0 \\ x=3 \\ x=-1 \\ x=2 \text{ (Loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=3 \\ x=-1 \\ x=0 \end{cases}$$

Đặt $h(x) = x^2 - 3mx + m^2 + m + 1$. Nếu $h(x)$ không có nghiệm thuộc $\{-1; 0; 3; 4\}$ thì $g(x)$ có 4 tiệm cận đứng. Xét các trường hợp sau

Trường hợp 1: $x = 4$ là nghiệm của $h(x) \Rightarrow m^2 - 7m + 17 = 0$ (vô nghiệm)

Trường hợp 2: $x = 3$ là nghiệm của $h(x) \Rightarrow m^2 - 5m + 10 = 0$ (vô nghiệm)

Trường hợp 3: $x = -1$ là nghiệm của $h(x) \Rightarrow m^2 + 3m + 2 = 0$

$$\begin{cases} m = -1 \\ m = -2 \end{cases}$$

Trường hợp 4: $x = 0$ là nghiệm của $h(x) \Rightarrow m^2 + m + 1 = 0$ (vô nghiệm)

Như vậy khi $\begin{cases} m = -1 \\ m = -2 \end{cases}$ thì hàm số đã cho có 3 tiệm cận đứng.

Câu 31: Cho hàm số $y = \frac{x-m}{2x+3} \left(m \neq -\frac{3}{2} \right)$ có đồ thị (C) . Giả sử $M(x_M; y_M)$ là 1 điểm bất kỳ thuộc (C) . Gọi A, B lần lượt là khoảng cách từ M tới các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của (C) . Biết diện tích ΔMAB bằng 1. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $m \in \left\{ \frac{5}{2}; -\frac{11}{2} \right\}$. **B.** $m \in \left\{ -\frac{5}{2}; -\frac{11}{2} \right\}$. **C.** $m \in \left\{ -\frac{5}{2}; \frac{11}{2} \right\}$. **D.** $m \in \left\{ \frac{5}{2}; \frac{11}{2} \right\}$.

Lời giải

Với $m \neq -\frac{3}{2}$, đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng là $x = -\frac{3}{2}$ và tiệm cận ngang $y = \frac{1}{2}$.

Khoảng cách từ M tới đường tiệm cận đứng: $d_1 = \left| x_M + \frac{3}{2} \right|$.

Khoảng cách từ M tới đường tiệm cận ngang: $d_2 = \left| \frac{x_M - m}{2x_M + 3} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{-2m - 3}{2(2x_M + 3)} \right| = \frac{|2m + 3|}{2|2x_M + 3|}$.

Từ giả thiết, ΔMAB vuông tại M nên $S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2} MA \cdot MB = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 = 1 \Rightarrow d_1 d_2 = 2$

$$\text{Do đó } \left| x_M + \frac{3}{2} \right| \cdot \frac{|2m + 3|}{2|2x_M + 3|} = 2 \Leftrightarrow |2m + 3| = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 3 = 8 \\ 2m + 3 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{5}{2} \\ m = -\frac{11}{2} \end{cases}$$

Giả sử $M\left(x_0; \frac{2mx_0 + 3}{x_0 - m}\right) \in (C)$

Phương trình tiếp tuyến Δ với (C) tại M là $y = -\frac{2m^2 + 3}{(x_0 - m)^2}(x - x_0) + \frac{2mx_0 + 3}{x_0 - m}$.

Tiếp tuyến cắt TCD $x = m$ tại $A\left(m; \frac{2mx_0 + 2m^2 + 6}{x_0 - m}\right)$, cắt tiệm cận ngang tại $B(2x_0 - m; 2m)$

Ta có $IA = \left|\frac{4m^2 + 6}{x_0 - m}\right|$ và $IB = 2|x_0 - m|$.

Diện tích tam giác IAB là

$$S_{IAB} = 64 \Leftrightarrow \frac{1}{2}IA \cdot IB = 64 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\frac{4m^2 + 6}{x_0 - m}\right| \cdot 2|x_0 - m| = 64 \Leftrightarrow 4m^2 + 6 = 64 \Leftrightarrow m = \pm \frac{\sqrt{58}}{2}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{\sqrt{58}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{58}}{2}\right) = 0.$$

Câu 34: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm trên đồ thị (C) có hoành độ dương sao cho tiếp tuyến tại M với (C) cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại hai điểm A, B thỏa mãn $IA^2 + IB^2 = 40$. Giá trị của biểu thức $P = x_0^2 + y_0^2 + x_0 y_0$ bằng:

A. 8.

B. 3.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Đồ thị $(C): y = \frac{2x-1}{x+1}$ có tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = 2$ nên $I(-1; 2)$.

Vì $M \in (C)$ nên $M\left(x_0; \frac{2x_0-1}{x_0+1}\right), (x_0 > 0)$

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M là $y = \frac{3}{(x_0+1)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0-1}{x_0+1}$.

$$\Rightarrow A\left(-1; \frac{2x_0-4}{x_0+1}\right), B(2x_0+1; 2)$$

Ta có $IA = \left|\frac{6}{x_0+1}\right|$ và $IB = 2|x_0+1|$.

$$\text{Khi đó } IA^2 + IB^2 = 40 \Leftrightarrow \frac{36}{(x_0+1)^2} + 4(x_0+1)^2 = 40, x_0 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0 + 1)^4 - 10(x_0 + 1)^2 + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_0 + 1)^2 = 1 \\ (x_0 + 1)^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \text{ (l)} \\ x_0 = -2 \text{ (l)} \\ x_0 = 2 \text{ (n)} \\ x_0 = -4 \text{ (l)} \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 1.$$

Suy ra $M(2;1)$

Giá trị của biểu thức $P = 7$.

Câu 35: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ có đồ thị là (C) . Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận và $M(x_0; y_0)$ là điểm nằm trên (C) với $x_0 > 0$. Biết tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại hai điểm P và Q sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác IPQ lớn nhất. Tính tổng $x_0 + y_0$.

A. $x_0 + y_0 = 0$.

B. $x_0 + y_0 = 2 + 2\sqrt{3}$.

C. $x_0 + y_0 = 2$.

D. $x_0 + y_0 = 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Đồ thị (C) có đường tiệm đứng $x = -1$ và đường tiệm cận ngang $y = 1$.

Giao điểm hai đường tiệm cận $I(-1;1)$.

Gọi $M\left(x_0; \frac{x_0-2}{x_0+1}\right) \in (C)$ với $x_0 > 0$. Ta có $y' = \frac{3}{(x+1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M là $y = \frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0) + \frac{x_0-2}{x_0+1}$.

Tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt tiệm cận đứng tại điểm $P\left(-1; \frac{x_0-5}{x_0+1}\right)$ và cắt tiệm cận ngang tại điểm $Q(2x_0+1;1)$.

Ta có $S_{\triangle IPQ} = \frac{1}{2}IP \cdot IQ = \frac{1}{2} \frac{6}{|x_0+1|} \cdot 2|x_0+1| = 6$.

Mặt khác $S_{\triangle IPQ} = pr \Leftrightarrow r = \frac{S_{\triangle IPQ}}{p} = \frac{6}{p}$ nên r đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi p đạt giá trị nhỏ nhất hay chu vi tam giác IPQ đạt giá trị nhỏ nhất.

Mà chu vi tam giác $IPQ: C = IP + IQ + PQ = IP + IQ + \sqrt{IP^2 + IQ^2} \geq (2 + \sqrt{2})\sqrt{IP \cdot IQ} = (2 + \sqrt{2})\sqrt{12}$

Nên chu vi tam giác IPQ nhỏ nhất khi $IP = IQ \Leftrightarrow \frac{6}{|x_0 + 1|} = 2|x_0 + 1| \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 + \sqrt{3} \\ x_0 = -1 - \sqrt{3} \end{cases}$.

Do $x_0 > 0$ nên $x_0 = -1 + \sqrt{3} \Rightarrow M(-1 + \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3})$.

Vậy $x_0 + y_0 = 0$.

Câu 36: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{2x-2}$ có đồ thị là (C) . Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận và M là điểm nằm trên (C) có hoành độ lớn hơn 1. Tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại hai điểm A và B . Hoành độ của điểm M thuộc khoảng nào sau đây để $P = IA + IB$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $(-4; 1)$.

B. $(-\infty; -4)$.

C. $(4; +\infty)$.

D. $(1; 4)$.

Lời giải

Đồ thị (C) có đường tiệm đứng $x = 1$ và đường tiệm cận ngang $y = 1$.

Giao điểm hai đường tiệm cận $I(1; 1)$.

Gọi $M\left(x_0; \frac{2x_0-1}{2x_0-2}\right) \in (C)$ với $x_0 > 1$. Ta có $y' = -\frac{2}{(2x-2)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M là $y = -\frac{2}{(2x_0-2)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0-1}{2x_0-2}$.

Tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt tiệm cận đứng tại $A\left(1; \frac{x_0}{x_0-1}\right)$ và cắt tiệm cận ngang tại điểm $B(2x_0-1; 1)$.

Ta có $IA + IB = \frac{1}{x_0-1} + 2(x_0-1) \geq 2\sqrt{2}$

Suy ra $\min(IA + IB) = 2\sqrt{2}$ khi $\frac{1}{x_0-1} = 2(x_0-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \\ x_0 = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.

Do $x_0 > 1$ nên $x_0 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $x_0 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

Câu 37: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{3-x}$ có đồ thị (C) . Gọi $M(x_0; y_0)$ là một điểm thuộc (C) sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của (C) là nhỏ nhất. Tính $2x_0 - y_0$ biết $y_0 < 0$.

A. $2x_0 - y_0 = 4$.

B. $2x_0 - y_0 = 2$.

C. $2x_0 - y_0 = 6$.

D. $2x_0 - y_0 = 10$.

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow M\left(x_0; \frac{x_0 - 2}{3 - x_0}\right)$.

Đồ thị (C) có tiệm cận đứng $x = 3$ và tiệm cận ngang $y = -1$.

Khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng là $d_1 = |x_0 - 3|$.

Khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang là $d_2 = \frac{1}{|3 - x_0|}$.

Ta có $d_1 + d_2 = |x_0 - 3| + \frac{1}{|3 - x_0|} \geq 2$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $|x_0 - 3| = \frac{1}{|3 - x_0|} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 0 \\ x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = -2 \end{cases}$.

Mà $y_0 < 0$ nên $y_0 = -2$. Vậy $2x_0 - y_0 = 2 \cdot 4 - (-2) = 10$.

Câu 38: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+3}$ có đồ thị là (C) . Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận và $M(x_0; y_0)$ là một điểm thuộc (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của (C) lần lượt tại hai điểm A, B sao cho $IA^2 + IB^2 = 32$. Tìm tọa độ điểm M biết $y_0 > 0$.

A. $(-5; 3)$.

B. $\left(2; \frac{1}{5}\right)$.

C. $\left(3; \frac{1}{3}\right)$.

D. $(-1; -1)$.

Lời giải

Đồ thị (C) có tiệm cận đứng $x = -3$ và tiệm cận ngang $y = 1$.

Giao điểm của hai đường tiệm cận $I(-3; 1)$.

Ta có điểm $M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow M\left(x_0; \frac{x_0 - 1}{x_0 + 3}\right)$ và $y' = \frac{4}{(x+3)^2}, \forall x \neq -3$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M có dạng $y = \frac{4}{(x_0 + 3)^2}(x - x_0) + \frac{x_0 - 1}{x_0 + 3}$.

Cho $y = 1 \Rightarrow (x_0 + 3)^2 = 4x - 4x_0 + (x_0 - 1)(x_0 + 3) \Leftrightarrow x = 2x_0 + 3$.

Cho $x = -3 \Rightarrow y = \frac{4}{(x_0 + 3)^2}(-3 - x_0) + \frac{x_0 - 1}{x_0 + 3} = \frac{x_0 - 5}{x_0 + 3}$.

Suy ra tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt tiệm cận đứng tại $A\left(-3; \frac{x_0 - 5}{x_0 + 3}\right)$ và cắt tiệm cận ngang tại điểm $B(2x_0 + 3; 1)$.

Ta có $IA^2 + IB^2 = 32 \Leftrightarrow \frac{64}{(x_0 + 3)^2} + 4(x_0 + 3)^2 = 32 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 3 = 2 \\ x_0 + 3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = -5 \end{cases}$

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -1$ (loại vì $y_0 > 0$).

Với $x_0 = -5 \Rightarrow y_0 = 3$ (nhận).

Vậy $M(-5;3)$.

Câu 39: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm M thuộc (C) sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm gấp 2 lần tích khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của (C) ?

A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $d_1: x=1$ và tiệm cận ngang $d_2: y=2$.

Giả sử $M\left(x_0; \frac{2x_0-1}{x_0-1}\right) \in (C)$ với $x_0 \neq 1$.

$$\text{Ta có: } d(M; d_1) = |x_0 - 1|; d(M; d_2) = \left| \frac{2x_0-1}{x_0-1} - 2 \right| = \frac{1}{|x_0-1|}$$

$$\text{Theo đề bài: } |x_0 - 1| + \frac{1}{|x_0-1|} = 2|x_0 - 1| \cdot \frac{1}{|x_0-1|} = 2$$

$$\Leftrightarrow |x_0 - 1| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Vậy có 2 điểm M thỏa mãn đề bài.

Câu 40: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của (C) . Có bao nhiêu điểm trên (C) có hoành độ âm sao cho tam giác OMI có diện tích bằng $\frac{1}{2}$ biết O là gốc tọa độ?

A. 0.

B. 1

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=2$ và tiệm cận ngang $y=1$.

Do đó $I(2;1)$.

Suy ra $OI = \sqrt{5}$ và đường thẳng OI có phương trình: $\Delta: x-2y=0$.

Giả sử $M\left(m; \frac{m+1}{m-2}\right) \in (C)$ với $m < 0$.

$$\text{Ta có: } d(M; \Delta) = \frac{\left| m - 2 \cdot \frac{m+1}{m-2} \right|}{\sqrt{5}} = \frac{|m^2 - 4m - 2|}{\sqrt{5}|m-2|} = h$$

$$\text{Theo đề bài: } S_{\triangle OMI} = \frac{1}{2} OI \cdot h \Leftrightarrow h = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{|m^2 - 4m - 2|}{|m-2|} = 1$$

$$\Leftrightarrow |m^2 - 4m - 2| = |m - 2|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m - 2 = m - 2 \\ m^2 - 4m - 2 = 2 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (L)} \\ m = 5 \text{ (L)} \\ m = -1 \\ m = 4 \text{ (L)} \end{cases}.$$

Vậy có 1 điểm thỏa mãn đề bài.

HẾT