

Câu 1 (7,0 điểm).

a) Giải phương trình $\frac{2\sin^2\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3}\cos 3x}{1 - 2\sin x} = 1$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 2(xy - x + y) \\ x^3 + 3y^2 + 5x - 12 = (12 - y)\sqrt{3 - x} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Câu 2 (2,0 điểm).

Một hộp chứa 17 quả cầu đánh số từ 1 đến 17. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Tính xác suất sao cho tổng các số ghi trên 3 quả cầu đó là một số chẵn.

Câu 3 (5,0 điểm).

Cho hình chóp SABCD, có đáy là hình thoi cạnh a , $SA = SB = SC = a$. Đặt $SD = x$ ($0 < x < a\sqrt{3}$).

a) Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABCD), biết rằng $x = a$.

b) Tìm x theo a để tích $AC \cdot SD$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 4 (2,0 điểm).

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD. Hình chiếu vuông góc của điểm D lên các đường thẳng AB, BC lần lượt là $M(-2; 2), N(2; -2)$; đường thẳng BD có phương trình $3x - 5y + 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm A.

Câu 5 (4,0 điểm).

a) Cho dãy số (u_n) , biết $u_1 = 6, u_{n+1} = \frac{u_n^2 - n(u_n - 1) + n^2}{n}$, với $n \geq 1$

Tính giới hạn $\lim \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} \right)$

b) Cho ba số thực a, b, c thuộc đoạn $[0; 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

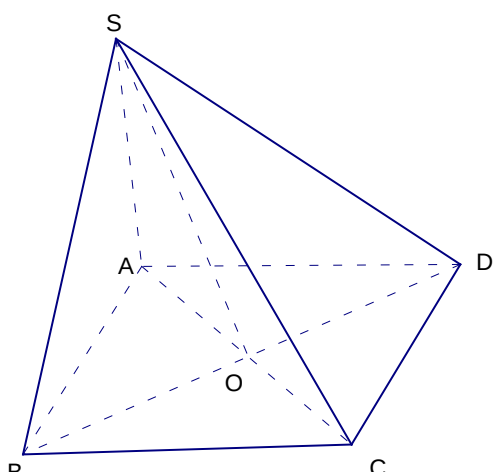
$$P = (a^2c + c^2b - b^2c - c^2a - a^2b)(a + b + c).$$

.....**Hết**.....

Họ và tên thí sinh.....

Số báo danh.....

Câu	Đáp án	Điểm
1. (7,0đ)	a) (4,0 điểm) Giải phương trình $\frac{2\sin^2\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\cos 3x}{1-2\sin x}=1$ (1)	
	Điều kiện: $\sin x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x \neq \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$	0,5
	(1) $\Leftrightarrow 1 - \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{3}\cos 3x = 1 - 2\sin x$	1,0
	$\Leftrightarrow \sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = 2\sin x \Leftrightarrow \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin x$	1,0
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{3} = x + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{3} = \pi - x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}$	1,0
	Đối chiếu với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm là $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$	0,5
	b) (3,0 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 2(xy - x + y) & (1) \\ x^3 + 3y^2 + 5x - 12 = (12 - y)\sqrt{3 - x} & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$	
	(1) $\Leftrightarrow (x - y + 1)^2 = 0$	1,0
	$\Leftrightarrow x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = x + 1$ Thay $y = x + 1$ vào phương trình (2) ta được phương trình $x^3 + 3x^2 + 11x - 9 = (11 - x)\sqrt{3 - x}$	0,5
	$\Leftrightarrow (x + 1)^3 + 5(x + 1) = (\sqrt{3 - x} + 1)^3 + 5(\sqrt{3 - x} + 1)$ (3) Đặt $a = x + 1; b = \sqrt{3 - x} + 1$, phương trình (3) trở thành $\Leftrightarrow a^3 + 5a = b^3 + 5b$ $\Leftrightarrow (a - b)\left[\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} + 5\right] = 0 \Leftrightarrow a = b$ Do đó (3) $\Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{3 - x} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{3 - x} = x$	1,0
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}.$	0,5

	Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y)$ với $\begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \\ y = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$.	
2. (2,0đ)	Một hộp chứa 17 quả cầu đánh số từ 1 đến 17. Lấy ngẫu nhiên đồng thời ba quả cầu. Tính xác suất sao cho tổng các số ghi trên ba quả cầu đó là một số chẵn.	
	Số phần tử không gian mẫu $n(\Omega) = C_{17}^3$	0,5
	Gọi A là biến cố: Lấy được đồng thời ba quả cầu sao cho tổng các số ghi trên ba quả cầu đó là một số chẵn. Xét các khả năng xảy ra KN 1: Lấy được ba quả cầu có các số ghi trên ba quả cầu đó đều là số chẵn. Số cách chọn là C_8^3 .	0,5
	KN 2: Lấy được hai quả cầu có các số ghi trên hai quả cầu đó đều là số lẻ và một quả cầu có số ghi trên quả cầu là số chẵn. Số cách chọn là $C_9^2 \cdot C_8^1$.	0,5
	Vậy: $P(A) = \frac{C_8^3 + C_9^2 \cdot C_8^1}{C_{17}^3} = \frac{43}{85}$.	0,5
3. (5,0đ)	Cho hình chóp $SABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $SA = SB = SC = a$. Đặt $x = SD$ ($0 < x < a\sqrt{3}$). a) Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$, biết rằng $x = a$. b) Tìm x theo a để tích $AC \cdot SD$ đạt giá trị lớn nhất.	
	a) (3,0 điểm)	
	 Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$. Khi $x = a$, ta có $\begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.	1,0
	Suy ra góc giữa thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SBO}$. Mà $\triangle SOB = \triangle SOC \Rightarrow OB = OC$.	1,0
	$\Rightarrow$ Đáy $ABCD$ là hình vuông. Do đó $OB = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos \widehat{SBO} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{SBO} = 45^\circ$.	1,0
	b) (2,0 điểm)	
	Ta có $\triangle SOC = \triangle BOC \Rightarrow OS = OB \Rightarrow$ tam giác SBD vuông tại S .	0,5

	Suy ra $BD = \sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow OB = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{2}$ $AC = 2OC = 2\sqrt{BC^2 - OB^2} = \sqrt{3a^2 - x^2}$. Do đó $AC \cdot SD = x\sqrt{3a^2 - x^2}$.	0,5
	Áp dụng bất đẳng thức Cô – Si, ta có $x\sqrt{3a^2 - x^2} \leq \frac{x^2 + 3a^2 - x^2}{2} = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow AC \cdot SD \leq \frac{3a^2}{2}$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = \sqrt{3a^2 - x^2} \Leftrightarrow x^2 = 3a^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Vậy $x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ thì tích $AC \cdot SD$ đạt giá trị lớn nhất.	1,0
4. (2,0đ)	Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$. Hình chiếu vuông góc của điểm D lên các đường thẳng AB, BC lần lượt là $M(-2;2), N(2;-2)$; đường thẳng BD có phương trình $3x - 5y + 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm A. Gọi $I(x; y)$ là tâm hình bình hành $ABCD$. Vì tam giác BMD vuông tại M và I là trung điểm của BD nên $MI = \frac{1}{2}BD$ (1) Tương tự ta có $NI = \frac{1}{2}BD$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $MI = NI \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2} \Leftrightarrow y = x$ (3) Mà I thuộc BD nên $3x - 5y + 1 = 0$ (4) Từ (3) và (4) suy ra $x = y = \frac{1}{2} \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.	0,5
	Do đó $ID = IB = MI = \frac{\sqrt{34}}{2} \Leftrightarrow B, D$ thuộc đường tròn (T) có tâm I bán kính $R = \frac{\sqrt{34}}{2}$. (T) có phương trình $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{17}{2}$. Vì B, D là giao điểm của đường thẳng BD và đường tròn (T) nên tọa độ B, D là	0,5

	nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x-5y+1=0 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{17}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}.$	
	TH1: $B(3;2), D(-2;-1)$ Suy ra phương trình đường thẳng $AB: y=2; AD: 4x-y+7=0 \Rightarrow A\left(-\frac{5}{4}; 2\right).$	0,5
	TH2: $B(-2;-1), D(3;2)$ Suy ra phương trình đường thẳng $AB: x=-2; AD: x+4y-11=0 \Rightarrow A\left(-2; \frac{13}{4}\right).$	0,5
5. (4,0đ)	a) (2,0 điểm) Cho dãy số (u_n) , biết $u_1=6, u_{n+1} = \frac{u_n^2 - n(u_n - 1) + n^2}{n}$ với $n \geq 1$. Tính giới hạn: $\lim \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} \right).$	
	Ta có: $u_1 = 6 > 3.1$ $u_2 = u_1^2 - u_1 + 2 = 32 > 3.2$ Giả sử $u_k > 3k, \forall k \in \mathbb{N}^*$. Ta cần chứng minh $u_{k+1} > 3(k+1)$ Thật vậy: $u_{k+1} = \frac{u_k^2 - ku_k + k^2 + k}{k} = \frac{u_k(u_k - 3k) + 2ku_k + k^2 + k}{k}$ $\Rightarrow u_{k+1} > 2u_k + k + 1 > 2.3k + k + 1 > 3(k+1)$ (đpcm) Vậy $u_n > 3n$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ (1).	0,5
	$u_{k+1} = \frac{u_k^2 - ku_k + k^2 + k}{k} \Leftrightarrow u_{k+1} = \frac{u_k^2 - ku_k}{k} + k + 1$ $\Leftrightarrow u_{k+1} - (k+1) = \frac{u_k^2 - ku_k}{k} \Leftrightarrow \frac{1}{u_{k+1} - (k+1)} = \frac{k}{u_k^2 - ku_k} = \frac{1}{u_k - k} - \frac{1}{u_k}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_k - k} - \frac{1}{u_{k+1} - (k+1)}$ (2).	0,5
	Áp dụng (2) suy ra $\frac{1}{u_1} = \frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_2 - 2}$ $\frac{1}{u_2} = \frac{1}{u_2 - 2} - \frac{1}{u_3 - 3}$ $\dots$ $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n - n} - \frac{1}{u_{n+1} - (n+1)}$ Cộng theo vế các đẳng thức trên ta được $\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - (n+1)} = \frac{1}{5} - \frac{1}{u_{n+1} - (n+1)}$ (3) Mặt khác theo (1) ta có $u_{n+1} > 3(n+1) \Leftrightarrow u_n - (n+1) > 2n + 2 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.	0,5

	Vậy $\left \frac{1}{u_{n+1} - (n+1)} \right < \frac{1}{2n+2}$ Mà $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+2} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_{n+1} - (n+1)} = 0$ (3) Từ (2) và (3), suy ra $\lim \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} \right) = \frac{1}{5}$.	0,5
	b) (2,0 điểm) Cho ba số thực a, b, c thuộc đoạn $[0; 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (a^2c + c^2b - b^2c - c^2a - a^2b)(a + b + c)$.	
	Với ba số thực a, b, c thuộc đoạn $[0; 2]$ ta có $a^2c + c^2b - b^2c - c^2a - a^2b \leq a^2c + c^2b + b^2a - b^2c - c^2a - a^2b$ $\Rightarrow a^2c + c^2b - b^2c - c^2a - a^2b \leq (a-b)(b-c)(c-a)$ $\Rightarrow P \leq Q \text{ với } Q = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) \quad (1).$	0,5
	Ta sẽ chứng minh $Q \leq \frac{32\sqrt{3}}{9}$ (2) Thật vậy: Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a = \max\{a; b; c\}$ TH1: $a \geq b \geq c \Rightarrow Q \leq 0$ TH2: $a \geq c \geq b$, áp dụng bất đẳng thức Cô – Si cho ba số không âm $(\sqrt{3}+1)(a-c); 2(c-b); (\sqrt{3}-1)(a+b+c)$ ta có $(\sqrt{3}+1)(a-c)2(c-b)(\sqrt{3}-1)(a+b+c) \leq \left[\frac{2\sqrt{3}a + (\sqrt{3}-3)b}{3} \right]^3$ $\Rightarrow (a-c)(c-b)(a+b+c) \leq \frac{\left[2\sqrt{3}a + (\sqrt{3}-3)b \right]^3}{108}$ $\Rightarrow (a-b)(a-c)(c-b)(a+b+c) \leq \frac{(a-b) \left[2\sqrt{3}a + (\sqrt{3}-3)b \right]^3}{108} \quad (3)$	0,5
	Mà $\frac{(a-b) \left[2\sqrt{3}a + (\sqrt{3}-3)b \right]^3}{108} \leq \frac{32\sqrt{3}}{9}$ (4) Từ (3) và (4) suy ra $Q \leq \frac{32\sqrt{3}}{9}$.	0,5
	Do đó (2) đúng. Từ (1) và (2) suy ra $P \leq \frac{32\sqrt{3}}{9}$. Khi $a = 2, b = 0, c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ thì $P = \frac{32\sqrt{3}}{9}$. Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{32\sqrt{3}}{9}$.	0,5

--- Hết ---

Ghi chú: Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa