

Câu 1 (3,0 điểm). Giải phương trình: $2\cos^5 x \cdot \sin x - 2\sin^5 x \cdot \cos x = \sin^2 4x$.

Câu 2 (2,0 điểm). Giải phương trình $\frac{x^2}{3-\sqrt{x}} = x - 2\sqrt{x} + 6$.

Câu 3 (4,0 điểm). Cho số thực $a \in (0;1)$ và dãy số (u_n) xác định bởi:

$$(u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{au_n^3 + a - 1}, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

a) Gọi (v_n) là dãy số xác định bởi $v_n = u_n^3 + 1$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn.

b) Tìm tất cả các giá trị của a biết rằng: $\lim(u_1^3 + u_2^3 + \dots + u_n^3 + n) = 4$.

Câu 4 (3.0 điểm). Danh sách đăng kí dự thi Olympic cấp trường của lớp 11A có 25 học sinh, mỗi em đăng kí dự thi một môn trong số các môn: Toán, Văn, Tin học, Sinh học, Lịch Sử, Vật lí, Hóa học, Anh và Địa Lí. Trong đó có 6 học sinh đăng kí dự thi môn Toán và 5 học sinh đăng kí dự thi môn Anh. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh trong danh sách trên, tính xác suất để trong 3 học sinh đó có cả học sinh đăng kí dự thi môn Toán và học sinh đăng kí dự thi môn Anh.

Câu 5 (6.0 điểm). Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 1. Lấy điểm I thuộc cạnh AB , điểm E thuộc cạnh DD' sao cho $AI = D'E = x, (0 < x < 1)$.

a) Chứng minh IE vuông góc với $A'C$.

b) Tìm x để góc giữa hai đường thẳng AC' và DI bằng 60° .

c) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, A'D'$. Xác định giao điểm K của mặt phẳng (CMN) với đường thẳng $B'C'$ và tính tỉ số $\frac{B'K}{B'C'}$.

Câu 6 (2.0 điểm). Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 - 3b \leq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{4}{(b+2)^2} + \frac{8}{(c+3)^2} \geq 1$.

-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Thầy cô coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:SBD:

CÂU	NỘI DUNG	ĐIỂM
1 (3 điểm)	$2 \cos^5 x \cdot \sin x - 2 \sin^5 x \cdot \cos x = \sin^2 4x$ $\Leftrightarrow 2 \cos x \cdot \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) (\cos^2 x + \sin^2 x) = \sin^2 4x$ $\Leftrightarrow \sin 2x \cdot \cos 2x = \sin^2 4x \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 4x = \sin^2 4x$	1,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x = 0 \\ \sin 4x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = k\pi \\ 4x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 4x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \\ x = \frac{5\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}$	1,5
2 (2 điểm)	Điều kiện xác định: $x \geq 0; x \neq 9$. $\frac{x^2}{3-\sqrt{x}} = x - 2\sqrt{x} + 6 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3-\sqrt{x}} = x + 2(3-\sqrt{x}) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{3-\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{x}{3-\sqrt{x}} + 2.$	1,0
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3-\sqrt{x}} = 2 \\ \frac{x}{3-\sqrt{x}} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\sqrt{x} + 6 \\ x = \sqrt{x} - 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 8 - 2\sqrt{7}.$	1,0
3 (4,0 điểm)	a) Ta có $u_{n+1}^3 = au_n^3 + a - 1 \Leftrightarrow u_{n+1}^3 + 1 = a(u_n^3 + 1)$. Suy ra $v_{n+1} = av_n$.	1,0
	Như vậy dãy số (v_n) là cấp số nhân với công bội a nên nó là cấp số nhân lùi vô hạn.	1,0
	b) Ta được $v_1 + v_2 + \dots + v_n = \frac{2(1-a^n)}{1-a} \Rightarrow u_1^3 + u_2^3 + \dots + u_n^3 + n = \frac{2(1-a^n)}{1-a}$ $\lim(u_1^3 + u_2^3 + \dots + u_n^3 + n) = 4 \Rightarrow \lim \frac{2(1-a^n)}{1-a} = 4$	1,0
	Vì $0 < a < 1$ nên $\lim \frac{2(1-a^n)}{1-a} = \frac{2}{1-a} \Rightarrow \frac{2}{1-a} = 4 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.	1,0
4 (3,0 điểm)	T là phép thử ‘Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh trong số 25 học sinh’. Ta có : $\Omega = C_{25}^3$. Gọi A là biến cố : 3 học sinh được chọn luôn có học sinh dự thi môn Toán và học sinh dự thi môn Anh. Ta có các trường hợp sau thuận lợi cho biến cố A :	0,5
	- Có 1 học sinh chọn môn Toán, 2 học sinh chọn môn Anh có : $C_6^1 \cdot C_5^2$ khả năng - Có 2 học sinh chọn môn Toán, 1 học sinh chọn môn Anh có : $C_6^2 \cdot C_5^1$ khả năng - Có 1 học sinh chọn môn Toán, 1 học sinh chọn môn Anh, 1 học sinh chọn môn khác (Văn, Tin, Sinh học, Lịch sử, Vật Lí, Hóa, Địa lý) có : $C_6^1 \cdot C_5^1 C_{14}^1$ khả năng.	2,0
	$ \Omega_A = C_6^1 \cdot C_5^2 + C_6^2 \cdot C_5^1 + C_6^1 \cdot C_5^1 C_{14}^1$. Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{ \Omega_A }{ \Omega } = \frac{555}{2300} = \frac{111}{460}$.	0,5

5 (6,0 điểm)	Đặt $\overrightarrow{A'B'} = \vec{a}$; $\overrightarrow{A'D'} = \vec{b}$; $\overrightarrow{A'A} = \vec{c}$. a) Ta có: $\overrightarrow{A'C'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Lại có: $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$ $= -x\vec{a} + \vec{b} - (1-x)\vec{c}$. Xét: $\overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{IE} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (-x\vec{a} + \vec{b} - (1-x)\vec{c})$ $= -x\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - (1-x)\vec{c}^2 = -x + 1 - (1-x) = 0$. Suy ra $A'C \perp IE$.	3.0
	b) Ta có: $\cos 60^\circ = \frac{ \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AC'} }{ \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AC'} } = \frac{ (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI})(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}) }{ \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AC'} } = \frac{ -1+x }{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{3}}$. Suy ra: $\frac{ -1+x }{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 8x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 4 - \sqrt{15}$.	1,5
	c) Gọi M' là trung điểm cạnh $A'B'$. Trong $(A'B'C'D')$: kẻ đường thẳng đi qua N và song song với $C'M'$ cắt đường thẳng $B'C'$ tại K. Khi đó K là giao điểm của mặt phẳng (CMN) với đường thẳng $B'C'$. Áp dụng định lí Ta-lét ta tính được: $\frac{B'K}{B'C'} = \frac{5}{2}$.	1,5
6 (2 điểm)	Đặt $P = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{4}{(b+2)^2} + \frac{8}{(c+3)^2}$. Ta thấy: $a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 4b - 2c + 6 = (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-1)^2 \geq 0$, theo giả thiết thì $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3b$. Suy ra $3b - 2a - 4b - 2c + 6 \geq 0$ hay $2a + b + 2c + 10 \leq 16$. Với hai số $x, y > 0$ ta có: $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 2xy \\ (x+y)^2 \geq 4xy \end{cases} \Rightarrow (x^2 + y^2)(x+y)^2 \geq 8x^2y^2$. Do đó: $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq \frac{8}{(x+y)^2}$ (1) Áp dụng (1) ta có: $\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{4}{(b+2)^2} \geq \frac{8}{\left(a + \frac{b}{2} + 2\right)^2}$; $\frac{1}{\left(a + \frac{b}{2} + 2\right)^2} + \frac{1}{(c+3)^2} \geq \frac{8}{\left(a + \frac{b}{2} + c + 5\right)^2}$. $\Rightarrow P \geq \frac{8}{\left(a + \frac{b}{2} + 2\right)^2} + \frac{8}{(c+3)^2} \geq 8 \cdot \frac{8}{\left(a + \frac{b}{2} + c + 5\right)^2} = \frac{16^2}{(2a + b + 2c + 10)^2}$. Theo giả thiết và chứng minh trên thì $0 < 2a + b + 2c + 10 \leq 16, \Rightarrow P \geq 1$. Khi $a = 1, b = 2, c = 1$ thì $P = 1$.	0,5 0,5 0,5

Học sinh làm theo cách khác, nếu đúng vẫn được đủ điểm tối đa như đáp án qui định.
.....Hết.....