



LE MINH TAM

CHƯƠNG 02

Tổ hợp & Xác suất

↻ QUY TẮC ĐẾM.

↻ HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP – TỔ HỢP .

↻ NHỊ THỨC NEWTON .

↻ BIẾN CỐ & XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ .

TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ



MỤC LỤC

➤ BÀI 01. QUY TẮC ĐẾM.....	4
I. CÁC QUY TẮC ĐẾM.....	4
II. BÀI TẬP TỰ LUẬN.	6
III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.	14
➤ BÀI 02. TỔ HỢP – CHỈNH HỢP – HOÁN VỊ.....	20
I. HOÁN VỊ.....	20
II. CHỈNH HỢP.	21
III. TỔ HỢP.....	22
IV. BÀI TẬP TỰ LUẬN.....	23
☑ Dạng 1. BÀI TẬP VỀ HOÁN VỊ.....	23
☑ Dạng 2. BÀI TẬP VỀ CHỈNH HỢP.	31
☑ Dạng 3. BÀI TẬP VỀ TỔ HỢP.....	40
☑ Dạng 4. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC LIÊN QUAN A_n^k, P_n, C_n^k	51
☑ Dạng 5. PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA CÁC SỐ $n!, P_n, A_n^k, C_n^k$	56
V. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	61
➤ BÀI 03. NHỊ THỨC NEWTON.....	68
I. CÔNG THỨC NHỊ THỨC NEWTON.....	68
II. TAM GIÁC PASCAL.....	69
III. CÁC DẠNG BÀI TẬP.....	70
➤ Dạng 1. KHAI TRIỂN NHỊ THỨC.....	70
➤ Dạng 2. TÌM HỆ SỐ HOẶC SỐ HẠNG THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN.....	71
➤ Dạng 3. CHỨNG MINH HOẶC TÍNH TỔNG.....	75
IV. BÀI TẬP RÈN LUYỆN.....	76
➤ BÀI 04. BIẾN CỐ & XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ.....	91
I. PHÉP THỬ VÀ KHÔNG GIAN MẪU.....	91
II. BIẾN CỐ & XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ.....	91





III. PHÉP TOÁN TRÊN CÁC BIẾN CỐ.....	93
IV. CÁC BIẾN CỐ ĐỘC LẬP, CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT.	95
V. CÁC DẠNG BÀI TẬP.	97
Dạng 1. TÍNH XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ	97
Dạng 2. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT.....	108
VI. BÀI TẬP TỰ LUẬN.....	114
VII. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	128
BÀI 05. TỔNG ÔN TẬP CHƯƠNG	147
I. QUY TẮC ĐẾM.....	147
II. HOÁN VỊ – CHỈNH HỢP – TỔ HỢP	155
III. NHỊ THỨC NEWTON.....	171
IV. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ.....	184





BÀI 1

QUY TẮC ĐẾM

I. CÁC QUY TẮC ĐẾM.

Quy tắc cộng

- Một công việc X được thực hiện theo một trong k phương án $A_1, A_2, \dots, A_k$, trong đó:
- Phương án A_1 có n_1 cách thực hiện.
 - Phương án A_2 có n_2 cách thực hiện.
 -
 - Phương án A_k có n_k cách thực hiện.
- Số cách hoàn thành công việc X là $n(X) = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ cách.

Ví dụ 1

Trong một cuộc thi tìm hiểu về đất nước Việt Nam, ban tổ chức công bố danh sách đề tài bao gồm: 8 đề tài về lịch sử, 7 đề tài về thiên nhiên, 10 đề tài về con người và 6 đề tài về văn hóa. Hỏi mỗi thí sinh có bao nhiêu khả năng chọn đề tài?

Lời giải

- ♦ Phương án 1: Chọn một đề tài về lịch sử: có 8 cách.
 - ♦ Phương án 2: Chọn một đề tài về thiên nhiên: có 7 cách.
 - ♦ Phương án 3: Chọn 1 đề tài về con người: có 10 cách.
 - ♦ Phương án 4: Chọn 1 đề tài về văn hóa: có 6 cách.
- Vậy số cách mà mỗi thí sinh chọn đề tài là: $8 + 7 + 10 + 6 = 31$ (cách)

Ví dụ 2

Giả sử từ tỉnh A đến tỉnh B có thể đi bằng các phương tiện: ô tô, tàu hỏa hoặc máy bay. Mỗi ngày có 10 chuyến ô tô, 5 chuyến tàu hỏa và 3 chuyến máy bay. Hỏi một ngày có bao nhiêu cách lựa chọn đi từ tỉnh A đến tỉnh B ?

Lời giải

- ♦ Trường hợp 1: Số cách chọn đi từ tỉnh A đến tỉnh B bằng ô tô: có 10 cách.
 - ♦ Trường hợp 2: Số cách chọn đi từ tỉnh A đến tỉnh B bằng tàu hỏa: có 5 cách.
 - ♦ Trường hợp 3: Số cách chọn đi từ tỉnh A đến tỉnh B bằng máy bay: có 3 cách.
- Vậy số cách lựa chọn đi từ tỉnh A đến tỉnh B là: $10 + 5 + 3 = 18$ cách.

Quy tắc nhân





- ⊙ Giả sử một công việc nào đó bao gồm hai công đoạn A và B .
 Công đoạn A có thể làm theo n cách.
 Với mỗi cách thực hiện công đoạn A thì công đoạn B có thể làm theo m cách.
 Khi đó, công việc có thể thực hiện theo $n.m$ cách.

Ví dụ 3

An đến nhà Bình để cùng Bình đến nhà Cường. Từ nhà An đến nhà Bình có 4 con đường đi, từ nhà Bình đến nhà Cường có 6 con đường đi. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn con đường đi từ nhà đến nhà Cường?

Lời giải

- ♦ Giai đoạn 1: An đi từ nhà đến nhà Bình có 4 cách.
- ♦ Giai đoạn 2: An đi từ nhà Bình đến nhà Cường có 6 cách.
- ♦ Vậy số cách An lựa chọn con đường đi từ nhà đến nhà Cường là: $4.6 = 24$ cách.

Ví dụ 4

Lớp 11A có 30 học sinh. Tập thể lớp muốn bầu ra một lớp trưởng, một lớp phó và một thủ quỹ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ban cán sự như trên?

Lời giải

- ♦ Giai đoạn 1: Chọn lớp trưởng có 30 cách.
 - ♦ Giai đoạn 2: chọn một lớp phó, có 29 cách.
 - ♦ Giai đoạn 3: chọn một thủ quỹ có 28 cách.
- Vậy số cách chọn ban cán sự gồm một lớp trưởng, một lớp phó và một thủ quỹ là:
 $30.29.28 = 24360$ cách.

Các bài toán đếm cơ bản

- ⊙ Ta thường gặp các bài toán sau:

Đếm số phương án liên quan đến số tự nhiên.

Khi lập một số tự nhiên $x = \overline{a_1 \dots a_n}$ ta cần lưu ý:

- $\Rightarrow a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ và $a_1 \neq 0$.
- $\Rightarrow x$ là số chẵn $\Leftrightarrow a_n$ là số chẵn
- $\Rightarrow x$ là số lẻ $\Leftrightarrow a_n$ là số lẻ
- $\Rightarrow x$ chia hết cho 3 $\Leftrightarrow \overline{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ chia hết cho 3
- $\Rightarrow x$ chia hết cho 4 $\Leftrightarrow \overline{a_{n-1}a_n}$ chia hết cho 4
- $\Rightarrow x$ chia hết cho 5 $\Leftrightarrow a_n \in \{0, 5\}$
- $\Rightarrow x$ chia hết cho 6 $\Leftrightarrow x$ là số chẵn và chia hết cho 3
- $\Rightarrow x$ chia hết cho 8 $\Leftrightarrow \overline{a_{n-2}a_{n-1}a_n}$ chia hết cho 8
- $\Rightarrow x$ chia hết cho 9 $\Leftrightarrow \overline{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ chia hết cho 9.

01





02

$\Rightarrow x$ chia hết cho 11 $\Leftrightarrow$ tổng các chữ số ở hàng lẻ trừ đi tổng các chữ số ở hàng chẵn là một số chia hết cho 11.
 $\Rightarrow x$ chia hết cho 25 $\Leftrightarrow$ hai chữ số tận cùng là 00, 25, 50, 75.

03

Đếm số phương án liên quan đến kiến thức thực tế

Đếm số phương án liên quan đến hình học

Ta thường gặp bài toán đếm số phương án thực hiện hành động H thỏa mãn tính chất T .

Để giải bài toán này ta thường giải theo hai cách sau:

☉ Cách 1: Đếm trực tiếp

- Nhận xét đề bài để phân chia các trường hợp xảy ra đối với bài toán cần đếm.
- Đếm số phương án thực hiện trong mỗi trường hợp đó
- Kết quả của bài toán là tổng số phương án đếm trong các trường hợp trên

☉ Cách 2: Đếm gián tiếp (đếm phần bù)

Trong trường hợp hành động H chia nhiều trường hợp thì ta đi đếm phần bù của bài toán như sau:

- Đếm số phương án thực hiện hành động H (không cần quan tâm đến có thỏa tính chất T hay không) ta được a phương án.
- Đếm số phương án thực hiện hành động H không thỏa tính chất T ta được b phương án.

Khi đó số phương án thỏa yêu cầu bài toán là: $a - b$.

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN.

☞ Bài 01.

Một người có 7 áo trong đó có 3 áo trắng và 5 cà vạt trong đó có 2 cà vạt vàng. Hỏi người đó có bao nhiêu cách chọn bộ áo và cà vạt, nếu:

- ① Chọn áo nào cũng được, và cà vạt nào cũng được.
- ② Đã chọn áo trắng thì không chọn cà vạt vàng.

Lời giải

① Chọn áo nào cũng được, và cà vạt nào cũng được.

- ♦ Số cách chọn 1 một bộ áo và cà vạt là: $7 \cdot 5 = 35$.

② Đã chọn áo trắng thì không chọn cà vạt vàng.

- ♦ Số cách chọn áo trắng không chọn cà vạt vàng là: $3 \cdot 3 = 9$
- ♦ Số cách chọn bộ áo và cà vạt sao cho không phải áo trắng và cà vạt bất kì trong 5 cái cà vạt là: $4 \cdot 5 = 20$





- ♦ Số cách chọn bộ áo và cà vạt sao cho áo trắng thì không chọn cà vạt vàng là: $9 + 20 = 29$

Bài 02.

Giả sử bạn muốn màu áo sơ mi cỡ 39 hoặc 40. Áo cỡ 39 có 5 màu khác nhau, áo cỡ 40 có 4 màu khác nhau. Hỏi bạn có bao nhiêu sự lựa chọn (về màu và cỡ áo)?

Lời giải

- ♦ Áo cỡ 39 có 5 cách chọn
 - ♦ Áo cỡ 40 có 4 cách chọn
- Vậy có tất cả $5 + 4 = 9$ cách chọn về màu và cỡ áo.

Bài 03.

Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ.

- ① Nhà trường cần chọn một học sinh ở khối 11 đi dự dạ hội của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?
- ② Nhà trường cần chọn hai học sinh trong đó có một nam và một nữ đi dự trại hè của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

Lời giải

① Nhà trường cần chọn một học sinh ở khối 11 đi dự dạ hội của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

- ♦ Học sinh nam có 280 cách chọn
- ♦ Học sinh nữ có 325 cách chọn
- ♦ Chọn một học sinh khối 11 đi dự dạ hội của học sinh thành phố thì có $280 + 325 = 605$ cách.

② Nhà trường cần chọn hai học sinh trong đó có một nam và một nữ đi dự trại hè của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

- ♦ Học sinh nam có 280 cách chọn
- ♦ Học sinh nữ có 325 cách chọn
- ♦ Chọn hai học sinh trong đó có một nam và một nữ đi dự trại hè là: $280 \cdot 325 = 91000$ cách.

Bài 04.

Mỗi bảng số xe gắn máy ở thành phố X có cấu tạo như sau. Phần đầu gồm hai chữ cái trong bảng chữ cái, phần sau gồm 4 chữ số trong các chữ số: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ví dụ: SA0979, EY3535, ... Hỏi có bao nhiêu cách tạo bảng số xe theo cấu tạo trên? (Giả sử bảng chữ cái có tất cả 26 chữ cái)

Lời giải

- ♦ Chọn hai chữ cái cho phần đầu có 26^2 (mỗi chữ số có 26 cách chọn)
 - ♦ Chọn 4 chữ số cho phần đuôi có 10^4 (mỗi chữ số có 10 cách chọn)
- Vậy có thể tạo được $26^2 \cdot 10^4 = 6760000$ cách.

Bài 05.

Trong một bản đồ được lập theo kỹ thuật số của thành phố X, mọi căn nhà trong thành phố đều được lập địa chỉ và "địa chỉ số" của mỗi căn nhà là một dãy gồm 16 chữ số lấy từ hai chữ





số 0 và 1. Ví dụ: 0000110000111100 (4 chữ số 0, 2 chữ số 1, 4 chữ số 0, 4 chữ số 1, 2 chữ số 0). Hỏi thành phố X có tối đa bao nhiêu căn nhà?

Lời giải

- ♦ Ta có: “địa chỉ số” của mỗi căn nhà là một dãy gồm 16 chữ số
- ♦ Mà mỗi chữ số có 2 cách chọn. (0 hoặc 1)
- ♦ Nên theo quy tắc nhân, thành phố X có tối đa: 2^{16} căn nhà.

Bài 06.

Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà hai chữ số của nó đều chẵn?

Lời giải

- ♦ Gọi $\overline{a_1a_2}$ là số thỏa yêu cầu bài toán.
 - ♦ Chọn $a_1 \in \{2; 4; 6; 8\}$ có: 4 cách.
 - ♦ Chọn $a_2 \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$ có: 5 cách.
- Vậy theo quy tắc nhân có: $4.5 = 20$ số thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 07.

Có bao nhiêu số nguyên dương n gồm 3 chữ số có nghĩa (chữ số đầu tiên phải khác 0) trong mỗi trường hợp sau đây:

- ① Không có yêu cầu gì thêm.
- ② Chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị của n giống hệt nhau.
- ③. Chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị của n giống hệt nhau và hai chữ số này khác chữ số hàng trăm của n .

Lời giải

- ♦ Gọi tập $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ và $n = \overline{a_1a_2a_3}$ là số thỏa yêu cầu sau:

① Không có yêu cầu gì thêm.

- ♦ Chọn $a_1 \in X \setminus \{0\}$ có: 9 cách.
- ♦ Chọn $a_2 \in X$ có: 10 cách.
- ♦ Chọn $a_3 \in X$ có: 10 cách.
- ♦ Theo quy tắc nhân có: $9.10.10 = 900$ số.

② Chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị của n giống hệt nhau.

- ♦ Chọn $a_1 \in X \setminus \{0\}$ có: 9 cách.
- ♦ Chọn $a_2 \in X$ có: 10 cách.
- ♦ Chọn $a_3 = a_2$ có: 1 cách.
- ♦ Theo quy tắc nhân có: $9.10.1 = 90$ số.

③. Chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị của n giống hệt nhau và hai chữ số này khác chữ số hàng trăm của n .

- ♦ Chọn $a_1 \in X \setminus \{0\}$ có: 9 cách.





- ♦ Chọn $a_2 \in X \setminus \{a_1\}$ có: 9 cách.
- ♦ Chọn $a_3 = a_2$ có: 1 cách.
- ♦ Theo quy tắc nhân có: $9.9 = 81$ số.

Bài 08.

Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số nguyên dương n trong mỗi trường hợp sau đây:

- ① n gồm 4 chữ số đôi một khác nhau và bắt đầu bằng 56 hoặc 65.
- ② n gồm 5 chữ số đôi một khác nhau và tận cùng bằng một chữ số khác 3.
- ③ n gồm 6 chữ số đôi một khác nhau trong đó phải có 1 và 3 đứng cạnh nhau, không kể thứ tự trước sau.

Lời giải

- ♦ Gọi tập $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

- ① n gồm 4 chữ số đôi một khác nhau và bắt đầu bằng 56 hoặc 65.

- ♦ Gọi $n = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$ là số thỏa yêu cầu bài toán.
- ♦ Chọn $\overline{a_1 a_2} \in \{56; 65\}$ có: 2 cách.
- ♦ Chọn $a_3 \in X \setminus \{a_1; a_2\}$ có: 7 cách.
- ♦ Chọn $a_4 \in X \setminus \{a_1; a_2; a_3\}$ có: 6 cách.
- ♦ Theo quy tắc nhân có: $2.7.6 = 84$ số.

- ② n gồm 5 chữ số đôi một khác nhau và tận cùng bằng một chữ số khác 3.

- ♦ Gọi $n = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$ là số thỏa yêu cầu bài toán.
- ♦ Chọn $a_5 \in X \setminus \{3\}$ có: 8 cách.
- ♦ Chọn $a_1 \in X \setminus \{a_5\}$ có: 8 cách.
- ♦ Chọn $a_2 \in X \setminus \{a_1; a_5\}$ có: 7 cách.
- ♦ Chọn $a_3 \in X \setminus \{a_1; a_5; a_2\}$ có: 6 cách.
- ♦ Chọn $a_4 \in X \setminus \{a_1; a_5; a_2; a_3\}$ có: 5 cách.
- ♦ Theo quy tắc nhân có: $8.8.7.6.5 = 13440$ số.

- ③ n gồm 6 chữ số đôi một khác nhau trong đó phải có 1 và 3 đứng cạnh nhau, không kể thứ tự trước sau.

- ♦ Gọi $n = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}$ là số thỏa yêu cầu bài toán.
- ♦ Chọn 2 vị trí cạnh nhau từ 6 vị trí (từ $a_1 \rightarrow a_6$) có: 5 cách.
- ♦ Xếp số 1 và 3 vào 2 vị trí vừa chọn có: 2 cách.
- ♦ Chọn số cho 4 vị trí từ tập $X \setminus \{1; 3\}$ có: $7.6.5.4 = 840$ cách.
- ♦ Theo quy tắc nhân có: $5.2.840 = 8400$ số.

Bài 09.





Có bao nhiêu số nguyên dương n gồm 5 chữ số có nghĩa (chữ số đầu tiên phải khác 0) trong mỗi trường hợp sau đây:

- ①. n không chia hết cho 10.
- ②. n là bội số của 5.
- ③. n là số lẻ.

Lời giải

♦ Gọi tập $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ và $n = a_1a_2a_3a_4a_5$ là số thỏa yêu cầu sau:

①. n không chia hết cho 10.

- ♦ Chọn $a_1 \in X \setminus \{0\}$ có: 9 cách.
- ♦ Chọn $a_2 \in X$ có: 10 cách.
- ♦ Chọn $a_3 \in X$ có: 10 cách.
- ♦ Chọn $a_4 \in X$ có: 10 cách.
- ♦ Chọn $a_5 \in X \setminus \{0\}$ có: 9 cách.

Theo quy tắc nhân có: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 9 = 81000$ số.

②. n là bội số của 5.

- ♦ Chọn $a_1 \in X \setminus \{0\}$ có: 9 cách.
- ♦ Chọn $a_2 \in X$ có: 10 cách.
- ♦ Chọn $a_3 \in X$ có: 10 cách.
- ♦ Chọn $a_4 \in X$ có: 10 cách.
- ♦ Chọn $a_5 \in \{0; 5\}$ có: 2 cách.

Theo quy tắc nhân có: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 18000$ số.

③. n là số lẻ.

- ♦ Chọn $a_1 \in X \setminus \{0\}$ có: 9 cách.
- ♦ Chọn $a_2 \in X$ có: 10 cách.
- ♦ Chọn $a_3 \in X$ có: 10 cách.
- ♦ Chọn $a_4 \in X$ có: 10 cách.
- ♦ Chọn $a_5 \in \{1; 3; 5; 7; 9\}$ có: 5 cách.

Theo quy tắc nhân có: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 45000$ số.

Bài 10.

Từ các chữ số 1, 4, 5, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số nguyên dương n trong mỗi trường hợp sau đây:

- ①. n gồm bốn chữ số.
- ②. n gồm bốn chữ số đôi một khác nhau.
- ③. $n > 800$ và gồm các chữ số đôi một khác nhau.





- ④. $n < 200$ và n là số chẵn.
 ⑤. n là số lẻ gồm năm chữ số, trong đó các chữ số cách đều chữ số chính giữa thì giống nhau.
 ⑥. $555 < n < 5555$ và n chia hết cho 5.

Lời giải

①. n gồm bốn chữ số.

- ♦ Có thể lập được $5^4 = 625$ số nguyên dương n gồm bốn chữ số.

②. n gồm bốn chữ số đôi một khác nhau.

- ♦ Có thể lập được $A_5^4 = 120$ số nguyên dương n gồm bốn chữ số đôi một khác nhau.

③. $n > 800$ và gồm các chữ số đôi một khác nhau.

⊙ Trường hợp 1: n gồm ba chữ số.

Gọi n có dạng $\overline{abc}$. Để $n > 800$ và gồm các chữ số đôi một khác nhau thì

- ♦ a có 2 lựa chọn là $\{8; 9\}$
 - ♦ b có 4 lựa chọn vì phải khác a
 - ♦ c có 3 lựa chọn vì phải khác a, b
- Vậy có $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$.

⊙ Trường hợp 2: n gồm bốn chữ số. Thỏa mãn $n > 800$.

- ♦ Để n gồm các chữ số đôi một khác nhau thì có $A_5^4 = 120$ thỏa mãn.

⊙ Trường hợp 3: n gồm năm chữ số. Thỏa mãn $n > 800$.

- ♦ Để n gồm các chữ số đôi một khác nhau thì có $A_5^5 = 120$ thỏa mãn.

Vậy có $120 + 120 + 24 = 264$ số n thỏa mãn ycbt.

④. $n < 200$ và n là số chẵn.

⊙ Trường hợp 1: n gồm một chữ số.

- ♦ Vì $n < 200$ và n là số chẵn nên có 2 số thỏa mãn là 4, 8.

⊙ Trường hợp 2: n gồm hai chữ số.

Gọi n có dạng $\overline{ab}$ thỏa mãn $n < 200$ và để n là số chẵn ta có

- ♦ b có 2 lựa chọn là $\{4; 8\}$
 - ♦ a có 5 lựa chọn.
- Có $2 \cdot 5 = 10$.

⊙ Trường hợp 3: n gồm ba chữ số.

Vì $n < 200$ nên gọi n có dạng $\overline{1bc}$ và để n là số chẵn ta có

- ♦ c có 2 lựa chọn là $\{4; 8\}$
 - ♦ b có 5 lựa chọn.
- Có $2 \cdot 5 = 10$.

Vậy có $10 + 10 + 2 = 22$ số n thỏa mãn ycbt.

⑤. n là số lẻ gồm năm chữ số, trong đó các chữ số cách đều chữ số chính giữa thì giống nhau.





- ♦ Vì n là số gồm năm chữ số, trong đó các chữ số cách đều chữ số chính giữa thì giống nhau.

Gọi n có dạng $\overline{abcba}$ để n là số lẻ ta có

- ♦ a có 3 lựa chọn là $\{1; 5; 9\}$

- ♦ b có 5 lựa chọn.

- ♦ c có 5 lựa chọn.

Vậy có $5.5.3 = 75$ số n thỏa mãn ycbt.

⑥ $555 < n < 5555$ và n chia hết cho 5.

⊙ Trường hợp 1: n gồm ba chữ số.

- ♦ Gọi n có dạng $\overline{abc}$. Vì n chia hết cho 5 nên c là chữ số 5.

Vì n gồm ba chữ số nên thỏa mãn $n < 5555$. Để $555 < n$ ta có

- ♦ Nếu a là chữ số 5 thì b có 2 lựa chọn là $\{8; 9\}$

- ♦ Nếu a có 2 lựa chọn là $\{8; 9\}$ thì b có 5 lựa chọn

Có $2 + 2.5 = 12$.

⊙ Trường hợp 2: n gồm bốn chữ số.

- ♦ Gọi n có dạng $\overline{abcd}$. Vì n chia hết cho 5 nên d là chữ số 5.

Vì n gồm bốn chữ số nên thỏa mãn $555 < n$. Để $n < 5555$ ta có

- ♦ Nếu a, b đều là chữ số 5 thì c có 2 lựa chọn là $\{1; 4\}$.

- ♦ Nếu a là chữ số 5 thì b có 2 lựa chọn là $\{1; 4\}$ và c có 5 lựa chọn.

- ♦ Nếu a có 2 lựa chọn là $\{1; 4\}$ thì b, c có 5 lựa chọn.

- ♦ Có $2 + 2.5 + 2.5.5 = 62$.

Vậy có $12 + 62 = 74$ số n thỏa mãn ycbt.

Bài 11.

Dãy $(x_1, x_2, \dots, x_{10})$ trong đó mỗi kí tự x_i chỉ nhận giá trị 0 hoặc 1 được gọi là dãy nhị phân 10 bit

①. Có bao nhiêu dãy nhị phân 10 bit.

②. Có bao nhiêu dãy nhị phân 10 bit trong đó có ít nhất ba kí tự 0 và ít nhất ba kí tự 1.

Lời giải

①. Có bao nhiêu dãy nhị phân 10 bit.

- ♦ Có $2^{10} = 1024$ dãy nhị phân 10 bit.

②. Có bao nhiêu dãy nhị phân 10 bit trong đó có ít nhất ba kí tự 0 và ít nhất ba kí tự 1.

⊙ Trường hợp 1: dãy nhị phân có ba kí tự 0 và bảy kí tự 1.

- ♦ Khi đó có $\frac{10!}{3!.7!} = 120$ dãy nhị phân 10 bit.

⊙ Trường hợp 2: dãy nhị phân có bốn kí tự 0 và sáu kí tự 1.





- ♦ Khi đó có $\frac{10!}{4!.6!} = 210$ dãy nhị phân 10 bit.

◎ **Trường hợp 3:** dãy nhị phân có năm kí tự 0 và năm kí tự 1.

- ♦ Khi đó có $\frac{10!}{5!.5!} = 252$ dãy nhị phân 10 bit.

◎ **Trường hợp 4:** dãy nhị phân có sáu kí tự 0 và bốn kí tự 1.

- ♦ Khi đó có $\frac{10!}{4!.6!} = 210$ dãy nhị phân 10 bit.

◎ **Trường hợp 5:** dãy nhị phân có bảy kí tự 0 và ba kí tự 1.

- ♦ Khi đó có $\frac{10!}{3!.7!} = 120$ dãy nhị phân 10 bit.

Vậy có $120 + 210 + 252 + 210 + 120 = 912$ dãy nhị phân 10 bit thỏa mãn ycbt.

Bài 12.

Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ trong khoảng $(2000; 3000)$ có thể tạo nên bằng các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 nếu:

- ①. Các chữ số không nhất thiết khác nhau.
- ②. Các chữ số của nó khác nhau.

Lời giải

①. **Các chữ số không nhất thiết khác nhau.**

- ♦ Gọi số tự nhiên trong khoảng $(2000; 3000)$ có dạng $\overline{2abc}$.
 - ♦ Vì là số tự nhiên lẻ nên c có 3 lựa chọn là $\{1; 3; 5\}$.
 - ♦ a, b có 6 lựa chọn.
- Vậy có $6.6.3 = 108$ số tự nhiên thỏa mãn ycbt.

②. **Các chữ số của nó khác nhau.**

- ♦ Gọi số tự nhiên trong khoảng $(2000; 3000)$ có dạng $\overline{2abc}$.
 - ♦ Vì là số tự nhiên lẻ nên c có 3 lựa chọn là $\{1; 3; 5\}$.
 - ⇒ a có 4 lựa chọn vì khác 2 và c .
 - ⇒ b có 3 lựa chọn vì khác 2 và c, a .
- Vậy có $3.4.3 = 36$ số tự nhiên thỏa mãn ycbt.

Bài 13.

Có bao nhiêu số tự nhiên lớn hơn 4000 có bốn chữ số được tạo thành từ các chữ số 1, 3, 5, 7 nếu:

- ①. Các chữ số này không nhất thiết khác nhau.
- ②. Các chữ số này khác nhau.

Lời giải

①. **Các chữ số này không nhất thiết khác nhau.**

- ♦ Gọi số tự nhiên lớn hơn 4000 có bốn chữ số có dạng $\overline{abcd}$.





♦ Vì là số tự nhiên lớn hơn 4000 nên a có 2 lựa chọn là $\{5; 7\}$.

$\Rightarrow b, c, d$ có 4 lựa chọn.

Vậy có $4.4.4.2 = 128$ số tự nhiên thỏa mãn ycbt.

②. Các chữ số này khác nhau.

♦ Gọi số tự nhiên lớn hơn 4000 có bốn chữ số có dạng $\overline{abcd}$.

♦ Vì là số tự nhiên lớn hơn 4000 nên a có 2 lựa chọn là $\{5; 7\}$.

$\Rightarrow b$ có 3 lựa chọn vì khác a .

$\Rightarrow c$ có 2 lựa chọn vì khác a, b .

$\Rightarrow d$ có 1 lựa chọn vì khác a, b, c .

Vậy có $2.3.2.1 = 12$ số tự nhiên thỏa mãn ycbt.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1. Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau và là số chẵn:

A. 360

B. 343

C. 523

D. 347

Lời giải

Chọn A

♦ Gọi số cần lập $x = \overline{abcd}$; $a, b, c, d \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ và a, b, c, d đôi một khác nhau.

♦ Công việc ta cần thực hiện là lập số x thỏa mãn x là số chẵn nên d phải là số chẵn.

♦ Do đó để thực hiện công việc này ta thực hiện qua các công đoạn sau

$\Rightarrow$ Bước 1: Chọn d : Vì d là số chẵn nên d chỉ có thể là các số 2, 4, 6 nên d có 3 cách chọn.

$\Rightarrow$ Bước 2: Chọn a : Vì ta đã chọn d nên a chỉ có thể chọn một trong các số của tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{d\}$ nên có 6 cách chọn a

$\Rightarrow$ Bước 3: Chọn b : Tương tự ta có 5 cách chọn b

$\Rightarrow$ Bước 4: Chọn c : Có 4 cách chọn.

Vậy theo quy tắc nhân có: $3.6.5.4 = 360$ số thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 2. Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau và là số lẻ

A. 360

B. 343

C. 480

D. 347

Lời giải

Chọn C

Vì số x cần lập là số lẻ nên d phải là số lẻ. Ta lập x qua các công đoạn sau.

$\Rightarrow$ Bước 1: Có 4 cách chọn d

$\Rightarrow$ Bước 2: Có 6 cách chọn a

$\Rightarrow$ Bước 3: Có 5 cách chọn b

$\Rightarrow$ Bước 4: Có 4 cách chọn c

Vậy có 480 số thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 3. Cho các số 1, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số với các chữ số khác nhau:

A. 12.

B. 24.

C. 64.

D. 256.

Lời giải





Chọn B

Gọi số tự nhiên có 4 chữ số cần tìm là: $\overline{abcd}$, $a \neq 0$, khi đó:

$\Rightarrow a$ có 4 cách chọn

$\Rightarrow b$ có 3 cách chọn

$\Rightarrow c$ có 2 cách chọn

$\Rightarrow d$ có 1 cách chọn

Vậy có: $4.3.2.1 = 24$ số

Câu 4. Từ các chữ số 2,3,4,5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 4 chữ số:

A. 256.

B. 120.

C. 24.

D. 16.

Lời giải

Chọn A

Gọi số tự nhiên có 4 chữ số cần tìm là: $\overline{abcd}$, $a \neq 0$, khi đó:

$\Rightarrow a$ có 4 cách chọn

$\Rightarrow b$ có 4 cách chọn

$\Rightarrow c$ có 4 cách chọn

$\Rightarrow d$ có 4 cách chọn

Vậy có: $4.4.4.4 = 256$ số

Câu 5. Có bao nhiêu chữ số chẵn gồm bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ các số 0,1,2,4,5,6,8.

A. 252

B. 520

C. 480

D. 368

Lời giải

Chọn B

Gọi $x = \overline{abcd}$; $a, b, c, d \in \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 8\}$.

Cách 1: Tính trực tiếp

Vì x là số chẵn nên $d \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

⊙ **Trường hợp 1:** $d = 0 \Rightarrow$ có 1 cách chọn d .

$\Rightarrow$ Với mỗi cách chọn d ta có 6 cách chọn $a \in \{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$

$\Rightarrow$ Với mỗi cách chọn a, d ta có 5 cách chọn $b \in \{1, 2, 4, 5, 6, 8\} \setminus \{a\}$

$\Rightarrow$ Với mỗi cách chọn a, b, d ta có 4 cách chọn $c \in \{1, 2, 4, 5, 6, 8\} \setminus \{a, b\}$

Suy ra trong trường hợp này có $1.6.5.4 = 120$ số.

⊙ **Trường hợp 2:** $d \neq 0 \Rightarrow d \in \{2, 4, 6, 8\} \Rightarrow$ có 4 cách chọn d

$\Rightarrow$ Với mỗi cách chọn d , do $a \neq 0$ nên ta có 5 cách chọn $a \in \{1, 2, 4, 5, 6, 8\} \setminus \{d\}$.

$\Rightarrow$ Với mỗi cách chọn a, d ta có 5 cách chọn $b \in \{1, 2, 4, 5, 6, 8\} \setminus \{a\}$

$\Rightarrow$ Với mỗi cách chọn a, b, d ta có 4 cách chọn $c \in \{1, 2, 4, 5, 6, 8\} \setminus \{a, b\}$

Suy ra trong trường hợp này có $4.5.5.4 = 400$ số.

Vậy có tất cả $120 + 400 = 520$ số cần lập.

Cách 2: Tính gián tiếp (đếm phần bù)

♦ Gọi $A = \{ \text{số các số tự nhiên có bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ } 0, 1, 2, 4, 5, 6, 8 \}$





- ♦ $B = \{ \text{số các số tự nhiên lẻ có bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ } 0,1,2,4,5,6,8 \}$
- ♦ $C = \{ \text{số các số tự nhiên chẵn có bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ } 0,1,2,4,5,6,8 \}$

Ta có: $|C| = |A| - |B|$.

- ♦ Dễ dàng tính được: $|A| = 6.6.5.4 = 720$.

- ♦ Ta đi tính $|B|$?

$x = \overline{abcd}$ là số lẻ $\Rightarrow d \in \{1,5\} \Rightarrow d$ có 2 cách chọn.

$\Rightarrow$ Với mỗi cách chọn d ta có 5 cách chọn a (vì $a \neq 0, a \neq d$)

$\Rightarrow$ Với mỗi cách chọn a, d ta có 5 cách chọn b

$\Rightarrow$ Với mỗi cách chọn a, b, d ta có 4 cách chọn c

Suy ra $|B| = 2.5.5.4 = 200$

Vậy $|C| = 520$.

- Câu 6.** Cho 6 chữ số 2,3,4,5,6,7 số các số tự nhiên chẵn có 3 chữ số lập thành từ 6 chữ số đó:
 A. 36. B. 18. C. 256. D. 108.

Lời giải

Chọn D

Gọi số tự nhiên có 3 chữ số cần tìm là: $\overline{abc}$, $a \neq 0$, khi đó:

$\Rightarrow c$ có 3 cách chọn

$\Rightarrow a$ có 6 cách chọn

$\Rightarrow b$ có 6 cách chọn

Vậy có: $3.6.6 = 108$ số

- Câu 7.** Cho các số 1,2,3,4,5,6,7. Số các số tự nhiên gồm 5 chữ số lấy từ 7 chữ số trên sao cho chữ số đầu tiên bằng 3 là:
 A. 7^5 . B. $7!$. C. 240. D. 2401.

Lời giải

Chọn D

Gọi số cần tìm có dạng: $\overline{abcde}$.

Chọn a : có 1 cách ($a = 3$)

Chọn $\overline{bcde}$: có 7^4 cách

Theo quy tắc nhân, có $1.7^4 = 2401$ (số)

- Câu 8.** Từ các số 1,3,5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số:
 A. 6. B. 8. C. 12. D. 27.

Lời giải

Chọn D

Gọi số tự nhiên cần tìm có dạng $\overline{abc}$.

Khi đó: a có 3 cách chọn, b có 3 cách chọn, c có 3 cách chọn.

Nên có tất cả $3.3.3 = 27$ số

- Câu 9.** Có bao nhiêu số có 2 chữ số, mà tất cả các chữ số đều lẻ:
 A. 25. B. 20. C. 30. D. 10.





Lời giải

Chọn A

Gọi số tự nhiên cần tìm có dạng $\overline{ab}$.

Khi đó: a có 5 cách chọn, b có 5 cách chọn.

Nên có tất cả $5 \cdot 5 = 25$ số.

Câu 10. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số lớn hơn 4 và đôi một khác nhau:

A. 240.

B. 120.

C. 360.

D. 24.

Lời giải

Chọn B

Gọi số tự nhiên cần tìm có dạng $\overline{abcde}$.

Khi đó: a có 5 cách chọn,

b có 4 cách chọn,

c có 3 cách chọn, d có 2 cách chọn, e có 1 cách chọn.

Nên có tất cả $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ số.

Câu 11. Cho tập. Từ tập A ta có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ gồm 4 chữ số đôi một khác nhau

A. 720.

B. 261.

C. 235.

D. 679.

Lời giải

Chọn A

Gọi số cần lập $x = \overline{abcd}$, $a, b, c, d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}; a \neq 0$

Chọn a : có 6 cách; chọn b, c, d có $6 \cdot 5 \cdot 4$

Vậy có 720 số.

Câu 12. Từ các số 1, 2, 3 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên khác nhau và mỗi số có các chữ số khác nhau:

A. 15.

B. 20.

C. 72.

D. 36

Lời giải

Chọn A

⊙ **Trường hợp 1:** số có 1 chữ số thì có 3 cách.

⊙ **Trường hợp 2:** số có 2 chữ số và mỗi số có các chữ số khác nhau thì có $3 \cdot 2 = 6$ số.

⊙ **Trường hợp 3:** số có 3 chữ số và mỗi số có các chữ số khác nhau thì có $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ số

Vậy có $3 + 6 + 6 = 15$ số.

Câu 13. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số đôi một khác nhau sao chữ số đầu chẵn chữ số đứng cuối lẻ.

A. 11523.

B. 11520.

C. 11346.

D. 22311.

Lời giải

Chọn B

Vì chữ số đứng đầu chẵn nên a_1 có 4 cách chọn,

Chữ số đứng cuối lẻ nên a_8 có 4 cách chọn.

Các số còn lại có $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ cách chọn

Vậy có $4^2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 11520$ số thỏa yêu cầu bài toán.





- Câu 14.** Tính tổng các chữ số gồm 5 chữ số khác nhau được lập từ các số 1, 2, 3, 4, 5?
 A. 3999960. B. 33778933. C. 4859473. D. 3847294.

Lời giải

Chọn A

Có 120 số có 5 chữ số được lập từ 5 chữ số đã cho.

Bây giờ ta xét vị trí của một chữ số trong 5 số 1, 2, 3, 4, 5 chẳng hạn ta xét số 1.

Số 1 có thể xếp ở 5 vị trí khác nhau,

Mỗi vị trí có $4! = 24$ số

Nên khi ta nhóm các vị trí này lại có tổng là: $24(10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 24.11111$

Vậy tổng các số có 5 chữ số là: $24.11111(1+2+3+4+5) = 3999960$.

- Câu 15.** Có 100000 vé được đánh số từ 00000 đến 99999. Hỏi số vé gồm 5 chữ số khác nhau.
 A. 30240. B. 32212. C. 23460. D. 32571.

Lời giải

Chọn A

Gọi số in trên vé có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$

Số cách chọn a_1 là 10 (a_1 có thể là 0).

Số cách chọn a_2 là 9.

Số cách chọn a_3 là 8.

Số cách chọn a_4 là 7.

Số cách chọn a_5 là 6. Vậy có $10.9.8.7.6 = 30.240$ cách.

- Câu 16.** Có bao nhiêu số tự nhiên nhỏ hơn 100 chia hết cho 2 và 3.
 A. 12. B. 16. C. 17. D. 20.

Lời giải

Chọn C

Số các số tự nhiên lớn nhất nhỏ hơn 100 chia hết cho 2 và 3 là 96.

Số các số tự nhiên nhỏ nhất nhỏ hơn 100 chia hết cho 2 và 3 là 0.

Số các số tự nhiên nhỏ hơn 100 chia hết cho 2 và 3 là $\frac{96-0}{6} + 1 = 17$ nên chọn C.

- Câu 17.** Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số đôi một khác nhau sao các số này lẻ không chia hết cho 5.
 A. 15120. B. 23523. C. 16862. D. 23145.

Lời giải

Chọn A

Vì x lẻ và không chia hết cho 5 nên $d \in \{1, 3, 7\} \Rightarrow d$ có 3 cách chọn

Số cách chọn các chữ số còn lại là: $7.6.5.4.3.2.1$

Vậy 15120 số thỏa yêu cầu bài toán.

- Câu 18.** Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau và là số chia hết cho 5
 A. 360. B. 120. C. 480. D. 347.





Lời giải

Chọn B

Vì x chia hết cho 5 nên d chỉ có thể là 5 $\Rightarrow$ có 1 cách chọn d .

Có 6 cách chọn a , 5 cách chọn b và 4 cách chọn c .

Vậy có $1.6.5.4 = 120$ số thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 19. Cho tập $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số và chia hết cho 5.

A. 660.

B. 432.

C. 679.

D. 523.

Lời giải

Chọn A

Gọi $x = \overline{abcde}$ là số cần lập, $e \in \{0, 5\}, a \neq 0$

$e = 0 \Rightarrow e$ có 1 cách chọn, cách chọn $a, b, c, d : 6.5.4.3$

Trường hợp này có 360 số

$e = 5 \Rightarrow e$ có một cách chọn, số cách chọn $a, b, c, d : 5.5.4.3 = 300$

Trường hợp này có 300 số

Vậy có 660 số thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 20. Số các số tự nhiên gồm 5 chữ số chia hết cho 10 là:

A. 3260.

B. 3168.

C. 9000.

D. 12070.

Lời giải

Chọn C

Gọi số cần tìm có dạng : $\overline{abcde}$ ($a \neq 0$).

Chọn e : có 1 cách ($e = 0$)

Chọn a : có 9 cách ($a \neq 0$)

Chọn $\overline{bcd}$: có 10^3 cách

Theo quy tắc nhân, có $1.9.10^3 = 9000$ (số).

----- HẾT -----





BÀI 2

HOÁN VỊ – CHỈNH HỢP – TỔ HỢP

I. HOÁN VỊ.

Định nghĩa

- ⊙ Cho tập A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi kết quả của cách sắp xếp thứ tự n của tập A được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.
Số các hoán vị của n phần tử đó là: $P_n = n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1 = n!$

Ví dụ 1

Giả sử muốn xếp 3 bạn A, B, C ngồi vào một bàn dài có 3 ghế. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho mỗi bạn ngồi một ghế?

Lời giải

- Có 3 cách xếp chỗ ngồi cho bạn A .
 - Có 2 cách xếp chỗ ngồi cho bạn B .
 - Có 1 cách xếp chỗ ngồi cho bạn C .
 - Số cách xếp chỗ ngồi cho 3 bạn đó là: $3.2.1 = 6$ (cách).
- ⇒ Mỗi cách xếp chỗ ngồi cho 3 bạn trên được gọi là một hoán vị vị trí cho 3 bạn.

Ví dụ 2

Có 5 quyển sách toán, 4 quyển sách lý và 3 quyển sách hóa. Hỏi có bao nhiêu cách xếp số sách đó lên một kệ dài trong mỗi trường hợp sau:

- ① Các quyển sách được xếp tùy ý.
- ② Các quyển sách cùng môn được xếp cùng nhau.

Lời giải

① Các quyển sách được xếp tùy ý.

⇒ Mỗi cách xếp tùy ý số sách đó lên kệ dài là một hoán vị của 12 phần tử.
Vậy số cách xếp số sách đó là số các hoán vị của 12 phần tử $P_{12} = 12!$ (cách).

② Các quyển sách cùng môn được xếp cùng nhau.

⇒ Để các quyển sách cùng môn được xếp cùng nhau ta buộc các quyển cùng môn lại thành một buộc khi đó số cách xếp các quyển sách đó là: $5!.4!.3!.3! = 103680$ (cách).





II. CHỈNH HỢP.

Định nghĩa

- Cho tập A có n phần tử ($n \geq 1$). Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử của A (gọi tắt là chỉnh hợp n chập k của A).

Số các chỉnh hợp chập k của của một tập hợp có n phần tử là: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ với $(1 \leq k \leq n)$.

Chú ý: Quy ước: $0! = 1, A_n^0 = 1, A_n^n = P_n = n!$

Ví dụ 3

Giả sử muốn chọn 3 trong 5 bạn A, B, C, D, E và sắp 3 bạn này vào một cái bàn dài. Hỏi có bao nhiêu cách?

Lời giải

- Có 5 cách chọn 1 trong 5 bạn xếp vào vị trí số 1.
 - Có 4 cách chọn 1 trong 4 bạn xếp vào vị trí số 2.
 - Có 3 cách chọn 1 trong 3 bạn xếp vào vị trí số 3.
 - Nên có $5.4.3 = 60$ (cách) xếp 3 trong 5 bạn đó vào một cái bàn dài.
- $\Rightarrow$ Mỗi cách chọn và sắp vị trí cho 3 bạn trong 5 bạn được gọi là một chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử.

Ví dụ 4

Cho tập hợp $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số, sao cho:

- ① Đôi một khác nhau..
- ② Số tự nhiên lẻ và đôi một khác nhau..

Lời giải

- ① Đôi một khác nhau.
 - Mỗi số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau là một chỉnh hợp chập 4 của 9 phần tử của tập hợp X .
 - Số các số lập được là: $A_9^4 = \frac{9!}{5!} = 3024$ (số)
- ② Số tự nhiên lẻ và đôi một khác nhau..
 - Số tự nhiên lẻ có 4 chữ số đôi một khác nhau thì chữ số hàng đơn vị có 5 cách chọn, các chữ số còn lại mỗi số là một chỉnh hợp chập 3 của 8 phần tử còn lại của X .
 - Số các số lập được là: $5.A_8^3 = 1680$. (số).





III. TỔ HỢP.

Định nghĩa

Cho tập hợp A có n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi tập con k phần tử được gọi là một tổ hợp chập k của n của A .

Số các tổ hợp chập k của tập hợp có n là: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ với ($0 \leq k \leq n$).

Chú ý: Quy ước: $C_n^0 = C_n^n = 1$

Tính chất:

- $C_n^k = C_n^{n-k}$ với ($0 \leq k \leq n$)
- $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ với ($0 \leq k \leq n$).

Ví dụ 5

Có bao nhiêu cách chọn một ban chấp hành có 3 người trong một chi đoàn gồm 14 đoàn viên?

Lời giải

—> Mỗi cách chọn một ban chấp hành chi đoàn gồm 3 người trong một chi đoàn gồm 14 đoàn viên được gọi là một tổ hợp chập 3 của 14 phần tử.

♦ Số cách chọn ban chấp hành gồm 3 người trong một chi đoàn gồm 14 đoàn viên là:

$$C_{14}^3 = \frac{14!}{3!(14-3)!} = 364 \text{ (cách chọn).}$$

Ví dụ 6

Vòng chung kết bóng đá Euro có 24 đội bóng thi đấu. Hỏi có bao nhiêu cách dự đoán 4 đội vào vòng chung kết?

Lời giải

—> Mỗi cách dự đoán 4 đội vào vòng chung kết là một tổ hợp chập 4 của 24 phần tử.

♦ Số cách dự đoán 4 đội trong 24 đội vào vòng chung kết là $C_{24}^4 = 10626$ (cách).

Ví dụ 7

Một lớp học có 30 học sinh, cần lập ra một tổ công tác gồm 5 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách?

Lời giải

♦ Số cách chọn 5 học sinh từ 30 học sinh để làm trực nhật là: $C_{30}^5 = 142506$.





Ví dụ 8

Trong không gian, cho tập hợp X gồm 10 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng.
Hỏi

- ① Có bao nhiêu đường thẳng tạo thành?
- ② Có bao nhiêu tam giác được tạo thành?

Lời giải

- ① Có bao nhiêu đường thẳng tạo thành?
♦ Số đường thẳng tạo thành từ tập X là tổ hợp chập 2 của 10.
 $\Rightarrow$ Vậy có $C_{10}^2 = 45$ (đường thẳng).
- ② Có bao nhiêu tam giác được tạo thành?
♦ Số tam giác tạo thành từ tập X là tổ hợp chập 3 của 10.
 $\Rightarrow$ Vậy có $C_{10}^3 = 120$ (tam giác).

Phân loại Hoán vị – Chỉnh hợp – Tổ hợp

○ Ta phân loại như sau:

Hoán vị	Chỉnh hợp	Tổ hợp
↻ Mỗi sắp xếp có thứ tự n phần tử của tập A là một hoán vị.	↻ Mỗi sắp xếp có thứ tự k phần tử lấy trong n phần tử của tập A là một chỉnh hợp chập k của n phần tử	↻ Mỗi tập con có k phần tử lấy trong n phần tử của tập A (khi liệt kê phần tử của A không cần thứ tự) là một tổ hợp chập k của n phần tử.
Số các hoán vị: $P_n = n!$	Số các chỉnh hợp: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	Số các tổ hợp: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

IV. BÀI TẬP TỰ LUẬN.

☑ Dạng 1. BÀI TẬP VỀ HOÁN VỊ.

↻ Bài 01.

Có bao nhiêu khả năng có thể xảy ra đối với thứ tự giữa các đội trong một giải bóng đá có 5 đội bóng? (Giả sử rằng không có hai đội nào có điểm trùng nhau).

Lời giải

- ♦ Mỗi cách sắp xếp 5 đội vào 5 vị trí từ 1 đến 5 là một hoán vị của 5 phần tử.
 $\Rightarrow$ Vậy có $5! = 120$ khả năng.





Bài 02.

Có bao nhiêu hoán vị của tập hợp $\{a, b, c, d, e, f\}$ mà phần tử cuối cùng bằng a .

Lời giải

- ♦ Mỗi cách sắp xếp b, c, d, e, f vào 5 vị trí đầu là một hoán vị của 5 phần tử.

⇒ Vậy có $5! = 120$ hoán vị.

Bài 03.

Với các chữ số $1, 2, 3, 4, 5$ có thể lập được bao nhiêu số nguyên dương n trong mỗi trường hợp sau đây

- ①. n có 5 chữ số đôi một khác nhau.
- ②. n là số chẵn có 5 chữ số đôi một khác nhau.
- ③. n là số lẻ có 5 chữ số đôi một khác nhau.

Lời giải

Gọi $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Giả sử số cần lập có dạng $n = \overline{abcde}$.

- ①. n có 5 chữ số đôi một khác nhau.

⇒ Xếp 5 số của tập X vào 5 vị trí có $5! = 120$ cách.

- ②. n là số chẵn có 5 chữ số đôi một khác nhau.

- ♦ n là số chẵn nếu e là số chẵn, $e \in \{2, 4\}$ có 2 cách chọn.

- ♦ Ứng với mỗi cách chọn e , từ $X \setminus \{e\}$, chọn 4 số để xếp vào 4 vị trí còn lại có $4!$ cách.

⇒ Theo quy tắc nhân ta có $2 \cdot 4! = 48$ (số).

- ③. n là số lẻ có 5 chữ số đôi một khác nhau.

- ♦ n là số lẻ nếu e là số lẻ, $e \in \{1, 3, 5\}$ có 3 cách chọn.

- ♦ Ứng với mỗi cách chọn e , từ $X \setminus \{e\}$, chọn 4 số để xếp vào 4 vị trí còn lại có $4!$ cách.

⇒ Theo quy tắc nhân ta có $3 \cdot 4! = 72$ (số).

Bài 04.

Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6$ thiết lập tất cả các số có sáu chữ số khác nhau, hỏi trong các số đã thiết lập được có bao nhiêu số mà hai chữ số 1 và 5 không đứng cạnh nhau.

Lời giải

Cách 1: Đếm trực tiếp

- ♦ Xếp 1 và 5 vào 2 trong 6 vị trí mà chúng không đứng cạnh nhau có $(4 + 3 + 2 + 1) \cdot 2 = 20$ cách.

- ♦ Xếp 4 số $2, 3, 4, 6$ vào 4 vị trí còn lại có $4!$ cách.

⇒ Theo quy tắc nhân, ta có $20 \cdot 4! = 480$ (số).

Cách 2: Đếm phần bù

- ♦ Xếp 6 số vào 6 vị trí có $6!$ cách.





- ♦ Xếp 1,5 vào 2 trong 6 vị trí sao cho chúng đứng cạnh nhau có $5 \cdot 2 = 10$ cách.
- ♦ Xếp 4 số 2,3,4,6 vào 4 vị trí còn lại có $4!$ cách.
- ⇒ Vậy có $6! - 10 \cdot 4! = 480$ (số).

Cách 3: Sử dụng thủ thuật nhỏ

- ♦ Xếp 6 số vào 6 vị trí có $6!$ cách.
- ♦ Xem 1 ; 5 đứng cạnh nhau là một số α , xét trường hợp 1,5 đứng cạnh nhau,
- ♦ Số cách lập chính là số hoán vị của tập $\{\alpha, 2, 3, 4, 6\}$,
- ♦ Do có 2 cách tạo ra α nên có $5! \cdot 2$ số trong trường hợp này.
- ⇒ Vậy có $6! - 5! \cdot 2 = 480$ (số).

Bài 05.

Xét những số gồm 9 chữ số, trong đó có năm chữ số 1 và bốn chữ số còn lại 2,3,4,5. Hỏi có bao nhiêu số như vậy biết rằng năm chữ số 1 được xếp kế nhau.

Lời giải

- ♦ Xếp năm chữ số 1 kế nhau vào 9 vị trí có 5 cách.
- ♦ Xếp 2,3,4,5 vào 4 vị trí còn lại có $4!$ cách.
- ⇒ Theo quy tắc nhân, ta được $5 \cdot 4! = 120$ (số).

Bài 06.

Có bao nhiêu cách xếp 5 học sinh A, B, C, D, E vào một chiếc ghế sao cho:

- ①. C ngồi chính giữa.
- ②. A và E ngồi ở hai đầu ghế.

Lời giải

①. C **ngồi chính giữa.**

- ♦ Xếp C ngồi chính giữa có 1 cách.
- ♦ Xếp 4 người A, B, D, E còn lại vào 4 vị trí còn lại có $4!$ cách.
- ⇒ Theo quy tắc nhân ta được $1 \cdot 4! = 24$ (số).

②. A và E **ngồi ở hai đầu ghế.**

- ♦ Xếp A và E ngồi ở hai đầu ghế có $2!$ cách.
- ♦ Xếp 3 người B, C, D vào 3 vị trí còn lại có $3!$ cách.
- ⇒ Theo quy tắc nhân, ta được $2! \cdot 3! = 12$ (số).

Bài 07.

Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho năm người gồm 3 nam và 2 nữ vào năm cái ghế xếp thành một dãy nếu:

- ①. Không có yêu cầu gì thêm.
- ②. Nam nữ ngồi xen kẽ nhau.
- ③. Hai nữ ngồi ở đầu và cuối dãy ghế.
- ④. Hai nữ luôn luôn ngồi kề nhau.

Lời giải

①. **Không có yêu cầu gì thêm.**





- ♦ Mỗi cách xếp thỏa mãn yêu cầu là một hoán vị của 5 phần tử.
- ⇒ Do đó số cách sắp xếp là $P_5 = 5! = 120$ cách.

②. Nam nữ ngồi xen kẽ nhau.

- ♦ Giả sử các ghế được đánh thứ tự từ 1 đến 5.
- ♦ Để nam nữ ngồi xen kẽ nhau thì nam ngồi ở ghế ghi số lẻ, nữ ngồi ghế ghi số chẵn.
- ⇒ Số cách sắp xếp là: $3! \cdot 2! = 12$ cách.

③. Hai nữ ngồi ở đầu và cuối dãy ghế.

- ♦ 2 nữ ngồi ở đầu và cuối dãy ghế có 2! cách.
- ♦ 3 nam ngồi ở 3 ghế giữa có 3! cách.
- ⇒ Vậy có $2! \cdot 3! = 12$ cách xếp.

④. Hai nữ luôn luôn ngồi kề nhau.

- ♦ Coi 2 nữ là một phần tử a .
- ♦ Xếp phần tử a và 3 nam vào dãy có 4! cách.
- ♦ Hoán đổi vị trí 2 nữ trong phần tử a có 2! cách.
- ⇒ Do đó có $4! \cdot 2! = 48$ cách.

✎ Bài 08.

40 thí sinh, trong đó có thí sinh A và B được xếp chỗ ngồi vào 20 bàn trong một phòng thi, mỗi bàn xếp đủ 2 thí sinh. Có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi sao cho hai thí sinh A và B được ngồi cùng một bàn?

Lời giải

- ♦ Chọn một bàn trong 20 bàn để xếp hai thí sinh A và B vào bàn đó có: $20 \cdot 2!$ cách.
- ♦ Xếp 38 thí sinh còn lại vào các vị trí còn lại có: $38!$ cách.
- ⇒ Vậy có $20 \cdot 2! \cdot 38! = 40 \cdot 38!$ cách xếp.

✎ Bài 09.

Trong phòng thi có hai dãy ghế đối diện nhau qua một cái bàn dài, mỗi dãy gồm 6 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 6 nam sinh và 6 nữ sinh vào hai dãy ghế này. Có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi trong mỗi trường hợp sau đây:

- ①. Các học sinh ngồi tùy ý.
- ②. Nam sinh và nữ sinh ngồi riêng dãy.
- ③. Nam sinh và nữ sinh ngồi xen kẽ nhau trong từng dãy.
- ④. Bất cứ 2 người nào ngồi cạnh nhau cũng đều khác giới và bất cứ 2 người nào ngồi đối diện nhau cũng đều khác giới.
- ⑤. Bất cứ 2 người nào đối diện nhau cũng đều khác giới

Lời giải

①. Các học sinh ngồi tùy ý.

- ♦ Mỗi cách xếp thỏa mãn yêu cầu là một hoán vị của 12 phần tử.





⇒ Do đó số cách sắp xếp là $P_{12} = 12! = 479001600$ cách.

②. Nam sinh và nữ sinh ngồi riêng dãy.

Giả sử gọi 2 dãy ghế là dãy A và dãy B.

⊙ Trường hợp 1:

♦ Các bạn nam ngồi dãy A, các bạn nữ ngồi dãy B

⇒ Số cách xếp là: $6!.6!$ cách.

⊙ Trường hợp 2:

♦ Các bạn nữ ngồi dãy A, các bạn nam ngồi dãy B

♦ Số cách xếp là: $6!.6!$ cách.

⇒ Vậy số cách xếp là: $2.6!.6! = 1036800$ cách.

③. Nam sinh và nữ sinh ngồi xen kẽ nhau trong từng dãy.

♦ Giả sử gọi 2 dãy ghế là dãy A và dãy B.

♦ Chọn 3 bạn nam, 3 bạn nữ để xếp vào dãy A có: $C_6^3.C_6^3$.

♦ Trong dãy đó xếp sao cho nam và nữ ngồi xen kẽ nhau có: $3!.3!.2$ cách.

♦ Xếp 3 nam, 3 nữ còn lại vào dãy B sao cho nam và nữ ngồi xen kẽ nhau có $3!.3!.2$ cách.

⇒ Vậy số cách xếp là: $C_6^3.C_6^3.3!.3!.2.3!.3!.2 = 2073600$ cách.

④. Bất cứ 2 người nào ngồi cạnh nhau cũng đều khác giới và bất cứ 2 người nào ngồi đối diện nhau cũng đều khác giới.

Giả sử gọi 2 dãy ghế là dãy A và dãy B.

Dãy A các ghế đánh số từ 1 đến 6, dãy B các ghế đánh số từ 7 đến 12

⊙ Trường hợp 1:

♦ Các bạn nam ngồi ghế ghi số chẵn ở dãy A và số lẻ ở dãy B.

♦ Các bạn nữ ngồi ở ghế ghi số lẻ của dãy A và số chẵn ở dãy B có: $6!.6!$ cách.

⊙ Trường hợp 2:

♦ Ngược lại có $6!.6!$ cách.

⇒ Vậy số cách xếp là: $2.6!.6! = 1036800$ cách.

⑤. Bất cứ 2 người nào đối diện nhau cũng đều khác giới

♦ Giả sử gọi 2 dãy ghế là dãy A và dãy B.

♦ Dãy A các ghế đánh số từ 1 đến 6, dãy B các ghế đánh số từ 7 đến 12

♦ Chọn một bạn để xếp vào vị trí ghế số 1 có 12 cách.

♦ Chọn một bạn để xếp vào vị trí ghế số 7 để khác giới với bạn vị trí ghế số 1 có 6 cách.

♦ Chọn một bạn để xếp vào vị trí ghế số 2 có 10 cách.

♦ Chọn một bạn để xếp vào vị trí ghế số 8 để khác giới với bạn vị trí ghế số 1 có 5 cách.

⇒ Cứ tuân theo cách xếp như vậy, ta có số cách xếp là: $12.10.8.6.4.2.6.5.4.3.2 = 33177600$

🔖 Bài 10.

Có bao nhiêu cách xếp 40 học sinh gồm 20 học sinh trường A và 20 học sinh trường B thành 4 hàng dọc, mỗi hàng 10 người (tức 10 hàng ngang, mỗi hàng 4 người) trong mỗi trường hợp sau đây:

① Không có yêu cầu gì thêm.





- ② Không có học sinh cùng trường đứng kề nhau mỗi hàng ngang và tất cả các học sinh trong mỗi hàng đều cùng trường.
- ③ Không có học sinh cùng trường đứng kề nhau trong mỗi hàng dọc cũng như trong mỗi hàng ngang.
- ④ Không có học sinh cùng trường đứng kề nhau trong mỗi hàng dọc và tất cả các học sinh trong mỗi hàng ngang đều cùng trường.

Lời giải

① Không có yêu cầu gì thêm.

- ♦ Mỗi cách xếp thỏa mãn yêu cầu là một hoán vị của 40 phần tử.
- ⇒ Do đó số cách sắp xếp là $P_{40} = 40!$ cách.

② Không có học sinh cùng trường đứng kề nhau mỗi hàng ngang và tất cả các học sinh trong mỗi hàng đều cùng trường.

Giả sử 4 hàng dọc được kí hiệu là D_1, D_2, D_3, D_4 .

Theo yêu cầu thì

- ♦ Các bạn trường A được xếp ở D_1, D_3
- ♦ Các bạn trường B được xếp ở D_2, D_4 hoặc ngược lại.
- ⇒ Nên số cách xếp là $20!.20!.2$ cách.

③ Không có học sinh cùng trường đứng kề nhau trong mỗi hàng dọc cũng như trong mỗi hàng ngang.

Giả sử 4 hàng dọc được kí hiệu là D_1, D_2, D_3, D_4 .

- ♦ Mỗi hàng các vị trí lại được kí hiệu từ 1 đến 10

Theo yêu cầu bài toán thì:

- ♦ Các bạn trường A được xếp ở D_1 ghi số chẵn, D_2 ghi số lẻ, D_3 ghi số chẵn, D_4 ghi số lẻ.
- ♦ Các bạn trường B ở các vị trí còn lại. Hoặc ngược lại.
- ⇒ Nên số cách xếp là $20!.20!.2$ cách.

④ Không có học sinh cùng trường đứng kề nhau trong mỗi hàng dọc và tất cả các học sinh trong mỗi hàng ngang đều cùng trường.

Giả sử 4 hàng dọc được kí hiệu là D_1, D_2, D_3, D_4 .

- ♦ Mỗi hàng các vị trí lại được kí hiệu từ 1 đến 10

Theo yêu cầu bài toán thì:

- ♦ Các bạn trường A được xếp ở D_1 ghi số chẵn, D_2 ghi số chẵn, D_3 ghi số chẵn, D_4 ghi số chẵn.
- ♦ Các bạn trường B ở các vị trí còn lại. Hoặc ngược lại.
- ⇒ Nên số cách xếp là $20!.20!.2$ cách

Bài 11.

Một nhóm học sinh gồm n nam và n nữ đứng thành hàng ngang. Có bao nhiêu tình huống mà nam, nữ đứng xen kẽ nhau

Lời giải





- ♦ Giả sử các vị trí được đánh thứ tự từ 1 đến $2n$.
- ♦ Để nam nữ đứng xen kẽ nhau thì nam đứng ở vị trí ghi số lẻ, nữ ngồi ở vị trí ghi số chẵn.
⇒ Số cách sắp xếp là: $n!.n!.2$ cách.

Bài 12.

Cho năm chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Hãy tính số các số tự nhiên

- ① Có năm chữ số đôi một khác nhau và bắt đầu bởi chữ số khác chữ số 1.
- ② Có năm chữ số đôi một khác nhau và bắt đầu bởi 24.
- ③ Có năm chữ số đôi một khác nhau và không bắt đầu bởi 241.

Lời giải

- ① Có năm chữ số đôi một khác nhau và bắt đầu bởi chữ số khác chữ số 1.

- ♦ Chọn chữ số để xếp vào vị trí đầu tiên có 4 cách.
- ♦ Xếp 4 chữ số còn lại vào 4 vị trí còn lại có $4!$ cách.
⇒ Vậy có $4.4! = 96$ số.

- ② Có năm chữ số đôi một khác nhau và bắt đầu bởi 24.

- ♦ Xếp 3 chữ số còn lại vào 3 vị trí còn lại có $3! = 6$ cách.
⇒ Vậy có 6 số thỏa mãn.

- ③ Có năm chữ số đôi một khác nhau và không bắt đầu bởi 241.

- ♦ Có $5! = 120$ số có 5 chữ số khác nhau lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5.
- ♦ Nếu số có năm chữ số đôi một khác nhau và bắt đầu bởi 241 có 2 số.
⇒ Vậy có $120 - 2 = 118$ số thỏa mãn yêu cầu.

Bài 13.

Từ các chữ số 3, 4, 5, 6, 7, 8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau, trong đó ba chữ số chẵn phải đứng liền nhau?

Lời giải

- ♦ Ba số chẵn đứng liền nhau xem như một phần tử.
- ♦ Phần tử này cùng với ba số còn lại là 4 phần tử.
Số hoán vị của bốn phần tử này là $P_4 = 4! = 24$.
- ♦ Ba chữ số chẵn đứng liền nhau lại hoán vị cho nhau (có $P_3 = 3! = 6$ hoán vị) để tạo thành những số có 6 chữ số trong đó ba chữ số chẵn đứng liền nhau.
⇒ Vậy theo quy tắc nhân có $24.6 = 144$ số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 14.

Một nhóm gồm 8 người, trong đó có hai người là vợ chồng. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 8 người này thành một hàng dọc sao cho hai vợ chồng không được đứng liền kề nhau?

Lời giải

- ♦ Xếp 8 người thành một hàng dọc có $P_8 = 8! = 40320$ cách.





- ♦ Tiếp theo ta tính số cách xếp 8 người này thành một hàng dọc sao cho hai vợ chồng phải đứng liền nhau.
 - ♦ Coi hai vợ chồng đứng liền nhau chỉ là một phần tử, cùng với 6 người còn lại sẽ tạo thành 7 phần tử, 7 phần tử này có $7! = 5040$ cách xếp.
 - ♦ Hai vợ chồng đứng liền nhau có thể hoán vị cho nhau nên có $2! = 2$ cách hoán vị.
 - ♦ Vậy theo quy tắc nhân ta có $5040 \cdot 2 = 10080$ cách xếp 8 người thành một hàng dọc sao cho hai vợ chồng đứng liền nhau.
- ⇒ Do đó, số cách xếp thỏa mãn đề bài là: $40320 - 10080 = 30240$.

Bài 15.

Có ba cặp vợ chồng trong đó có hai vợ chồng ông bà Vương đến dự một bữa tiệc. Họ được xếp ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn.

- ① Hỏi có bao nhiêu cách xếp?
- ② Có bao nhiêu cách xếp trong đó hai ông bà Vương phải ngồi cạnh nhau?
- ③ Có bao nhiêu cách xếp trong đó hai ông bà Vương không ngồi cạnh nhau. Hai cách xếp chỗ ngồi quanh bàn tròn được coi là như nhau nếu đối với mỗi người A trong nhóm, trong hai cách xếp đó, người ngồi bên trái và bên phải A không thay đổi.

Lời giải

① Hỏi có bao nhiêu cách xếp?

- ♦ Giả sử 6 chiếc ghế quanh bàn tròn được đánh số là 1, 2, 3, 4, 5, 6 và x_i kí hiệu người ngồi ở ghế mang số i ($i = \overline{1, 6}$).
- ♦ Khi đó mỗi cách xếp 6 người này $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ cho ta một hoán vị của tập hợp 6 người.
- ♦ Có cả thảy $6!$ cách xếp chỗ ngồi cho họ.
- ♦ Vì ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn nên 6 cách xếp sau đây phải được xem là giống nhau: Mặc dù số ghế họ ngồi có thay đổi nhưng vị trí tương đối giữa 6 người đó là không thay đổi.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6), (x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1), (x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2), \\ (x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3), (x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4), (x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5).$$

⇒ Thành thử có $\frac{6!}{6} = 5! = 120$ cách xếp.

□ **Chú ý.** Bằng lí luận tương tự ta có $(n-1)!$ cách xếp n người ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn.

② Có bao nhiêu cách xếp trong đó hai ông bà Vương phải ngồi cạnh nhau?

- ♦ Ta coi hai ông bà Vương ngồi chung một ghế.
- ♦ Như vậy theo câu ① có $(5-1)! = 4! = 24$ cách xếp.





⇒ Vì hai ông bà Vương có thể đổi chỗ cho nhau để được một cách xếp khác nên có $24.2 = 48$ cách xếp sao cho ông bà Vương phải ngồi cạnh nhau.

③ Có bao nhiêu cách xếp trong đó hai ông bà Vương không ngồi cạnh nhau.

⇒ Theo câu ① và ② suy ra số cách xếp sao cho hai ông bà Vương không ngồi cạnh nhau là $120 - 48 = 72$.

☑ Dạng 2. BÀI TẬP VỀ CHÍNH HỢP.

🔖 Bài 16.

Giả sử có 8 vận động viên tham gia chạy thi. Nếu không kể trường hợp có hai vận động viên về đích cùng một lúc thì có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra đối với các vị trí thứ nhất, thứ nhì và thứ ba?

Lời giải

- ♦ Mỗi cách chọn 3 người vào vị trí thứ nhất, thứ nhì và thứ ba là một chỉnh hợp chập 3 của 8 phần tử.
- ⇒ Vậy có $A_8^3 = 336$ kết quả có thể xảy ra.

🔖 Bài 17.

Có bao nhiêu cách bầu một ban chấp hành chi đoàn gồm 3 người, trong đó có một bí thư, một phó bí thư, một ủy viên, biết rằng trong chi đoàn có 20 đoàn viên?

Lời giải

- ♦ Gọi D là tập hợp 20 đoàn viên đã cho. Khi đó mỗi ban chấp hành là một chỉnh hợp chập 3 của 20 phần tử của D .

⇒ Do đó số cách bầu là $A_{20}^3 = \frac{20!}{17!} = 20.19.18 = 6840$

🔖 Bài 18.

Từ 6 chữ số 9, 8, 7, 6, 5, 4 cần lập ra các số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau. Hỏi có bao nhiêu số như thế. Hãy tính tổng các số tự nhiên đó.

Lời giải

- ♦ Giả sử $x = \overline{abc}$ là một số thỏa mãn các yêu cầu của đề bài.
- ♦ Khi đó (a, b, c) chính là một chỉnh hợp chập 3 của 6 phần tử của tập $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
- ♦ Bởi vậy số các số tự nhiên thỏa mãn đề bài là $A_6^3 = 6.5.4 = 120$.
- ♦ Ta chia 120 số tự nhiên nói trên thành 60 cặp, mỗi cặp gồm 2 số tự nhiên x, x' có dạng $x = \overline{abc}$ và $x' = \overline{a'b'c'}$ sao cho $a + a' = b + b' = c + c' = 13$ (chẳng hạn với $x = 847$ thì tồn tại duy nhất $x' = 596$).

⇒ Vì có 60 cặp số x, x' mà $x + x' = 1443$ nên tổng các số tự nhiên nói trên là $60 \times 1443 = 86580$.





Bài 19.

Một lớp có 25 học sinh nam và 13 học sinh nữ. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn ra một học sinh làm lớp trưởng, một học sinh làm lớp phó và một học sinh làm thủ quỹ.

- ① Hỏi có bao nhiêu cách chọn?
- ② Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu lớp trưởng phải là học sinh nam?

Lời giải

① **Hỏi có bao nhiêu cách chọn?**

♦ Ba học sinh, trong đó một lớp trưởng, một lớp phó và một thủ quỹ, chính là một chỉnh hợp chập 3 của 38 phần tử của tập hợp các học sinh trong lớp.

⇒ Do đó số cách chọn là $A_{38}^3 = 50616$ cách.

② **Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu lớp trưởng phải là học sinh nam?**

♦ Trước hết chọn học sinh nam làm lớp trưởng có 25 cách.

♦ Sau đó chọn hai học sinh cho hai chức danh còn lại, số cách chọn là $A_{37}^2 = 1332$ cách.

⇒ Vậy số cách chọn thỏa mãn yêu cầu đề bài là $25 \cdot 1332 = 33300$.

Bài 20.

Trong một ban chấp hành gồm có 7 người, cần chọn 3 người vào ban thường vụ với các chức vụ : Bí thư, Phó Bí thư, Ủy viên thường vụ thì có bao nhiêu cách chọn?

Lời giải

♦ Mỗi cách chọn 3 người vào các chức vụ : Bí thư, Phó Bí thư, Ủy viên thường vụ là một chỉnh hợp chập 3 của 7.

⇒ Vậy có $A_7^3 = 210$ cách chọn.

Bài 21.

Trong mặt phẳng cho một tập hợp P gồm n điểm. Hỏi có bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{0}$ mà có điểm đầu và điểm cuối đều thuộc P .

Lời giải

♦ hợp chập 2 của n .

⇒ Vậy có $A_n^2 = n(n-1)$ vectơ thỏa mãn yêu cầu.

Bài 22.

Với các chữ số 1,2,3,4,5,6,7,8,9 có thể lập được bao nhiêu số nguyên dương n trong mỗi trường hợp sau đây:

- ①. n có 5 chữ số đôi một khác nhau.
- ②. có 5 chữ số chẵn đôi một khác nhau.
- ③. n có 5 chữ số lẻ đôi một khác nhau.





Lời giải

①. n có 5 chữ số đôi một khác nhau.

♦ Mỗi số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau được lập từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 là một chỉnh hợp chập 5 của 9.

⇒ Vậy có $A_9^5 = 15120$ số thỏa mãn yêu cầu.

②. có 5 chữ số chẵn đôi một khác nhau.

♦ Giả sử số cần tìm có dạng $\overline{abcde}, (a \neq 0)$.

♦ Chọn $e \in \{2, 4, 6, 8\} \Rightarrow$ có 4 cách chọn.

♦ Chọn các chữ số còn lại có A_8^4 .

⇒ Vậy có $4 \cdot A_8^4 = 6720$ số.

③. n có 5 chữ số lẻ đôi một khác nhau.

♦ Giả sử số cần tìm có dạng $\overline{abcde}, (a \neq 0)$.

♦ Chọn $e \in \{1, 3, 5, 7, 9\} \Rightarrow$ có 5 cách chọn.

♦ Chọn các chữ số còn lại có A_8^4 .

⇒ Vậy có $5 \cdot A_8^4 = 8400$ số.

Bài 23.

Có thể lập được bao nhiêu số nguyên dương n gồm 4 chữ số có nghĩa đôi một khác nhau (chữ số đầu tiên phải khác không) trong mỗi trường hợp sau đây:

①. n là số lẻ.

②. n là số chẵn.

③. n là bội số của 5.

④. $n > 2007$.

⑤. Một trong hai chữ số đầu tiên của n là 9.

Lời giải

Gọi số có 4 chữ số đôi một khác nhau là $\overline{abcd}$.

①. n là số lẻ.

♦ Vì n là số lẻ nên $d \in \{1; 3; 5; 7; 9\} \Rightarrow$ có 5 cách chọn d .

♦ $a \neq 0, a \neq d$ nên có 8 cách chọn a .

♦ Số cách b, d là số chỉnh hợp chập 2 của 8 phần tử, có A_8^2 cách chọn.

⇒ Số các số có 4 chữ số khác nhau và là số lẻ là: $5 \cdot 8 \cdot A_8^2 = 2240$

②. n là số chẵn.

♦ Ta lập số có 4 chữ số khác nhau.

♦ Vì $a \neq 0$ nên có 9 cách chọn a .

♦ Số cách chọn b, c, d là A_9^3 .

♦ Do đó có $9 \cdot A_9^3 = 4536$ số có 4 chữ số khác nhau.





⇒ Theo phần ① ta suy ra có $4536 - 2240 = 2296$ số có 4 chữ số khác nhau và là số chẵn.

③. n là bội số của 5.

♦ Vì n là bội của 5 $\Rightarrow d \in \{0; 5\}$.

⊙ Trường hợp 1: $d = 0 \Rightarrow$ có một cách chọn d .

♦ Khi đó có A_9^3 cách chọn 3 chữ số còn lại.

⇒ Do đó có $1 \cdot A_9^3 = 504$ số có tận cùng là 0.

⊙ Trường hợp 2: $d = 5 \Rightarrow$ có một cách chọn d .

♦ $a \neq 0, a \neq d$ suy ra có 8 cách chọn a .

♦ Có A_8^2 cách chọn hai chữ số còn lại.

⇒ Do đó có $1 \cdot 8 \cdot A_8^2 = 448$ số có tận cùng là 5.

⇒ Kết hợp lại ta có $504 + 448 = 952$ số có 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 5.

④. $n > 2007$.

♦ $n > 2007 \Rightarrow a \geq 2 \Rightarrow$ có 8 cách chọn a .

♦ Có A_9^3 cách chọn 3 chữ số còn lại.

⇒ Do đó có $8 \cdot A_9^3 = 4032$ số thỏa mãn.

⑤. Một trong hai chữ số đầu tiên của n là 9.

♦ Một trong hai chữ số đầu tiên của n là 9.

⊙ Trường hợp 1: $a = 9 \Rightarrow$ có A_9^3 cách chọn 3 chữ số còn lại do đó có $1 \cdot A_9^3 = 504$ số.

⊙ Trường hợp 2: $b = 9 \Rightarrow a \neq 0, a \neq b \Rightarrow$ có 8 cách chọn a .

♦ Có A_8^2 cách chọn hai chữ số còn lại, suy ra $8 \cdot A_8^2 = 448$ số.

⇒ Kết hợp lại có $504 + 448 = 952$ số thỏa mãn.

Bài 24.

Từ 26 chữ cái (5 nguyên âm, 21 phụ âm) có thể lập được bao nhiêu mật khẩu gồm 9 chữ cái khác nhau trong mỗi trường hợp sau đây:

- ①. Mật khẩu bắt đầu bằng một nguyên âm.
- ②. Mật khẩu có dạng NPPNPPNPP (N là nguyên âm, P là phụ âm)
- ③. Trong mật khẩu có đúng 3 nguyên âm và các nguyên âm luôn đứng kề nhau.
- ④. Trong mật khẩu có ít nhất 3 nguyên âm và các nguyên âm luôn đứng kề nhau.

Lời giải

①. Mật khẩu bắt đầu bằng một nguyên âm.

♦ Có 5 cách chọn nguyên âm để bắt đầu mật khẩu.

♦ Có A_{25}^8 cách chọn 8 ký tự còn lại.

⇒ Theo quy tắc nhân có $5 \cdot A_{25}^8$ cách đặt mật khẩu bắt đầu bằng nguyên âm.

②. Mật khẩu có dạng NPPNPPNPP (N là nguyên âm, P là phụ âm)





- ♦ Mật khẩu dạng NPPNPPNPP (N là nguyên âm, P là phụ âm) có được bằng cách chọn ra và sắp xếp vị trí cho 3 nguyên âm từ 5 nguyên âm và chọn ra và sắp xếp vị trí cho 6 phụ âm từ 21 phụ âm.
- ♦ Có A_5^3 cách chọn và sắp xếp 3 nguyên âm, có A_{21}^6 cách chọn và sắp xếp 6 phụ âm.
- ⇒ Theo quy tắc nhân có $A_5^3 \cdot A_{21}^6$ cách đặt mật khẩu.

③. Trong mật khẩu có đúng 3 nguyên âm và các nguyên âm luôn đứng kề nhau.

- ♦ Đầu tiên ta chọn ra 6 phụ âm và sắp xếp vị trí cho chúng, có A_{21}^6 cách.
- ♦ Sáu phụ âm sẽ tạo ra 7 vị trí để sắp xếp 3 nguyên âm (đứng liền nhau- coi như một khối).
- ♦ Có C_7^3 cách chọn 3 nguyên âm và có $3!$ cách xếp nguyên âm trong mỗi khối.
- ⇒ Vậy có $7 \cdot C_7^3 \cdot 3! \cdot A_{21}^6 = 7 \cdot A_5^3 \cdot A_{21}^6$ cách đặt mật khẩu.

④. Trong mật khẩu có ít nhất 3 nguyên âm và các nguyên âm luôn đứng kề nhau.

⊙ Trường hợp 1: Mật khẩu có 3 nguyên âm, theo phần c có $7 \cdot A_5^3 \cdot A_{21}^6$ cách.

⊙ Trường hợp 2: Mật khẩu có 4 nguyên âm làm tương tự phần ③ ta có $6 \cdot A_5^4 \cdot A_{21}^5$ cách.

⊙ Trường hợp 3: Mật khẩu có 5 nguyên âm, làm tương tự phần ③ ta có $5 \cdot A_5^5 \cdot A_{21}^4$.

⇒ Theo quy tắc cộng ta có $7 \cdot A_5^3 \cdot A_{21}^6 + 6 \cdot A_5^4 \cdot A_{21}^5 + 5 \cdot A_5^5 \cdot A_{21}^4$ cách đặt mật khẩu.

Bài 25.

Ở một trường nọ, khi tổ chức kỳ thi tốt nghiệp ra trường cho học sinh, người ta muốn chọn 6 môn trong 9 môn học A, B, C, D, E, F, G, H, I để tổ chức thi trong 3 ngày liên tiếp, mỗi ngày thi 2 môn trong hai buổi sáng, chiều. Hỏi có bao nhiêu cách xếp lịch thi (tức là xếp thứ tự 6 môn trong 9 môn học) nếu:

- ① Không có yêu cầu gì thêm.
- ② Bắt buộc phải có môn C.
- ③ Bắt buộc phải có môn C và môn C phải tổ chức thi đầu tiên.
- ④ Bắt buộc phải có ba môn thi A, B, F và môn F phải được tổ chức thi cuối cùng.
- ⑤ Bắt buộc phải có 2 môn D, E và môn E phải được tổ chức thi liên sau môn D.
- ⑥ Không chấp nhận tổ chức thi cả hai môn A, H trong cùng 1 kỳ thi.

Lời giải

① Không có yêu cầu gì thêm.

⇒ Ta có $A_9^6 = 60480$ cách chọn ra 6 môn thi từ 9 môn thi và sắp xếp vào 6 buổi thi.

② Bắt buộc phải có môn C.

- ♦ Vì bắt buộc có môn C nên có C_8^5 cách chọn thêm 5 môn thi nữa.
- ♦ Sau đó ta sắp xếp 6 môn thi vào 6 buổi thi, có $6!$ cách xếp.
- ⇒ Theo quy tắc nhân có $6! \cdot C_8^5 = 40320$ cách xếp lịch thi.

③ Bắt buộc phải có môn C và môn C phải tổ chức thi đầu tiên.





- ♦ Vì môn C thi đầu tiên nên có A_8^5 cách chọn và sắp xếp lịch thi cho 5 môn còn lại.
- ⇒ Do đó có $A_8^5 = 6720$ cách sắp xếp lịch thi.

④ **Bắt buộc phải có ba môn thi A, B, F và môn F phải được tổ chức thi cuối cùng.**

- ♦ Bắt buộc phải có ba môn thi A, B, F và môn F phải được tổ chức thi cuối cùng
- ♦ Có C_6^3 cách chọn thêm 3 môn thi nữa.
- ♦ Vì môn F tổ chức thi cuối cùng nên có $5!$ cách sắp xếp lịch thi cho 5 môn còn lại.
- ⇒ Theo quy tắc nhân có $C_6^3 \cdot 5! = 2400$.

⑤ **Bắt buộc phải có 2 môn D, E và môn E phải được tổ chức thi liền sau môn D.**

- ♦ Đầu tiên ta chọn ra 4 môn còn lại và xếp lịch thi cho chúng, có A_7^4 cách.
- ♦ Bốn môn này sẽ tạo ra 5 vị trí để sắp xếp 2 môn D, E (đứng liền nhau- coi như một khối).
- ⇒ Vậy có $A_7^4 \cdot 5 = 4200$ cách xếp lịch thi.

⑥ **Không chấp nhận tổ chức thi cả hai môn A, H trong cùng 1 kỳ thi.**

- ♦ Không chấp nhận tổ chức thi cả hai môn A, H trong cùng 1 kỳ thi.
- ♦ Số cách xếp lịch thi có cả môn A, H là $C_7^4 \cdot 6! = 25200$
- ⇒ Số cách xếp lịch thi không có cả 2 môn A, H là $60480 - 25200 = 35280$ cách.

Bài 26.

Với các chữ số 0,1,3,6,9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên.

- ① Có 4 chữ số khác nhau.
- ② Số lẻ với 4 chữ số khác nhau.
- ③ Số chẵn có 4 chữ số khác nhau.
- ④ Có 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 3.

Lời giải

Gọi số có 4 chữ số là $\overline{abcd}$

① **Có 4 chữ số khác nhau.**

- ♦ Có 4 cách chọn a (vì $a \neq 0$), có A_4^3 cách chọn 3 chữ số còn lại.
- ⇒ Do đó có $4 \cdot A_4^3 = 96$ số.

② **Số lẻ với 4 chữ số khác nhau.**

- ♦ Vì số lẻ nên $d \in \{1; 3; 9\}$ nên có 3 cách chọn d .
- ♦ $a \neq 0, a \neq d$ có 3 cách chọn a , có A_3^2 cách chọn 2 chữ số còn lại.
- ⇒ Vậy có $3 \cdot 3 \cdot A_3^2 = 54$ số lẻ có 4 chữ số khác nhau.

③ **Số chẵn có 4 chữ số khác nhau.**

- ♦ Số chẵn có 4 chữ số khác nhau có: $96 - 54 = 42$ số.

④ **Có 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 3.**

- ♦ Các số chia hết cho 3 thỏa mãn $(a+b+c+d):3$ do đó số được lập từ bộ số $\{0; 3; 6; 9\}$.





- ♦ Có 3 cách chọn a và có $3!$ cách sắp xếp 3 chữ số còn lại.
- ⇒ Vậy có $3.3! = 18$ số.

Bài 27.

Từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ có thể lập được bao nhiêu chữ số chẵn, mỗi số có 5 chữ số khác nhau trong đó có đúng hai chữ số lẻ và hai chữ số lẻ đó đứng cạnh nhau.

Trích từ đề **DỰ BỊ ĐẠI HỌC KHỐI B – năm 2006**

Lời giải

- ♦ Số cách chọn hai số lẻ (có phân biệt, thứ tự) trong ba số $1, 3, 5$ là $A_3^2 = 6$ cách.
- ♦ Hai số lẻ đứng cạnh nhau, ta xem như là một phần tử x .
- ♦ Vậy số cần lập gồm phần tử x và 3 trong 4 số chẵn $0, 2, 4, 6$.

Gọi $\overline{abcde}$ là số thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

⊙ Trường hợp 1: $e = 0$.

- ♦ Bước 1: Chọn vị trí cho x có 3 cách.
- ♦ Bước 2: Đưa 2 số chẵn từ $2, 4, 6$ vào 2 vị trí còn lại có $A_3^2 = 6$ cách.
- ⇒ Vậy có $3.6 = 18$ cách.

⊙ Trường hợp 2: e chẵn khác 0 và a là số lẻ.

- ♦ Bước 1: Chọn e có 3 cách.
- ♦ Bước 2: Chọn vị trí cho x có 1 cách.
- ♦ Bước 3: Đưa 2 số chẵn từ 3 chữ số chẵn còn lại vào 2 vị trí còn lại có $A_3^2 = 6$ cách.
- ⇒ Vậy trường hợp 2 có $3.1.6 = 18$ số.

⊙ Trường hợp 3: e chẵn, khác 0 và a là số chẵn.

- ♦ Bước 1: Chọn e có 3 cách.
- ♦ Bước 2: Chọn vị trí cho x có 2 cách.
- ♦ Bước 3: Chọn a có 2 cách ($a \neq e$ và $a \neq 0$).
- ♦ Bước 4: Đưa 1 số chẵn trong 2 chữ số chẵn còn lại vào vị trí còn lại có 2 cách.
- ♦ Vậy có $3.2.2.2 = 24$ cách.
- ⇒ Do đó tất cả có $6.(18+18+24) = 360$ số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 28.

Từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 7, 8, 9$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau sao cho trong đó hai chữ số 2 và 3 không đứng kề nhau.

Lời giải

- ♦ Giả sử số thỏa mãn yêu cầu đề bài có dạng $\overline{abcdef}$.
- ♦ Trước hết, ta tính số các số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau được tạo thành từ bảy chữ số $0, 1, 2, 3, 7, 8, 9$.





- ♦ Bước 1: Viết số 0 vào 1 trong 5 vị trí có 5 cách.
- ♦ Bước 2: Chọn 5 số trong 6 số còn lại để viết vào 5 vị trí còn lại có A_6^5 cách.
- ♦ Vậy có $5 \cdot A_6^5 = 3600$ số.
- ♦ Tiếp theo ta tính số các số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau được tạo thành từ 7 số 0,1,2,3,7,8,9 sao cho $\overline{ab} = \overline{23}$ hoặc $a \notin \{0;2;3\}$ mà số đó chứa $\overline{23}$.

⊙ **Trường hợp 1:** $\overline{ab} = \overline{23}$. Khi đó số cách chọn c, d, e, f là $A_5^4 = 120$ cách.

⇒ Vậy trường hợp 1 có 120 số.

⊙ **Trường hợp 2:** $a \in \{0;2;3\}$ mà số $\overline{abcdef}$ chứa $\overline{23}$.

- ♦ Bước 1: Chọn a có 4 cách.
- ♦ Bước 2: Chọn vị trí cho $\overline{23}$ có 4 cách.
- ♦ Bước 3: Chọn 3 trong 4 số còn lại để cho vào 3 vị trí còn lại có $A_4^3 = 24$ cách.
- ⇒ Vậy trường hợp 2: có 384 số.
- ♦ Do đó, số các số có chứa $\overline{23}$ là $120 + 384 = 504$ số.
- ♦ Tương tự, ta có 504 số các số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau được tạo thành từ 7 chữ số 0,1,2,3,7,8,9 sao cho $\overline{ab} = \overline{32}$ hoặc $a \notin \{0;2;3\}$ mà số đó có chứa $\overline{32}$.
- ⇒ Vậy số các số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $3600 - (504 + 504) = 2592$ số.

🔖 Bài 29.

Từ 10 chữ số 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 có thể lập được bao nhiêu số x có 6 chữ số khác nhau khi biết

- ① x là số lẻ bé hơn 600000.
- ② x chia hết cho 5.
- ③ Trong x phải có mặt ba chữ số 0,1,2.

Lời giải

Giả sử $x = \overline{abcdef}$

① x là số lẻ bé hơn 600000.

Vì $x < 600000$ nên $a \in \{1,2,3,4,5\}$ và vì x lẻ nên $f \in \{1,3,5,7,9\}$.

⊙ **Trường hợp 1:** $a \in \{2;4\}$

- ♦ Bước 1 (Chọn a): Vì $a \in \{2;4\}$ nên có hai cách chọn a .
- ♦ Bước 2 (Chọn f): Vì $f \in \{1,3,5,7,9\}$ nên có 5 cách chọn f .
- ♦ Bước 3 (Chọn b,c,d,e): Mỗi bộ (b,c,d,e) chính là một chỉnh hợp chập 4 của 8 phần tử còn lại.





♦ Do đó có $A_8^4 = 1680$ cách chọn b, c, d, e .

Vậy trường hợp 1 có $2.5.1680 = 16800$ số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

☉ Trường hợp 2: $a \in \{1, 3, 5\}$

♦ Bước 1 (Chọn a): Vì $a \in \{1, 3, 5\}$ nên có 3 cách chọn a .

♦ Bước 2 (Chọn f): Vì $f \in \{1, 3, 5, 7, 9\} \setminus \{a\}$ nên có 4 cách chọn f .

♦ Bước 3 (Chọn b, c, d, e): Mỗi bộ (b, c, d, e) chính là một chỉnh hợp chập 4 của 8 phần tử còn lại.

♦ Do đó có $A_8^4 = 1680$ cách chọn b, c, d, e .

⇒ Vậy trường hợp 2 có $3.4.1680 = 20160$ số thỏa mãn đề bài.

② x chia hết cho 5.

Vì x chia hết cho 5 nên $f \in \{0; 5\}$

☉ Trường hợp 1: $f = 0$ Mỗi bộ (a, b, c, d, e) chính là một chỉnh hợp chập 5 của 9 phần tử $1, 2, \dots, 9$.

♦ Do đó số cách chọn a, b, c, d, e là $A_9^5 = 15120$ cách.

⇒ Vậy trường hợp 1 có 15120 số.

☉ Trường hợp 2: $f = 5$.

♦ Bước 1 (Chọn a): Vì $a \neq 0$ nên có 8 cách chọn a .

♦ Bước 2 (Chọn b, c, d, e): Mỗi bộ (b, c, d, e) là một chỉnh hợp chập 4 của 8 phần tử còn lại.

♦ Vậy trường hợp 2 có $8A_8^4 = 13440$ số.

⇒ Vậy có tất cả $15120 + 13440 = 28560$ số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

③ Trong x phải có mặt ba chữ số 0, 1, 2.

♦ Bước 1: Chọn vị trí cho số 0. Vì $a \neq 0$ nên có 5 cách chọn vị trí cho số 0.

♦ Bước 2: Chọn vị trí cho hai chữ số 1 và 2: Có $A_5^2 = 20$ cách chọn vị trí cho chữ số 1 và 2

♦ Bước 3: Bây giờ còn lại 7 chữ số 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ta cần chọn ra 3 chữ số cho 3 vị trí còn lại, do đó có $A_7^3 = 210$ cách.

⇒ Vậy có tất cả $5.20.210 = 21000$ số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 30.

Từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau sao cho trong đó luôn có mặt ba chữ số 3, 4, 5

Lời giải

☉ Trường hợp 1: Số tạo thành có chứa số 0.

♦ Bước 1: Chọn vị trí cho số 0: Có 5 cách.





- ♦ Bước 2: Viết ba số 3,4,5 vào ba trong năm vị trí còn lại: Có A_4^3 cách.
 - ♦ Bước 3: Chọn 2 trong 4 số còn lại để viết vào hai vị trí còn lại có A_4^2 cách.
- ⇒ Vậy trường hợp 1 có $5 \cdot A_5^2 \cdot A_4^2 = 3600$ số.

☉ **Trường hợp 2:** Số tạo thành không có số 0.

- ♦ Viết ba số 3,4,5 vào ba trong sáu vị trí: Có A_6^3 cách.
 - ♦ Vậy trường hợp 2 có $A_6^3 \cdot A_4^3 = 2880$ số.
- ⇒ Do đó tất cả có $3600 + 2880 = 6480$ số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

☐ **Lưu ý:** Số tạo thành trong bài tập 30. ③ nhất thiết phải có số 0, còn số tạo thành trong bài tập 31 không nhất thiết phải có số 0, do đó ta phải chia làm hai trường hợp như trên.

☑ **Dạng 3. BÀI TẬP VỀ TỔ HỢP.**

☞ **Bài 31.**

Cho tập hợp $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Có bao nhiêu tập hợp con của X thỏa mãn điều kiện:

- ① Mỗi tập hợp con có 5 phần tử.
- ② Mỗi tập hợp con có 5 phần tử trong đó có chữ số 2.
- ③ Mỗi tập hợp con có 5 phần tử trong đó có 3 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ.

Lời giải

① *Mỗi tập hợp con có 5 phần tử.*

⇒ Số tập hợp con có 5 phần tử là $C_8^5 = 56$.

② *Mỗi tập hợp con có 5 phần tử trong đó có chữ số 2.*

⇒ Số tập hợp con có 5 phần tử trong đó có chữ số 2 là: $C_7^4 = 35$.

③ *Mỗi tập hợp con có 5 phần tử trong đó có 3 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ.*

⇒ Số tập hợp con có 5 phần tử trong đó có 3 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ là: $C_4^3 \cdot C_4^2 = 24$.

☞ **Bài 32.**

Có bao nhiêu chữ số chẵn gồm 6 chữ số đôi một khác nhau trong đó:

- ① Chữ số đầu tiên là chữ số lẻ?
- ② Có đúng 3 chữ số lẻ và 3 chữ số chẵn (chữ số đầu tiên phải khác 0)?

Lời giải

Gọi chữ số chẵn gồm 6 chữ số là $\overline{abcdef}$.

① *Chữ số đầu tiên là chữ số lẻ?*

- ♦ Chữ số đầu tiên là chữ số lẻ nên a có 5 cách chọn.
- ♦ Số cần tìm là chữ số chẵn nên f có 5 cách chọn.





♦ Bộ $bcde$ có A_8^4 cách chọn

⇒ Số chữ số cần tìm là $5.5.A_8^4 = 42000$ chữ số.

② Có đúng 3 chữ số lẻ và 3 chữ số chẵn (chữ số đầu tiên phải khác 0)?

⊙ Xét các số được lập có 3 chữ số lẻ, 3 chữ số chẵn.

Số cách chọn là số có 6 chữ số chẵn (được tạo thành từ 3 chữ số lẻ, 3 chữ số chẵn tính cả trường hợp có chữ số 0 đứng đầu) trừ cho số có 5 chữ số chẵn (được tạo thành từ 3 chữ số lẻ, 2 chữ số chẵn khác 0)

♦ Chọn 3 số lẻ, có $C_5^3 = 10$ cách.

♦ Chọn 3 số chẵn, có $C_5^3 = 10$ cách.

♦ Xếp thứ tự 6 chữ số vừa lấy theo hàng ngang để được số chẵn, có $3.5! = 360$ cách.

⊙ Xét các số lập được có 3 chữ số lẻ, 2 chữ số chẵn trong đó không có chữ số 0.

♦ Chọn 3 số lẻ, có $C_5^3 = 10$ cách.

♦ Chọn thêm 2 số chẵn, có $C_4^2 = 6$ cách.

♦ Xếp thứ tự 5 chữ số vừa lấy theo hàng ngang để được số chẵn, có $2.4! = 48$ cách.

⇒ Vậy có tất cả $10.10.360 - 10.6.48 = 33120$ cách chọn.

🔖 Bài 33.

Một tổ sinh viên có 20 người, trong đó có 8 người chỉ biết tiếng Anh, 7 người chỉ biết tiếng Pháp và 5 người chỉ biết tiếng Đức. Cần lập một nhóm đi thực tế gồm 3 người biết tiếng Anh, 4 người biết tiếng Pháp, 2 người biết tiếng Đức. Hỏi có bao nhiêu cách lập nhóm đi thực tế từ tổ sinh viên đó?

Lời giải

♦ Chọn 3 người biết tiếng Anh trong 8 người có C_8^3 cách chọn.

♦ Chọn 4 người biết tiếng Pháp trong 7 người có C_7^4 cách chọn.

♦ Chọn 2 người biết tiếng Đức trong 5 người có C_5^2 cách chọn.

⇒ Vậy số cách chọn là $C_8^3.C_7^4.C_5^2 = 19600$ cách chọn.

🔖 Bài 34.

Trên giá sách có 20 cuốn sách đôi một khác nhau gồm 9 cuốn Toán, 6 cuốn Lý và 5 cuốn Hóa. Có bao nhiêu cách lấy ra 10 cuốn sách sao cho trên giá sách còn lại ít nhất một cuốn sách mỗi loại?

Lời giải

♦ Có tất cả C_{20}^{10} cách lấy 10 cuốn sách.

♦ Số cách chọn sao cho không còn cuốn Hóa nào là C_{15}^5 cách.

♦ Số cách chọn sao cho không còn cuốn Lý nào là C_{14}^4 cách.

♦ Số cách chọn sao cho không còn cuốn Toán nào là C_{11}^1 .

⇒ Vậy số cách chọn thỏa mãn đề bài là $C_{20}^{10} - C_{15}^5 - C_{14}^4 - C_{11}^1 = 180741$ cách.





Bài 35.

Có 5 nhà toán học nam, 3 nhà toán học nữ và 4 nhà vật lý nam. Có bao nhiêu cách lập một đoàn công tác gồm 3 người trong đó có cả nam cũng như nữ và có cả nhà toán học cũng như nhà vật lý?

Lời giải

Chia làm 3 trường hợp:

- ⊙ **Trường hợp 1:** Số cách chọn ra 1 toán học nam, 1 toán học nữ, 1 vật lý nam: $5.3.4 = 60$ cách.
- ⊙ **Trường hợp 2:** Số cách chọn ra 2 toán học nữ, 1 vật lý nam: $C_3^2.C_4^1 = 12$ cách.
- ⊙ **Trường hợp 3:** Số cách chọn ra 1 toán học nữ, 2 vật lý nam: $C_3^1.C_4^2 = 18$ cách.

⇒ Vậy có tất cả 90 cách chọn.

Bài 36.

Một đội văn nghệ có 20 người trong đó có 10 nam và 10 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 người sao cho:

- ① Có đúng 2 nam trong 5 người đó.
- ② Có ít nhất 2 nam và ít nhất 1 nữ trong 5 người đó.

Lời giải

- ① **Có đúng 2 nam trong 5 người đó.**

⇒ Chọn 5 người trong đó có đúng 2 nam có $C_{10}^2.C_{10}^3 = 5400$ cách chọn.

- ② **Có ít nhất 2 nam và ít nhất 1 nữ trong 5 người đó.**

Chia làm các trường hợp:

- ⊙ **Trường hợp 1:** Chọn 2 nam và 3 nữ có 5400 cách chọn.
- ⊙ **Trường hợp 2:** Chọn 3 nam và 2 nữ có $C_{10}^3.C_{10}^2 = 5400$ cách chọn.
- ⊙ **Trường hợp 3:** Chọn 4 nam và 1 nữ có $C_{10}^4.C_{10}^1 = 2100$ cách chọn.

⇒ Vậy có tất cả $5400 + 5400 + 2100 = 12900$ cách chọn.

Bài 37.

Từ một tập thể 14 người gồm 6 nam và 8 nữ trong đó có An và Bình, người ta muốn chọn một tổ công tác gồm 6 người. Tìm số cách chọn trong mỗi trường hợp sau

- ① Trong tổ phải có cả nam lẫn nữ.
- ② Trong tổ có 1 tổ trưởng, 5 tổ viên, hơn nữa An và Bình không đồng thời có mặt trong tổ.

Lời giải

- ① **Trong tổ phải có cả nam lẫn nữ.**

- ♦ Số cách chọn tổ 6 người: C_{14}^6 .
- ♦ Số cách chọn tổ 6 người chỉ có nam: C_6^6 .
- ♦ Số cách chọn tổ 6 người chỉ có nữ: C_8^6 .

⇒ Số cách chọn tổ 6 người có cả nam lẫn nữ: $C_{14}^6 - C_6^6 - C_8^6 = 2974$ cách.





② Trong tổ có 1 tổ trưởng, 5 tổ viên, hơn nữa An và Bình không đồng thời có mặt trong tổ.

♦ Trước hết ta chọn tổ 6 người trong đó An và Bình không đồng thời có mặt trong tổ.

⊙ Trường hợp 1: An và Bình đều không có mặt, có C_{12}^6 cách.

⊙ Trường hợp 2: An có mặt, Bình không có mặt trong tổ công tác.

♦ Khi đó tổ còn 5 người được chọn từ 12 người, có C_{12}^5 cách.

⊙ Trường hợp 3: Bình có mặt, An không có mặt. Tương tự TH2 có C_{12}^5 cách.

♦ Trong tổ 6 người có 6 cách chọn tổ trưởng.

⇒ Vậy số cách thỏa mãn là: $6(C_{12}^6 + C_{12}^5 + C_{12}^5) = 15048$ cách.

Bài 38.

Từ 24 học sinh giỏi Toán gồm 16 nam, 8 nữ người ta muốn lập một đội tuyển gồm 7 người. Có bao nhiêu cách thành lập nếu:

① Đội tuyển có nhiều nhất 2 nữ.

② Đội tuyển có ít nhất 3 nam.

③ Nam sinh A và nữ sinh B phải cùng được hoặc cùng không được chọn vào đội tuyển.

④ Nam sinh X và nữ sinh Y không thể cùng được chọn vào đội tuyển.

Lời giải

① *Đội tuyển có nhiều nhất 2 nữ.*

♦ Số cách lập đội tuyển có 2 nữ: $C_8^2 \cdot C_{16}^5$.

♦ Số cách lập đội tuyển có 1 nữ: $C_8^1 \cdot C_{16}^6$.

♦ Số cách lập đội tuyển không có nữ: C_{16}^7

⇒ Vậy số cách lập đội tuyển có nhiều nhất 2 nữ: $C_8^2 \cdot C_{16}^5 + C_8^1 \cdot C_{16}^6 + C_{16}^7 = 197808$ cách.

② *Đội tuyển có ít nhất 3 nam.*

♦ Số cách lập đội tuyển có 3 nam: $C_{16}^3 \cdot C_8^4$ cách.

♦ Số cách lập đội tuyển có 4 nam: $C_{16}^4 \cdot C_8^3$ cách.

♦ Số cách lập đội tuyển có 5 nam: $C_{16}^5 \cdot C_8^2$ cách.

♦ Số cách lập đội tuyển có 6 nam: $C_{16}^6 \cdot C_8^1$ cách.

♦ Số cách lập đội tuyển có 7 nam: C_{16}^7 cách.

⇒ Vậy số cách lập đội tuyển có ít nhất 3 nam: $C_{16}^3 \cdot C_8^4 + C_{16}^4 \cdot C_8^3 + C_{16}^5 \cdot C_8^2 + C_{16}^6 \cdot C_8^1 + C_{16}^7 = 338928$ cách.

③ *Nam sinh A và nữ sinh B phải cùng được hoặc cùng không được chọn vào đội tuyển.*

⊙ Trường hợp 1: Nam sinh A và nữ sinh B cùng được vào đội tuyển:

♦ Chọn nam sinh A và nữ sinh B có 1 cách,

♦ Chọn 5 người còn lại có C_{22}^5 cách.

⊙ Trường hợp 2: Nam sinh A và nữ sinh B cùng không được vào đội tuyển:





♦ Chọn 7 người từ 22 người có C_{22}^7 cách.

⇒ Vậy có $C_{22}^5 + C_{22}^7 = 196878$ cách.

④ Nam sinh X và nữ sinh Y không thể cùng được chọn vào đội tuyển.

Nam sinh X và nữ sinh Y không thể cùng được chọn vào đội tuyển, có 3 trường hợp:

⊙ Trường hợp 1: Cả hai không vào đội tuyển, có C_{22}^7 cách.

⊙ Trường hợp 2: X vào, Y không vào đội tuyển:

♦ Chọn X có 1 cách, chọn 6 người còn lại có C_{21}^6 cách.

⊙ Trường hợp 3: Y vào, X không vào đội tuyển:

♦ Chọn Y có 1 cách, chọn 6 người còn lại có C_{21}^6 cách.

⇒ Vậy có $C_{22}^7 + C_{22}^6 + C_{22}^6 = 319770$ cách.

Bài 39.

Có 8 quả cầu xanh, 4 quả cầu vàng, 6 quả cầu đỏ (các quả cầu đôi một khác nhau). Có bao nhiêu cách lấy ra 6 quả cầu trong mỗi trường hợp sau đây:

- ① Không có yêu cầu gì thêm.
- ② Phải có 2 quả cầu xanh, 2 quả cầu vàng, 2 quả cầu đỏ.
- ③ Phải có đúng hai quả cầu đỏ.
- ④ Phải có ít nhất hai quả cầu đỏ.
- ⑤ Phải có đủ 3 màu.

Lời giải

① Không có yêu cầu gì thêm.

⇒ Số cách lấy ra 6 quả cầu từ 18 quả cầu $C_{18}^6 = 18564$ cách.

② Phải có 2 quả cầu xanh, 2 quả cầu vàng, 2 quả cầu đỏ.

⇒ Số cách lấy 6 quả cầu trong đó có 2 quả xanh, 2 quả vàng, 2 quả đỏ là $C_8^2 \cdot C_4^2 \cdot C_6^2 = 2520$ cách.

③ Phải có đúng hai quả cầu đỏ.

♦ Chọn 2 quả cầu đỏ có C_6^2 cách,

♦ Chọn 4 quả cầu còn lại từ các quả cầu xanh và vàng có C_{12}^4 cách.

⇒ Vậy có $C_6^2 \cdot C_{12}^4 = 7425$ cách.

④ Phải có ít nhất hai quả cầu đỏ.

♦ Số cách chọn 6 quả cầu không có cầu đỏ: C_{12}^6 cách.

♦ Số cách chọn 6 quả cầu chỉ có 1 cầu đỏ: $C_6^1 \cdot C_{12}^5$ cách.

⇒ Số cách chọn 6 quả cầu trong đó có ít nhất 2 quả cầu đỏ: $C_{18}^6 - (C_{12}^6 + C_6^1 \cdot C_{12}^5) = 12888$ cách.

⑤ Phải có đủ 3 màu.





- ♦ Số cách chọn 6 quả cầu không có quả xanh: C_{10}^6 cách.
 - ♦ Số cách chọn 6 quả cầu không có quả vàng: C_{14}^6 cách.
 - ♦ Số cách chọn 6 quả cầu không có quả đỏ: C_{12}^6 cách.
 - ♦ Số cách chọn 6 quả cầu toàn màu xanh: C_8^6 cách.
 - ♦ Số cách chọn 6 quả cầu toàn quả đỏ: C_6^6 cách.
- ⇒ Vậy số cách chọn 6 quả cầu có đủ 3 màu: $C_{18}^6 - (C_{10}^6 + C_{14}^6 + C_{12}^6 - C_8^6 - C_6^6) = 14456$ cách.

Bài 40.

Một tập hợp có 100 phần tử. Hỏi có bao nhiêu tập con có nhiều hơn 2 phần tử?

Lời giải

- ♦ Số tập con được tạo thành từ 100 phần tử trên là: $C_{100}^0 + C_{100}^1 + \dots + C_{100}^{100} = (1+1)^{100} = 2^{100}$.
 - ♦ Số tập con có 1 phần tử được tạo thành từ 100 phần tử trên là: 100.
 - ♦ Số tập con có 2 phần tử được tạo thành từ 100 phần tử trên là: $C_{100}^2 = 4950$.
- ⇒ Vậy số tập con có nhiều hơn 2 phần tử là: $2^{100} - (C_{100}^2 + 100 + 1) = 2^{100} - 5051$.

Bài 41.

Tổ bộ môn toán của trường X có 10 giáo viên nam và 5 giáo viên nữ. Có bao nhiêu cách thành lập nhóm nghiên cứu SGK mới gồm 6 người trong đó số thành viên nữ ít hơn số thành viên nam?

Lời giải

Các trường hợp thỏa mãn gồm

- ⊙ Trường hợp 1: 6 nam có $C_{10}^6 = 210$ (cách)
 - ⊙ Trường hợp 2: 5 nam 1 nữ có $5 \cdot C_{10}^5 = 1260$ (cách)
 - ⊙ Trường hợp 3: 4 nam 2 nữ có $C_{10}^4 \cdot C_5^2 = 2100$ (cách)
- ⇒ Vậy số cách thành lập nhóm là: $2100 + 1260 + 210 = 3570$ (cách).

Bài 41.

Một lớp có 25 học sinh nam và 15 học sinh nữ.

- ① Giáo viên chủ nhiệm cần chọn ra một học sinh làm lớp trưởng, một học sinh làm lớp phó và một học sinh làm thủ quỹ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu lớp trưởng phải là học sinh nam?
- ② Giáo viên chủ nhiệm cần chọn ra 6 học sinh để tham gia trồng cây, hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho có ít nhất 4 học sinh nam và một học sinh nữ.

Lời giải

- ① Giáo viên chủ nhiệm cần chọn ra một học sinh làm lớp trưởng, một học sinh làm lớp phó và một học sinh làm thủ quỹ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu lớp trưởng phải là học sinh nam?





- ♦ Bước 1: Chọn học sinh nam làm lớp trưởng có 25 cách.
- ♦ Bước 2: Số các chọn hai bạn học sinh còn lại cho hai chức danh còn lại là $A_{39}^2 = 1482$ cách.
- ⇒ Vậy số cách chọn thỏa mãn yêu cầu đề bài là $25.1482 = 37050$ cách.

② *Giáo viên chủ nhiệm cần chọn ra 6 học sinh để tham gia trồng cây, hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho có ít nhất 4 học sinh nam và một học sinh nữ.*

☉ *Trường hợp 1:* Chọn 4 nam và 2 nữ

- ♦ Bước 1: Chọn học sinh nam có $C_{25}^4 = 12650$ cách.
- ♦ Bước 2: Chọn học sinh nữ có $C_{15}^2 = 105$ cách.
- ⇒ Vậy trường hợp 1 có $12650.105 = 1328250$ cách.

☉ *Trường hợp 2:* Chọn 5 nam và 1 nữ.

- ♦ Bước 1: Chọn học sinh nam có $C_{25}^5 = 53130$ cách.
- ♦ Bước 2: Chọn học sinh nữ có $C_{15}^1 = 15$ cách.
- ⇒ Vậy trường hợp 2 có $15.53130 = 796950$ cách chọn.
- ⇒ Tất cả có $1328250 + 796950 = 2125200$ cách chọn thỏa yêu cầu đề bài.

Bài 42.

Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số, biết rằng chữ số 2 có mặt đúng 2 lần, chữ số 3 có mặt đúng 3 lần và các chữ số còn lại có mặt không quá một lần?

Trích từ đề **ĐHQG TP.HCM – năm 2001**

Lời giải

- ♦ Viết chữ số 2 vào 2 trong 7 vị trí có $C_7^2 = 21$ cách.
 - ♦ Viết chữ số 3 vào 3 trong 5 vị trí còn lại có $C_5^3 = 10$ cách.
 - ♦ Sau đó đưa 2 trong 8 chữ số còn lại (trừ 2 và 3) vào 2 vị trí còn lại, có $A_8^2 = 56$ cách.
 - ♦ Theo quy tắc nhân, sẽ được $21.10.56 = 11760$ số có 7 chữ số, trong đó chữ số 2 có mặt đúng 2 lần, chữ số 3 có mặt đúng 3 lần và các chữ số còn lại có mặt không quá một lần và chữ số đầu tiên có thể bằng 0.
 - ☐ Trường hợp chữ số 0 đứng đầu.
 - ♦ Viết chữ số 2 vào 2 trong 6 vị trí, có $C_6^2 = 15$
 - ♦ Viết chữ số 3 vào 3 trong 4 vị trí còn lại, có $C_4^3 = 4$
 - ♦ Đưa 1 trong 7 chữ số còn lại (trừ 2 và 3 và 0) vào 1 vị trí còn lại, có 7 cách.
- Theo quy tắc nhân sẽ được $15.4.7 = 420$ “số”, trong đó chữ số 0 đứng đầu.
- ⇒ Do đó số các số thỏa mãn đề bài là $11760 - 420 = 11340$.





Bài 43.

Cho hai đường thẳng song song a và b . Trên đường thẳng a có 12 điểm phân biệt và trên đường thẳng b có 8 điểm phân biệt.

- ① Có bao nhiêu tam giác được tạo thành tạo thành từ các điểm nằm trên hai đường thẳng a và b đã cho.
- ② Có bao nhiêu hình thang được tạo thành tạo thành từ các điểm nằm trên hai đường thẳng a và b đã cho.

Lời giải

① Có bao nhiêu tam giác được tạo thành tạo thành từ các điểm nằm trên hai đường thẳng a và b đã cho.

Số tam giác được tạo thành có hai loại:

□ Tam giác có một đỉnh trên đường thẳng a và hai đỉnh trên đường thẳng b .

♦ Số cách chọn 1 đỉnh trên a là 12.

♦ Số cách chọn 2 đỉnh trên b là C_8^2 .

⇒ Như thế số tam giác loại này là $12.C_8^2$.

□ Tam giác có một đỉnh trên đường thẳng b và hai đỉnh trên đường thẳng a .

♦ Số cách chọn 1 đỉnh trên b là 8.

♦ Số cách chọn 2 đỉnh trên a là C_{12}^2 .

⇒ Như thế số tam giác loại này là $8.C_{12}^2$.

⇒ Vậy số tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán là $12.C_8^2 + 8.C_{12}^2 = 864$.

② Có bao nhiêu hình thang được tạo thành tạo thành từ các điểm nằm trên hai đường thẳng a và b đã cho.

⇒ Số hình thang được tạo thành là $C_8^2.C_{12}^2 = 1848$.

Bài 44.

Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ.

Trích từ đề **ĐẠI HỌC KHỐI B – năm 2005**

Lời giải

♦ Số cách chọn 4 nam và một nữ đi tỉnh thứ nhất là $3C_{12}^4 = 1485$ (cách).

♦ Số cách chọn 4 nam và một nữ đi tỉnh thứ hai là $2C_8^4 = 140$ (cách).

♦ Số cách chọn 4 nam và một nữ đi tỉnh thứ hai là $2C_8^4 = 140$ (cách).

♦ Số cách chọn 4 nam và một nữ đi tỉnh thứ ba là 1 (cách).

⇒ Vậy số cách chọn theo yêu cầu bài toán là $1485.140.1 = 207900$ (cách).





Bài 45.

Trong một đa giác đều 12 cạnh có tất cả bao nhiêu:

- ① Đường chéo?
- ② Giao điểm của các đường chéo?
- ③ Tam giác có các đỉnh là 3 trong 12 đỉnh của đa giác đều đã cho?
- ④ Tứ giác có các đỉnh là 4 trong 12 đỉnh của đa giác đều đã cho?
- ⑤ Hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 12 đỉnh của đa giác đều đã cho?

Lời giải

① Đường chéo?

- ♦ Đa giác đều 12 cạnh có 12 đỉnh. Cứ 2 đỉnh cho ta một đoạn thẳng $\Rightarrow$ có C_{12}^2 đoạn thẳng.
- ♦ Trong đó có 12 cạnh còn lại là đường chéo.
- $\Rightarrow$ Vậy số đường chéo là $C_{12}^2 - 12 = 54$ đường.

② Giao điểm của các đường chéo?

- ♦ Ở đây ta chỉ tính giao điểm nằm miền trong đa giác.
- ♦ Cứ mỗi bộ 4 đỉnh của đa giác ta sẽ có đúng 2 đường chéo mà giao điểm nằm trong đa giác.
- $\Rightarrow$ Do đó số giao điểm cần tìm là: $C_{12}^4 = 495$.

③ Tam giác có các đỉnh là 3 trong 12 đỉnh của đa giác đều đã cho?

- ♦ Chọn 3 đỉnh bất kỳ từ 12 đỉnh của đa giác, ta được 1 tam giác.
- $\Rightarrow$ Vậy số tam giác là: $C_{12}^3 = 220$.

④ Tứ giác có các đỉnh là 4 trong 12 đỉnh của đa giác đều đã cho?

- ♦ Chọn 4 đỉnh bất kỳ từ 12 đỉnh của đa giác, ta được 1 tứ giác.
- $\Rightarrow$ Vậy số tứ giác là: $C_{12}^4 = 495$.

⑤ Hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 12 đỉnh của đa giác đều đã cho?

- ♦ Đa giác đều 12 cạnh có 6 đường chéo đi qua tâm.
- ♦ Cứ hai đường chéo đi qua tâm tạo thành 1 hình chữ nhật.
- $\Rightarrow$ Vậy số hình chữ nhật có đỉnh là 4 trong 12 đỉnh của đa giác đều là $C_6^2 = 15$.

Bài 46.

Trên mặt phẳng cho thập giác lồi (hình mười cạnh lồi) $A_1A_2 \dots A_{10}$. Xét tất cả các tam giác mà ba đỉnh của nó là đỉnh của thập giác. Hỏi trong số các tam giác đó, có bao nhiêu tam giác mà cả ba cạnh của nó đều không phải là cạnh của thập giác?

Lời giải

- ♦ Số tam giác được tạo thành từ các đỉnh của hình thập giác lồi là C_{10}^3 .
- ♦ Số tam giác chứa 2 cạnh của thập giác là tam giác chứa 3 đỉnh liên tiếp của thập giác, có 10 tam giác như vậy.





- ♦ Số tam giác chứa đúng 1 cạnh của thập giác là tam giác chứa 2 đỉnh liên tiếp của thập giác, đỉnh còn lại không liên tiếp hai đỉnh kia.
- ♦ Với mỗi cạnh bất kỳ có C_6^1 cách chọn 1 trong 8 đỉnh còn lại (trừ 2 đỉnh đã chọn và 2 đỉnh kế tiếp).
- ⇒ Vậy có $10.C_6^1$ tam giác như vậy.
- ⇒ Vậy số tam giác không chứa cạnh của thập giác là $C_{10}^3 - 10 - 10.C_6^1 = 50$.

Bài 47.

Cho tam giác ABC , xét tập hợp gồm 4 đường thẳng song song với AB , 5 đường thẳng song song với BC , 6 đường thẳng song song với AC . Hỏi các đường thẳng này tạo được:

- ① Bao nhiêu tam giác?
- ② Bao nhiêu hình thang kể cả hình bình hành?

Lời giải

① Bao nhiêu tam giác?

- ♦ Gọi các đường thẳng song song với AB là a_1, a_2, a_3, a_4 .
- ♦ Gọi các đường thẳng song song với BC là b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 .
- ♦ Gọi các đường thẳng song song với AC là $c_1, c_2, c_3, \dots, c_6$.
- ♦ Để tạo thành 1 tam giác ta cần chọn mỗi nhóm a_i, b_j, c_k một đường thẳng,
- ⇒ Khi đó có: $4.5.6 = 120$ tam giác.

② Bao nhiêu hình thang kể cả hình bình hành?

- ◎ Số hình bình hành được tạo thành
- ♦ Hình bình hành được tạo thành từ một cặp a_i, b_i là: $C_4^2.C_5^2 = 6.10 = 60$ hình.
- ♦ Hình bình hành được tạo thành từ một cặp a_i, c_i là: $C_4^2.C_6^2 = 6.15 = 90$ hình.
- ♦ Hình bình hành được tạo thành từ một cặp b_i, c_i là: $C_5^2.C_6^2 = 10.15 = 150$ hình.
- ⇒ Số hình bình hành được tạo thành là $60 + 90 + 150 = 300$ hình.
- ◎ Số hình thang hành được tạo thành
- ♦ Cứ mỗi cặp a_i, b_j kết hợp với 2 đường thẳng c_k được một hình thang khi đó có: $4.5.C_6^2 = 300$
- ♦ Cứ mỗi cặp a_i, c_k kết hợp với 2 đường thẳng b_j được một hình thang khi đó có: $4.6.C_5^2 = 240$
- ♦ Cứ mỗi cặp b_j, c_k kết hợp với 2 đường thẳng a_i được một hình thang khi đó có: $5.6.C_4^2 = 180$
- ⇒ Số hình thang được tạo thành là $300 + 240 + 180 = 720$ hình.

Bài 48.

Trong mặt phẳng cho đa giác đều H có 20 cạnh. Hỏi?

- ① Có bao nhiêu tam giác mà cả ba đỉnh đều là đỉnh của H .
- ② Có bao nhiêu tam giác mà có đúng hai cạnh là cạnh của H .
- ③ Có bao nhiêu tam giác mà có đúng một cạnh là cạnh của H .
- ④ Có bao nhiêu tam giác mà không có cạnh nào là cạnh của H .





Lời giải

① Có bao nhiêu tam giác mà cả ba đỉnh đều là đỉnh của H .

⇒ Số tam giác là số tổ hợp chập 3 của 20 đỉnh. Vậy có: $C_{20}^3 = 1140$ tam giác.

② Có bao nhiêu tam giác mà có đúng hai cạnh là cạnh của H .

♦ Mỗi tam giác có hai cạnh là hai cạnh của H được tạo thành từ hai cạnh liên tiếp của H .

⇒ Vậy số tam giác có hai cạnh là cạnh của H là : 20.

③ Có bao nhiêu tam giác mà có đúng một cạnh là cạnh của H .

♦ Để tạo thành tam giác mà có đúng một cạnh là cạnh của H .

⊙ **Bước 1:** Chọn 1 cạnh có 20 cách

⊙ **Bước 2:** Chọn 1 đỉnh không kề với 2 đỉnh kề với cạnh có 16 cách

⇒ Vậy số tam giác thỏa mãn là: $16 \cdot 20 = 320$ tam giác.

④ Có bao nhiêu tam giác mà không có cạnh nào là cạnh của H .

⇒ Số tam giác tạo thành từ các đường chéo là: $1140 - 20 - 320 = 800$ tam giác.

Bài 49.

Cho một đa giác lồi (H) có 15 cạnh.

① Có bao nhiêu véc-tơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của (H).

② Có bao nhiêu đoạn thẳng có hai đầu mút là các đỉnh của (H).

Lời giải

Kí hiệu A là tập hợp 15 đỉnh của H .

① Có bao nhiêu véc-tơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của (H).

♦ Mỗi một véc-tơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của H ứng với một chỉnh hợp chập 2 của A .

⇒ Vậy số véc-tơ thỏa mãn yêu cầu đề bài là $A_{15}^2 = 210$.

② Có bao nhiêu đoạn thẳng có hai đầu mút là các đỉnh của (H).

♦ Mỗi đoạn thẳng có hai đầu mút là các đỉnh của H ứng với một tổ hợp chập 2 của A .

⇒ Vậy số đoạn thẳng thỏa mãn yêu cầu đề bài là $C_{15}^2 = 105$.

Bài 50.

Tìm số đường chéo của các đa giác lồi sau đây

① Đa giác có 12 cạnh.

② Đa giác có n cạnh ($n > 3$).

③ Đa giác có số cạnh và số đường chéo bằng nhau.

Lời giải

① Đa giác có 12 cạnh.

♦ Số đoạn thẳng có hai đầu mút là các đỉnh của H là C_{12}^2 .





♦ Vì mỗi đoạn thẳng nối 2 đỉnh có thể là cạnh, có thể là đường chéo.

⇒ Do đó số đường chéo của đa giác lồi 12 cạnh là $C_{12}^2 - 12 = 54$.

② Đa giác có n cạnh ($n > 3$).

♦ Số đoạn thẳng có hai đầu mút là các đỉnh của (H) là C_n^2 .

♦ Vì mỗi đoạn thẳng nối hai đỉnh có thể là cạnh, có thể là đường chéo,

⇒ Do đó, số đường chéo của một đa giác lồi n cạnh là:

$$C_n^2 - n = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - 3n}{2}.$$

③ Đa giác có số cạnh và số đường chéo bằng nhau.

♦ Theo câu ② Ta sẽ tìm số nguyên $n > 3$ sao cho $\frac{n^2 - 3n}{2} = n \Leftrightarrow n^2 - 5n = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = 5 \end{cases}$.

⇒ Do $n \geq 3$ nên đa giác có số đường chéo bằng số cạnh là ngũ giác.

☑ Dạng 4. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC LIÊN QUAN A_n^k, P_n, C_n^k .

Phương pháp giải

○ Sử dụng các công thức sau để biến đổi vế này thành vế kia hoặc cả hai vế cùng bằng một biểu thức nào đó hoặc hiệu hai vế bằng 0.

☑ $n! = 1.2...n$; $n! = (n-1)! \cdot n = (n-1)!(n-1)n = ...$; $P_n = n!$;

☑ $A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$; $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$;

☑ $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$; $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; $C_n^k = C_n^{n-k}$; $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

🔗 Bài 51.

Chứng minh rằng

$$C_{n+m}^m = \frac{m+1}{n} C_{n+m}^{m+1}, \quad m, n \in \mathbb{N}^*$$

Lời giải

♦ $C_{n+m}^m = \frac{(m+1)!}{m! \cdot n!}. \quad (1)$

♦ $\frac{m+1}{n} C_{n+m}^{m+1} = \frac{m+1}{n} \cdot \frac{(m+n)!}{(m+1)!(n-1)!} = \frac{(m+n)!}{m! \cdot n!}. \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có điều cần chứng minh.





Bài 52.

Chứng minh rằng

$$k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2} \text{ với } 2 \leq k \leq n.$$

Trích từ đề **ĐHQG TP. HÀ NỘI** - năm 1999

Lời giải

Ta có

$$\text{♦ Vế trái} = k(k-1) \cdot \frac{n!(n-k)!}{k!} = \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} \quad (1)$$

$$\text{♦ Vế phải} = n(n-1) \cdot \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có điều cần chứng minh.

Bài 53.

Chứng minh rằng

$$P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \dots + nP_n = P_{n+1} - 1$$

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} \text{♦ } P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \dots + nP_n &= 1! + 2.2! + 3.3! + \dots + n.n! \\ &= 1! + (3-1).2! + (4-1).3! + \dots + [(n+1)-1].n! \\ &= [1! + 3.2! + 4.3! + \dots + (n+1)n!] - [2! + 3! + \dots + n!] \\ &= 1! + 3! + 4! + \dots + (n+1)! - [2! + 3! + \dots + n!] = 1! - 2! + (n+1)! = P_{n+1} - 1. \end{aligned}$$

Bài 54.

Chứng minh rằng

$$\text{① } A_n^n = A_n^r \cdot A_{n-r}^{n-r} \quad (1 \leq r \leq n)$$

$$\text{② } A_n^k = A_{n-1}^k + kA_{n-1}^{k-1}$$

$$\text{③ } A_{n+1}^{k+1} = A_n^{k+1} + (k+1)A_{n-1}^k + k(k+1)A_{n-1}^{k-1}$$

$$\text{④ } A_{n+k}^{n+2} + A_{n+k}^{n+1} = k^2 A_{n+k}^n$$

Lời giải

$$\text{① } A_n^n = A_n^r \cdot A_{n-r}^{n-r} \quad (1 \leq r \leq n)$$

$$\text{♦ } A_n^r \cdot A_{n-r}^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \frac{(n-r)!}{0!} = \frac{n!}{0!} = A_n^n.$$

$$\text{② } A_n^k = A_{n-1}^k + kA_{n-1}^{k-1}$$





$$\diamond A_{n-1}^k + kA_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} + \frac{k(n-1)!}{(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k) + k(n-1)!}{(n-k)!} = \frac{(n-1)!n}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} = A_n^k$$

$$\textcircled{3} A_{n+1}^{k+1} = A_n^{k+1} + (k+1)A_{n-1}^k + k(k+1)A_{n-1}^{k-1}$$

$$\diamond \text{ Theo câu } \textcircled{2} \text{ ta có } A_n^k = A_{n-1}^k + kA_{n-1}^{k-1}, A_{n+1}^{k+1} = A_n^{k+1} + (k+1)A_n^k.$$

$$\diamond \text{ Vậy } A_{n+1}^{k+1} = A_n^{k+1} + (k+1)(A_{n-1}^k + kA_{n-1}^{k-1}) = A_n^{k+1} + (k+1)A_n^k + k(k+1)A_{n-1}^{k-1}$$

$$\textcircled{4} A_{n+k}^{n+2} + A_{n+k}^{n+1} = k^2 A_{n+k}^n$$

$$\diamond \text{ Ta có } A_{n+k}^{n+2} + A_{n+k}^{n+1} = \frac{(n+k)!}{(k-2)!} + \frac{(n+k)!}{(k-1)!} = \frac{(n+k)!}{(k-2)!} \left(1 + \frac{1}{k-1} \right).$$

$$\diamond \frac{(n+k)!}{(k-2)!} \cdot \frac{k}{k-1} = \frac{k^2(n+k)!}{(k-2)!(k-1)k} = \frac{k^2(n+k)!}{k!} = k^2 A_{n+k}^n$$

Bài 55.

Chứng minh rằng

$$\textcircled{1} kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}.$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{k+1}.$$

$$\textcircled{3} (k-1)kC_n^k = (n-1)nC_{n-2}^{k-2}.$$

Lời giải

$$\textcircled{1} kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}.$$

$$\diamond kC_n^k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \quad (1)$$

$$\diamond nC_{n-1}^{k-1} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$

$$\textcircled{2} \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{k+1}.$$

$$\diamond \text{ Theo câu } \textcircled{1} \text{ ta có: } (k+1)C_{n+1}^{k+1} = (n+1)C_n^k \Rightarrow \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{k+1}.$$

$$\textcircled{3} (k-1)kC_n^k = (n-1)nC_{n-2}^{k-2}.$$

$$\diamond \text{ Theo câu } \textcircled{1} \text{ ta có: } (k-1)kC_n^k = (k-1)nC_{n-1}^{k-1} = n(k-1)C_{n-1}^{k-1} = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$$





Bài 56.

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} C_n^k = \frac{1}{(n+1)(n+2)} C_{n+2}^{k+2}.$$

Lời giải

- ♦ Theo “**Bài 55**” ta có: $\frac{1}{(k+1)(k+2)} C_n^k = \frac{1}{(n+1)(k+2)} C_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} C_{n+2}^{k+2}$

Bài 55 & 56 thường được sử dụng để xử lý các tổng chứa số C_n^k

Bài 57.

Chứng minh rằng

$$C_n^{k+1} + C_n^{k-1} + 2C_n^k = C_{n+2}^{k+1} \text{ với } 1 \leq k < n$$

Lời giải

- ♦ Ta có: $C_{n+2}^{k+1} = C_{n+1}^{k+1} + C_{n+1}^k = (C_n^k + C_n^k) + (C_n^k + C_n^{k-1}) = C_n^{k+1} + C_n^{k-1} + 2C_n^k$

Bài 58.

Cho $n \in \mathbb{N}$ và $n > 3$. Chứng minh

$$C_{C_n^2}^2 = 3C_{n+1}^4$$

Lời giải

- ♦ Ta có: $3C_{n+1}^4 = 3 \frac{(n+1)!}{4!(n-3)!} = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{8}$ (1)

$$\begin{aligned} \text{♦ Mặt khác: } C_{C_n^2}^2 &= \frac{C_n^2}{2!(C_n^2 - 2)} = \frac{C_n^2(C_n^2 - 1)}{2!} = \frac{\left[\frac{n!}{2!(n-2)!} - 1 \right] \frac{n!}{2!(n-2)!}}{2} \\ &= \frac{\left[\frac{n(n-1)}{2} - 1 \right] \frac{n(n-1)}{2}}{2} = \frac{\frac{n^2 - n - 2}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}}{2} = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{8} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Bài 59.

Cho k và n là các số nguyên dương với $k < n$. Chứng minh rằng

$$\textcircled{1} C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \dots + C_k^{k-1} + C_{k-1}^{k-1} \quad (1).$$

② Từ (1) suy ra rằng với mọi số nguyên dương m , ta có

$$1 + 2 + 3 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2} \quad (2) \text{ và } 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + m(m+1) = \frac{m(m+1)(m+2)}{3} \quad (3)$$

③ Hãy tính tổng: $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + 98.99.100$





Lời giải

① $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \dots + C_k^{k-1} + C_{k-1}^{k-1} \quad (1).$

♦ Ta có

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

$$C_{n-1}^k = C_{n-2}^k + C_{n-2}^{k-1}$$

$$C_{n-2}^k = C_{n-3}^k + C_{n-3}^{k-1}$$

.....

$$C_{k+1}^k = C_k^k + C_k^{k-1}$$

$$C_k^k = C_{k-1}^{k-1}$$

Cộng lại và giản ước ta được (1).

② Từ (1) suy ra rằng với mọi số nguyên dương m , ta có

$$1 + 2 + 3 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2} \quad (2)$$

♦ Khi $m=1$ thì hiển nhiên (2) đúng. Xét $m > 1$. Trong (1) lấy $n = m+1, k = 2$, ta được

$$C_{m+1}^2 = C_m^1 + C_{m-1}^1 + \dots + C_2^1 + C_1^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(m-1)!}{2!(m-1)!} = \frac{m!}{(m-1)!} + \frac{(m-1)!}{(m-2)!} + \dots + \frac{2!}{1!} + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{m(m+1)}{2} = m + (m-1) + \dots + 2 + 1$$

♦ Vậy (2) được chứng minh. Khi $m=1$ thì hiển nhiên (3) đúng. Xét $m > 1$

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + m(m+1) = \frac{m(m+1)(m+2)}{3} \quad (3)$$

Trong (1) lấy $n = m+2, k = 3$ ta được

$$C_{m+2}^3 = C_{m+1}^2 + C_m^2 + \dots + C_3^2 + C_2^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(m+2)!}{3!(m-1)!} = \frac{(m+1)!}{2!(m-1)!} + \frac{m!}{2!(m-2)!} + \dots + \frac{3!}{2!.1!} + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{m(m+1)(m+2)}{3} = (m+1)m + m(m-1) + \dots + 3.2 + 2.1$$

Vậy (3) được chứng minh.

③ Hãy tính tổng: $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + 98.99.100$

Trong (1) lấy $n = m+3, k = 4$ ta được





$$C_{m+3}^4 = C_{m+2}^3 + C_{m+1}^3 + \dots + C_4^3 + C_3^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{(m+3)!}{4!(m-1)!} = \frac{(m+2)!}{3!(m-1)!} + \frac{(m+1)!}{3!(m-2)!} + \dots + \frac{4!}{3!.1!} + 1$$

Do đó

$$\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4} = (m+2)(m+1)m + (m+1)m(m-1) + \dots + 4.3.2 + 3.2.1 \quad (4)$$

Từ (4) suy ra

$$1.2.3 + 2.3.4 + \dots + 98.99.100 = \frac{98.99.100.101}{4} = 24497550$$

Bài 60.

Tính $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \frac{C_n^{k+1}}{C_n^k}$ với $n \in \mathbb{N}^*$

Lời giải

$$\text{Ta có } (k+1) \frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} = (k+1) \left[\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} : \frac{n!}{k!(n-k)!} \right] = (k+1) \frac{k!(n-k)!}{(k+1)!(n-k-1)!} = n-k$$

$$\text{Vậy } \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) = n + n-1 + n-2 + \dots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

☑ **Dạng 5. PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA CÁC SỐ $n!, P_n, A_n^k, C_n^k$.**

Phương pháp giải

○ Ta thực hiện theo các bước sau

◎ **Bước 1:** Đặt điều kiện

⇒ Đối với $n! = 1.2.3 \dots n$ điều kiện là $n \in \mathbb{N}$

⇒ Đối với $P_n = n!$ điều kiện là $n \in \mathbb{N}$

⇒ Đối với $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ điều kiện là $\begin{cases} n, k \in \mathbb{N} \\ 0 \leq k \leq n \end{cases}$

⇒ Đối với $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, điều kiện là $\begin{cases} n, k \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq k \leq n. \end{cases}$

◎ **Bước 2.** Biến đổi và rút gọn để tìm nghiệm.

◎ **Bước 3.** Kết hợp với điều kiện để kết luận nghiệm.





Bài 61.

Giải phương trình sau:

$$P_x A_x^2 + 72 = 6(A_x^2 + 2P_x)$$

Lời giải

- Điều kiện: $\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ x \geq 2 \end{cases}$
- Phương trình $\Leftrightarrow A_x^2(P_x - 6) - 12(P_x - 6) = 0$
- $\Leftrightarrow (P_x - 6)(A_x^2 - 12) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P_x = 6 \\ A_x^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x! = 6 \\ x(x-1) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \end{cases}$

Bài 62.

Tìm n biết:

$$C_n^1 3^{n-1} + 2C_n^2 3^{n-2} + 3C_n^3 3^{n-3} + \dots + nC_n^n = 256$$

Lời giải

- Ta có: $kC_n^k 3^{n-k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} 3^{n-k} = nC_{n-1}^{k-1} 3^{n-k}$
 - Suy ra: $\sum_{k=1}^n kC_n^k 3^{n-k} = n \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} 3^{n-k} = n \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k 3^{n-1-k} = n.4^{n-1}$
 - Suy ra $C_n^1 3^{n-1} + 2C_n^2 3^{n-2} + 3C_n^3 3^{n-3} + \dots + nC_n^n = 256 \Leftrightarrow n.4^{n-1} = 4.4^3$
- Từ đó ta tìm được $n = 4$.

Bài 63.

Tìm số nguyên dương n sao cho:

$$P_{n-1} \cdot A_{n+4}^4 < 15P_{n+2}$$

Lời giải

- Điều kiện: $\begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \geq 1 \end{cases}$
- Ta có: $P_{n-1} \cdot A_{n+4}^4 < 15P_{n+2}$
- $\Leftrightarrow (n-1)! \frac{(n+4)!}{n!} < 15(n+2)!$
- $\Leftrightarrow \frac{(n+4)(n+3)}{n} < 15 \Leftrightarrow n^2 - 8n + 12 < 0 \Leftrightarrow 2 < n < 6 \Rightarrow n = 3, 4, 5$.

Bài 64.

Giải bất phương trình (ẩn n thuộc tập số tự nhiên)

$$C_{n+2}^{n-1} + C_{n+2}^n > \frac{5}{2} A_n^2$$

Lời giải





♦ Với $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ ta có:

$$C_{n+2}^{n-1} + C_{n+2}^n > \frac{5}{2} A_n^2 \Leftrightarrow C_{n+3}^n > \frac{5}{2} A_n^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+3)!}{n!3!} > \frac{5}{2} \frac{n!}{(n-2)!} \Leftrightarrow n(n^2 - 9n + 26) + 6 > 0 \text{ luôn đúng với mọi } n \geq 2.$$

♦ Vậy nghiệm của bất phương trình $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

Bài 65.

Tìm các số nguyên dương n thỏa mãn bất phương trình

$$A_n^3 + 2C_n^{n-2} \leq 9n.$$

Trích từ đề **DỰ BỊ ĐH KHỐI A – năm 2002**

Lời giải

♦ Điều kiện $n \in \mathbb{Z}, n \geq 3$. Ta có

$$A_n^3 + 2C_n^{n-2} \leq 9n \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!} + 2 \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} \leq 9n$$

$$\Leftrightarrow (n-2)(n-1)n + (n-1)n \leq 9n \Leftrightarrow n(n^2 - 3n + 2 + n - 1 - 9) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow n(n^2 - 2n - 8) \leq 0 \quad \text{do } n \geq 3 \Leftrightarrow n^2 - 2n - 8 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq n \leq 4 \quad \text{do } n \geq 3, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n \in \{3, 4\}.$$

□ Lưu ý: Khi giải phương trình, bất phương trình có chứa các số $n!, P_n, A_n^k, C_n^k$ thì cần có kỹ năng rút gọn, giản ước. Ta thường dùng các kỹ thuật sau:

- ♦ $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{1.2.3... (n-1)n}{1.2.3... (n-1)} = n,$
- ♦ $\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{1.2.3... (n-2)(n-1)n}{1.2.3... (n-2)} = (n-1)n,$
- ♦ $\frac{n!}{(n-3)!} = \frac{1.2.3... (n-3)(n-2)(n-1)n}{1.2.3... (n-3)} = (n-2)(n-1)n,$
- ♦ Và tương tự cho $\frac{n!}{(n-k)!}.$

Bài 66.

Tìm số tự nhiên n thỏa mãn

$$C_n^2 C_n^{n-2} + 2C_n^2 C_n^3 + C_n^3 C_n^3 = 100.$$

Trích từ đề **DỰ BỊ ĐH KHỐI D – năm 2003**

Lời giải

♦ Điều kiện $n \in \mathbb{Z}, n \geq 3$. Ta có





$$C_n^2 C_n^{n-2} + 2C_n^2 C_n^3 + C_n^3 C_n^{n-3} = 100$$

$$\Leftrightarrow (C_n^2)^2 + 2C_n^2 C_n^3 + (C_n^3)^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow (C_n^2 + C_n^3)^2 = 100 \Leftrightarrow C_n^2 + C_n^3 = 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} + \frac{n!}{3!(n-3)!} = 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n-2)(n-1)n}{6} = 10$$

$$\Leftrightarrow 3n^2 - 3n + n^3 - 3n^2 + 2n = 60 \Leftrightarrow n^3 - n - 60 = 0 \Leftrightarrow (n-4)(n^2 + 4n + 15) = 0 \Leftrightarrow n-4=0 \Leftrightarrow n=4.$$

Bài 67.

Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} A_x^2 + C_y^3 = 22 \\ A_y^3 + C_x^2 = 66 \end{cases}$$

Trích từ đề DUYỆT ĐH KHỐI B - năm 2007

Lời giải

♦ Điều kiện $x, y \in \mathbb{N}; x \geq 2, y \geq 3$. Khi đó hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} \frac{x!}{(x-2)!} + \frac{y!}{3!(y-3)!} = 22 \\ \frac{y!}{(y-3)!} + \frac{x!}{2!(x-2)!} = 66 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)x + \frac{(y-2)(y-1)y}{6} = 22 \\ (y-2)(y-1)y + \frac{(x-1)x}{2} = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 6x + y^3 - 3y^2 + 2y = 132 & (1) \\ 2(y^3 - 3y^2 + 2y) + x^2 - x = 132 & (2) \end{cases}$$

♦ Từ (1) ta có $y^3 - 3y^2 + 2y = 132 - 6x^2 + 6x$, thay vào (2) ta được

$$264 - 12x^2 + 12x + x^2 - x = 132 \Leftrightarrow 11x^2 - 11x - 132 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -3 \end{cases}$$

♦ Ta loại $x = -3$ và thay $x = 4$ vào (1) được

$$y^3 - 3y^2 + 2y - 60 = 0 \Leftrightarrow (y-5)(y^2 + 2y + 12) = 0 \Leftrightarrow y = 5.$$

♦ Kết luận: $x = 4$ và $y = 5$.

□ Lưu ý. Có thể giải nhanh hơn bằng cách đặt $a = \frac{x!}{(x-2)!}, b = \frac{y!}{(y-3)!}$.





Bài 68.

Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2 . Trên d_1 có 10 điểm phân biệt, trên d_2 có n điểm phân biệt ($n \geq 2$). Biết rằng có 2800 tam giác có đỉnh là các điểm đã cho. Tìm n thoả điều kiện trên.

Trích từ đề **DỰ BỊ ĐH KHỐI B – năm 2006**

Lời giải

♦ Số tam giác có một đỉnh thuộc d_1 và hai đỉnh thuộc d_2 là $10C_n^2$.

♦ Số tam giác có một đỉnh thuộc d_2 và hai đỉnh thuộc d_1 là nC_{10}^2 .

♦ Theo giả thiết ta có

$$10C_n^2 + nC_{10}^2 = 2800$$

$$\Leftrightarrow 10 \frac{n!}{2!(n-2)!} + n \frac{10!}{2!8!} = 2800 \Leftrightarrow 5(n-1)n + 45n = 2800 \Leftrightarrow n^2 + 8n = 560 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 20 \\ n = -28(l) \end{cases}$$

♦ Vậy $n = 20$.

Bài 69.

Cho tập A gồm n phần tử, $n \geq 7$. Tìm n biết rằng số tập con gồm 7 phần tử của tập A bằng hai lần số tập con gồm 3 phần tử của tập hợp A .

Trích từ đề **DỰ BỊ ĐH KHỐI A – năm 2004**

Lời giải

♦ Với điều kiện $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 7$, yêu cầu bài toán tương đương với

$$C_n^7 = 2C_n^3 \Leftrightarrow \frac{n!}{7!(n-7)!} = 2 \frac{n!}{3!(n-3)!} \Leftrightarrow \frac{1}{7!(n-7)!} = 2 \frac{1}{3!(n-3)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4.5.6.7} = 2 \frac{1}{(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)}$$

$$\Leftrightarrow (n-6)(n-5)(n-4)(n-3) = 2.4.5.6.7$$

$$\Leftrightarrow (n-6)(n-5)(n-4)(n-3) = 5.6.7.8$$

♦ Đặt $t = (n-3)(n-6) = n^2 - 9n + 18$. Khi đó $(n-4)(n-5) = n^2 - 9n + 20 = t + 2$

♦ Ta được $t(t+2) = 1680 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 1680 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 40 \\ t = -42 \end{cases}$.

Vậy $\begin{cases} n^2 - 9n + 18 = 40 \\ n^2 - 9n + 18 = -42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 - 9n - 22 = 0 \\ n^2 - 9n + 60 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2 \\ n = 11 \end{cases}$

♦ Kết hợp với điều kiện ta được $n = 11$.





Bài 70.

Giải phương trình

$$C_x^x + 2C_x^{x-1} + C_x^{x-2} = C_{x+2}^{2x-3}$$

Lời giải

♦ Điều kiện $\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ x \in \mathbb{N} \end{cases}$

Theo công thức $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$, phương trình đã cho viết lại

$$C_x^x + C_x^{x-1} + C_x^{x-1} + C_x^{x-2} = C_{x+2}^{2x-3}$$

$$\Leftrightarrow C_{x+1}^x + C_{x+1}^{x-1} = C_{x+2}^{2x-3}$$

$$\Leftrightarrow C_{x+2}^x = C_{x+2}^{2x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x-3 \\ x + (2x-3) = x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{5}{2}(l) \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

□ **Lưu ý.** Do tập xác định chỉ có 4 phần tử là 2,3,4,5 nên có thể lần lượt thay các số này vào phương trình để kiểm tra xem có phải là nghiệm hay không chứ không cần giải.

V. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1. Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau được lập từ các số 1;2;3;5;7.

- A. 15. B. 120. C. 10. D. 24.

Lời giải

Chọn B

Số các số cần lập là $A_5^4 = 120$.

Câu 2. Cho $A = \{1;2;3;4\}$. Từ A lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau?

- A. 256. B. 32. C. 24. D. 18.

Lời giải

Chọn C

Số các số cần lập là $P_4 = 4! = 24$.

Câu 3. Một tổ có 12 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 2 học sinh trong tổ làm nhiệm vụ trực nhật?

- A. 23. B. 123. C. 132. D. 66.

Lời giải

Chọn D

Số cách chọn ra 2 học sinh trong 12 học sinh là số tổ hợp chập 2 của 12.

Vậy số cách là: $C_{12}^2 = 66$ cách

Câu 4. Từ các chữ số 1,2,3,4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau?

- A. 4. B. 24. C. 4^4 . D. 16.

Lời giải





Chọn B

Mỗi một số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau là một hoán vị của 4 chữ số 1, 2, 3, 4 nên số các số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau là $4! = 24$ (số).

- Câu 5.** Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 học sinh vào một ghế dài từ một nhóm gồm 10 học sinh?
 A. 10^5 . B. 5^{10} . C. C_{10}^5 . D. A_{10}^5 .

Lời giải

Chọn D

Số cách sắp xếp 5 học sinh vào một ghế dài từ một nhóm gồm 10 học sinh là: A_{10}^5 .

- Câu 6.** Có bao nhiêu cách xếp 3 bạn A, B, C vào một dãy ghế hàng ngang có 4 chỗ ngồi?
 A. 24 cách. B. 64 cách. C. 6 cách. D. 4 cách.

Lời giải

Chọn A

Xếp 3 bạn A, B, C vào 4 chỗ ta có: $A_4^3 = 24$ cách.

- Câu 7.** Có bao nhiêu cách chọn ra 2 học sinh từ một nhóm 7 học sinh?
 A. $7!$. B. A_7^2 . C. C_7^2 . D. $2!$.

Lời giải

Chọn C

Từ 7 học sinh chọn ra 2 học sinh có C_7^2 cách chọn.

- Câu 8.** Số tập hợp con có 3 phần tử của một tập hợp có 7 phần tử là
 A. $\frac{7!}{3!}$. B. C_7^3 . C. A_7^3 . D. 21.

Lời giải

Chọn B

Mỗi tập con gồm 3 phần tử của tập hợp có 7 phần tử là một tổ hợp chập 3 của 7. Vậy số tập con là $C_7^3 = 35$.

- Câu 9.** Một nhóm học sinh có 7 em nam và 3 em nữ. Số cách chọn ra 1 em nam trong nhóm tham gia môn bóng ném là
 A. 7. B. 3. C. 10. D. 21.

Lời giải

Chọn A

Chọn 1 học sinh từ 7 học sinh nam có 7 cách chọn.

- Câu 10.** Từ một nhóm gồm 5 học sinh nam và 8 học sinh nữ có bao nhiêu cách chọn ra hai học sinh bất kỳ?
 A. 13. B. C_{13}^2 . C. $C_5^2 + C_8^2$. D. A_{13}^3 .

Lời giải

Chọn B

Chọn 2 học sinh bất kỳ từ nhóm trên có C_{13}^2 cách.

- Câu 11.** Có bao nhiêu cách xếp 7 học sinh thành một hàng dọc?
 A. 7. B. 49. C. $7!$. D. 1.





Lời giải

Chọn C

Số cách sắp xếp 7 học sinh thành một hàng dọc là số hoán vị của 7 phần tử $P_7 = 7!$.

- Câu 12.** Có bao nhiêu cách chọn hai bông hoa từ 6 bông hoa hồng đỏ và 8 bông hoa hồng xanh?
A. 182. **B.** 7. **C.** 14. **D.** 91.

Lời giải

Chọn D

Tổng số bông hoa hồng là 14.

Số cách chọn ra hai bông hoa hồng từ 14 bông hoa hồng là: $C_{14}^2 = 91$.

- Câu 13.** Cho các số 1;5;6;7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số với các chữ số khác nhau?
A. 64. **B.** 12. **C.** 256. **D.** 24.

Lời giải

Chọn D

Ta có số tự nhiên có 4 chữ số với các chữ số khác nhau được lập từ 4 chữ số 1;5;6;7 là $4! = 24$ số.

- Câu 14.** Trên giá sách có 8 quyển sách Văn và 10 quyển sách toán, các quyển sách này đôi một phân biệt. Hỏi có bao nhiêu cách tìm ra 1 quyển sách trên giá?
A. 80. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 18.

Lời giải

Chọn B

Số cách chọn 1 quyển sách trên giá sách là: $8+10=18$ quyển sách

- Câu 15.** Số tập con có hai phần tử của tập hợp gồm 10 phần tử là
A. 45. **B.** 90. **C.** 100. **D.** 20.

Lời giải

Chọn A

♦ Số tập con có hai phần tử của tập hợp gồm 10 phần tử là $C_{10}^2 = 45$.

- Câu 16.** Từ các số 1,5,6,7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau?
A. 256. **B.** 24. **C.** 64. **D.** 12.

Lời giải

Chọn B

♦ Số các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các số 1,5,6,7 là $4! = 24$ (số).

- Câu 17.** Có bao nhiêu cách chọn ra k đồ vật từ n đồ vật phân biệt cho trước ($k, n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq k \leq n$)?
A. C_n^k . **B.** A_n^k . **C.** $(n-k)!$. **D.** $k(k+1)...n$.

Lời giải

Chọn B

- Câu 18.** Có bao nhiêu cách chọn ra hai loại khối đa diện đều khác nhau?
A. 5. **B.** 2. **C.** 10. **D.** 20

Lời giải





Chọn C

Trong không gian chỉ 5 khối đa diện đều đó là: khối tứ diện đều, khối lập phương, khối bát diện đều, khối 12 mặt đều, khối 20 mặt đều.

Vậy có $C_5^2 = 10$ cách chọn ra hai loại khối đa diện đều khác nhau.

Câu 19. Với k và n là hai số nguyên dương tùy ý thỏa mãn $k \leq n$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$. B. $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$. C. $A_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. D. $C_{n-1}^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \Rightarrow C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$.

Câu 20. Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 bạn thành một hàng dọc?

- A. $5!$. B. 5^5 . C. $4!$. D. 5.

Lời giải

Chọn A

Mỗi cách sắp xếp 5 bạn thành một hàng dọc là một hoán vị của 5 phần tử. Do đó số cách sắp là $P_5 = 5!$.

Câu 21. Một nhóm học sinh gồm 5 em nam và 6 em nữ. Có bao nhiêu cách chọn ra 2 em học sinh từ nhóm trên?

- A. 11. B. A_{11}^2 . C. C_{11}^2 . D. 30.

Lời giải

Chọn C

Số cách chọn ra 2 em học sinh từ nhóm trên là một tổ hợp chập 2 của 11: C_{11}^2 .

Câu 22. Cho số nguyên dương n và số tự nhiên k thỏa mãn $0 \leq k \leq n$, C_n^k là số các tổ hợp chập k của n phần tử. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $C_n^k = \frac{(n+k)!}{n!k!}$. B. $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. C. $C_n^k = \frac{n!}{k!}$. D. $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Câu 23. Một nhóm có 6 học sinh gồm 4 nam và 2 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 3 học sinh trong đó có đúng 2 học sinh nam

- A. 12. B. 30. C. 6. D. 24.

Lời giải

Chọn A

Số cách chọn thỏa mãn là: $C_4^2 \cdot C_2^1 = 12$ cách.

Câu 24. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số có ba chữ số?





A. 20.

B. 120.

C. 216.

D. 729.

Lời giải

Chọn C

Gọi số có ba chữ số tạo ra từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 là $\overline{abc}$.

Khi đó: a có 6 cách chọn, b có 6 cách chọn, c có 6 cách chọn.

Vậy có: $6.6.6 = 216$ (số).

Câu 25. Số cách chọn 2 học sinh từ một nhóm gồm 8 học sinh nam và 7 học sinh nữ là

A. $C_7^1 + C_8^1$.

B. C_{15}^2 .

C. A_{15}^2 .

D. $C_7^1 \cdot C_8^1$.

Lời giải

Chọn B

Số cách chọn 2 học sinh từ một nhóm gồm 8 học sinh nam và 7 học sinh nữ là một tổ hợp chập 2 của 15: C_{15}^2 .

Câu 26. Trong hộp có 4 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ, 6 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Số cách chọn là

A. A_{15}^3 .

B. $C_4^3 + C_5^3 + C_6^3$.

C. C_{15}^3 .

D. 9.

Lời giải

Chọn C

Trong hộp có 4 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ, 6 viên bi vàng. Như vậy trong hộp có tất cả 15 viên bi. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi thì mỗi lần lấy là một tổ hợp chập 3 của 15 phần tử.

Vậy số cách chọn là C_{15}^3 .

Câu 27. Một nhóm học sinh gồm 10 em, trong đó có hai em Mơ và Mộng. Có bao nhiêu cách sắp xếp 10 học sinh này thành một hàng dọc sao cho hai em Mơ, Mộng không đứng cạnh nhau?

A. $10! - 9!$.

B. $9! \cdot 2!$.

C. $8 \cdot 9!$.

D. $10!$.

Lời giải

Chọn C

Sắp xếp 10 em học sinh vào một hàng dọc có $10!$ cách.

Nhóm 2 em Mộng và Mơ cạnh nhau xếp cùng 8 bạn còn lại có $9!$ cách, hoán đổi 2 em Mộng và Mơ có $2!$ cách.

Vì vậy có $9! \cdot 2!$ cách sắp xếp để Mộng và Mơ cạnh nhau.

Vậy có $10! - 9! \cdot 2! = 9! \cdot 8$ cách sắp xếp để Mộng và Mơ không đứng cạnh nhau.

Câu 28. Cho 5 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu véc tơ khác $\vec{0}$ được tạo từ 5 điểm trên?

A. 10.

B. 25.

C. 15.

D. 20.

Lời giải

Chọn D

Chọn điểm đầu có 5 cách chọn.

Chọn điểm cuối có 4 cách chọn.

Số cách tạo véc tơ khác $\vec{0}$ được tạo từ 5 điểm trên là $5 \cdot 4 = 20$.





Câu 29. Một lớp học có 10 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách chọn ra 3 học sinh của lớp học sao cho trong 3 bạn được chọn có cả nam và nữ?

- A. 10350. B. 3450. C. 1845. D. 1725.

Lời giải

Chọn D

- ♦ Trường hợp 1: Chọn 2 bạn nam và 1 bạn nữ có: $C_{10}^2 \cdot C_{15}^1 = 675$ (cách)
- ♦ Trường hợp 2: Chọn 1 bạn nam và 2 bạn nữ có: $C_{10}^1 \cdot C_{15}^2 = 1050$ (cách)
- ♦ Tổng số cách chọn 3 bạn cả nam và nữ là: 1725 (cách).

Câu 30. Từ các chữ số 2, 3, 4, 5, 6, 7 lập được bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số?

- A. 1296. B. 24. C. 360. D. 720.

Lời giải

Chọn C

Gọi $\overline{abcd}$ là số tự nhiên có bốn chữ số.

Chọn a, b, c, d đều có 6 cách chọn nên có $6^4 = 1296$ số thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 31. Một tổ học sinh có 12 bạn, gồm 7 nam và 5 nữ. Cần chọn một nhóm 3 học sinh của tổ đó để làm vệ sinh lớp học. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho trong nhóm có cả nam và nữ?

- A. 22. B. 175. C. 45. D. 350.

Lời giải

Chọn B

Ta có các trường hợp sau:

TH1: Chọn được 1 học sinh nam, hai học sinh nữ có $C_7^1 C_5^2 = 70$ cách chọn.

TH2: Chọn được 2 học sinh nam, một học sinh nữ có $C_7^2 C_5^1 = 105$ cách chọn.

Vậy, có $70 + 105 = 175$ cách chọn thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 32. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số?

- A. 3125. B. Đáp án khác. C. 120. D. 96.

Lời giải

Chọn A

♦ Gọi số tự nhiên phải tìm là $x = \overline{abcde} (a \neq 0)$.

$a \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow a$ có 5 cách chọn,

$b \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow b$ có 5 cách chọn,

$c \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow c$ có 5 cách chọn

$d \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow d$ có 5 cách chọn

$e \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow e$ có 5 cách chọn

Vậy có $5^5 = 3125$ số thỏa mãn yêu cầu.

Câu 33. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau mà hai số này đều lẻ?

- A. A_5^2 . B. C_5^2 . C. $5!$. D. 5^2 .

Lời giải

Chọn A





Xét tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Ta thấy tập A gồm 5 chữ số chẵn và 5 chữ số lẻ.

Mỗi số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau mà hai chữ số này đều lẻ chính là một chỉnh hợp chập hai của năm chữ số lẻ.

Vậy số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là: A_5^2 .

Câu 34. Một hội đồng gồm 2 giáo viên và 3 học sinh được chọn từ một nhóm 5 giáo viên và 6 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

A. 200.

B. 150.

C. 160.

D. 180.

Lời giải

Chọn A

Chọn 2 trong 5 giáo viên có: $C_5^2 = 10$ cách chọn.

Chọn 3 trong 6 học sinh có $C_6^3 = 20$ cách chọn.

Vậy có $10 \cdot 20 = 200$ cách chọn.

Câu 35. Một tổ gồm 12 học sinh trong đó có bạn An. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 4 em đi trực trong đó phải có An:

A. 990.

B. 495.

C. 220.

D. 165.

Lời giải

Chọn D

Chọn An có 1 cách chọn.

Chọn 3 bạn trong 11 bạn còn lại có $C_{11}^3 = 165$ cách chọn.

Vậy có 165 cách chọn.

----- HẾT -----





BÀI 3

NHỊ THỨC NEWTON

I. CÔNG THỨC NHỊ THỨC NEWTON

※ Cho a, b là các số thực và $n \in \mathbb{N}^*$. Ta có:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k.$$

※ Số hạng tổng quát (số hạng thứ $k+1$): $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k \quad (k \in \mathbb{N}, k \leq n).$

⇒ **Hệ quả**

- Với $a=b=1$, ta có: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$.
- Với $a=1, b=-1$, ta có: $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = 0$.

⊙ **Chú ý:**

- Trong khai triển $(a \pm b)^n$ có $n+1$ số hạng và các hệ số của các cặp số hạng cách đều số hạng đầu và số hạng cuối thì bằng nhau.
- Số hạng tổng quát có dạng: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$.
- Số mũ của a giảm dần, số mũ của b tăng dần nhưng tổng số mũ của a và b bằng n .
- Theo thứ tự khai triển như trên:
 - Với n chẵn, số hạng chính giữa là số hạng thứ $\frac{n}{2} + 1$.
 - Với n lẻ, hai số hạng chính giữa là số hạng thứ $\frac{n+1}{2}$ và $\frac{n+1}{2} + 1$.
- Tổng hệ số trong khai triển nhị thức Newton: cho biến số bằng 1.

⇒ **Công thức bổ trợ:**

① $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	② $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	③ $(a.b)^n = a^n \cdot b^n$	④ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
⑤ $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (n > 0)$	⑥ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad (a > 0, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z})$		

Ví dụ 1

Khai triển các nhị thức sau:

① $(x+1)^4$	② $(x+2y)^5$	③ $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$	④ $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^6$
-------------	--------------	------------------------------------	-------------------------------------

Lời giải





① $(x+1)^4$

$$(x+1)^4 = C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3 + C_4^2 x^2 + C_4^3 x + C_4^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1.$$

② $(x+2y)^5$

$$(x+2y)^5 = C_5^0 x^5 + C_5^1 x^4 2y + C_5^2 x^3 (2y)^2 + C_5^3 x^2 (2y)^3 + C_5^4 x (2y)^4 + C_5^5 (2y)^5 \\ = x^5 + 10x^4 y + 40x^3 y^2 + 80x^2 y^3 + 80xy^4 + 32y^5.$$

③ $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 = C_6^0 x^6 + C_6^1 x^5 \frac{1}{x} + C_6^2 x^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 + C_6^3 x^3 \left(\frac{1}{x}\right)^3 + C_6^4 x^2 \left(\frac{1}{x}\right)^4 + C_6^5 x \left(\frac{1}{x}\right)^5 + C_6^6 \left(\frac{1}{x}\right)^6 \\ = x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 20 + 15\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 6\left(\frac{1}{x}\right)^4 + \left(\frac{1}{x}\right)^6.$$

④ $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^6$

$$\left(2x - \frac{1}{x}\right)^6 = C_6^0 (2x)^6 - C_6^1 (2x)^5 \frac{1}{x} + C_6^2 (2x)^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 \\ - C_6^3 (2x)^3 \left(\frac{1}{x}\right)^3 + C_6^4 (2x)^2 \left(\frac{1}{x}\right)^4 - C_6^5 2x \left(\frac{1}{x}\right)^5 + C_6^6 \left(\frac{1}{x}\right)^6 \\ = 64x^6 - 192x^4 + 240x^2 - 160 + 60\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 12\left(\frac{1}{x}\right)^4 + \left(\frac{1}{x}\right)^6.$$

II. TAM GIÁC PASCAL

※ Các hệ số của khai triển: $(a+b)^0, (a+b)^1, (a+b)^2, \dots, (a+b)^n$ có thể xếp thành một tam giác gọi là tam giác PASCAL.

$$n=0: 1$$

$$n=1: 1 \ 1$$

$$n=2: 1 \ 2 \ 1$$

$$n=3: 1 \ 3 \ 3 \ 1$$

$$n=4: 1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1$$

$$n=5: 1 \ 5 \ 10 \ 10 \ 5 \ 1$$

$$n=6: 1 \ 6 \ 15 \ 20 \ 15 \ 6 \ 1$$

$$n=7: 1 \ 7 \ 21 \ 35 \ 35 \ 21 \ 7 \ 1$$

.....

$$\text{Hàng đẳng thức Pascal: } C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k.$$





Ví dụ 2

Viết đầy đủ dạng khai triển của các nhị thức sau:

① $(a+b)^6$

② $(a+b)^7$

Lời giải

① $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$

② $(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$

III. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng toán 1. KHAI TRIỂN NHỊ THỨC.

Phương pháp giải

○ Sử dụng trực tiếp công thức: $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^n b^n$

Ví dụ 01.

Khai triển nhị thức:

① $(x+y)^5.$

② $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^4.$

Lời giải

Áp dụng khai triển nhị thức Newton, ta có:

① $(x+y)^5.$

$$(x+y)^5 = C_5^0 x^5 + C_5^1 x^4 y + C_5^2 x^3 y^2 + C_5^3 x^2 y^3 + C_5^4 x y^4 + C_5^5 y^5$$

$$= x^5 + 5x^4 y + 10x^3 y^2 + 10x^2 y^3 + 5x y^4 + y^5$$

② $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^4.$

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^4 = C_4^0 (\sqrt{x})^4 + C_4^1 (\sqrt{x})^3 \frac{1}{x} + C_4^2 (\sqrt{x})^2 \left(\frac{1}{x}\right)^2 + C_4^3 \sqrt{x} \left(\frac{1}{x}\right)^3 + C_4^4 \left(\frac{1}{x}\right)^4 \quad (\text{điều kiện } x > 0).$$

$$= x^2 + 4\sqrt{x} + \frac{6}{x} + \frac{4}{x^2 \sqrt{x}} + \frac{1}{x^4}.$$

Ví dụ 02.

Khai triển nhị thức:

① $(2x^3 - 1)^5.$

② $\left(y - \frac{3}{y}\right)^4.$

Lời giải

Áp dụng khai triển nhị thức Newton, ta có:





① $(2x^3 - 1)^5$.

$$(2x^3 - 1)^5 = C_5^0 (2x^3)^5 + C_5^1 (2x^3)^4 (-1) + C_5^2 (2x^3)^3 (-1)^2 + C_5^3 (2x^3)^2 (-1)^3 + C_5^4 2x^3 (-1)^4 + C_5^5 (-1)^5$$

$$= 32x^{15} - 80x^{12} + 80x^9 - 40x^6 + 10x^3 - 1.$$

② $\left(y - \frac{3}{y}\right)^4$.

$$\left(y - \frac{3}{y}\right)^4 = C_4^0 y^4 + C_4^1 y^3 \left(\frac{-3}{y}\right) + C_4^2 y^2 \left(\frac{-3}{y}\right)^2 + C_4^3 y \left(\frac{-3}{y}\right)^3 + C_4^4 \left(\frac{-3}{y}\right)^4$$

$$= y^4 - 12y^2 + 54 - \frac{108}{y^2} + \frac{81}{y^4}.$$

Ví dụ 03.

Thu gọn biểu thức sau

① $S = C_{10}^0 3^{10} + C_{10}^1 3^9 + \dots + C_{10}^{10}$.

② $S = C_{15}^0 2^{15} - C_{15}^1 2^{14} + C_{15}^2 2^{13} - \dots - C_{15}^{15}$.

③ $S = 5^n C_n^n + 5^{n-1} \cdot 3 \cdot C_n^{n-1} + 3^2 \cdot 5^{n-2} C_n^{n-2} + \dots + 3^n C_n^0$.

Lời giải

Áp dụng khai triển nhị thức Newton, ta có:

① $S = C_{10}^0 3^{10} + C_{10}^1 3^9 + \dots + C_{10}^{10} = (3+1)^{10} = 4^{10}$.

② $S = C_{15}^0 2^{15} - C_{15}^1 2^{14} + C_{15}^2 2^{13} - \dots - C_{15}^{15} = (2-1)^{15} = 1$.

③ $S = 5^n C_n^n + 5^{n-1} \cdot 3 \cdot C_n^{n-1} + 3^2 \cdot 5^{n-2} C_n^{n-2} + \dots + 3^n C_n^0$

$\Leftrightarrow S = 5^n C_n^0 + 5^{n-1} \cdot 3 \cdot C_n^1 + 3^2 \cdot 5^{n-2} C_n^2 + \dots + 3^n C_n^n = (5+3)^n = 8^n$.

Dạng toán 2. TÌM HỆ SỐ HOẶC SỐ HẠNG THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN.

Phương pháp giải

※ Số hạng tổng quát (số hạng thứ $k+1$): $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ ($k \in \mathbb{N}, k \leq n$).

※ Công thức bổ trợ:

① $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

② $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

③ $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

④ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

⑤ $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (n > 0)$

⑥ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad (a > 0, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 04.

Tìm hệ số của số hạng trong khai triển:

① $(2x - 3y)^{17}$ chứa $x^8 y^9$.

② $(x - 3)^9$ chứa x^4 .





③ $(1-3x)^{11}$ chứa x^6 .

④ $(3x-x^2)^{12}$ chứa x^{15} .

⑤ $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40}$, $\forall x \neq 0$ chứa x^{31} .

Lời giải

① $(2x-3y)^{17}$ chứa x^8y^9 .

$$(2x-3y)^{17} = \sum_{k=0}^{17} C_{17}^k (2x)^{17-k} (-3y)^k = \sum_{k=0}^{17} C_{17}^k (2)^{17-k} (-3)^k x^{17-k} y^k.$$

Số hạng chứa x^8y^9 có dạng $C_{17}^k (2)^{17-k} (-3)^k x^{17-k} y^k$ với $k=9$.

Suy ra hệ số của số hạng chứa x^8y^9 là $C_{17}^9 2^8 (-3)^9$.

② $(x-3)^9$ chứa x^4 .

$$(x-3)^9 = \sum_{k=0}^9 C_9^k x^{9-k} (-3)^k = \sum_{k=0}^9 C_9^k (-3)^k x^{9-k}.$$

Số hạng chứa x^4 có dạng $C_9^k (-3)^k x^{9-k}$ với $9-k=4 \Rightarrow k=5$.

Suy ra hệ số của số hạng chứa x^4 là $C_9^5 (-3)^5 = -30618$.

③ $(1-3x)^{11}$ chứa x^6 .

$$(1-3x)^{11} = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k (-3x)^k = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k (-3)^k x^k$$

Số hạng chứa x^6 có dạng $C_{11}^k (-3)^k x^k$ với $k=6$.

Suy ra hệ số của số hạng chứa x^6 là $C_{11}^6 (-3)^6 = 336798$.

④ $(3x-x^2)^{12}$ chứa x^{15} .

$$(3x-x^2)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (3x)^{12-k} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k 3^{12-k} (-1)^k x^{12+k}$$

Số hạng chứa x^{15} có dạng $C_{12}^k 3^{12-k} (-1)^k x^{12+k}$ với $12+k=15 \Rightarrow k=3$.

Suy ra hệ số của số hạng chứa x^{15} là $-C_{12}^3 3^9$.

⑤ $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40}$, $\forall x \neq 0$ chứa x^{31} .

$$\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40} = \sum_{k=0}^{40} C_{40}^k x^{40-k} \left(\frac{-1}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{40} C_{40}^k (-1)^k x^{40-3k}$$

Số hạng chứa x^{31} có dạng $C_{40}^k (-1)^k x^{40-3k}$ với $40-3k=31 \Rightarrow k=3$.

Suy ra hệ số của số hạng chứa x^{31} là $-C_{40}^3$.





Ví dụ 05.

Tìm hệ số của x^8 trong khai triển $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$ biết $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$.

Lời giải

♦ Ta có $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3) \Leftrightarrow \frac{(n+4)!}{(n+1)!3!} - \frac{(n+3)!}{n!3!} = 7(n+3)$

$\Leftrightarrow (n+4)(n+2) - (n+2)(n+1) = 42$

$\Leftrightarrow 4n = 36 \Leftrightarrow n = 9$.

♦ Số hạng tổng quát $T_{k+1} = C_9^k x^{-3(9-k)} x^{\frac{1}{5}k} = C_9^k x^{27+\frac{16k}{5}}$.

♦ Để tìm hệ số của x^8 ta cho $-27 + \frac{16k}{5} = 8 \Leftrightarrow k = \frac{175}{16}$ (loại).

♦ Vậy không tồn tại số hạng chứa x^8 .

Ví dụ 06.

Tìm hệ số của x^9 trong khai triển

$$P(x) = (1+x)^9 + (1+x)^{10} + \dots + (1+x)^{14}.$$

Lời giải

Ta có $P(x) = (1+x)^9 + (1+x)^{10} + \dots + (1+x)^{14} = \sum_{k=0}^9 C_9^k x^k + \sum_{l=0}^{10} C_{10}^l x^l + \dots + \sum_{m=0}^{14} C_{14}^m x^m$.

Số hạng chứa x^9 : $C_9^9 x^9 + C_{10}^9 x^9 + \dots + C_{14}^9 x^9 = 3003 \cdot x^9$.

Kết luận: Hệ số của số hạng chứa x^9 là 3003.

Ví dụ 07.

Tìm hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển

$$x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}.$$

Lời giải

Có $x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$

$$= x \sum_{k=0}^5 C_5^k (-2x)^k + x^2 \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i (3x)^i = \sum_{k=0}^5 C_5^k (-2)^k x^{k+1} + \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i 3^i x^{i+2}$$

Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển đã cho có dạng: $C_5^k (-2)^k + C_{10}^i 3^i$ với k, i thỏa mãn

$$\begin{cases} k+1=5 \\ 0 \leq k \leq 5 \\ i+2=5 \\ 0 \leq i \leq 10 \\ i, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=4 \\ i=3 \end{cases}.$$





Suy ra hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển là: $C_5^4(-2)^4 + C_{10}^3 3^3 = 3320$.

Ví dụ 08.

Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^5 (2x-1)^7.$$

Lời giải

$$\text{Có } \left(x - \frac{1}{x}\right)^5 (2x-1)^7 = \sum_{k=0}^5 C_5^k x^{5-k} \left(-\frac{1}{x}\right)^k \cdot \sum_{i=0}^7 C_7^i (2x)^{7-i} (-1)^i = \sum_{k=0}^5 \sum_{i=0}^7 C_7^i \cdot C_5^k \cdot (-1)^{k+i} \cdot 2^{7-i} x^{12-2k-i}$$

Số hạng không chứa x trong khai triển đã cho có dạng: $C_7^i \cdot C_5^k \cdot (-1)^{k+i} \cdot 2^{7-i} x^{12-2k-i}$ với k, i thỏa mãn

$$\begin{cases} 12-2k-i=0 \\ 0 \leq k \leq 5 \\ 0 \leq i \leq 7 \\ i, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i=12-2k \\ 0 \leq k \leq 5 \\ 0 \leq 12-2k \leq 7 \\ i, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i=12-2k \\ 0 \leq k \leq 5 \\ \frac{5}{2} \leq k \leq 6 \\ i, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow (k; i) \in \{(3; 6); (4; 4); (5; 2)\}$$

Số hạng không chứa x trong khai triển: $C_5^3 \cdot C_7^6 \cdot (-1)^9 \cdot 2 + C_5^4 \cdot C_7^4 \cdot (-1)^8 \cdot 2^3 + C_5^5 \cdot C_7^2 \cdot (-1)^7 \cdot 2^5 = 588$.

Ví dụ 09.

Tìm hệ số của x^2 trong khai triển đa thức

$$(1 + \sqrt{x} - 3x^2)^5.$$

Lời giải

Ta có

$$(1 + \sqrt{x} - 3x^2)^5 = \sum_{k=0}^5 C_5^k (\sqrt{x} - 3x^2)^k = \sum_{k=0}^5 \sum_{i=0}^k C_5^k C_k^i (-3)^{k-i} (\sqrt{x})^i (x^2)^{k-i} = \sum_{k=0}^5 \sum_{i=0}^k C_5^k C_k^i (-3)^{k-i} (\sqrt{x})^{5k-4i}.$$

Hệ số của x^2 trong khai triển ứng với k, i nguyên thỏa mãn $5k-4i=4$ ($0 \leq k \leq 5; 0 \leq i \leq k$)

Để thấy chỉ có cặp $(k, i) = (4; 4)$ thỏa mãn. Vậy hệ số của x^2 trong khai triển là $C_5^4 = 5$.

Ví dụ 10.

Cho khai triển

$$(1+x+x^2+x^3)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{15}x^{15}. \text{ Tính } a_{10}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } (1+x+x^2+x^3)^5 = (1+x)^5 (1+x^2)^5 = \sum_{k=0}^5 \sum_{i=0}^5 C_5^k C_5^i x^{k+2i}$$

a_{10} là hệ số của x^{10} nên $k+2i=10$ ($0 \leq k \leq 5, 0 \leq i \leq 5$)

Để thấy có các cặp (k, i) thỏa mãn là $(0; 5); (2; 4); (4; 3)$ nên $a_{10} = C_5^0 C_5^5 + C_5^2 C_5^4 + C_5^4 C_5^3 = 101$.





Dạng toán 3. CHỨNG MINH HOẶC TÍNH TỔNG.

Phương pháp giải

※ Từ công thức nhị thức Newton:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Ta chọn $a; b$ phù hợp với giả thiết.

※ Ta cũng có các hệ quả sau:

- Với $a=b=1$, ta có: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$.
- Với $a=1, b=-1$, ta có: $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = 0$.

Ví dụ 11.

Tìm hệ số của số hạng trong khai triển:

- $3^{16} C_{16}^0 - 3^{15} C_{16}^1 + 3^{14} C_{16}^2 - \dots - 3^1 C_{16}^{15} + C_{16}^{16} = 2^{16}$.
- $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}$.
- $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 \cdot 3^2 + C_{2n}^4 \cdot 3^4 + \dots + C_{2n}^{2n} \cdot 3^{2n} = 2^{2n-1} (2^{2n} + 1)$.

Lời giải

$$\textcircled{1} 3^{16} C_{16}^0 - 3^{15} C_{16}^1 + 3^{14} C_{16}^2 - \dots - 3^1 C_{16}^{15} + C_{16}^{16} = 2^{16}.$$

♦ Xét khai triển $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n$.

♦ Cho $a=3; b=-1; n=16$ ta được $3^{16} C_{16}^0 - 3^{15} C_{16}^1 + 3^{14} C_{16}^2 - \dots - 3^1 C_{16}^{15} + C_{16}^{16} = 2^{16}$.

$$\textcircled{2} C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}.$$

♦ Ta có $(1+1)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} \quad (1)$.

$$(1-1)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + \dots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} \quad (2)$$

♦ Ta có $(1)+(2)$ vế với vế ta được $2(C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n}) = 2^{2n}$

$$\Rightarrow C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} = 2^{2n-1}.$$

♦ Ta có $(1)-(2)$ vế với vế ta được $2(C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1}) = 2^{2n}$

$$\Rightarrow C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}.$$

$$\textcircled{3} C_{2n}^0 + C_{2n}^2 \cdot 3^2 + C_{2n}^4 \cdot 3^4 + \dots + C_{2n}^{2n} \cdot 3^{2n} = 2^{2n-1} (2^{2n} + 1).$$

♦ Ta có $(1+3)^{2n} = C_{2n}^0 + 3C_{2n}^1 + \dots + 3^{2n-1} C_{2n}^{2n-1} + 3^{2n} C_{2n}^{2n} \quad (1)$

$$(1-3)^{2n} = C_{2n}^0 - 3C_{2n}^1 + \dots - 3^{2n-1} C_{2n}^{2n-1} + 3^{2n} C_{2n}^{2n} \quad (2)$$

♦ Lấy $(1)+(2)$ vế với vế ta được $2(C_{2n}^0 + C_{2n}^2 \cdot 3^2 + C_{2n}^4 \cdot 3^4 + \dots + C_{2n}^{2n} \cdot 3^{2n}) = 4^{2n} + 2^{2n}$

$$\Rightarrow C_{2n}^0 + C_{2n}^2 \cdot 3^2 + C_{2n}^4 \cdot 3^4 + \dots + C_{2n}^{2n} \cdot 3^{2n} = 2^{4n-1} + 2^{2n-1} = 2^{2n-1} (2^{2n} + 1).$$





Ví dụ 12.

Tính tổng

① $S = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + \dots + 2^5C_5^5.$

② $S = C_{100}^0 + C_{100}^2 + C_{100}^4 + \dots + C_{100}^{100}.$

Lời giải

① $S = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + \dots + 2^5C_5^5.$

♦ Ta có $S = C_5^0 \cdot 1^5 + C_5^1 \cdot 1^4 \cdot 2^1 + \dots + C_5^5 2^5 = (1+2)^5 = 3^5 = 243.$

② $S = C_{100}^0 + C_{100}^2 + C_{100}^4 + \dots + C_{100}^{100}.$

♦ Ta có $C_{100}^0 + C_{100}^1 + C_{100}^2 + \dots + C_{100}^{100} = (1+1)^{100} = 2^{100}.$

$C_{100}^0 - C_{100}^1 + C_{100}^2 - \dots + C_{100}^{100} = (1-1)^{100} = 0.$

♦ Từ đó ta có $2S = 2(C_{100}^0 + C_{100}^2 + C_{100}^4 + \dots + C_{100}^{100}) = 2^{100} \Rightarrow S = 2^{99}.$

IV. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 01.

Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển $(2x-1)^{10}.$

Lời giải

♦ Ta có: $(2x-1)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (2x)^{10-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k 2^{10-k} (-1)^k x^{10-k}.$

♦ Hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển $(2x-1)^{10}$ là $a = C_{10}^k 2^{10-k} (-1)^k$ khi $10-k=8$
 $\Leftrightarrow k=2.$

$\Rightarrow$ Khi đó, $a = C_{10}^2 2^8 (-1)^2 = 11520.$

Bài 02.

Tìm hệ số của số hạng chứa x^4y^3 trong khai triển $(3x-y)^7.$

Lời giải

♦ Ta có: $(3x-y)^7 = \sum_{k=0}^7 C_7^k (3x)^{7-k} (-y)^k = \sum_{k=0}^7 C_7^k 3^{7-k} x^{7-k} (-1)^k y^k = \sum_{k=0}^7 C_7^k 3^{7-k} (-1)^k x^{7-k} y^k.$

♦ Hệ số của số hạng chứa x^4y^3 trong khai triển $(3x-y)^7$ là $a = C_7^k 3^{7-k} (-1)^k$ khi $k=3.$

$\Rightarrow$ Khi đó, $a = C_7^3 3^4 (-1)^3 = -2835.$

Bài 03.

Tìm hệ số của số hạng chứa $x^{12}y^{13}$ trong khai triển $(2x-3y)^{25}.$

Lời giải





- ♦ Ta có: $(2x-3y)^{25} = \sum_{k=0}^{25} C_{25}^k (2x)^{25-k} (-3y)^k = \sum_{k=0}^{25} C_{25}^k 2^{25-k} (-3)^k x^{25-k} y^k$.
- ♦ Hệ số của số hạng chứa $x^{12}y^{13}$ trong khai triển $(2x-3y)^{25}$ là $a = C_{25}^k 2^{25-k} (-3)^k$ khi $k=13$.
- $\Rightarrow$ Khi đó, $a = C_{25}^{13} 2^{12} (-3)^{13} = -C_{25}^{13} 2^{12} 3^{13}$.

Bài 04.

Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x + \frac{8}{x^2}\right)^9$.

Lời giải

- ♦ Ta có: $\left(x + \frac{8}{x^2}\right)^9 = \sum_{k=0}^9 C_{25}^k x^{9-k} \left(\frac{8}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^9 C_{25}^k x^{9-k} \frac{8^k}{x^{2k}} = \sum_{k=0}^9 C_{25}^k 8^k x^{9-3k}$.
- ♦ Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x + \frac{8}{x^2}\right)^9$ là $a = C_{25}^k 8^k$ khi $9-3k=0 \Leftrightarrow k=3$.
- $\Rightarrow$ Vậy $a = C_{25}^3 8^3$.

Bài 05.

Tìm số hạng tự do trong khai triển $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{15}$.

Lời giải

- ♦ Ta có: $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k (x^2)^{15-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^{30-2k} x^{-k} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^{30-3k}$.
- ♦ Số hạng tự do trong khai triển $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{15}$ là $a = C_{15}^k$ khi $30-3k=0 \Leftrightarrow k=10$.
- $\Rightarrow$ Vậy $a = C_{15}^{10} = 3003$.

Bài 06.

Tìm hệ số của x^{31} trong khai triển $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{40}$.

Lời giải

- ♦ Số hạng tổng quát $T_{k+1} = C_{40}^k x^{40-k} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k = C_{40}^k x^{40-k} (-1)^k x^{-2k} = C_{40}^k (-1)^k x^{40-3k}$.
- ♦ Để tìm hệ số của x^{31} ta cho $40-3k=31 \Leftrightarrow k=3$.
- $\Rightarrow$ Vậy hệ số của x^{31} là: $(-1)^3 C_{40}^3 = -C_{40}^3$.

Bài 07.

Tìm hạng tử độc lập trong khai triển $\left(x^3\sqrt{x} + x^{\frac{28}{15}}\right)^{12}$ ($x > 0$).





Lời giải

- ♦ Số hạng tổng quát $T_{k+1} = C_{12}^k x^{\frac{4}{3}(12-k)} \left(x^{\frac{28}{15}}\right)^k = C_{12}^k x^{16+\frac{8}{15}k}$.
- ♦ Tìm hạng tử độc lập trong khai triển: ta cho $16 + \frac{8}{15}k = 0 \Rightarrow k = -30$ (loại).
- ⇒ Vậy không tồn tại hạng tử độc lập trong khai triển.

Bài 08.

Tìm hệ số của x^2 trong khai triển $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + x\right)^7$.

Lời giải

- ♦ Số hạng tổng quát $T_{k+1} = C_7^k x^{\frac{-2}{3}(7-k)} x^k = C_7^k x^{\frac{14}{3} + \frac{5k}{3}}$.
- ♦ Để tìm hệ số của x^2 ta cho $-\frac{14}{3} + \frac{5k}{3} = 2 \Leftrightarrow k = 4$.
- ⇒ Vậy hệ số của x^2 là: $C_7^4 = 35$.

Bài 09.

Tìm hệ số của a^7 trong khai triển $\left(\frac{3}{64}\sqrt[3]{a^2} + \frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$.

Lời giải

- ♦ Viết lại nhị thức $\left(\frac{3}{64}\sqrt[3]{a^2} + \frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12} = \left(\frac{3}{64}a^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}\right)^{12}$
- ♦ Số hạng tổng quát $T_{k+1} = C_{12}^k \left(\frac{3}{64}a^{\frac{2}{3}}\right)^{12-k} \left(\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}\right)^k = C_{12}^k \left(\frac{3}{64}\right)^{12-k} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k a^{8-\frac{k}{6}}$.
- ♦ Để tìm hệ số của a^7 ta cho $8 - \frac{k}{6} = 7 \Leftrightarrow k = 6$.
- ⇒ Vậy hệ số của a^7 là: $C_{12}^6 \cdot 2^{-30}$.

Bài 10.

Tìm số hạng chứa x^{50} trong khai triển $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{2018}$

Lời giải

- ♦ Điều kiện: $x \neq 0$. Ta có $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{2018} = \sum_{k=0}^{2018} C_{2018}^k x^{2018-k} \left(\frac{1}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{2018} C_{2018}^k x^{2018-3k}$
- ♦ Vậy số hạng tổng quát của khai triển là $T_{k+1} = C_{2018}^k x^{2018-3k}, \forall k = 0, 1, 2, \dots, 2018$
- ♦ Do T_{k+1} là số hạng chứa x^{50} khi và chỉ khi $2018 - 3k = 50 \Leftrightarrow 3k = 1968 \Leftrightarrow k = 656$
- ⇒ Vậy số hạng chứa x^{50} là $T_{657} = C_{2018}^{656} x^{50}$





Bài 11.

Tìm hệ số của $x^{25}y^{10}$ trong khai triển $(x^3 + xy)^{15}$

Lời giải

- Ta có $(x^3 + xy)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k (x^3)^{15-k} (xy)^k = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^{45-2k} y^k$
- Số hạng tổng quát: $T_k = C_{15}^k x^{45-2k} y^k$
- Điều kiện để T_k là số hạng chứa $x^{25}y^{10}$ là $\begin{cases} 45-2k=25 \\ k=10 \end{cases} \Leftrightarrow k=10$
- Số hạng chứa $x^{25}y^{10}$ là $T_{10} = C_{15}^{10} x^{25} y^{10}$.
- $\Rightarrow$ Hệ số của $x^{25}y^{10}$ là $C_{15}^{10} = 3003$

Bài 12.

Tìm hai số hạng đứng chính giữa và số hạng không chứa x khi khai triển $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{15}$

Lời giải

- Ta có $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k (x^2)^{15-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^{30-2k} x^{-k} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^{30-3k}$
- Số hạng chứa x^{30-3k} là $T_k = C_{15}^k x^{30-3k}$. Để T_k là số hạng không chứa x thì điều kiện là $30-3k=0 \Leftrightarrow k=10$. Vậy số hạng không chứa x là $T_{10} = C_{15}^{10} = 3003$.
- Khi khai triển $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{15}$ ta được 16 số hạng, do đó 2 số hạng đứng chính giữa là số hạng thứ 8 và số hạng thứ 9 (tính từ trái sang phải).
- $\Rightarrow$ Tức là hai số hạng sau đây $T_7 = C_{15}^7 x^9, T_8 = C_{15}^8 x^6$

Bài 13.

Tìm hệ số của số hạng chứa x^5 khi khai triển nhị thức Newton của $(1+3x)^{2n}$, biết rằng $A_n^3 + 2A_n^2 = 100$ (n là số nguyên dương).

Trích đề **DỰ BỊ ĐH KHỐI A – năm 2008**

Lời giải

- Ta có $A_n^3 + 2A_n^2 = 100 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!} + 2 \frac{n!}{(n-2)!} = 100$
- $\Leftrightarrow (n-2)(n-1)n + 2(n-1)n = 100$
- $\Leftrightarrow n^3 - 3n^2 + 2n + 2n^2 - 2n - 100 = 0 \Leftrightarrow n^3 - n^2 - 100 = 0$
- $\Leftrightarrow (n-5)(n^2 + 4n + 20) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n=5 \\ n^2 + 4n + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow n=5.$





♦ Vậy $(1+3x)^{2n} = (1+3x)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (3x)^k = \sum_{k=0}^{10} 3^k C_{10}^k x^k$.

♦ Số hạng chứa x^k là $T_k = 3^k C_{10}^k x^k$ ($k = 0, 1, \dots, 10$).

$\Rightarrow$ Điều kiện để T_k số hạng chứa x^5 là $3^5 \cdot C_{10}^5 = 61236$

Bài 14.

Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $(1+2x+3x^2)^{10}$.

Lời giải

☉ Cách 1. Ta có

$$\begin{aligned} (1+2x+3x^2)^{10} &= \left[1 + (2x+3x^2)\right]^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k 1^{10-k} (2x+3x^2)^k \\ &= \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \sum_{i=0}^k C_k^i (2x)^{k-i} (3x^2)^i = \sum_{k=0}^{10} \sum_{i=0}^k C_{10}^k C_k^i (2x)^{k-i} (3x^2)^i \\ &= \sum_{k=0}^{10} \sum_{i=0}^k C_{10}^k C_k^i 2^{k-i} 3^i x^{k+i} \text{ (với } k = 0, 1, 2, 3, \dots, 10; i = 0, 1, \dots, k) \end{aligned}$$

♦ Điều kiện để $C_{10}^k C_k^i 2^{k-i} 3^i x^{k+i}$ là số hạng chứa x^4 là $\begin{cases} k+i=4 \\ 0 \leq i \leq k \leq 10 \\ i, k \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (k, i) = (2, 2) \\ (k, i) = (3, 1) \\ (k, i) = (1, 0) \end{cases}$

♦ Vậy số hạng chứa x^4 là $T = C_{10}^2 C_2^2 2^0 3^2 x^4 + C_{10}^3 C_3^1 2^2 3^1 x^4 + C_{10}^1 C_1^0 2^4 3^0 x^4 = 8085x^4$.

$\Rightarrow$ Do đó hệ số của x^4 là 8085.

☉ Cách 2. Ta có $(1+2x+3x^2)^{10} = \left[1 + (2x+3x^2)\right]^{10}$

$$= C_{10}^0 + C_{10}^1 (2x+3x^2) + C_{10}^2 (2x+3x^2)^2 + C_{10}^3 (2x+3x^2)^3 + \dots + C_{10}^{10} (2x+3x^2)^{10}$$

♦ Ta thấy x^4 chỉ xuất hiện trong các số hạng $C_{10}^2 (2x+3x^2)^2, C_{10}^3 (2x+3x^2)^3, C_{10}^4 (2x+3x^2)^4$.

♦ Hệ số của x^4 trong $C_{10}^2 (2x+3x^2)^2, C_{10}^3 (2x+3x^2)^3, C_{10}^4 (2x+3x^2)^4$ lần lượt là $9C_{10}^2, 3 \cdot 2^2 \cdot 3C_{10}^3, 2^4 C_{10}^4$.

$\Rightarrow$ Vậy hệ số của x^4 trong khai triển $(1+2x+3x^2)^{10}$ là $9C_{10}^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot 3C_{10}^3 + 2^4 C_{10}^4 = 8085$

Bài 15.

Khai triển đa thức

$$P(x) = (1+x)^9 + (1+x)^{10} + \dots + (1+x)^{14} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_{14} x^{14}$$

Hãy xác định hệ số A_9 .

Lời giải

♦ Vì hệ số của x^9 khi khai triển $(1+x)^n$ là C_n^9





- ♦ Nên hệ số của x^9 khi khai triển $P(x) = (1+x)^9 + (1+x)^{10} + \dots + (1+x)^{14}$ thành đa thức là $A_9 = C_9^9 + C_{10}^9 + C_{11}^9 + C_{12}^9 + C_{13}^9 + C_{14}^9 = 3003$.

Bài 16.

Xác định hệ số của $x^5 y^3 z^6 t^6$ trong khai triển $(x+y+z+t)^{20}$.

Lời giải

- ♦ Ta có $(x+y+z+t)^{20} = [(y+z+t)+x]^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k (y+z+t)^{20-k} x^k$.
- ♦ Vậy số hạng chứa x^5 khi khai triển $(x+y+z+t)^{20}$ là $C_{20}^5 (y+z+t)^{15} x^5$.
- ♦ Tiếp theo ta có $C_{20}^5 (y+z+t)^{15} x^5 = C_{20}^5 x^5 [(z+t)+y]^{15} = C_{20}^5 x^5 \sum_{i=0}^{15} C_{15}^i (z+t)^{15-i} y^i$
- ♦ Do đó số hạng chứa $x^5 y^3$ khi khai triển $(x+y+z+t)^{20}$ là $C_{20}^5 x^5 C_{15}^3 (z+t)^{12} y^3 = C_{20}^5 C_{15}^3 x^5 y^3 (z+t)^{12}$
- ♦ Tiếp theo ta có $C_{20}^5 C_{15}^3 x^5 y^3 \sum_{j=0}^{12} C_{12}^j t^{12-j} z^j$
- ♦ Do đó số hạng chứa $x^5 y^3 z^6$ khi khai triển là $(x+y+z+t)^{20}$ là $C_{20}^5 C_{15}^3 C_{12}^6 x^5 y^3 z^6 t^6$ và đây cũng là số hạng chứa $x^5 y^3 z^6 t^6$.
- ⇒ Bởi vậy hệ số của $x^5 y^3 z^6 t^6$ trong khai triển $(x+y+z+t)^{20}$ là $C_{20}^5 C_{15}^3 C_{12}^6$.

Bài 17.

Tìm hệ số của x^8 trong khai triển $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$ biết $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$.

Lời giải

- ♦ Ta có $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3) \Leftrightarrow \frac{(n+4)!}{(n+1)!3!} - \frac{(n+3)!}{n!3!} = 7(n+3)$
 $\Leftrightarrow (n+4)(n+2) - (n+2)(n+1) = 42$
 $\Leftrightarrow 4n = 36 \Leftrightarrow n = 9$.
- ♦ Số hạng tổng quát $T_{k+1} = C_9^k x^{-3(9-k)} x^{\frac{1}{2}k} = C_9^k x^{27 + \frac{16k}{5}}$.
- ♦ Để tìm hệ số của x^8 ta cho $-27 + \frac{16k}{5} = 8 \Leftrightarrow k = \frac{175}{16}$ (loại).
- ⇒ Vậy không tồn tại số hạng chứa x^8 .

Bài 18.

Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^n$ biết tổng các hệ số của khai triển trên là 1024.





Lời giải

- ♦ Ta có $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot \left(\frac{1}{x^4}\right)^{n-k} \cdot (x^7)^k = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot x^{11k-4n}$
- ♦ Tổng các hệ số trong khai triển là:

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 1024 \Leftrightarrow C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 1024 \Leftrightarrow 2^n = 1024 \Rightarrow n = 10.$$
- ♦ Với $n = 10 \Rightarrow \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot x^{11k-4n} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot x^{11k-40}$ có số hạng tổng quát: $C_{10}^k \cdot x^{11k-40}$.
- ♦ Số hạng chứa x^{26} phải có: $11k - 40 = 26 \Leftrightarrow k = 6$.
 $\Rightarrow$ Hệ số của số hạng chứa x^{26} : $C_{10}^6 = 210$.

Bài 19.

Tìm hệ số của số hạng chứa x^{11} trong khai triển $P(x) = 10(1-x)^{10} + 11(1-x)^{11} + \dots + 15(1-x)^{15}$

Lời giải

- ♦ Ta có $P(x) = 10(1-x)^{10} + 11(1-x)^{11} + \dots + 15(1-x)^{15}$

$$= 10 \cdot \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (-x)^k + 11 \cdot \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k (-x)^k + \dots + 15 \cdot \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k (-x)^k$$

$$= 10 \cdot \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (-1)^k x^k + 11 \cdot \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k (-1)^k x^k + \dots + 15 \cdot \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k (-1)^k x^k$$
- ♦ Số hạng chứa x^{11} : $11 \cdot C_{11}^{11} (-1)^{11} x^{11} + \dots + 15 \cdot C_{15}^{11} (-1)^{11} x^{11} =$

$$= (-11 \cdot 1 - 12 \cdot 12 - 13 \cdot 78 - 14 \cdot 364 - 15 \cdot 1365) x^{11} = -26740 \cdot x^{11}$$
- $\Rightarrow$ Hệ số của số hạng chứa x^{11} là -26740 .

Bài 20.

Tìm số hạng chứa x^{12} trong khai triển $P(x) = (x^2 - 1)^9 + (x^2 - 1)^{10} + \dots + (x^2 - 1)^{13}$.

Lời giải

- ♦ Ta có $P(x) = (x^2 - 1)^9 + (x^2 - 1)^{10} + \dots + (x^2 - 1)^{13}$

$$= \sum_{k=0}^9 C_9^k (x^2)^{9-k} (-1)^k + \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (x^2)^{10-k} (-1)^k + \dots + \sum_{k=0}^{13} C_{13}^k (x^2)^{13-k} (-1)^k$$
- ♦ Số hạng chứa TQ: $C_9^k x^{18-2k} (-1)^k + C_{10}^k x^{20-2k} (-1)^k + \dots + C_{13}^k x^{26-2k} (-1)^k$
- ♦ Số hạng chứa x^{12} :

$$C_9^3 x^{18-2 \cdot 3} (-1)^3 + C_{10}^4 x^{20-2 \cdot 4} (-1)^4 + C_{11}^5 x^{20-2 \cdot 5} (-1)^5 + C_{12}^6 x^{20-2 \cdot 6} (-1)^6 + C_{13}^7 x^{26-2 \cdot 7} (-1)^7$$

$$= (-84 + 210 - 462 + 924 - 1716) x^{12} = -1128.$$

Bài 21.

Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển





$$P(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^5 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^6 + \dots + \left(x - \frac{1}{x}\right)^{10}.$$

Lời giải

- ♦ Có $P(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^5 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^6 + \dots + \left(x - \frac{1}{x}\right)^{10}$
 $= \sum_{n=5}^{10} \left(x - \frac{1}{x}\right)^n = \sum_{n=5}^{10} \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} \cdot \left(\frac{-1}{x}\right)^k = \sum_{n=5}^{10} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k x^{n-2k}.$
- ♦ Số hạng chứa x^5 trong khai triển $P(x)$ có dạng $C_n^k (-1)^k x^{n-2k}$ với n, k thỏa mãn

$$\begin{cases} n-2k=5 \\ 5 \leq n \leq 10 \\ 0 \leq k \leq n \\ n, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow (n; k) \in \{(5; 0); (7; 1); (9; 2)\}.$$

$\Rightarrow$ Số hạng chứa x^5 trong khai triển $P(x)$ là: $C_5^0 (-1)^0 x^5 + C_7^1 (-1)^1 x^5 + C_9^2 (-1)^2 x^5 = 29x^5.$

Bài 22.

Tìm hệ số của số hạng chứa x^6 trong khai triển

$$2x^2(1-3x)^5 - 3x(1+2x)^7.$$

Lời giải

- ♦ $2x^2(1-3x)^5 - 3x(1+2x)^7 = 2x^2 \sum_{k=0}^5 C_5^k (-3x)^k - 3x \sum_{i=0}^7 C_7^i (2x)^i = \sum_{k=0}^5 C_5^k \cdot 2 \cdot (-3)^k x^{k+2} - \sum_{i=0}^7 C_7^i \cdot 3 \cdot 2^i x^{i+1}$
- ♦ Hệ số của số hạng chứa x^6 trong khai triển đã cho có dạng: $C_5^k \cdot 2 \cdot (-3)^k - C_7^i \cdot 3 \cdot 2^i$ với k, i thỏa

$$\text{mãn } \begin{cases} k+2=6 \\ 0 \leq k \leq 5 \\ i+1=6 \\ 0 \leq i \leq 7 \\ i, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=4 \\ i=5 \end{cases}.$$

$\Rightarrow$ Hệ số của số hạng chứa x^6 trong khai triển là: $C_5^4 \cdot 2 \cdot (-3)^4 - C_7^5 \cdot 3 \cdot 2^5 = -1856.$

Bài 23.

Tìm số hạng chứa x^{15} trong khai triển

$$(1+x)^7 (x^2-2)^{10}.$$

Lời giải

- ♦ Có $(1+x)^7 (x^2-2)^{10}$
 $= \sum_{k=0}^7 C_7^k x^k \cdot \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i (x^2)^{10-i} (-2)^i = \sum_{k=0}^7 \sum_{i=0}^{10} C_7^k x^k \cdot C_{10}^i (x^2)^{10-i} (-2)^i = \sum_{k=0}^7 \sum_{i=0}^{10} C_7^k \cdot C_{10}^i \cdot (-2)^i \cdot x^{20-2i+k}$





- Số hạng chứa x^{15} trong khai triển đã cho có dạng: $C_7^k \cdot C_{10}^i \cdot (-2)^i \cdot x^{20-2i+k}$ với k, i thỏa mãn

$$\begin{cases} 20-2i+k=15 \\ 0 \leq k \leq 7 \\ 0 \leq i \leq 10 \\ i, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2i-k=5 \\ 0 \leq k \leq 7 \\ 0 \leq i \leq 10 \\ i, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2i-5 \\ 0 \leq 2i-5 \leq 7 \\ 0 \leq i \leq 10 \\ i, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2i-5 \\ \frac{5}{2} \leq i \leq 6 \\ 0 \leq i \leq 10 \\ i, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow (k; i) \in \{(1; 3); (3; 4); (5; 5); (7; 6)\}.$$

$\Rightarrow$ Số hạng chứa x^{15} trong khai triển là:

$$C_7^1 \cdot C_{10}^3 \cdot (-2)^3 \cdot x^{15} + C_7^3 \cdot C_{10}^4 \cdot (-2)^4 \cdot x^{15} + C_7^5 \cdot C_{10}^5 \cdot (-2)^5 \cdot x^{15} + C_7^7 \cdot C_{10}^6 \cdot (-2)^6 \cdot x^{15} = -45024x^{15}.$$

Bài 24.

Tìm hệ số của x^8 trong khai triển đa thức .

$$(1+x^2(1-x))^8.$$

Lời giải

- Ta có $(1+x^2(1-x))^8 = \sum_{k=0}^8 C_8^k x^{2k} (1-x)^k = \sum_{k=0}^8 \sum_{i=0}^k C_8^k (-1)^i C_k^i x^{2k+i}$
- Hệ số của x^8 trong khai triển ứng với k, i thỏa mãn $2k+i=8 (0 \leq i \leq k, 0 \leq k \leq 8)$
- Có 2 bộ $\begin{cases} k=3 \\ i=2 \end{cases}$ và $\begin{cases} k=4 \\ i=0 \end{cases}$ thỏa mãn.

$\Rightarrow$ Vậy hệ số của x^8 trong khai triển là $C_8^3 C_3^2 + C_8^4 C_4^0 = 238$.

Bài 25.

Đa thức $P(x) = (1+3x+2x^2)^{10} = a_0 + a_1x + \dots + a_{20}x^{20}$. Tìm a_{15} .

Lời giải

- Ta có:
- $P(x) = (1+3x+2x^2)^{10} = ((1+3x)+2x^2)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k 2^{10-k} x^{20-2k} (1+3x)^k = \sum_{k=0}^{10} \sum_{i=0}^k C_{10}^k C_k^i 2^{10-k} 3^i x^{20-2k-i}$
- a_{15} là hệ số của x^{15} nên $20-2k-i=15 \Rightarrow 2k+i=5 (0 \leq k \leq 10, 0 \leq i \leq k)$
- Dễ thấy chỉ có cặp $(k, i) = (2; 1)$ thỏa mãn.
- $\Rightarrow$ Vậy $a_{15} = C_{10}^2 C_2^1 \cdot 10^8 \cdot 3 = 27 \cdot 10^9$.

Bài 26.

Với n là số nguyên dương, gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $(x^2+1)^n (x+2)^n$. Tìm n để $a_{3n-3} = 26n$.

Lời giải

- Ta có $(x^2+1)^n (x+2)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{2n-2k} \sum_{i=0}^n C_n^i x^{n-i} 2^i = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n C_n^k C_n^i x^{3n-2k-i} 2^i$
- Từ giả thiết $2k+i=3 \Rightarrow (k, i) \in \{(1; 1), (0; 3)\}$





$$\Rightarrow a_{3n-3} = 2C_n^1 C_n^1 + 2^3 C_n^0 C_n^3 = 2n^2 + n(n-1)(n-2) = 26n$$

$$\Leftrightarrow 2n + \frac{4}{3}(n-1)(n-2) = 26 \Leftrightarrow 2n^2 - 3n - 35 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 5 \\ n = -\frac{7}{2} \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow n = 5$$

Bài 27.

Tìm hạng tử của khai triển $(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})^9$ là số nguyên.

Lời giải

♦ Số hạng tổng quát trong khai triển là: $T_{k+1} = C_9^k (\sqrt{3})^k (\sqrt[3]{2})^{9-k} = C_9^k \cdot 3^{\frac{k}{2}} \cdot 2^{3-\frac{k}{3}}$.

♦ Hạng tử của triển khai đã cho là số nguyên $\Leftrightarrow \begin{cases} k = 2m \\ k = 3n \\ k = \overline{1;9} \end{cases} \Leftrightarrow k = 0, k = 6$.

$\Rightarrow$ Các số hạng là số nguyên: $C_9^0 (\sqrt[3]{2})^9 = 8$ và $C_9^6 (\sqrt{3})^6 (\sqrt[3]{2})^3$.

Bài 27.

Tìm hạng tử của khai triển $(\sqrt{3} - \sqrt{15})^6$ là số nguyên.

Lời giải

♦ Số hạng tổng quát trong khai triển là: $T_{k+1} = C_6^k (\sqrt{3})^k (-\sqrt{15})^{6-k} = (-1)^{6-k} C_6^k \cdot 3^{\frac{k}{2}} \cdot 15^{3-\frac{k}{2}}$.

♦ Hạng tử của triển khai đã cho là số nguyên $\Leftrightarrow \begin{cases} k = 2n \\ k = \overline{0;6} \end{cases} \Leftrightarrow k = 0, k = 2, k = 4, k = 6$.

$\Rightarrow$ Các số hạng là số nguyên: 3375, 10125, 2025, 27.

Bài 28.

Trong triển khai $(\sqrt{3} - \sqrt[4]{5})^{124}$ có bao nhiêu số hạng hữu tỷ.

Lời giải

♦ $(\sqrt{3} - \sqrt[4]{5})^{124} = \left(3^{\frac{1}{2}} - 5^{\frac{1}{4}}\right)^{124}$

♦ Số hạng tổng quát trong khai triển là: $T_{k+1} = C_{124}^k \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^k \left(-5^{\frac{1}{4}}\right)^{124-k} = (-1)^{124-k} C_{124}^k \cdot 3^{\frac{k}{2}} \cdot 5^{31-\frac{k}{4}}$.

♦ Để số hạng trong triển khai là số hữu tỷ thì: $\begin{cases} \frac{k}{2} \in \mathbb{Z} \\ \frac{k}{4} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow k = 4m$

♦ Vì $0 \leq k \leq 124 \Leftrightarrow 0 \leq 4m \leq 124 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 31, m \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow$ Vậy có 32 số hạng hữu tỷ.





Bài 29.

Trong khai triển $\left(\frac{1}{3} + \frac{2x}{3}\right)^{10}$ thành đa thức $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10}$ ($a_k \in \mathbb{R}$). Hãy tìm hệ số a_k lớn nhất.

Trích đề ĐHSP HÀ NỘI – năm 2001

Lời giải

♦ Ta có $\left(\frac{1}{3} + \frac{2x}{3}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} \left(\frac{2x}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \frac{2^k}{3^{10-k} \cdot 3^k} x^k$.

♦ Vậy số hạng chứa x^k là $T_{k+1} = C_{10}^k \frac{2^k}{3^{10-k} \cdot 3^k} x^k = C_{10}^k \frac{2^k}{3^{10}} x^k, \forall k = 0, 1, \dots, 10$.

♦ Do đó $a_k = C_{10}^k \frac{2^k}{3^{10}}, \forall k = 0, 1, \dots, 10$ lúc này

$$a_k < a_{k+1} \quad (k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq 9) \Leftrightarrow C_{10}^k \frac{2^k}{3^{10}} < C_{10}^{k+1} \frac{2^{k+1}}{3^{10}} \Leftrightarrow \frac{10!}{k!(10-k)!} < \frac{10! \cdot 2}{(k+1)!(9-k)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(10-k)} < \frac{2}{(k+1)} \Leftrightarrow k+1 < 20-2k \Leftrightarrow 3k < 19 \Leftrightarrow k < \frac{19}{3} \Leftrightarrow k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

♦ Vậy $a_k < a_{k+1} \Leftrightarrow k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tức là $\begin{cases} a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7 \\ a_7 \geq a_8 \geq a_9 \geq a_{10} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Vậy hệ số a_k lớn nhất là $a_7 = C_{10}^7 \frac{2^7}{3^{10}}$.

Bài 30.

Tìm số hạng lớn nhất và tính giá trị số hạng đó trong khai triển $(1+0,2)^{100}$.

Lời giải

♦ Ta có $(1+0,2)^{100} = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^k (0,2)^k$. Xét $a_k = C_{100}^k (0,2)^k$.

♦ Giả sử

$$a_{k+1} \geq a_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 99)$$

$$\Leftrightarrow C_{100}^{k+1} (0,2)^{k+1} \geq C_{100}^k (0,2)^k$$

$$\Leftrightarrow 0,2 \cdot \frac{100!}{(k+1)!(99-k)!} \geq \frac{100!}{k!(100-k)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{0,2}{k+1} \geq \frac{1}{100-k} \Leftrightarrow 20-0,2k \geq k+1$$

$$\Leftrightarrow 1,2k \leq 19 \Leftrightarrow k \leq \frac{95}{6} \Leftrightarrow k \in \{0, 1, \dots, 15\}$$

♦ Vậy $a_{k+1} \geq a_k \Leftrightarrow k \in \{0, 1, \dots, 15\}$, nghĩa là $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{15} \leq a_{16} \geq a_{17} \geq a_{18} \geq \dots \geq a_{99} \geq a_{100}$

♦ Số hạng lớn nhất là $a_{16} = C_{100}^{16} (0,2)^{16} = 8820232, 219$

Nhận xét. Với đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ta có :





- ♦ Tổng các hệ số theo mũ chẵn bằng $\frac{P(1) + P(-1)}{2}$.
- ♦ Tổng các hệ số theo mũ lẻ bằng $\frac{P(1) - P(-1)}{2}$.

Bài 31.

Tìm số hạng nguyên khi khai triển $(\sqrt[5]{3} + \sqrt[3]{7})^{100}$.

Lời giải

- ♦ Ta có $(\sqrt[5]{3} + \sqrt[3]{7})^{36} = \sum_{k=0}^{36} C_{36}^k \left(3^{\frac{1}{5}}\right)^{36-k} \left(7^{\frac{1}{3}}\right)^k = \sum_{k=0}^{36} C_{36}^k 3^{\frac{36-k}{5}} 7^{\frac{k}{3}}$.
- ♦ Điều kiện để $T_{k+1} = C_{36}^k 3^{\frac{36-k}{5}} 7^{\frac{k}{3}}$ ($k = 0, 1, \dots, 36$) là số nguyên là $\frac{36-k}{5} \in \mathbb{N}$ và $\frac{k}{3} \in \mathbb{N}$
- ♦ Nếu $\frac{k}{3} = p, p \in \mathbb{N}, 0 \leq p \leq 12$ thì $k = 3p$ khi đó $\frac{36-k}{5} = \frac{36-3p}{5} = \frac{3(12-p)}{5}$
- ♦ Vì $\frac{3(12-p)}{5} \in \mathbb{N}$ nên $12-p = 5q, q \in \mathbb{N}$.
- ♦ Điều kiện $0 \leq p \leq 12$ buộc $0 \leq 12-5q \leq 12 \Leftrightarrow 0 \leq 5q \leq 12 \Rightarrow q \in \{0, 1, 2\}$.
- $q = 0 \Rightarrow 12-p = 0 \Rightarrow p = 12 \Rightarrow k = 36 \Rightarrow T_{k+1} = T_{37} = C_{36}^{36} 3^0 7^{12} = 7^{12}$
- $q = 1 \Rightarrow 12-p = 5 \Rightarrow p = 7 \Rightarrow k = 21 \Rightarrow T_{k+1} = T_{22} = C_{36}^{21} 3^3 7^7$
- $q = 2 \Rightarrow 12-p = 10 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow k = 6 \Rightarrow T_{k+1} = T_7 = C_{36}^6 3^6 7^2$
- $\Rightarrow$ Vậy các số hạng nguyên là: $T_{37} = 7^{12}, T_{22} = C_{36}^{21} 3^3 7^7, T_7 = C_{36}^6 3^6 7^2$.

Bài 32.

Trong triển khai nhị thức $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{3a}}\right)^{21}$ tìm hệ số của số hạng có số mũ của a và b bằng nhau.

Lời giải

- ♦ Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{3a}}\right)^{21}$ là:

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= C_{21}^k \left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)^k \left(\sqrt{\frac{b}{3a}}\right)^{21-k} \\ &= C_{21}^k \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{k}{3}} \left(\frac{b}{3a}\right)^{\frac{21-k}{2}} = C_{21}^k a^{\frac{k}{3}} b^{-\frac{k}{6}} b^{\frac{21-k}{2}} a^{-\frac{k-21}{6}} = C_{21}^k a^{\frac{k}{3}} b^{-\frac{k}{6}} b^{\frac{21-k}{2}} a^{-\frac{k-21}{6}} = C_{21}^k a^{\frac{k-7}{2}} b^{\frac{63-4k}{6}}. \end{aligned}$$





$\Rightarrow$ Số hạng có số mũ của a và b bằng nhau $\Leftrightarrow \frac{k-7}{2} = \frac{63-4k}{6} \Leftrightarrow 7k = 42 \Leftrightarrow k = 6$.

Bài 33.

Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển $(1+2x)^{10}$.

Lời giải

- Số hạng tổng quát trong khai triển $(1+2x)^{10}$ là: $T_{k+1} = C_{10}^k (2x)^k = C_{10}^k \cdot 2^k x^k$
- Hệ số của số hạng tổng quát trong khai triển là $C_{10}^k \cdot 2^k$.
- Gọi a_k là hệ số lớn nhất của khai triển, suy ra: $a_k \geq a_{k-1}$
- Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^k C_{10}^k \geq 2^{k-1} C_{10}^{k-1} \\ 2^k C_{10}^k \geq 2^{k+1} C_{10}^{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{k} \geq \frac{1}{10-k+1} \\ \frac{1}{10-k} \geq \frac{2}{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{k} \geq \frac{1}{11-k} \\ \frac{1}{10-k} \geq \frac{2}{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k \leq 22 \\ 3k \geq 19 \end{cases} \Leftrightarrow k = 7.$$

$\Rightarrow$ Vậy hệ số lớn nhất trong khai triển là: $C_{10}^7 \cdot 2^7$.

Bài 34.

Xét triển khai $(3x+2)^9 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Tìm $\max\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Lời giải

- Ta có: $(3x+2)^9 = (2+3x)^9$
- Số hạng tổng quát trong khai triển $(2+3x)^9$ là: $T_{k+1} = C_9^k 2^{9-k} (3x)^k = C_9^k \cdot 2^{9-k} \cdot 3^k x^k$
- Hệ số của số hạng tổng quát trong khai triển là $C_9^k \cdot 2^{9-k} \cdot 3^k$.
- Gọi a_k là hệ số lớn nhất của khai triển, suy ra: $a_k \geq a_{k-1}$
- Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{9-k} \cdot 3^k C_9^k \geq 2^{8-k} \cdot 3^{k-1} C_9^{k-1} \\ 2^{9-k} \cdot 3^k C_9^k \geq 2^{10-k} \cdot 3^{k+1} C_9^{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6}{k} \geq \frac{1}{9-k+1} \\ \frac{1}{9-k} \geq \frac{6}{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7k \leq 60 \\ 7k \geq 53 \end{cases} \Leftrightarrow k = 8.$

$\Rightarrow$ Vậy hệ số lớn nhất trong khai triển là: $C_9^8 \cdot 2 \cdot 3^8 = 118098$.

Bài 35.

Chứng minh các đẳng thức sau:

- ① $5^n \left(C_n^0 + \frac{1}{5} C_n^1 + \frac{1}{5^2} C_n^2 + \dots + \frac{1}{5^n} C_n^n \right) = 6^n$.
- ② $2^n C_n^0 + 2^{n-1} \cdot 7^1 C_n^1 + \dots + 2 \cdot 7^{n-1} C_n^{n-1} + 7^n C_n^n = 9^n$.
- ③ $3^n C_n^0 + 3^{n-1} \cdot 5^1 \cdot 6^1 C_n^1 + 3^{n-2} \cdot 5^2 \cdot 6^2 C_n^2 + \dots + 5^n \cdot 6^n C_n^n = 33^n$.
- ④ $\frac{1}{2} C_n^0 - \frac{1}{4} C_n^1 + \frac{1}{6} C_n^2 - \frac{1}{8} C_n^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{2(n+1)} C_n^n = \frac{1}{2(n+1)}$.





$$\textcircled{5} C_m^0 C_n^k + C_m^1 C_n^{k-1} + \dots + C_m^k C_n^0 = C_{m+n}^k.$$

$$\textcircled{6} C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1}.$$

$$\textcircled{7} C_n^0 C_n^k + C_n^1 C_{n-1}^{k-1} + \dots + C_n^k C_{n-k}^0 = 2^n C_n^k.$$

Lời giải

$$\textcircled{1} 5^n \left(C_n^0 + \frac{1}{5} C_n^1 + \frac{1}{5^2} C_n^2 + \dots + \frac{1}{5^n} C_n^n \right) = 6^n.$$

♦ Ta có: VT = $5^n \left(C_n^0 + \frac{1}{5} C_n^1 + \frac{1}{5^2} C_n^2 + \dots + \frac{1}{5^n} C_n^n \right)$
 $= 5^n C_n^0 + 5^{n-1} C_n^1 + 5^{n-2} C_n^2 + \dots + C_n^n = (5+1)^n = 6^n = \text{VP (Đpcm)}.$

$$\textcircled{2} 2^n C_n^0 + 2^{n-1} \cdot 7^1 C_n^1 + \dots + 2 \cdot 7^{n-1} C_n^{n-1} + 7^n C_n^n = 9^n.$$

♦ Ta có: VT = $2^n C_n^0 + 2^{n-1} \cdot 7^1 C_n^1 + \dots + 2 \cdot 7^{n-1} C_n^{n-1} + 7^n C_n^n = (2+7)^n = 9^n = \text{VP (Đpcm)}.$

$$\textcircled{3} 3^n C_n^0 + 3^{n-1} \cdot 5^1 \cdot 6^1 C_n^1 + 3^{n-2} \cdot 5^2 \cdot 6^2 C_n^2 + \dots + 5^n \cdot 6^n C_n^n = 33^n.$$

♦ Ta có: VT = $3^n C_n^0 + 3^{n-1} \cdot 5^1 \cdot 6^1 C_n^1 + 3^{n-2} \cdot 5^2 \cdot 6^2 C_n^2 + \dots + 5^n \cdot 6^n C_n^n$
 $= 3^n C_n^0 + 3^{n-1} \cdot 30^1 C_n^1 + 3^{n-2} \cdot 30^2 C_n^2 + \dots + 30^n C_n^n = (3+30)^n = 33^n = \text{VP (Đpcm)}.$

$$\textcircled{4} \frac{1}{2} C_n^0 - \frac{1}{4} C_n^1 + \frac{1}{6} C_n^2 - \frac{1}{8} C_n^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{2(n+1)} C_n^n = \frac{1}{2(n+1)}.$$

♦ Ta có: $\frac{1}{2} C_n^0 - \frac{1}{4} C_n^1 + \frac{1}{6} C_n^2 - \frac{1}{8} C_n^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{2(n+1)} C_n^n = \frac{1}{2(n+1)}$

$$\Leftrightarrow C_n^0 - \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 - \frac{1}{4} C_n^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} C_n^n = \frac{1}{n+1}$$

♦ Ta có: $\frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{k+1}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{VT} &= \frac{1}{n+1} \left(C_{n+1}^1 - C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 - C_{n+1}^4 + \dots + (-1)^n C_{n+1}^{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left(C_{n+1}^0 - C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 - C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 - C_{n+1}^4 + \dots + (-1)^n C_{n+1}^{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left[C_{n+1}^0 - \left(C_{n+1}^0 - C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 - C_{n+1}^3 + C_{n+1}^4 - \dots + (-1)^n C_{n+1}^{n+1} \right) \right] \\ &= \frac{1}{n+1} \left[C_{n+1}^0 - (1-1)^{n+1} \right] = \frac{1}{n+1} = \text{VP (Đpcm)}. \end{aligned}$$

$$\textcircled{5} C_m^0 C_n^k + C_m^1 C_n^{k-1} + \dots + C_m^k C_n^0 = C_{m+n}^k.$$

♦ Xét khai triển $(1+x)^{m+n}$, khi đó hệ số của số hạng chứa x^k là C_{m+n}^k

♦ Mặt khác $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m \cdot (1+x)^n$, hệ số của x^k trong khai triển này là $C_m^0 C_n^k + C_m^1 C_n^{k-1} + \dots + C_m^k C_n^0$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.





⑥ $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1}$.

♦ Ta có $0 = (1-1)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - \dots + C_{2n}^{2n-1} - C_{2n}^{2n}$

$\Rightarrow C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1}$ (Đpcm).

⑦ $C_n^0 C_n^k + C_n^1 C_n^{k-1} + \dots + C_n^k C_n^0 = 2^n C_n^k$.

♦ Xét số hạng $T_\alpha = C_n^\alpha \cdot C_n^{k-\alpha} = \frac{n!}{(n-\alpha)!\alpha!} \cdot \frac{(n-\alpha)!}{(n-k)!(k-\alpha)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{k!}{(k-\alpha)!\alpha!} = C_n^k \cdot C_k^\alpha$

♦ Khi đó VT = $\sum_{\alpha=0}^k T_\alpha = \sum_{\alpha=0}^k C_n^k C_k^\alpha = C_n^k \sum_{\alpha=0}^k C_k^\alpha$

♦ Mặc khác $\sum_{\alpha=0}^k C_k^\alpha = C_k^0 + C_k^1 + \dots + C_k^k = 2^k$

Do đó VT = $2^k \cdot C_n^k = VP$ (Đpcm).

----- HẾT -----





BÀI 4

BIẾN CỐ & XÁC SUẤT BIẾN CỐ

I. PHÉP THỬ VÀ KHÔNG GIAN MẪU

Định nghĩa

- ※ Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là một thí nghiệm hay một hành động mà:
 - ⇒ Kết quả của nó không đoán trước được;
 - ⇒ Có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó.
 - ⇒ Phép thử thường được kí hiệu bởi chữ T .
 - ⇒ Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử T được gọi là không gian mẫu của phép thử T và được kí hiệu bởi chữ Ω (đọc là ô-mê-ga).
- ※ Số phần tử của không gian mẫu được kí hiệu là $n(\Omega)$.

Ví dụ 1

Phép thử: "Gieo 1 con súc sắc" có không gian mẫu là: $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Ví dụ 2

Xét phép thử: "Gieo hai đồng xu phân biệt". Nếu kí hiệu S để chỉ đồng xu "sấp", kí hiệu N để chỉ đồng xu "ngửa" thì không gian mẫu của phép thử trên là:

Lời giải

$$\Omega = \{SS, SN, NS, NN\} \Rightarrow n(\Omega) = 4.$$

Ví dụ 3

Xét phép thử T là: "Gieo ba đồng xu phân biệt". Hãy cho biết không gian mẫu và số phần tử của không gian mẫu đó?

Lời giải

$$\Omega = \{SSS, SSN, SNS, NSS, SNN, NSN, NNS, NNN\} \Rightarrow n(\Omega) = 8.$$

II. BIẾN CỐ & XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

Định nghĩa

- ※ Giả sử phép thử T có không gian mẫu Ω là một tập hữu hạn và các kết quả của T là đồng khả năng. Nếu A là một biến cố liên quan đến phép thử T thì xác suất của A , kí hiệu là $P(A)$, được xác định như sau: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$.

Chú ý

Nhận xét





$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq P(A) \leq 1 \\ P(\Omega) = 1 \\ P(\emptyset) = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq P(A) \leq 1 \\ P(A) = 1 \\ P(\emptyset) = 0 \end{array} \right.$$

⇒ **Hệ quả:** Với mọi biến cố A , ta có $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Ví dụ 4

Xét phép thử T : "Gieo một con súc sắc" có không gian mẫu là $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Xét biến cố A : "Số chấm trên mặt xuất hiện là số chẵn".

Lời giải

- ♦ Biến cố A xảy ra khi kết quả của phép thử T là: 2; 4; 6.
- ♦ Các kết quả này được gọi là *kết quả thuận lợi cho A* được mô tả bởi $A = \{2; 4; 6\}$ là một tập con của $\Omega \Rightarrow$ Số phần tử thuận lợi của biến cố A là $n(A) = 3$.

Ví dụ 5

Xét phép thử T như trên và biến cố B : "Số chấm trên mặt xuất hiện là một số lẻ" và biến cố C : "Số chấm xuất hiện trên mặt là nguyên tố". Hãy mô tả biến cố B và C .

Lời giải

- ♦ $B = \{1; 3; 5\} \Rightarrow n(B) = 3$.
- ♦ $C = \{2; 3; 5\} \Rightarrow n(C) = 3$.

Ví dụ 6

Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất các biến cố sau:

- ① A: "mặt lẻ xuất hiện".
- ② B: "xuất hiện mặt có số chấm chia hết cho 3".
- ③ C: "Mặt xuất hiện có số chấm lớn hơn 2".

Lời giải

Không gian mẫu: $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \Rightarrow n(\Omega) = 6$.

① A: "mặt lẻ xuất hiện".

- ♦ Ta có $A = \{1; 3; 5\} \Rightarrow n(A) = 3$.

$$\Rightarrow \text{Xác suất biến cố A: } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

② B: "xuất hiện mặt có số chấm chia hết cho 3".

- ♦ Ta có $B = \{3; 6\} \Rightarrow n(B) = 2$.





$$\Rightarrow \text{Xác suất biến cố B: } P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

③ C: “Mặt xuất hiện có số chấm lớn hơn 2”.

$$\diamond \text{ Ta có } C = \{3; 4; 5; 6\} \Rightarrow n(C) = 4.$$

$$\Rightarrow \text{Xác suất biến cố C: } P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Ví dụ 7

Từ một hộp chứa 4 quả cầu trắng, 3 quả cầu đỏ và 2 quả cầu xanh. Lấy ngẫu nhiên một quả cầu từ hộp. Tính xác suất để:

- ① Lấy được quả cầu trắng.
- ② Lấy được quả cầu đỏ.
- ③ Lấy được quả cầu xanh.

Lời giải

Số quả cầu trong hộp là: $4 + 3 + 2 = 9$

Lấy ngẫu nhiên một quả cầu từ hộp có 9 quả cầu nên số phần tử không gian mẫu $n(\Omega) = 9$

① Lấy được quả cầu trắng.

- $\diamond$ Gọi A: “Lấy được quả cầu trắng”
- $\diamond$ Số phần tử biến cố A: $n(A) = 4$

$$\Rightarrow \text{Xác suất biến cố A: } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{9}$$

② Lấy được quả cầu đỏ.

- $\diamond$ Gọi B: “Lấy được quả cầu đỏ”
- $\diamond$ Số phần tử biến cố B: $n(B) = 3$

$$\Rightarrow \text{Xác suất biến cố B: } P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

③ Lấy được quả cầu xanh.

- $\diamond$ Gọi C: “Lấy được quả cầu xanh”
- $\diamond$ Số phần tử biến cố C: $n(C) = 2$

$$\Rightarrow \text{Xác suất biến cố C: } P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{2}{9}$$





Ví dụ 8

Trong một đợt kiểm tra về vệ sinh an toàn thực phẩm của ngành y tế tại chợ X. Ban quản lý chợ lấy ra 15 mẫu thịt lợn trong đó có 4 mẫu ở quầy A, 5 mẫu ở quầy B và 6 mẫu ở quầy C. Mỗi mẫu thịt này có khối lượng như nhau và để trong các hộp kín có kích thước giống hệt nhau. Đoàn kiểm tra lấy ra ngẫu nhiên ba hộp để phân tích, kiểm tra xem trong thịt lợn có chứa hóa chất “Super tạo nạc” (Clenbuterol) hay không. Tính xác suất để 3 hộp lấy ra có đủ ba loại thịt ở các quầy A, B, C.

Lời giải

- ♦ Lấy ra ngẫu nhiên ba hộp từ 15 hộp nên số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{15}^3 = 455$
 - ♦ Gọi biến cố A: “3 hộp lấy ra có đủ ba loại thịt ở các quầy A, B, C”
 - ♦ Số phần tử biến cố A: $n(A) = C_4^1 \cdot C_5^1 \cdot C_6^1 = 120$
- $\Rightarrow$ Xác suất biến cố A: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{120}{455} = \frac{24}{91}$

Ví dụ 9

Trong một chiếc hộp có chứa 10 quả cầu có kích thước như nhau, được đánh số từ 1 đến 10. Lấy ngẫu nhiên 3 quả cầu trong hộp đó. Tính xác suất để các số ghi trên 3 quả cầu lấy được là độ dài 3 cạnh của một tam giác vuông.

Lời giải

- ♦ Lấy ra ngẫu nhiên ba quả cầu từ hộp có 10 quả cầu nên số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{10}^3 = 120$
 - ♦ Gọi biến cố A: “số ghi trên 3 quả cầu lấy được là độ dài 3 cạnh của một tam giác vuông”
 - ♦ Khi đó: $A = \{(3; 4; 5); (6; 8; 10)\}$
 - ♦ Số phần tử biến cố A: $n(A) = 2$
- $\Rightarrow$ Xác suất biến cố A: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60}$

Ví dụ 10

Trong một chiếc hộp có chứa 6 viên bi đỏ, 5 viên bi vàng và 4 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên trong hộp ra 4 viên bi. Tính xác suất để trong 4 viên bi lấy ra không có đủ cả ba màu?

Lời giải

- ♦ Lấy ra ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp có 15 viên bi nên số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{15}^4 = 1365$
 - ♦ Gọi biến cố A: “trong 4 viên bi lấy ra không có đủ cả ba màu”
 - ♦ Số phần tử biến cố A: $n(A) = 1365 - 6 \cdot 5 \cdot 4 = 1245$
- $\Rightarrow$ Xác suất biến cố A: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1245}{1365} = \frac{83}{91}$





III. PHÉP TOÁN TRÊN CÁC BIẾN CỐ

- ※ Giả sử A là biến cố liên quan đến một phép thử. Tập $\Omega \setminus A$ được gọi là biến cố đối của biến cố A , ký hiệu là $\bar{A}$. Như vậy $\bar{A}$ xảy ra khi và chỉ khi biến cố A không xảy ra.
- ※ Giả sử A và B là hai biến cố liên quan đến một phép thử. Ta có:

Tập $A \cup B$	$\Rightarrow$ Được gọi là hợp của các biến cố A và B . $\Rightarrow$ Biến cố $A \cup B$ xảy ra khi và chỉ khi có ít nhất 1 trong 2 biến cố A hoặc B xảy ra.
Tập $A \cap B$	$\Rightarrow$ Được gọi là giao của các biến cố A và B . $\Rightarrow$ Biến cố $A \cap B$ còn được viết là $A.B$. $\Rightarrow$ Biến cố $A \cap B$ xảy ra khi và chỉ khi cả 2 biến cố A và B đồng thời xảy ra.
$A \cap B = \emptyset$	$\Rightarrow$ Thì ta nói A và B là hai biến cố xung khắc. $\Rightarrow$ Ta thấy A và $\bar{A}$ là hai biến cố xung khắc.

Ví dụ 11

Xét phép thử T "Gieo một con súc sắc" có không gian mẫu là $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Xét biến cố A : "Số chấm trên mặt xuất hiện là số chẵn" và B : "Số chấm trên mặt xuất hiện là số chia hết cho 3". Mô tả các biến cố $\bar{A}, A \cup B, A.B$.

Lời giải

- ♦ $A = \{2; 4; 6\}; B = \{3; 6\}$
- ♦ $\bar{A}$ là biến cố: "Số chấm trên mặt xuất hiện là số lẻ" $\Rightarrow \bar{A} = \{1; 3; 5\}$.
- ♦ $A \cup B$ là biến cố: "Số chấm trên mặt xuất hiện là số chẵn hoặc chia hết cho 3"
 $\Rightarrow A \cup B = \{2; 3; 4; 6\}$.
- ♦ $A.B$ là biến cố: "Số chấm trên mặt xuất hiện là số chẵn và chia hết cho 3" $\Rightarrow A.B = \{6\}$.

IV. CÁC BIẾN CỐ ĐỘC LẬP, CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT.

- ※ Hai biến cố A và B được gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.
- ※ Hai biến cố A và B là độc lập khi và chỉ khi $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Ví dụ 12

Một cầu thủ sút bóng vào cầu môn hai lần. Biết rằng xác suất sút vào cầu môn là $\frac{3}{8}$.

- ① Tính xác suất để cầu thủ đó sút hai lần bóng đều vào được cầu môn.
- ② Tính xác suất để cầu thủ đó sút không vào cầu môn (sút hụt) ít nhất một lần.

Lời giải

- ① Tính xác suất để cầu thủ đó sút hai lần bóng đều vào được cầu môn.

- ♦ Gọi A là biến cố để cầu thủ đó vào được cầu môn. $\Rightarrow P(A) = \frac{3}{8}$
- ♦ Gọi B là biến cố để hai cầu thủ đó vào được cầu môn.





$$\Rightarrow P(B) = P(A).P(A) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64}.$$

② **Tính xác suất để cầu thủ đó sút không vào cầu môn (sút hụt) ít nhất một lần.**

- ♦ Gọi C là biến cố cầu thủ đó sút không vào cầu môn (sút hụt) ít nhất một lần.
- ♦ C là biến cố đối của B .

$$\Rightarrow P(C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{9}{64} = \frac{55}{64}.$$

Ví dụ 13

Có hai xạ thủ bắn bia. Xác suất xạ thủ thứ nhất bắn trúng bia là $0,8$. Xác suất xạ thủ thứ hai bắn trúng bia là $0,7$. Tính xác suất để:

- ① Cả hai xạ thủ đều bắn trúng bia.
- ② Cả hai xạ thủ đều không bắn trúng bia.
- ③ Có ít nhất một xạ thủ bắn trúng bia.

Lời giải

① **Cả hai xạ thủ đều bắn trúng bia.**

- ♦ Gọi A là biến cố “xạ thủ thứ nhất bắn trúng bia”.
- ♦ Gọi B là biến cố “xạ thủ thứ hai bắn trúng bia”.
- ♦ Gọi C là biến cố “cả hai xạ thủ bắn trúng bia”.
- ♦ Khi đó: $C = A.B$
- ♦ Vì hai xạ thủ hoạt động độc lập nên A và B là hai biến cố độc lập.
- $\Rightarrow$ Áp dụng quy tắc nhân xác suất hai biến cố độc lập, ta có $P(C) = P(A).P(B) = 0,8.0,7 = 0,56$

② **Cả hai xạ thủ đều không bắn trúng bia.**

- ♦ $\bar{A}$ là biến cố “xạ thủ thứ nhất bắn trượt bia”. $\Rightarrow P(\bar{A}) = 0,2$
- ♦ $\bar{B}$ là biến cố “xạ thủ thứ hai bắn trượt bia”. $\Rightarrow P(\bar{B}) = 0,3$
- ♦ Gọi D là biến cố “cả hai xạ thủ đều không bắn trúng bia”.
- $\Rightarrow P(D) = P(\bar{A}).P(\bar{B}) = 0,2.0,3 = 0,06$

③ **Có ít nhất một xạ thủ bắn trúng bia.**

- ♦ Gọi $\bar{D}$ là biến cố “cả hai xạ thủ đều không bắn trúng bia”.
- ♦ $\bar{D}$ là biến cố đối của D .
- $\Rightarrow P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0,06 = 0,94.$





V. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Dạng toán 1. TÍNH XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

Phương pháp giải

- Giả sử phép thử T có không gian mẫu Ω là một tập hữu hạn và các kết quả của T là đồng khả năng. Nếu A là một biến cố liên quan đến phép thử T thì xác suất của A , kí hiệu là $P(A)$, được xác định như sau: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$.

Chú ý	Nhận xét
$\begin{cases} 0 \leq P(A) \leq 1 \\ P(\Omega) = 1 \\ P(\emptyset) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \leq P(A) \leq 1 \\ P(A) = 1 \\ P(\emptyset) = 0 \end{cases}$

⇒ **Hệ quả:** Với mọi biến cố A , ta có $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Bài 01.

Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được chọn từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Xác định số phần tử của S . Chọn ngẫu nhiên một số từ S . Tính xác suất để số được chọn là số chẵn

Trích từ đề **ĐH KHỐI A – năm 2013**

Lời giải

※ **Tìm $|\Omega|$.**

- ♦ Mỗi một số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được chọn từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ứng với đúng một chỉnh hợp chập 3 của $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,
- ♦ Do đó số phần tử của S là $A_7^3 = 210$.

※ **Tìm $|\Omega_A|$.**

Gọi A là biến cố “để số được chọn là số chẵn”.

- ♦ Giả sử $\overline{abc}$ là một số chẵn của S .

Bước 1: chọn c . Vì $c \in \{2, 4, 6\}$ nên có 3 cách chọn.

Bước 2: Chọn a, b : số cách chọn là $A_6^2 = 30$.

⇒ Vậy trong S có $3 \cdot 30 = 90$ số chẵn. Xác suất cần tính là $P = \frac{90}{210} = \frac{3}{7}$.

Bài 02.

Gieo đồng thời ba con súc sắc được chế tạo đồng chất, cân đối. Tính xác suất để tổng số nốt xuất hiện của ba con là 9.





Lời giải

※ Tìm $|\Omega|$.

- ♦ Mỗi kết quả của phép thử là một bộ ba (a, b, c) .
- ♦ Trong đó a, b, c là các số nguyên từ 1 đến 6.
- ♦ Vậy không gian mẫu là $\Omega = \{(a, b, c) | a, b, c \in \mathbb{Z}, 1 \leq a \leq 6, 1 \leq b \leq 6, 1 \leq c \leq 6\}$.
- ♦ Vì có
6 cách chọn a ,
6 cách chọn b
6 cách chọn c
- ♦ Nên số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 6.6.6 = 216$.

※ Tìm $|\Omega_A|$.

- ♦ Các bộ ba số
 (a, b, c) có tổng bằng 9 là $(1, 2, 6)$ và 5 hoán vị của nó,
 $(1, 3, 5)$ và 5 hoán vị của nó,
 $(1, 4, 4)$ và 2 hoán vị của nó,
 $(2, 2, 5)$ và 2 hoán vị của nó,
 $(2, 3, 4)$ và 5 hoán vị của nó,
 $(3, 3, 3)$
- ⇒ Vậy số kết quả thuận lợi là : $6+6+3+3+6+1=25$.
- Vì các con xúc xắc cân đối và đồng chất nên có thể cho rằng các kết quả là đồng khả năng.
- ⇒ Vậy xác suất cần tính là: $\frac{25}{216} \approx 0,1157$.

↳ Bài 03.

Lớp 11A có 25 đoàn viên trong đó 10 nam và 15 nữ.

- ① Chọn ngẫu nhiên một đoàn viên làm thư kí đại hội chi đoàn. Tìm xác suất để chọn được thư kí là một đoàn viên nữ.
- ② Chọn ngẫu nhiên hai đoàn viên trong chi đoàn để tham dự trại 26/3. Tìm xác suất để hai đoàn viên được chọn có một nam và một nữ.

Lời giải

- ① Chọn ngẫu nhiên một đoàn viên làm thư kí đại hội chi đoàn. Tìm xác suất để chọn được thư kí là một đoàn viên nữ.





※ Tìm $|\Omega|$.

- ♦ Chọn 1 đoàn viên trong số 25 đoàn viên của lớp, có 25 cách chọn,
- ♦ Suy ra không gian mẫu Ω có 25 phần tử

※ Tìm $|\Omega_A|$.

- ♦ Gọi A là biến cố "Chọn một đoàn viên nữ".
- ♦ Lớp có 15 đoàn viên nữ, chọn một đoàn viên nữ, do đó có 15 cách chọn đoàn viên nữ,
- ♦ Suy ra Ω_A có 15 phần tử.

$$\Rightarrow \text{Vậy } P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}.$$

② Chọn ngẫu nhiên hai đoàn viên trong chi đoàn để tham dự trại 26/3. Tìm xác suất để hai đoàn viên được chọn có một nam và một nữ.

※ Tìm $|\Omega|$.

- ♦ Chọn ngẫu nhiên 2 đoàn viên trong số 25 đoàn viên của lớp, có $C_{25}^2 = 300$ cách chọn,
- Suy ra không gian mẫu Ω có 300 phần tử.

※ Tìm $|\Omega_B|$.

- ♦ Gọi B là biến cố "hai đoàn viên được chọn có 1 nam và 1 nữ".
- ♦ Lớp có 15 đoàn viên nữ, chọn một đoàn viên nữ, Do đó có 15 cách chọn đoàn viên nữ,
- ♦ Lớp có 10 đoàn viên nam, chọn một đoàn viên nam, Do đó có 10 cách chọn đoàn viên nam.
- ♦ Vậy có $15 \cdot 10 = 150$ cách chọn 2 đoàn viên, trong đó có một nam và một nữ.
- ♦ Bởi vậy số phần tử của tập Ω_B là 150.

$$\Rightarrow \text{Do đó } P(B) = \frac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \frac{150}{300} = \frac{1}{2}.$$

Bài 04.

Trong một lớp học gồm có 15 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ.

Lời giải

※ Tìm $|\Omega|$.

Số cách chọn ngẫu nhiên 4 em học sinh trong 25 em là $|\Omega| = C_{25}^4 = 12650$

※ Tìm $|\Omega_A|$.





⊙ Trường hợp 1 bốn em chọn không có nữ: $C_{15}^4 = 1365$.

⊙ Trường hợp 2 bốn em chọn không có nam: $C_{10}^4 = 210$.

♦ Gọi A là biến cố: chọn 4 em có cả nam và nữ.

♦ Khi đó $|A| = 12560 - 1365 - 210 = 11075$.

$$\Rightarrow \text{Vậy } P(A) = \frac{11075}{12650} = 0,8755$$

Bài 05.

Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau. Gọi A là biến cố "Số tự nhiên được chọn gồm 4 chữ số 3, 4, 5, 6". Hãy tính xác suất của biến cố A .

Lời giải

※ Tìm $|\Omega|$.

♦ Khi đó có 9 cách chọn a , 9 cách chọn b , 8 cách chọn c , 7 cách chọn d .

Do đó có tất cả là $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ số có 4 chữ số khác nhau,

$\Rightarrow$ Không gian mẫu Ω có 4536 phần tử.

※ Tìm $|\Omega_A|$.

♦ Ta có Ω_A là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau được lập từ 3, 4, 5, 6.

Do đó tập Ω_A có $4! = 24$ phần tử.

$$\Rightarrow \text{Bởi vậy xác suất của biến cố } A \text{ là } P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{24}{4536} = \frac{1}{189}$$

Bài 06.

Một tổ có 9 học sinh, trong đó có 5 nam và 4 nữ được xếp thành một hàng dọc. Tính xác suất sao cho 5 bạn nam phải đứng kề nhau.

Lời giải

♦ Gọi A là biến cố "Xếp 9 học sinh thành một hàng dọc trong đó 5 bạn nam phải đứng kề nhau".

※ Tìm $|\Omega|$.

Xếp 9 học sinh thành một hàng dọc, có $9!$ cách xếp $\rightarrow |\Omega| = 9!$.

※ Tìm $|\Omega_A|$.

♦ Năm học sinh nam đứng kề nhau ta coi như 1 phần tử, cùng với 4 nữ là 5 phần tử.

♦ Xếp 5 phần tử này thành một hàng dọc có $5! = 120$ cách xếp.

♦ Năm học sinh nam đứng kề nhau hoán vị cho nhau: $5!$ cách xếp.

♦ Do đó, có $5! \cdot 120 = 14400$ cách xếp.

$\Rightarrow$ Vậy số phần tử của tập Ω_A là 14400.





⇒ Vậy xác suất cần tính là: $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{5!.4!}{9!} = \frac{2.3.4.}{6.7.8.9} = \frac{1}{7.2.9} = \frac{1}{126}$.

Bài 07.

Một tổ có 9 học sinh, trong đó có 5 nam và 4 nữ được xếp thành một hàng dọc. Tính xác suất sao cho không có 2 bạn nam nào đứng kề nhau.

Lời giải

- ♦ Gọi A là biến cố "Xếp 9 học sinh thành một hàng dọc trong đó không có 2 bạn nam nào đứng kề nhau".

※ Tìm $|\Omega|$.

- ♦ Xếp 9 học sinh thành một hàng dọc, có $9!$ cách xếp $\rightarrow |\Omega| = 9!$.

※ Tìm $|\Omega_A|$.

- ♦ Xếp 9 học sinh thành một hàng dọc trong đó không có 2 bạn nam nào đứng kề nhau.
 - ♦ Vì số nam lớn hơn số nữ nên ta phải xếp một học sinh nam đứng trước rồi đến một học sinh nữ, tiếp tục cứ xếp nam nữ xen kẽ nhau, học sinh xếp cuối cùng là nam.
- ⇒ Vậy số cách xếp là $5!.4!$ cách xếp.

⇒ Vậy xác suất cần tính là: $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{5!.4!}{9!} = \frac{2.3.4.}{6.7.8.9} = \frac{1}{7.2.9} = \frac{1}{126}$.

Bài 08.

Chọn ngẫu nhiên một biển số xe gắn máy cùng một họ $K3$, mỗi biển số có 4 chữ số. Tính xác suất để biển số có hai chữ số đầu giống nhau và hai chữ số sau giống nhau, biết 4 chữ số đó không hoàn toàn giống nhau.

Lời giải

- ♦ Gọi A là biến cố "Biển số có hai chữ số đầu giống nhau, hai chữ số sau giống nhau và 4 chữ số đó không hoàn toàn giống nhau".

※ Tìm $|\Omega|$.

- ♦ Ta tìm "số" có 4 chữ số, chữ số đầu tiên có thể bằng 0.
- ♦ Giả sử $\overline{abcd}$ là một "số" như thế.
- ♦ Có 10 cách chọn a , 10 cách chọn b , 10 cách chọn c , 10 cách chọn d .

⇒ Vậy có 10^4 "số" có 4 chữ số, chữ số đầu tiên có thể bằng 0 $\rightarrow |\Omega| = 10^4$.

※ Tìm $|\Omega_A|$.

- ♦ Ta tìm "số" các số có 4 chữ số, trong đó hai chữ số đầu giống nhau, hai chữ số sau giống nhau và 4 chữ số đó không hoàn toàn giống nhau, chữ số đầu tiên có thể bằng 0.
- ♦ Giả sử $\overline{mmpp}$ là một "số" như vậy.





♦ Có 10 cách chọn m , Có 9 cách chọn p .

⇒ Do đó, tập Ω_A có 10.9 phần tử.

⇒ Xác suất cần tính là $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{10.9}{10^4} = \frac{9}{10^3} = \frac{9}{1000} = 0,009$.

Bài 09.

Có 30 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Tính xác suất để có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có một tấm thẻ mang số chia hết cho 10.

Lời giải

♦ Gọi A là biến cố: "Trong 10 tấm thẻ lấy ra có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có một tấm thẻ mang số chia hết cho 10".

※ Tìm $|\Omega|$.

♦ Chọn 10 tấm thẻ trong 30 tấm thẻ: có C_{30}^{10} cách chọn → $|\Omega| = C_{30}^{10}$.

※ Tìm $|\Omega_A|$.

♦ Chọn 5 tấm thẻ mang số lẻ trong 15 tấm thẻ mang số lẻ: có C_{15}^5 cách chọn.

♦ Chọn 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10 trong 3 tấm thẻ mang số chia hết cho 10: có 3 cách chọn.

♦ Chọn 4 tấm thẻ mang số chẵn nhưng không chia hết cho 10 trong 12 tấm thẻ như vậy: có C_{12}^4 cách chọn.

⇒ Vậy số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $|\Omega_A| = 3C_{15}^5 C_{12}^4$.

⇒ Xác suất cần tính là $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{3C_{15}^5 C_{12}^4}{C_{30}^{10}} = \frac{99}{667}$.

Bài 10.

Một tổ học sinh gồm 9 em, trong đó có 3 nữ được chia thành ba nhóm, mỗi nhóm ba em. Tính xác suất để mỗi nhóm có một nữ.

Lời giải

♦ Gọi A là biến cố: "Ở 3 nhóm học sinh, mỗi nhóm có một nữ".

※ Tìm $|\Omega|$.

♦ Chọn ngẫu nhiên 3 trong 9 em đưa vào nhóm thứ nhất: có C_9^3 cách.

♦ Chọn 3 trong 6 em còn lại đưa vào nhóm thứ hai: có C_6^3 cách.

♦ Còn 3 em, đưa vào nhóm thứ 3: có 1 cách.

⇒ Vậy số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_9^3.C_6^3.1 = 1680$.





※ Tìm $|\Omega_A|$.

- ♦ Phân 3 nữ vào ba nhóm: có $P_3 = 3! = 6$ cách khác nhau.
- ♦ Phân 6 nam vào ba nhóm theo cách trên: có $C_6^2.C_4^2.1$ cách khác nhau.

⇒ Vậy số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $|\Omega_A| = 6C_6^2.C_4^2.1 = 540$.

⇒ Xác suất cần tính là $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{540}{1680} = \frac{9}{26} \approx 0,32$.

Bài 11.

Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 viết ngẫu nhiên một số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau. Tính xác suất để các chữ số 1 và 2 có mặt trong số viết được.

Lời giải

Gọi A là. biến cố: "Số được viết có mặt các chữ số 1 và 2".

※ Tìm $|\Omega|$.

- ♦ Giả sử số được viết có dạng $\overline{abcde}$.
- ♦ Có 6 cách chọn a .
- ♦ Tiếp theo có A_6^4 cách chọn (b, c, d, e) .

⇒ Vậy số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 6A_6^4 = 2160$.

※ Tìm $|\Omega_A|$.

⊙ Trường hợp 1: $\overline{abcde}$ không có mặt chữ số 0:

- ♦ Có A_5^2 cách chọn vị trí cho hai chữ số 1 và 2.
 - ♦ Sau đó có A_4^3 cách xếp 3 trong 4 chữ số 3, 4, 5, 6 vào ba vị trí còn lại.
- ⇒ Vậy trường hợp này có $A_5^2.A_4^3 = 480$ khả năng.

⊙ Trường hợp 2: $\overline{abcde}$ có mặt ba chữ số 0, 1, 2: Có 4 cách chọn vị trí cho chữ số 0.

- ♦ Tiếp theo có A_4^2 cách chọn vị trí cho hai chữ số 1 và 2.
 - ♦ Cuối cùng có A_4^2 cách chọn 2 trong 4 chữ số 3, 4, 5, 6 để viết vào hai vị trí còn lại.
- ⇒ Vậy trường hợp này có $4.A_4^2.A_4^2 = 576$ khả năng.

⇒ Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $|\Omega_A| = 480 + 576 = 1056$.

⇒ Xác suất cần tính là $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{1056}{2160} = \frac{22}{45} \approx 0,49$.

Bài 12.





Một công ti cần tuyển hai nhân viên. Có 6 người nộp đơn, trong đó có 4 nữ và 2 nam. Giả sử rằng khả năng trúng tuyển của 6 người là như nhau.

- ① Tính xác suất để 2 người trúng tuyển đều là nam.
- ② Tính xác suất để cả 2 người trúng tuyển đều là nữ.
- ③ Tính xác suất để có ít nhất một nữ trúng tuyển.

Lời giải

※ Tìm $|\Omega|$.

♦ Số cách chọn 2 trong 6 người là $C_6^2 = 15$ cách.

Vậy số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 15$.

① Tính xác suất để 2 người trúng tuyển đều là nam.

♦ Vì chỉ có một trường hợp cả 2 nam trúng tuyển nên xác suất của biến cố này là $\frac{1}{15}$.

② Tính xác suất để cả 2 người trúng tuyển đều là nữ.

♦ Số cách chọn 2 nữ trong 4 nữ là $C_4^2 = 6$, do đó xác suất của biến cố này là $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

③ Tính xác suất để có ít nhất một nữ trúng tuyển.

♦ Chọn 2 người trong số 6 người nói trên sao cho có ít nhất một nữ: $C_4^1 \cdot C_2^1 + C_4^2 = 8 + 6 = 14$.

Xác suất của biến cố này là $\frac{14}{15}$.

✎ Bài 13.

Một lớp gồm 30 học sinh trong đó có 27 học sinh đạt yêu cầu và 3 học sinh không đạt yêu cầu trong kì thi. Chọn ngẫu nhiên 2 học sinh Tính xác suất để

- ① Cả 2 học sinh đều không đạt yêu cầu.
- ② Có một học sinh đạt yêu cầu và một học sinh không đạt yêu cầu.
- ③ Cả hai học sinh đều đạt yêu cầu.

Lời giải

※ Tìm $|\Omega|$.

Số cách chọn 2 học sinh từ 30 học sinh là $C_{30}^2 = 345$ cách $\rightarrow |\Omega| = 345$.

① Cả 2 học sinh đều không đạt yêu cầu.

- ♦ Gọi A là biến cố: "Cả 2 học sinh đều không đạt yêu cầu".
- ♦ Khi đó số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $C_3^2 = 3$.





$$\Rightarrow \text{Vậy } P(A) = \frac{3}{435}.$$

② Có một học sinh đạt yêu cầu và một học sinh không đạt yêu cầu.

- ♦ Gọi B là biến cố: "Có một học sinh đạt yêu cầu và một học sinh không đạt yêu cầu".
- ♦ Số cách chọn 1 học sinh đạt yêu cầu là 27,
- ♦ Số cách chọn 1 học sinh không đạt yêu cầu là 3.
- ♦ Chọn 2 học sinh mà trong đó có một học sinh đạt yêu cầu và một học sinh không đạt yêu cầu là $27 \cdot 3 = 81$.
- ♦ Khi đó số kết quả thuận lợi cho biến cố B là 81.

$$\Rightarrow \text{Vậy } P(B) = \frac{81}{435} = \frac{9}{145}.$$

③ Cả hai học sinh đều đạt yêu cầu.

- ♦ Gọi C là biến cố: "Cả 2 học sinh đều đạt yêu cầu".
- ♦ Khi đó số kết quả thuận lợi cho biến cố C là $C_{27}^2 = 351$.

$$\Rightarrow \text{Vậy xác suất của biến cố } C \text{ là } P(C) = \frac{351}{435} = \frac{119}{145}.$$

Bài 14.

Một khách sạn có 6 phòng đơn. Có 10 khách đến thuê phòng, trong đó có 6 nam và 4 nữ. Người quản lý chọn ngẫu nhiên 6 người. Tính xác suất để:

- ① Cả 6 người đều là nam.
- ② Có 4 nam và 2 nữ.
- ③ Có ít nhất hai nữ.

Lời giải

$$\text{♦ Số các trường hợp có thể là } C_{10}^6 = 210 \rightarrow |\Omega| = 210$$

① Cả 6 người đều là nam.

- ♦ Gọi A là biến cố: "Cả 6 người được chọn đều là nam".
- ♦ Chọn 6 nam trong 6 nam, có 1 cách chọn,
- $\Rightarrow$ Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $|\Omega_A| = 1$.

$$\Rightarrow \text{Vậy xác suất cần tính là } P(A) = \frac{1}{210}.$$

② Có 4 nam và 2 nữ.

- ♦ Gọi B là biến cố "Có 4 nam và 2 nữ được chọn".
- ♦ Số cách chọn được 6 người trong đó có 4 nam và 2 nữ là $C_6^4 \cdot C_4^2 = 15 \cdot 6 = 90$,





⇒ Số kết quả thuận lợi cho biến cố B $|\Omega_B| = 90$.

⇒ Xác suất cần tính là $P(B) = \frac{90}{210} = \frac{3}{7}$

③ Có ít nhất hai nữ.

♦ Gọi C là biến cố "Trong 6 người được chọn có ít nhất 2 nữ".

⊙ Trường hợp 1: Có 2 nữ và 4 nam, có $C_4^2 \cdot C_6^4 = 15 \cdot 6 = 90$ cách chọn.

⊙ Trường hợp 2: Có 3 nữ và 3 nam, có $C_4^3 \cdot C_6^3 = 80$ cách chọn.

⊙ Trường hợp 3: Có 4 nữ và 2 nam, có $C_4^4 \cdot C_6^2 = 15$ cách chọn.

Vậy số cách chọn được 6 người, trong đó có ít nhất 2 nữ là $90 + 80 + 15 = 185$ cách.

⇒ Số kết quả thuận lợi cho biến cố C là $|\Omega_C| = 185$.

⇒ Xác suất cần tính là $P(C) = \frac{185}{210} = \frac{37}{42}$

Bài 14.

Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên bé hơn 1000. Tính xác suất để số đó

① Chia hết cho 3.

② Chia hết cho 5.

Lời giải

Có 1000 số tự nhiên bé hơn 1000.

① Chia hết cho 3.

♦ Trong các số $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, 997, 998, 999$ có $\frac{999}{3} = 333$ số chia hết cho 3.

♦ Suy ra từ 0 đến 999 có 334 số chia hết cho 3.

⇒ Vậy xác suất cần tính là $\frac{334}{1000} = 0,334$

② Chia hết cho 5.

♦ Trong các số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots, 991, 992, 993, 994, 995$ có $\frac{995}{5} = 199$ số chia hết cho 5.

♦ Suy ra từ 0 đến 999 có 200 số chia hết cho 5.

⇒ Vậy xác suất cần tính là $\frac{200}{1000} \approx 0,2$.

Bài 15.

Trước cổng trường đại học có 3 quán cơm bình dân chất lượng như nhau. Ba sinh viên A, B, C độc lập với nhau chọn ngẫu nhiên một quán để ăn trưa. Tính xác suất của các biến cố sau.

① Ba sinh viên vào cùng một quán.





② Hai sinh viên vào cùng một quán, còn người kia thì vào quán khác.

Lời giải

- ♦ Ta đánh số 3 quán cơm là 1, 2, 3. Gọi a, b, c lần lượt là quán cơm sinh viên A, B, C chọn.
- ♦ Như vậy không gian mẫu Ω là $\Omega = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}, 1 \leq a \leq 3, 1 \leq b \leq 3, 1 \leq c \leq 3\}$
- ♦ Vì có 3 cách chọn a và có 3 cách chọn b và có 3 cách chọn c nên $|\Omega| = 3.3.3$.

① Ba sinh viên vào cùng một quán.

- ♦ Kết quả thuận lợi cho biến cố "3 sinh viên vào cùng một quán" là $(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3)$.

$\Rightarrow$ Vậy xác suất của biến cố này là $\frac{3}{27} = \frac{1}{9}$.

② Hai sinh viên vào cùng một quán, còn người kia thì vào quán khác.

- ♦ Gọi B là biến cố "2 sinh viên vào cùng một quán, còn người kia thì vào quán khác".
- ♦ Các kết quả thuận lợi cho biến cố B là

$(1, 1, 2)$ và 2 hoán vị của nó,

$(1, 1, 3)$ và 2 hoán vị của nó,

$(2, 2, 1)$ và 2 hoán vị của nó,

$(2, 2, 3)$ và hai hoán vị của nó,

$(3, 3, 1)$ và 2 hoán vị của nó,

$(3, 3, 2)$ và 2 hoán vị của nó,

♦ Do đó $|\Omega_B| = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 18 \Rightarrow$ Xác suất cần tính là $P(B) = \frac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$.

Bài 16.

Một người bỏ ngẫu nhiên ba lá thư vào vào ba chiếc phong bì đã ghi địa chỉ. Tính xác suất để có ít nhất một lá thư bỏ đúng phong bì của nó.

Lời giải

- ♦ Xét các bộ (x_1, x_2, x_3) , trong đó (x_1, x_2, x_3) là một hoán vị của tập $A = \{1, 2, 3\}$,
- ♦ Ở đây $x_i = i$ ($i = 1, 2, 3$), tức là lá thư thứ i đã bỏ đúng địa chỉ.
- ♦ Gọi Ω là tập hợp tất cả các khả năng bỏ ba lá thư vào 3 phong bì, khi đó $|\Omega| = 3! = 6$.
- ♦ Gọi A là biến cố "Có ít nhất một lá thư bỏ đúng phong bì".
- ♦ Các khả năng thuận lợi cho biến cố A là $\Omega_A = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3)\}$

$\Rightarrow$ Vậy $|\Omega_A| = 4$, xác suất cần tính là $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{2}{3}$.





Dạng toán 2. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT.

Phương pháp giải

○ Ta có các loại biến cố sau:

Phân loại	Nội dung
① Biến cố hợp	Cho k biến cố $A_1, A_2, \dots, A_k$. Biến cố " Có ít nhất một trong các biến cố $A_1, A_2, \dots, A_k$ xảy ra " gọi là hợp của k biến cố đó, kí hiệu là $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$.
② Biến cố giao	Cho k biến cố $A_1, A_2, \dots, A_k$. Biến cố " Tất cả k biến cố $A_1, A_2, \dots, A_k$ đều xảy ra " gọi là giao của k biến cố đó, kí hiệu là $A_1 A_2 \dots A_k$.
③ Biến cố xung khắc	Hai biến cố A và B gọi là xung khắc nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra.
④ Biến cố độc lập.	Cho k biến cố $A_1, A_2, \dots, A_k$; k biến cố này gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của mỗi biến cố không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của các biến cố còn lại.

➤ **Nhận xét.** Hai biến cố A và B là hai biến cố xung khắc khi và chỉ khi $\Omega_A \cap \Omega_B = \emptyset$.

○ Từ bảng phân loại ta có công thức:

	Phân loại	Nội dung
Quy tắc Cộng Xác Suất	Biến cố xung khắc	Cho k biến cố $A_1, A_2, \dots, A_k$ đôi một xung khắc. Khi đó $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k)$.
	Biến cố đối	Cho A là một biến cố. Khi đó biến cố "không xảy ra A ", kí hiệu là $\bar{A}$, gọi là biến cố đối của biến cố A . Ta có $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
Quy tắc Nhân Xác Suất	Biến cố độc lập	Nếu k biến cố $A_1, A_2, \dots, A_k$ độc lập với nhau Thì $P(A_1 A_2 \dots A_k) = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_k)$

➤ **Nhận xét.** Nếu hai biến cố A và B độc lập với nhau thì A và $\bar{B}$; $\bar{A}$ và B ; $\bar{A}$ và $\bar{B}$ cũng độc lập với nhau.

➤ Bài 01.

Trong một buổi tọa đàm nhân ngày 8/3, có 20 đại biểu nữ và 10 đại biểu nam. Ban tổ chức mời 5 đại biểu phát biểu ý kiến. Tính xác suất để trong 5 phát biểu mời có một hoặc hai phát biểu là của đại biểu nam.

Lời giải

- ♦ Gọi A là biến cố "Trong 5 phát biểu mời có đúng một phát biểu là của đại biểu nam".
- ♦ Gọi B là biến cố "Trong 5 phát biểu mời có đúng hai phát biểu là của đại biểu nam".
- ♦ Biến cố $A \cup B$ là "Trong 5 phát biểu mời có một hoặc hai phát biểu là của đại biểu nam".





♦ Vì A và B là hai biến cố xung khắc nên $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

♦ Ta có $P(A) = \frac{C_{10}^1 \cdot C_{20}^4}{C_{30}^5}$, $P(B) = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{20}^3}{C_{30}^5}$.

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \approx 0,7$

Bài 02.

Một hộp đựng 8 viên bi xanh, 4 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để:

- ① Lấy được ba viên bi cùng màu.
- ② Lấy được ba viên bi khác màu.
- ③ Lấy được ít nhất hai viên bi xanh.

Lời giải

① Lấy được ba viên bi cùng màu.

♦ Gọi A là biến cố "Lấy được 3 viên bi xanh",

B là biến cố "Lấy được 3 viên bi đỏ"

H là biến cố "Lấy được 3 viên bi cùng màu".

♦ Ta có $H = A \cup B$.

$\Rightarrow$ Vì A và B xung khắc nên $P(H) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{C_8^3}{C_{12}^3} + \frac{C_4^3}{C_{12}^3} = \frac{14}{55} + \frac{1}{55} = \frac{3}{11}$

② Lấy được ba viên bi khác màu.

♦ Biến cố "Lấy được ba viên bi khác màu" là $\bar{H}$.

$\Rightarrow$ Vậy $P(\bar{H}) = 1 - P(H) = \frac{8}{11}$.

③ Lấy được ít nhất hai viên bi xanh.

♦ Gọi C là biến cố "Lấy được hai viên bi xanh và một viên bi đỏ",

K là biến cố "Lấy được ít nhất hai viên bi xanh".

♦ Ta có $K = A \cup C$.

$\Rightarrow$ Vì A và C xung khắc nên $P(K) = P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{14}{55} + \frac{C_8^2 \cdot C_4^1}{C_{12}^3} = \frac{14}{55} + \frac{28}{55} = \frac{42}{55}$

Bài 03.

Cho A, B, C, D là các biến cố đôi một xung khắc và $A \cup B \cup C \cup D$ là biến cố chắc chắn. Biết $P(A) = 3P(B)$, $P(B) = 3P(C)$, $P(C) = 3P(D)$. Tính xác suất của mỗi biến cố A, B, C và D .

Lời giải

♦ Đặt $x = P(D)$, theo giả thiết ta có $P(C) = 3x$, $P(B) = 9x$, $P(A) = 27x$.





♦ Vì $A \cup B \cup C \cup D$ là biến cố chắc chắn nên $P(A \cup B \cup C \cup D) = 1$.

♦ Mặt khác A, B, C, D là các biến cố đôi một xung khắc nên

$$P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D)$$

$$\Rightarrow 1 = 27x + 9x + 3x + x \Leftrightarrow 1 = 40x \Leftrightarrow x = \frac{1}{40}.$$

$$\Rightarrow \text{Vậy } P(D) = \frac{1}{40}, P(C) = \frac{3}{40}, P(B) = \frac{9}{40}, P(A) = \frac{27}{40}.$$

Bài 04.

Gieo hai con súc sắc. Tính xác suất để:

- ① Cả hai con súc sắc đều xuất hiện mặt 5 chấm.
- ② Có đúng một trong hai con súc sắc xuất hiện mặt 5 chấm.

Lời giải

Gọi hai súc sắc là M, N .

① Cả hai con súc sắc đều xuất hiện mặt 5 chấm.

- ♦ Gọi A là biến cố "Súc sắc M xuất hiện mặt 5 chấm",
- ♦ Gọi B là biến cố "Súc sắc N xuất hiện mặt 5 chấm".
- ♦ Ta có A và B là hai biến cố độc lập và $P(A) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{1}{6}$.
- ♦ Biến cố "Cả hai con súc sắc đều xuất hiện mặt 5 chấm" là AB .

$$\Rightarrow \text{Vậy xác suất cần tính là } P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

② Có đúng một trong hai con súc sắc xuất hiện mặt 5 chấm.

- ♦ Gọi C là biến cố "Có đúng một trong hai con súc sắc xuất hiện mặt 5 chấm",
- ♦ Ta có C là hợp của hai biến cố xung khắc $A\bar{B}$ và $\bar{A}B$, tức là $C = A\bar{B} \cup \bar{A}B$.
- ♦ Do đó $P(C) = P(A\bar{B} \cup \bar{A}B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B)$

$$\bullet \text{ Ta có } P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{5}{6}, P(\bar{B}) = 1 - P(B) = \frac{5}{6}.$$

- ♦ Vì A và B là hai biến cố độc lập với nhau
- ♦ Nên $\bar{A}$ và B độc lập với nhau; A và $\bar{B}$ độc lập với nhau,

$$\Rightarrow \text{Vậy } P(C) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = P(A)P(\bar{B}) + P(\bar{A})P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{18}$$

Bài 05.

Có hai hòm đựng thẻ, mỗi hòm đựng 13 thẻ đánh số từ 1 đến 13. Từ mỗi hòm rút ngẫu nhiên một thẻ. Tính xác suất để trong hai thẻ rút ra có ít nhất một thẻ đánh số 9.





Lời giải

- ♦ Gọi A là biến cố "Trong hai thẻ rút ra có ít nhất một thẻ đánh số 9";
 H là biến cố "Thẻ rút ra từ hòm thứ nhất không đánh số 9";
 K là biến cố "Thẻ rút ra từ hòm thứ hai không đánh số 9".
- ♦ Khi đó $\bar{A} = HK$. Ta có $P(H) = \frac{12}{13}; P(K) = \frac{12}{13}$.
- ♦ Vì H và K là hai biến cố độc lập nên $P(\bar{A}) = P(HK) = P(H)P(K) = \frac{144}{169}$.
- ♦ Do đó $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$ đây là hợp của các biến cố xung khắc.
- ♦ Do đó $P(X) = P(H\bar{S}\bar{T} \cup \bar{H}\bar{S}\bar{T} \cup H\bar{S}T) = P(H\bar{S}\bar{T}) + P(\bar{H}\bar{S}\bar{T}) + P(H\bar{S}T)$
- ♦ Mà $P(H\bar{S}\bar{T}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$, $P(\bar{H}\bar{S}\bar{T}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$, $P(H\bar{S}T) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$.
- $\Rightarrow P(X) = P(H\bar{S}\bar{T}) + P(\bar{H}\bar{S}\bar{T}) + P(H\bar{S}T) = \frac{1}{5} + \frac{2}{15} + \frac{1}{10} = \frac{13}{30}$.

Bài 06.

Có hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 3 cầu trắng, 7 quả cầu đỏ và 15 quả cầu xanh. Hộp thứ hai chứa 10 cầu trắng, 6 quả cầu đỏ và 9 quả cầu xanh. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên ra một quả cầu. Tính xác suất để hai quả lấy ra có màu giống nhau.

Lời giải

- ♦ Gọi A là biến cố "Quả cầu được lấy ra từ hộp thứ nhất là màu trắng",
 B là biến cố "Quả cầu được lấy ra từ hộp thứ hai là màu trắng".
- ♦ Ta có $P(A) = \frac{3}{25}$, $P(B) = \frac{10}{25}$.
- ♦ Vì A và B là hai biến cố độc lập.
- ♦ Nên xác suất để hai quả cầu lấy ra đều màu trắng là $P(AB) = P(A).P(B) = \frac{3}{25} \cdot \frac{10}{25} = \frac{30}{625}$.
- ♦ Tương tự, xác suất để hai quả cầu lấy ra đều
- ↳ Màu xanh $\frac{15}{25} \cdot \frac{9}{25} = \frac{135}{625}$
- ↳ Màu đỏ $\frac{7}{25} \cdot \frac{6}{25} = \frac{42}{625}$.
- $\Rightarrow$ Theo quy tắc cộng, xác suất để hai quả lấy ra có màu giống nhau: $\frac{30}{625} + \frac{135}{625} + \frac{42}{625} = \frac{207}{625}$.

Bài 07.

Có hai chiếc hộp chứa bi. Hộp thứ nhất chứa 4 viên bi đỏ và 3 viên bi trắng. Hộp thứ hai chứa 2 viên bi đỏ và 4 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra 1 viên bi, tính xác suất để 2 viên bi được lấy ra có cùng màu.

Trích đề thi ĐH KHỐI B – năm 2013





Lời giải

- ♦ Gọi A, B, C, D lần lượt là các biến cố: “Lấy được bi đỏ từ hộp thứ nhất”, “Lấy được bi đỏ từ hộp thứ hai”; “Lấy được bi trắng từ hộp thứ nhất”, “Lấy được bi trắng từ hộp thứ hai”. ♦ Khi đó

$$P(A) = \frac{4}{7}, P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, P(C) = \frac{3}{7}, P(D) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

- ♦ Gọi E, F lần lượt là các biến cố: “Hai viên bi lấy ra cùng màu đỏ”, “Hai viên bi lấy ra cùng màu trắng”.

- ♦ Khi đó $E = AB$ và $F = CD$.

- ♦ Do A và B và hai biến cố độc lập nên $P(E) = P(AB) = P(A).P(B) = \frac{4}{21}$.

- ♦ Do C và D là hai biến cố độc lập nên $P(F) = P(CD) = P(C).P(D) = \frac{2}{7}$.

- ♦ Do E và F là hai biến cố xung khắc nên xác suất để lấy được hai viên bi cùng màu là

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) = \frac{4}{21} + \frac{2}{7} = \frac{10}{21}.$$

Bài 08.

Có hai hộp, hộp thứ nhất đựng 3 bi đỏ, 2 bi xanh và 5 bi vàng, hộp thứ hai đựng 2 bi đỏ, 3 bi xanh và 2 bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 2 bi, mỗi hộp một bi. Tính xác suất để trong một lần lấy ra được đúng một bi đỏ.

Lời giải

- ♦ Gọi A là biến cố “Trong một lần lấy ra được đúng một bi đỏ”,

A_1 là biến cố “Lấy được bi đỏ ở hộp thứ nhất”,

A_2 là biến cố “Lấy được bi đỏ ở hộp thứ hai”.

- ♦ Ta có $A = A_1\bar{A}_2 \cup \bar{A}_1A_2$; $P(A_1) = \frac{3}{10}$, $P(\bar{A}_1) = \frac{7}{10}$, $P(A_2) = \frac{2}{7}$, $P(\bar{A}_2) = \frac{5}{7}$.

- ♦ Suy ra

$$P(A) = P(A_1\bar{A}_2 \cup \bar{A}_1A_2) = P(A_1\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1A_2) = P(A_1)P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1)P(A_2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{7} + \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{7} = \frac{29}{70}$$

Bài 09.

Có hai hòm, mỗi hòm chứa 5 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 5. Rút ngẫu nhiên từ mỗi hòm một tấm thẻ. Tính xác suất để tổng các số ghi trên hai tấm thẻ rút ra không nhỏ hơn 3.

Lời giải

- ♦ Không gian mẫu $\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}^*, 1 \leq x \leq 5, 1 \leq y \leq 5\}$.

- ♦ Vì có 5 cách chọn x và có 5 cách chọn y nên $|\Omega| = 5 \cdot 5 = 25$.

- ♦ Gọi A là biến cố “Tổng hai số ghi trên hai tấm thẻ không nhỏ hơn 3”.

- ♦ Khi đó $\bar{A}$ là biến cố “Tổng hai số ghi trên hai tấm thẻ nhỏ hơn 3”.

- ♦ Ta có $\Omega_{\bar{A}} = \{(1, 1)\} \Rightarrow |\Omega_{\bar{A}}| = 1 \Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{1}{25}$.





$\Rightarrow$ Xác suất cần tính là $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25} = 0,96$.

Bài 10.

Chọn ngẫu nhiên ba người, biết rằng không có ai sinh vào năm nhuận. Hãy tính xác suất để có ít nhất để có ít nhất hai người có sinh nhật trùng nhau (cùng ngày, cùng tháng).

Lời giải

- Gọi A là biến cố "Trong 3 người được chọn, có ít nhất 2 người cùng sinh nhật".
- Khi đó biến cố $\bar{A}$ là "Ba người được chọn có ngày sinh đôi một khác nhau".
- Số trường hợp có thể là 365^3 .
- Số trường hợp thuận lợi là cho biến cố $\bar{A}$ là $365 \cdot 364 \cdot 363$.

$\Rightarrow$ Vậy $P(\bar{A}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363}{365^3} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363}{365^3} \approx 0,0082$.

Bài 11.

Một kệ sách có 15 quyển sách (4 quyển sách Toán khác nhau, 5 quyển sách Lý khác nhau và 6 quyển sách Văn khác nhau). Người ta lấy ngẫu nhiên 4 quyển sách từ kệ. Tính xác suất để số sách lấy ra không đủ ba môn.

Lời giải

- Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{15}^4 = 1365$.
- Gọi A là biến cố "Lấy ra 4 quyển sách có đủ 3 môn".
- Trường hợp 1: 2 sách Toán, 1 sách Lý, 1 sách Văn: có $C_4^2 C_5^1 C_6^1$ cách lấy.
- Trường hợp 2: 1 sách Toán, 2 sách Lý, 1 sách Văn: có $C_4^1 C_5^2 C_6^1$ cách lấy.
- Trường hợp 3: 1 sách Toán, 1 sách Lý, 2 sách Văn: có $C_4^1 C_5^1 C_6^2$ cách lấy.

Vậy kết quả thuận lợi cho biến cố A là $|\Omega_A| = C_4^2 C_5^1 C_6^1 + C_4^1 C_5^2 C_6^1 + C_4^1 C_5^1 C_6^2 = 720$.

$\Rightarrow$ Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{720}{1365}$.

$\Rightarrow$ Xác suất cần tính là $1 - P(A) = 1 - \frac{720}{1365} = \frac{43}{91}$.

Bài 12.

Chọn ngẫu nhiên 3 giáo viên trong tổ chuyên môn Hóa-Sinh-Thể dục để thành lập một đoàn công tác sao cho mỗi môn phải có một giáo viên. Biết tổ có 6 giáo viên Hóa, 5 giáo viên Sinh, 3 giáo viên Thể dục, trong môn Hóa có 3 giáo viên nữ, môn Sinh có 2 giáo viên nữ và môn Thể dục có 1 giáo viên nữ. Tính xác suất để đoàn công tác

- ① Có đúng một giáo viên nữ.
- ② Có ít nhất một giáo viên nam.

Lời giải

① Có đúng một giáo viên nữ.

- Gọi H là biến cố "Có một giáo viên nữ môn Hóa trong đoàn",
- S là biến cố "Có một giáo viên nữ môn Sinh trong đoàn",





T là biến cố “Có một giáo viên nữ môn Thể dục trong đoàn”.

♦ Ta có

$$P(H) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P(S) = \frac{2}{5}, P(T) = \frac{1}{3}, P(\bar{H}) = \frac{1}{2}, P(\bar{S}) = \frac{3}{5}, P(\bar{T}) = \frac{2}{3}.$$

♦ Gọi X là biến cố “Có đúng một giáo viên nữ trong đoàn”.

♦ Ta có

$$X = H\bar{S}\bar{T} \cup \bar{H}S\bar{T} \cup \bar{H}\bar{S}T$$

$$P(X) = P(H\bar{S}\bar{T} \cup \bar{H}S\bar{T} \cup \bar{H}\bar{S}T) = P(H\bar{S}\bar{T}) + P(\bar{H}S\bar{T}) + P(\bar{H}\bar{S}T)$$

$$\text{Lại có } P(H\bar{S}\bar{T}) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}; P(\bar{H}S\bar{T}) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3}; P(\bar{H}\bar{S}T) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P(X) = \frac{13}{30}$$

② Có ít nhất một giáo viên nam.

♦ Gọi Y là biến cố “Trong đoàn cả 3 giáo viên đều là nữ”.

$\Rightarrow \bar{Y}$ là biến cố “Trong đoàn công tác có ít nhất một giáo viên nam”

♦ Ta có $Y = HTS$, với H, T, S là 3 biến cố độc lập.

$$\text{♦ Suy ra } P(Y) = P(HTS) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15}.$$

$$\Rightarrow P(\bar{Y}) = 1 - P(Y) = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}.$$

VI. BÀI TẬP TỰ LUẬN.

✎ Bài 01.

Gieo một con súc sắc cân đối, đồng chất và quan sát số chấm xuất hiện:

① Mô tả không gian mẫu.

② Xác định các biến cố sau:

A : “Xuất hiện mặt chẵn chấm”.

B : “Xuất hiện mặt lẻ chấm”.

C : “Xuất hiện mặt có số chấm không nhỏ hơn 3”.

③ Tính xác suất của các biến cố trên.

Lời giải

① Mô tả không gian mẫu.

♦ Gọi Ω là không gian mẫu. Ta có: $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

② Xác định các biến cố sau:

♦ A : “Xuất hiện mặt chẵn chấm”.

♦ B : “Xuất hiện mặt lẻ chấm”.

♦ C : “Xuất hiện mặt có số chấm không nhỏ hơn 3”.

$$\Rightarrow A = \{2; 4; 6\}; B = \{1; 3; 5\}; C = \{3; 4; 5; 6\}.$$

③ Tính xác suất của các biến cố trên.





$$\diamond P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$\diamond P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$\diamond P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Bài 02.

Gieo hai con súc sắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất để:

- ① Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc nhỏ hơn hay bằng 5.
- ② Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc lớn hơn hay bằng 9 mà trong đó có ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm.
- ③ Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc nhỏ hơn hay bằng 7 mà trong đó có ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm.

Lời giải

Gọi Ω là không gian mẫu. Ta có: $\Omega = \{(i; j) / 1 \leq i, j \leq 6\} \Rightarrow n(\Omega) = 36$.

① Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc nhỏ hơn hay bằng 5.

- ♦ Gọi A : “Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc nhỏ hơn hay bằng 5”.
- ♦ Ta có: $A = \{(1;1), (1;2), (2;1), (1;3), (3;1), (1;4), (4;1), (2;2), (2;3), (3;2)\} \Rightarrow n(A) = 10$.
- $\Rightarrow$ Do đó: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

② Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc lớn hơn hay bằng 9 mà trong đó có ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm.

- ♦ Gọi B : “Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc lớn hơn hay bằng 9 mà trong đó có ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm”.
- ♦ Ta có: $B = \{(3;6), (6;3), (4;6), (6;4), (5;6), (6;5), (6;6)\} \Rightarrow n(B) = 7$.
- $\Rightarrow$ Do đó: $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{7}{36}$.

③ Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc nhỏ hơn hay bằng 7 mà trong đó có ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm.

- ♦ Gọi C : “Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc nhỏ hơn hay bằng 7 mà trong đó có ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm”.
- ♦ Ta có: $C = \{(1;6), (6;1)\} \Rightarrow n(C) = 2$.
- $\Rightarrow$ Do đó: $P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.





Bài 03.

Một bình chứa 16 viên bi khác nhau, trong đó có 7 viên bi đen, 5 viên bi đỏ, 4 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi, tính xác suất để:

- ① Lấy được cả 4 viên bi đều trắng.
- ② Lấy được 4 viên bi không có viên bi trắng.
- ③ Lấy được đúng 1 viên bi trắng.
- ④ Lấy được số bi trắng gấp 2 lần số bi đen & đỏ.
- ⑤ Lấy được số bi có đủ 3 màu.
- ⑥ Lấy được số bi không có đủ 3 màu.

Lời giải

- ♦ Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp chứa 16 viên bi.
- ⇒ Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{16}^4 = 1820$.

① Lấy được cả 4 viên bi đều trắng.

- ♦ Gọi A là biến cố "Lấy được cả 4 viên bi đều trắng".
- ♦ Ta có số phần tử của biến cố A là: $|\Omega_A| = C_4^4 = 1$

$$\Rightarrow \text{Vậy xác suất cần tính } P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{1}{1820}.$$

② Lấy được 4 viên bi không có viên bi trắng.

- ♦ Gọi B là biến cố "Lấy được 4 viên bi không có viên bi trắng".
- ♦ Ta có số phần tử của biến cố B là: $|\Omega_B| = C_{12}^4 = 495$

$$\Rightarrow \text{Vậy xác suất cần tính } P(B) = \frac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \frac{99}{364}.$$

③ Lấy được đúng 1 viên bi trắng.

- ♦ Gọi C là biến cố "Lấy được đúng 1 viên bi trắng".
- ♦ Ta có số phần tử của biến cố C là: $|\Omega_C| = C_4^1 C_{12}^3 = 880$

$$\Rightarrow \text{Vậy xác suất cần tính } P(C) = \frac{|\Omega_C|}{|\Omega|} = \frac{44}{91}.$$

④ Lấy được số bi trắng gấp 2 lần số bi đen & đỏ.

- ♦ Gọi D là biến cố "Lấy được số bi trắng gấp 2 lần số bi đen và đỏ".
- ♦ Ta có các kết quả thuận lợi cho biến cố D là lấy 2 bi trắng, 1 bi đen và 1 bi đỏ.
- ♦ Ta có số phần tử của biến cố D là: $|\Omega_D| = C_4^2 C_5^1 C_7^1 = 210$

$$\Rightarrow \text{Vậy xác suất cần tính } P(D) = \frac{|\Omega_D|}{|\Omega|} = \frac{3}{26}.$$

⑤ Lấy được số bi có đủ 3 màu.

- ♦ Gọi E là biến cố "Lấy được số bi có đủ 3 màu".
- ♦ Ta có các trường hợp thuận lợi cho biến cố E là:

☉ **Trường hợp 1.** Chọn 1 bi đen, 1 bi đỏ và 2 bi trắng nên có $C_7^1 \cdot C_5^1 \cdot C_4^2$ cách.





⊙ **Trường hợp 2.** Chọn 1 bi đen, 2 bi đỏ và 1 bi trắng nên có $C_7^1 \cdot C_5^2 \cdot C_4^1$ cách.

⊙ **Trường hợp 3.** Chọn 2 bi đen, 1 bi đỏ và 1 bi trắng nên có $C_7^2 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1$ cách.

♦ Suy ra số phần tử của biến cố E là $|\Omega_E| = C_7^1 \cdot C_5^1 \cdot C_4^2 + C_7^1 \cdot C_5^2 \cdot C_4^1 + C_7^2 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 = 910$.

⇒ Vậy xác suất cần tính $P(E) = \frac{|\Omega_E|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$.

⑥ **Lấy được số bi không có đủ 3 màu.**

♦ Gọi F là biến cố "Lấy được số bi không có đủ 3 màu".

Cách 01: Ta có các trường hợp thuận lợi cho biến cố F là:

⊙ **Trường hợp 1.** Chọn 4 viên bi chỉ có một màu. Trường hợp này có $C_4^4 + C_5^4 + C_7^4 =$ cách.

⊙ **Trường hợp 2.** Chọn 4 viên bi có đúng hai màu:

♦ Chọn 4 viên bi có đúng hai màu đỏ và đen, có $C_{12}^4 - (C_7^4 + C_5^4)$ cách.

♦ Chọn 4 viên bi có đúng hai màu đỏ và trắng, có $C_9^4 - (C_5^4 + C_4^4)$ cách.

♦ Chọn 4 viên bi có đúng hai màu đen và trắng, có $C_{11}^4 - (C_7^4 + C_4^4)$ cách.

⇒ Do đó trường hợp này có $C_{12}^4 + C_9^4 + C_{11}^4 - (C_7^4 + C_5^4 + C_7^4 + C_4^4 + C_5^4 + C_4^4) = 869$ cách.

⇒ Suy ra số phần tử của biến cố F là $|\Omega_F| = 869 + 41 = 910$.

⇒ Vậy xác suất cần tính $P(F) = \frac{|\Omega_F|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$.

Cách 02: Ta có: $F = \bar{E}$

⇒ Nên xác suất cần tính $P(F) = P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

🔖 Bài 04.

Gieo liên tiếp ba lần con súc sắc. Tìm xác suất để:

① Tổng số chấm trên mặt không nhỏ hơn 16.

② Tổng số chấm trên mặt xuất hiện là một số nguyên tố nhỏ hơn 9.

Lời giải

♦ Không gian mẫu là số cách xuất hiện các mặt của con súc sắc trong ba lần gieo liên tiếp

⇒ Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_6^1 \cdot C_6^1 \cdot C_6^1 = 216$.

① **Tổng số chấm trên mặt không nhỏ hơn 16.**

♦ Gọi A là biến cố "Tổng số chấm trên các mặt của ba lần gieo không nhỏ hơn 16".

♦ Ta có bộ các số tương ứng với số chấm có tổng không nhỏ hơn 16 là (4;6;6); (6;4;6); (6;6;4); (5;5;6); (6;5;5); (5;6;5); (6;5;6); (6;6;5) và (6;6;6).

♦ Do đó số phần tử của biến cố A là: $|\Omega_A| = 10$

⇒ Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{5}{108}$.

② **Tổng số chấm trên mặt xuất hiện là một số nguyên tố nhỏ hơn 9.**





- ♦ Gọi B là biến cố "Tổng số chấm trên các mặt của ba lần gieo là một số nguyên tố nhỏ hơn 9".
 - ♦ Ta có các số nguyên tố nhỏ hơn 9 gồm: 2, 3, 5, 7.
 - ♦ Bộ các số tương ứng với số chấm có tổng bằng 2: không có.
 - ♦ Bộ các số tương ứng với số chấm có tổng bằng 3: (1,1,1): 1 cách
 - ♦ Bộ các số tương ứng với số chấm có tổng bằng 5: (1,1,3): 3 cách; (1,2,2): 3 cách.
 - ♦ Bộ các số tương ứng với số chấm có tổng bằng 7: (1,1,5): 3 cách; (1,2,4): 6 cách; (1,3,3): 3 cách; (2,3,2): 3 cách.
 - ♦ Do đó số phần tử của biến cố B là: $|\Omega_B| = 22$
- $\Rightarrow$ Vậy xác suất cần tính $p(B) = \frac{22}{216} = \frac{11}{108}$

Bài 05.

Chọn ngẫu nhiên một số có 3 chữ số. Tính xác suất để số được chọn là số chẵn và các chữ số của nó đều khác nhau.

Lời giải

- ♦ Không gian mẫu là số các số tự nhiên có ba chữ số.
- $\Rightarrow$ Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$
- ♦ Gọi A là biến cố "chọn được một số chẵn mà các chữ số của nó khác nhau"
- ♦ Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abc}$
- ♦ Vì là số chẵn nên c là số chẵn

⊙ Trường hợp 1: $c = 0$. Số các số cần tìm là $A_9^2 = 72$.

⊙ Trường hợp 2: $c \neq 0$: c có 4 cách chọn, $c \in \{2, 4, 6, 8\}$.

- ♦ Số cách chọn hai số còn lại là $A_9^2 - A_8^1 = 64$.
- ♦ Suy ra ta có $|\Omega_A| = 72 + 64 \cdot 4 = 72 + 256 = 328$.

$\Rightarrow$ Xác suất cần tìm là: $p(B) = \frac{328}{900} = \frac{82}{225}$.

Bài 06.

Chọn ngẫu nhiên ba số từ tập các số tự nhiên sau: $\{1; 2; 3; \dots; 11\}$. Tính xác suất để:

- ① Tổng ba số được chọn là 12.
- ② Tổng ba số được chọn là số lẻ.
- ③ Lấy được ba số đều là số chẵn và tổng của chúng nhỏ hơn 19.

Lời giải

- ♦ Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên ba số tự nhiên từ 11 số tự nhiên sau: $\{1; 2; 3; \dots; 11\}$. Do đó số phần tử của không gian mẫu là: $|\Omega| = C_{11}^3 = 165$

① Tổng ba số được chọn là 12.

- ♦ Gọi A là biến cố "Tổng ba số được chọn là 12".





♦ Ta có các bộ 3 số có tổng bằng 12 gồm: (1,2,9); (1,3,8); (1,4,7); (1,5,6); (2,3,7); (2,4,6); (3,4,5).
 $\Rightarrow$ Suy ra ta có $|\Omega_A| = 7$.

$\Rightarrow$ Xác suất cần tìm là: $P(A) = \frac{7}{165}$.

② Tổng ba số được chọn là số lẻ.

♦ Gọi B là biến cố “Tổng ba số được chọn là số lẻ”
 ♦ Tổng ba số được chọn tạo thành số lẻ thì ba số được chọn cần thỏa điều kiện: 3 số đều là số lẻ, hai số chẵn và 1 số lẻ.

⊙ Trường hợp 1: 3 số đều là số lẻ là $C_6^3 = 20$

⊙ Trường hợp 2: số cách chọn hai số chẵn và 1 số lẻ là $C_6^1 \cdot C_5^2 = 60$

$\Rightarrow$ Suy ra ta có $|\Omega_B| = 20 + 60 = 80$.

$\Rightarrow$ Xác suất cần tìm là: $p(A) = \frac{80}{165} = \frac{16}{33}$.

③ Lấy được ba số đều là số chẵn và tổng của chúng nhỏ hơn 19.

♦ Gọi C là biến cố “ba số đều là số chẵn và tổng của chúng nhỏ hơn 19”.
 ♦ Bộ ba số thỏa yêu cầu gồm: (2,4,6); (2,4,8); (2,4,10); (2,6,8); (2,6,10); (4,6,8).

$\Rightarrow$ Suy ra ta có $|\Omega_C| = 6$

$\Rightarrow$ Xác suất cần tìm là: $p(C) = \frac{6}{165} = \frac{2}{55}$

Bài 07.

Bỏ 5 lá thư vào 5 phong bì đã chuẩn bị địa chỉ trước. Tính xác suất để:

- ① Cả 5 lá đều đúng người nhận.
- ② Lá thứ nhất đúng với người nhận.
- ③ Lá thứ nhất và lá thứ hai đúng người nhận.

Lời giải

♦ Không gian mẫu là số cách chọn 5 lá thư vào 5 phong bì đã chuẩn bị địa chỉ trước. Do đó số phần tử của không gian mẫu là: $|\Omega| = 5! = 120$

① Cả 5 lá đều đúng người nhận.

♦ Gọi A là biến cố “Cả 5 lá đều đúng người nhận”.
 ♦ Vì mỗi lá thư chỉ được chọn duy nhất 1 phong bì nên số cách chọn cả 5 lá đều đúng người nhận là 1.

$\Rightarrow$ Suy ra ta có $|\Omega_A| = 1$

$\Rightarrow$ Xác suất cần tìm là: $P(A) = \frac{1}{120}$

② Lá thứ nhất đúng với người nhận.

♦ Gọi B là biến cố “Lá thứ nhất đúng với người nhận”.





- ♦ Lá thứ nhất có đúng 1 cách chọn.
 - ♦ Lá thứ 2 có 4 cách chọn.
 - ♦ Lá thứ 3 có 3 cách chọn
 - ♦ Lá thứ 4 có 2 cách chọn
 - ♦ Lá thứ 5 có 1 cách chọn
- ⇒ Suy ra ta có $|\Omega_B| = 24$

⇒ Xác suất cần tìm là: $P(B) = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$

③ Lá thứ nhất và lá thứ hai đúng người nhận.

- ♦ Gọi C là biến cố “Lá thứ nhất và lá thứ hai đúng người nhận”.
 - ♦ Vì mỗi lá thư chỉ được chọn duy nhất 1 phong bì nên số cách chọn cả 5 lá đều đúng người nhận là 1.
 - ♦ Lá thứ nhất và lá thứ 2 có đúng 1 cách chọn.
 - ♦ Lá thứ 3 có 3 cách chọn
 - ♦ Lá thứ 4 có 2 cách chọn
 - ♦ Lá thứ 5 có 1 cách chọn
- ⇒ Suy ra ta có $|\Omega_C| = 6$
- ⇒ Xác suất cần tìm là: $P(C) = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$.

Bài 08.

Cho 8 quả cân có khối lượng lần lượt là 1kg, 2kg, 3kg, 4kg, 5kg, 6kg, 7kg, 8kg. Chọn ngẫu nhiên ba quả cân trong số đó. Tính xác suất để trọng lượng ba quả cân được chọn không vượt quá 9kg.

Lời giải

- ♦ Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên ba quả cân trong số 8 quả cân có khối lượng đã cho tương ứng.
 - ♦ Do đó số phần tử của không gian mẫu là: $|\Omega| = C_8^3 = 56$
 - ♦ Gọi C là biến cố “trọng lượng ba quả cân được chọn không vượt quá 9kg”
 - ♦ Ta có các bộ 3 số có tổng khối lượng không vượt quá 9kg gồm:
 $(1, 2, 3); (1, 2, 4); (1, 2, 5); (1, 2, 6); (1, 3, 4); (1, 3, 5); (2, 3, 4)$
- ⇒ Suy ra ta có $|\Omega_A| = 7$.
- ⇒ Xác suất cần tìm là: $p(A) = \frac{7}{56} = \frac{1}{8}$.

Bài 09.

Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số từ 1, 2, ..., 9. Rút ngẫu nhiên hai thẻ và nhân hai số ghi trên hai thẻ với nhau. Tính xác suất để tích nhận được là số lẻ.

Lời giải





- ♦ Số cách rút ngẫu nhiên 2 thẻ trong 9 thẻ là $n(\Omega) = C_9^2$.
- ♦ Gọi biến cố A: “hai thẻ rút được có tích hai số ghi trên hai thẻ là số lẻ”.
- ♦ Để hai thẻ rút được có tích hai số ghi trên hai thẻ là số lẻ thì hai thẻ rút ra đều phải được đánh số lẻ.
- ⇒ Do đó có số cách là $n(A) = C_5^2$.
- ⇒ Vậy $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_5^2}{C_9^2} = \frac{5}{18}$.

Bài 10.

Một tổ sinh viên có 6 nam và 5 nữ.

- ① Tìm xác suất chọn ra 4 sinh viên đi lao động sao cho trong đó có 1 nữ.
- ② Tìm xác suất chọn ra 4 sinh viên đi lao động sao cho trong đó có tối đa 3 nữ.

Lời giải

- ♦ Số cách chọn bất kì 4 sinh viên trong 11 sinh viên là $n(\Omega) = C_{11}^4$.

① Tìm xác suất chọn ra 4 sinh viên đi lao động sao cho trong đó có 1 nữ.

- ♦ Gọi biến cố A: “4 sinh viên đi lao động sao cho trong đó có 1 nữ”.
- ♦ Số cách chọn 1 nữ, 3 nam là $n(A) = C_5^1 \cdot C_6^3$.

$$\Rightarrow \text{Vậy } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_5^1 \cdot C_6^3}{C_{11}^4} = \frac{10}{33}.$$

② Tìm xác suất chọn ra 4 sinh viên đi lao động sao cho trong đó có tối đa 3 nữ.

- ♦ Gọi biến cố B: “4 sinh viên đi lao động sao cho trong đó có tối đa 3 nữ”.

⊙ Trường hợp 1: Chọn 0 nữ, 4 nam có cách $C_5^0 \cdot C_6^4$.

⊙ Trường hợp 2: Chọn 1 nữ, 3 nam có cách $C_5^1 \cdot C_6^3$.

⊙ Trường hợp 3: Chọn 2 nữ, 2 nam có cách $C_5^2 \cdot C_6^2$.

⊙ Trường hợp 4: Chọn 3 nữ, 1 nam có cách $C_5^3 \cdot C_6^1$.

$$\Rightarrow \text{Do đó } n(B) = C_5^0 \cdot C_6^4 + C_5^1 \cdot C_6^3 + C_5^2 \cdot C_6^2 + C_5^3 \cdot C_6^1 = 325.$$

$$\Rightarrow \text{Vậy } P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{325}{C_{11}^4} = \frac{65}{66}.$$

Bài 11.

Ngân hàng đề thi gồm 100 câu hỏi. Mỗi đề thi có 5 câu. Một học sinh thuộc 80 câu. Tìm xác suất để học sinh đó ngẫu nhiên làm được một đề thi trong đó có 4 câu mình đã học thuộc.

Lời giải

- ♦ Số cách chọn 1 đề thi bất kì (gồm 5 câu trong 100 câu) là $n(\Omega) = C_{100}^5$.
- ♦ Gọi biến cố A: “học sinh đó làm được một đề thi trong đó có 4 câu mình đã học thuộc”.





- ♦ Học sinh đã học thuộc 80 câu nên có C_{80}^4 cách chọn ra 4 câu đã học thuộc và có C_{20}^1 cách chọn ra 1 câu hỏi còn lại chưa học thuộc.

$$\Rightarrow \text{Do đó } n(A) = C_{80}^4 \cdot C_{20}^1.$$

$$\Rightarrow \text{Vậy } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_{80}^4 \cdot C_{20}^1}{C_{100}^5} = \frac{5135}{12222}.$$

Bài 12.

Một lô hàng có 10 sản phẩm, trong đó có 2 phế phẩm. Lấy tùy ý 6 sản phẩm từ lô hàng đó. Hãy tìm xác suất để trong 6 sản phẩm lấy ra có không quá một phế phẩm.

Lời giải

- ♦ Số cách chọn ra 6 sản phẩm từ 10 sản phẩm là $n(\Omega) = C_{10}^6$.
- ♦ Gọi biến cố A: “Lấy 6 sản phẩm từ lô hàng đó có không quá một phế phẩm”.

⊙ Trường hợp 1: Không có phế phẩm nào.

- ♦ Số cách chọn 6 sản phẩm không phải là phế phẩm là C_8^6 cách.

⊙ Trường hợp 2: Có 1 phế phẩm và 5 sản phẩm còn lại.

- ♦ Số cách chọn có 1 phế phẩm và 5 sản phẩm còn lại là $C_2^1 \cdot C_8^5$ cách.
- ♦ Khi đó $n(A) = C_8^6 + C_2^1 \cdot C_8^5$.

$$\Rightarrow \text{Vậy } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_8^6 + C_2^1 \cdot C_8^5}{C_{10}^6} = \frac{2}{3}.$$

Bài 13.

Một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng và 6 viên bi vàng. Người ta chọn ra 4 viên bi từ hộp đó. Tính xác suất để trong số bi lấy ra không có đủ ba màu.

Lời giải

- ♦ Số cách chọn ngẫu nhiên 4 viên bi trong 15 viên bi là $n(\Omega) = C_{15}^4$.
- ♦ Gọi biến cố A: “chọn ra 4 viên bi từ hộp không có đủ ba màu”.
- ♦ Ta xét trường hợp lấy ra 4 viên bi có đủ ba màu:

⊙ Trường hợp 1: Lấy được 1 viên bi đỏ, 2 viên bi trắng và 1 viên bi vàng có $C_4^1 \cdot C_5^2 \cdot C_6^1$ cách.

⊙ Trường hợp 2: Lấy được 1 viên bi đỏ, 1 viên bi trắng và 2 viên bi vàng có $C_4^1 \cdot C_5^1 \cdot C_6^2$ cách.

⊙ Trường hợp 3: Lấy được 2 viên bi đỏ, 1 viên bi trắng và 1 viên bi vàng có $C_4^2 \cdot C_5^1 \cdot C_6^1$ cách.

⇒ Số cách để lấy ra 4 viên bi không có đủ cả ba màu là

$$n(A) = C_{15}^4 - (C_4^1 \cdot C_5^1 \cdot C_6^2 + C_4^1 \cdot C_5^2 \cdot C_6^1 + C_4^2 \cdot C_5^1 \cdot C_6^1) = 645.$$

$$\Rightarrow \text{Vậy } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{645}{C_{15}^4} = \frac{43}{91}.$$

Bài 14.

Có 30 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Tìm xác suất để có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10.

Lời giải





- ♦ Số cách chọn 10 tấm thẻ bất kì trong 30 tấm thẻ là $n(\Omega) = C_{30}^{10}$.
- ♦ Gọi biến cố A: “Chọn 10 tấm thẻ có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10”
- ♦ Trong 30 tấm thẻ có 15 tấm thẻ mang số lẻ. Chọn 5 tấm thẻ mang số lẻ có C_{15}^5 cách.
- ♦ Có 3 số chia hết cho 10 là 10; 20; 30, chọn 1 số từ 3 số này có C_3^1 cách.
- ♦ Chọn 4 tấm thẻ mang số chẵn có C_{12}^4 cách.
- ⇒ Khi đó $n(A) = C_{15}^5 \cdot C_3^1 \cdot C_{12}^4$.
- ⇒ Vậy $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_{15}^5 \cdot C_3^1 \cdot C_{12}^4}{C_{30}^{10}} = \frac{99}{667}$.

Bài 15.

Bộ bài 52 quân bài, trong đó có 4 cây Át. Lấy ngẫu nhiên 5 quân bài. Tính xác suất để:

- ① Có đúng một quân Át.
- ② Có ít nhất một quân Át.
- ③ Có 2 con Át và 3 con K.

Lời giải

- ♦ Số cách lấy 5 quân bài từ 52 quân bài là C_{52}^5 , suy ra không gian mẫu Ω có $|\Omega| = C_{52}^5$.

① Có đúng một quân Át.

- ♦ Gọi A là biến cố “5 quân bài lấy ra có đúng 1 quân Át”
- ♦ Lấy 1 quân Át từ 4 quân có C_4^1 (cách)
- ♦ Lấy 4 quân bài từ 48 quân có C_{48}^4 (cách)
- ⇒ Có $C_4^1 \cdot C_{48}^4$ cách lấy thỏa mãn $\Rightarrow |A| = C_4^1 \cdot C_{48}^4$.
- ⇒ Do đó xác suất cần tìm là $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C_4^1 \cdot C_{48}^4}{C_{52}^5} = \frac{3243}{10829} \simeq 0,2995$.

② Có ít nhất một quân Át.

- ♦ Gọi B là biến cố “5 quân bài lấy ra có ít nhất 1 quân Át”
- ♦ Khi đó $\bar{B}$ là biến cố “5 quân bài lấy ra không có quân Át nào”
- ⇒ Ta có $|\bar{B}| = C_{48}^5 \Rightarrow P(\bar{B}) = \frac{C_{48}^5}{C_{52}^5} \rightarrow P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{C_{48}^5}{C_{52}^5} = \frac{886656}{2598960} \simeq 0,34$.

③ Có 2 con Át và 3 con K.

- ♦ Gọi C là biến cố “5 quân bài lấy ra có 2 quân Át và 3 quân K”
- ♦ Lấy 2 quân Át từ 4 quân có C_4^2 (cách)
- ♦ Lấy 3 quân K từ 4 quân có C_4^3 (cách)
- ⇒ Có $C_4^2 \cdot C_4^3$ cách lấy thỏa mãn $\Rightarrow |C| = C_4^2 \cdot C_4^3$.





$$\Rightarrow \text{Do đó xác suất cần tìm là } P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{C_4^2 \cdot C_4^3}{C_{52}^5} = \frac{1}{108290}.$$

Bài 16.

Xếp ngẫu nhiên 5 người (trong đó có đôi bạn An và Hải) vào 1 bàn dài có 5 chỗ ngồi. Tính xác suất để:

- ① An và Hải ngồi đầu bàn.
- ② An và Hải ngồi cạnh nhau.
- ③ An và Hải ngồi cạnh nhau với điều kiện thay 1 bàn dài thành 1 bàn tròn có 5 chỗ ngồi?

Lời giải

♦ Xếp 5 người vào 1 bàn dài 5 chỗ ngồi, số cách xếp là $5! = 120$ (cách),
Suy ra không gian mẫu Ω có số phần tử là $|\Omega| = 120$.

① An và Hải ngồi đầu bàn.

- ♦ Gọi A là biến cố "An và Hải ngồi đầu bàn"
- ♦ Xếp An và Hải ngồi đầu bàn có 2 cách xếp
- ♦ Xếp 3 bạn còn lại vào 3 chỗ còn lại có $3! = 6$ cách.
- $\Rightarrow$ Có $2 \cdot 6 = 12$ cách xếp thỏa mãn $\Rightarrow |A| = 12$.

$$\Rightarrow \text{Do đó xác suất cần tìm là } P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}.$$

② An và Hải ngồi cạnh nhau.

- ♦ Gọi B là biến cố "An và Hải ngồi cạnh nhau"
- ♦ Xếp An và Hải ngồi cạnh nhau coi là 1 bó có 2 cách xếp.
- ♦ Xếp 3 bạn và 1 bó có $4! = 24$; suy ra $|B| = 24$.

$$\Rightarrow \text{Do đó xác suất cần tìm là } P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{24}{120} = \frac{2}{5}.$$

③ An và Hải ngồi cạnh nhau với điều kiện thay 1 bàn dài thành 1 bàn tròn có 5 chỗ ngồi?

- ♦ Xếp 5 bạn vào 1 bàn tròn có 5 chỗ ngồi số cách xếp là $(5-1)! = 24$ (cách),
- ♦ Suy ra không gian mẫu Ω có $|\Omega| = 24$.
- ♦ Gọi C là biến cố "An và Hải ngồi cạnh nhau"
- ♦ Chọn 1 vị trí xếp An và Hải ngồi cạnh nhau có 2 cách.
- ♦ Xếp 3 bạn còn lại vào 3 vị trí còn lại có $3! = 6$ cách.
- $\Rightarrow$ Có $2 \cdot 6 = 12$ cách lấy thỏa mãn $\Rightarrow |C| = 12$.

$$\Rightarrow \text{Do đó xác suất cần tìm là } P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$





Bài 17.

Xếp ngẫu nhiên 5 người A, B, C, D, E lên 7 toa tàu được đánh số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Tính xác suất của các biến cố sau đây

- ① 5 người lên cùng 1 toa.
- ② 5 người lên 5 toa đầu.
- ③ 5 người lên 5 toa khác nhau.
- ④ A và B cùng lên 1 toa 4, mỗi người còn lại lên một toa khác nhau (không nhất thiết khác toa 4).
- ⑤ A và B cùng lên 1 toa, mỗi người còn lại lên một toa khác nhau (không nhất thiết khác toa chứa A và B).
- ⑥ A và B cùng lên 1 toa, mỗi người còn lại lên một toa khác nhau nhưng không lên toa chứa A và B .

Lời giải

5 người lên 7 toa có số cách lên là 7^5 , nên suy ra không gian mẫu Ω có số phần tử $|\Omega| = 7^5$.

① 5 người lên cùng 1 toa.

♦ Gọi A là biến cố “5 người cùng lên 1 toa” có 7 cách lên $\Rightarrow |A| = 7$.

$\Rightarrow$ Vậy xác suất cần 5 người cùng lên 1 toa là $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{7}{7^5} = \frac{1}{2401}$.

② 5 người lên 5 toa đầu.

♦ Gọi B là biến cố “5 người lên 5 toa đầu” có $5!$ cách lên $\Rightarrow |B| = 5!$

$\Rightarrow$ Vậy xác suất cần tìm là $P(B) = \frac{5!}{7^5} = \frac{120}{16807}$.

③ 5 người lên 5 toa khác nhau.

♦ Gọi C là biến cố “5 người lên 5 toa khác nhau” có A_7^5 cách lên $\Rightarrow |C| = A_7^5$

$\Rightarrow$ Vậy xác suất 5 người lên 5 toa khác nhau là $P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{A_7^5}{7^5} = \frac{360}{2401}$.

④ A và B cùng lên 1 toa 4, mỗi người còn lại lên một toa khác nhau (không nhất thiết khác toa 4).

♦ Gọi D là biến cố “ A và B cùng lên toa 4, mỗi người còn lại lên 1 toa khác nhau”.
 A và B cùng lên toa 4 có 1 cách lên.

♦ Ba người còn lại lên 7 toa khác nhau có A_7^3 cách lên.

♦ Suy ra theo quy tắc nhân, có $1 \cdot A_7^3 = 210$ cách lên toa $\Rightarrow |D| = 210$

$\Rightarrow$ Vậy xác suất thỏa mãn đề bài là $P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{210}{7^5} = \frac{30}{2401}$.

⑤ A và B cùng lên 1 toa, mỗi người còn lại lên một toa khác nhau (không nhất thiết khác toa chứa A và B).





- ♦ Gọi E là biến cố “ A và B cùng lên 1 toa, mỗi người còn lại lên một toa khác nhau (không nhất thiết khác toa chứa A và B)”
- ♦ A và B cùng lên 1 toa trong 7 toa có 7 cách lên.
- ♦ Ba người còn lại lên 7 toa khác nhau có $A_7^3 = 210$ cách lên.
- ♦ Theo quy tắc nhân, có $7.210 = 1470$ cách lên $\Rightarrow |E| = 1470$.

$$\Rightarrow \text{Vậy xác suất thỏa mãn đề bài là } P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{1470}{7^5} = \frac{30}{343}.$$

⑥ A và B cùng lên 1 toa, mỗi người còn lại lên một toa khác nhau nhưng không lên toa chứa A và B .

- ♦ Gọi F là biến cố “ A và B cùng lên 1 toa, mỗi người còn lại lên một toa khác nhau nhưng không lên toa chứa A và B ”.
- ♦ A và B cùng lên 1 toa trong 7 toa có 7 cách lên.
- ♦ Ba người còn lại lên 6 toa khác nhau không chứa A và B có $A_6^3 = 120$ cách lên.
- ♦ Theo quy tắc nhân, có $7.120 = 840$

$$\Rightarrow \text{Vậy xác suất thỏa mãn đề bài là } P(F) = \frac{|F|}{|\Omega|} = \frac{840}{7^5} = \frac{120}{2401}.$$

Bài 18.

Một hộp thuốc có 5 ống thuốc tốt và 3 ống thuốc kém chất lượng. Từ hộp đó rút ngẫu nhiên 2 ống thuốc. Tính xác suất để:

- ① Cả 2 ống thuốc rút ra đều tốt (biến cố A).
- ② Chỉ ống thuốc rút ra lần đầu là tốt.
- ③ Trong 2 ống thuốc rút ra có ít nhất 1 ống thuốc tốt (Biến cố C).

Lời giải

- ♦ Số cách rút 2 ống thuốc từ 8 ống thuốc là $C_8^2 = 28$ (cách),
- $\Rightarrow$ Suy ra không gian mẫu Ω có số phần tử là $|\Omega| = 28$.

① Cả 2 ống thuốc rút ra đều tốt (biến cố A).

- ♦ Gọi A là biến cố “2 ống thuốc rút ra đều tốt” $\Rightarrow |A| = C_5^2 = 10 \rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$.

② Chỉ ống thuốc rút ra lần đầu là tốt.

- ♦ Gọi B là biến cố “Chỉ ống thuốc rút ra lần đầu là tốt”.
- ♦ Rút 2 ống thuốc lần lượt từ 8 ống thuốc số cách rút ra là $8.7 = 56$ cách
- $\Rightarrow$ Không gian mẫu Ω_1 có số phần tử là $|\Omega_1| = 56$.
- ♦ Lần 1 được ống thuốc tốt có 5 cách rút.
- ♦ Lần 2 được ống thuốc kém chất lượng có 3 cách rút.
- $\Rightarrow$ Theo quy tắc nhân, có $5.3 = 15$ cách rút thỏa mãn đề bài $\Rightarrow |B| = 15$.





⇒ Xác suất cần tìm là $P(B) = \frac{15}{56}$.

③ Trong 2 ống thuốc rút ra có ít nhất 1 ống thuốc tốt (Biến cố C).

- ♦ Gọi C là biến cố “2 ống thuốc rút ra có ít nhất 1 ống thuốc tốt”
- ♦ Khi đó $\bar{C}$ là biến cố “2 ống thuốc rút ra không có ống thuốc nào tốt” hay “2 ống thuốc rút ra đều kém chất lượng” $\Rightarrow |\bar{C}| = C_3^2 = 3$.

⇒ Xác suất cần tìm là $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{|\bar{C}|}{|\Omega|} = 1 - \frac{3}{28} = \frac{25}{28}$.

Bài 19.

Cho bát giác đều nội tiếp trong một đường tròn. Chọn ngẫu nhiên 2 đỉnh. Tính xác suất để 2 đỉnh đó nối thành đường chéo có độ dài bé nhất.

Lời giải

- ♦ Chọn ngẫu nhiên 2 đỉnh từ 8 đỉnh có số cách chọn là $C_8^2 = 28$
- ⇒ Không gian mẫu Ω có số phần tử là $|\Omega| = 28$.
- ♦ Gọi A là biến cố “2 đỉnh đó nối thành đường chéo có độ dài bé nhất”.
- ♦ Đánh số các đỉnh của bát giác là $A_1, A_2, \dots, A_8$.
- ♦ Đỉnh A_1 nối với các đỉnh A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 thì sẽ được đường chéo, trong đó có 2 đường chéo A_1A_3 và A_1A_7 bằng nhau và bé nhất.
- ⇒ Do đó bát giác đó có $\frac{8 \cdot 2}{2} = 8$ đường chéo có độ dài bé nhất.
- ⇒ Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}$.

Bài 20.

Có 3 hộp mỗi hộp chứa 5 tấm thẻ, đánh số từ 1 đến 5. Rút ngẫu nhiên từ mỗi hộp một tấm thẻ. Tính xác suất để:

- ① Tổng các số ghi trên ba tấm thẻ rút ra không nhỏ hơn 4.
- ② Tổng các số ghi trên ba tấm thẻ rút ra bằng 8.

Lời giải

- ♦ Số cách rút ra 3 tấm thẻ thỏa mãn đề bài là $C_5^1 \cdot C_5^1 \cdot C_5^1 = 125$,
- ⇒ Suy ra không gian mẫu Ω có số phần tử là $|\Omega| = 125$.

① Tổng các số ghi trên ba tấm thẻ rút ra không nhỏ hơn 4.

- ♦ Gọi A là biến cố “Tổng các số ghi trên ba tấm thẻ rút ra không nhỏ hơn 4”
- ♦ Suy ra $\bar{A}$ là biến cố “Tổng các số ghi trên ba tấm thẻ rút ra nhỏ hơn 4”
Tức là “tổng các số ghi trên ba tấm thẻ rút ra bằng 3”
Hay “Rút ra được cả ba tấm thẻ đều ghi số 1”.





♦ Khi đó chỉ có 1 cách rút $\Rightarrow |\overline{A}| = 1$.

$\Rightarrow$ Xác suất cần tìm là $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{125} = \frac{124}{125}$.

② Tổng các số ghi trên ba tấm thẻ rút ra bằng 8.

♦ Gọi B là biến cố "Tổng các số ghi trên ba tấm thẻ rút ra bằng 8"

♦ Ký hiệu $(a; b; c)$ là tấm thẻ ghi số a, b, c được rút ra từ hộp thứ nhất, thứ hai và thứ ba tương ứng.

♦ Có các trường hợp sau thuận lợi xảy ra B là

$+(1; 2; 5)$ và $3! = 6$ hoán vị.

$+(1; 3; 4)$ và $3! = 6$ hoán vị.

$+(2; 2; 4)$ và $\frac{3!}{2!} = 3$ hoán vị.

$+(2; 3; 3)$ và $\frac{3!}{2!} = 3$ hoán vị.

$\Rightarrow$ Theo quy tắc cộng, biến cố B có $|B| = 6 + 6 + 3 + 3 = 18$.

$\Rightarrow$ Vậy xác suất cần tìm là $P(B) = \frac{18}{125}$.

VII. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1. Một bình đựng 5 quả cầu xanh khác nhau, 4 quả cầu đỏ khác nhau và 3 quả cầu vàng khác nhau. Chọn ngẫu nhiên 3 quả cầu trong quả cầu trên. Xác suất để chọn được 3 quả cầu khác màu là

A. $\frac{3}{5}$.

B. $\frac{3}{7}$.

C. $\frac{3}{14}$.

D. $\frac{3}{11}$.

Lời giải

Chọn D

♦ Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{12}^3 = 220$.

♦ Gọi A là biến cố: "Ba quả cầu được chọn là khác màu". Ta có: $n(A) = C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 60$.

♦ Vậy $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$.

Câu 2. Chọn ngẫu nhiên lần lượt hai số nguyên dương bé hơn 100. Tính xác suất để hiệu hai số vừa được chọn là một số lẻ.

A. $\frac{49}{99}$.

B. $\frac{25}{33}$.

C. $\frac{50}{99}$.

D. $\frac{8}{33}$.

Lời giải

Chọn C

Có 99 số nguyên dương bé hơn 100 nên khi chọn ngẫu nhiên hai số trong 99 số đó có: $C_{99}^2 = 4851$ cách chọn.





Để chọn được hai số trong 99 số nói trên mà hiệu của nó là một số lẻ thì ta cần chọn 1 số chẵn (trong 49 số chẵn) và 1 số lẻ (trong 50 số lẻ), suy ra có: $C_{49}^1 \cdot C_{50}^1 = 2450$ cách chọn.

Vậy xác suất cần tìm là: $\frac{2450}{4851} = \frac{50}{99}$.

Câu 3. Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối và đồng chất 3 lần. Xác suất để tích số chấm 3 lần gieo là lẻ bằng

- A. $\frac{1}{8}$. B. $\frac{5}{8}$. C. $\frac{3}{8}$. D. $\frac{7}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu của biến cố là 6^3 . Để tích số chấm 3 lần gieo là số lẻ thì mỗi lần gieo thu được số chấm lẻ, khi đó số khả năng thuận lợi là $3.3.3 = 27$.

Xác suất cần tính là $P(A) = \frac{27}{6^3} = \frac{1}{8}$.

Câu 4. Chi đoàn lớp 12A có 20 đoàn viên trong đó có 12 đoàn viên nam và 8 đoàn viên nữ. Tính xác suất khi chọn 3 đoàn viên có ít nhất 1 đoàn viên nữ.

- A. $\frac{46}{57}$. B. $\frac{251}{285}$. C. $\frac{11}{7}$. D. $\frac{110}{570}$.

Lời giải

Chọn A

Số phần tử của không gian mẫu: $C_{20}^3 = 1140$

Gọi A là biến cố chọn được ít nhất 1 đoàn viên nữ

Gọi $\bar{A}$ là biến cố chọn được 3 đoàn viên là nam: $C_{12}^3 = 220$

$$\Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{220}{1140} = \frac{11}{57}$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - \frac{11}{57} = \frac{46}{57}$$

Câu 5. Chọn ngẫu nhiên 2 viên bi từ một hộp gồm 5 viên bi đen và 4 viên bi trắng. Xác suất để 2 bi được chọn cùng màu là

- A. $\frac{4}{9}$. B. $\frac{5}{9}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{1}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Xét phép thử: "Chọn ngẫu nhiên 2 viên bi từ một hộp gồm 5 viên bi đen và 4 viên bi trắng"

$$\Rightarrow n(\Omega) = C_9^2.$$

Gọi biến cố A : "2 viên bi được chọn cùng màu"

TH1: 2 viên bi được chọn cùng màu đen $\Rightarrow$ có C_5^2 (cách chọn)

TH2: 2 viên bi được chọn cùng màu trắng $\Rightarrow$ có C_4^2 (cách chọn)

$$\Rightarrow n(A) = C_5^2 + C_4^2.$$





$$\text{Vậy } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_5^2 + C_4^2}{C_9^2} = \frac{4}{9}.$$

Câu 6. Cho hai đường thẳng song song d_1, d_2 . Trên d_1 có 6 điểm phân biệt được tô màu đỏ, trên d_2 có 4 điểm phân biệt được tô màu xanh. Xét tất cả các tam giác được tạo thành khi nối các điểm đó với nhau. Chọn ngẫu nhiên một tam giác, khi đó xác suất để thu được tam giác có hai đỉnh màu đỏ là

- A. $\frac{2}{9}$. B. $\frac{5}{9}$. C. $\frac{5}{8}$. D. $\frac{3}{8}$.

Lời giải

Chọn C

Số các tam giác tất cả: $n(\Omega) = C_6^2 \cdot 4 + 6 \cdot C_4^2 = 96$.

Để tam giác có hai đỉnh màu đỏ thì phải chọn 2 đỉnh trên d_1 , số tam giác có hai đỉnh màu đỏ: $C_6^2 \cdot 4 = 60$.

Vậy xác suất cần tìm là $P = \frac{60}{96} = \frac{5}{8}$.

Câu 7. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ $\frac{3367}{4096}$ số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tích là một số lẻ bằng

- A. 6. B. $\{1, 2, 3, 4\}$. C. $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^6$. D. $n(\Omega) = 4^6$.

Lời giải

Chọn A

♦ Ta có A .

♦ Trong 1 số nguyên dương đầu tiên có $\overline{A}$ số lẻ và 1 số chẵn.

Gọi $n(\overline{A}) = 3^6$ là biến cố chọn được hai số có tích là 1 số lẻ.

Để tích của hai số được chọn là một số lẻ thì cả hai số được chọn đều phải là số lẻ. Chọn

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = 1 - \frac{3^6}{4^6} = \frac{3367}{4096} \text{ số}$$

lẻ trong 30 số lẻ thì số cách chọn sẽ là 1 30 10.

♦ Vậy $\frac{48}{145}$.

Câu 8. Một tổ có 7 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 người. Xác suất sao cho 2 người được chọn đều là nữ bằng

- A. $C_3^1 \cdot C_{27}^1$. B. 5. C. $\{5; 15; 25\}$. D. 10.

Lời giải

Chọn B

♦ Số phần tử của không gian mẫu là: $C_3^1 \cdot C_{13}^1$.

♦ Gọi 10 là biến cố: "Cả hai người được chọn đều là nữ".





♦ Ta có $p(A) = \frac{C_3^1 \cdot C_{27}^1 + C_3^1 \cdot C_{13}^1}{C_{30}^2} = \frac{8}{29}$.

♦ Xác suất của biến cố A là $\frac{8}{29}$.

Câu 9. Chọn ngẫu nhiên hai học sinh trong một nhóm gồm $\Rightarrow$ học sinh nam và $4.A_3^2.A_3^3$ học sinh nữ. Xác suất để chọn được hai học sinh nữ bằng

A. $n(A) = 2.A_4^2.A_3^3 + 4.A_3^2.A_3^3$.

B. $P(A) = \frac{2.A_4^2.A_3^3 + 4.A_3^2.A_3^3}{6!} = \frac{2}{5}$.

C. $\frac{7}{15}$.

D. $\frac{13}{30}$.

Lời giải

Chọn D

Không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{21}^2$.

Gọi A là biến cố để hai học sinh được chọn là học sinh nữ.

Số phần tử của biến cố là $n(A) = C_{14}^2$.

Xác suất để chọn được hai học sinh nữ bằng $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_{14}^2}{C_{21}^2} = \frac{13}{30}$.

Câu 10. Một hộp đựng 15 viên bi, trong đó có 7 viên bi xanh và 8 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi (không kể thứ tự) ra khỏi hộp. Tính xác suất để trong 3 viên bi lấy ra có ít nhất 1 viên màu đỏ.

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{418}{455}$.

C. $\frac{1}{13}$.

D. $\frac{12}{13}$.

Lời giải

Chọn D

Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi từ 15 viên bi thì số cách chọn là $C_{15}^3 = 455$.

Gọi A là biến cố "trong 3 viên bi lấy ra có ít nhất một viên màu đỏ" thì là biến cố $\bar{A}$ "cả ba viên bi lấy ra đều không có màu đỏ" (tức là lấy ra cả ba viên bi đều màu xanh)

Số cách chọn ra 3 viên bi mà 3 viên bi đó đều màu xanh là $C_7^3 = 35 \Rightarrow n(\bar{A}) = 35$

$\Rightarrow$ Số cách chọn ra 3 viên bi mà trong đó có ít nhất một viên bi màu đỏ là $455 - 35 = 420$
cách $\Rightarrow n(A) = 420$

$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{420}{455} = \frac{12}{13}$

Câu 11. Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên hai thẻ và nhân hai số trên hai thẻ lại với nhau. Tính xác suất để kết quả thu được là một số chẵn.

A. $\frac{5}{18}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{8}{9}$.

D. $\frac{13}{18}$.

Lời giải

Chọn D

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_9^2 = 36$.





Gọi A là biến cố “tích hai số ghi trên thẻ là số chẵn”, suy ra $\bar{A}$ là biến cố “tích hai số ghi trên thẻ là số lẻ” $\Rightarrow n(\bar{A}) = C_5^2 = 10$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{13}{18}$.

Câu 12. Gieo 5 đồng xu cân đối, đồng chất. Xác suất để được ít nhất 1 đồng xu lật sấp bằng

- A. $\frac{5}{11}$. B. $\frac{8}{11}$. C. $\frac{31}{32}$. D. $\frac{1}{32}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi A là biến cố: “Trong 5 đồng xu có ít nhất 1 đồng xu lật sấp”

Khi đó $\bar{A}$ là biến cố: “5 đồng xu đều lật ngửa”

Vậy $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{31}{32}$.

Câu 13. Bạn A có 7 cái kẹo vị hoa quả và 6 cái kẹo vị socola. A lấy ngẫu nhiên 5 cái kẹo cho vào hộp để tặng cho em gái. Tính xác suất để 5 cái kẹo có cả vị hoa quả và vị socola.

- A. $P = \frac{140}{143}$. B. $P = \frac{79}{156}$. C. $P = \frac{103}{117}$. D. $P = \frac{14}{117}$.

Lời giải

Chọn A

Chọn 5 cái kẹo trong 13 cái kẹo nên $n(\Omega) = C_{13}^5$.

Đặt A là biến cố “chọn được 5 cái kẹo có đủ hai vị”.

Suy ra $\bar{A}$ là biến cố “chọn 5 cái kẹo chỉ có một vị” $\Rightarrow n(\bar{A}) = C_7^5 + C_6^5$.

Vậy $P(A) = 1 - \frac{C_7^5 + C_6^5}{C_{13}^5} = \frac{140}{143}$

Câu 14. Một hộp đèn có 12 bóng, trong đó có 4 bóng hỏng. Lấy ngẫu nhiên 3 bóng. Tính xác suất để trong 3 bóng có ít nhất 1 bóng hỏng.

- A. $\frac{40}{51}$. B. $\frac{55}{112}$. C. $\frac{41}{55}$. D. $\frac{3}{7}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi B là biến cố “Trong 3 bóng lấy ra đều là bóng tốt”.

Ta có: $n(\Omega_B) = C_8^3 = \frac{8!}{3!.5!} = 56$

Gọi C là biến cố “Trong 3 bóng lấy ra có ít nhất 1 bóng hỏng”

khi đó $C = \bar{B}$.

$P(C) = P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{56}{220} = \frac{41}{55}$

Câu 15. Trên giá sách có 4 quyển sách toán, 3 quyển sách lý, 2 quyển sách hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất để 3 quyển được lấy ra có ít nhất một quyển là toán.





A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{37}{42}$.

C. $\frac{10}{21}$.

D. $\frac{2}{7}$.

Lời giải

Chọn B

Trên giá có tất cả: $4+3+2=9$ (quyển sách) bao gồm cả 3 môn: toán, lý và hóa.

Lấy 3 quyển sách từ 9 quyển sách, số cách lấy ra là $C_9^3 = 84 \Rightarrow n(\Omega) = 84$

Gọi A là biến cố: "3 quyển lấy ra có ít nhất 1 quyển toán".

Suy ra $\bar{A}$: "3 quyển lấy ra không có quyển toán nào" $\Rightarrow n(\bar{A}) = C_5^3 = 10$.

Vậy xác suất để 3 quyển được lấy ra có ít nhất một quyển sách toán là:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{10}{84} = \frac{37}{42}.$$

Câu 16. Trên giá sách có 4 quyển sách Toán, 3 quyển sách Vật Lí và 2 quyển sách Hóa học. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất sao cho ba quyển lấy ra có ít nhất một quyển sách Toán.

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{37}{42}$.

C. $\frac{5}{6}$.

D. $\frac{19}{21}$.

Lời giải

Chọn B

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = C_9^3 = 84$.

Gọi A là biến cố sao cho ba quyển lấy ra có ít nhất một quyển sách Toán

$\Rightarrow \bar{A}$ là biến cố sao cho ba quyển lấy ra không có sách Toán $\Rightarrow n(\bar{A}) = C_5^3 = 10$.

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{10}{84} = \frac{37}{42}.$$

Câu 17. Trên giá sách có 4 quyển sách toán, 3 quyển sách lý, 2 quyển sách hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất để trong ba quyển sách lấy ra có ít nhất một quyển là toán.

A. $\frac{2}{7}$.

B. $\frac{3}{4}$.

C. $\frac{37}{42}$.

D. $\frac{10}{21}$.

Lời giải

Chọn C

Số kết quả có thể khi chọn bất kì 3 quyển sách trong 9 quyển sách là $C_9^3 = 84$.

Gọi A là biến cố 'Lấy được ít nhất 1 sách toán trong 3 quyển sách.'

$\bar{A}$ là biến cố 'Không lấy được sách toán trong 3 quyển sách.'

$$\text{Ta có xác suất để xảy ra } A \text{ là } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_5^3}{84} = \frac{37}{42}.$$

Câu 18. Một lớp có 20 nam sinh và 15 nữ sinh. Giáo viên chọn ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được chọn có cả nam và nữ.

A. $\frac{4615}{5236}$.

B. $\frac{4651}{5236}$.

C. $\frac{4615}{5263}$.

D. $\frac{4610}{5236}$.

Lời giải

Chọn A





Số cách chọn 4 học sinh lên bảng: $n(\Omega) = C_{35}^4$.

Số cách chọn 4 học sinh chỉ có nam hoặc chỉ có nữ: $C_{20}^4 + C_{15}^4$.

Xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ: $1 - \frac{C_{20}^4 + C_{15}^4}{C_{35}^4} = \frac{4615}{5236}$

Câu 19. Một hộp chứa 35 quả cầu gồm 20 quả màu đỏ được đánh số từ 1 đến 20 và 15 quả màu xanh được đánh số từ 1 đến 15. Lấy ngẫu nhiên từ hộp đó một quả cầu. Tính xác suất để lấy được quả màu đỏ hoặc ghi số lẻ.

- A. $\frac{28}{35}$. B. $\frac{4}{7}$. C. $\frac{5}{7}$. D. $\frac{27}{35}$.

Lời giải

Chọn A

Chọn ngẫu nhiên 1 quả cầu có $C_{35}^1 = 35$ cách. Suy ra $n(\Omega) = 35$.

Gọi E là biến cố "Chọn được một quả cầu đỏ hoặc ghi số lẻ" thì $\bar{E}$ là biến cố "Chọn được một quả cầu xanh ghi số chẵn".

Do đó $n(\bar{E}) = 7$.

Suy ra $p(E) = 1 - p(\bar{E}) = 1 - \frac{7}{35} = \frac{28}{35}$.

Câu 20. Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần. Tính xác suất xảy ra của biến cố "Tích hai số nhận được sau hai lần gieo là một số chẵn".

- A. 0,75. B. 0,5. C. 0,25. D. 0,85.

Lời giải

Chọn A

Lần gieo thứ nhất có 6 kết quả, lần gieo thứ hai có 6 kết quả.

Do đó không gian mẫu $n(\Omega) = 36$.

Gọi A là biến cố "tích hai số nhận được sau hai lần gieo là một số chẵn" thì $\bar{A}$ là biến cố "tích hai số nhận được sau hai lần gieo là một số lẻ". Ta có $n(\bar{A}) = 3 \cdot 3 = 9$.

Xác suất cần tìm $p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{9}{36} = \frac{3}{4}$.

Câu 21. Một hộp đựng 9 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Hỏi phải rút ít nhất bao nhiêu thẻ để xác suất "có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 4" phải lớn hơn $\frac{5}{6}$.

- A. 7. B. 6. C. 5. D. 4.

Lời giải

Chọn B

Giả sử rút x ($1 \leq x \leq 9; x \in \mathbb{N}$) thẻ, số cách chọn x thẻ từ 9 thẻ trong hộp là $C_9^x \Rightarrow n(\Omega) = C_9^x$.

Gọi A là biến cố: "Trong số x thẻ rút ra, có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 4"

$\Rightarrow n(\bar{A}) = C_7^x$. Ta có $P(\bar{A}) = \frac{C_7^x}{C_9^x} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{C_7^x}{C_9^x}$.





Do đó $P(A) > \frac{5}{6} \Leftrightarrow 1 - \frac{C_7^x}{C_9^x} > \frac{5}{6} \Leftrightarrow x^2 - 17x + 60 < 0 \Rightarrow 5 < x < 12 \Rightarrow 6 \leq x \leq 7$.

Vậy số thẻ ít nhất phải rút là 6.

Câu 22. Một nhóm gồm 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 học sinh trong nhóm đó. Xác suất để trong 3 học sinh được chọn luôn có học sinh nữ bằng

A. $\frac{5}{6}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{1}{6}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = C_{10}^3 = 120$.

Gọi A là biến cố sao cho 3 học sinh được chọn có học sinh nữ,

$\Rightarrow \bar{A}$ là biến cố sao cho 3 học sinh được chọn không có học sinh nữ $\Rightarrow n(\bar{A}) = C_6^3 = 20$.

Vậy xác suất cần tìm $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{5}{6}$.

Câu 23. Một lô hàng gồm 30 sản phẩm trong đó có 20 sản phẩm tốt và 10 sản phẩm xấu. Lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm trong lô hàng. Tính xác suất để 3 sản phẩm lấy ra có ít nhất một sản phẩm tốt.

A. $\frac{6}{203}$.

B. $\frac{197}{203}$.

C. $\frac{153}{203}$.

D. $\frac{57}{203}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $n(\Omega) = C_{30}^3 = 4060$

Gọi A là biến cố 3 sản phẩm lấy ra có ít nhất một sản phẩm tốt.

Ta có $\bar{A}$ là biến cố 3 sản phẩm lấy ra không có sản phẩm tốt, hay 3 sản phẩm lấy ra đều là sản phẩm xấu.

$n(\bar{A}) = C_{10}^3 = 120$.

Suy ra $P(\bar{A}) = \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{120}{4060} = \frac{6}{203}$.

Vậy $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{6}{203} = \frac{197}{203}$.

Câu 24. Một nhóm gồm 10 học sinh trong đó có 7 học sinh nam và 3 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh từ nhóm 10 học sinh đi lao động. Tính xác suất để 3 học sinh được ó ít nhất một học sinh nữ?

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{17}{48}$.

C. $\frac{17}{24}$.

D. $\frac{4}{9}$.

Lời giải

Chọn C

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{10}^3$.





Gọi A là biến cố: “3 học sinh được ó ít nhất một học sinh nữ”.

Suy ra: $\bar{A}$ là biến cố: “3 học sinh được chọn không có học sinh nữ”.

Khi đó $n(\bar{A}) = C_7^3 \Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{24}$. Vậy $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{17}{24}$.

Câu 25. Một tổ học sinh có 7 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 người. Tính xác suất sao cho 2 người được ó ít nhất một người nữ là:

- A. $\frac{2}{15}$. B. $\frac{7}{15}$. C. $\frac{8}{15}$. D. $\frac{1}{15}$.

Lời giải

Chọn C

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{10}^2$.

Gọi biến cố A : “Hai người được ó ít nhất một người nữ”.

$\Rightarrow \bar{A}$: “Hai người được chọn không có nữ” $\Rightarrow n(\bar{A}) = C_7^2$.

Vậy xác suất cần tìm là: $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = 1 - \frac{C_7^2}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}$.

Câu 26. Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. Chọn ngẫu nhiên ba số từ A . Tìm xác suất để trong ba số chọn ra không có hai số nào là hai số nguyên liên tiếp.

- A. $P = \frac{7}{90}$. B. $P = \frac{7}{24}$. C. $P = \frac{7}{10}$. D. $P = \frac{7}{15}$.

Lời giải

Chọn D

Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{10}^3 = 120$.

Gọi B là biến cố “Ba số chọn ra không có hai số nào là hai số nguyên liên tiếp”.

$\Rightarrow \bar{B}$ là biến cố “Ba số được chọn có ít nhất hai số là các số tự nhiên liên tiếp”.

+ Bộ ba số dạng $(1, 2, a_1)$, với $a_1 \in A \setminus \{1, 2\}$: có 8 bộ ba số.

+ Bộ ba số có dạng $(2, 3, a_2)$, với $a_2 \in A \setminus \{1, 2, 3\}$: có 7 bộ ba số.

+ Tương tự mỗi bộ ba số dạng $(3, 4, a_3)$, $(4, 5, a_4)$, $(5, 6, a_5)$, $(6, 7, a_6)$, $(7, 8, a_7)$, $(8, 9, a_8)$, $(9, 10, a_9)$ đều có 7 bộ.

$\Rightarrow n(\bar{B}) = 8 + 8 \cdot 7 = 64$.

$\Rightarrow P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{64}{120} = \frac{7}{15}$.

Câu 27. Một hộp chứa 20 viên bi xanh và 15 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 4 bi. Tính xác suất để 4 bi lấy được có đủ hai màu.

- A. $\frac{4610}{5236}$. B. $\frac{4615}{5236}$. C. $\frac{4651}{5236}$. D. $\frac{4615}{5236}$.

Lời giải

Chọn B





Số phần tử không gian mẫu là $|\Omega| = C_{35}^4 = 5236$.

Số phần tử của biến cố lấy được 4 bi màu xanh là C_{20}^4 .

Số phần tử của biến cố lấy được 4 bi màu đỏ là C_{15}^4 .

Suy ra xác suất của biến cố 4 bi lấy được có đủ hai màu là $p = 1 - \frac{C_{20}^4 + C_{15}^4}{5236} = \frac{4615}{5236}$.

Câu 28. Hai xạ thủ cùng bắn mỗi người một viên đạn vào bia một cách độc lập với nhau. Xác suất bắn trúng bia của hai xạ thủ lần lượt là $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{3}$. Tính xác suất của biến cố có ít nhất một xạ thủ không bắn trúng bia.

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{5}{6}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi A là biến cố: “có ít nhất một xạ thủ không bắn trúng bia”.

Khi đó $\bar{A}$ là biến cố: “cả hai xạ thủ đều bắn trúng bia”.

$$P(\bar{A}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Câu 29. Một người bỏ ngẫu nhiên ba lá thư vào ba chiếc phong bì đã ghi địa chỉ. Xác suất để có ít nhất một lá thư được bỏ đúng phong bì là

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{5}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Số phần tử không gian mẫu là: $n(\Omega) = 3! = 6$.

Gọi A là biến cố “Có ít nhất một lá thư được bỏ đúng phong bì”.

Ta xét các trường hợp sau:

Nếu lá thư nhất bỏ đúng phong bì, hai lá còn lại để sai thì có duy nhất 1 cách.

Nếu lá thư hai bỏ đúng phong bì, hai lá còn lại để sai thì có duy nhất 1 cách.

Nếu lá thư ba bỏ đúng phong bì, hai lá còn lại để sai thì có duy nhất 1 cách.

Không thể có trường hợp hai lá thư bỏ đúng và một lá thư bỏ sai.

Cả ba lá thư đều được bỏ đúng có duy nhất 1 cách.

$$\Rightarrow n(A) = 4$$

$$\text{Vậy xác suất để có ít nhất một lá thư được bỏ đúng phong bì là: } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Cách 2:

Gọi B là biến cố “Không có lá thư nào được bỏ đúng phong bì”.

$$\Rightarrow n(B) = 2 \Rightarrow P(A) = 1 - P(B) = 1 - \frac{n(B)}{n(\Omega)} = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}.$$





Câu 30. Có 9 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 9. Chọn ngẫu nhiên ra hai tấm thẻ. Tính xác suất để tích của hai số trên hai tấm thẻ là một số chẵn.

- A. $\frac{13}{18}$. B. $\frac{55}{56}$. C. $\frac{5}{28}$. D. $\frac{1}{56}$.

Lời giải

Chọn A

Chọn ngẫu nhiên ra hai tấm thẻ từ 9 tấm thẻ nên số phần tử của không gian mẫu là:
 $n(\Omega) = C_9^2 = 36$.

Gọi A là biến cố: “Tích hai số trên hai tấm thẻ là một số chẵn”, khi đó ta có:

$$\bar{A}: \text{“Tích hai số trên hai tấm thẻ là một số lẻ”}, n(\bar{A}) = C_5^2 = 10 \Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

$$\text{Xác suất cần tìm là: } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}.$$

Câu 31. Chi đoàn lớp 12A có 20 đoàn viên trong đó có 12 đoàn viên nam và 8 đoàn viên nữ. Tính xác suất khi chọn 3 đoàn viên có ít nhất 1 đoàn viên nữ.

- A. $\frac{11}{7}$. B. $\frac{110}{570}$. C. $\frac{46}{57}$. D. $\frac{251}{285}$.

Lời giải

Chọn C

Số phần tử của không gian mẫu: $C_{20}^3 = 1140$.

Gọi A là biến cố chọn được 3 đoàn viên là nam: $C_{12}^3 = 220$.

$$\text{Xác suất của biến cố } A \text{ là: } P(A) = \frac{220}{1140} = \frac{11}{57}.$$

$$\text{Vậy xác suất cần tìm là: } 1 - \frac{11}{57} = \frac{46}{57}.$$

Câu 32. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh trong một lớp học gồm 25 nam và 20 nữ. Gọi A là biến cố “Trong 5 học sinh được ó ít nhất 1 học sinh nữ”. Xác suất của biến cố A là

- A. $P(A) = \frac{C_{20}^5}{C_{45}^5}$. B. $P(A) = \frac{20C_{25}^4}{C_{45}^5}$. C. $P(A) = \frac{20C_{44}^4}{C_{45}^5}$. D. $P(A) = 1 - \frac{C_{25}^5}{C_{45}^5}$.

Lời giải

Chọn D

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = C_{45}^5$.

A là biến cố “Trong 5 học sinh được ó ít nhất 1 học sinh nữ”

$\Rightarrow \bar{A}$ là biến cố “Trong 5 học sinh được chọn không học sinh nữ”

$$\Rightarrow n(\bar{A}) = C_{25}^5 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = 1 - \frac{C_{25}^5}{C_{45}^5}.$$

Câu 33. Một hộp đựng 10 viên bi có kích thước khá nhau, trong đó có 7 viên bi màu đỏ và 3 viên bi màu xanh. Chọn ngẫu nhiên 2 viên. Xác suất để 2 viên bi được ó ít nhất một viên bi màu xanh bằng





A. $\frac{1}{15}$.

B. $\frac{2}{15}$.

C. $\frac{7}{15}$.

D. $\frac{8}{15}$.

Lời giải

Chọn D

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{10}^2 = 45$.

Gọi A : "2 viên bi được ó ít nhất một viên bi màu xanh".

$\Rightarrow \bar{A}$: "2 viên bi được ó màu đỏ".

Ta có $n(\bar{A}) = C_7^2 = 21 \Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$.

Vậy xác suất để 2 viên bi được ó ít nhất một viên bi màu xanh là

$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$.

Câu 34. Một hộp đựng 9 quả cầu xanh và 5 quả cầu trắng (các quả cầu khác nhau về kích thước). Lấy ngẫu nhiên 3 quả cầu. Xác suất để được 3 quả cầu có đủ hai loại cầu xanh và cầu trắng là

A. $\frac{135}{182}$.

B. $\frac{14}{182}$.

C. $\frac{47}{182}$.

D. $\frac{113}{182}$.

Lời giải

Chọn A

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{14}^3$.

Gọi A là biến cố lấy được 3 quả cầu có đủ hai loại cầu xanh và cầu trắng.

Xác suất lấy được 3 quả cầu chỉ có màu xanh hoặc màu trắng là $\frac{C_5^3 + C_9^3}{C_{14}^3}$.

Do đó xác suất cần tìm $P(A) = 1 - \frac{C_5^3 + C_9^3}{C_{14}^3} = \frac{135}{182}$.

Câu 35. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 6 chữ số và các chữ số thuộc tập hợp $\{1, 2, 3, 4\}$. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S , xác suất để số đó có mặt số 1 ít nhất một lần bằng

A. $\frac{729}{2048}$.

B. $\frac{5}{6}$.

C. $\frac{91}{1024}$.

D. $\frac{3367}{4096}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có số các số tự nhiên có 6 chữ số và các chữ số thuộc tập hợp $\{1, 2, 3, 4\}$ là

$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^6$, suy ra $n(\Omega) = 4^6$.

Gọi A là biến cố: "Số lấy được có mặt số 1 ít nhất một lần".

Suy ra $\bar{A}$ là biến cố: "Số lấy được không có mặt số 1".

Khi đó $n(\bar{A}) = 3^6$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = 1 - \frac{3^6}{4^6} = \frac{3367}{4096}$.





Câu 36. Có 30 quả cầu được đánh số từ 1 đến 30. Lấy ngẫu nhiên đồng thời hai quả cầu rồi nhân các số trên hai quả với nhau. Tính xác suất để tích nhận được là một số chia hết cho 10?

- A. $\frac{48}{145}$. B. $\frac{8}{29}$. C. $\frac{16}{29}$. D. $\frac{16}{145}$.

Lời giải

Chọn B

♦ Phép thử: Lấy hai quả cầu từ 30 quả cầu $\Rightarrow |\Omega| = C_{30}^2$

♦ Biến cố A: Tích các số ghi trên hai quả cầu là một số chia hết cho 10

Trường hợp 1: Số cách chọn sao cho có một số chia hết cho 10, ta có $C_3^1 \cdot C_{27}^1$ cách chọn

Trường hợp 2: Số cách chọn sao cho có một số chia hết cho 5 từ tập $\{5; 15; 25\}$ và số còn lại là một số chẵn (không có số nào được chọn chia hết cho 10), ta có $C_3^1 \cdot C_{13}^1$ cách chọn.

♦ Vậy xác suất để tích nhận được là một số chia hết cho 10 là $p(A) = \frac{C_3^1 \cdot C_{27}^1 + C_3^1 \cdot C_{13}^1}{C_{30}^2} = \frac{8}{29}$

Câu 37. Gọi A là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau được tạo ra từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập hợp A. Xác suất để số lấy được là số tự nhiên không lớn hơn 2503 là

- A. $\frac{5}{18}$. B. $\frac{57}{240}$. C. $\frac{259}{360}$. D. $\frac{101}{360}$.

Lời giải

Chọn D

Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = A_7^4 - A_6^3 = 720$.

Gọi "B là số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau không lớn hơn 2503 là $\overline{abcd}$.

□ Trường hợp 1: $0 \neq a < 2 \Rightarrow a$ có 1 cách chọn và $\overline{bcd}$ có A_6^3 cách chọn.

Do đó, có $1 \cdot A_6^3 = 120$ cách chọn trường hợp 1.

□ Trường hợp 2: $a = 2, 2 \neq b < 5 \Rightarrow b \in \{0, 1, 3, 4\} \Rightarrow b$ có 4 cách chọn và $\overline{cd}$ có A_4^2 cách chọn.

Do đó, có $1 \cdot 4 \cdot A_4^2 = 80$ cách chọn trường hợp 2.

□ Trường hợp 3: $a = 2, b = 5, c = 0, d \leq 3$ và $d \notin \{a, b, c\} \Rightarrow d$ có 2 cách chọn.

Do đó, có 2 cách chọn trường hợp 3.

$\Rightarrow n(A) = 120 + 80 + 2 = 202$.

Vậy $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{202}{720} = \frac{101}{360}$.

Câu 38. Có 5 chiếc ghế được kê thành một hàng ngang. Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh, gồm 3 học sinh lớp A, 2 học sinh lớp B và 1 học sinh lớp C ngồi vào hàng ghế đó sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh. Xác suất để học sinh lớp C không ngồi cạnh học sinh lớp B bằng

- A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{4}{5}$. C. $\frac{2}{15}$. D. $\frac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn D





Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 6!$.

Gọi A là biến cố "học sinh lớp C không ngồi cạnh học sinh lớp B".

Xếp 1 học sinh lớp C vào chỗ, xảy ra 2 trường hợp:

+) TH1: học sinh lớp C ngồi ở một trong 2 đầu, có 2 cách xếp.

Khi đó, có A_4^2 cách xếp 2 học sinh lớp B và A_3^3 cách xếp 3 học sinh lớp A.

$\Rightarrow$ có $2.A_4^2.A_3^3$ cách xếp cho trường hợp 1.

+) TH2: học sinh lớp C không ngồi ở hai đầu, có 4 cách xếp.

Khi đó, có A_3^2 cách xếp 2 học sinh lớp B và A_3^3 cách xếp 3 học sinh lớp A.

$\Rightarrow$ có $4.A_3^2.A_3^3$ cách xếp cho trường hợp 2.

$$n(A) = 2.A_4^2.A_3^3 + 4.A_3^2.A_3^3.$$

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{2.A_4^2.A_3^3 + 4.A_3^2.A_3^3}{6!} = \frac{2}{5}.$$

Câu 39. Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết lên bảng một số tự nhiên thuộc $[1;17]$. Xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 bằng

A. $\frac{3276}{4913}$.

B. $\frac{1728}{4913}$.

C. $\frac{23}{68}$.

D. $\frac{1637}{4913}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $n(\Omega) = 17^3 = 4913$.

Trong các số tự nhiên thuộc $[1;17]$ có 5 số chia hết cho 3 là $\{3;6;9;12;15\}$, có 6 số chia 3 dư 1 là $\{1;4;7;10;13;16\}$ có 6 số chia 3 dư 2 là $\{2;5;8;11;14;17\}$.

Để 3 số tổng viết ra chia hết cho 3 xảy ra các trường hợp sau:

TH1: Cả 3 số viết ra đều chia hết cho 3 $\Rightarrow 5^3$ cách viết.

TH2: Cả 3 số viết ra đều chia cho 3 dư 1 $\Rightarrow 6^3$ cách viết.

TH3: Cả 3 số viết ra đều chia cho 3 dư 2 $\Rightarrow 6^3$ cách viết.

TH4: Trong 3 số viết ra có 1 số chia hết cho 3, có 1 số chia cho 3 dư 1, có 1 số chia cho 3 dư 2 nên có $5.6.6.3!$ cách viết.

$$\text{Vậy xác suất cần tìm là } P = \frac{5^3 + 6^3 + 6^3 + 5.6.6.3!}{4913} = \frac{1637}{4913}.$$

Câu 40. Cho đa giác đều có 30 đỉnh nội tiếp trong đường tròn. Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh trong 30 đỉnh. Tính xác suất để 3 đỉnh tạo thành tam giác có một góc bằng 120° ?

A. $\frac{27}{406}$.

B. $\frac{33}{406}$.

C. $\frac{57}{406}$.

D. $\frac{23}{406}$.

Lời giải

Chọn A

+) Số phần tử của không gian mẫu $|\Omega| = C_{30}^3$.

+) Đánh số đỉnh của đa giác là $A_1, A_2, \dots, A_{30}$.

Gọi tâm hình tròn là O.





Giả sử tam giác $A_1A_nA_m$ đều. Tam giác này chia đường tròn thành 3 cung bằng nhau, trên mỗi cung có 9 đỉnh. Lấy ngẫu nhiên 1 đỉnh trên cung đó cùng với 1 cạnh ta được một tam giác có 1 góc bằng 120° . Số tam giác đều tạo thành từ 30 đỉnh là 10.

Vậy số tam giác có một góc bằng 120° là $|\Omega_A| = 10 \cdot 27 = 270$

$$P(A) = \frac{270}{C_{30}^3} = \frac{27}{406}$$

Câu 41. Trong một trò chơi, người chơi gieo đồng thời 3 con súc sắc đồng chất 5 lần. Nếu mỗi lần gieo xuất hiện ít nhất hai mặt sáu chấm thì thắng. Xác suất để người chơi thắng ít nhất 4 ván gần nhất với số nào dưới đây?

- A. 0,00014. B. 0,0024. C. 0,0014. D. 0,00024.

Lời giải

Chọn C

Gọi biến cố A_i : “Lần gieo thứ i xuất hiện ít nhất hai mặt sáu chấm”.

$$\text{Khi đó ta có } P(A_i) = C_3^2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{27} \Rightarrow P(\overline{A_i}) = \frac{25}{27}$$

Gọi biến cố B : “Người chơi thắng ít nhất 4 ván”.

Khi đó ta có:

$$B = A_1A_2A_3A_4A_5 + A_1A_2A_3A_4\overline{A_5} + A_1A_2A_3\overline{A_4}A_5 + A_1A_2\overline{A_3}A_4A_5 + A_1\overline{A_2}A_3A_4A_5 + \overline{A_1}A_2A_3A_4A_5$$

$$\Rightarrow P(B) = \left(\frac{2}{27}\right)^5 + 5 \cdot \left(\frac{2}{27}\right)^4 \cdot \left(\frac{25}{27}\right) = 0.0014$$

Câu 42. Một đề thi trắc nghiệm gồm 50 câu, mỗi câu có 4 phương án trả lời trong đó chỉ có một phương án đúng, mỗi câu trả lời đúng được 0,2 điểm. Một thí sinh làm hết bài thi bằng cách chọn ngẫu nhiên một trong 4 phương án trả lời ở mỗi câu. Tính xác suất để thí sinh đó được đúng 5 điểm.

- A. $\left(\frac{1}{4}\right)^{25} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{25}$. B. $\left(\frac{1}{4}\right)^{25} \cdot C_{50}^{25}$. C. $\left(\frac{1}{4}\right)^{25} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{25} \cdot A_{50}^{25}$. D. $\left(\frac{1}{4}\right)^{25} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{25} \cdot C_{50}^{25}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có xác suất để có câu trả lời đúng là $\frac{1}{4}$, xác suất để chọn câu trả lời sai $\frac{3}{4}$

Để được 5 điểm học sinh đó phải trả lời đúng 25 và trả lời sai 25

$$\text{Xác suất để học sinh đó được 5 điểm là } \left(\frac{1}{4}\right)^{25} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{25} \cdot C_{50}^{25}$$

Câu 43. Một lớp học có 30 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn một ban cán sự lớp gồm có 3 học sinh. Tính xác suất để ban cán sự lớp có cả nam và nữ.

- A. $\frac{435}{988}$. B. $\frac{135}{988}$. C. $\frac{285}{494}$. D. $\frac{5750}{9880}$.

Lời giải

Chọn C

♦ Ta có $n(\Omega) = C_{40}^3$.





- ♦ Gọi A là biến cố: “3 học sinh trong ban cán sự lớp có cả nam và nữ”
- ♦ $n(A) = C_{30}^1 \cdot C_{10}^2 + C_{30}^2 \cdot C_{10}^1$
- ♦ $P(A) = \frac{C_{30}^1 \cdot C_{10}^2 + C_{30}^2 \cdot C_{10}^1}{C_{40}^3} = \frac{15}{26} = \frac{285}{494}$

Câu 44. Hộp thứ nhất chứa 3 bi đỏ và 4 bi xanh, hộp thứ 2 chứa 2 bi đỏ và 5 bi xanh. Chuyển ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất sang hộp thứ hai, rồi lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp thứ hai ra. Tính xác suất để viên bi được lấy ra ở hộp thứ hai là màu đỏ.

- A. $\frac{3}{7}$ B. $\frac{17}{56}$ C. $\frac{2}{7}$ D. $\frac{9}{56}$

Lời giải

Chọn B

♦**TH1:** Chuyển được 1 một viên bi màu đỏ từ hộp thứ nhất sang hộp thứ hai và lấy ra được ở hộp thứ hai một viên bi màu đỏ với xác suất là $P_1 = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{56}$

♦**TH2:** Chuyển được 1 một viên bi màu xanh từ hộp thứ nhất sang hộp thứ hai và lấy ra được ở hộp thứ hai một viên bi màu đỏ với xác suất là $P_2 = \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{8} = \frac{8}{56}$

Vậy xác suất để viên bi được lấy ra ở hộp thứ hai là màu đỏ là $P = P_1 + P_2 = \frac{17}{56}$

Câu 45. Có 12 cây giống thuộc loại: cam, chanh, quýt, trong đó có 6 cam, 4 chanh, 2 quýt. Tính xác suất chọn ra 6 cây giống để trồng sao cho mỗi loại có ít nhất 1 cây.

- A. $\frac{57}{77}$ B. $\frac{683}{924}$ C. $\frac{49}{66}$ D. $\frac{685}{924}$

Lời giải

Chọn C

Ω : “chọn ra 6 cây giống trong 12 cây giống” $\Rightarrow n(\Omega) = C_{12}^6 = 924$.

A : “chọn ra 6 cây giống sao cho mỗi loại có ít nhất 1 cây”

Số cách chọn 6 cây giống cam, chanh là C_{10}^6 .

Số cách chọn 6 cây giống cam, quýt là C_8^6 .

Số cách chọn 6 cây giống chanh, quýt là C_6^6 .

Số cách chọn 6 cây giống cam là C_6^6 .

Suy ra $n(A) = C_{12}^6 - C_{10}^6 - C_8^6 - C_6^6 + C_6^6 = 686$.

Ta có $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{686}{924} = \frac{49}{66}$.

Câu 46. Một hộp đựng 10 thẻ được đánh số từ 1 đến 10. Phải rút ra ít nhất k thẻ để xác suất có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 4 lớn hơn $\frac{13}{15}$. Giá trị của k bằng:

- A. 9. B. 8. C. 7. D. 6.

Lời giải

Chọn C





Gọi biến cố A : Lấy k tấm thẻ có ít nhất một tấm thẻ chia hết cho 4. Với $1 \leq k \leq 10$.

Suy ra $\bar{A}$: Lấy k tấm thẻ không có tấm thẻ nào chia hết cho 4.

$$\text{Ta có: } P(\bar{A}) = \frac{C_8^k}{C_{10}^k} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{C_8^k}{C_{10}^k} = 1 - \frac{(10-k)(9-k)}{90}.$$

$$\text{Theo đề: } 1 - \frac{(10-k)(9-k)}{90} > \frac{13}{15} \Leftrightarrow k^2 - 19k + 78 < 0 \Leftrightarrow 6 < k < 13.$$

Vậy $k=7$ là giá trị cần tìm.

Câu 47. Chọn ngẫu nhiên 3 số tự nhiên từ tập hợp $M = \{1; 2; 3; \dots; 2019\}$. Tính xác suất P để trong 3 số tự nhiên được chọn không có 2 số tự nhiên liên tiếp.

A. $P = \frac{677040}{679057}$. B. $P = \frac{2017}{679057}$. C. $P = \frac{2016}{679057}$. D. $P = \frac{1}{679057}$.

Lời giải

Chọn A

Có tất cả C_{2019}^3 cách chọn 3 số tự nhiên từ tập hợp $M = \{1; 2; 3; \dots; 2019\}$.

$$\text{Suy ra } n(\Omega) = C_{2019}^3.$$

Xét biến cố A : “Chọn 3 số tự nhiên sao cho không có 2 số tự nhiên liên tiếp”.

Ta có $\bar{A}$: “Chọn 3 số tự nhiên sao luôn có 2 số tự nhiên liên tiếp”.

Xét các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: Trong ba số chọn được chỉ có 2 số liên tiếp:

- Nếu 2 số liên tiếp là $\{1; 2\}$ hoặc $\{2018; 2019\}$ thì số thứ ba có $2019 - 3 = 2016$ cách chọn (do không tính số liên tiếp sau và trước mỗi cặp số đó).

- Nếu 2 số liên tiếp là $\{2; 3\}, \{3; 4\}, \dots, \{2017; 2018\}$ thì số thứ ba có $2019 - 4 = 2015$ cách chọn (do không tính 2 số liên trước và sau mỗi cặp số đó).

Trường hợp này có $2 \cdot 2016 + 2016 \cdot 2015 = 4066272$ cách chọn.

+ Trường hợp 2: Chọn được 3 số liên tiếp.

Tức là chọn các bộ $\{1; 2; 3\}, \{2; 3; 4\}, \dots, \{2017, 2018, 2019\}$: có tất cả 2017 cách.

$$\text{Suy ra } n(\bar{A}) = 4066272 + 2017 = 4068289.$$

$$\text{Vậy } P = P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{4068289}{C_{2019}^3} = \frac{1365589680}{1369657969} = \frac{677040}{679057}.$$

Câu 48. Cho một bảng ô vuông 3×3 .





Điền ngẫu nhiên các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 vào bảng trên (mỗi ô chỉ điền một số). Gọi A là biến cố “mỗi hàng, mỗi cột bất kì đều có ít nhất một số lẻ”. Xác suất của biến cố A bằng

- A. $P(A) = \frac{10}{21}$. B. $P(A) = \frac{1}{3}$. C. $P(A) = \frac{5}{7}$. D. $P(A) = \frac{1}{56}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 9! = 362880$.

Xét biến cố đối $\bar{A}$ “tồn tại một hàng hoặc một cột chứa toàn số chẵn”. Để biến cố $\bar{A}$ xảy ra ta lần lượt thực hiện các bước sau.

Bước 1: chọn một hàng hoặc một cột chứa toàn số chẵn. Bước này có 6 cách.

Bước 2: chọn ba số chẵn trong các số 2, 4, 6, 8 và xếp vào hàng hoặc cột này. Bước này có A_4^3 cách.

Bước 3: xếp 6 số còn lại vào 6 ô còn lại. Bước này có $6!$ cách.

Suy ra số kết quả thuận lợi cho biến cố $\bar{A}$ là $n(\bar{A}) = 6 \cdot A_4^3 \cdot 6! = 103680$.

Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{5}{7}$.

Câu 49. Gọi X là tập các số tự nhiên có 5 chữ số. Lấy ngẫu nhiên hai số từ tập X . Xác suất để nhận được ít nhất một số chia hết cho 4 gần nhất với số nào dưới đây?

- A. 0,63. B. 0,23. C. 0,44. D. 0,12.

Lời giải

Chọn C

Ta có số phần tử của tập X là $|X| = 9 \cdot 10^4 = 90000$, trong đó có $\frac{99996 - 10000}{4} + 1 = 22500$ số

chia hết cho 4 và $90000 - 22500 = 67500$ số không chia hết cho 4.

Gọi A là biến cố nhận được ít nhất một số chia hết cho 4.

Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{90000}^2$.

Số phần tử của không gian thuận lợi cho biến cố $\bar{A}$ (cả hai đều không chia hết cho 4) là $|\Omega_{\bar{A}}| = C_{67500}^2$.

Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_{67500}^2}{C_{90000}^2} \approx 0,44$.

Câu 50. Một hộp đựng 4 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ và 2 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên hai viên bi. Xác suất để chọn được hai viên bi cùng màu là





A. $\frac{5}{18}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{1}{36}$.

D. $\frac{1}{12}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi A là biến cố : “Chọn được hai viên bi xanh”.

B là biến cố : “Chọn được hai viên bi đỏ”.

C là biến cố : “Chọn được hai viên bi vàng”.

Khi đó biến cố: “Chọn được hai viên bi cùng màu” là biến cố $A \cup B \cup C$. Do A, B, C đôi một xung khắc với nhau nên theo quy tắc cộng ta có

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

Ta có $P(A) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{6}{36}$; $P(B) = \frac{C_3^2}{C_9^2} = \frac{3}{36}$; $P(C) = \frac{C_2^2}{C_9^2} = \frac{1}{36}$.

Vậy $P(A \cup B \cup C) = \frac{6}{36} + \frac{3}{36} + \frac{1}{36} = \frac{5}{12}$

----- HẾT -----





BÀI 5

TỔNG ÔN TẬP CHƯƠNG

I. QUY TẮC ĐẾM

Bài 01.

Một trường THPT được cử một học sinh đi dự trại hè toàn quốc. Nhà trường quyết định chọn một học sinh tiên tiến trong lớp 11A hoặc lớp 12B. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn, biết rằng lớp 11A có 31 học sinh tiên tiến và lớp 12B có 22 học sinh tiên tiến.

Lời giải

♦ Để chọn được một học sinh đi dự ta có 2 trường hợp:

⊙ **Trường hợp 1:** Học sinh ở lớp 11A: có 31 cách

⊙ **Trường hợp 2:** Học sinh ở lớp 12B: có 22 cách

Vậy có $31 + 22 = 53$ cách.

Bài 02.

Từ thành phố A đến thành phố B có 3 con đường, từ thành phố A đến thành phố C có 2 con đường, từ thành phố B đến thành phố D có 2 con đường, từ thành phố C đến thành phố D có 3 con đường. Không có con đường nào nối từ thành phố B với thành phố C. Hỏi có tất cả bao nhiêu con đường đi từ thành phố A đến thành phố D ?

Lời giải

Để đi từ thành phố A đến thành phố D ta có 2 trường hợp:

⊙ **Trường hợp 1:** Đi qua thành phố B :

♦ Đi từ A đến B có 3 cách

♦ Đi từ B đến D có 2 cách

♦ Có 6 cách đi từ A đến D mà qua B

⊙ **Trường hợp 2:** Không đi qua thành phố B :

♦ Đi từ A đến C có 2 cách

♦ Đi từ C đến D có 3 cách

♦ Có 6 cách đi từ A đến D mà không qua B

Vậy có $6 + 6 = 12$ cách.

Bài 03.

Một đội văn nghệ chuẩn bị được 2 vở kịch, 3 điệu múa và 6 bài hát. Tại hội diễn mỗi đội chỉ được trình diễn 1 vở kịch, 1 điệu múa và 1 bài hát. Hỏi đội văn nghệ có bao nhiêu cách chọn chương trình biểu diễn biết rằng chất lượng các vở kịch, điệu múa, bài hát là như nhau?

Lời giải

♦ Chọn 1 vở kịch có 2 cách

♦ Chọn 1 điệu múa có 3 cách





- ♦ Chọn 1 bài hát có 6 cách
- ♦ Có $2.3.6 = 36$ cách.

Bài 04.

Một lớp học có 33 sinh viên. Hỏi có bao nhiêu cách giao 3 chức danh lớp trưởng, lớp phó, bí thư cho 3 sinh viên biết rằng mỗi sinh viên chỉ có thể nhận nhiều nhất 1 chức danh và sinh viên nào cũng có thể đảm nhận chức danh

Lời giải

- ♦ Chọn 1 sinh viên làm lớp trưởng có 33 cách
- ♦ Chọn 1 sinh viên làm lớp phó có 32 cách
- ♦ Chọn 1 sinh viên làm bí thư có 31 cách
- ♦ Có $32.33.31 = 32736$ cách.

Bài 05.

Từ tập $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, có thể lập được bao nhiêu số

- ① Gồm 4 chữ số khác nhau?
- ② Gồm 3 chữ số khác nhau và số đó chia hết cho 2?
- ③ Gồm 6 chữ số khác nhau và số đó chia hết cho 5?
- ④ Gồm 6 chữ số khác nhau và số đó chia hết cho 3?
- ⑤ Gồm 3 chữ số khác nhau và số đó không lớn hơn 456?

Lời giải

① Gồm 4 chữ số khác nhau?

- ♦ Gọi $\overline{abcd}$ là số cần tìm.
 - ♦ Chọn $a \in A$: 6 cách.
 - ♦ Chọn $b \in A \setminus \{a\}$: 5 cách.
 - ♦ Chọn $c \in A \setminus \{a, b\}$: 4 cách.
 - ♦ Chọn $d \in A \setminus \{a, b, c\}$: 3 cách.
- $\Rightarrow$ có: $6.5.4.3 = 360$ số thoả yêu cầu bài toán.

② Gồm 3 chữ số khác nhau và số đó chia hết cho 2?

- ♦ Gọi $\overline{abc}$ là số cần tìm.
 - ♦ Chọn $c \in \{2; 4; 6\}$: 3 cách.
 - ♦ Chọn $a \in A \setminus \{c\}$: 5 cách.
 - ♦ Chọn $b \in A \setminus \{a, c\}$: 4 cách.
- $\Rightarrow$ có: $3.4.5 = 60$ số thoả yêu cầu bài toán.

③ Gồm 6 chữ số khác nhau và số đó chia hết cho 5?

- ♦ Gọi $\overline{abcdef}$ là số cần tìm.
- ♦ Chọn $f = 5$: 1 cách.





- ♦ Chọn $a \in A \setminus \{5\}$: 5 cách.
 - ♦ Chọn $b \in A \setminus \{a, 5\}$: 4 cách.
 - ♦ Chọn $c \in A \setminus \{a, b, 5\}$: 3 cách.
 - ♦ Chọn $d \in A \setminus \{a, b, c, 5\}$: 2 cách.
 - ♦ Chọn $e \in A \setminus \{a, b, c, d, 5\}$: 1 cách.
- $\Rightarrow$ có: $1.5.4.3.2.1 = 120$ số thoả yêu cầu bài toán.

④ Gồm 6 chữ số khác nhau và số đó chia hết cho 3?

- ♦ Gọi $\overline{abcdef}$ là số cần tìm.
 - ♦ Vì $\overline{abcdef}$ gồm 6 chữ số khác nhau và số $\overline{abcdef}$ được lập từ tập A nên
 - ♦ Chọn $a \in A$: 6 cách.
 - ♦ Chọn $b \in A \setminus \{a\}$: 5 cách.
 - ♦ Chọn $c \in A \setminus \{a, b\}$: 4 cách.
 - ♦ Chọn $d \in A \setminus \{a, b, c\}$: 3 cách.
 - ♦ Chọn $e \in A \setminus \{a, b, c, d\}$: 2 cách.
 - ♦ Chọn $f \in A \setminus \{a, b, c, d, e\}$: 1 cách.
- $\Rightarrow$ có: $6.5.4.3.2.1 = 720$ số thoả yêu cầu bài toán.

⑤ Gồm 3 chữ số khác nhau và số đó không lớn hơn 456?

- ♦ Gọi $\overline{abc}$ là số cần tìm.

⊙ Trường hợp 1: $100 \leq \overline{abc} < 400$

- ♦ Chọn $a \in \{1; 2; 3\}$: 3 cách.
 - ♦ Chọn $b \in A \setminus \{a\}$: 5 cách.
 - ♦ Chọn $c \in A \setminus \{a, b\}$: 4 cách.
- $\Rightarrow$ có: $3.4.5 = 60$ số.

⊙ Trường hợp 2: $400 \leq \overline{abc} < 450$

- ♦ Chọn $a = 4$: 1 cách.
 - ♦ Chọn $b \in \{1; 2; 3\}$: 3 cách.
 - ♦ Chọn $c \in A \setminus \{4; b\}$: 4 cách.
- $\Rightarrow$ có: $1.3.4 = 12$ số.

⊙ Trường hợp 3: $450 \leq \overline{abc} \leq 456$

- ♦ Chọn $a = 4$: 1 cách.
 - ♦ Chọn $b = 5$: 1 cách.
 - ♦ Chọn $c \in A \setminus \{4; 5\}$: 4 cách.
- $\Rightarrow$ có: $1.1.4 = 4$ số.

Từ (1); (2); (3) $\Rightarrow$ có: $60 + 12 + 4 = 76$ số thoả yêu cầu bài toán.





Bài 06.

Từ 6 chữ số 0,1,2,3,4,5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau và thỏa:

- ① Chia hết cho 5.
- ② Là số lẻ.
- ③ Là số chẵn
- ④ Là số chia hết cho 3.
- ⑤ Là số chia hết cho 6.

Lời giải

① Chia hết cho 5.

♦ Gọi số tự nhiên có 4 chữ số là $\overline{abcd}$ ($a \neq b \neq c \neq d$).

⊙ Trường hợp 1: $\overline{abc5}$.

♦ Chọn a: 4 cách chọn (vì $a \neq 0; 5$).

♦ Chọn b,c: A_4^2 cách chọn.

⇒ Khi đó: $4 \cdot A_4^2 = 48$.

⊙ Trường hợp 2: $\overline{abc0}$.

♦ Chọn a,b,c : $A_5^3 = 60$ cách chọn.

⇒ Vậy: $48 + 60 = 108$ (số).

② Là số lẻ.

♦ Gọi số tự nhiên có 4 chữ số là $\overline{abcd}$ ($a \neq b \neq c \neq d$).

♦ Chọn d: 3 cách (vì $d \in \{1; 3; 5\}$).

♦ Chọn a: 4 cách (vì $a \neq 0; d$).

♦ Chọn b, c: A_4^2 cách chọn.

⇒ Khi đó: $3 \cdot 4 \cdot A_4^2 = 144$.

③ Là số chẵn.

♦ Gọi số tự nhiên có 4 chữ số là $\overline{abcd}$ ($a \neq b \neq c \neq d$).

⊙ Trường hợp 1: $\overline{abc0}$.

♦ Chọn a,b,c: $A_5^3 = 60$ cách chọn.

⊙ Trường hợp 2: $\overline{abcd}$ ($d \neq 0$).

♦ Chọn d: 2 cách chọn (vì $d \in \{2; 4\}$).

♦ Chọn a: 4 cách (vì $a \neq 0; d$).

♦ Chọn b, c: A_4^2 cách chọn.

♦ Khi đó: $2 \cdot 4 \cdot A_4^2 = 96$.

⇒ Vậy: $60 + 96 = 156$ (số)

④ Là số chia hết cho 3.

♦ Gọi số tự nhiên có 4 chữ số là $\overline{abcd}$ ($a \neq b \neq c \neq d$).

♦ Bộ bốn chữ số có tổng chia hết cho 3 là: $A = \{\{0; 1; 2; 3\}, \{0; 2; 3; 4\}, \{0; 3; 4; 5\}, \{1; 2; 4; 5\}\}$.





⊙ Trường hợp 1: $\overline{abcd} \in \{\{0;1;2;3\}, \{0;2;3;4\}, \{0;3;4;5\}\}$.

- ♦ Chọn a: 3 cách (vì $a \neq 0$).
- ♦ Chọn b,c,d: $3! = 6$ cách chọn.
- ⇒ Khi đó: $3.6 = 18$ (cách).

⊙ Trường hợp 2: $\overline{abcd} \in \{1;2;4;5\}$.

- ♦ Chọn a,b,c,d: $4! = 24$.
- ⇒ Vậy $6 + 24 = 30$ (số)

⑤ Là số chia hết cho 6.

- ♦ Gọi số tự nhiên có 4 chữ số là $\overline{abcd}$ ($a \neq b \neq c \neq d$).
- ♦ Số chia hết cho 6 là số chẵn và chia hết cho 3. Khi đó, xét bộ bốn chữ số có tổng chia hết cho 3 là: $A = \{\{0;1;2;3\}, \{0;2;3;4\}, \{0;3;4;5\}, \{1;2;4;5\}\}$.

⊙ Trường hợp 1: $\overline{abc0} \in \{\{0;1;2;3\}, \{0;2;3;4\}, \{0;3;4;5\}\}$.

- ♦ Chọn a,b,c: $3! = 6$ cách chọn.

⊙ Trường hợp 2: $\overline{abcd} \in \{1;2;4;5\}$.

- ♦ Chọn d: 2 cách chọn (vì $d \in \{2;4\}$).
- ♦ Chọn a,b,c: $3! = 6$ cách chọn.
- ⇒ Khi đó: $2.6 = 12$. Vậy: $6 + 12 = 18$ (số).

🔗 Bài 07.

Từ 6 chữ số 0,1,2,3,4,5 có thể lập được bao nhiêu số:

- ① Gồm 5 chữ số phân biệt.
- ② Chẵn gồm 5 chữ số phân biệt.
- ③ Gồm 5 chữ số phân biệt trong đó có chữ số 0.

Lời giải

① Gồm 5 chữ số phân biệt.

- ♦ Gọi số cần tìm là $abcde$ (các chữ số khác nhau từng đôi một).
- ♦ Chọn a :5 cách.
- ♦ Chọn b :5 cách.
- ♦ Chọn c :4 cách.
- ♦ Chọn d :3 cách.
- ♦ Chọn e : 2 cách.
- ⇒ Theo Quy tắc nhân có: $5.5.4.3.2 = 600$.

② Chẵn gồm 5 chữ số phân biệt.

Gọi số cần tìm là $abcde$ (e chẵn và các chữ số khác nhau từng đôi một).

⊙ Trường hợp 1: $e = 0$.

- ♦ Chọn e : 1 cách.
- ♦ Chọn a :5 cách.
- ♦ Chọn b :4 cách.





- ♦ Chọn c : 3 cách.
 - ♦ Chọn d : 2 cách.
- ⇒ Theo Quy tắc nhân có: $1.5.4.3.2 = 120$.

⊙ Trường hợp 2: $e \neq 0$.

- ♦ Chọn e : 2 cách.
 - ♦ Chọn a : 4 cách.
 - ♦ Chọn b : 4 cách.
 - ♦ Chọn c : 3 cách.
 - ♦ Chọn d : 2 cách.
- ⇒ Theo quy tắc nhân có: $2.4.4.3.2 = 192$.
- ⇒ Theo quy tắc cộng có tất cả $192 + 120 = 312$ số chẵn có 5 chữ số khác nhau.

③ Gồm 5 chữ số phân biệt trong đó có chữ số 0.

- ♦ Gồm 5 chữ số phân biệt trong đó có chữ số 0.
 - ♦ Số số gồm 5 chữ số phân biệt và không có chữ số 0 là: $5.4.3.2.1 = 120$ số.
- ⇒ Theo quy tắc cộng số số gồm 5 chữ số phân biệt trong đó có chữ số 0 là: $600 - 120 = 480$ số.

Bài 08.

Cho tập hợp $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Có thể lập bao nhiêu số gồm 5 chữ số khác nhau đôi một lấy từ E trong mỗi trường hợp sau:

- ① Là số chẵn.
- ② Một trong ba chữ số đầu tiên bằng 1.

Lời giải

① Là số chẵn.

- ♦ Gọi số cần tìm là $abcde$ (e chẵn và các chữ số khác nhau từng đôi một).

⊙ Trường hợp 1: $e = 0$.

- ♦ Chọn e : 1 cách.
 - ♦ Chọn a : 7 cách.
 - ♦ Chọn b : 6 cách.
 - ♦ Chọn c : 5 cách.
 - ♦ Chọn d : 4 cách.
- ⇒ Theo Quy tắc nhân có: $1.7.6.5.4 = 840$.

⊙ Trường hợp 2: $e \neq 0$.

- ♦ Chọn e : 3 cách.
 - ♦ Chọn a : 6 cách.
 - ♦ Chọn b : 5 cách.
 - ♦ Chọn c : 4 cách.
 - ♦ Chọn d : 3 cách.
- ⇒ Theo quy tắc nhân có: $3.6.5.4.3 = 1080$.
- ⇒ Theo quy tắc cộng có tất cả $840 + 1080 = 1920$ số chẵn có 5 chữ số khác.





② Một trong ba chữ số đầu tiên bằng 1.

Gọi số cần tìm là $abcde$

⊙ Trường hợp 1: $a=1$.

- ♦ Chọn b : 7 cách.
 - ♦ Chọn c : 6 cách.
 - ♦ Chọn d : 5 cách.
 - ♦ Chọn e : 4 cách.
- ⇒ Theo Quy tắc nhân có: $7.6.5.4 = 840$ số.

⊙ Trường hợp 2: $b=1$.

- ♦ Chọn a : 6 cách.
 - ♦ Chọn c : 6 cách.
 - ♦ Chọn d : 5 cách.
 - ♦ Chọn e : 4 cách.
- ⇒ Theo quy tắc nhân có: $6.6.5.4 = 720$ số.

⊙ Trường hợp 3: $c=1$.

- ♦ Chọn a : 6 cách.
 - ♦ Chọn b : 6 cách.
 - ♦ Chọn d : 5 cách.
 - ♦ Chọn e : 4 cách.
- ⇒ Theo quy tắc nhân có: $6.6.5.4 = 720$ số.
 ⇒ Theo quy tắc cộng có tất cả $840 + 720 + 720 = 2280$ số.

🔖 Bài 09.

Từ 10 chữ số 0,1,2,3, ..., 9 có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau sao cho trong các chữ số đó có mặt chữ số 0 và 1?

Lời giải

- ♦ Gọi số cần lập $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ ($a_1 \neq 0$)
 - ♦ **Bước 1:** Xếp chữ số 0 vào trong 5 vị trí từ a_2 đến a_6 , có 5 cách xếp.
 - ♦ **Bước 2:** Xếp chữ số 1 vào trong 5 vị trí còn lại (bỏ 1 vị trí chữ số 0 đã chọn), có 5 cách xếp.
 - ♦ **Bước 3:** Chọn 4 chữ số trong 8 chữ số $\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ để xếp vào 4 vị trí còn lại, có $8.7.6.5$ cách.
- ⇒ Theo quy tắc nhân có $5.5.8.7.6.5 = 42000$ số thỏa yêu cầu.

🔖 Bài 10.

Từ 5 chữ số 1,2,5,7,8 có thể lập bao nhiêu số gồm 3 chữ số phân biệt và thỏa điều kiện:

- ① Là 1 số nhỏ hơn hoặc bằng 278.
- ② Là 1 số chẵn và nhỏ hơn hoặc bằng 278.

Lời giải

- ① Là 1 số nhỏ hơn hoặc bằng 278.





Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abc}$ ($a, b, c \in \{1; 2; 5; 7; 8\}$)

⊙ Trường hợp 1: $a = 2; b = 7; c = 8$. Có 1 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

⊙ Trường hợp 2: $a = 2; b < 7$.

♦ a có 1 cách chọn.

♦ b có 2 cách chọn.

♦ c có 3 cách chọn.

⇒ Theo quy tắc nhân ta có: $1.2.3 = 6$ (số).

⊙ Trường hợp 3: $a = 2; b = 7; c < 8$.

♦ a có 1 cách chọn.

♦ b có 1 cách chọn.

♦ c có 2 cách chọn.

⇒ Theo quy tắc nhân ta có: $1.1.2 = 2$ (số).

⊙ Trường hợp 4: $a < 2$.

♦ a có 1 cách chọn.

♦ b có 4 cách chọn.

♦ c có 3 cách chọn.

⇒ Theo quy tắc nhân ta có: $1.4.3 = 12$ (số).

⇒ Vậy có: $1 + 6 + 2 + 12 = 21$ (số).

② Là 1 số chẵn và nhỏ hơn hoặc bằng 278.

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abc}$ ($a, b \in \{1; 2; 5; 7; 8\}; c \in \{2; 8\}$)

⊙ Trường hợp 1: $a = 2; b = 7; c = 8$. Có 1 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

⊙ Trường hợp 2: $a = 2; b < 7; c = 8$

♦ a có 1 cách chọn.

♦ c có 1 cách chọn.

♦ b có 2 cách chọn.

⇒ Theo quy tắc nhân ta có: $1.1.2 = 2$ (số).

⊙ Trường hợp 3: $a < 2; c \in \{2; 8\}$

♦ a có 1 cách chọn.

♦ c có 2 cách chọn.

♦ b có 3 cách chọn.

⇒ Theo quy tắc nhân ta có: $1.2.3 = 6$ (số).

⇒ Vậy có: $1 + 2 + 6 = 9$ (số).

Bài 11.

Xét những số gồm 9 chữ số trong đó có 5 chữ số 1 và bốn chữ số còn lại 2, 3, 4, 5. Hỏi có bao nhiêu số nếu:

① 5 chữ số 1 xếp kề nhau.

② Các chữ số được xếp tùy ý.

Lời giải

① 5 chữ số 1 xếp kề nhau.





- ♦ Gọi 11111 là số a .
 - ♦ Vậy ta cần sắp các số $a, 2, 3, 4, 5$.
- ⇒ Số cách sắp xếp số thỏa mãn là: $1.2.3.4.5 = 120$ (số).

② Các chữ số được xếp tùy ý.

- ⇒ Lập một số có 9 chữ số thỏa mãn yêu cầu, thực chất là việc xếp các số 2, 3, 4, 5 vào 4 vị trí tùy ý trong 9 vị trí (5 vị trí còn lại là dành cho chữ số 1 lặp lại 5 lần)
- ⇒ Vậy có tất cả: $A_9^4 = 6.7.8.9 = 3024$ (số).

Bài 12.

Có nhiều nhất bao nhiêu biển đăng ký xe máy nếu mỗi biển chứa một dãy gồm một chữ cái, tiếp đến một chữ số khác 0 và cuối cùng là 5 chữ số.

Lời giải

- ♦ **Bước 1** chọn 1 chữ cái trong 26 chữ cái có 26 cách.
 - ♦ **Bước 2** chọn 1 chữ số khác 0 từ 9 chữ số.
- ⇒ Cuối cùng 5 chữ số còn lại mỗi số có 10 cách chọn.
- ⇒ Số các biển số xe thỏa mãn là: $26.9.10.10.10.10 = 23400000$ biển.

II. HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP

Bài 01.

Xếp 3 quyển sách Toán, 4 sách lý, 2 sách hóa và 5 sách Sinh vào một kệ sách. Tất cả các quyển sách đều khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp:

- ① Một cách tùy ý?
- ② Theo từng môn?
- ③ Theo từng môn và sách Toán nằm giữa?

Lời giải

① Một cách tùy ý?

- ♦ Trên kệ sách có tất cả 14 quyển sách, số cách xếp 14 quyển sách trên là $14!$ cách.

② Theo từng môn?

- ♦ Có 4 bộ sách được sắp 4 vị trí có $4!$ cách.
 - ♦ Sắp xếp 3 quyển sách Toán có $3!$ cách.
 - ♦ Sắp xếp 2 sách hóa có 2 cách.
 - ♦ Sắp xếp 3 quyển sách Toán có $3!$ cách.
 - ♦ Sắp xếp 5 sách Sinh có $5!$ cách.
- ⇒ Vậy số cách sắp xếp số sách trên theo từng môn là $4!.3!.2.3!.5! = 207360$ cách.

③ Theo từng môn và sách Toán nằm giữa?

- ♦ Chọn vị trí cho bộ Toán có 2 cách.
- ♦ Sắp xếp 3 bộ sách còn lại có $3!$ cách.
- ♦ Sắp xếp 3 quyển sách Toán có $3!$ cách
- ♦ Sắp xếp 2 sách hóa có $2!$ cách





- ♦ Sắp xếp 4 quyển sách Lý có $4!$ cách
- ♦ Sắp xếp 5 sách Sinh có $5!$ cách
- ⇒ Vậy số cách sắp xếp số sách trên theo từng môn là $2.3!.3!.2!.4!.5! = 414720$ cách.

Bài 02.

Có bao nhiêu cách xếp 5 bạn A, B, C, D, E vào một ghế dài sao cho

- ① C ngồi chính giữa?
- ② A và E ngồi ở hai đầu ghế?

Lời giải

① C ngồi chính giữa?

⇒ Vì C phải ngồi chính giữa nên có $4! = 24$ cách xếp A, B, C, D, E .

② A và E ngồi ở hai đầu ghế?

⇒ Vì A và E ngồi ở hai đầu ghế nên có $2!.3! = 12$ cách xếp A, B, C, D, E .

Bài 03.

Có 6 học sinh được xếp vào 6 chỗ ngồi đã được ghi thứ tự trên 1 bàn dài. Tìm số cách xếp 6 học sinh ngồi vào bàn sao cho 2 học sinh A và B không được ngồi cạnh nhau?

Lời giải

- ♦ Sắp xếp 6 học sinh vào 6 vị trí trên 1 bàn dài có $6! = 720$ cách.
- ♦ Có 5 vị trí cạnh nhau, sắp xếp 2 học sinh A và B vào 5 vị trí cạnh nhau đó có $5.2 = 10$ cách, tiếp tục sắp xếp 4 học sinh còn lại có $4! = 24$ cách.
- ⇒ Vậy số cách sắp xếp 6 học sinh sao cho A và B ngồi cạnh nhau là $10.24 = 240$ cách.
- ⇒ Số cách sắp xếp 6 học sinh sao cho A và B không ngồi cạnh nhau: $720 - 240 = 480$ cách.

Bài 04.

Một nhóm gồm 8 học sinh, trong đó có 5 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 8 học sinh trên thành một hàng dọc sao cho:

- ① Các học sinh được xếp bất kì.
- ② Các học sinh nam đứng liền nhau và các học sinh nữ đứng liền nhau.
- ③ Các học sinh nam phải đứng liền nhau.

Lời giải

① Các học sinh được xếp bất kì.

- ♦ Mỗi cách xếp 8 học sinh đã cho thành một hàng dọc tương ứng là một hoán vị của 8 học sinh.
- ⇒ Vậy số cách xếp là: $8! = 40320$ (cách).

② Các học sinh nam đứng liền nhau và các học sinh nữ đứng liền nhau.

- ♦ Để xếp 8 học sinh đã cho thành hàng dọc sao cho các học sinh nam đứng liền nhau và các học sinh nữ đứng liền nhau ta thực hiện các bước:





- ♦ **Bước 1:** Xếp vị trí cho nam và nữ: có 2 cách (5 nam đứng đầu hàng, 3 nữ đứng cuối hàng hoặc 5 nam đứng cuối hàng, 3 nữ đầu hàng).
 - ♦ **Bước 2:** Xếp chỗ cho 5 nam vào 5 vị trí: có $5!$ cách.
 - ♦ **Bước 3:** Xếp chỗ cho 3 nữ vào 3 vị trí: có $3!$ cách.
- ⇒ Áp dụng quy tắc nhân ta có: $2.5!.3! = 1440$ (cách).

③ Các học sinh nam phải đứng liền nhau.

- ♦ Để xếp 8 học sinh đã cho thành hàng dọc sao cho các học sinh nam đứng liền nhau ta coi 5 nam là một đối tượng, đối tượng này cộng với 3 học sinh nữ thành 4 đối tượng xếp thành hàng dọc; ta thực hiện hai bước:
 - ♦ **Bước 1:** Xếp vị trí cho 4 đối tượng: có $4!$ cách .
 - ♦ **Bước 2:** Xếp chỗ cho 5 nam vào 5 vị trí: có $5!$ cách.
- ⇒ Áp dụng quy tắc nhân ta có: $4!.5! = 2880$ (cách).

Bài 05.

Có 3 người đàn ông, 2 người đàn bà và 1 đứa trẻ được xếp ngồi vào 6 cái ghế xếp thành hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho:

- ① Đứa trẻ ngồi giữa hai người đàn bà.
- ② Đứa trẻ ngồi giữa hai người đàn ông.

Lời giải

Ta đánh số thứ tự cho 6 chiếc ghế từ số 1 đến số 6.

① Đứa trẻ ngồi giữa hai người đàn bà.

- ♦ Ta thực hiện việc xếp 6 người vào 6 chiếc ghế sao cho đứa trẻ ngồi giữa hai người đàn bà như sau:
 - ♦ Xếp đứa trẻ ngồi vào 1 trong các ghế có số thứ tự từ 2 đến 5: có 4 cách.
 - ♦ Xếp hai người đàn bà vào 2 ghế bên cạnh đứa trẻ: có 2 cách.
 - ♦ Xếp 3 người đàn ông vào 3 ghế còn lại: có $3!$ cách.
- Áp dụng quy tắc nhân, có tất cả: $4.2.6 = 48$ cách.

② Đứa trẻ ngồi giữa hai người đàn ông.

- ♦ Ta thực hiện việc xếp 6 người vào 6 chiếc ghế sao cho đứa trẻ ngồi giữa hai người đàn ông như sau:
 - ♦ Xếp đứa trẻ ngồi vào 1 trong các ghế có số thứ tự từ 2 đến 5: có 4 cách.
 - ♦ Chọn và xếp 2 người đàn ông trong 3 người đàn ông vào 2 ghế bên cạnh đứa trẻ: có $A_3^2 = 6$ cách.
 - ♦ Xếp 3 người còn lại vào 3 ghế còn lại: có $3!$ Cách.
- Áp dụng quy tắc nhân, có tất cả: $4.6.6 = 144$ cách.

Bài 06.

Một hội nghị bàn tròn có phái đoàn của các nước: Việt Nam có 3 người; Nhật có 5 người; Hàn Quốc có 2 người; Singapore có 3 người; Hồng Kông có 4 người. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi cho mọi thành viên sao cho người cùng quốc tịch thì ngồi cạnh nhau?





Lời giải

- ♦ Ta thấy tổng số nước tham dự hội nghị là 5 nước.
- ♦ Để xếp chỗ ngồi cho mọi thành viên sao cho người cùng quốc tịch thì ngồi cạnh nhau ta thực hiện như sau:
 - ⇒ Xếp cờ của 5 nước vào 5 vị trí xung quanh bàn tròn: có $4!$ cách xếp.
 - ⇒ Ở vị trí cờ của Việt Nam xếp 3 người vào ba vị trí: có $3!$ cách xếp.
 - ⇒ Ở vị trí cờ của Nhật xếp 5 người vào năm vị trí: có $5!$ cách xếp.
 - ⇒ Ở vị trí cờ của Hàn Quốc xếp 2 người vào hai vị trí: có $2!$ cách xếp.
 - ⇒ Ở vị trí cờ của Singapore xếp 3 người vào ba vị trí: có $3!$ cách xếp.
 - ⇒ Ở vị trí cờ của Hồng Kông xếp 4 người vào bốn vị trí: có $4!$ cách xếp.
- Áp dụng quy tắc nhân, có tất cả: $4! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! = 4976640$ cách.

Bài 07.

Có bao nhiêu cách chọn 4 cầu thủ khác nhau trong 10 cầu thủ của đội quần vợt để chơi 4 trận cầu đơn biết các trận đấu là có thứ tự?

Lời giải

- ♦ Số cách chọn 4 cầu thủ khác nhau trong 10 cầu thủ của đội quần vợt để chơi 4 trận cầu đơn biết các trận đấu là có thứ tự là $A_{10}^4 = 5040$.

Bài 08.

Có 8 vận động viên chạy thi. Người thắng sẽ nhận được huy chương vàng, người về đích thứ hai nhận huy chương bạc, người về đích thứ ba nhận huy chương đồng. Có bao nhiêu cách trao các huy chương này, nếu tất cả các kết cục của cuộc thi đều có thể xảy ra?

Lời giải

- ♦ Số cách chọn 3 vận động viên về đích đầu tiên trong 8 vận động viên là C_8^3 .
- ♦ Số cách trao 3 huy chương vàng, bạc, đồng cho 3 vận động viên về đích đầu là $3!$.
- ⇒ Vậy số cách trao các huy chương này là $C_8^3 \cdot 3! = 336$.

Bài 09.

Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau được lấy ra từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8?

Lời giải

- ⇒ Từ chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 lập được số các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau: $A_8^4 = 1680$

Bài 10.

Từ 5 chữ số 0, 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau.

Lời giải

- ♦ Gọi $n = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$ là số cần tìm.
- ♦ Số các số tự nhiên có năm chữ số khác nhau được chọn trong năm chữ số đã cho là số chỉnh hợp chập 5 của 5 bằng A_5^5 .





- ♦ Số các số có năm chữ số khác nhau có chữ số 0 đứng đầu bằng số chỉnh hợp chập 4 của 4 là A_4^4
- ⇒ Số các số cần tìm là $A_5^5 - A_4^4 = 120 - 24 = 96$.

Bài 11.

Từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 1 và 2.

Lời giải

- ♦ Gọi số cần thành lập có dạng $\overline{abcde}$.
- ♦ Số cách xếp số 1; 2 vào 5 vị trí có: A_5^2 cách.
- 3 vị trí còn lại có: A_4^3 cách.
- ⇒ Vậy số cần thành lập là: $A_5^2 \cdot A_4^3 = 480$ số.

Bài 12.

Một học sinh có 12 quyển sách đôi một khác nhau, trong đó có 2 sách Toán, 4 sách Văn, 6 sách Anh Văn. Hỏi có bao nhiêu cách xếp tất cả các quyển sách lên một kệ sách dài nếu mọi quyển sách cùng môn được xếp kề nhau?

Trích từ đề ĐHQG TP.HCM – năm 1997

Lời giải

- ♦ Có $3! = 6$ cách xếp 3 loại sách.
- ♦ Có $2! = 2$ cách xếp 2 sách Toán.
- ♦ Có $4! = 24$ cách xếp 4 sách Văn.
- ⇒ Vậy theo qui tắc nhân có tất cả $6 \cdot 2 \cdot 24 = 720$ cách xếp thoả mãn yêu cầu đề bài.

Bài 13.

Từ 6 chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà mỗi số có 6 chữ số khác nhau sao cho chữ số 2 vs 3 đứng cạnh nhau.

Lời giải

- ♦ Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcdef}$ ($a \neq 0$).
- ♦ Vì 2 và 3 đứng cạnh nhau ta gộp 2 và 3 thành 1 số $\overline{23}$ hoặc $\overline{32}$ thành 1 vị trí.
- ♦ Do đó ta còn lại 5 vị trí $\overline{abcde}$.
- ♦ Từ 5 chữ số trên ta lập được $5!$ số khác nhau dạng $\overline{abcde}$.
- ♦ Cho $a = 0$ ta lập được $4!$ các số dạng $\overline{0bcde}$
- ♦ Nên sẽ có $5! - 4! = 96$ số có 5 chữ số khác nhau.
- ♦ Mặt khác do ta gộp 2 và 3 thành 1 số $\overline{23}$ hoặc $\overline{32}$ thành 1 vị trí nên ta sẽ có số các số cần tìm là: $96 \times 2 = 192$ số thoả mãn đề bài.





Bài 14.

Từ 9 chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 có thể lập được bao nhiêu số gồm 9 chữ số nếu như không có chữ số nào được lặp lại? Trong các số đó có bao nhiêu số mà các chữ số 1 và 7 không đứng cạnh nhau?

Lời giải

- ♦ Từ 9 chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 có thể lập được các số nếu như không có chữ số nào được lặp lại ta hiểu đó là số có 9 chữ số khác nhau.
Do đó sẽ có $9!$ số thỏa mãn.
 - ♦ Để tìm số mà các chữ số 1 và 7 không đứng cạnh nhau ta đi tìm các số mà 1 và 7 đứng cạnh nhau.
 - ♦ Coi 1 và 7 là 1 số. Ta sẽ có $\overline{17}$ và $\overline{71}$.
 - ♦ Đưa được về bài toán tìm số có 8 chữ số khác nhau.
 - ♦ Do đó số các số tìm được là: $8!$ số.
 - ♦ Do 1 và 7 có 2 vị trí nên ta có: $2 \times 8!$ số.
- ⇒ Vậy số có 9 chữ số khác nhau không có 1 và 7 đứng cạnh là: $9! - 2 \times 8!$ số.

Bài 15.

Tìm tất cả các số tự nhiên có đúng 5 chữ số sao cho trong mỗi số đó chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước?

Lời giải

- ♦ Gọi số có 5 chữ số là $\overline{abcde}$. Điều kiện: $a \neq 0; a < b < c < d < e$.
 - ♦ Ta chuyển bài toán về tìm số các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau lập từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 để lập số thỏa yêu cầu của bài toán.
- ⇒ Do đó sẽ có số các số có 5 chữ số khác nhau lập từ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 là $C_9^5 = 126$ số.

Bài 16.

Một hộp đựng 7 quả cầu vàng và 3 quả cầu đỏ. Lấy ra 4 quả cầu.

- ① Hỏi có thể có bao nhiêu cách?
- ② Trong đó có bao nhiêu cách lấy 2 quả cầu đỏ?
- ③ Có bao nhiêu cách lấy nhiều nhất 2 quả cầu đỏ?

Lời giải

① **Hỏi có thể có bao nhiêu cách?**

⇒ Lấy 4 quả cầu từ 10 quả cầu có $C_{10}^4 = 210$ cách.

② **Trong đó có bao nhiêu cách lấy 2 quả cầu đỏ?**

⇒ Số cách lấy 2 quả cầu đỏ là $C_3^2 \cdot C_7^2 = 63$ cách.

③ **Có bao nhiêu cách lấy nhiều nhất 2 quả cầu đỏ?**

⊙ **Trường hợp 1:** lấy được 2 quả cầu đỏ, 2 quả cầu vàng có $C_3^2 \cdot C_7^2 = 63$ cách.

⊙ **Trường hợp 2:** Lấy được 1 quả cầu đỏ, 3 quả cầu vàng có $C_3^1 \cdot C_7^3 = 105$ cách.





⊙ **Trường hợp 3:** Lấy được 4 quả cầu vàng có $C_7^4 = 35$ cách.

⇒ Số cách lấy được nhiều nhất 2 quả cầu đỏ là $63 + 105 + 35 = 203$ cách.

Bài 17.

Bộ bài tây có 52 lá, trong đó có 4 con át. Rút ra 5 con. Hỏi có bao nhiêu cách để rút được:

- ① 2 con át?
- ② Có 1 át và 1 vua?
- ③ Nhiều nhất là 2 át?

Lời giải

① 2 con át?

⇒ Số cách lấy 5 con trong đó có 2 con át là $C_4^2 \cdot C_{48}^3 = 103776$ cách.

② Có 1 át và 1 vua?

⇒ Số cách lấy 5 con trong đó có 1 con át và 1 con vua là $C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_{44}^3 = 211904$ cách.

③ Nhiều nhất là 2 át?

⊙ **Trường hợp 1:** Lấy được 2 con át có $C_4^2 \cdot C_{48}^3 = 103776$ cách.

⊙ **Trường hợp 2:** Lấy được 1 con át có $C_4^1 \cdot C_{48}^4 = 778320$ cách.

⊙ **Trường hợp 3:** Không có con át nào có $C_{48}^5 = 1712304$ cách.

⇒ Số cách rút 5 con trong đó có nhiều nhất 2 con át là
 $103776 + 778320 + 1712304 = 2594400$ cách.

Bài 18.

Một lớp học có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Người ta muốn chọn một ban điều hành gồm 3 học sinh.

- ① Có bao nhiêu cách chọn ban điều hành.
- ② Có bao nhiêu cách chọn ban điều hành có 1 nam và 2 nữ.
- ③ Có bao nhiêu cách chọn ban điều hành có ít nhất 1 nam.

Lời giải

① Có bao nhiêu cách chọn ban điều hành.

⇒ Chọn ban điều hành gồm 3 học sinh trong số 40 học sinh có $C_{40}^3 = 9880$ cách.

② Có bao nhiêu cách chọn ban điều hành có 1 nam và 2 nữ.

⇒ Chọn ban điều hành gồm 3 học sinh gồm 1 nam và 2 nữ có $C_{25}^1 \cdot C_{15}^2 = 2625$ cách.

③ Có bao nhiêu cách chọn ban điều hành có ít nhất 1 nam.

⇒ Chọn ban điều hành gồm 3 học sinh không có học sinh nam có $C_{15}^3 = 455$ cách.

⇒ Số cách chọn ban điều hành gồm 3 học sinh ít nhất 1 nam là $9880 - 455 = 9425$ cách.





Bài 19.

Một tập thể 8 người gồm 5 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một tổ công tác gồm 4 người trong mỗi trường hợp sau.

① Tổ chỉ có 4 nam.

② Tổ gồm 2 nam và 2 nữ.

Lời giải

① *Tổ chỉ có 4 nam.*

⇒ Số cách chọn tổ chỉ có 4 nam trong số 5 nam là $C_5^4 = 5$ cách.

② *Tổ gồm 2 nam và 2 nữ.*

⇒ Số cách chọn tổ gồm có 2 nam và 2 nữ là $C_5^2 \cdot C_3^2 = 30$ cách.

Bài 20.

Một dạ tiệc có 10 nam và 6 nữ giỏi khiêu vũ. Người ta chọn 3 nam và 3 nữ để ghép thành 3 cặp. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Lời giải

♦ Chọn 3 nam trong 10 nam : có C_{10}^3 cách.

♦ Chọn 3 nữ trong 6 nữ: có C_6^3 cách.

♦ Ghép 3 nam và 3 nữ để thành 3 cặp: có $3!$ cách.

⇒ Theo quy tắc nhân có: $C_{10}^3 \cdot C_6^3 \cdot 3! = 14400$ cách chọn.

Bài 21.

Có 5 nhà toán học nam, 3 nhà toán học nữ và 4 nhà vật lý nam. Lập một đoàn công tác có 3 người, cần có cả nam và nữ, cần có cả nhà toán học và nhà vật lý. Hỏi có bao nhiêu cách?

Lời giải

⊙ *Trường hợp 1:* 2 nhà toán học nữ và 1 nhà vật lý nam.

♦ Có $C_3^2 \cdot C_4^1 = 12$ cách.

⊙ *Trường hợp 2:* 1 nhà toán học nữ và 2 nhà vật lý nam.

♦ Có $C_3^1 \cdot C_4^2 = 18$ cách.

⊙ *Trường hợp 3:* 1 nhà toán học nữ, 1 nhà toán học nam và 1 nhà vật lý nam.

♦ Có $C_3^1 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 = 60$ cách.

⇒ Theo quy tắc cộng có: $12 + 18 + 60 = 90$ cách lập.

Bài 22.

Một thầy giáo có 10 cuốn sách khác nhau trong đó có 4 cuốn sách Toán, 3 cuốn sách Lý và 3 cuốn sách Hóa. Thầy muốn lấy ra 5 cuốn và tặng cho 5 học sinh A, B, C, D, E mỗi em một cuốn. Hỏi thầy giáo có bao nhiêu cách tặng nếu:

① Thầy chỉ tặng cho các học sinh các cuốn sách thuộc hai thể loại Toán và Hóa.

② Có ít nhất một cuốn sách Toán được tặng.

③ Sau khi tặng xong, mỗi một trong ba loại sách trên đều còn lại ít nhất một cuốn.





Lời giải

① Thầy chỉ tặng cho các học sinh các cuốn sách thuộc hai thể loại Toán và Hóa.

♦ Số cách lấy 5 cuốn sách trong tổng số 7 cuốn sách Toán và Hóa để tặng cho 5 học sinh là A_7^5 (cách).

② Có ít nhất một cuốn sách Toán được tặng.

♦ Số cách lấy 5 cuốn sách trong tổng số 10 cuốn sách ở ba thể loại để tặng cho 5 học sinh là A_{10}^5 (cách).

♦ Số cách lấy 5 cuốn sách để chia cho 5 học sinh trong đó không có cuốn sách Toán nào là A_6^5 (cách).

⇒ Vậy số cách lấy 5 cuốn sách thỏa ycbt là: $A_{10}^5 - A_6^5 = 29520$ cách.

③ Sau khi tặng xong, mỗi một trong ba loại sách trên đều còn lại ít nhất một cuốn.

♦ Số cách lấy 5 cuốn sách trong 10 cuốn để tặng 5 học sinh là: A_{10}^5

♦ Giả sử sau khi lấy 5 cuốn sách tặng cho học sinh mà số sách còn lại không đủ ba môn. Khi đó xét các TH sau:

⊙ Trường hợp 1: 4 sách Toán và 1 sách Lý hoặc Hóa: $C_4^4 \cdot C_6^1 \cdot 5!$ cách.

⊙ Trường hợp 2: 3 sách Lý và 2 sách Toán hoặc Hóa: $C_3^3 \cdot C_7^2 \cdot 5!$ cách.

⊙ Trường hợp 3: 3 sách Hóa và 2 sách Toán hoặc Lý: $C_3^3 \cdot C_7^2 \cdot 5!$ cách.

⇒ Theo quy tắc cộng ta có: $C_4^4 \cdot C_6^1 \cdot 5! + C_3^3 \cdot C_7^2 \cdot 5! + C_3^3 \cdot C_7^2 \cdot 5!$ cách.

⇒ Như vậy: số cách thỏa ycbt là: $A_{10}^5 - (C_4^4 \cdot C_6^1 \cdot 5! + C_3^3 \cdot C_7^2 \cdot 5! + C_3^3 \cdot C_7^2 \cdot 5!) = 24480$ (cách).

Bài 23.

Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau, gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2

Lời giải

⊙ Trường hợp 1: 5 câu được chọn có 2 câu dễ, 2 câu trung bình, 1 câu khó.

♦ Có $C_{15}^2 \cdot C_{10}^2 \cdot C_5^1$ đề.

⊙ Trường hợp 2: 5 câu được chọn có 2 câu dễ, 1 câu trung bình, 2 câu khó.

♦ Có $C_{15}^2 \cdot C_{10}^1 \cdot C_5^2$ đề.

⊙ Trường hợp 3: 5 câu được chọn có 3 câu dễ, 1 câu trung bình, 1 câu khó.

♦ Có $C_{15}^3 \cdot C_{10}^1 \cdot C_5^1$ đề.

⇒ Số đề thỏa bài toán là: $C_{15}^2 \cdot C_{10}^2 \cdot C_5^1 + C_{15}^2 \cdot C_{10}^1 \cdot C_5^2 + C_{15}^3 \cdot C_{10}^1 \cdot C_5^1$.





Bài 24.

Một tập thể có 14 người gồm 6 nam và 8 nữ, trong đó có An và Bình, chọn một tổ công tác gồm 6 người. Tìm số cách chọn trong mỗi trường hợp sau:

- ① Trong tổ có cả nam và nữ.
- ② Trong tổ có 1 tổ trưởng, 5 tổ viên, An và Bình không đồng thời có mặt trong tổ.

Lời giải

① Trong tổ có cả nam và nữ.

- ♦ Chọn tổ 6 người chỉ có nam có C_6^6 cách.
- ♦ Chọn tổ 6 người chỉ có 6 nữ C_8^6 cách.
- ⇒ Số cách chọn tổ thỏa bài toán là: $C_{14}^6 - C_6^6 - C_8^6$ cách.

② Trong tổ có 1 tổ trưởng, 5 tổ viên, An và Bình không đồng thời có mặt trong tổ.

⊙ Trường hợp 1: An và Bình không có mặt trong tổ công tác:

- ♦ Chọn 6 bạn trong 12 bạn (14 người loại An và Bình) ⇒ có C_{12}^6 cách.

⊙ Trường hợp 2: An có trong tổ công tác, Bình không có trong tổ công tác:

- ♦ Chọn An có 1 cách, Chọn 5 bạn trong 12 người còn lại ⇒ có C_{12}^5 cách.

⊙ Trường hợp 3: Bình có trong tổ công tác, An không có trong tổ công tác có C_{12}^5 cách.

- ♦ Trong 1 tổ 6 người có 6 cách chọn ra 1 tổ trưởng
- ⇒ Như vậy có tất cả số cách là: $(C_{12}^6 + C_{12}^5 + C_{12}^5).6 = 15048$ cách.

Bài 25.

Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2 . Trên đường thẳng d_1 lấy 10 điểm phân biệt, trên đường thẳng d_2 lấy 15 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu tam giác mà ba đỉnh của nó được chọn từ 25 điểm vừa nói trên.

Lời giải

⊙ Trường hợp 1: Lấy 2 điểm trên d_1 và 1 điểm trên d_2 .

⊙ Trường hợp 2: Lấy 1 điểm trên d_1 và 2 điểm trên d_2 .

- ⇒ Số tam giác thỏa bài toán là: $C_{10}^2.C_{15}^1 + C_{10}^1.C_{15}^2$.

Bài 26.

Cho đa giác n cạnh. Tìm n để đa giác có số đường chéo gấp đôi số cạnh.

Lời giải

- ♦ Đa giác n cạnh có n đỉnh.
- ♦ Mỗi đỉnh nối với $n-3$ đỉnh khác để tạo ra đường chéo
- ♦ Do đó n đỉnh sẽ có $n.(n-3)$ đường

- ♦ Mà 1 đường chéo được nối bởi 2 đỉnh nên số đường chéo thực là: $\frac{n(n-3)}{2}$





♦ Theo đề bài ta có: $\frac{n(n-3)}{2} = 2n \Leftrightarrow n^2 - 7n = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 0 (\text{loại}) \\ n = 7 (\text{tm}) \end{cases}$

Vậy $n = 7$

Bài 27.

Cho đa giác đều có 54 đường chéo. Hãy tính xem đa giác này có bao nhiêu cạnh.

Lời giải

- ♦ Giả sử đa giác có n đỉnh.
- ♦ Mỗi đỉnh nối với $n-3$ đỉnh khác để tạo ra đường chéo.
- ♦ Do đó n đỉnh sẽ có $n(n-3)$ đường.
- ♦ Mà 1 đường chéo được nối bởi 2 đỉnh nên số đường chéo thực là: $\frac{n(n-3)}{2}$
- ♦ Theo đề bài ta có: $\frac{n(n-3)}{2} = 54 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 108 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -9 (\text{loại}) \\ n = 12 (\text{tm}) \end{cases}$

Vậy đa giác có 12 cạnh.

Bài 28.

Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ nội tiếp đường tròn tâm O . Biết rằng số tam giác có đỉnh là 3 trong $2n$ của đa giác gấp 20 lần so với số hình chữ nhật có đỉnh là 4 trong $2n$ đỉnh của đa giác. Tìm n .

Lời giải

- ♦ Số tam giác có 3 đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1; A_2; ...; A_{2n}$ là C_{2n}^3 .
- ♦ Ứng với 2 đường chéo đi qua tâm của đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ cho tương ứng một hình chữ nhật có 4 đỉnh và là 4 điểm trong $2n$ điểm $A_1; A_2; ...; A_{2n}$.
- ♦ Và ngược lại mỗi hình chữ nhật như vậy sẽ cho ra 2 đường chéo đi qua tâm của đa giác đều đó.
- ♦ Số đường chéo đi qua tâm của đa giác đều $2n$ đỉnh là n nên số hình chữ nhật có 4 đỉnh trong $2n$ đỉnh là C_n^2 .

♦ Theo giả thiết ta có:

$$\begin{aligned} C_{2n}^3 &= 20C_n^2 \\ \Leftrightarrow \frac{(2n)!}{3!(2n-3)!} &= 20 \frac{n!}{2!(n-2)!} \\ \Leftrightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} &= 10n(n-1) \\ \Rightarrow 4n^3 - 36n^2 + 32n &= 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 0 (l) \\ n = 1 (l) \\ n = 8 (tm) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $n = 8$.





Bài toán bắt tay.

Có n ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) cặp vợ chồng đến dự tiệc Giáng sinh. Đến cuối bữa tiệc, trước khi ra về mọi người sẽ bắt tay với mọi người, nhưng nếu vợ chồng thì không bắt tay nhau. Hỏi có bao nhiêu cái bắt tay?

Lời giải

Tổng cộng có $2n$ người. Nếu 2 người bất kỳ đều bắt tay nhau thì số cái bắt tay là C_{2n}^2 .

Ta phải loại trừ ra: Số cái bắt tay của các ông với vợ mình là n .

Vậy có tất cả: $C_{2n}^2 - n$ cái bắt tay.

Bài toán chia kẹo.

Có n ($n \geq 1$) viên kẹo được chia ngẫu nhiên cho k đứa trẻ ($1 \leq k < n$). Hỏi có bao nhiêu cách chia kẹo sao cho không có đứa trẻ nào không có kẹo?

Lời giải

Với $k=1$ thì chỉ có một cách chia kẹo.

Nếu $k > 1$, thì ta trải n chiếc kẹo thành một hàng ngang. Tiếp theo, ta dùng cái thước đặt vào $n-1$ khe giữa các viên kẹo để chia nó thành k phần. Như vậy có tất cả C_{n-1}^{k-1} cách.

Vậy có tất cả C_{n-1}^{k-1} cách chia kẹo đúng cho cả trường hợp $k=1$.

Bài 29.

Giải các phương trình sau:

$$\textcircled{1} \frac{10P_{n-1}}{P_{n+1}} - 4 = \frac{2}{n+1}$$

$$\textcircled{2} A_n^2 - A_n^1 = 3$$

$$\textcircled{3} C_x^1 + C_x^2 + C_x^3 = \frac{7}{2}x$$

$$\textcircled{4} A_y^3 + C_y^{y-2} = 14y$$

$$\textcircled{5} 3C_{x+1}^2 + P_2x = 4A_x^2$$

Lời giải

$$\textcircled{1} \frac{10P_{n-1}}{P_{n+1}} - 4 = \frac{2}{n+1}$$

Điều kiện $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

$$\frac{10P_{n-1}}{P_{n+1}} - 4 = \frac{2}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{10(n-1)(n-2)\dots 2.1}{(n+1)n(n-1)(n-2)\dots 2.1} - 4 = \frac{2}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{(n+1)n} - 4 = \frac{2}{n+1}$$





$$\Leftrightarrow 10 - 4(n+1)n - 2n = 0 \Leftrightarrow 10 - 4(n+1)n - 2n = 0 \Leftrightarrow -4n^2 - 6n + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ n = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $n = 1$.

② $A_n^2 - A_n^1 = 3$

Điều kiện $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$$A_n^2 - A_n^1 = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2.1}{(n-2)(n-3)\dots 2.1} - \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2.1}{(n-1)(n-2)\dots 2.1} = 3$$

$$\Leftrightarrow n(n-1) - n = 3 \Leftrightarrow n^2 - 2n - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -1 \\ n = 3 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $n = 3$.

③ $C_x^1 + C_x^2 + C_x^3 = \frac{7}{2}x$

Điều kiện $x \in \mathbb{N}, x \geq 3$

$$C_x^1 + C_x^2 + C_x^3 = \frac{7}{2}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x!}{(x-1)!} + \frac{x!}{2!(x-2)!} + \frac{x!}{3!(x-3)!} = \frac{7}{2}x$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{x(x-1)}{2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{6} = \frac{7}{2}x$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)(x-2)}{6} = \frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow 6 + 3x - 3 + x^2 - 3x + 2 - 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 4$.

④ $A_y^3 + C_y^{y-2} = 14y$

Điều kiện $y \in \mathbb{N}, y \geq 3$

$$A_y^3 + C_y^{y-2} = 14y$$

$$\Leftrightarrow \frac{y!}{(y-3)!} + \frac{y!}{(y-2)!(y-y+2)!} = 14y$$

$$\Leftrightarrow y(y-1)(y-2) + \frac{y(y-1)}{2} = 14y$$

$$\Leftrightarrow (y-1)(y-2) + \frac{(y-1)}{2} = 14$$





$$\Leftrightarrow 2y^2 - 5y - 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2,5 \\ y = 5 \end{cases}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $y = 5$.

⑤ $3C_{x+1}^2 + P_2x = 4A_x^2$

Điều kiện $x \in \mathbb{N}, x \geq 2$

$$3C_{x+1}^2 + P_2x = 4A_x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x+1)!}{(x+1-2)!2!} + 2x = \frac{4x!}{(x-2)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x+1)x}{2} + 2x = 4x(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+3}{2} + 2 = 4(x-1) \Leftrightarrow 5x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 5$.

Bài 30.

Giải các phương trình

① $2A_x^2 + 50 = A_{2x}^2$.

③ $A_x^3 + 3A_x^2 = \frac{1}{2}P_{x+1}$.

⑤ $P_x A_x^2 + 72 = 6(2P_x + A_x^2)$.

⑦ $35C_{2x}^{x-1} = 132C_{2(x-1)}^x$.

② $P_{x+3} = 825.A_x^2.P_{x-5}$.

④ $A_{x-2}^2 + C_x^{x-2} = 101$.

⑥ $A_x^{10} + A_x^9 = 9A_x^8$.

⑧ $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x$.

Lời giải

① $2A_x^2 + 50 = A_{2x}^2$. Điều kiện: $\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ x \geq 2 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow 2 \frac{x!}{(x-2)!} + 50 = \frac{(2x)!}{(2x-2)!}$$

$$\Leftrightarrow 2x(x-1) + 50 = 2x(2x-1).$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 50 = 4x^2 - 2x \Leftrightarrow 2x^2 - 50 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 (n) \\ x = -5 (l) \end{cases}.$$

Vậy $x = 5$.

② $P_{x+3} = 825.A_x^2.P_{x-5}$. Điều kiện: $\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ x \geq 6 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow (x+3)! = 825.x(x-1).(x-5)!$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+3)!}{(x-5)!} = 825.x(x-1).$$





$$\Leftrightarrow (x+3)(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 825 \cdot x(x-1).$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x+2)(x+1)(x-2)(x-3)(x-4) = 825.$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+1)(x-3)(x+2)(x+3)(x-4) = 825.$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 2)(x^2 - x - 6)(x^2 - x - 12) = 825.$$

Đặt $t = x^2 - x - 2$.

$$\Leftrightarrow t(t-4)(t-10) = 825 \Leftrightarrow t(t-4)(t-10) = 825 \Leftrightarrow t^3 - 14t^2 + 40t - 825 = 0 \Leftrightarrow t = 15$$

Khi đó: $x^2 - x - 2 = 15 \Leftrightarrow x^2 - x - 17 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{69}}{2} (l) \\ x = \frac{1-\sqrt{69}}{2} (l) \end{cases}.$

Vậy không tìm được x thỏa yêu cầu bài toán.

③ $A_x^3 + 3A_x^2 = \frac{1}{2}P_{x+1}$. Điều kiện: $\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ x \geq 3 \end{cases}.$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) = \frac{1}{2}(x+1)!.$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x+1) - \frac{1}{2}(x+1)x(x-1)(x-2)! = 0.$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x+1) \left[1 - \frac{1}{2}(x-2)! \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 (L) \\ x = 1 (L) \\ x = -1 (L) \\ (x-2)! = 2 \end{cases} \Rightarrow (x-2)! = 2 \Leftrightarrow x-2 = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy $x = 4$.

④ $A_{x-2}^2 + C_x^{x-2} = 101$. Điều kiện: $\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ x \geq 4 \end{cases}.$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)!}{(x-4)!} + \frac{x!}{(x-2)!2!} = 101 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) + \frac{x \cdot (x-1)}{2} = 101.$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 5x + 6) + x^2 - x = 202 \Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 12 + x^2 - x = 202.$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 11x + 190 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 (n) \\ x = -\frac{19}{3} (l) \end{cases}.$$

Vậy $x = 10$.

⑤ $P_x A_x^2 + 72 = 6(2P_x + A_x^2)$ (đk $x \geq 2, x \in \mathbb{N}$).

$$\Leftrightarrow x! \cdot \frac{x!}{(x-2)!} + 72 = 6 \left(2 \cdot x! + \frac{x!}{(x-2)!} \right).$$

$$\Leftrightarrow x! \cdot x \cdot (x-1) + 72 = 6(2 \cdot x! + x(x-1)).$$





$$\Leftrightarrow x(x-1)(x!-6)+12(6-x!)=0.$$

$$\Leftrightarrow (x!-6)(x(x-1)-12)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x!=6 \\ x^2-x-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3(\text{loại}) \\ x=4 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } S = \{3; 4\}.$$

⑥ $A_x^{10} + A_x^9 = 9A_x^8$ (đk: $x \geq 10$) (đk: $x \geq 10, x \in \mathbb{N}$).

$$\Leftrightarrow \frac{x!}{(x-10)!} + \frac{x!}{(x-9)!} = 9 \cdot \frac{x!}{(x-8)!}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x-10)!} + \frac{1}{(x-9)(x-10)!} = 9 \cdot \frac{1}{(x-8)(x-9)(x-10)!}.$$

$$\Leftrightarrow (x-8)(x-9) + (x-8) = 9.$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 17x + 72 + x - 8 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 18x + 55 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=5(\text{loại}) \\ x=11(t/m) \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } S = \{11\}.$$

⑦ $35C_{2x}^{x-1} = 132C_{2(x-1)}^x$ (đk: $\begin{cases} 2x \geq x-1 \\ 2x-2 \geq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x \geq 2; x \in \mathbb{N}$).

$$\Leftrightarrow 35 \cdot \frac{2x!}{(x-1)!(x+1)!} = 132 \cdot \frac{(2x-2)!}{x!(x-2)!}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{35 \cdot 2x \cdot (2x-1) \cdot (2x-2)!}{(x-1)(x-2)!(x+1)x!} = \frac{132(2x-2)!}{x!(x-2)!}.$$

$$\Rightarrow 70x(2x-1) = 132 \cdot (x+1)(x-1).$$

$$\Leftrightarrow 140x^2 - 70x = 132x^2 - 132 \Leftrightarrow 8x^2 - 70x + 132 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=6(t/m) \\ x=\frac{11}{4}(\text{loại}) \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } S = \{6\}.$$

⑧ $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x$ (đk: $x \geq 3; x \in \mathbb{N}$).

$$\Leftrightarrow \frac{x!}{(x-1)!} + \frac{6 \cdot x!}{2!(x-2)!} + \frac{6 \cdot x!}{3!(x-3)!} = 9x^2 - 14x.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)!} + \frac{3}{(x-2) \cdot (x-3)!} + \frac{1}{(x-3)!} = \frac{9x^2 - 14x}{x!}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+3(x-1)+(x-1)(x-2)}{(x-1)!} - \frac{9x-14}{(x-1)!} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=7(t/m) \\ x=2(\text{loại}) \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } S = \{7\}.$$





III. NHỊ THỨC NEWTON

Bài 01.

Thực hiện khai triển.

$$\textcircled{1} \left(x + \frac{1}{2x}\right)^8.$$

$$\textcircled{2} \left(2x^2 - \frac{2}{x}\right)^6.$$

Lời giải

$$\textcircled{1} \left(x + \frac{1}{2x}\right)^8.$$

$$\begin{aligned} \text{♦ Ta có } \left(x + \frac{1}{2x}\right)^8 &= C_8^0 x^8 + C_8^1 x^7 \left(\frac{1}{2x}\right) + C_8^2 x^6 \left(\frac{1}{2x}\right)^2 + C_8^3 x^5 \left(\frac{1}{2x}\right)^3 + C_8^4 x^4 \left(\frac{1}{2x}\right)^4 \\ &+ C_8^5 x^3 \left(\frac{1}{2x}\right)^5 + C_8^6 x^2 \left(\frac{1}{2x}\right)^6 + C_8^7 x \left(\frac{1}{2x}\right)^7 + C_8^8 \frac{1}{2x} \\ &= C_8^0 x^8 + C_8^1 \frac{1}{2} x^6 + C_8^2 \frac{1}{2^2} x^4 + C_8^3 \frac{1}{2^3} x^2 + C_8^4 \frac{1}{2^4} + C_8^5 \frac{1}{2^5} \frac{1}{x^2} + C_8^6 \frac{1}{2^6} \frac{1}{x^4} + C_8^7 \frac{1}{2^7} \frac{1}{x^6} + C_8^8 \frac{1}{2^8} \frac{1}{x^8}. \\ &= x^8 + 4x^6 + 7x^4 + 7x^2 + \frac{35}{8} + \frac{7}{4} \frac{1}{x^2} + \frac{7}{16} \frac{1}{x^4} + \frac{1}{16} \frac{1}{x^6} + \frac{1}{256} \frac{1}{x^8}. \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \left(2x^2 - \frac{2}{x}\right)^6.$$

$$\begin{aligned} \text{♦ Ta có } \left(2x^2 - \frac{2}{x}\right)^6 &= C_6^0 (2x^2)^6 - C_6^1 (2x^2)^5 \frac{2}{x} + C_6^2 (2x^2)^4 \left(\frac{2}{x}\right)^2 - C_6^3 (2x^2)^3 \left(\frac{2}{x}\right)^3 \\ &+ C_6^4 (2x^2)^2 \left(\frac{2}{x}\right)^4 - C_6^5 2x^2 \left(\frac{2}{x}\right)^5 + C_6^6 \left(\frac{2}{x}\right)^6. \\ &= C_6^0 2^6 x^{12} - C_6^1 2^6 x^9 + C_6^2 2^6 x^6 - C_6^3 2^6 x^3 + C_6^4 2^6 - C_6^5 2^6 \frac{1}{x^4} + C_6^6 2^6 \frac{1}{x^6}. \\ &= 2^6 \left(x^{12} - 6x^9 + 15x^6 - 20x^3 + 15 - 6\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6}\right). \end{aligned}$$

Bài 02.

Tìm số hạng không chứa x trong khai triển.

$$\textcircled{1} \left(2x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^{10} \text{ với } x \neq 0.$$

$$\textcircled{2} \left(3x^2 - \frac{2}{x^3}\right)^{10} \text{ với } x \neq 0.$$

$$\textcircled{3} \left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^n \quad C_n^1 + C_n^3 = 13n \text{ (với } 2 \leq n \text{ và } x \neq 0). \quad \textcircled{4} \left(2 + x - \frac{3}{x^2}\right)^8 \text{ với } x \neq 0.$$

Lời giải

$$\textcircled{1} \left(2x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^{10} \text{ với } x \neq 0.$$





♦ Ta có $\left(2x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (2x^3)^{10-k} \left(\frac{2}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k 2^{10} x^{30-5k}$ với $k \in [0;10]$ và $k \in \mathbb{N}$.

♦ Số hạng không chứa x trong khai triển ứng với: $30-5k=0 \Leftrightarrow k=6$.

$\Rightarrow$ Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là: $C_{10}^6 2^{10}$.

② $\left(3x^2 - \frac{2}{x^3}\right)^{10}$ với $x \neq 0$.

♦ Ta có $\left(3x^2 - \frac{2}{x^3}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (3x^2)^{10-k} \left(-\frac{2}{x^3}\right)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k 3^{10-k} \cdot (-2)^k x^{20-5k}$ với $k \in [0;10]$ và $k \in \mathbb{N}$.

♦ Số hạng không chứa x trong khai triển ứng với: $20-5k=0 \Leftrightarrow k=4$.

$\Rightarrow$ Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là: $C_{10}^4 3^6 2^4$.

③ $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^n$ $C_n^1 + C_n^3 = 13n$ (với $2 \leq n$ và $x \neq 0$).

♦ Ta có: $C_n^1 + C_n^3 = 13n \Leftrightarrow \frac{n!}{1!(n-1)!} + \frac{n!}{3!(n-3)!} = 13n \Leftrightarrow 13n \Leftrightarrow n^2 - 3n - 62 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n=10 \\ n=-7 \end{cases}$.

♦ Do $n \geq 2 \Rightarrow n=10$ (thỏa mãn).

♦ Xét khai triển $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (x^2)^{10-k} \left(\frac{1}{x^3}\right)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{20-5k}$ với $k \in [0;10]$ và $k \in \mathbb{N}$.

♦ Số hạng không chứa x trong khai triển ứng với: $20-5k=0 \Leftrightarrow k=4$.

$\Rightarrow$ Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là: C_{10}^4 .

④ $\left(2 + x - \frac{3}{x^2}\right)^8$ với $x \neq 0$.

♦ Ta có $\left(2 + x - \frac{3}{x^2}\right)^8 = \sum_{k=0}^8 C_8^k 2^{8-k} \left(x - \frac{3}{x^2}\right)^k$.

♦ Xét khai triển $\left(x - \frac{3}{x^2}\right)^k = \sum_{i=0}^k C_k^i (x)^{k-i} \left(-\frac{3}{x^2}\right)^i = \sum_{i=0}^k C_k^i (-3)^i x^{k-3i}$.

$\Rightarrow \left(2 + x - \frac{3}{x^2}\right)^8 = \sum_{k=0}^8 \sum_{i=0}^k C_8^k C_k^i 2^{8-k} (-3)^i x^{k-3i}$ với $0 \leq i \leq k \leq 8$ và $i, k \in \mathbb{N}$.

♦ Số hạng không chứa x trong khai triển ứng với: $k-3i=0$.

i	0	1	2	3
k	0	3	6	9
	thỏa mãn	thỏa mãn	thỏa mãn	loại

$\Rightarrow$ Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là: $C_8^0 2^8 + C_8^3 C_3^1 2^5 (-3) + C_8^6 2^2 (-3)^3$.





Bài 03.

Tìm hệ số của

- ① x^4 trong khai triển $\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^{12}$.
- ② x^{28} trong khai triển $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40}$.
- ③ x^{12} trong khai triển $(x^2 + 1)^n$ biết rằng tổng các hệ số bằng 1024.
- ④ x^8 trong khai triển $(1 - x + x^2)^8$.

Lời giải

① x^4 trong khai triển $\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^{12}$.

$$\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} (-1)^k \cdot C_{12}^k \left(\frac{x}{3}\right)^{12-k} \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{12} (-1)^k \cdot C_{12}^k 3^{2k-12} \cdot x^{12-2k}.$$

♦ Hệ số của số hạng chứa x^4 ứng với k thỏa mãn $\Rightarrow 12 - 2k = 4 \Leftrightarrow k = 4$.

$\Rightarrow$ Vậy hệ số của số hạng chứa x^4 là: $(-1)^4 \cdot C_{12}^4 \cdot 3^{2 \cdot 4 - 12} = \frac{55}{9}$.

② x^{28} trong khai triển $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40}$.

$$\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40} = \sum_{k=0}^{40} C_{40}^k x^{40-k} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{40} C_{40}^k x^{40-3k}.$$

♦ Hệ số của số hạng chứa x^{28} ứng với k thỏa mãn $\Rightarrow 40 - 3k = 28 \Leftrightarrow k = 4$.

$\Rightarrow$ Vậy hệ số của số hạng chứa x^{28} là: $C_{40}^4 = 91390$.

③ x^{12} trong khai triển $(x^2 + 1)^n$ biết rằng tổng các hệ số bằng 1024.

♦ $(x^2 + 1)^n$ biết rằng tổng các hệ số bằng 1024 $\Leftrightarrow (1^2 + 1)^n = 1024 \Leftrightarrow n = 10$.

$$(x^2 + 1)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (x^2)^{10-k} \cdot 1^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{20-2k}.$$

♦ Hệ số của số hạng chứa x^{12} $\Rightarrow 20 - 2k = 12 \Leftrightarrow k = 4$.

$\Rightarrow$ Vậy hệ số của số hạng chứa x^{12} là: $C_{10}^4 = 210$.

④ x^8 trong khai triển $(1 - x + x^2)^8$.

$$\begin{aligned} (1 - x + x^2)^8 &= [1 + x(x-1)]^8 = \sum_{k=0}^8 C_8^k x^k (x-1)^k \\ &= \dots + C_8^4 x^4 (1-x)^4 + C_8^5 x^5 (1-x)^5 + C_8^6 x^6 (1-x)^6 + C_8^7 x^7 (1-x)^7 + C_8^8 x^8 (1-x)^8 \end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
 &= \dots + C_8^4 x^4 (\dots + C_4^1 x^1 + \dots) + C_8^5 x^5 (\dots - C_5^3 x^3 + \dots) + C_8^6 x^6 (\dots + C_6^2 x^2 - \dots) + \\
 &+ C_8^7 x^7 (\dots - C_7^1 x^1 + \dots) + C_8^8 x^8 (C_8^0 x^0 + \dots) \\
 &= \dots + x^8 [C_8^4 \cdot C_4^4 - C_8^5 \cdot C_5^3 + C_8^6 \cdot C_6^2 - C_8^7 \cdot C_7^1 + C_8^8 \cdot C_8^0] + \dots \\
 &\Rightarrow \text{Vậy hệ số của } x^8 \text{ là } C_8^4 \cdot C_4^4 - C_8^5 \cdot C_5^3 + C_8^6 \cdot C_6^2 - C_8^7 \cdot C_7^1 + C_8^8 \cdot C_8^0 = -125.
 \end{aligned}$$

Bài 04.

Tìm số hạng chứa:

① x^9 trong khai triển $\left(3x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^8$. ② $x^{15}y^6$ trong khai triển $(2x + x^2y^2)^{12}$.

Lời giải

① x^9 trong khai triển $\left(3x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^8$

♦ Số hạng tổng quát trong khai triển là :

$$C_8^k (3x^3)^k \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right)^{8-k} \quad (k \in N, k \leq 8)$$

$$= 3^k \cdot (-2)^{8-k} C_8^k \cdot x^{3k} \cdot x^{-16+2k} \quad (k \in N, k \leq 8)$$

$$= 3^k \cdot (-2)^{8-k} C_8^k \cdot x^{-16+5k} \quad (k \in N, k \leq 8)$$

♦ Số hạng chứa x^9 ứng với k thỏa mãn suy ra $-16+5k=9 \Leftrightarrow k=5$

$$\Rightarrow \text{Vậy số hạng chứa } x^9 \text{ trong khai triển là } 3^5 \cdot (-2)^3 C_8^5 \cdot (x)^9$$

② $x^{15}y^6$ trong khai triển $(2x + x^2y^2)^{12}$.

♦ Số hạng tổng quát trong khai triển là :

$$C_{12}^k (2x)^k \cdot (x^2y^2)^{12-k} \quad (k \in N, k \leq 12)$$

$$= 2^k \cdot C_{12}^k (x)^k \cdot (x)^{24-2k} \cdot (y)^{24-2k} \quad (k \in N, k \leq 12)$$

$$= 2^k \cdot C_{12}^k \cdot (x)^{24-k} \cdot (y)^{24-2k} \quad (k \in N, k \leq 12)$$

♦ Số hạng chứa $x^{15}y^6$ ứng với k thỏa mãn suy ra $\begin{cases} 24-k=15 \\ 24-2k=6 \end{cases} \Leftrightarrow k=9$

$$\Rightarrow \text{Vậy số hạng chứa } x^9 \text{ trong khai triển là } 2^9 \cdot C_{12}^9 \cdot x^{15} \cdot y^6.$$

Bài 05.

Tìm số tự nhiên n biết hệ số của x^2 trong khai triển $(1+3x)^n$ là 90.

Lời giải

♦ Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển là :

$$C_n^k (3x)^k \cdot (1)^{n-k} \quad (n, k \in N, k \leq n)$$





$$= 3^k \cdot C_n^k (x)^k \quad (n, k \in N, k \leq n)$$

♦ Số hạng chứa x^2 suy ra $k = 2$.

♦ Hệ số của x^2 trong khai triển là $3^2 \cdot C_n^2$ suy ra: $3^2 \cdot C_n^2 = 90$

$$\Leftrightarrow C_n^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!2!} = 10 \Leftrightarrow n(n-1) = 20 \Leftrightarrow n^2 - n - 20 = 0 \Leftrightarrow (n-5)(n+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 5(TM) \\ n = -4(L) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Vậy $n = 5$.

Bài 06.

Chứng minh :

$$\textcircled{1} C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}$$

$$\textcircled{2} C_{20}^1 + C_{20}^3 + C_{20}^5 + \dots + C_{20}^{19} = 2^{19}$$

$$\textcircled{3} C_n^0 + 6C_n^1 + 6^2C_n^2 + \dots + 6^n C_n^n = 7^n$$

$$\textcircled{4} 1 + 4C_n^1 + 4^2C_n^2 + \dots + 4^{n-1}C_n^{n-1} + 4^n C_n^n = 5^n$$

$$\textcircled{5} 3^{17}C_{17}^0 - 3^{16}.4C_{17}^1 + 3^{15}.4^2C_{17}^2 - \dots - 4^{17}C_{17}^{17} = -1$$

Lời giải

$$\textcircled{1} C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}$$

♦ Trong nhị thức Newton

$$(a+b)^{2n} = a^{2n}C_{2n}^0 + a^{2n-1}.bC_{2n}^1 + a^{2n-2}.b^2C_{2n}^2 + \dots + a^{2n-k}.b^kC_{2n}^k + \dots + b^{2n}C_{2n}^{2n}$$

♦ Chọn $a=1; b=1$ ta được: $2^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n}$ (1)

♦ Chọn $a=1; b=-1$ ta được: $0 = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - \dots + C_{2n}^{2n}$ (2)

♦ Cộng vế theo vế (1) và (2) ta được: $2C_{2n}^0 + 2C_{2n}^2 + \dots + 2C_{2n}^{2n} = 2^{2n} \Leftrightarrow C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} = 2^{2n-1}$

♦ Trừ vế theo vế (1) và (2) ta được: $2C_{2n}^1 + 2C_{2n}^3 + \dots + 2C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n} \Leftrightarrow C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}$

Vậy $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}$ (ĐPCM).

$$\textcircled{2} C_{20}^1 + C_{20}^3 + C_{20}^5 + \dots + C_{20}^{19} = 2^{19}$$

♦ Trong nhị thức Newton $(a+b)^n = a^nC_n^0 + a^{n-1}.bC_n^1 + a^{n-2}.b^2C_n^2 + \dots + a^{n-k}.b^kC_n^k + \dots + b^nC_n^n$

♦ Chọn $a=1; b=1; n=20$ ta được: $C_{20}^0 + C_{20}^1 + C_{20}^2 + C_{20}^3 + \dots + C_{20}^{20} = 2^{20}$ (1)

♦ Chọn $a=1; b=-1; n=20$ ta được: $C_{20}^0 - C_{20}^1 + C_{20}^2 - C_{20}^3 + \dots + C_{20}^{20} = 0$ (2)

Trừ vế theo vế (1) và (2) ta được:

$$2C_{20}^1 + 2C_{20}^3 + 2C_{20}^5 + \dots + 2C_{20}^{19} = 2^{20} \Leftrightarrow C_{20}^1 + C_{20}^3 + C_{20}^5 + \dots + C_{20}^{19} = 2^{19} \text{ (ĐPCM).}$$

$$\textcircled{3} C_n^0 + 6C_n^1 + 6^2C_n^2 + \dots + 6^n C_n^n = 7^n$$

♦ Trong nhị thức Newton $(a+b)^n = a^nC_n^0 + a^{n-1}.bC_n^1 + a^{n-2}.b^2C_n^2 + \dots + a^{n-k}.b^kC_n^k + \dots + b^nC_n^n$

♦ Chọn $a=1; b=6$ ta được:





$$(1+6)^n = 1^n C_n^0 + 1^{n-1} \cdot 6 C_n^1 + 1^{n-2} \cdot 6^2 C_n^2 + \dots + 6^n C_n^n \Leftrightarrow C_n^0 + 6 C_n^1 + 6^2 C_n^2 + \dots + 6^n C_n^n = 7^n \text{ (ĐPCM)}$$

$$\textcircled{4} 1 + 4 C_n^1 + 4^2 C_n^2 + \dots + 4^{n-1} C_n^{n-1} + 4^n C_n^n = 5^n$$

♦ Trong nhị thức Newton $(a+b)^n = a^n C_n^0 + a^{n-1} \cdot b C_n^1 + a^{n-2} \cdot b^2 C_n^2 + \dots + a^{n-k} \cdot b^k C_n^k + \dots + b^n C_n^n$

♦ Chọn $a=1; b=4$ ta được:

$$(1+4)^n = 1^n C_n^0 + 1^{n-1} \cdot 4 C_n^1 + 1^{n-2} \cdot 4^2 C_n^2 + \dots + 4^n C_n^n \Leftrightarrow C_n^0 + 4 C_n^1 + 4^2 C_n^2 + \dots + 4^n C_n^n = 5^n \text{ (ĐPCM)}$$

$$\textcircled{5} 3^{17} C_{17}^0 - 3^{16} \cdot 4 C_{17}^1 + 3^{15} \cdot 4^2 C_{17}^2 - \dots - 4^{17} C_{17}^{17} = -1$$

♦ Trong nhị thức Newton

$$(a-b)^n = a^n C_n^0 - a^{n-1} \cdot b C_n^1 + a^{n-2} \cdot b^2 C_n^2 - \dots + (-1)^k a^{n-k} \cdot b^k C_n^k + \dots + (-1)^n b^n C_n^n$$

♦ Chọn $a=3; b=4; n=17$ ta được:

$$(3-4)^{17} = 3^{17} C_{17}^0 - 3^{16} \cdot 4 C_{17}^1 + 3^{15} \cdot 4^2 C_{17}^2 - \dots - 4^{17} C_{17}^{17} \Leftrightarrow 3^{17} C_{17}^0 - 3^{16} \cdot 4 C_{17}^1 + 3^{15} \cdot 4^2 C_{17}^2 - \dots - 4^{17} C_{17}^{17} = -1$$

$$\text{Vậy: } 3^{17} C_{17}^0 - 3^{16} \cdot 4 C_{17}^1 + 3^{15} \cdot 4^2 C_{17}^2 - \dots - 4^{17} C_{17}^{17} = -1$$

Bài 07.

Chứng minh :

$$\textcircled{1} C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^n = 2^n$$

$$\textcircled{2} 8^0 C_n^0 + 8^1 C_n^1 + 8^2 C_n^2 + \dots + 8^n C_n^n = 9^n$$

Lời giải

$$\textcircled{1} C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^n = 2^n .$$

$$\diamond (x+1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \dots + C_n^{n-1} x^1 + C_n^n x^0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\diamond \text{ Trong (1) lấy } x=1 \text{ ta được } C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^n = 2^n$$

$$\textcircled{2} 8^0 C_n^0 + 8^1 C_n^1 + 8^2 C_n^2 + \dots + 8^n C_n^n = 9^n .$$

$$\diamond (1+x)^n = C_n^0 x^0 + C_n^1 x^1 + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n, \forall x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$\diamond \text{ Trong (2) lấy } x=8 \text{ ta được } 8^0 C_n^0 + 8^1 C_n^1 + \dots + 8^k C_n^k + \dots + 8^n C_n^n = 9^n$$

Bài 08.

Gọi T là số các tập con (kể cả tập rỗng) của một tập hợp có n phần tử. Chứng minh rằng $T = 2^n$.

Lời giải

$$\diamond \text{ Theo định nghĩa của tổ hợp ta có } T = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^n$$

$$(x+1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \dots + C_n^{n-1} x^1 + C_n^n x^0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$$

$$\diamond \text{ Từ (*) lấy } x=1 \text{ ta được } T = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^n = 2^n .$$





Bài 09.

Chứng minh rằng $C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$.

Lời giải

$$\begin{aligned} 0 &= (1-1)^n = C_n^0 (-1)^0 + C_n^1 (-1)^1 + C_n^2 (-1)^2 + \dots + C_n^n (-1)^n \\ &= C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 10.

Chứng minh rằng $7^n \left(C_n^0 + \frac{1}{7} C_n^1 + \frac{1}{7^2} C_n^2 + \frac{1}{7^3} C_n^3 + \dots + \frac{1}{7^n} C_n^n \right) = 8^n$.

Lời giải

♦ Đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\left(7^n C_n^0 + 7^{n-1} C_n^1 + 7^{n-2} C_n^2 + \dots + 7^1 C_n^{n-1} + 7^0 C_n^n \right) = 8^n \quad (1)$$

♦ Ta có $(x+1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \dots + C_n^{n-1} x^1 + C_n^n x^0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (2)$

♦ Trong (2), chọn $x=7$ ta được (1), tức là điều phải chứng minh.

Bài 11.

Chứng minh rằng $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + \dots + C_{2n}^{2n-1}$.

Lời giải

♦ Đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + C_{2n}^4 - C_{2n}^5 + \dots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = 0$$

♦ Ta có $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + C_{2n}^3 x^3 + C_{2n}^4 x^4 + C_{2n}^5 x^5 + \dots + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} + C_{2n}^{2n} x^{2n}$

♦ Từ dãy chọn $x=-1$ ta được

$$C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + C_{2n}^4 - C_{2n}^5 + \dots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = 0$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 12.

Chứng minh rằng $C_8^0 C_n^k + C_8^1 C_n^{k-1} + C_8^2 C_n^{k-2} + C_8^3 C_n^{k-3} + \dots + C_8^7 C_n^{k-7} + C_8^8 C_n^{k-8} = C_{n+8}^k$

Lời giải

♦ Ta có $(1+x)^{n+8} = \sum_{k=0}^{n+8} C_{n+8}^k x^k$, do đó hệ số của x^k trong khai triển này là C_{n+8}^k .

♦ Mặt khác

$$(1+x)^8 = C_8^0 + C_8^1 x + C_8^2 x^2 + C_8^3 x^3 + C_8^4 x^4 + C_8^5 x^5 + C_8^6 x^6 + C_8^7 x^7 + C_8^8 x^8$$

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^k x^k + C_n^{k+1} x^{k+1} + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n$$





- Bởi vậy hệ số của x^k trong khai triển của $(1+x)^8(1+x)^n$ thành đa thức là

$$C_8^0 C_n^k + C_8^1 C_n^{k-1} + C_8^2 C_n^{k-2} + C_8^3 C_n^{k-3} + \dots + C_8^7 C_n^{k-7} + C_8^8 C_n^{k-8}$$

- Vì $(1+x)^8(1+x)^n = (1+x)^{n+8}$ nên hệ số của x^k trong khai triển của $(1+x)^8(1+x)^n$ cũng chính là hệ số x^k trong khai triển $(1+x)^{n+8}$

- Do đó $C_8^0 C_n^k + C_8^1 C_n^{k-1} + C_8^2 C_n^{k-2} + C_8^3 C_n^{k-3} + \dots + C_8^7 C_n^{k-7} + C_8^8 C_n^{k-8} = C_{n+8}^k$

Bài 13.

Chứng minh rằng $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$

Lời giải

- Ta có $(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^k$, do đó hệ số của x^n khi khai triển $(1+x)^{2n}$ là C_{2n}^n .

- Mặt khác ta có $(1+x)^{2n} = (1+x)^n (x+1)^n$
 $= (C_n^0 + C_n^1 x^1 + \dots + C_n^n x^n) (C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \dots + C_n^n)$

- Bởi vậy hệ số của x^n khi khai triển $(1+x)^{2n}$ cũng là

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2$$

- Do đó $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$

Bài 14.

Rút gọn các tổng sau:

① $A = C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n$

② $B = C_{2015}^0 + C_{2015}^2 + C_{2015}^1 + \dots + C_{2015}^{1008}$

Lời giải

① $A = C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n$

- $A = C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n-1} + \dots + C_{2n+1}^{n+1}$

$$\Rightarrow 2A = C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n + C_{2n+1}^{n+1} + \dots + C_{2n+1}^{2n-1} + C_{2n+1}^{2n}$$

$$\Rightarrow 2A = (1+1)^{2n+1} - C_{2n+1}^0 - C_{2n+1}^{2n+1} = 2^{2n+1} - 2 \Rightarrow A = 2^{2n} - 1$$

② $B = C_{2015}^0 + C_{2015}^2 + C_{2015}^1 + \dots + C_{2015}^{1008}$

- Do $C_{2015}^0 = C_{2014}^0 = 1, C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ nên

$$A = C_{2014}^0 + C_{2014}^1 + C_{2014}^2 + C_{2014}^3 + C_{2014}^4 + \dots + C_{2014}^{1007} + C_{2014}^{1008}$$

$$\Rightarrow A = C_{2014}^{214} + C_{2014}^{214} + C_{2014}^{2012} + C_{2014}^{2011} + C_{2014}^{2010} + \dots + C_{2014}^{1007} + C_{2014}^{1006}$$





$$\Rightarrow 2A = (C_{2014}^0 + C_{2014}^1 + C_{2014}^2 + \dots + C_{2014}^{2014}) + (C_{2014}^{1006} + C_{2014}^{1007} + C_{2014}^{1008})$$

$$\Rightarrow 2A = (1+1)^{2014} + (C_{2015}^{1007} + C_{2014}^{1008}) \Rightarrow A = 2^{2013} + \frac{1}{2}(C_{2015}^{1007} + C_{2014}^{1008})$$

Bài 15.

Rút gọn biểu thức $S_k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^k C_n^k$ (với $n > 1, k \leq n$)

Lời giải

♦ Với $k < n$, áp dụng $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ và chú ý $C_n^0 = C_{n-1}^0 = 1$ ta được

$$S_k = C_n^0 - (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1) + (C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2) - (C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3) + \dots + (-1)^k (C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k) = (-1)^k C_{n-1}^k$$

♦ Với $k = n$ thì $S_k = S_n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = (1-1)^n = 0$

♦ Lưu ý. Nhiều em học sinh đã mắc sai lầm khi viết:

$$S_k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^k C_n^k = (1-1)^n = 0$$

♦ Phải xét, hai trường hợp đối với k như trong lời giải trên.

Bài 16.

Chứng minh rằng $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = n2^{n-1}$

Lời giải

♦ Ta có $C_n^k = C_n^{n-k}$, với n và k thuộc $\mathbb{Z}, 0 \leq k \leq n$.

$$\text{♦ Đặt } S = 1C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n \quad (1)$$

$$\text{♦ Khi đó } S = nC_n^0 + (n-1)C_n^1 + (n-2)C_n^2 + \dots + 1C_n^{n-1} \quad (2)$$

♦ Cộng (1) và (2) ta được

$$2S = nC_n^0 + nC_n^1 + nC_n^2 + \dots + nC_n^{n-1} + nC_n^n = n(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n) = n(1+1)^n \Rightarrow S = n.2^{n-1}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh

✧ Cách khác:

♦ Ta có:

$$kC_n^k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \quad (1)$$

$$nC_{n-1}^{k-1} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \quad (2)$$

♦ Từ (1) và (2) suy ra $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$

♦ Do đó $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = n(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^{n-1}) = n(1+1)^{n-1} = n.2^{n-1}$

Bài 17.

Tìm số nguyên dương n sao cho





$$C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2C_{2n+1}^3 - 4.2^3C_{2n+1}^4 + \dots + (2n+1)2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1} = 2005 \quad (*)$$

Trích đề ĐH KHỐI A – năm 2005

Lời giải

♦ Ta có:

$$kC_n^k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \quad (1)$$

$$nC_{n-1}^{k-1} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \quad (2)$$

♦ Từ (1) và (2) suy ra $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$

♦ Vậy $C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2C_{2n+1}^3 - 4.2^3C_{2n+1}^4 + \dots + (2n+1)2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1}$
 $= (2n+1)(C_{2n}^0 - 2C_{2n}^1 + 2^2C_{2n}^2 - 2^3C_{2n}^3 + \dots + 2^{2n}C_{2n}^{2n}) = (2n+1)(1-2)^{2n} = 2n+1$

♦ Bởi vậy (*) tương đương với $2n+1 = 2005 \Leftrightarrow n = 2004 \Leftrightarrow n = 1002$.

Bài 18.

Chứng minh rằng $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

Lời giải

♦ Ta có:

$$kC_n^k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \quad (1)$$

$$nC_{n-1}^{k-1} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \quad (2)$$

♦ Từ (1) và (2) suy ra $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1} \longrightarrow (k+1)C_{n+1}^{k+1} = (n+1)C_n^k \Rightarrow \frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$.

♦ Vậy $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{1}{n+1}(C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+1}^{n+1}) = \frac{(1+1)^{n+1} - C_{n+1}^0}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Vậy ta có điều phải chứng minh

Bài 19.

Chứng minh rằng $\frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 + \dots + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} = \frac{2^{2n}-1}{2n+1}$ (n là số nguyên dương. C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

Trích đề ĐH KHỐI A – năm 2007

Lời giải

♦ Ta có $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1} \longrightarrow (k+1)C_{n+1}^{k+1} = (n+1)C_n^k \Rightarrow \frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$.





♦ Vậy $\frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 + \dots + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} = \frac{1}{2n+1}(C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^4 + C_{2n+1}^6 + \dots + C_{2n+1}^{2n})$ (1)

♦ Mặt khác

$$(1+1)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n+1}$$

$$(1-1)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 - C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 - C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n} - C_{2n+1}^{2n+1}$$

$$\Rightarrow 2^{2n+1} + 0 = 2(C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^4 + \dots + C_{2n+1}^{2n})$$

$$\Rightarrow C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^4 + \dots + C_{2n+1}^{2n} = 2^{2n}$$

$$\Rightarrow C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^4 + \dots + C_{2n+1}^{2n} = 2^{2n} - C_{2n+1}^0 = 2^{2n} - 1 \quad (2).$$

Thay (2) vào (1) ta được điều phải chứng minh.

Bài 20.

Cho n là số nguyên dương. Tính tổng

$$C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$$

Trích đề ĐH KHỐI B – năm 2003

Lời giải

♦ Ta có $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1} \rightarrow (k+1)C_{n+1}^{k+1} = (n+1)C_n^k \Rightarrow \frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$.

♦ Vậy $C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$

$$= \frac{1}{n+1} [C_{n+1}^1 + (2^2-1)C_{n+1}^2 + (2^3-1)C_{n+1}^3 + \dots + (2^{n+1}-1)C_{n+1}^{n+1}]$$

$$= \frac{(2C_{n+1}^1 + 2^2C_{n+1}^2 + \dots + 2^{n+1}C_{n+1}^{n+1}) - (C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+1}^{n+1})}{n+1}$$

$$= \frac{C_{n+1}^0 + 2C_{n+1}^1 + 2^2C_{n+1}^2 + \dots + 2^{n+1}C_{n+1}^{n+1}}{n+1} - \frac{C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+1}^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{(1+2)^{n+1} - (1+1)^{n+1}}{n+1} = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$$

Bài 21.

Chứng minh rằng $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$

Lời giải

♦ Ta có $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = C_n^0 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + C_n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + C_n^n \cdot \frac{1}{n^n} \quad (*)$





♦ Nhận xét rằng $C_n^k \cdot \frac{1}{n^k} < \frac{1}{k!} \Leftrightarrow \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} < \frac{1}{k!} \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} < 1$

$\Leftrightarrow (n-k+1)(n-k+2)...n < n^k$ (đúng)

♦ Vậy từ (*) ta có $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$

Bài 22.

Tìm hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của $x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$.

Trích đề ĐH KHOA D - năm 2007

Lời giải

♦ Ta có $x(1-2x)^5 = x \sum_{k=0}^5 C_5^k (-2x)^k = \sum_{k=0}^5 C_5^k (-2)^k x^{k+1}$ (1)

$x^2(1+3x)^{10} = x^2 \sum_{j=0}^{10} C_{10}^j (3x)^j = \sum_{j=0}^{10} C_{10}^j 3^j x^{j+2}$ (2)

♦ Từ (1) và (2) suy ra số hạng chứa x^5 trong $x(1-2x)^5$ và trong $x^2(1+3x)^{10}$ lần lượt là $C_5^4 (-2)^4 x^5, C_{10}^3 3^3 x^5$.

♦ Do đó số hạng chứa x^5 khi khai triển $x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$ là

$$C_5^4 (-2)^4 x^5 + C_{10}^3 3^3 x^5 = (16C_5^4 + 27C_{10}^3) x^5 = 3320x^5.$$

Hệ số cần tìm: 3320.

Bài 23.

Với n là số nguyên dương, gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $(x^2+1)^n (x+2)^n$. Tìm n để $a_{3n-3} = 26n$.

Trích đề ĐH KHOA D - năm 2003

Lời giải

♦ Ta có $(x^2+1)^n (x+2)^n = \left(\sum_{k=0}^n C_n^k x^{2(n-k)} \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^n C_n^j x^{n-j} \cdot 2^j \right)$

♦ Khi nhân vào thì mỗi số hạng ở vế trái của (1) đều có dạng

$$C_n^k x^{2n-2k} \cdot C_n^j x^{n-j} \cdot 2^j = C_n^k \cdot C_n^j \cdot 2^j x^{3n-2k-j}$$

♦ Để $x^{3n-2k-j}$ là x^{3n-3} , điều kiện cần và đủ là

$3n-2k-j = 3n-3$ (chú ý là $n, k, j \in \mathbb{Z}; 0 \leq k \leq n; 0 \leq j \leq n$)

$\Leftrightarrow 2k+j = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} k=0 \\ j=3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} k=1 \\ j=1 \end{cases}$

♦ Vậy số hạng chứa x^{3n-3} là

$$C_n^0 \cdot C_n^3 \cdot 2^3 x^{3n-3} + C_n^1 \cdot C_n^1 \cdot 2^1 x^{3n-3} = (C_n^0 \cdot C_n^3 \cdot 2^3 + C_n^1 \cdot C_n^1 \cdot 2^1) x^{3n-3}$$





$$\text{Do đó } C_n^0 \cdot C_n^3 \cdot 2^3 + C_n^1 \cdot C_n^1 \cdot 2^1 = 26n \Leftrightarrow 8 \frac{n!}{3!(n-3)!} + 2 \left[\frac{n!}{1!(n-1)!} \right]^2 = 26n$$

$$\Leftrightarrow \frac{8(n-2)(n-1)n}{6} + 2n^2 = 26n \stackrel{\text{do } n > 0}{\Leftrightarrow} 4(n^2 - 3n + 2) + 6n = 78$$

$$\Leftrightarrow 4n^2 - 6n - 70 = 0 \Leftrightarrow 2n^2 - 3n - 35 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 5 \\ n = -\frac{7}{2} (l) \end{cases}$$

♦ Kết luận: $n = 5$.

Bài 24.

Cho khai triển: $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$ và các hệ số $a_0, a_1, \dots, a_n$ thoả mãn hệ thức: $a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096$. Hãy tìm số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Trích đề ĐH KHỐI A – năm 2008

Lời giải

♦ Từ $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, lấy $x = \frac{1}{2}$, ta được $\left(1+2 \cdot \frac{1}{2}\right)^n = a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{2^n}$

♦ Do đó theo giả thiết $2^n = 4096 \Leftrightarrow 2^n = 2^{12} \Leftrightarrow n = 12$.

♦ Ta có $(1+2x)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (2x)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k 2^k x^k$.

♦ Số hạng chứa x^k là $T_k = C_{12}^k 2^k x^k, \forall k = 0, 1, \dots, 12$. Do đó $a_k = C_{12}^k \cdot 2^k$.

♦ Lúc này ta có sự tương đương sau:

$$a_k < a_{k+1} \quad (k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq 11) \Leftrightarrow C_{12}^k 2^k < C_{12}^{k+1} 2^{k+1} \\ \Leftrightarrow \frac{12!}{k!(12-k)!} < \frac{12! \cdot 2}{(k+1)!(11-k)!} \Leftrightarrow \frac{1}{(12-k)} < \frac{2}{(k+1)} \Leftrightarrow k+1 < 24-2k \Leftrightarrow 3k < 23 \Leftrightarrow k < \frac{23}{3}.$$

♦ Vậy $a_k < a_{k+1} \Leftrightarrow k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Tức là $\begin{cases} a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8 \\ a_8 \geq a_9 \geq a_{10} \geq a_{11} \geq a_{12} \end{cases}$

♦ Vậy hệ số a_k lớn nhất là $a_8 = C_{12}^8 2^8 = 495 \cdot 256 = 126720$.

Bài 25.

Tìm $k \in \{0, 1, 2, \dots, 2005\}$ sao cho C_{2005}^k đạt giá trị lớn nhất.

Trích đề ĐỢI BỊ ĐH KHỐI D – năm 2005

Lời giải

♦ Với $k \in \{0, 1, 2, \dots, 2005\}$, điều kiện cần và đủ để $C_{2005}^k \geq C_{2005}^{k+1}$ là

$$\frac{2005!}{k!(2005-k)!} \geq \frac{2005!}{(k+1)!(2005-k-1)!} \Leftrightarrow \frac{1}{2005-k} \geq \frac{1}{k+1}$$

$$\Leftrightarrow 2005-k \leq k+1 \Leftrightarrow 2004 \leq 2k \Leftrightarrow k \geq 1002 \Leftrightarrow k \in \{1002, 1003, \dots, 2004\}$$





♦ Vậy $C_{2005}^{1002} \geq C_{2005}^{1003} \geq C_{2005}^{1004} \geq \dots \geq C_{2005}^{2005}$.

♦ Tương tự ta có

$$C_{2005}^k \leq C_{2005}^{k+1} \Leftrightarrow \frac{2005!}{k!(2005-k)!} \leq \frac{2005!}{(k+1)!(2005-k-1)!} \Leftrightarrow \frac{1}{2005-k} \leq \frac{1}{k+1}$$

$$\Leftrightarrow 2005-k \geq k+1 \Leftrightarrow 2004 \geq 2k \Leftrightarrow k \leq 1002 \Leftrightarrow k \in \{0, 1, \dots, 1002\}$$

♦ Vậy $C_{2005}^0 \leq C_{2005}^1 \leq C_{2005}^2 \leq \dots \leq C_{2005}^{1002}$.

♦ Tóm lại $C_{2005}^0 \leq C_{2005}^1 \leq C_{2005}^2 \leq \dots \leq C_{2005}^{1002} \geq C_{2005}^{1003} \geq C_{2005}^{1004} \geq \dots \geq C_{2005}^{2005}$

♦ Mà $C_{2005}^{1002} = C_{2005}^{1003}$ nên C_{2005}^k lớn nhất khi và chỉ khi $k=1002$ hoặc $k=1003$.

IV. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

Bài 01.

Tiến hành thí nghiệm ngẫu nhiên: Gieo một con súc sắc 2 lần.

① Mô tả không gian mẫu Ω , tính số phần tử của Ω .

② Mô tả các biến cố sau, tính số phần tử của biến cố đó.

A: “Biến cố súc sắc tung lần 1 xuất hiện mặt 3 chấm”.

B: “Biến cố súc sắc tung lần 2 xuất hiện mặt 4 chấm”.

C: “Biến cố súc sắc tung lần 1 là số lẻ”.

D: “Ít nhất một lần xuất hiện mặt 3 chấm”.

E: “Biến cố số chấm xuất hiện trên 2 con súc sắc hơn kém nhau 2 đơn vị”.

③ Tính xác suất các biến cố nói trên.

Lời giải

① Mô tả không gian mẫu Ω , tính số phần tử của Ω .

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

(trong đó: x và y tương ứng là kết quả của việc gieo con súc sắc thứ nhất và thứ hai)

Số phần tử của Ω là 36.

② Mô tả các biến cố sau, tính số phần tử của biến cố đó.

✎ A: “Biến cố súc sắc tung lần 1 xuất hiện mặt 3 chấm”.

$$\Omega_A = \{(3;1), (3;2), (3;3), (3;4), (3;5), (3;6)\}.$$





⇒ Nên số phần tử của biến cố A là 6.

B: “**Biến cố súc sắc tung lần 2 xuất hiện mặt 4 chấm**”.

$$\Omega_B = \{(1;4), (2;4), (3;4), (4;4), (5;4), (6;4)\}.$$

⇒ Nên số phần tử của biến cố B là 6.

C: “**Biến cố súc sắc tung lần 1 là số lẻ**”.

$$\Omega_C = \{(1;1), (1;2), (1;3), (1;4), (1;5), (1;6), (3;1), (3;2), (3;3), (3;4), (3;5), (3;6), (5;1), (5;2), (5;3), (5;4), (5;5), (5;6)\}.$$

⇒ Nên số phần tử của biến cố C là 18.

D: “**Ít nhất một lần xuất hiện mặt 3 chấm**”.

$$\Omega_D = \{(1;3), (2;3), (3;3), (4;3), (5;3), (6;3), (3;1), (3;2), (3;4), (3;5), (3;6)\}.$$

⇒ Nên số phần tử của biến cố D là 11.

E: “**Biến cố số chấm xuất hiện trên 2 con súc sắc hơn kém nhau 2 đơn vị**”.

$$\Omega_E = \{(1;3), (2;4), (3;5), (4;6), (3;1), (4;2), (5;3), (6;4)\}.$$

⇒ Nên số phần tử của biến cố E là 8.

③ Tính xác suất các biến cố nói trên.

Xác suất của biến cố A : “Biến cố súc sắc tung lần 1 xuất hiện mặt 3 chấm” là:

$$\Rightarrow P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Xác suất của biến cố B : “Biến cố súc sắc tung lần 2 xuất hiện mặt 4 chấm” là:

$$\Rightarrow P(B) = \frac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Xác suất của biến cố C : “Biến cố súc sắc tung lần 1 là số lẻ” là:

$$\Rightarrow P(C) = \frac{|\Omega_C|}{|\Omega|} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

Xác suất của biến cố D : “Ít nhất một lần xuất hiện mặt 3 chấm” là:

$$\Rightarrow P(D) = \frac{|\Omega_D|}{|\Omega|} = \frac{11}{36}.$$

Xác suất của biến cố E : “Biến cố số chấm xuất hiện trên 2 con súc sắc hơn kém nhau 2 đơn vị” là:

$$\Rightarrow P(E) = \frac{|\Omega_E|}{|\Omega|} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}.$$

Bài 02.

Gieo một đồng xu rồi gieo súc sắc.

① Mô tả không gian mẫu Ω .

② Tính xác suất các biến cố sau:

A : “Đồng xu xuất hiện mặt hình”.

B : “Con súc sắc xuất hiện mặt có số chấm là số lẻ”.





C: "Con súc sắc xuất hiện mặt có số chấm là số lẻ và đồng xu xuất hiện mặt hình".
D: "Con súc sắc xuất hiện mặt có số chấm < 5 và đồng xu xuất hiện mặt sô".

Lời giải

① Mô tả không gian mẫu Ω .

- Ký hiệu mặt hình của đồng xu là H và mặt sô của đồng xu là S
- Không gian mẫu là: $\Omega = \{H1; H2; H3; H4; H5; H6; S1; S2; S3; S4; S5; S6\}$ Do đó: $|\Omega| = 12$.

② Tính xác suất các biến cố sau:

➤ A: "Đồng xu xuất hiện mặt hình".

- Kết quả thuận lợi của biến cố A là: $\Omega_A = \{H1; H2; H3; H4; H5; H6\}$. Do đó: $|\Omega_A| = 6$

Vậy xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

➤ B: "Con súc sắc xuất hiện mặt có số chấm là số lẻ".

- Kết quả thuận lợi của biến cố B là: $\Omega_B = \{H1; H3; H5; S1; S3; S5\}$. Do đó: $|\Omega_B| = 6$.

Vậy xác suất của biến cố B là: $P(B) = \frac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

➤ C: "Con súc sắc xuất hiện mặt có số chấm là số lẻ và đồng xu xuất hiện mặt hình".

- Kết quả thuận lợi của biến cố C là: $\Omega_C = \{H1; H3; H5\}$. Do đó: $|\Omega_C| = 3$.

Vậy xác suất của biến cố C là: $P(C) = \frac{|\Omega_C|}{|\Omega|} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

➤ D: "Con súc sắc xuất hiện mặt có số chấm < 5 và đồng xu xuất hiện mặt sô".

- Kết quả thuận lợi của biến cố D là: $\Omega_D = \{S1; S2; S3; S4\}$. Do đó: $|\Omega_D| = 4$.

Vậy xác suất của biến cố D là: $P(D) = \frac{|\Omega_D|}{|\Omega|} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Bài 03.

Chọn ngẫu nhiên số tự nhiên bé hơn 100.

- ① Mô tả không gian mẫu Ω .
- ② Tính xác suất của biến cố A: "Số được chọn là số nguyên tố", B: "Số được chọn chia hết cho 4".

Lời giải

① Mô tả không gian mẫu Ω .

$$\Omega = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots; 98; 99\}$$

② Tính xác suất của biến cố A: "Số được chọn là số nguyên tố", B: "Số được chọn chia hết cho 4".

- $\Omega_A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97\}$

- Có 25 số nhỏ hơn 100 và là số nguyên tố nên $P(A) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$





- ♦ Số được chọn chia hết cho 4 nên có dạng $n = 4k$, ta có $0 \leq 4k \leq 99 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 24,75$.
 - ♦ Vậy có 25 số nhỏ hơn 100 và chia hết cho 4
- $\Rightarrow$ Xác suất của biến cố B: $P(B) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

Bài 04.

Một người đi du lịch mang 3 hộp thịt, 2 hộp quả và 3 hộp sữa. Do trời mưa nên các hộp bị mất nhãn. Người đó chọn ngẫu nhiên 3 hộp. Tính xác suất để trong đó có 1 hộp thịt, 1 hộp sữa và 1 hộp quả.

Lời giải

- ♦ Xác suất để trong đó có 1 hộp thịt, 1 hộp sữa và 1 hộp quả là $\frac{C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_3^1}{C_8^3} = \frac{9}{28}$

Bài 05.

Một bình chứa 16 viên bi với 7 viên bi trắng, 6 viên bi đen và 3 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất sao cho

- ① Lấy được cả 3 viên bi đỏ.
- ② Lấy được 1 viên bi trắng, 1 viên bi đen, 1 viên bi đỏ.

Lời giải

① Lấy được cả 3 viên bi đỏ.

- ♦ Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{16}^3$.
- ♦ Gọi biến cố A: “Lấy được cả 3 viên bi đỏ”.
- ♦ Từ 3 viên bi đỏ lấy 3 viên nên $n(A) = 1$.

Vậy $P(A) = \frac{1}{C_{16}^3} = \frac{1}{560}$.

② Lấy được 1 viên bi trắng, 1 viên bi đen, 1 viên bi đỏ.

- ♦ Gọi biến cố B: “Lấy được 1 viên bi trắng, 1 viên bi đen, 1 viên bi đỏ”.
- ♦ $n(B) = C_7^1 \cdot C_6^1 \cdot C_3^1 = 63$.

Vậy $P(B) = \frac{63}{560} = \frac{9}{80}$.

Bài 05.

Trong danh sách 10 đường phố cần tu sửa ở TP.HCM, có 2 đường thuộc quận Bình Thạnh, 4 đường thuộc quận 4, 4 đường thuộc quận Phú Nhuận. Chọn ngẫu nhiên 4 đường để tu sửa đợt đầu. Tính xác suất để

- ① 2 đường thuộc quận 4, 2 đường thuộc quận Phú Nhuận được chọn.
- ② 1 đường thuộc quận Bình Thạnh, 2 đường thuộc quận 4 và 1 đường thuộc quận Phú Nhuận được chọn.

Lời giải





♦ Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{10}^4 = 210$.

① 2 đường thuộc quận 4, 2 đường thuộc quận Phú Nhuận được chọn.

♦ Gọi biến cố A: “Chọn 2 đường thuộc quận 4, 2 đường thuộc quận Phú Nhuận”.

♦ Khi đó $n(A) = C_4^2 \cdot C_4^2 = 36$.

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{36}{210} = \frac{6}{35}.$$

② 1 đường thuộc quận Bình Thạnh, 2 đường thuộc quận 4 và 1 đường thuộc quận Phú Nhuận được chọn.

♦ Gọi biến cố B: “Chọn 1 đường thuộc quận Bình Thạnh, 2 đường thuộc quận 4 và 1 đường thuộc quận Phú Nhuận”.

♦ Khi đó $n(B) = C_2^1 \cdot C_4^2 \cdot C_4^1 = 48 \longrightarrow P(B) = \frac{48}{210} = \frac{8}{35}$.

Bài 07.

Mỗi đề thi có 5 câu được chọn ra từ 100 câu có sẵn. Một học sinh học thuộc 80 câu. Tìm xác suất để học sinh đó rút ngẫu nhiên ra 1 đề thi có 4 câu đã học thuộc.

Lời giải

♦ Ta có : Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{100}^5$.

♦ Gọi A là biến cố học sinh đó rút ngẫu nhiên ra 1 đề thi có 4 câu đã học thuộc

$$\Rightarrow n(A) = C_{80}^4 \cdot C_{20}^1 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_{80}^4 \cdot C_{20}^1}{C_{100}^5} = \frac{5135}{12222}.$$

Bài 08.

Tủ lạnh của nhà bạn A có 12 quả trứng, trong đó có 5 quả bị hỏng, mẹ bạn A lấy ngẫu nhiên từ đó ra 3 quả trứng để làm món trứng chiên. Tính xác suất để trong 3 quả trứng mẹ bạn A lấy ra có 2 quả bị hỏng.

Lời giải

♦ Ta có : Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{12}^3$.

♦ Gọi B là biến cố trong 3 quả trứng mẹ bạn A lấy ra có 2 quả bị hỏng $\Rightarrow n(B) = C_5^2 \cdot C_7^1$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{C_5^2 \cdot C_7^1}{C_{12}^3} = \frac{7}{22}.$$

Bài 09.

Một lớp có 10 học sinh nam và 12 học sinh nữ. Cần chọn ra 6 học sinh để tham gia chiến dịch “Hoa Phượng Đỏ”. Tính xác suất để 6 học sinh được chọn đó phải có ít nhất 2 học sinh nữ và 2 học sinh nam.

Lời giải

♦ Ta có : Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{22}^6$.

♦ Gọi A “6 học sinh được chọn đó phải có ít nhất 2 học sinh nữ và 2 học sinh nam”.

♦ Có các trường hợp sau:





- ⊙ **Trường hợp 1:** Trong 6 học sinh được chọn có 2 học sinh nữ và 4 học sinh nam có : $C_{12}^2 \cdot C_{10}^4$ cách chọn.
- ⊙ **Trường hợp 2:** Trong 6 học sinh được chọn có 3 học sinh nữ và 3 học sinh nam có : $C_{12}^3 \cdot C_{10}^3$ cách chọn.
- ⊙ **Trường hợp 3:** Trong 6 học sinh được chọn có 4 học sinh nữ và 2 học sinh nam có : $C_{12}^4 \cdot C_{10}^2$ cách chọn.

♦ Áp dụng quy tắc cộng ta có : $n(A) = C_{12}^2 \cdot C_{10}^4 + C_{12}^3 \cdot C_{10}^3 + C_{12}^4 \cdot C_{10}^2 = 62535$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{62535}{C_{22}^6} = \frac{1895}{2261}.$$

Bài 10.

Từ một cỗ bài tú lơ khơ 52 con, rút ngẫu nhiên cùng lúc bốn con. Tính xác suất sao cho

- ① Cả bốn con đều là át.
- ② Được hai con át và hai con K.
- ③ Được ít nhất một con át.

Lời giải

♦ Lấy bốn con bất kì từ 52 con nên không gian mẫu gồm các tổ hợp chập 4 của 52 phần tử.
 $\Rightarrow$ Vậy $n(\Omega) = C_{52}^4 = 270725$.

① Cả bốn con đều là át.

- ♦ Gọi biến cố A : “ Bốn con rút ra đều là át”.
- ♦ Rút bốn con át từ 4 con át nên $n(A) = C_4^4 = 1$.

$$\Rightarrow \text{Vậy xác suất rút được bốn con đều là át là } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{270725}.$$

② Được hai con át và hai con K.

- ♦ Gọi biến cố B : “ Bốn con rút ra được hai con át và hai con K”.
- ♦ Rút hai con át từ bốn con át nên ta có C_4^2 cách.
- ♦ Rút hai con K từ bốn con K nên ta có C_4^2 cách.
- ♦ Từ đó $n(B) = C_4^2 \cdot C_4^2 = 36$.

$$\Rightarrow \text{Vậy xác suất rút ra bốn con có hai con át và hai con K là } P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{36}{270725}.$$

③ Được ít nhất một con át.

- ♦ Gọi biến cố C : “ Bốn con rút ra được ít nhất một con át”.
- $\Rightarrow \bar{C}$: “ Bốn con rút ra không có con át nào”.
- ♦ Rút bốn con từ 48 con không có át nên ta có $C_{48}^4 = 194580$.
- ♦ Từ đó $n(\bar{C}) = 194580$.

$$\Rightarrow \text{Vậy xác suất rút ra có ít nhất một con át là } P(C) = 1 - \frac{n(\bar{C})}{n(\Omega)} = 1 - \frac{194580}{270725} = \frac{76145}{270725}.$$





Bài 11.

Một hộp đựng chín thẻ đánh số từ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Rút ngẫu nhiên hai thẻ. Tính xác suất để

① Tích hai số nhận được là số lẻ.

② Tích hai số nhận được là số chẵn.

Lời giải

♦ Lấy hai thẻ bất kì từ 9 thẻ nên không gian mẫu gồm các tổ hợp chập 2 của 9 phần tử.

⇒ Vậy $n(\Omega) = C_9^2 = 36$.

① **Tích hai số nhận được là số lẻ.**

♦ Gọi biến cố A : “Tích hai số nhận được là số lẻ”.

♦ Hai thẻ nhận được đều là số lẻ, rút hai thẻ bất kì từ 5 thẻ ghi số lẻ $n(A) = C_5^2 = 10$.

⇒ Vậy xác suất rút được hai thẻ có tích hai số nhận được là số lẻ là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

② **Tích hai số nhận được là số chẵn.**

♦ Gọi biến cố B : “Tích hai số nhận được là số chẵn”.

♦ Ta có $A = \bar{B}$ nên $P(A) = P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$.

Bài 12.

Có hai hộp bi, mỗi hộp có 2 bi đỏ và 8 bi trắng. Các viên bi chỉ khác nhau về màu. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra 3 viên bi. Tìm xác suất để lấy được số bi đỏ và số bi đỏ lấy ra là bằng nhau.

Lời giải

♦ Lấy 3 viên bi từ 10 viên bi, ta có $n(\Omega) = C_{10}^3 = 120$.

⊙ **Trường hợp 1:** Gọi A là biến cố: “Lấy 3 viên bi được 1 bi trắng và 2 bi đỏ”. Có $n(A) = C_2^2.C_8^1 = 8$.

♦ Nên $P(A) = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$.

♦ Gọi A_1 là biến cố: “Lấy ở hộp thứ nhất 3 viên bi được 1 bi trắng và 2 bi đỏ”, $P(A_1) = \frac{1}{15}$.

♦ Gọi A_2 là biến cố: “Lấy ở hộp thứ hai 3 viên bi được 1 bi trắng và 2 bi đỏ” $P(A_2) = \frac{1}{15}$.

♦ Vì A_1 và A_2 là hai biến cố độc lập nên: $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2) = \frac{1}{225}$.

⊙ **Trường hợp 2:** Gọi B là biến cố: “Lấy 3 viên bi được 2 bi trắng và 1 bi đỏ”.

♦ Có $n(B) = C_8^2.C_2^1 = 8 = 56$. Nên $P(B) = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}$.

♦ Gọi B_1 là biến cố: “Lấy ở hộp thứ nhất 3 viên bi được 1 bi trắng và 2 bi đỏ”, $P(B_1) = \frac{7}{15}$.

♦ Gọi B_2 là biến cố: “Lấy ở hộp thứ hai 3 viên bi được 1 bi trắng và 2 bi đỏ” $P(B_2) = \frac{7}{15}$.





• Vì B_1 và B_2 là hai biến cố độc lập nên: $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2) = \frac{49}{225}$.

Vậy xác suất cần tìm là: $P = \frac{1}{225} + \frac{49}{225} = \frac{50}{225} = \frac{2}{9}$.

Bài 13.

Đội tuyển văn nghệ của một trường phổ thông có 3 học sinh nữ khối 12, 4 học sinh nam khối 11 và 2 học sinh nữ khối 10. Để thành lập đội tuyển văn nghệ dự thi cấp tỉnh nhà trường cần chọn 5 học sinh từ 9 học sinh trên. Tính xác suất để trong 5 học sinh được chọn có cả học sinh nam, học sinh nữ và có cả học sinh ba khối.

Lời giải

- Chọn 5 học sinh từ 9 học sinh, ta có: $n(\Omega) = C_9^5 = 126$.
- Gọi A là "Lấy 5 bạn học sinh có học sinh nam, học sinh nữ và có đủ học sinh ba khối".
- Để lấy ra 5 bạn có cả nam và nữ và có cả học sinh ba khối ta xét các trường hợp sau:

- ⊙ Trường hợp 1: 5 bạn có 1 nữ (k10), 2 bạn nam (k11), 2 bạn nữ (k12): $C_2^1 \cdot C_4^2 \cdot C_3^2 = 36$ cách chọn.
- ⊙ Trường hợp 2: 5 bạn có 2 nữ (k10), 2 bạn nam (k11), 1 bạn nữ (k12): $C_2^2 \cdot C_4^2 \cdot C_3^1 = 18$ cách chọn.
- ⊙ Trường hợp 3: 5 bạn có 2 nữ (k10), 1 bạn nam (k11), 2 bạn nữ (k12): $C_2^2 \cdot C_4^1 \cdot C_3^2 = 12$ cách chọn.
- ⊙ Trường hợp 4: 5 bạn có 1 nữ (k10), 1 bạn nam (k11), 3 bạn nữ (k12): $C_2^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^3 = 8$ cách chọn.
- ⊙ Trường hợp 5: 5 bạn có 1 nữ (k10), 3 bạn nam (k11), 1 bạn nữ (k12): $C_2^1 \cdot C_4^3 \cdot C_3^1 = 24$ cách chọn.

• Vậy $n(A) = 36 + 18 + 12 + 8 + 24 = 98$.

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{98}{126} = \frac{7}{9}.$$

Bài 14.

Hội đồng coi thi THPT trong đó có 12 giáo viên trường A , 10 giáo viên trường B , 8 giáo viên trường C . Chủ tịch hội đồng coi thi chọn 2 cán bộ coi thi chứng kiến niêm phong gói đựng phong bì đề thi. Tính xác suất để 2 cán bộ coi thi được chọn là giáo viên của 2 trường THPT khác nhau.

Lời giải

- Gọi A là biến cố "Chọn 2 cán bộ coi thi là giáo viên của 2 trường THPT khác nhau".
- Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{30}^2 = 435$.
- Số phần tử của $n(A) = C_{12}^1 \cdot C_{10}^1 + C_{10}^1 \cdot C_8^1 + C_8^1 \cdot C_{12}^1 = 296$.

$$\Rightarrow P(A) = \frac{296}{435}.$$

Bài 15.

Có 2 bạn nam và 2 bạn nữ được xếp ngồi ngẫu nhiên vào 4 ghế xếp thành 2 dãy đối diện nhau. Tính xác suất sao cho:

- ① Nam và nữ ngồi đối diện nhau.
- ② Nữ ngồi đối diện nhau.

Lời giải





① Nam và nữ ngồi đối diện nhau.

- ♦ Xếp hai nam ngồi vào ghế có $2^2 \cdot 2!$ cách xếp.
- ♦ Khi đó có $2!$ cách xếp hai nữ ngồi vào hai ghế còn lại.
- ⇒ Vậy có $2^2 \cdot 2! \cdot 2! = 16$ cách xếp.

② Nữ ngồi đối diện nhau.

- ♦ Xếp hai nữ ngồi đối diện nhau có $2 \cdot 2!$ cách xếp.
- ♦ Xếp hai nam vào hai ghế còn lại có $2!$ cách xếp.
- ⇒ Vậy có $2 \cdot 2! \cdot 2! = 8$ cách xếp.

Bài 16.

Một đoàn tàu có 5 toa ở một sân ga. Có 5 hành khách từ sân ga lên tàu, mỗi người độc lập với nhau và chọn một toa một cách ngẫu nhiên. Tính xác suất của các biến có sau:

- ① A: "Mỗi toa có đúng một người lên".
- ② B: "Mỗi toa có 2 người lên, 3 toa mỗi toa có 1 người lên và 1 toa không có người nào cả".
- ③ C: "1 toa 2 người, 1 toa có 3 người và 3 toa không có người nào cả".

Lời giải

- ♦ Số phần tử của không gian mẫu $|\Omega| = 5^5$.

① A: "Mỗi toa có đúng một người lên".

- ♦ Số khả năng thuận lợi của biến cố A: $|\Omega_A| = 5!$.

$$\Rightarrow \text{Suy ra } P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{5!}{5^5}.$$

② B: "Mỗi toa có 2 người lên, 3 toa mỗi toa có 1 người lên và 1 toa không có người nào cả".

- ♦ Ta chọn 4 người trong 5 người có C_5^4 cách chọn.
- ♦ Chọn 4 toa trong 5 toa tàu có C_5^4 cách chọn.
- ♦ Xếp 4 người trên vào 4 toa tàu đã chọn có $4!$ cách xếp.
- ♦ Khi đó, người còn lại có 4 cách lên tàu (tương ứng với 4 toa tàu đã có khách).
- ♦ Do đó số khả năng thuận lợi cho biến cố B là $|\Omega_B| = C_5^4 \cdot C_5^4 \cdot 4! \cdot 4$.

$$\Rightarrow \text{Suy ra } P(B) = \frac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \frac{C_5^4 \cdot C_5^4 \cdot 4! \cdot 4}{5^5}.$$

③ C: "1 toa 2 người, 1 toa có 3 người và 3 toa không có người nào cả".

- ♦ Ta chia 5 người trên ra hai nhóm, mỗi nhóm gồm 3 người và 2 người có $C_5^2 \cdot C_3^3$ cách.
- ♦ Xếp hai nhóm người này lên 2 toa trong 5 toa tàu có $5 \cdot 4$ cách xếp.
- ♦ Do đó số khả năng thuận lợi cho biến cố C là $|\Omega_C| = 5 \cdot 4 \cdot C_5^2 \cdot C_3^3$.

$$\Rightarrow \text{Suy ra } P(C) = \frac{|\Omega_C|}{|\Omega|} = \frac{5 \cdot 4 \cdot C_5^2 \cdot C_3^3}{5^5}.$$





Bài 17.

Một người bỏ ngẫu nhiên 4 lá thư vào 4 bì thư đã được ghi địa chỉ. Tính xác suất để có ít nhất 1 lá thư bỏ đúng phong bì của nó.

Lời giải

- ♦ Số cách bỏ ngẫu nhiên 4 lá thư vào 4 bì thư đã được ghi địa chỉ là $n(\Omega) = 4!$
- ♦ Gọi A là biến cố có ít nhất 1 lá thư bỏ đúng phong bì của nó.
- ♦ Ta xét các trường hợp:
 - ⊙ Có 1 lá thư bỏ đúng địa chỉ là C_4^1 .
 - ⊙ Có 2 lá thư bỏ đúng địa chỉ là C_4^2 .
 - ⊙ Có 3 lá thư bỏ đúng địa chỉ là C_4^3 .
 - ⊙ Có 4 lá thư bỏ đúng địa chỉ là C_4^4 .
- Suy ra $n(A) = C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 15$.

$$\Rightarrow \text{Xác suất để có ít nhất 1 lá thư bỏ đúng phong bì của nó là } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}.$$

Bài 18.

Người ta lập một tam giác có đỉnh là đỉnh của đa giác 15 cạnh. Tính xác suất để tạo được tam giác có cạnh không phải là cạnh của đa giác 15 cạnh.

Lời giải

- ♦ Số tam giác có đỉnh là đỉnh của đa giác 15 cạnh là $n(\Omega) = C_{15}^3$.
- ♦ Gọi A là biến cố tạo được tam giác có cạnh không phải là cạnh của đa giác 15 cạnh.
- ♦ Ta xét các trường hợp:
 - ⊙ Số tam giác có 1 cạnh là cạnh của đa giác 15 cạnh là 15.11.
 - ⊙ Số tam giác có 2 cạnh là 2 cạnh liên tiếp của đa giác 15 cạnh là C_{15}^1 .
- Suy ra $n(A) = C_{15}^3 - (15.11 + C_{15}^1) = 275$.

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{275}{C_{15}^3} = \frac{55}{91}.$$

Bài 19.

Một bài thi trắc nghiệm có 50 câu hỏi. Mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời trong đó chỉ có 1 câu trả lời đúng. Nếu trả lời đúng thì được 0.2 điểm, nếu trả lời sai thì không được điểm. Bạn Nam không học bài nên làm bài bằng cách đánh ngẫu nhiên. Tính xác suất để Nam được 5 điểm.

Lời giải

- ♦ Mỗi câu trả lời đúng được 0.2 điểm, suy ra để đạt được 5 điểm, thí sinh đó phải trả lời đúng $\frac{5}{0.2} = 25$ câu.
- ♦ Xác suất trả lời đúng một câu là $\frac{1}{4} = 0.25$, xác suất trả lời sai một câu là $\frac{3}{4} = 0.75$.





- ♦ Có C_{50}^{25} cách trả lời đúng 25 trong 50 câu, 25 câu còn lại đương nhiên trả lời sai.

⇒ Vậy xác suất để thí sinh đó đạt 5 điểm sẽ là: $(0.25)^{25} \cdot (0.75)^{25} \cdot C_{50}^{25}$

Bài 20.

Trong một lớp học có 6 bóng đèn, mỗi bóng có xác suất bị cháy là $\frac{1}{5}$. Lớp học đủ ánh sáng nếu có ít nhất 4 bóng đèn sáng. Tính xác suất để lớp học đủ ánh sáng.

Lời giải

- ♦ Ta có mỗi bóng có xác suất bị cháy là $\frac{1}{5}$, xác suất sáng là $\frac{4}{5}$.
- ♦ Một lớp học đủ ánh sáng nếu có 4 bóng sáng, hoặc 5 bóng sáng, hoặc 6 bóng sáng.
- ♦ Vậy xác suất để lớp học đủ ánh sáng là: $\left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 + \left(\frac{1}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 + \left(\frac{1}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^6 = \frac{5376}{15625}$.

Bài 21.

Hai cầu thủ đá bóng sút phạt đền, mỗi cầu thủ đá một lần với xác suất ghi bàn lần lượt là 0,8 và 0,7. Tìm xác suất để ít nhất một cầu thủ ghi bàn.

Lời giải

- ♦ Xác suất để không có cầu thủ nào ghi bàn là $(1-0,8)(1-0,7) = 0,06$.
- ♦ Xác suất để ít nhất một cầu thủ ghi bàn là: $1-0,06 = 0,94$.

Bài 22.

Hai bạn A và B cùng tham gia kỳ thi THPT Quốc gia năm 2016, ngoài thi ba môn Toán, Văn, Anh bắt buộc thì A và B đều đăng ký thêm hai môn tự chọn trong ba môn: Vật lý, Hóa học, Sinh học dưới hình thức thi trắc nghiệm để xét tuyển vào Đại học, Cao đẳng. Mỗi môn tự chọn trắc nghiệm có 6 mã đề khác nhau, mã đề thi của các môn khác nhau là khác nhau. Tính xác suất để A và B chỉ có chung đúng 1 môn tự chọn và một mã đề thi.

Lời giải

- ♦ $n(\Omega) = C_3^2 \cdot C_3^2 \cdot (C_6^1)^2 = 11664$.
- ♦ A: "A và B chỉ có chung đúng 1 môn tự chọn và một mã đề thi".
- ♦ $n(A) = [3 \cdot (1 \cdot C_2^1) \cdot (1 \cdot C_1^1)] \cdot [6 \cdot (1 \cdot C_{12}^1) \cdot (1 \cdot C_6^1)] = 2592 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{9}$.

Bài 23.

Trong cuộc thi "Rung chuông vàng" có 20 bạn lọt vào vòng chung kết, trong đó có 5 bạn nữ và 15 bạn nam. Để sắp xếp vị trí chơi, ban tổ chức chia các bạn thành bốn nhóm A, B, C, D mỗi nhóm có 5 bạn. Việc chia nhóm được thực hiện bằng cách bốc thăm ngẫu nhiên. Tính xác suất để 5 bạn nữ thuộc cùng một nhóm.

Lời giải

- ♦ Có $n(\Omega) = C_{20}^5 \cdot C_{15}^5 \cdot C_{10}^5 \cdot C_5^5$ cách chia 20 bạn vào bốn nhóm sao cho mỗi nhóm có 5 bạn.





- ♦ Gọi A là biến cố “Năm bạn nữ vào cùng một nhóm”.
- ♦ Nếu chia 5 bạn nữ vào nhóm A thì có $C_{15}^5 \cdot C_{10}^5 \cdot C_5^5$ cách chia các bạn nam vào các nhóm còn lại.
- ♦ Do vai trò các nhóm như nhau nên $n(A) = 4C_{15}^5 \cdot C_{10}^5 \cdot C_5^5$.

Vậy $P(A) = \frac{4}{C_{20}^5}$.

Bài 24.

Trong kỳ thi THPT Quốc Gia, tại hội đồng thi X , trường THPT A có 5 thí sinh dự thi. Tính xác suất để có đúng 3 thí sinh của trường THPT A được xếp vào cùng một phòng thi, biết rằng hội đồng thi X gồm 10 phòng thi, mỗi phòng thi có nhiều hơn 5 thí sinh và việc xếp các thí sinh vào các phòng thi là hoàn toàn ngẫu nhiên.

Lời giải

- ♦ Số cách xếp ngẫu nhiên 5 thí sinh vào 10 phòng thi là $n(\Omega) = 10^5$.
- ♦ Gọi B là “Có đúng 3 thí sinh của trường THPT A được xếp vào cùng một phòng thi”.
- ♦ Có C_5^3 cách chọn ba thí sinh trong số 5 thí sinh của trường A và có 10 cách chọn phòng thi cho ba thí sinh đó.
- ↳ Với mỗi cách chọn đó ta có 9.9 cách chọn phòng thi cho hai bạn còn lại.
- ♦ Do đó $n(B) = C_5^3 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 9 = 8100$.

Xác suất cần tìm là $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{8100}{100000} = \frac{81}{10000}$.

Bài 25.

Chọn ngẫu nhiên 3 số từ tập $\{1, 2, \dots, 11\}$.

- ① Tính xác suất để tổng 3 số được chọn bằng 12.
- ② Tính xác suất để tổng 3 số được chọn là số lẻ.

Lời giải

① Tính xác suất để tổng 3 số được chọn bằng 12.

- ♦ Số cách chọn 3 trong 11 số (Số trường hợp có thể) là $C_{11}^3 = 165$.
- ♦ Vậy không gian mẫu Ω có 165 phần tử. Các tập hợp $\{a, b, c\} \subset \{1, 2, \dots, 11\}$ thỏa mãn $a + b + c = 12$ là $\{1, 2, 9\}, \{1, 3, 8\}, \{1, 4, 7\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 3, 7\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 4, 5\}$.
- ⇒ Vậy số các kết quả thuận lợi là 7, do đó xác suất cần tính là $P = \frac{7}{165}$.

② Tính xác suất để tổng 3 số được chọn là số lẻ.

- ♦ Gọi B là biến cố “Tổng ba số được chọn là số lẻ”.
- ♦ Theo câu ① ta có $|\Omega| = 165$.





- ♦ Tổng $a+b+c$ là số lẻ khi và chỉ khi hoặc cả ba số đều lẻ hoặc trong 3 số có 1 số lẻ và 2 số chẵn.

⊙ **Trường hợp 1.** Cả ba số đều lẻ. Ta có $C_6^3 = 20$ cách chọn 3 số lẻ từ tập 6 số lẻ $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$.

⊙ **Trường hợp 2.** Trong 3 số có một số lẻ và hai số chẵn.

- ♦ Ta có $C_6^1 \cdot C_5^2 = 60$ cách chọn một số lẻ và hai số chẵn.

$$\Rightarrow \text{Vậy } |\Omega_B| = 20 + 60 = 80.$$

$$\Rightarrow \text{Do đó } P(B) = \frac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \frac{80}{165} = \frac{16}{33}.$$

----- HẾT -----

