

CHỦ ĐỀ 10. MẶT CẦU - HÌNH CẦU - KHỐI CẦU

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Mặt cầu

Tập hợp các điểm trong không gian cách điểm O cố định một khoảng R không đổi gọi là mặt cầu có tâm là O và bán kính bằng R . Kí hiệu: $S(O; R) = \{M | OM = R\}$.

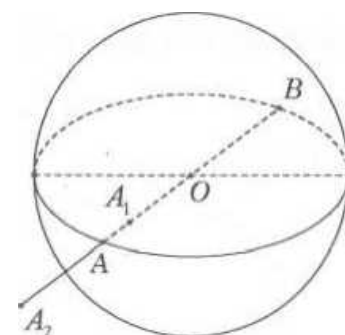
2. Khối cầu

Mặt cầu $S(O; R)$ cùng với các điểm nằm bên trong nó được gọi là một khối cầu tâm O , bán kính R . Kí hiệu: $B(O; R) = \{M | OM \leq R\}$.

Nếu OA, OB là hai bán kính của mặt cầu sao cho A, O, B thẳng hàng thì đoạn thẳng AB gọi là đường kính của mặt cầu.

Định lý: Cho điểm cố định A, B . Tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$ là mặt cầu đường kính AB .

- $A \in S(O; R) \Leftrightarrow OA = R$.
- $OA_1 < R \Leftrightarrow A_1$ nằm trong mặt cầu.
- $OA_2 > R \Leftrightarrow A_2$ nằm ngoài mặt cầu.

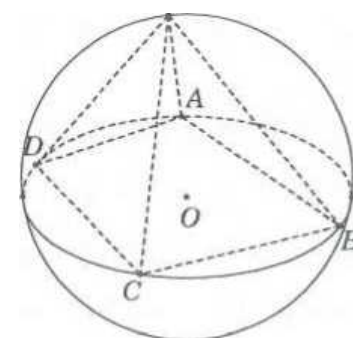


3. Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện

Định nghĩa: Mặt cầu đi qua mọi đỉnh của một hình đa diện (H) được gọi là mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện (H) và khi đó (H) được gọi là nội tiếp mặt cầu đó.

Điều kiện cần và đủ để một hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp là đáy của nó là một đa giác nội tiếp một đường tròn.

Mọi tứ diện đều có mặt cầu ngoại tiếp.



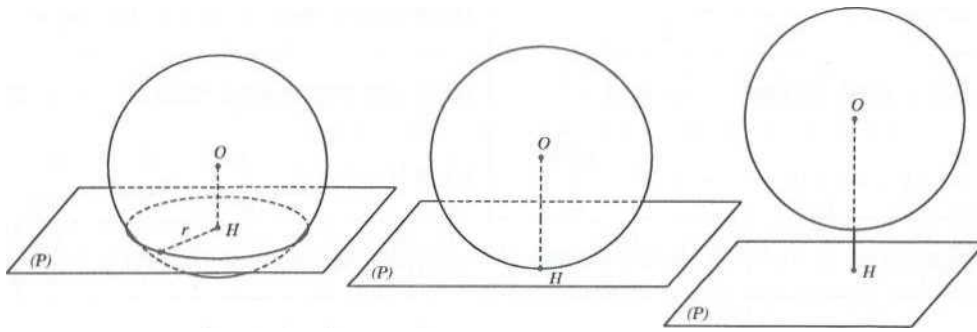
4. Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện

a. Mặt cầu nội tiếp hình chóp là mặt cầu nằm bên trong hình chóp và tiếp xúc với với tất các mặt của hình chóp.

b. Tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp cách đều tất cả các mặt của hình chóp.

5. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt cầu $S(O; R)$ và mặt phẳng (P) , gọi d là khoảng cách từ O đến (P) và H là hình chiếu vuông góc của O trên (P) . Khi đó



• Nếu $d < R$ thì mặt phẳng (P) cắt mặt cầu $S(O; R)$ theo giao tuyến là đường tròn nằm trên mặt phẳng (P) có tâm là H và có bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

Khi $d = 0$ thì mặt phẳng (P) đi qua tâm O của mặt cầu, mặt phẳng đó gọi là mặt phẳng kính; giao tuyến của mặt phẳng kính với mặt cầu là đường tròn có tâm O và bán kính R , đường tròn đó gọi là đường tròn lớn của mặt cầu.

• Nếu $d = R$ thì mặt phẳng (P) và mặt cầu $S(O; R)$ có một điểm chung duy nhất H .

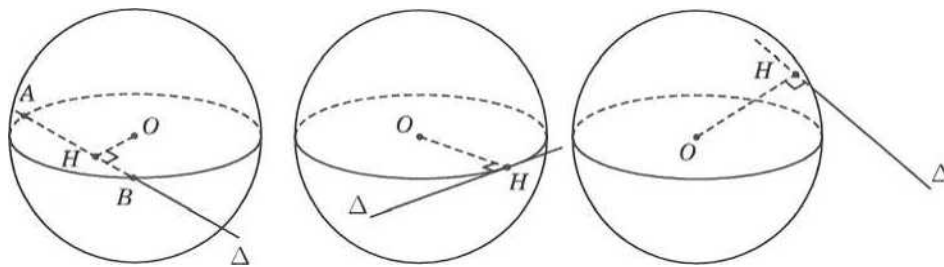
Khi đó ta nói (P) tiếp xúc với $S(O; R)$ tại H và (P) gọi là tiếp diện của mặt cầu, H gọi là tiếp diện.

Chú ý. Cho H là một điểm thuộc mặt cầu $S(O; R)$ và mặt phẳng (P) qua H . Thế thì (P) tiếp xúc với $S(O; R) \Leftrightarrow OH \perp (P)$.

• Nếu $d > R$ thì mặt phẳng (P) và mặt cầu $S(O; R)$ không có điểm chung.

6. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

Cho mặt cầu $S(O; R)$ và đường thẳng Δ . Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên Δ và $d = OH$ là khoảng cách từ O đến Δ . Khi đó:



• Nếu $d < R$ thì Δ cắt $S(O; R)$ tại hai điểm A, B và H là trung điểm của AB .

• Nếu $d = R$ thì Δ và $S(O; R)$ chỉ có một điểm chung H , trong trường hợp này Δ được gọi là tiếp tuyến của mặt cầu $S(O; R)$ hay Δ tiếp xúc với $S(O; R)$ và H là tiếp điểm.

• Nếu $d > R$ thì Δ và $S(O; R)$ không có điểm chung.

7. Diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu

Gọi R là bán kính của mặt cầu thì

• Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$.

- Thể tích khối cầu: $V = \frac{4}{3}\pi R^2$.

8. Một số công thức tính nhanh bán kính đường tròn ngoại tiếp

Tam giác đều cạnh $a \longrightarrow R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	Hình vuông cạnh $a \longrightarrow R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
Tam giác vuông cạnh huyền $b \longrightarrow R = \frac{b}{2}$	Hình chữ nhật đường chéo $d \longrightarrow R = \frac{d}{2}$
Tam giác vuông cân cạnh $a \longrightarrow R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	Định lý hàm sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
Tam giác ba cạnh $a, b, c \longrightarrow R = \frac{abc}{4S}$; với $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ và $p = \frac{a+b+c}{2}$.	

II. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP VỀ MẶT CẦU

🦋 Dạng 1: Những bài toán vận dụng mức cơ bản

Ví dụ 1: Tính thể tích khối cầu có diện tích bằng diện tích xung quanh của hình lập phương cạnh a .

- A. $\frac{a^3}{6\sqrt{\pi}}$ B. $\frac{32a^3}{3\sqrt{\pi}}$ C. $\frac{a^3}{\sqrt{\pi}}$ D. $\frac{4a^3}{3\sqrt{\pi}}$

Lời giải

Diện tích xung quanh hình lập phương cạnh a là $S_{xq} = 4a^2 \longrightarrow S_{mc} = 4a^2$

Suy ra bán kính mặt cầu là $4\pi R^2 = 4a^2 \Leftrightarrow R^2 = \frac{a^2}{\pi} \Rightarrow R = \frac{a}{\sqrt{\pi}}$

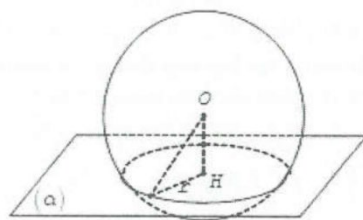
Vậy thể tích khối cầu cần tính là $V = \frac{4}{3}\pi R^2 = \frac{4a^3}{3\sqrt{\pi}}$. **Chọn D.**

Ví dụ 2: Cho mặt cầu $S(O; R)$ và mặt phẳng (α) . Biết khoảng cách từ O đến (α) bằng $\frac{R}{2}$. Khi đó thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) với $S(O; R)$ là một đường tròn đường kính bằng

- A. R . B. $R\sqrt{3}$. C. $\frac{R}{2}$. D. $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Hình vẽ tham khảo



Gọi H là hình chiếu của O xuống $\text{mp}(\alpha)$. Ta có $d(O;(\alpha)) = OH = \frac{R}{2} < R$ nên (α) cắt $S(O;R)$ theo đường tròn $C(H;r)$. Bán kính đường tròn $C(H;r)$ là $r = \sqrt{R^2 - OH^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra đường kính của đường tròn cần tính bằng $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. **Chọn B.**

Ví dụ 3: Cho mặt cầu $S(O;R)$ và một điểm A thỏa mãn $OA = 2R$. Qua A kẻ đường thẳng cắt (S) tại hai điểm B, C sao cho $BC = R\sqrt{3}$. Khoảng cách từ O đến BC bằng

- A. R . B. $\frac{R}{2}$. C. $R\sqrt{2}$. D. $R\sqrt{3}$.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu của O lên BC .

Ta có $OB = OC = R$, suy ra H là trung điểm của BC nên $HC = \frac{BC}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $OH = \sqrt{OC^2 - HC^2} = \frac{R}{2}$. **Chọn B.**

Ví dụ 4: Cho hình cầu tâm O , đường kính $AA' = 4$. Gọi H là một điểm trên đoạn AA' sao cho $AH = \frac{8}{3}$. Mặt phẳng (α) qua H và vuông góc với AA' cắt hình cầu theo đường tròn (C) . Tính diện tích của đường tròn (C) .

- A. $\frac{32\pi}{9}$. B. $\frac{8\pi}{9}$. C. $\frac{8\pi}{3}$. D. $\frac{32\pi}{3}$.

Lời giải

Theo giả thiết, ta có $AH = \frac{8}{3}$. Ta suy ra $OH = AH - OA = \frac{2}{3}$.

Gọi r' là bán kính của đường tròn (C) . Ta có $r'^2 = R^2 - OH^2 = 2^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{32}{9}$.

Vậy diện tích của đường tròn (C) là $S = \pi r'^2 = \frac{32\pi}{9}$. **Chọn A.**

Ví dụ 5: Diện tích hình tròn lớn của một hình cầu là 4π . Một mặt phẳng (α) cắt hình cầu theo một hình tròn có diện tích là 2π . Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng (α) bằng

- A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. B. 1 . C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Gọi khoảng cách từ tâm cầu đến mặt phẳng là d , ta có $d^2 = R^2 - r^2$.

Hình tròn lớn của hình cầu S là hình tròn tạo bởi mặt phẳng cắt hình cầu và đi qua tâm của hình cầu.

Gọi R là bán kính hình cầu thì hình tròn lớn cũng có bán kính là R .

Theo giả thiết, ta có $\pi R^2 = 4\pi \Leftrightarrow R = 2$ và $\pi r^2 = 2\pi \Leftrightarrow r = \sqrt{2}$.

Suy ra $d = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$. **Chọn D.**

Ví dụ 6: Cho mặt cầu $S(O; R)$, A là một điểm ở trên mặt cầu (S) và (P) là mặt phẳng đi qua A sao cho góc giữa đường thẳng OA và mặt phẳng (P) bằng 60° . Diện tích của đường tròn giao tuyến bằng

A. $\frac{3\pi R^2}{4}$.

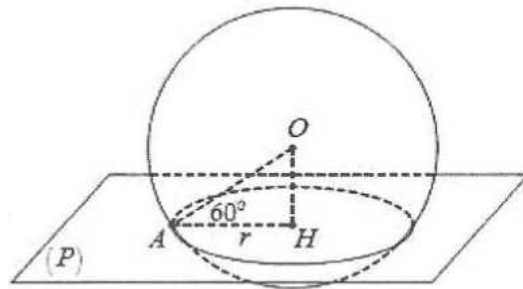
B. πR^2 .

C. $\frac{\pi R^2}{4}$.

D. $\frac{\pi R^2}{2}$.

Lời giải

Hình vẽ tham khảo



Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên (P) thì

- H là tâm của đường tròn giao tuyến của (P) và (S) .
- $\widehat{(OA; (P))} = \widehat{(OA; AH)} = 60^\circ$.

Bán kính của đường tròn giao tuyến $r = HA = OA \cdot \cos 60^\circ = \frac{R}{2}$.

Suy ra diện tích đường tròn giao tuyến $\pi r^2 = \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{4}$. **Chọn C.**

Ví dụ 7: Cho mặt cầu $S(I; R)$, mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn tâm O .

Hai điểm $A, B \in O$ sao cho tam giác OAB đều, góc giữa hai mặt phẳng (IAB) và (OAB) bằng 60° , diện tích tam giác IAB bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Bán kính R bằng

A. $R = \frac{3}{2}$.

B. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $R = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

D. $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Đặt $OA = OB = x$. Tam giác OAB là tam giác đều

$S_{\Delta OAB} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}$. Mặt phẳng (OAB) là hình chiếu của mặt phẳng (IAB) trên mặt phẳng (P) .

$S_{\Delta OAB} = S_{\Delta IAB} \cdot \cos \varphi$ với $\varphi = \widehat{(IAB);(OAB)} = 60^\circ$.

$$S_{\Delta OAB} = \frac{S_{\Delta IAB}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow x = 1.$$

Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow \widehat{IMO} = 60^\circ \Rightarrow IO = \frac{3}{2}$.

Vậy $R = IA = \sqrt{IO^2 + AO^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$. **Chọn C.**

Ví dụ 8: Cho mặt cầu (S) tâm I , bán kính R . Ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ qua điểm A không nằm trên mặt cầu, đôi một vuông góc với nhau cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là ba hình tròn có tổng diện tích bằng $12\pi \text{ cm}^2$. Biết $IA = \sqrt{3} \text{ cm}$, tính độ dài bán kính R của mặt cầu (S) .

- A. $r = 2\sqrt{3}$. B. $r = \sqrt{5}$. C. $r = \sqrt{3}$. D. $r = 2$.

Lời giải

Gọi a, b, c lần lượt là khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(P), (Q), (R)$.

Gọi r_1, r_2, r_3 lần lượt là bán kính đường tròn giao tuyến của mặt cầu (S) với $(P), (Q), (R)$.

Khi đó $R^2 = a^2 + r_1^2; R^2 = b^2 + r_2^2; R^2 = c^2 + r_3^2 \Rightarrow 3R^2 = a^2 + b^2 + c^2 + (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$ (*).

Mà $a^2 + b^2 + c^2 = IA^2; S_1 + S_2 + S_3 = \pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$.

Suy ra (*) $\Leftrightarrow 3R^2 = IA^2 + \frac{S_1 + S_2 + S_3}{\pi} = 3 + 12 = 15 \Rightarrow R = \sqrt{5}$. **Chọn B.**

Dạng 2: Đa diện có các đỉnh cùng nhìn một đoạn nối hai đỉnh còn lại dưới góc vuông

Phương pháp giải:

Xét đa giác $XYA_1A_2...A_n$ có các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ cùng nhìn XY một góc vuông, chẳng hạn có

$\widehat{A_1XY} = \widehat{A_2XY} = ... = 90^\circ$. Khi đó, mặt cầu ngoại tiếp đa diện $XYA_1A_2...A_n$ mặt cầu đường kính XY , tâm là

trung điểm của XY và bán kính $R = \frac{XY}{2}$.

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác $ABC, BC = a\sqrt{3}, AC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Vì $SA \perp (ABC)$ nên $(\widehat{SB; (ABC)}) = (\widehat{AB; AB}) = \widehat{SBA} = 45^\circ$.

Suy ra tam giác SAB vuông cân tại $A \longrightarrow SA = AB = a$.

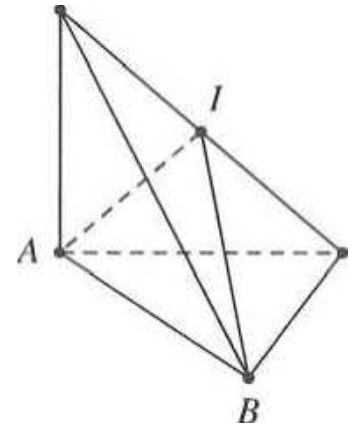
Ta có $AB^2 + BC^2 = a^2 + (a\sqrt{3})^2 = 4a^2 = AC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại B .

Do đó $AB \perp BC$ mà $BC \perp SA \Leftrightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$

Khi đó, hai điểm A, B cùng nhìn SC dưới một góc vuông

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp cần tính là $R = \frac{SC}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Chọn A.



Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SC = 2a$ và $SC \perp (ABC)$. Đáy ABC là tam giác vuông cân tại B có $AB = a\sqrt{2}$. Mặt phẳng (α) đi qua C và vuông góc với SA , (α) cắt SA, SB lần lượt tại D, E . Diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện $ECDAB$ bằng

A. $16\pi a^2$.

B. $4\pi a^2$.

C. $8\pi a^2$.

D. $12\pi a^2$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} SC \perp AB \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB(SBC) \Rightarrow CE \perp AB$

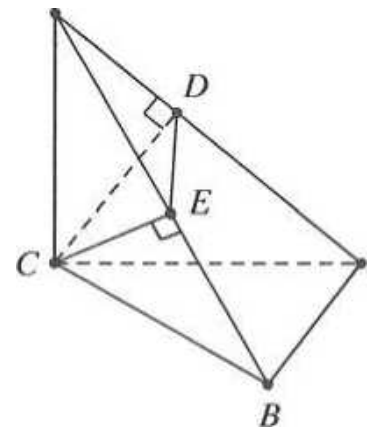
Mà $SA \perp (\alpha) \Rightarrow SA \perp CE$ suy ra $CE \perp (SAB) \Rightarrow \begin{cases} CE \perp SB \\ CE \perp AE \end{cases}$

Do đó các điểm B, D, E nhìn AC dưới một góc vuông

$\Rightarrow$ Tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện là trung điểm AC

$\Rightarrow R = \frac{AC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = a \longrightarrow S = 4\pi a^2$.

Chọn B.



Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , $BD = a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy $(ABCD)$ là trung điểm của OC . Đường thẳng SC tạo với mặt đáy một góc 60° . Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{4\pi a^3}{3}$.

B. $\frac{\pi a^3}{3}$.

C. $\frac{2\pi a^3}{3}$.

D. $\frac{\pi a^3}{6}$.

Lời giải

Gọi H là trung điểm của $OC \Rightarrow SH \perp (ABCD), HC = \frac{OC}{2} = \frac{a}{4}$

Ta có $\widehat{SC; (ABCD)} = \widehat{(SC; HC)} = \widehat{SCH} = 60^\circ$

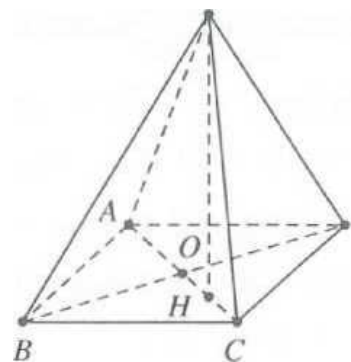
Tam giác SHC vuông tại H , có $\cos \widehat{SCH} = \frac{HC}{SC} \Rightarrow SC = \frac{a}{2}$

Lại có $SH \perp OC \Rightarrow \Delta SOC$ cân tại $S \Rightarrow SO = SC = \frac{a}{2}$

Do đó $SO = OA = OC$ mà $OA = OB = OC = OD$

Suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

Vậy $R = \frac{BD}{2} = \frac{a}{2} \rightarrow V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{\pi a^3}{6}$. **Chọn D.**



Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 3$. Mặt phẳng qua A và vuông góc SC với cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại các điểm M, N, P . Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $C.MNP$.

- A. $V = \frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$. B. $V = \frac{125\pi}{6}$. C. $V = \frac{32\pi}{3}$. D. $V = \frac{108\pi}{3}$.

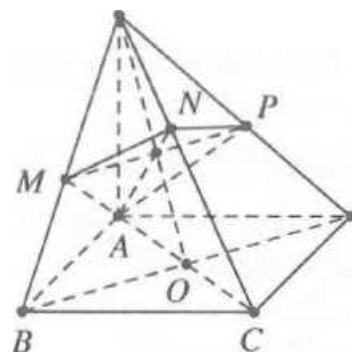
Lời giải

Ta có $SC \perp (AMNP) \Rightarrow SC \perp AM$ mà $AM \perp SB$

$\Rightarrow AM \perp MC \Rightarrow \widehat{AMC} = 90^\circ$. Tương tự $\widehat{APC} = 90^\circ$

Mặt khác $\widehat{ANC} = 90^\circ$ nên tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $C.MNP$ là trung điểm của AC

Suy ra $R = \frac{AC}{2} = 2 \Rightarrow V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{32}{3} \pi$. **Chọn C.**



Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC , cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại các điểm M, N, P . Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $C.MNP$, biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng $\frac{6}{\sqrt{13}}$

- A. $V = 3\pi$. B. $V = \frac{8\pi}{3}$. C. $V = \frac{9\pi}{2}$. D. $V = \frac{4\pi}{3}$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp AM$

Mặt khác: $AM \perp SC \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp MN$

Tương tự $AP \perp PN \Rightarrow$ tứ giác $AMNP$ nội tiếp đường tròn

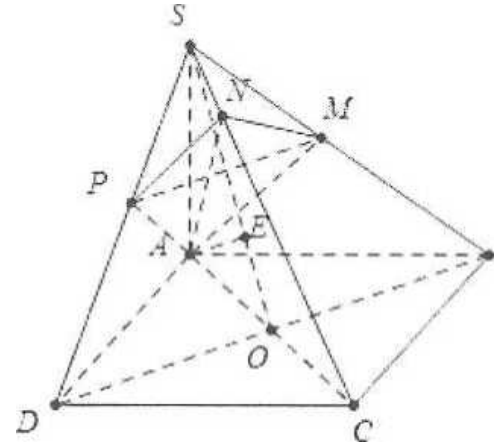
đường kính $AN \Rightarrow R_{MNP} = R_{AMNP} = \frac{AN}{2}$

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, dựng $AE \perp SO \Rightarrow AE = \frac{6}{\sqrt{13}}$

Do đó $AO = \frac{AC}{2} = 2 \Rightarrow \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AO^2} \Rightarrow SA = 3$

$\Rightarrow AN = \frac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{12}{5} \Rightarrow R_{MPN} = \frac{6}{5}; SN = \frac{SA^2}{SC} = \frac{9}{5} \Rightarrow R_{S.MPN} = \sqrt{R_{MNP}^2 + \frac{SN^2}{4}} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow V_{S.MPN} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{9\pi}{2}$. **Chọn C.**



✎ Dạng 3: Bài toán mặt cầu với chóp có cạnh bên vuông góc đáy

Xét khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Tìm tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

• **Dựng tâm.** Dựng trục đường tròn ngoại tiếp d của tam giác ABC , thì $d \parallel SA$

Trong mặt phẳng $(SA; d)$, dựng đường trung trực Δ của SA . Tâm I của mặt cầu là giao điểm của d và Δ .

• **Tính bán kính R của mặt cầu**

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

Gọi E là trung điểm của SA .

Xét ΔAOI vuông tại O

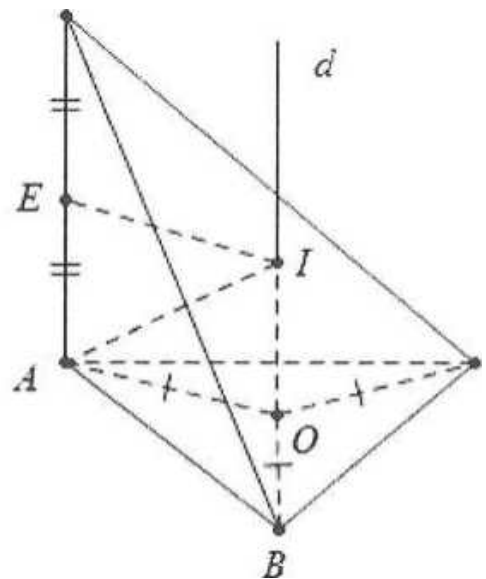
Ta có $R^2 = AI^2 = OA^2 + OI^2 = OA^2 + AE^2 = OB^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2$.

với $OA = R_d$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy.

Khi đó: $R_{S.ABC} = \sqrt{\frac{SA^2}{4} + R_d^2}$.

• **Tổng quát:** Cho khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ có $SA \perp AA_1A_2$. Gọi R_d là bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác $AA_1A_2...A_n$ thì bán kính mặt cầu ngoại tiếp R của khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ được tính theo công thức:

$R = \sqrt{\frac{SA^2}{4} + R_d^2}$.



Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $R = a$.

C. $R = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

D. $R = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Lời giải

• Ta có $\widehat{SB; (ABC)} = \widehat{SBA} = 60^\circ \Rightarrow SA = \tan 60^\circ \cdot AB = a\sqrt{3}$.

Tam giác ABC vuông tại $A \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow BC = 2a$.

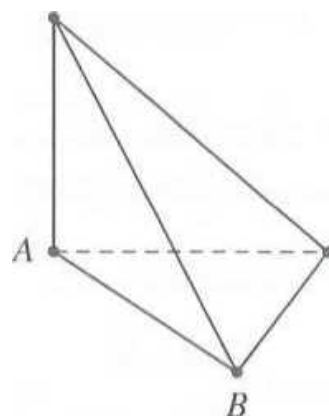
• Hình chóp $S.ABC$ có chiều cao $h = a\sqrt{3}$; bán kính

$$R_{\text{đáy}} = \frac{BC}{2} = a$$

$$R = \sqrt{a^2 + \frac{(a\sqrt{3})^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

$\Rightarrow$ Bán kính mặt cầu cần tính là

Chọn D.



Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều có diện tích bằng $a^2\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Diện tích tam giác SBC bằng $2a^2$. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $R = \frac{a\sqrt{57}}{6}$.

B. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $R = \frac{5a}{2}$.

D. $R = \frac{a\sqrt{34}}{3}$.

Lời giải

• Đặt $AB = x \longrightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3} \Rightarrow x = 2a$.

Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow AH \perp BC$ mà $SA \perp BC$

Suy ra $BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH \Rightarrow S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2}SH \cdot BC = 2a^2$

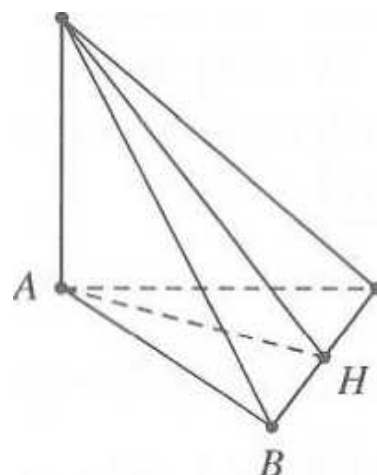
$$\Rightarrow \frac{1}{2}SH \cdot 2a = 2a^2 \Rightarrow SH = 2a \Rightarrow SA = \sqrt{SH^2 - AH^2} = a.$$

• Hình chóp $S.ABC$ có chiều cao $h = SA = a$; bán kính $R_{\text{đáy}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

$$R = \sqrt{\frac{(2a\sqrt{3})^2}{3} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{57}}{6}.$$

$\Rightarrow$ Bán kính mặt cầu cần tính là

Chọn A.



Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên $SA = \sqrt{2}a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy, tam giác SBD là tam giác đều. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $\frac{4}{3}a^3$. B. $4\sqrt{3}a^3$. C. $\sqrt{6}a^3$. D. $\sqrt{2}a^3$.

Lời giải

• Đặt $AB = x \longrightarrow BD = x\sqrt{2}$ và $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{x^2 + 2a^2}$

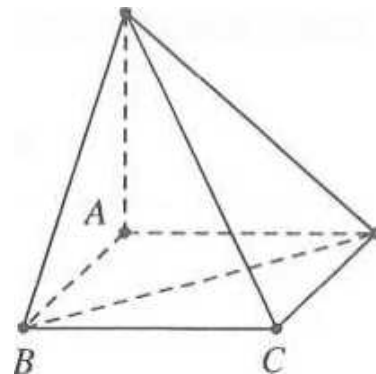
Tam giác SBD đều $\Rightarrow SB = BD \xrightarrow{x\sqrt{2} = \sqrt{x^2 + 2a^2}} x = a\sqrt{2}$

• Hình chóp $S.ABCD$ có chiều cao $h = a\sqrt{2}$; bán kính $R_{\text{đáy}} = a$

$\Rightarrow$ Bán kính mặt cầu cần tính là $R = \sqrt{a^2 + \frac{(a\sqrt{2})^2}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy thể tích khối cầu là $V = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^3 = \sqrt{6}a^3$.

Chọn C.



Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, cạnh a , SA vuông góc với đáy và SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30° . Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

- A. a . B. $a\sqrt{3}$. C. $a\sqrt{2}$. D. $2a$.

Lời giải

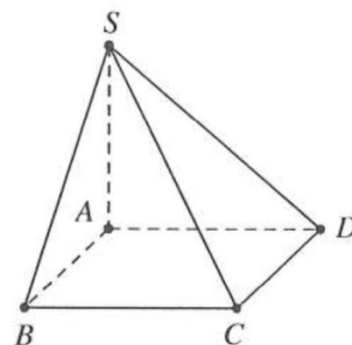
Ta có $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB) \Rightarrow (\widehat{SC; (SAB)}) = (\widehat{SC; SB}) = \widehat{CSB}$

Tam giác SBC vuông tại $B \Rightarrow \tan \widehat{CSB} = \frac{BC}{SB} \Rightarrow SB = a\sqrt{3}$

Tam giác SAB vuông tại $A \Rightarrow SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$

Vậy $h = SA = a\sqrt{2}; R_d = \frac{BD}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ nên $R = a$.

Chọn A.



Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{5}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow (\widehat{SB; (ABC)}) = (\widehat{SB; AB}) = \widehat{SBA} = 45^\circ$.

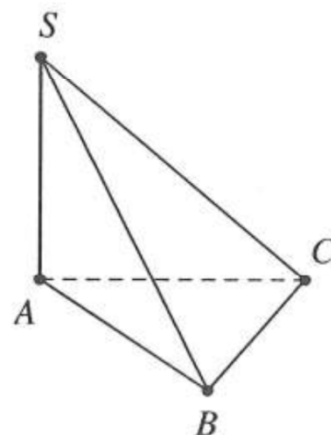
Tam giác SAB vuông tại A , có $\widehat{SBA} = 45^\circ \Rightarrow SA = AB = a$.

Tam giác ABC vuông tại A , có $\sin \widehat{ACB} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AC = 2a$.

Suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là $R_{\triangle ABC} = \frac{AC}{2} = a$.

Vậy bán kính mặt cầu cần tính là

$$R = \sqrt{R_{\triangle ABC}^2 + \frac{SA^2}{4}} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}. \quad \text{Chọn B.}$$



Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy.

Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng 45° . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$

bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Diện tích tam giác SAB bằng

A. $\frac{a^2}{2}$.

B. $\frac{a^2}{4}$.

C. a^2 .

D. $2a^2$.

Lời giải

Vì $CD \perp (SAD) \Rightarrow (\widehat{(SCD); (ABCD)}) = (\widehat{SD; AD}) = \widehat{SDA} = 45^\circ$.

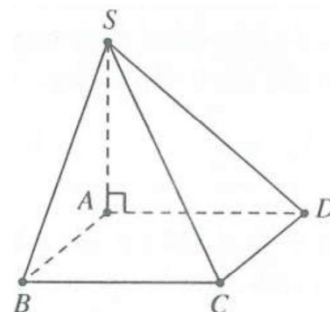
Tam giác SAD vuông tại A , có $\widehat{SDA} = 45^\circ \Rightarrow SA = AD = x$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp $ABCD$ là $R_{ABCD} = \frac{AC}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

Bán kính mặt cầu là $R = \sqrt{R_{ABCD}^2 + \frac{SA^2}{4}} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Mà $R_{S.ABCD} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow x = a\sqrt{2}$.

Vậy $S_{\triangle SAB} = \frac{x^2}{2} = a^2$. **Chọn C.**



Ví dụ 7: Cho mặt cầu (S) có bán kính $R = \sqrt{3}$ đi qua điểm A cố định. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao

cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{8}{3}$.

B. 4.

C. $\frac{4}{3}$.

D. 8.

Lời giải

Vì A, B, C, D thuộc $(S) \Rightarrow (S)$ ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Tứ diện $ABCD$ có chiều cao $h = AD$; đáy là tam giác ABC .

Đặt $AB = a, AC = b, AD = c \Rightarrow h = c$ và $R_{\text{day}} = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$

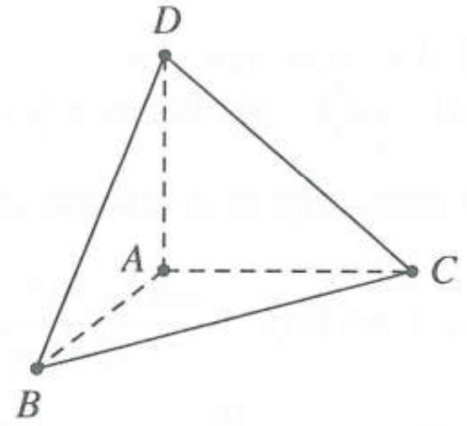
$\Rightarrow$ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}\right)^2 + \frac{c^2}{4}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 12$$

Ta

có

$$12 = a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} \Leftrightarrow abc \leq 8 \longrightarrow V_{ABCD} = \frac{abc}{6} \leq \frac{4}{3}. \text{ Chọn C.}$$



Bài toán tổng quát: Tứ diện $ABCD$, AB, AC, AD đôi một vuông góc và $AB = a, AC = b, AD = c$ thì bán

kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$

Ví dụ 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a, \widehat{BAD} = 60^\circ$ và các cạnh bên $SA = SB = SD, \widehat{BSD} = 90^\circ$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABCD$ là

A. $R = \frac{\sqrt{6}a}{4}$. B. $R = \frac{\sqrt{6}a}{2}$. C. $R = \frac{\sqrt{3}a}{4}$. D. $R = \frac{\sqrt{2}a}{4}$.

Lời giải

Vì $SA = SB = SD$ và $\triangle ABD$ đều cạnh $a \longrightarrow S.ABD$ là hình chóp tam giác đều.

Mặt khác $\widehat{BSD} = 90^\circ \Rightarrow SB \perp SD \Rightarrow SA, SB, SD$ đôi một vuông góc và bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Áp dụng công thức giải nhanh, ta được $R_{S.ABD} = \frac{\sqrt{SA^2 + SB^2 + SD^2}}{2} = R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. **Chọn A.**

Ví dụ 9: Cho ba tia Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc với nhau. Gọi C là điểm cố định trên Oz , đặt $OC = 1$, các điểm A, B thay đổi trên Ox, Oy sao cho $OA + OB = OC$. Giá trị bé nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OACB$ bằng

A. $R_{\min} = \frac{\sqrt{6}}{4}$. B. $R_{\min} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. C. $R_{\min} = \sqrt{6}$. D. $R_{\min} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Đặt $OA = a, OB = b$ với $a, b > 0$ suy ra $OA + OB = OC \Leftrightarrow a + b = 1$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OACB$ (OA, OB, OC đôi một vuông góc) là

$$R = \frac{\sqrt{OA^2 + OB^2 + OC^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + (1-a)^2 + 1} = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 - 2a + 2}$$

$$\text{Để thấy } a^2 - a + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \Rightarrow \sqrt{a^2 - a + 1} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \frac{1}{2}$. Vậy giá trị bé nhất cần tìm là $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **Chọn A.**

Ví dụ 10: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, cạnh $AB = AC = a, BC = a\sqrt{3}, AA' = 2a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AB'C'C$ bằng

- A. $R = a$. B. $R = a\sqrt{5}$. C. $R = a\sqrt{3}$. D. $R = a\sqrt{2}$.

Lời giải

Để thấy tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AB'C'C$ cũng là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ hay là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $A'.ABC$.

$$\text{Sử dụng công thức tính nhanh, ta được } R = \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}} = \sqrt{(R_{\Delta ABC})^2 + \frac{A'A^2}{4}}.$$

$$\text{Ta có } \cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2a^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ.$$

$$\Rightarrow R_{\Delta ABC} = \frac{BC}{2 \sin \widehat{BAC}} = \frac{a\sqrt{3}}{2 \cdot \sin 120^\circ} = a. \text{ Khi đó } R = \sqrt{(R_{\Delta ABC})^2 + \frac{A'A^2}{4}} = a\sqrt{2}. \text{ Chọn D.}$$

Ví dụ 11: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $B, AB = a$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° . Thể tích khối cầu ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

- A. $\frac{5\sqrt{5}\pi a^3}{8}$. B. $\frac{5\sqrt{5}\pi a^3}{6}$. C. $\frac{3\sqrt{3}\pi a^3}{6}$. D. $\frac{3\sqrt{3}\pi a^3}{8}$.

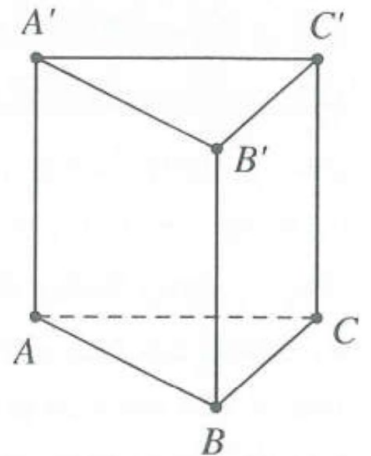
Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} AA' \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'B'B) \text{ và } \begin{cases} (A'BC) \cap (AA'B'B) = A'B \\ (ABC) \cap (AA'B'B) = AB \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\widehat{A'BC}); (\widehat{ABC}) = (\widehat{A'B}; \widehat{AB}) = \widehat{A'BA} = 60^\circ \Rightarrow AA' = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$$

$$\text{Tam giác } ABC \text{ vuông cân tại } B, \text{ có } R_{\Delta ABC} = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Suy ra bán kính mặt cầu là } R = \sqrt{R_{\Delta ABC}^2 + \frac{A'A^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$



Vậy thể tích khối cầu cần tính là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{5\sqrt{5}\pi a^3}{6}$. **Chọn B.**

Ví dụ 12: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (ACC') và $(AB'C')$ bằng 60° . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{a}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Kẻ $B'H \perp A'C'$ ($H \in A'C'$), kẻ $HK \perp AC'$ ($K \in AC'$).

Ta có $B'H \perp (ACC') \Rightarrow \begin{cases} B'H \perp AC' \\ HK \perp AC' \end{cases} \Rightarrow AC' \perp (B'HK)$

Khi đó $\widehat{(ACC'); (AB'C')} = \widehat{(HK; B'K)} = \widehat{B'KH} = 60^\circ$.

Tam giác $A'B'C'$ vuông cân tại $B' \Rightarrow B'H = \frac{A'C'}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

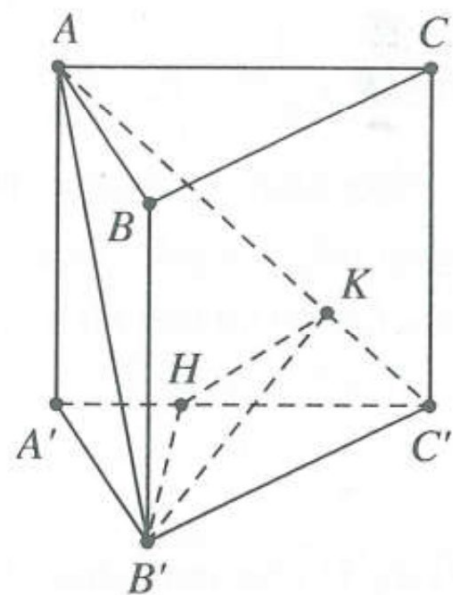
Tam giác $B'HK$ vuông tại H , có $\sin \widehat{B'HK} = \frac{BH}{B'K} \Rightarrow B'K = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Tam giác $AB'C'$ vuông tại B' , có $B'K$ là đường cao

$$\Rightarrow \frac{1}{B'K^2} = \frac{1}{AB'^2} + \frac{1}{B'C'^2} \Rightarrow \frac{1}{AB'^2} = \frac{1}{2a^2} \Rightarrow AB' = a\sqrt{2}.$$

Tam giác $AA'B$ vuông tại A' , có $AA' = \sqrt{AB'^2 - A'B'^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 - a^2} = a$.

Vậy bán kính mặt cầu cần tìm là $R = \sqrt{R_{\Delta ABC}^2 + \frac{AA'^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **Chọn C.**



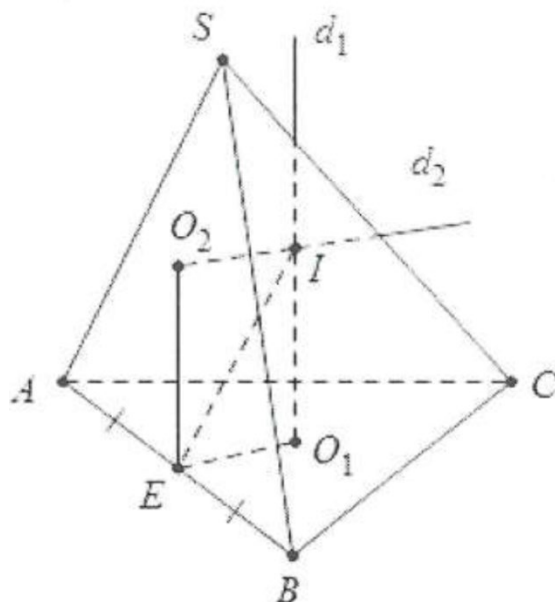
✎ Dạng 4: Bài toán về mặt cầu với hình chóp có mặt bên vuông góc với đáy

Xét khối chóp $S.ABC$ có $(SAB) \perp (ABC)$. Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

• **Dụng tâm.** Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và SAB , E là trung điểm của AB , ta có

$$O_1E \perp AB \Rightarrow O_1E \perp (SAB) \text{ (do } (SAB) \perp (ABC)).$$

$$O_2E \perp AB \Rightarrow O_2E \perp (ABC).$$



Qua O_1 dựng đường thẳng d_1 vuông góc với (ABC) thì d_1 là trục của tam giác ABC và $d_1 // O_2E$.

Qua O_2 dựng đường thẳng d_2 vuông góc với (SAB) thì d_2 là trục của tam giác SAB và $d_2 // O_1E$.

Tâm I của mặt cầu là giao điểm của d_1 và d_2 .

▪ **Tính bán kính R của mặt cầu.**

Tứ giác EO_1IO_2 là hình chữ nhật, suy ra $IE^2 = O_1E^2 + O_2E^2$.

Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, SAB .

$$\text{Ta có } O_1E^2 = O_1A^2 - EA^2 = R_1^2 - \frac{AB^2}{4}; O_2E^2 = O_2A^2 - EA^2 = R_2^2 - \frac{AB^2}{4}.$$

$$\text{Suy ra } IE^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{AB^2}{2} \Rightarrow R^2 = IE^2 + EA^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{AB^2}{4}.$$

▪ **Tổng quát:** Cho khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ có $(SA_1A_2) \perp (A_1A_2...A_n)$. Đặt R_1 là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $S.A_1A_2$, R_2 là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy $A_1A_2...A_n$ và $A_1A_2 = GT$ (gọi là giao tuyến) thì bán kính mặt cầu ngoại tiếp R của khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ được tính theo công thức:

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - \frac{GT^2}{4}}$$

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a$, tam giác ABC đều, tam giác SAB vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

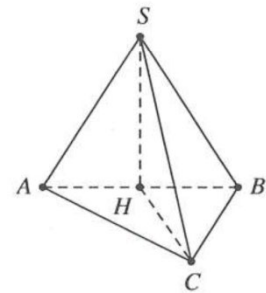
Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABC)$

$$\text{Tam giác } SAB \text{ vuông cân tại } S \longrightarrow R_b = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Tam giác } ABC \text{ đều cạnh } a\sqrt{2} \longrightarrow R_d = a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Vậy } R_b = \frac{a\sqrt{2}}{2}; R_d = \frac{a\sqrt{6}}{3}; GT = AB = a\sqrt{2} \text{ nên } R = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Chọn B.



Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $\widehat{ASB} = 30^\circ$, tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $5\pi a^2$. B. $7\pi a^2$. C. $9\pi a^2$. D. $3\pi a^2$.

Lời giải

Tam giác SAB có $\widehat{ASB} = 30^\circ$, $AB = a \longrightarrow R_b = \frac{AB}{2 \sin \widehat{ASB}} = a$

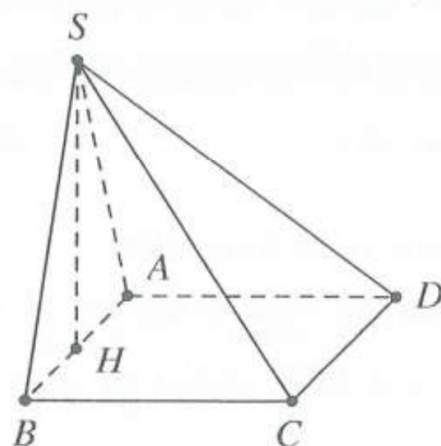
$ABCD$ là hình vuông cạnh $a \longrightarrow R_d = \frac{BD}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy $R_b = a$; $R_d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $GT = AB = a$ nên $R = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

$$S = 4\pi R^2 = 5\pi a^2.$$

Diện tích mặt cầu cần tính là

Chọn A.



Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại C , tam giác SAB đều cạnh a . Hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh AB . Đường thẳng SC tạo với mặt phẳng đáy một góc 45° .

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

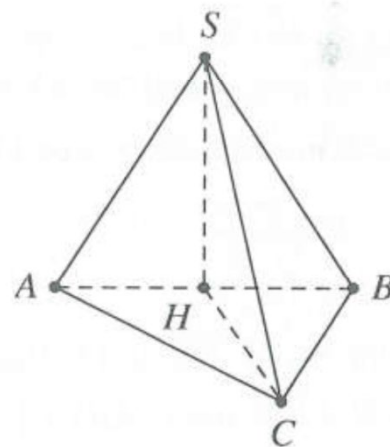
Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

$$\Rightarrow (\widehat{SC; (ABCD)}) = (\widehat{SC; HC}) = \widehat{SCH} = 30^\circ$$

Tam giác SHM vuông cân tại H , có $HM = \frac{SH}{\tan \widehat{SCH}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow CH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB \Rightarrow \text{Tam giác } ABC \text{ đều cạnh } a$$

Vậy $R_b = R_d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $GT = AB = a$ nên $R = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. **Chọn C.**



Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt bên SAD là tam giác đều cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 30° . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{10}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{15}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{21}}{2}$.

Lời giải

Gọi H là trung điểm $AD \Rightarrow SH \perp AD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

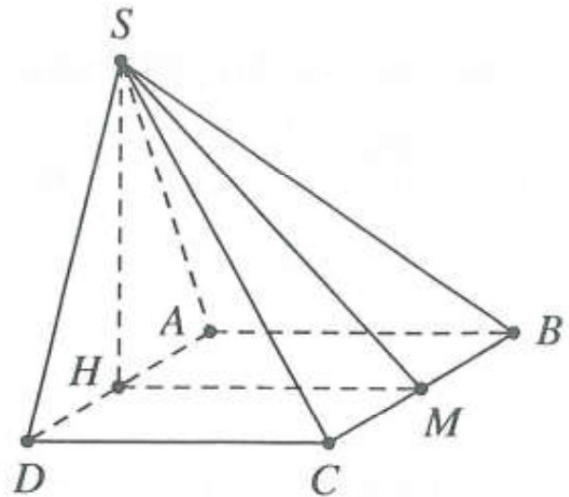
Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow HM \perp BC \Rightarrow BC \perp (SHM)$

$$\Rightarrow ((SHM); (ABCD)) = (\widehat{SMH}) = \widehat{SMH} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{HM^2 + AD^2} = a\sqrt{13}$$

$$\text{Vậy } R_b = a\sqrt{3}; R_d = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}; GT = AD = 2a$$

$$\text{nên } R = \frac{a\sqrt{21}}{2}.$$



Chọn D.

Ví dụ 5: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = BC = BD = AC = a, AD = a\sqrt{2}$, hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) vuông góc với nhau. Diện tích mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D bằng

A. $8\pi a^2$.

B. $4\pi a^2$.

C. $12\pi a^2$.

D. $6\pi a^2$.

Lời giải

Gọi H là trung điểm $CD \Rightarrow BH \perp CD \Rightarrow BH \perp (ACD)$

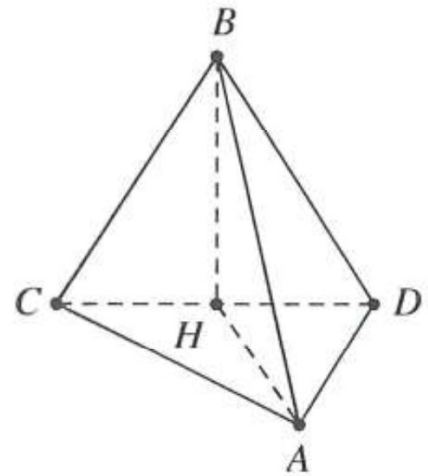
Mà $BA = BC = BD \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ACD$

$$\Rightarrow \triangle ACD \text{ vuông tại } A \Rightarrow CD = \sqrt{AC^2 + AD^2} = a\sqrt{3}$$

$$\text{Tam giác } BHC \text{ vuông tại } H \Rightarrow \cos C = \frac{HC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{B} = 120^\circ$$

$$\text{Vậy } R_b = \frac{CD}{2 \sin B} = a\sqrt{3}; R_d = \frac{CD}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}; GT = CD = a\sqrt{3}$$

$$\longrightarrow R = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{\left(a\sqrt{3}\right)^2}{4}} = a\sqrt{3} \Rightarrow S_{mc} = 12\pi a^2.$$



Chọn C.

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB cân và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng 45° . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

A. $R = \frac{a\sqrt{43}}{6}$.

B. $R = \frac{a\sqrt{41}}{6}$.

C. $R = \frac{a\sqrt{41}}{8}$.

D. $R = \frac{a\sqrt{43}}{8}$.

Lời giải

Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB, CD .

$SH \perp AB$ mà $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp CD$.

Do $HM \perp CD$ suy ra $CD \perp (SHM)$

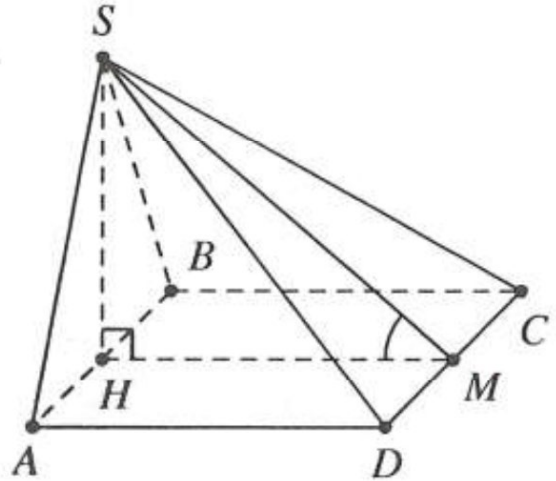
$$\Rightarrow \widehat{(SCD);(ABCD)} = \widehat{SMH} = 45^\circ.$$

Lại có $S_{\Delta SAB} = \frac{SA \cdot SB \cdot AB}{4 \cdot R_{\Delta SAB}} \Rightarrow R_{\Delta SAB} = \frac{5a}{8}$ và

$$R_{ABCD} = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $R_{S.ABCD} = \sqrt{R_{\Delta SAB}^2 + R_{ABCD}^2 - \frac{AB^2}{4}} = \frac{a\sqrt{41}}{8}.$

Chọn C.



Ví dụ 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tam giác đều. Tam giác SAB đều và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết rằng $SC = 2a\sqrt{3}$, diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

A. $S = \frac{40\pi}{3}.$

B. $S = \frac{20\pi}{3}.$

C. $S = \frac{80\pi}{3}.$

D. $S = 40\pi.$

Lời giải

Gọi H là trung điểm của AB . Khi đó $SH \perp AB$.

Mặt khác $(SAB) \perp (ABC)$. Do vậy $SH \perp (ABC)$.

Đặt $AB = x$. Ta có: $SH = HC = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $SC = \frac{x\sqrt{6}}{2} = 2a\sqrt{3} \Rightarrow x = 2a\sqrt{2}$

Ta có: $R_1 = R_2 = \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Suy ra

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - \frac{AB^2}{4}} = \frac{a\sqrt{30}}{3} \Rightarrow S = 4\pi R^2 = \frac{40\pi}{3}.$$

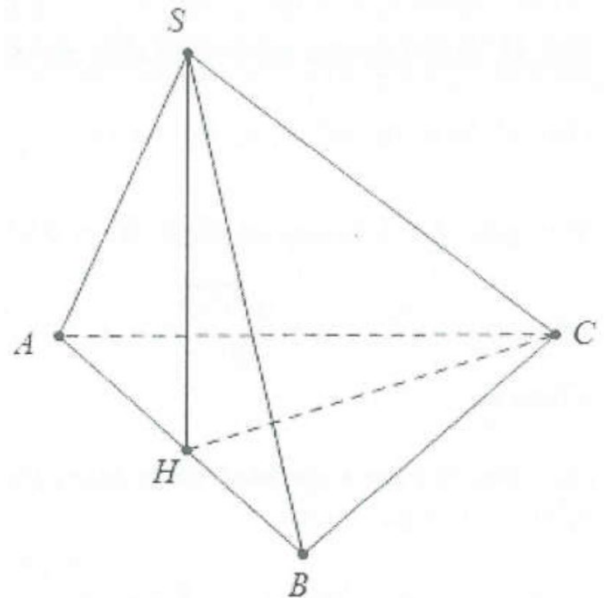
Chọn A.

Dạng 5: Bài toán mặt cầu của hình chóp có các cạnh bên bằng nhau

Xét khối chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$ (Hình chóp đều là một trường hợp đặc biệt của dạng toán này).

• **Dựng tâm.** Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì ta có $SO \perp (ABC)$. Trong mặt phẳng (SAO) dựng đường trung trực của SA cắt SO tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

• **Tính bán kính R của mặt cầu.**



Gọi E là trung điểm của AB .

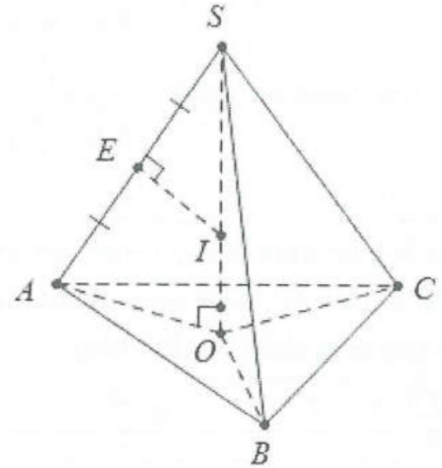
Hai tam giác vuông SOA và SEI đồng dạng.

$$\text{Suy ra } \frac{SO}{SE} = \frac{SA}{SI} \Leftrightarrow R = SI = \frac{SE \cdot SA}{SO} = \frac{SA^2}{2SO}.$$

$$\text{Vậy } R = \frac{SA^2}{2SH}.$$

▪ **Tổng quát:** Cho khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ có $SA_1 = SA_2...SA_n = \ell$ và có chiều cao $SO = h$ thì bán kính mặt cầu ngoại tiếp R của khối

$$\text{chóp } S.A_1A_2...A_n \text{ được tính theo công thức: } R = \frac{\ell^2}{2SO} = \frac{\ell^2}{2h}.$$



Ví dụ 1: Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $AB = a, SA = a\sqrt{2}$ bằng

- A. $\frac{4\sqrt{5}\pi a^3}{75}$. B. $\frac{4\sqrt{15}\pi a^3}{25}$. C. $\frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{25}$. D. $\frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{75}$.

Lời giải

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC \longrightarrow SO \perp (ABC)$

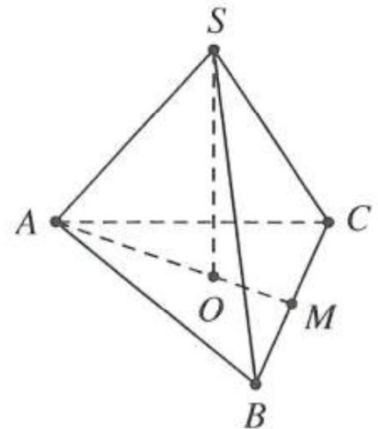
$$\text{Gọi } M \text{ là trung điểm của } BC \Rightarrow OA = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Tam giác } SAO \text{ vuông tại } O \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{a\sqrt{15}}{3}$$

$$\text{Vậy } SA = a\sqrt{2}; SO = \frac{a\sqrt{15}}{3} \longrightarrow R = \frac{a\sqrt{15}}{5} \Rightarrow V = \frac{4\sqrt{15}\pi a^3}{25}.$$

Chọn B.

Mở rộng với bài toán hình chóp tam giác đều. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , với giả thiết



- Cạnh bên $SA = b$ thì $R = \frac{\sqrt{3} \cdot b^2}{2\sqrt{3b^2 - a^2}}$.
- Cạnh bên SA hợp với đáy một góc α thì $R = \frac{\sqrt{3}}{3 \cdot \sin 2\alpha} a$.
- Mặt bên tạo với mặt đáy một góc β thì $R = \frac{\sqrt{3}(4 + \tan^2 \beta)}{12 \tan \beta} a$.
- Góc $\widehat{SAB} = \varphi$ thì $R = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{4\sqrt{-\cos \varphi \cdot \cos 3\varphi}}$.

- Góc $\widehat{ASB} = \gamma$ thì $R = \frac{\sqrt{3}.a}{4\sqrt{\sin \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{3\gamma}{2}}}$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = a\sqrt{2}$. Các cạnh bên $SA = SB = SC$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. a .

Lời giải

Gọi O là trung điểm $BC \Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

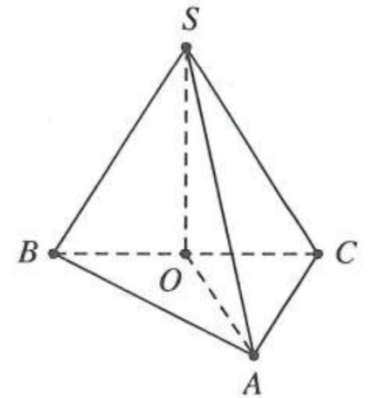
$$\Rightarrow SO \perp (ABC) \Rightarrow (\widehat{SA; (ABC)}) = (\widehat{SA; OA}) = \widehat{SAO} = 45^\circ$$

Tam giác ABC vuông cân tại $A \longrightarrow BC = AB\sqrt{2} = 2a$

Tam giác SAO vuông cân tại $O \longrightarrow SO = OA = \frac{BC}{2} = a$

Vậy $SO = a$; $SA = OA\sqrt{2} = a\sqrt{2} \longrightarrow R = a$.

Chọn D.



Ví dụ 3: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng 1, khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{\sqrt{6}}{4}$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

- A. $\frac{25\pi}{12}$. B. $\frac{25\pi}{24}$. C. $\frac{5\pi}{12}$. D. $\frac{5\pi}{24}$.

Lời giải

Gọi O là tâm tam giác ABC , M là trung điểm BC

$$\Rightarrow SO \perp (ABC); OA = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}; OM = \frac{1}{2} OA = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

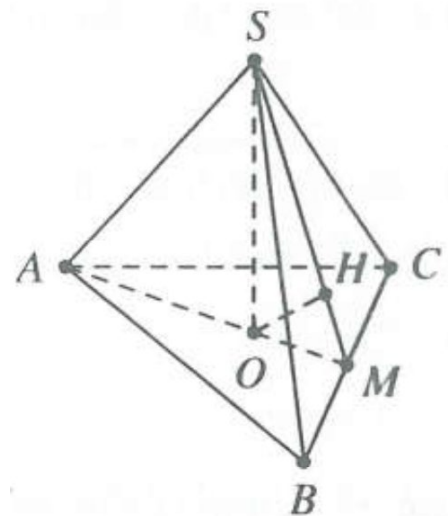
Kẻ $OH \perp SM (H \in SM) \longrightarrow OH \perp (SBC)$

$$\text{Ta có } d(A; (SBC)) = 3.OH \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{6}}{4} : 3 = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

Tam giác SMO vuông tại M có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} \Rightarrow SO = \frac{\sqrt{3}}{6}$

$$\text{Vậy } SO = \frac{\sqrt{3}}{6}; SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \frac{\sqrt{15}}{6} \longrightarrow R = \frac{5\sqrt{3}}{12}$$

Diện tích mặt cầu cần tính là $S = 4\pi R^2 = \frac{25\pi}{12}$. **Chọn A.**



Ví dụ 4: Cho ba tia Sx, Sy, Sz không đồng phẳng và $\widehat{xSy} = 120^\circ; \widehat{ySz} = 60^\circ; \widehat{zSx} = 90^\circ$. Trên các tia Sx, Sy, Sz lấy lần lượt các điểm A, B, C sao cho $SA = SB = SC = a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện

- A. $R = \frac{a}{2}$. B. $R = a$. C. $R = a\sqrt{2}$. D. $R = a\sqrt{3}$.

Lời giải

Tam giác SAB có $AB = \sqrt{SA^2 + SB^2 - 2SA \cdot SB \cdot \cos \widehat{ASB}} = a\sqrt{3}$

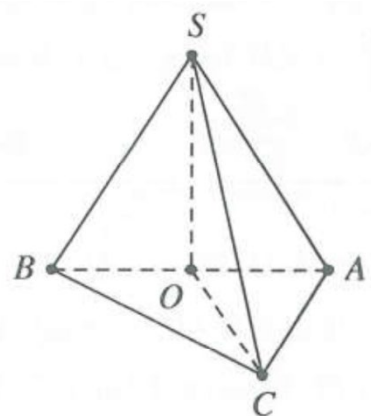
Tam giác SAC vuông cân tại $S \longrightarrow AC = SA\sqrt{2} = a\sqrt{2}$

Suy ra $AC^2 + BC^2 = AB^2 \longrightarrow \triangle ABC$ vuông tại C

Gọi O là trung điểm của $AB \longrightarrow SO \perp (ABC)$

Tam giác SAO vuông tại $O \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{a}{2}$

Vậy $SO = \frac{a}{2}; SA = a \longrightarrow R = \frac{SA^2}{2SO} = a$. **Chọn B.**



Ví dụ 5: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60° . Thể tích của khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{4\pi a^3}{3}$. B. $\frac{2\pi a^3 \sqrt{6}}{9}$. C. $\frac{8\pi a^3 \sqrt{6}}{9}$. D. $\frac{8\pi a^3 \sqrt{6}}{27}$.

Lời giải

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD \longrightarrow SO \perp (ABCD)$.

Do đó $\widehat{SB; (ABCD)} = \widehat{(SB; OB)} = \widehat{SBO} = 60^\circ$.

Tam giác SBO vuông tại O , có $\begin{cases} SB = \frac{OB}{\cos \widehat{SBO}} \\ SO = OB \cdot \tan \widehat{SBO} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SB = a\sqrt{2} \\ SO = \frac{a\sqrt{6}}{2} \end{cases}$

Suy ra bán kính mặt cầu cần tính là $R = \frac{SB^2}{2SO} = (a\sqrt{2})^2 : \left(2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy diện tích khối cầu cần tính là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^3 = \frac{8\pi a^3 \sqrt{6}}{27}$. **Chọn D.**

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AC = 2a$, mặt bên (SBC) tạo với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 45° .

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{2}}{4}a$. B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{3\sqrt{2}}{4}a$. D. $\frac{a}{4}$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow OM \perp BC \Rightarrow BC \perp (SMO)$.

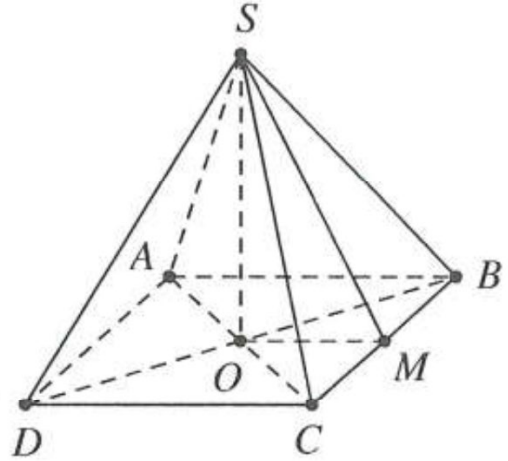
Do đó $(\widehat{SBC}); (\widehat{ABCD}) = (\widehat{SM}; \widehat{MO}) = \widehat{SMO} = 45^\circ$.

Vì $ABCD$ là hình vuông có $AC = 2a \longrightarrow AB = a\sqrt{2}$

Tam giác SMO vuông cân tại $O \Rightarrow SO = OM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Tam giác SAO vuông tại $O \Rightarrow SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Vậy $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}; SO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \longrightarrow R = \frac{3\sqrt{2}}{4}a$. **Chọn C.**



Ví dụ 7: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AD bằng $\sqrt{3}a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

A. $R = \frac{5\sqrt{6}}{12}a$.

B. $R = \frac{5\sqrt{3}}{3}a$.

C. $R = \frac{5\sqrt{3}}{12}a$.

D. $R = \frac{5\sqrt{6}}{3}a$.

Lời giải

Ta có $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(SB; AD) = d(A; (SBC))$

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD \longrightarrow SO \perp (ABCD)$.

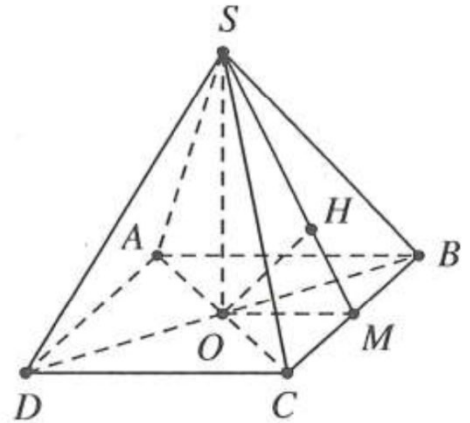
Gọi M là trung điểm BC ; kẻ $OH \perp SM (H \in SM)$

$\Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d(A; (SBC)) = 2.OH \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Tam giác SMO vuông, có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} \Rightarrow SO = a\sqrt{3}$

Vậy $SO = a\sqrt{3}; SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = a\sqrt{5} \longrightarrow R = R = \frac{5\sqrt{6}}{3}a$.

Chọn D.



Ví dụ 8: Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 9, tính thể tích V của khối chóp có thể tích lớn nhất

A. $V = 144$.

B. $V = 576$.

C. $V = 576\sqrt{2}$.

D. $V = 144\sqrt{6}$.

Lời giải

Xét mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD \rightarrow SO \perp (ABCD)$

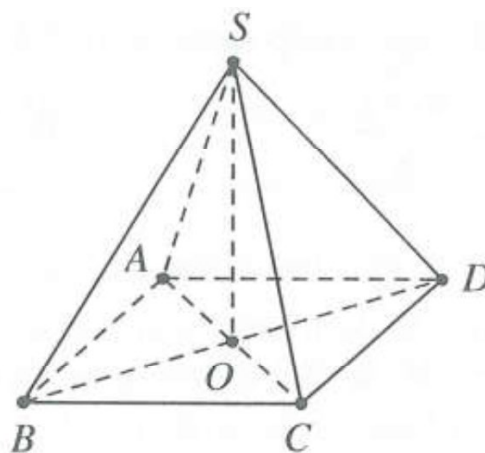
Bán kính mặt cầu (S) là $R = \frac{SA^2}{2h} \Leftrightarrow SA^2 = 18h$ (*)

Đặt $AB = x \rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{h \cdot x^2}{3}$

Tam giác SAO vuông tại $O \Rightarrow SA^2 = SO^2 + OA^2 = h^2 + \frac{x^2}{2}$

Thay vào (*), ta được $h^2 + \frac{x^2}{2} = 18h \rightarrow x^2 = 36h - 2h^2$

Do đó $V = \frac{h}{3} \cdot (36h - 2h^2) = 12h^2 - \frac{2}{3}h^3 \xrightarrow{\text{casio}} V_{\max} = 576$. **Chọn B.**



Dạng 6: Hình chóp bất kì (bài toán Tổng quát – Nâng cao)

Công thức tìm nhanh bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $R = \sqrt{x^2 + r^2}$ với

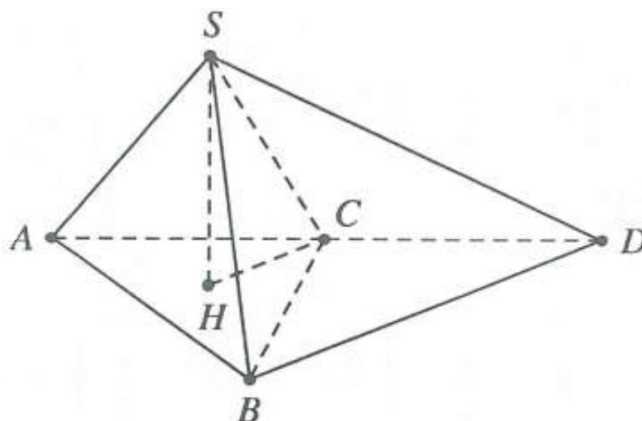
- r là bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.
- $x = \frac{SO^2 - r^2}{2h}$: S là đỉnh hình chóp, O là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy, h là chiều cao khối chóp.

Ví dụ 1: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên bằng $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Gọi D là điểm đối xứng của B qua C . Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{37}}{6}$. B. $\frac{a\sqrt{35}}{7}$. C. $\frac{a\sqrt{36}}{7}$. D. $\frac{a\sqrt{39}}{7}$.

Lời giải

Hình vẽ tham khảo



Vì C là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABD$ nên $r = BC = a$

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$

Tam giác SHC vuông tại H , có $SC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$; $HC = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = a$

Vậy $r = h = a$ và $SC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ nên $R = \frac{a\sqrt{37}}{6}$. **Chọn A.**

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D , $AB = AD = a$ và $CD = 2a$. Cạnh bên SD vuông góc với đáy, $SD = a$. Gọi E là trung điểm của CD . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCE$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{11}}{8}$. B. $\frac{a\sqrt{11}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{11}}{6}$. D. $\frac{a\sqrt{11}}{2}$.

Lời giải

Vì E là trung điểm $DC \Rightarrow \triangle EBC$ vuông tại E

Gọi M là trung điểm của BC

$\Rightarrow M$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EBC

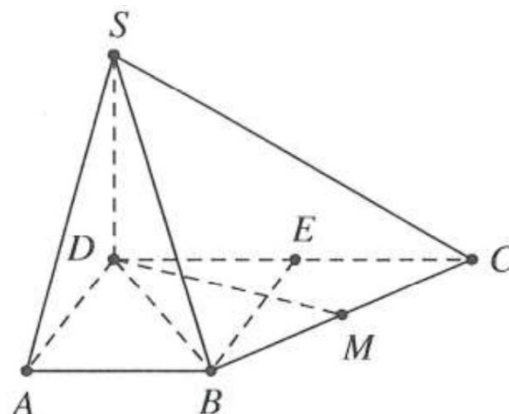
Xét hình chóp $S.BCE$ có S là đỉnh, M là tâm đáy, chiều cao $h = SD$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy

$$r = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\triangle BCD \text{ vuông cân tại } B \Rightarrow DM = \sqrt{BD^2 + BM^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$$

$$\triangle SDM \text{ vuông tại } D \Rightarrow SM = \sqrt{SD^2 + DM^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$$

$$\text{Áp dụng công thức, ta được } R = \sqrt{\left(\frac{SM^2 - r^2}{2 \cdot SD}\right)^2 + r^2} = \frac{a\sqrt{11}}{2}. \text{ Chọn D.}$$



Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CD . Tính bán kính R mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CMN$.

- A. $R = \frac{a\sqrt{37}}{6}$. B. $R = \frac{a\sqrt{29}}{8}$. C. $R = \frac{5a\sqrt{3}}{12}$. D. $R = \frac{a\sqrt{93}}{12}$.

Lời giải

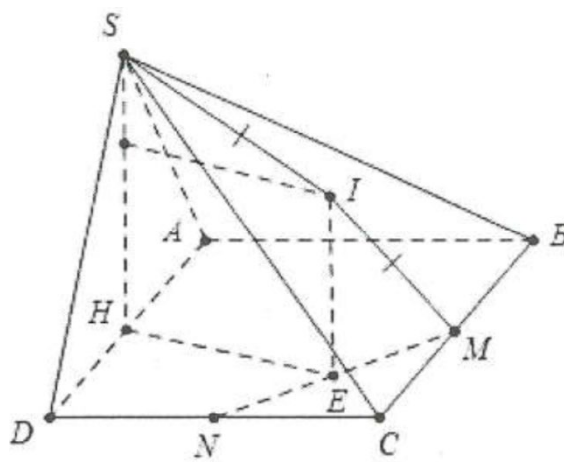
Gọi H là trung điểm của $AD \Rightarrow SH \perp AD$

$\Rightarrow SH \perp (ABCD)$. Gọi E là trung điểm của MN , dựng

đường thẳng d qua E song song với SH , trên d lấy điểm I sao

cho $IS = IC \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp

$S.CMN \Rightarrow IS = IC = IM = IN = R$.



Ta có: $CE = \frac{MN}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow IE = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{8}}; SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$HE^2 = \left(\frac{3}{4}CD\right)^2 + \left(\frac{1}{4}AD\right)^2 = \frac{5a^2}{8}$$

Lại có $R^2 - HE^2 = (SH - IE)^2 \Leftrightarrow R^2 - \frac{5a^2}{8} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{8}}\right)^2 \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{93}}{12}$. **Chọn D.**

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CD . Tính bán kính R mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CMN$.

A. $R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $R = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$. C. $R = \frac{3a\sqrt{3}}{4}$. D. $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Gọi E là trung điểm của MN , dựng đường thẳng d qua E song song với SA , trên d lấy điểm I sao cho $IS = IC \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.CMN \Rightarrow IS = IC = IM = IN = R$.

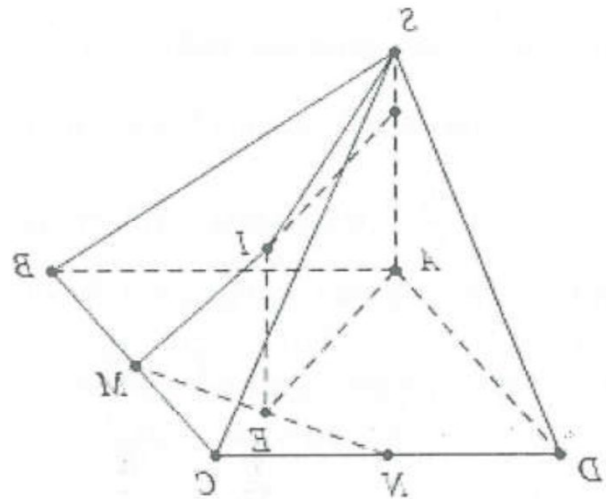
Ta có: $CE = \frac{MN}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow IE = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{8}}; SA = 2a$

$$AE^2 = \left(\frac{3}{4}CD\right)^2 + \left(\frac{3}{4}AD\right)^2 = \frac{9a^2}{8}$$

Lại có $R^2 - AE^2 = (SA - IE)^2$

$$\Leftrightarrow R^2 - \frac{9a^2}{8} = \left(2a - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{8}}\right)^2 \Rightarrow R = \frac{3a\sqrt{3}}{4}$$

Chọn C.



Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a$. Mặt bên (SAD) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CD . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CMN$.

A. $R = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. B. $R = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$. C. $R = \frac{a\sqrt{13}}{4}$. D. $R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Gọi H là trung điểm của $AD \Rightarrow SH \perp AD$

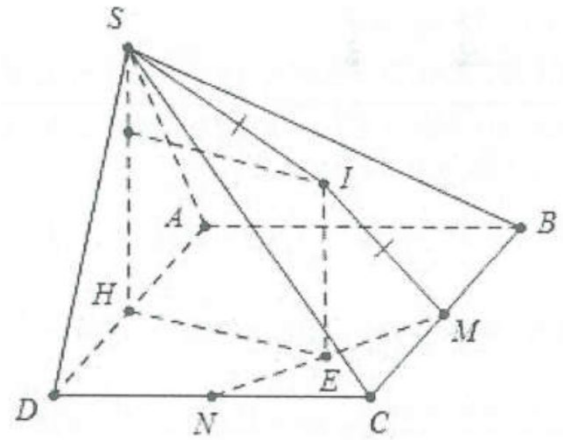
$\Rightarrow SH \perp (ABCD)$. Gọi E là trung điểm của MN , dựng đường thẳng d qua E song song với SH , trên d lấy điểm I sao cho $IS = IC \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.CMN \Rightarrow IS = IC = IM = IN = R$.

Ta có: $CE = \frac{MN}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{4} \Rightarrow IE = \sqrt{R^2 - \frac{5a^2}{16}}; SH = a\sqrt{3}$

$$HE^2 = \left(\frac{3}{4}CD\right)^2 + \left(\frac{1}{4}AD\right)^2 = \frac{13a^2}{16}$$

Lại có $R^2 - HE^2 = (SH - IE)^2 \Leftrightarrow R^2 - \frac{13a^2}{16} = \left(a\sqrt{3} - \sqrt{R^2 - \frac{5a^2}{16}}\right)^2 \Rightarrow R = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Chọn A.



Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm đối xứng của C qua AB và mặt bên (SAB) tạo với đáy góc 60° . Tính bán kính R mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $R = \frac{a\sqrt{91}}{12}$.

B. $R = \frac{a\sqrt{217}}{12}$.

C. $R = \frac{a\sqrt{91}}{15}$.

D. $R = \frac{a\sqrt{273}}{12}$.

Lời giải

Gọi H là đối xứng của C qua $AB \Rightarrow CH \perp AB$.

O là trung điểm của CH

$$\Rightarrow OH = CO = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \widehat{SOH} = 60^\circ$$

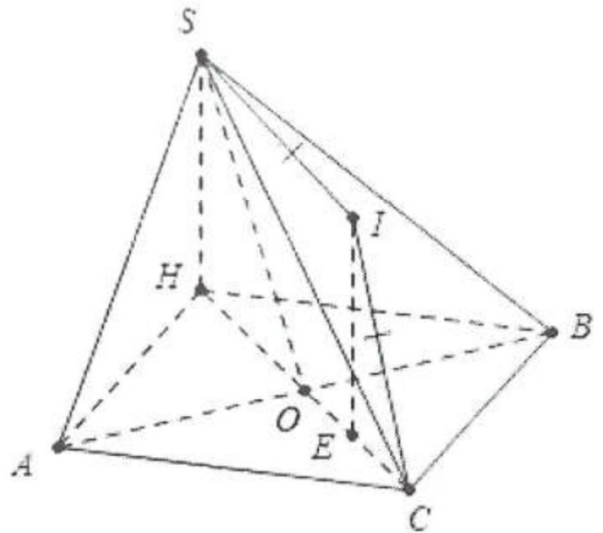
Suy ra $SH = OH \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}$

Gọi E là trọng tâm tam giác ABC , dựng đường thẳng d qua E song song với SH , trên d lấy điểm I sao cho $IS = IC \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.CMN$

$$\Rightarrow IS = IC = IM = IN = R.$$

có: $CE = \frac{2CO}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow IE = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}}; HE = 2CE = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Lại có $R^2 - HE^2 = (SH - IE)^2 \Leftrightarrow R^2 - \frac{4a^2}{3} = \left(\frac{3a}{2} - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}}\right)^2 \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{217}}{12}$.



Chọn B.

Dạng 7: Bài toán mặt cầu của một số tứ diện đặc biệt

☒ **Mẫu 1:** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c$ (tứ diện gần đều)

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là: $R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}}$.

Chứng minh: Gọi M, N, O lần lượt là trung điểm của AB, CD và MN

Ta có: $\triangle ACD = \triangle BDC (c - c - c) \Rightarrow DM = CM$

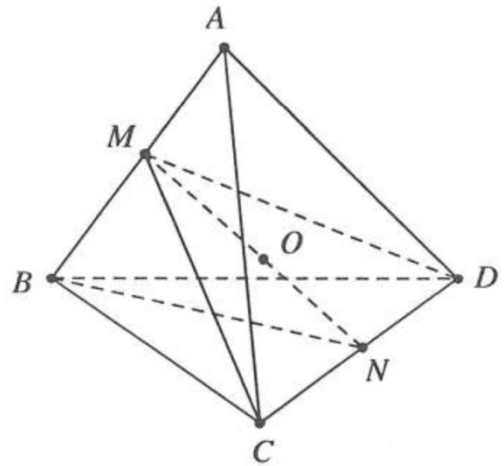
Khi đó $MN \perp CD$, tương tự $MN \perp AB$ suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

$$\text{Ta có: } R^2 = OA^2 = OB^2 = OM^2 + AM^2 = \frac{MN^2}{4} + \frac{a^2}{4}$$

$$\text{Xét } \triangle CMN \text{ có: } MN^2 = CM^2 - CN^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \Rightarrow R^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{8} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}.$$

$$\text{Vậy } R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}}.$$



Ví dụ 1: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 3, AC = BD = 2, AD = BC = 2\sqrt{2}$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là

A. $S = \frac{21\pi}{2}$.

B. $S = \frac{19\pi}{2}$.

C. $S = 9\pi$.

D. $S = 4\pi$.

Lời giải

$$\text{Áp dụng công thức nhanh ta có: } R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}} = \sqrt{\frac{3^2 + 2^2 + (2\sqrt{2})^2}{8}} = \sqrt{\frac{21}{8}} \Rightarrow S = 4\pi R^2 = \frac{21\pi}{2}.$$

Chọn A.

Ví dụ 2: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a, AC = BD = AD = BC = b$. Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là

A. $R = \sqrt{\frac{a^2 + 2b^2}{8}}$.

B. $R = \sqrt{\frac{2a^2 + b^2}{8}}$.

C. $R = \sqrt{\frac{a^2 + 2b^2}{2}}$.

D. $R = \sqrt{\frac{2a^2 + b^2}{2}}$.

Lời giải

Áp dụng công thức nhanh ta có: $R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}} = R = \sqrt{\frac{a^2 + 2b^2}{8}}$. **Chọn A.**

Ví dụ 3: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = AC = BD = 2, AD = BC = 1$. Thể tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là

- A. $V = \frac{9\pi}{8}$. B. $V = \frac{9\pi\sqrt{2}}{8}$. C. $V = \frac{2\pi}{3}$. D. $V = \frac{9\pi\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải

Áp dụng công thức nhanh ta có: $R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}} = \sqrt{\frac{1^2 + 2^2 + 2^2}{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{9\pi\sqrt{2}}{8}$.

Chọn D.

Ví dụ 1: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 3, AC = BD = 5, AD = BC = 6$. Thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. (100;102). B. (95;98). C. (106;109). D. (103;107).

Lời giải

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $R = \sqrt{\frac{AB^2 + AC^2 + AD^2}{8}} = \frac{\sqrt{35}}{2}$.

Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{35}}{2}\right)^3 = \frac{35\sqrt{35}\pi}{6}$. **Chọn C.**

Ví dụ 5: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = x, AC = BD = y, AD = BC = 2\sqrt{3}$. Bán kính khối cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng $\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của xy bằng

- A. 2. B. 4. C. $2\sqrt{2}$. D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $R = \sqrt{\frac{AB^2 + AC^2 + AD^2}{8}}$.

Khi đó $\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + (2\sqrt{3})^2}{8}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$ mà $xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \sqrt{2}$. Vậy $\{xy\}_{\max} = 2$. **Chọn A.**

☑ **Mẫu 2:** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = x; CD = y; AD = BC = AC = BD = z$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD ta có:

$\triangle DAC = \triangle DBC \Rightarrow AN = BN$ suy ra NM là trung trực của AB , tương tự MN là trung trực của DC

Khi đó $I \in MN$ sao cho $ID = IA$

$$\text{Lại có } AN = \sqrt{AD^2 - DN^2} = \sqrt{z^2 - \frac{y^2}{4}}$$

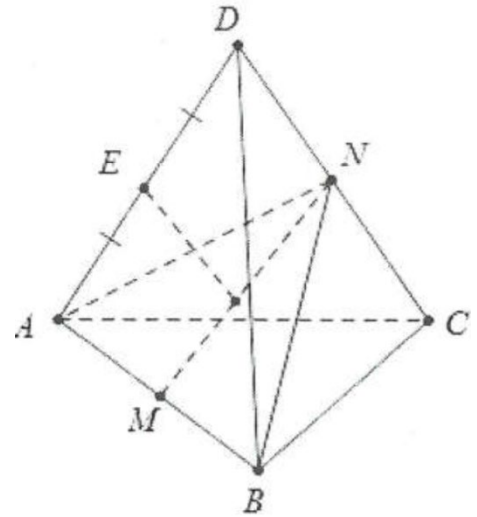
$$\Rightarrow MN = \sqrt{AN^2 - AM^2} = \sqrt{z^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4}}$$

$$\text{Mặt khác } MN = IM + IN = \sqrt{R^2 - AM^2} + \sqrt{R^2 - DN^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} + \sqrt{R^2 - \frac{y^2}{4}} = \sqrt{z^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4}}$$

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là nghiệm của phương trình:

$$\boxed{\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} + \sqrt{R^2 - \frac{y^2}{4}} = \sqrt{z^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4}}}$$



Ví dụ 1: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 2a; CD = 4a$, các cạnh còn lại đều bằng $3a$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

- A. $2a$. B. $\frac{a\sqrt{65}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{71}}{4}$. D. $\frac{5a}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \sqrt{R^2 - a^2} + \sqrt{R^2 - 4a^2} = \sqrt{9a^2 - 5a^2} = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{R^2 - a^2} = (2a - \sqrt{R^2 - 4a^2}) \Rightarrow R^2 - a^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{R^2 - 4a^2} + R^2 - 4a^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{R^2 - 4a^2} = \frac{a}{4} \Leftrightarrow R = \frac{a\sqrt{65}}{4}. \text{ Chọn B.}$$

Ví dụ 2: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 4a; CD = 6a$, các cạnh còn lại đều bằng $a\sqrt{22}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

- A. $S = \frac{85\pi}{9}$. B. $S = \frac{340\pi}{3}$. C. $S = \frac{340\pi}{9}$. D. $S = \frac{340\pi}{27}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \sqrt{R^2 - 4a^2} + \sqrt{R^2 - 9a^2} = \sqrt{22a^2 - 13a^2} = 3a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{R^2 - 4a^2} = (3a - \sqrt{R^2 - 9a^2}) \Rightarrow R^2 - 4a^2 = 9a^2 - 6a\sqrt{R^2 - 9a^2} + R^2 - 9a^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{R^2 - 9a^2} = \frac{4a}{6} \Leftrightarrow R = \frac{a\sqrt{85}}{4} \Rightarrow S = 4\pi R^2 = \frac{340\pi}{9}. \text{ Chọn C.}$$

Ví dụ 3: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 2a; CD = 8a$, các cạnh còn lại đều bằng $a\sqrt{26}$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $4a$.

B. $a\sqrt{14}$.

C. $a\sqrt{10}$.

D. $\frac{9a}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \sqrt{R^2 - a^2} + \sqrt{R^2 - 9a^2} = \sqrt{26a^2 - 10a^2} = 4a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{R^2 - a^2} = (4a - \sqrt{R^2 - 9a^2}) \Rightarrow R^2 - a^2 = 16a^2 - 8a\sqrt{R^2 - 9a^2} + R^2 - 9a^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{R^2 - 9a^2} = a \Leftrightarrow R = a\sqrt{10}. \text{ Chọn C.}$$

Ví dụ 4: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 4a; CD = 10a$, các cạnh còn lại đều bằng $a\sqrt{78}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $S = 30\pi a^2$.

B. $S = 29\pi a^2$.

C. $S = \frac{116\pi a^2}{3}$.

D. $S = 116\pi a^2$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \sqrt{R^2 - 4a^2} + \sqrt{R^2 - 25a^2} = \sqrt{78a^2 - 29a^2} = 7a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{R^2 - 4a^2} = (7a - \sqrt{R^2 - 25a^2}) \Rightarrow R^2 - 4a^2 = 49a^2 - 14a\sqrt{R^2 - 25a^2} + R^2 - 25a^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{R^2 - 25a^2} = 2a \Leftrightarrow R = a\sqrt{29} \Rightarrow S_{(C)} = 4\pi R^2 = 116\pi a^2. \text{ Chọn D.}$$

Ví dụ 5: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 2a; CD = 8a$, các cạnh còn lại đều bằng x . Tìm x biết bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện bằng $a\sqrt{17}$.

A. $x = a\sqrt{42}$.

B. $x = 6a$.

C. $x = a\sqrt{38}$.

D. $x = a\sqrt{33}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \sqrt{R^2 - a^2} + \sqrt{R^2 - 16a^2} = \sqrt{x^2 - 17a^2}$$

$$\text{Với } R = a\sqrt{17} \Rightarrow \sqrt{x^2 - 17a^2} = 4a + a = 5a \Rightarrow x^2 = 42a^2 \Rightarrow x = a\sqrt{42}. \text{ Chọn A.}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $SA \perp (ABC)$. Điểm nào sau đây là tâm của mặt cầu qua các điểm S, A, B, C ?

- A. Trung điểm của AC .
- B. Trung điểm của AB .
- C. Trung điểm của BC .
- D. Trung điểm của SC .

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $SA \perp (ABC)$. Gọi I và J lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC . Điểm nào sau đây là tâm của mặt cầu qua năm điểm A, B, C, I, J ?

- A. Trung điểm của AC .
- B. Trung điểm của BC .
- C. Trung điểm của IJ .
- D. Trọng tâm của $\triangle ABC$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Gọi I, J, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC, SD . Điểm nào sau đây là tâm của mặt cầu qua bảy điểm A, B, C, D, I, J, K ?

- A. Tâm của $ABCD$.
- B. Trung điểm của SB .
- C. Trung điểm của SC .
- D. Trung điểm của SD .

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ với tam giác BCD vuông tại $B, BC = a, BD = \sqrt{3}$ và $AB = AC = AD = a\sqrt{2}$. Điểm nào sau đây là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$?

- A. Trung điểm của BC .
- B. Trung điểm của CD .
- C. Trung điểm của BD .
- D. Trọng tâm của $\triangle BCD$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng SB . Điểm nào sau đây là tâm của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $A.BCH$?

- A. Trọng tâm của $\triangle ABC$.
- B. Trọng tâm của $\triangle ABCH$.
- C. Trọng tâm của $\triangle ACH$.
- D. Trọng tâm của $\triangle ABH$.

Câu 6: Cho tứ diện $ABCD$ có O là trung điểm đoạn thẳng nối trung điểm của hai cạnh đối diện. Tập hợp các điểm M trong không gian thỏa mãn hệ thức $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = a (a > 0)$ là

- A. Mặt cầu tâm O bán kính $r = \frac{a}{4}$.
- B. Mặt cầu tâm O bán kính $r = \frac{a}{2}$.
- C. Mặt cầu tâm O bán kính $r = a$.
- D. Mặt cầu tâm O bán kính $r = \frac{a}{3}$.

Câu 7: Cho tứ diện $DABC$, đáy ABC là tam giác vuông tại B, DA vuông góc với mặt đáy. Biết $AB = 3a, BC = 4a, AD = 5a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $DABC$ có bán kính bằng

- A. $\frac{5a\sqrt{2}}{2}$.
- B. $\frac{5a\sqrt{2}}{3}$.
- C. $\frac{5a\sqrt{3}}{3}$.
- D. $\frac{5a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 8: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một và $SA = a, SB = b, SC = c$. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có bán kính là:

- A. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. B. $\frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. C. $\frac{3}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. D. $\frac{2}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Câu 9: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một và $SA = SB = 2a, SC = 4a$. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có bán kính tính theo a là:

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. D. $a\sqrt{6}$.

Câu 10: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$, đáy là tam giác vuông tại $A, AB = 3, AC = 4, SA$ vuông góc với đáy, $SA = 2\sqrt{14}$. Thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

- A. $V = \frac{169\pi}{6}$. B. $V = \frac{2197\pi}{8}$. C. $V = \frac{729\pi}{6}$. D. $V = \frac{13\pi}{8}$.

Câu 11: Cho tứ diện $ABCD$ cạnh a , đường cao AH , O là trung điểm AH . Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OCBD$.

- A. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. C. $R = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. D. $R = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 12: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại $B, AB = a$, các cạnh bên đều bằng a . Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{6}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 13: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Mặt cầu nội tiếp tứ diện này có bán kính theo a là:

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{12}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{9}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{8}$.

Câu 14: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện này có bán kính theo a là:

- A. $\frac{3\pi a^2}{2}$. B. $\frac{3\pi a^2}{4}$. C. $\frac{5\pi a^2}{4}$. D. a^2 .

Câu 15: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

- A. $\frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{8}$. B. $\frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{6}$. C. $\frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{4}$. D. $\frac{3\pi a^3 \sqrt{6}}{8}$.

Câu 16: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Biết mặt cầu ngoại tiếp tứ diện có bán kính bằng 1. Tính giá trị của a .

- A. $a = \frac{\sqrt{2}}{3}$. B. $a = \frac{\sqrt{6}}{3}$. C. $a = \frac{2\sqrt{6}}{3}$. D. $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $3a$, cạnh bên $SC = 2a$, và SC vuông góc với đáy. Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

- A. $16\pi a^2$. B. $36\pi a^2$. C. $24\pi a^2$. D. $\frac{8\pi a^2}{3}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B , $AB = a$, góc BAC bằng 60° , chiều cao $SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp.

- A. $V = a^3\pi\sqrt{6}$. B. $V = \frac{4\pi a^3\sqrt{6}}{3}$. C. $V = \frac{2\pi a^3\sqrt{6}}{3}$. D. $V = \pi a^3\sqrt{6}$.

Câu 19: Cho khối chóp $S.ABCD$ có SC vuông góc với $(ABCD)$, $SA = SB = SD$, ABD là tam giác cân tại A có $AB = a$, $BD = a\sqrt{3}$, góc giữa SA và $(ABCD)$ bằng 45° . Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

- A. $R = \frac{7a\sqrt{3}}{12}$. B. $R = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. C. $R = a$. D. $R = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 20: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , các cạnh bên bằng b . Tính theo a, b bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là:

- A. $\frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}}$. B. $\frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{2}}}$. C. $\frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}}$. D. $\frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{3}}}$.

Câu 21: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy bằng 45° . Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là:

- A. $\frac{9\pi a^2}{4}$. B. $\frac{4\pi a^2}{3}$. C. $\frac{3\pi a^2}{4}$. D. $\frac{2\pi a^2}{3}$.

Câu 22: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy hợp với cạnh bên một góc 45° . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng $\sqrt{2}$. Thể tích khối chóp là

- A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. C. $4\sqrt{2}$. D. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Câu 23: Thể tích khối cầu ngoại tiếp khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a là

- A. $\frac{8\pi a^3}{3}$. B. $\frac{2\pi a^3}{3}$. C. $2\pi a^3$. D. $\frac{4\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Câu 24: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp này có diện tích tính theo a là

- A. πa^2 . B. $2\pi a^2$. C. $3\pi a^2$. D. $4\pi a^2$.

Câu 25: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $3\sqrt{2}a$, cạnh bên bằng $5a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

- A. $R = \sqrt{3}a$. B. $R = \sqrt{2}a$. C. $R = \frac{25a}{8}$. D. $R = 2a$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = 2a$. Tính thể tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

- A. $\pi a^3 \sqrt{6}$. B. $\frac{\pi a^3}{\sqrt{6}}$. C. $\frac{4\sqrt{6}}{3} \pi a^3$. D. $\frac{3\pi a^3}{4\sqrt{6}}$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a\sqrt{3}$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

- A. $5\pi a^2$. B. $\frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{4\pi a^2}{3}$. D. $\frac{4\pi a^2}{5}$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác có $AB = 2a, BC = AC = a\sqrt{2}, AD = a$ và $BD = a\sqrt{3}$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

- A. $\frac{\pi a^3}{32}$. B. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{32}$. C. $\frac{32\sqrt{3}\pi a^3}{27}$. D. $\frac{32\pi a^3}{9}$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a\sqrt{6}$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

- A. $S = 8\pi a^2$. B. $S = \sqrt{2}a^2$. C. $S = 2a^2$. D. $S = 2\pi a^2$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB = BC = a\sqrt{3}$ và $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{16\pi a^3}{3}$. B. $V = 8\pi a^3$. C. $V = 4\sqrt{3}\pi a^3$. D. $V = 3\sqrt{3}\pi a^3$.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $AB = 3a, BC = 4a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = 12a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

- A. $R = \frac{5a}{2}$. B. $R = \frac{17a}{2}$. C. $R = \frac{13a}{2}$. D. $R = 6a$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 3$. Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC cắt các cạnh $SB; SC; SD$ lần lượt tại các điểm M, N, P . Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$

- A. $V = \frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$. B. $V = \frac{125\pi}{6}$. C. $V = \frac{32\pi}{3}$. D. $V = \frac{108\pi}{3}$.

Câu 33: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 4a, CD = 6a$ và các cạnh còn lại đều bằng $a\sqrt{22}$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $R = 3a$. B. $R = \frac{a\sqrt{85}}{3}$. C. $R = \frac{a\sqrt{79}}{3}$. D. $R = \frac{5a}{2}$.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{6}$. Đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại $A, B, AD = 2AB = 2BC = 2a$. Gọi E là trung điểm AD . Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SECD$.

A. $R = a\sqrt{6}$. B. $R = \frac{a\sqrt{30}}{3}$. C. $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $R = \frac{a\sqrt{114}}{6}$.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $\frac{4\pi a^3 \sqrt{3}}{27}$. B. $\frac{5\pi a^3}{3}$. C. $\frac{5\pi a^3 \sqrt{15}}{54}$. D. $\frac{5\pi a^3 \sqrt{15}}{18}$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $A, AB = AC = a$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{\pi a^3}{3}$. B. $V = \frac{7\pi a^3 \sqrt{21}}{54}$. C. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{21}}{54}$. D. $V = \frac{\pi a^3}{54}$.

Câu 37: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC, SA = a, \widehat{ASB} = 90^\circ$. Tính theo a bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $R = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. D. $R = a\sqrt{3}$.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính bán kính r của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $r = \frac{3a}{2}$. C. $r = a$. D. $r = a\sqrt{2}$.

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a$, góc giữa đường thẳng SC và đáy bằng 45° . Tính theo a thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $V = \pi a^3 \sqrt{6}$. B. $V = \frac{10\pi a^3}{3}$. C. $V = \frac{5\pi a^3}{6}$. D. $V = \frac{5\sqrt{10}\pi a^3}{3}$.

Câu 40: Cho tứ diện $SABC$ có tam giác ABC vuông tại $B, AB = a, BC = a\sqrt{3}, SA = a\sqrt{2}$ và $SB = a\sqrt{2}, SC = a\sqrt{5}$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$.

A. $R = \frac{a\sqrt{259}}{7}$. B. $R = \frac{a\sqrt{259}}{4}$. C. $R = \frac{a\sqrt{259}}{2}$. D. $R = \frac{a\sqrt{37}}{14}$.

Câu 41: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD, BC và K là giao điểm của AM và DN . Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABNK$.

A. $R = \frac{a\sqrt{17}}{4}$. B. $R = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$. C. $R = \frac{a\sqrt{17}}{2}$. D. $R = \frac{a\sqrt{15}}{4}$.

Câu 42: Cho khối chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , $AB = 2a$, $BC = 2a\sqrt{3}$, góc hợp giữa hai đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Hình chiếu vuông góc của đỉnh S xuống mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm H của tam giác ABC . Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

A. $R = \frac{2a\sqrt{21}}{9}$. B. $R = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. C. $R = \frac{4a\sqrt{21}}{9}$. D. $R = \frac{4a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông với đường cao $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của AD . Kẻ $EK \perp SD$ tại K . Bán kính mặt cầu đi qua sáu điểm S, A, B, C, E, K bằng

A. a . B. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. C. $\frac{1}{2}a$. D. $\frac{\sqrt{6}}{2}a$.

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA = 2a$, SA vuông góc với $(ABCD)$, kẻ AH vuông góc với SB và AK vuông góc với SD . Mặt phẳng (AHK) cắt SC tại E . Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp khối $ABCDEHK$

A. $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{4\pi a^3 \sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{8\pi a^3 \sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{6}$.

Câu 45: Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $AB = 1$, $AC = 2$ và góc $\widehat{BAC} = \alpha$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Điểm B_1 và C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC . Tính bán kính R của mặt cầu đi qua các điểm A, B, C, C_1, B_1

A. $R = \frac{\sqrt{5-4\cos\alpha}}{\sqrt{3}\sin\alpha}$. B. $R = \frac{2\sqrt{5-4\cos\alpha}}{\sqrt{3}\sin\alpha}$. C. $R = \frac{\sqrt{5-4\cos\alpha}}{\sqrt{2}\sin\alpha}$. D. $R = \frac{\sqrt{5-4\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$.

Câu 46: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính của mặt cầu ngoại tiếp khối lập phương, mặt cầu nội tiếp khối lập phương và mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của hình lập phương. Đẳng thức nào sau đây là đúng về R_1, R_2, R_3

A. $R_1 \cdot R_2 = R_3^2$. B. $R_1^2 \cdot R_2^2 = R_3^2$. C. $R_2 \cdot R_3 = R_1^2$. D. $R_2^2 + R_3^2 = R_1^2$.

Câu 47: Các kí hiệu R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính của mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp và tiếp xúc với tất cả các cạnh của hình lập phương. Tìm khẳng định đúng?

- A. $R_1 > R_2 > R_3$. B. $R_2 > R_3 > R_1$. C. $R_1 > R_3 > R_2$. D. $R_3 > R_1 > R_2$.

Câu 48: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy (ABC) một góc 30° . Tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 18. Tính diện tích S mặt cầu ngoại tiếp khối lăng trụ trên.

- A. $S = 57\pi$. B. $S = \frac{57\pi}{4}$. C. $S = \frac{57\pi}{2}$. D. $S = \frac{57\pi}{3}$.

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, DC . Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.DMN$.

- A. $R = \frac{a\sqrt{39}}{6}$. B. $R = \frac{a\sqrt{31}}{4}$. C. $R = \frac{a\sqrt{102}}{6}$. D. $R = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.

Câu 50: Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB = 3a, AC = 4a$. Hình chiếu H của S trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Biết $SA = 2a$, bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

- A. $R = \frac{a\sqrt{118}}{4}$. B. $R = \frac{a\sqrt{118}}{2}$. C. $R = \frac{a\sqrt{118}}{8}$. D. $R = a\sqrt{118}$.

Câu 51: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = BC = AD = BD = 2a, CD = 2b (a > b)$. Xác định bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$

- A. $R = b\sqrt{\frac{4a^2 - b^2}{3a^2 - b^2}}$. B. $R = a\sqrt{\frac{3a^2 - b^2}{4a^2 - b^2}}$. C. $R = a\sqrt{\frac{4a^2 - b^2}{3a^2 - b^2}}$. D. $R = b\sqrt{\frac{3a^2 - b^2}{4a^2 - b^2}}$.

Câu 52: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AD = BC = 8, AC = BD = 6, CD = 4$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$

- A. $R = \sqrt{\frac{187}{10}}$. B. $R = 5$. C. $R = \sqrt{\frac{177}{10}}$. D. $R = \sqrt{\frac{65}{2}}$.

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

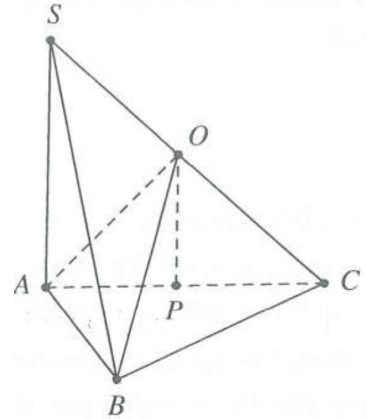
Câu 1: Gọi P là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Trục đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ cắt SC tại O .

$$\text{Ta có } \begin{cases} OA = OB = OC \\ OC = OS \end{cases} \Rightarrow OA = OB = OC = OS.$$

Vậy O là tâm mặt cầu qua các điểm S, A, B, C .

Chọn D.



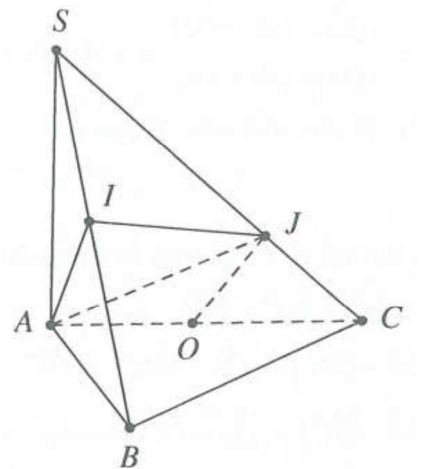
Câu 2: Gọi O là trung điểm của AC .

$$\text{Ta có } \begin{cases} AB \perp BC \Rightarrow OA = OC = OB \\ AJ = JC \Rightarrow OA = OC = OJ \end{cases}$$

$$\text{Từ } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Leftrightarrow BC \perp AI.$$

$$\begin{aligned} \text{Mà } AI \perp SB &\Rightarrow AI \perp (SBC) \Rightarrow AI \perp IC \\ &\Rightarrow OA = OC = OI \Rightarrow OA = OB = OC = OI = OJ. \end{aligned}$$

Vậy O là tâm mặt cầu cần tìm. **Chọn A.**



Câu 3: Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

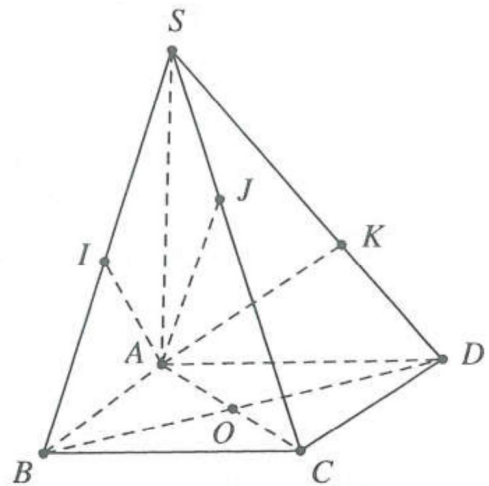
$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AI.$$

$$AI \perp SB \Rightarrow AI \perp (SBC) \Rightarrow AI \perp IC \Rightarrow OA = OC = OI.$$

Tương tự $OA = OC = OK$.

$$\text{Mà } AJ \perp SC \Rightarrow OA = OC = OJ$$

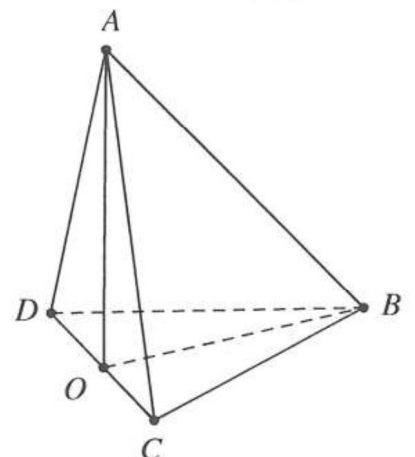
$$\Rightarrow OA = OB = OC = OD = OI = OJ = OK \Rightarrow O \text{ là tâm mặt cầu cần tìm. } \mathbf{Chọn A.}$$



Câu 4: Ta có $AB = AC = AD$, kẻ $AO \perp (BCD) \Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD .

$$\text{Ta có } \begin{cases} AD^2 + AC^2 = 4a^2 \\ CD^2 = BD^2 + BC^2 = 4a^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow AD^2 + AC^2 = CD^2 \Rightarrow AD \perp AC \Rightarrow OA = OC = OD.$$



Vậy $OB = OC = OD = OA \Rightarrow O$ là tâm mặt cầu cần tìm. **Chọn B.**

Câu 5: Ta có $AH \perp HB$.

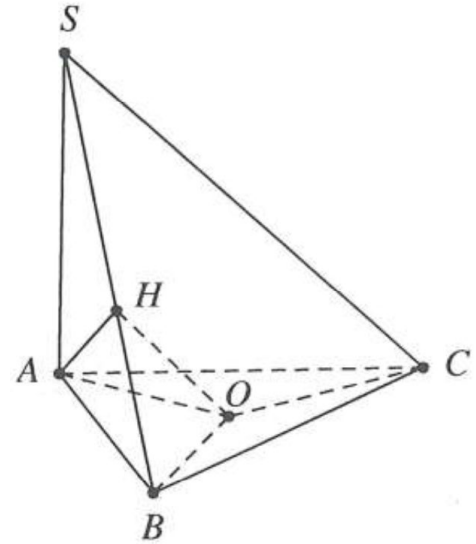
Trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH đi qua trung điểm của AB và vuông góc với (ABH) .

Trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đi qua tâm O của tam giác đều ABC và vuông góc với (ABC) .

Hai đường thẳng này cắt nhau tại chính O .

Ta có: $\begin{cases} OA = OB = OH \\ OA = OB = OC \end{cases} \Rightarrow OA = OB = OC = OH$.

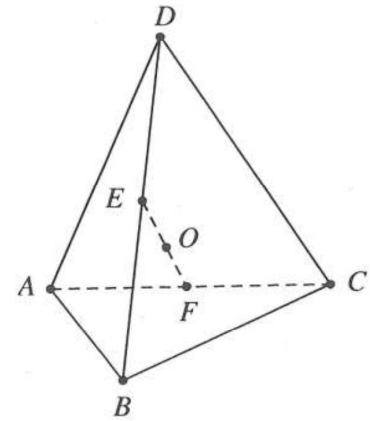
Vậy O là tâm mặt cầu cần tìm. **Chọn A.**



Câu 6: Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BD, AC .

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \\ &= (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OM}) \\ &= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) - 4\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OF} + 2\overrightarrow{OE} - 4\overrightarrow{OM} \\ &\Rightarrow 4\overrightarrow{OM} = a \Rightarrow OM = \frac{a}{4}. \end{aligned}$$

Chọn A.

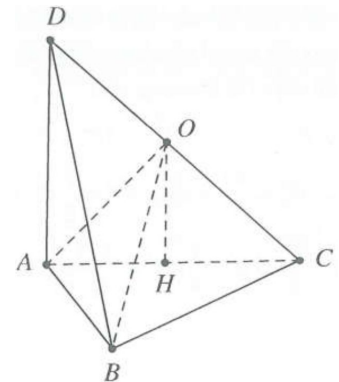


Câu 7: Gọi O là trung điểm của CD .

Ta có $OA = OB = OC = OD = R = \frac{1}{2}CD$.

$$\text{Cạnh } CD = \sqrt{AD^2 + AC^2} = \sqrt{AD^2 + AB^2 + BC^2} = 5a\sqrt{2}$$

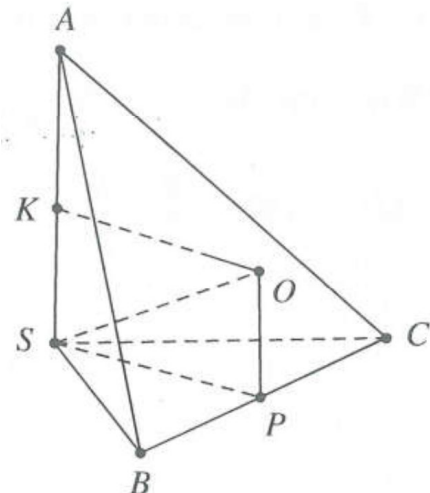
$R = 5a\sqrt{2}$. **Chọn A.**



Câu 8: Ta có $\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC)$.

Kí hiệu các điểm như hình vẽ với OP là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC và OK là trung trực của SA thì O là tâm mặt cầu.

Ta có $R = OS = \sqrt{OP^2 + SP^2}$.



$$OP = SK = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2}; SP = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2}$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \text{ Chọn A.}$$

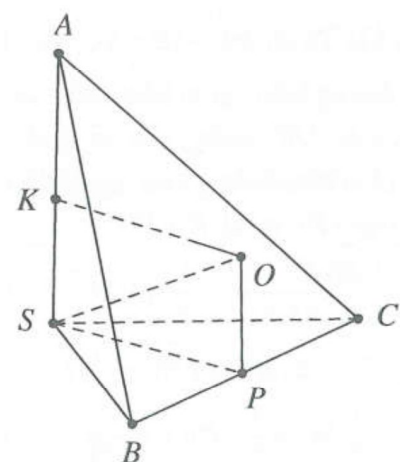
Câu 9: Ta có $\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC).$

Kí hiệu các điểm như hình vẽ với OP là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC và OK là trung trực của SA thì O là tâm mặt cầu.

$$\text{Ta có } R = OS = \sqrt{OP^2 + SP^2}.$$

$$OP = SK = \frac{SA}{2} = a; SP = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{SB^2 + SC^2} = a\sqrt{5}$$

$$R = a\sqrt{6}. \text{ Chọn D.}$$

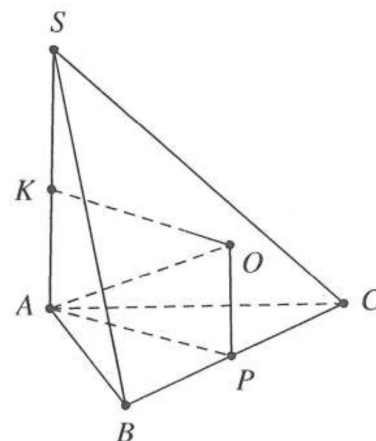


Câu 10: Kí hiệu các điểm như hình vẽ với OP là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và OK là trung trực của SA thì O là tâm mặt cầu.

$$\text{Ta có } R = OA = \sqrt{OP^2 + AP^2}.$$

$$OP = AK = \frac{SA}{2} = \sqrt{14}; AP = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + 4^2} = \frac{5}{2}$$

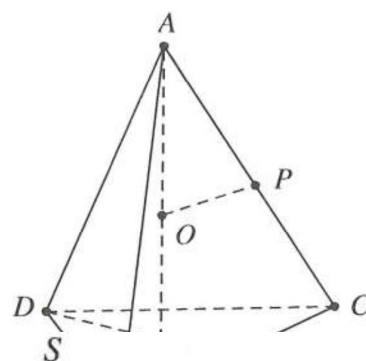
$$\Rightarrow R = \frac{9}{2} \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{243}{2}\pi. \text{ Chọn C.}$$



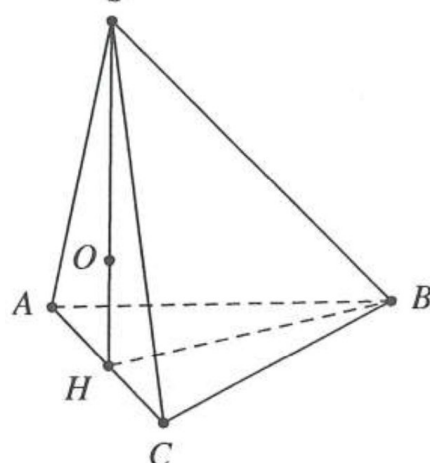
Câu 11: Kí hiệu các điểm như hình vẽ với OP là trung trực của AC thì

$$O \text{ là tâm mặt cầu } \Rightarrow R = OA = \frac{AC^2}{2AH} = \frac{AC^2}{2\sqrt{AD^2 - DH^2}}$$

$$AC = AD = a; DH = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{6}}{4}. \text{ Chọn B.}$$



Câu 12: Ta có $SA = SB = SC = a$, kẻ $SH \perp (ABC) \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .



Tam giác ABC vuông cân tại B nên H là trung điểm của AC .

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAC thì O là tâm mặt cầu, ta có $R = SO$.

$$S_{SAC} = \frac{SA \cdot SC \cdot AC}{4SO} = \frac{1}{2} SH \cdot AC \Rightarrow SO = \frac{SA \cdot SC}{2SH}$$

$$SA = SC = a; SH = \sqrt{SA^2 - AH^2}$$

$$AH = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} AB\sqrt{2} = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow SH = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow R = SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 13: Ta có $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} r (S_{ABC} + S_{ABD} + S_{ACD} + S_{BCD}) = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$.

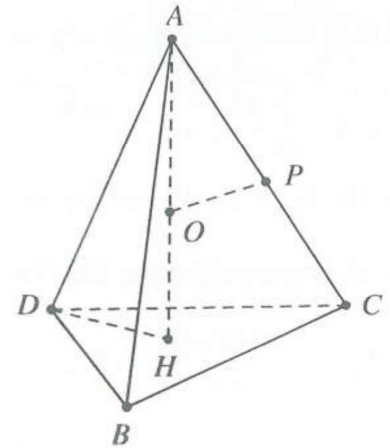
$$S_{ABC} = S_{ABD} = S_{ACD} = S_{BCD} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{6}}{12}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 14: Kí hiệu như hình vẽ với $AH \perp (BCD)$, OP là trung trực của AC thì O là tâm mặt cầu

$$\text{Ta có } R = OA = \frac{AC^2}{2AH} = \frac{AC^2}{2\sqrt{AD^2 - DH^2}}$$

$$AC = AD = a; DH = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{a\sqrt{6}}{4} \Rightarrow S = 4\pi R^2 = \frac{3}{2} \pi a^2. \text{ Chọn A.}$$

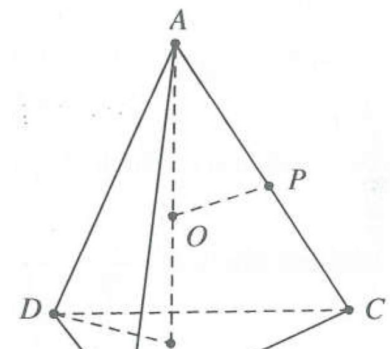


Câu 15: Kí hiệu như hình vẽ với $AH \perp (BCD)$, OP là trung trực của AC thì O là tâm mặt cầu

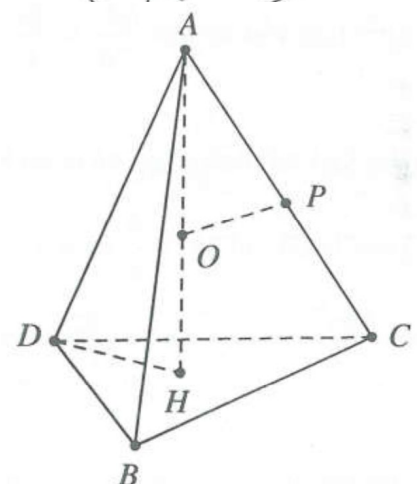
$$\text{Ta có } R = OA = \frac{AC^2}{2AH} = \frac{AC^2}{2\sqrt{AD^2 - DH^2}}$$

$$AC = AD = a; DH = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{a\sqrt{6}}{4} \Rightarrow V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{\sqrt{6}}{8} \pi a^3. \text{ Chọn A.}$$



Câu 16: Kí hiệu như hình vẽ với $AH \perp (BCD)$, OP là trung trực của AC thì O là tâm mặt cầu



Ta có $R = OA = \frac{AC^2}{2AH} = \frac{AC^2}{2\sqrt{AD^2 - DH^2}}$

$$AC = AD = a; DH = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{a\sqrt{6}}{4} \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{6}}{3}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 17: Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $r = \frac{3a\sqrt{3}}{3} = a\sqrt{3}$

Ta có $R = \sqrt{\left(\frac{SC}{2}\right)^2 + r^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a \Rightarrow S = 4\pi R^2 = 16\pi a^2$. **Chọn A.**

Câu 18: Ta có $\tan \widehat{BAC} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow BC = AB = a\sqrt{3} \Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $r = \frac{AC}{2} = a$

Ta có $R = \sqrt{\left(\frac{SA}{2}\right)^2 + r^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3 = a^3\pi\sqrt{6}$. **Chọn A.**

Câu 19: Ta có $SC \perp (ABCD)$ và $SA = SB = SC \Rightarrow C$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD

Gọi M là trung điểm của BD . Ta có $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \frac{a}{2} \Rightarrow S_{ABD} = \frac{1}{2}AM \cdot BD = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Mà $S_{ABD} = \frac{AB \cdot BD \cdot AD}{4R} \Rightarrow R_{ABD} = \frac{AB \cdot BD \cdot AD}{4S_{ABD}} = \frac{a \cdot a \cdot a\sqrt{3}}{4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = a \Rightarrow AC = BC = CD = a$

Ta có $SA \cap (ABCD) = \{A\}$ và $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (\widehat{SA, (ABCD)}) = (\widehat{SA, AC}) = \widehat{SAC} = 45^\circ$

Ta có $\tan \widehat{SAC} = \frac{SC}{AC} \Rightarrow SC = AC \tan \widehat{SAC} = a \Rightarrow R = \sqrt{\left(\left(\frac{SC}{2}\right)^2 + R_{ABD}^2}\right) = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. **Chọn D.**

Câu 20: Chiều cao của hình chóp là $h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$

Bán kính mặt cầu là $R = \frac{b^2}{2h} = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}}$. **Chọn A.**

Câu 21: $\tan 45^\circ = \frac{h}{\frac{a}{2}} \Rightarrow h = \frac{a}{2} \Rightarrow SA = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + h^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Bán kính mặt cầu là $R = \frac{SA^2}{2h} = \frac{3a}{4} \Rightarrow S = 4\pi R^2 = \frac{9\pi a^2}{4}$. **Chọn A.**

Câu 22: Giả sử hình chóp có cạnh bên là a , chiều cao $h \Rightarrow R = \frac{a^2}{2h} = \sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 2\sqrt{2}h$

Mặt khác ta có $\sin 45^\circ = \frac{h}{a} \Rightarrow a = h\sqrt{2}$. Do đó suy ra $h = \sqrt{2}, a = 2$

Ta có $\frac{AB\sqrt{2}}{2} = \sqrt{a^2 - h^2} = \sqrt{2} \Rightarrow AB = 2 \Rightarrow S_{ABCD} = 4 \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}h.S_{ABCD} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. **Chọn D.**

Câu 23: Chiều cao của hình chóp là $h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow R = \frac{a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. **Chọn B.**

Câu 24: Chiều cao của hình chóp là $h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow R = \frac{a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S = 4\pi R^2 = 2\pi a^2$. **Chọn B.**

Câu 25: Chiều cao của hình chóp là $h = \sqrt{(5a)^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}a \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2} = 4a \Rightarrow R = \frac{(5a)^2}{2 \cdot 4a} = \frac{25a}{8}$. **Chọn C.**

Câu 26: Bán kính đường tròn đáy là $R_d = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Do $SA \perp (ABC)$ nên bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $R = \sqrt{\frac{SA^2}{4} + R_d^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \pi a^3 \sqrt{6}$. **Chọn A.**

Câu 27: Bán kính đường tròn đáy là $R_d = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Do $SA \perp (ABC)$ nên bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $R = \sqrt{\frac{SA^2}{4} + R_d^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là: $S = 4\pi R^2 = 5\pi a^2$. **Chọn A.**

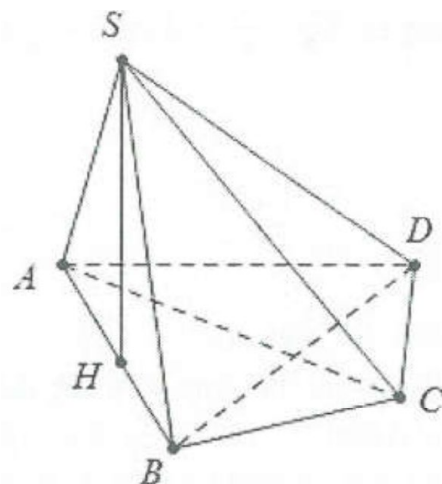
Câu 28: Ta có $\begin{cases} AD^2 + BD^2 = AB^2 = 4a^2 \\ AC^2 + BC^2 = AB^2 = 4a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AD \perp BD \\ AC \perp BC \end{cases}$

$\Rightarrow C, D$ cùng nhìn AB dưới một góc vuông nên tứ giác $ABCD$

nội tiếp đường tròn bán kính $R_{ABCD} = R_1 = \frac{AB}{2} = a$.

Lại có $\triangle SAB$ đều nên: $R_{SAB} = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{2a\sqrt{3}}{3} = R_2$

Do $(SAB) \perp (ABC)$ nên $R_{S.ABCD} = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - \frac{AB^2}{4}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.



Thể tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là: $V_{(C)} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32\sqrt{3}\pi a^3}{27}$. **Chọn C.**

Câu 29: Bán kính đường tròn đáy là $R_d = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Do $SA \perp (ABC)$ nên bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $R = \sqrt{\frac{SA^2}{4} + R_d^2} = 2a$.

Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là: $S = 4\pi R^2 = 8\pi a^3$. **Chọn A.**

Câu 30: Gọi H là chân đường cao hạ từ S xuống mặt phẳng (ABC)

Ta có $\begin{cases} SA \perp AB \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHA) \Rightarrow AB \perp HA$

Tương tự ra có: $BC \perp HC \Rightarrow ABCH$ là hình vuông.

Do $AH \parallel BC \Rightarrow AH \parallel (SBC)$

$\Rightarrow d(A; (SBC)) = d(H; (SBC))$

Dựng $HK \perp SC$ do $BC \perp HK \Rightarrow HK \perp (SBC)$

Do đó $d(A; (SBC)) = HK = a\sqrt{2}$

Mặt khác $\frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HC^2} = \frac{1}{HK^2} \Rightarrow SH = a\sqrt{6}$

Ta có: $R_{S.ABCD} = R_{S.HABC} = \sqrt{\frac{SH^2}{4} + R_d^2}$ (do tứ giác $HABC$ nội tiếp)

Trong đó $R_d = \frac{AC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow R_{S.ABC} = a\sqrt{3} \Rightarrow V_{(C)} = \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\sqrt{3}\pi a^3$. **Chọn C.**

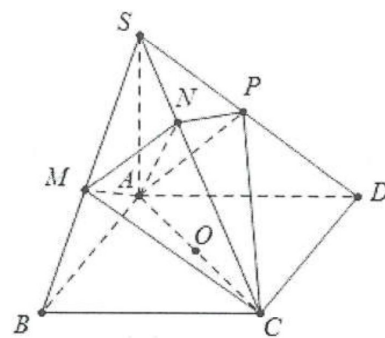
Câu 31: Bán kính đường tròn đáy là $R_d = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + BC^2}}{2} = \frac{5a}{2}$.

Do $SA \perp (ABC)$ nên bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là: $R = \sqrt{\frac{SA^2}{4} + R_d^2} = \frac{13}{2}$. **Chọn C.**

Câu 32: Ta có $SC \perp AM$ mặt khác $AM \perp SB$ do đó $AM \perp MC$. Như vậy $\widehat{AMC} = 90^\circ$

Tương tự $\widehat{APC} = 90^\circ$. Lại có $\widehat{ANC} = 90^\circ$ vậy tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $C.MNP$ là trung điểm của AC .

Suy ra $R = \frac{AC}{2} = 2 \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32}{3}\pi$. **Chọn C.**



Câu 33: Đặt $AB = x; CD = y; AD = BC = AC = BD = z$

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD ta có: $\triangle DAC = \triangle DBC \Rightarrow AN = BN$ suy ra NM là trung trực của AB , tương tự MN là trung trực của DC

Khi đó $I \in MN$ sao cho $ID = IA$

$$\text{Lại có } AN = \sqrt{AD^2 - DN^2} = \sqrt{z^2 - \frac{y^2}{4}}$$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{AN^2 - AM^2} = \sqrt{z^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4}}$$

$$\text{Mặt khác } MN = IM + IN = \sqrt{R^2 - AM^2} + \sqrt{R^2 - DN^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} + \sqrt{R^2 - \frac{y^2}{4}} = \sqrt{z^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4}}, \text{ giải phương trình}$$

tìm R .

$$\text{Áp dụng: } \sqrt{R^2 - 4a^2} + \sqrt{R^2 - 9a^2} = \sqrt{22a^2 - 13a^2} = 3a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{R^2 - 4a^2} = (3a - \sqrt{R^2 - 9a^2}) \Rightarrow R^2 - 4a^2 = 9a^2 - 6a\sqrt{R^2 - 9a^2} + R^2 - 9a^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{R^2 - 9a^2} = \frac{2a}{3} \Leftrightarrow R = \frac{a\sqrt{85}}{3}. \text{ **Chọn B.**}$$

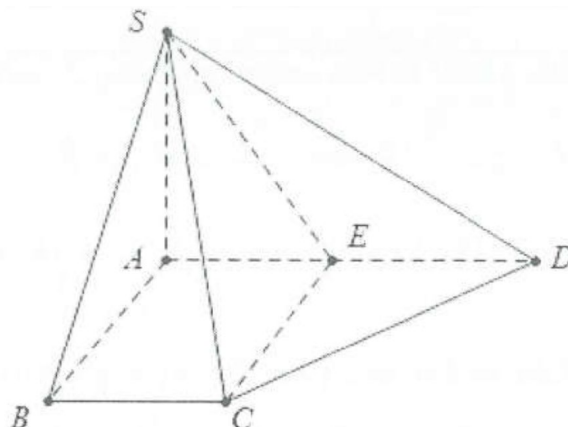
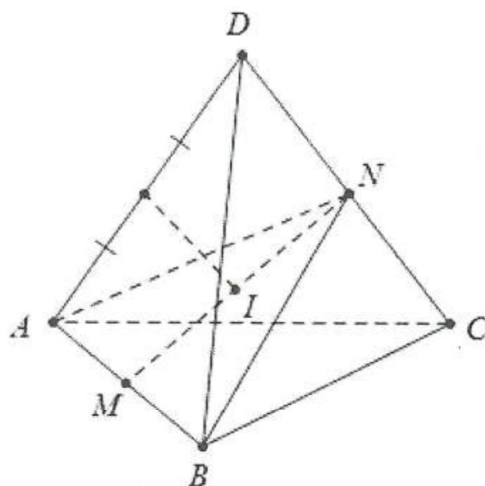
Câu 34: Ta có $SA \perp (ECD) \Rightarrow (SED) \perp (ECD)$.

$$\text{Đặt } R_1 = R_{SED}, R_2 = R_{CED}$$

Ta có: $\triangle ECD$ vuông tại E và $ED = a, CE = a$

$$\text{Do đó } R_2 = \frac{\sqrt{CE^2 + ED^2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Lại có: } \sin \widehat{SDA} = \frac{SA}{SD} = \frac{SA}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}$$



$$\text{Suy ra } R_1 = \frac{SE}{2 \sin \widehat{SDE}} = \frac{\sqrt{SA^2 + AE^2}}{2 \cdot \sqrt{\frac{6}{10}}} = \frac{\sqrt{105}}{6}.$$

$$\text{Do đó } R_{S.ECD} = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - \frac{ED^2}{4}} = \frac{a\sqrt{114}}{6}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 35: Gọi R_1 và R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều (SAB) và (ABC) ta có:

$$R_1 = R_2 = \frac{a\sqrt{3}}{3}, AB = (SAB) \cap (ABC).$$

$$\text{Do } (SAB) \perp (ABC) \text{ nên } R_{S.ABC} = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - \frac{AB^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{6}.$$

$$\text{Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho là: } V_{(C)} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{5\pi a^3 \sqrt{15}}{54}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 36: Đặt $R_1 = R_{ABC}; R_2 = R_{SAB}, AB = (SAB) \cap (ABC)$

$$\text{Tam giác } ABC \text{ vuông cân tại } A \text{ nên } R_1 = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Tam giác } SAB \text{ là tam giác đều nên } R_{S.ABC} = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - \frac{AB^2}{4}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho là:

$$V_{(C)} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{7\pi a^3 \sqrt{21}}{54}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 37: Do $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên $SA = SB = SC = a$.

$$\text{Ta có: } \widehat{ASB} = 90^\circ \Rightarrow AB = \sqrt{SA^2 + SB^2} = a\sqrt{2}.$$

Gọi M là trung điểm của BC và H là trọng tâm tam giác AB

$$\text{Khi đó } SH \perp (ABC), AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

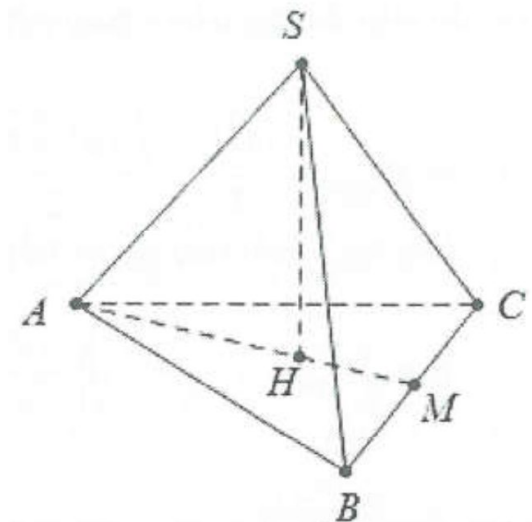
$$\Rightarrow AH = \frac{2}{3} AM = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

$$R_{S.ABC} = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 38: Đặt $R_1 = R_{ABCD}; R_2 = R_{SAB}, AB = (SAB) \cap (ABC)$

$$\text{Tam giác } ABDC \text{ là hình vuông cạnh bằng } 2a \text{ nên } R_1 = \frac{AC}{2} = \frac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}.$$



Tam giác SAB vuông cân tại S nên $R_2 = \frac{AB}{2} = a$.

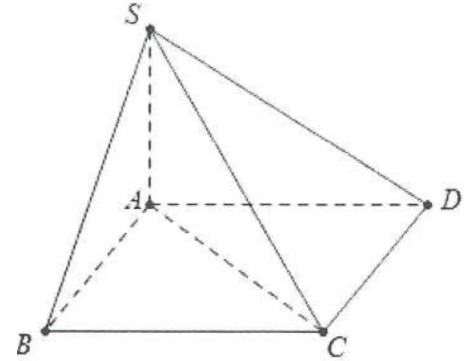
Do $(SAB) \perp (ABC)$ nên $r = R_{S.ABC} = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - \frac{AB^2}{4}} = a\sqrt{2}$. **Chọn D.**

Câu 39: Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (\widehat{SC; (ABCD)}) = \widehat{SCA} = 45^\circ$.

Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow SA = AC \tan 45^\circ = a\sqrt{5}$.

Lại có: $R_d = R_{ABCD} = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow R = \sqrt{\frac{SA^2}{4} + R_d^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.



Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{5\sqrt{10}\pi a^3}{3}$. **Chọn D.**

Câu 40: Gọi H là trung điểm của AB .

Do $SA = SB \Rightarrow SH \perp AB$.

Ta có: $SB^2 + BC^2 = SC^2 = 5a^2 \Rightarrow SB \perp BC$

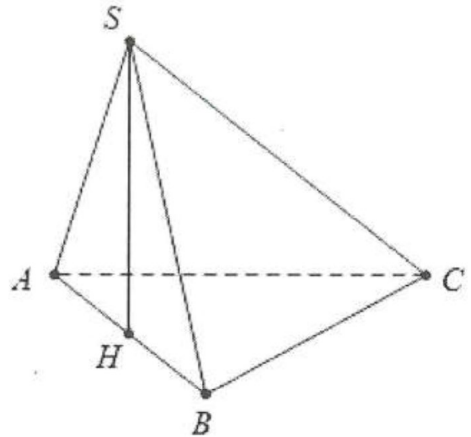
Mặt khác: $AB \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SH$

Suy ra $SH \perp (ABC)$, đặt $R_1 = R_{ABC} = \frac{AC}{2} = a$.

Đặt $R_2 = R_{SAB} = \frac{SA \cdot SB \cdot AB}{4S_{SAB}} = \frac{SA \cdot SB \cdot AB}{2 \cdot SH \cdot AB} = \frac{SA \cdot SB}{2SH} = \frac{a^2}{SH}$

Trong đó $SH = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2} \Rightarrow R_2 = \frac{2a}{\sqrt{7}}$.

Suy ra $R_{S.ABC} = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - \frac{AB^2}{4}} = \frac{a\sqrt{259}}{14}$. **Chọn B.**

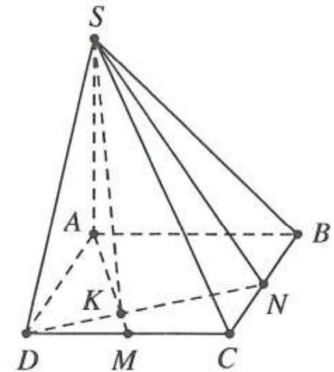


Câu 41: Vì $ABNK$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AKN} = 90^\circ$

Do đó tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABKN$ là trung điểm AN

Suy ra: $R_{ABNK} = \frac{AN}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + BN^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{4}$

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABNK$ là:



$R_{ABNK} = \sqrt{R_{ABNK}^2 + \frac{SA^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{5}}{4}\right)^2 + \frac{(a\sqrt{3})^2}{4}} = \frac{a\sqrt{17}}{4}$. **Chọn A.**

Câu 42: Công thức tìm nhanh bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $R = \sqrt{x^2 + r^2}$ với

- r là bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.
- $x = \frac{SO^2 - r^2}{2h}$: S là đỉnh hình chóp, O là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy, h là chiều cao khối chóp.

Ta có $SH \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{SB; (ABCD)} = \widehat{(SB; BH)} = \widehat{SBH} = 60^\circ$

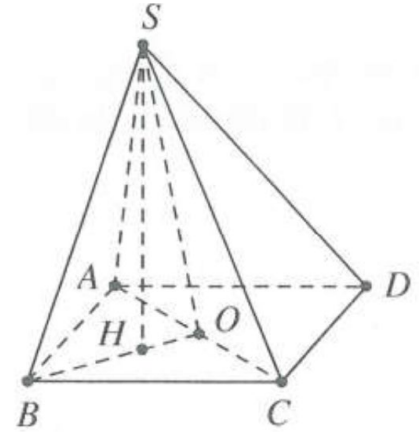
Tam giác ABC vuông tại $B \Rightarrow BO = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + BC^2}}{2} = 2a$

Do đó $BH = \frac{2}{3}BO = \frac{4a}{3}; HO = \frac{BO}{3} = \frac{2a}{3}$

Vậy $SH = BH \cdot \tan 60^\circ = \frac{4a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SO = \sqrt{SH^2 + OH^2} = \frac{2a\sqrt{13}}{3}$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp $ABCD$ là $r = \frac{AC}{2} = 2a$

Áp dụng công thức, ta được $R = \sqrt{\left(\frac{SO^2 - r^2}{2 \cdot SH}\right)^2 + r^2} = \frac{4a\sqrt{21}}{9}$. **Chọn C.**



Câu 43: Vì E là trung điểm $AD \Rightarrow ABCE$ là hình vuông

$\Rightarrow CE \perp AD$ mà $SA \perp CE \Rightarrow CE \perp (SAD) \Rightarrow CE \perp SE$

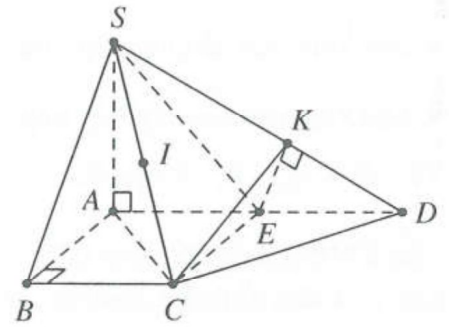
Ta có $AB \perp BC$ mà $SA \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow SB \perp BC$

Lại có $EK \perp SD$ mà $EC \perp SD \Rightarrow SD \perp (CKE) \Rightarrow CK \perp SK$

Gọi I là trung điểm $SC \Rightarrow IS = IA = IB = IC = IE = IK$

Do đó I là tâm mặt cầu đi qua sáu điểm S, A, B, C, E, K

Vậy bán kính cần tìm là $R = \frac{SC}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = a$. **Chọn A.**



Câu 44: Dễ thấy B, D nhìn dưới AC một góc 90°

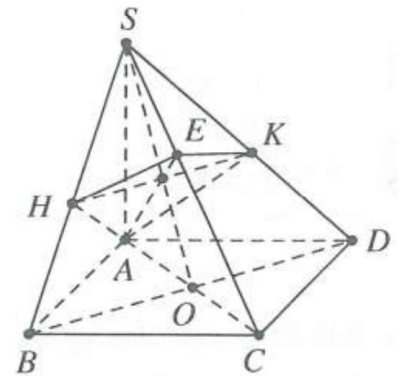
Ta có $AD \perp CD$ mà $SA \perp CD \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK$

Lại có $AK \perp SD$ mà $\Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp KC \Rightarrow \widehat{AKC} = 90^\circ$

Chứng minh tương tự, ta được $\widehat{AHC} = 90^\circ$

$\Rightarrow AC$ là đường kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $ABCDEHK$

Vậy $R = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{3}$. **Chọn A.**



Câu 45: Áp dụng định lý Cosin, ta có

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}} = \sqrt{5 - 4 \cos \alpha}$$

Suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là

$$R_{\triangle ABC} = \frac{BC}{2 \cdot \sin \widehat{BAC}} = \frac{\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}}{2 \sin \alpha} \quad (\text{định lý Sin})$$

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$

Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow OM \perp AB$ mà $SA \perp OM$

Suy ra $OM \perp (SAB)$ mà M là tâm đường tròn ngoại tiếp

$\triangle ABB_1$

Do đó $OA = OB = OB_1$. Chứng minh tương tự, ta được

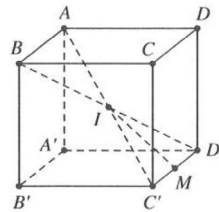
$$OA = OC = OC_1$$

Vậy O là tâm mặt cầu ngoại tiếp đi qua các điểm $A, B, C, C_1, B_1 \Rightarrow R = R_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}}{2 \sin \alpha}$.

Chọn D.

Câu 46: Chọn độ dài cạnh lập phương $ABCD.A'B'C'D$ là 1

Gọi I là tâm hình lập phương $ABCD.A'B'C'D$ (tham khảo hình vẽ dưới đây)

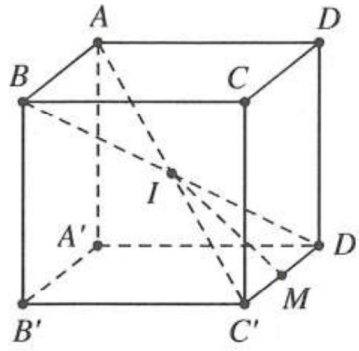


- Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương là $R_1 = AI = \frac{AC'}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- Bán kính mặt cầu nội tiếp hình lập phương là $R_2 = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}$
- Bán kính mặt cầu nội tiếp tiếp xúc với tất cả các cạnh là $R_3 = d[I; (C'D')] = IM = 1$

Vậy $R_1^2 + R_2^2 = R_3^2$. **Chọn B.**

Câu 47: Chọn độ dài cạnh lập phương $ABCD.A'B'C'D$ là 1

Gọi I là tâm hình lập phương $ABCD.A'B'C'D$ (tham khảo hình vẽ dưới đây)



- Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương là $R_1 = AI = \frac{AC'}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- Bán kính mặt cầu nội tiếp hình lập phương là $R_2 = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}$
- Bán kính mặt cầu nội tiếp tiếp xúc với tất cả các cạnh là $R_3 = d[I; (C'D')] = IM = 1$

Vậy $R_3 > R_1 > R_2$. **Chọn D.**

Câu 48: Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow \begin{cases} AM \perp BC \\ AA' \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'M)$

Do đó $(A'BC); (ABC) = (A'M; AM) = \widehat{A'MA} = 60^\circ$

Đặt $AB = x \rightarrow AM = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'M = \frac{AM}{\cos \widehat{A'MA}} = \frac{x\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = x$

Suy ra $S_{\Delta A'BC} = \frac{1}{2} \cdot A'M \cdot BC = \frac{x^2}{2} = 18 \rightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = 6$

Khi đó bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC là $R_{\Delta ABC} = \frac{x\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

Vậy bán kính mặt cầu cần tính là $R = \sqrt{R_{\Delta ABC}^2 + \frac{AA'^2}{4}} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + \frac{3^2}{4}} = \frac{\sqrt{57}}{2}$. **Chọn B.**

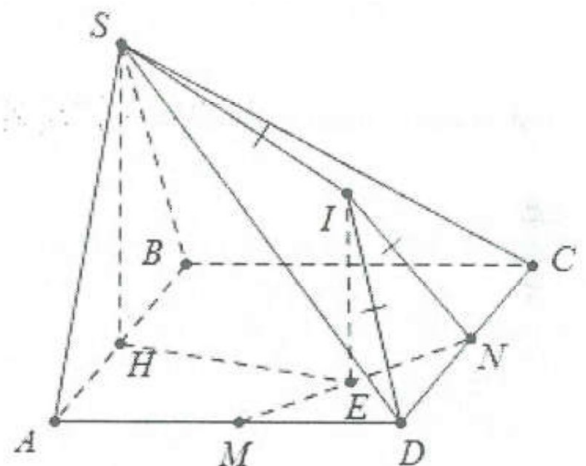
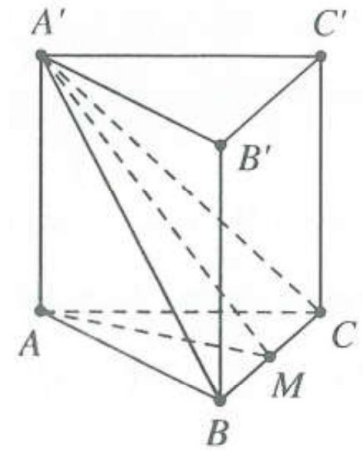
Câu 49: Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{5}$.

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp AB$

$\Rightarrow SH \perp (ABCD)$. Gọi E là trung điểm của MN , dựng đường thẳng d qua E song song với SH , trên d lấy điểm I sao cho $IS = ID \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.DMN \Rightarrow IS = ID = IM = IN = R$.

Ta có ΔDMN vuông tại $D \Rightarrow DE = \frac{MN}{2} = \frac{AC}{4} = \frac{a\sqrt{5}}{4}$

$\rightarrow IE = \sqrt{R^2 - DE^2} = \sqrt{R^2 - \frac{5a^2}{16}}, SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

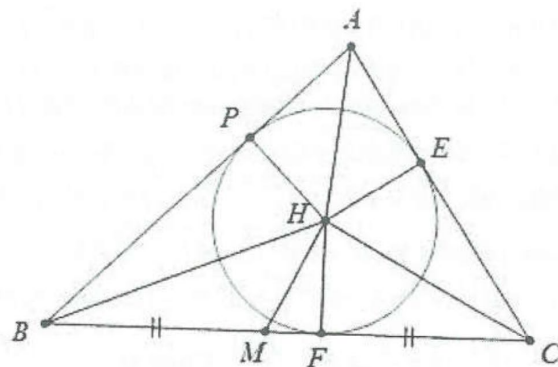
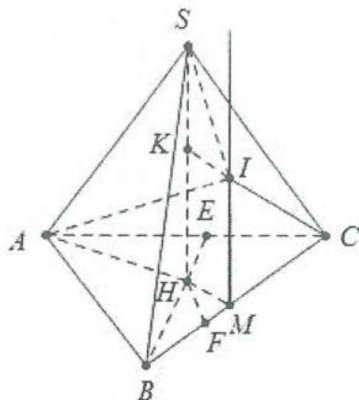


Mặt khác: $HE^2 = \left(\frac{3}{4}AD\right)^2 + \left(\frac{1}{4}AB\right)^2 = \frac{37a^2}{16}$

Lại có: $R^2 - HE^2 = (SH - IE)^2 \Leftrightarrow R^2 - \frac{37a^2}{16} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - \sqrt{R^2 - \frac{5a^2}{16}}\right)^2$

CACL 4 đáp án vào biểu thức $X^2 - \frac{37}{16} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{X^2 - \frac{5}{16}}\right)^2 \Rightarrow X = \frac{\sqrt{102}}{6}$. **Chọn C.**

Câu 50:



Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Theo công thức tính diện tích tam giác ta có:

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AC}{\frac{AB+BC+CA}{2}} \text{ trong đó } BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 5a. \text{ Suy ra } r = \frac{6a^2}{6a} = a.$$

Tam giác ABC vuông tại A , $AP = AE$ suy ra tam giác APE vuông cân tại $A \Rightarrow$ tam giác AEH vuông cân tại $E \Rightarrow AE = HE = a$. Ta có: $AH = \sqrt{AE^2 + HE^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = a\sqrt{2}$.

$$EC = AC - AE = 3a = CF \Rightarrow MF = \left| \frac{BC}{2} - CF \right| = \frac{a}{2} \Rightarrow HM^2 + HF^2 = \frac{5a^2}{4}.$$

$$\text{Ta có: } EC = AC - AE = 3a = CF \Rightarrow MF = \left| \frac{BC}{2} - CF \right| = \frac{a}{2} \Rightarrow HM^2 + HF^2 = \frac{5a^2}{4}.$$

Mặt khác $IC^2 = IS^2 \Leftrightarrow MI^2 + MC^2 = SK^2 + IK^2 \Leftrightarrow IM^2 + \frac{25a^2}{4} = (a\sqrt{2} \pm IM)^2 + HM^2$

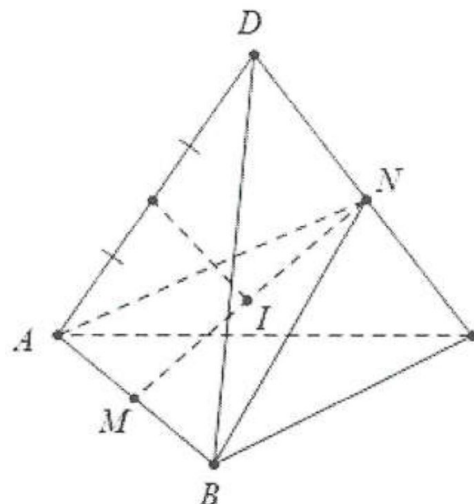
(Dấu cộng khi S, I cùng phía với mặt phẳng (ABC) và dấu trừ khi S, I khác phía với mặt phẳng (ABC))

$$\Leftrightarrow IM^2 + \frac{25a^2}{4} = (a\sqrt{2} \pm IM)^2 + \frac{5a^2}{4}$$

Giải phương trình trên

$$\Rightarrow IM = \frac{3a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow R = IC = \sqrt{IM^2 + MC^2} = \frac{a\sqrt{118}}{4}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 51: Đặt $AB = x; CD = y = AD = BC = AC = BD = z$



Ta có: $\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} + \sqrt{R^2 - \frac{y^2}{4}} = \sqrt{z^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4}}$

$$\Rightarrow \sqrt{R^2 - a^2} + \sqrt{R^2 - b^2} = \sqrt{4a^2 - (a^2 + b^2)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{R^2 - a^2} = (\sqrt{3a^2 - b^2} - \sqrt{R^2 - b^2})$$

$$\Leftrightarrow R^2 - a^2 = 3a^2 - b^2 - 2\sqrt{3a^2 - b^2}\sqrt{R^2 - b^2} + R^2 - b^2$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - b^2 = \sqrt{3a^2 - b^2}\sqrt{R^2 - b^2} \Leftrightarrow R^2 - b^2 = \frac{4a^4 - 4a^2b^2 + b^4}{3a^2 - b^2}$$

$$\Leftrightarrow R^2 = \frac{4a^4 - a^2b^2}{3a^2 - b^2} \Leftrightarrow R = a\sqrt{\frac{4a^2 - b^2}{3a^2 - b^2}}.$$

Chọn C.

Câu 52: Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AB và CD .

Ta có: $\triangle DAB = \triangle CBA (c - c - c) \Rightarrow IC = ID \Rightarrow IK = CD$.

Tương tự $\triangle ACD = \triangle BDC (c - c - c) \Rightarrow KB = KA \Rightarrow KI = AB$.

Do đó KI là đường trung trực của AB và CD .

Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ thì $O \in IK$.

Ta có: $AK = \sqrt{AC^2 - CK^2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow IK = \sqrt{AK^2 - AI^2} = 4$.

Mặt khác $OI = \sqrt{R^2 - 16} + \sqrt{R^2 - 4} = 4$

$$\Leftrightarrow \sqrt{R^2 - 16} = 4 - \sqrt{R^2 - 4} \Rightarrow R^2 - 16 = 16 - 8\sqrt{R^2 - 4} + R^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{R^2 - 4} = \frac{7}{2} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{65}}{2}. \text{ Chọn D.}$$

