SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH	**KỲ THI CHỌN HSG LỚP 11 NĂM HỌC 2021-2022 VÀ CHỌN ĐỘI DỰ TUYỂN DỰ THI CHỌN HSG QUỐC GIA NĂM HỌC 2022-2023**
<u>ĐỀ CHÍNH THỨC</u>	**Khóa ngày 25 tháng 4 năm 2022**
	Môn thi: TOÁN
	VÒNG 1
SỐ BÁO DANH:……………	Thời gian: 180 phút *(không kể thời gian giao đề)*
	Đề gồm có 01 trang và 05 câu

Câu 1 (*2,0 điểm*).

a. Giải phương trình $2\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sin^2 x-\tan x$.

b. Chứng minh rằng phương trình $m^2x^{2022}+2x^2-x-m^2=0$ luôn có ít nhất hai nghiệm phân biệt với mọi tham số *m.*

Câu 2 (*2,0 điểm*).

a. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $1.C_n^1+2.C_n^2+...+n.C_n^n=16n$. Tìm hệ số của số hạng chứa x^7 trong khai triển của nhị thức $\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^{2n+1}$, $x\neq 0$.

b. Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đều là số nguyên và công sai d là một số dương. Biết rằng $u_{20}=m>0$ và $u_m=17$. Tính u_{2022}.

Câu 3 (*2,0 điểm*).

a. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$.

b. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1=9$ và $(n+3)u_{n+1}-(n+5)u_n=22$ với mọi $n\geq 1$. Tính giới hạn $\lim\dfrac{2021\,u_n}{25+4n+2022n^2}$.

Câu 4 (*3,0 điểm*). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=a, AB=b, AD=c$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (SBD).

a. Trong trường hợp $SA=\sqrt{7}, AB=AD=1$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC. Hãy xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (P) và tính diện tích thiết diện đó.

b. Chứng minh rằng H là trực tâm của tam giác SBD.

c. Chứng minh rằng $a.S_{HBD}+b.S_{HSD}+c.S_{HSB}\leq\dfrac{abc\sqrt{3}}{2}$, ở đây kí hiệu S_{XYZ} là diện tích của tam giác XYZ.

Câu 5 (*1,0 điểm*). Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương nhỏ hơn 1000. Một số thuộc S được gọi là số *"thú vị"* nếu số đó là hợp số và không chia hết cho ba số $2;\ 3;\ 5$. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn là số *"thú vị"*.

-------------HẾT -------------

SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH

<u>HƯỚNG DẪN CHẤM</u>

KỲ THI CHỌN HSG LỚP 11 NĂM HỌC 2021-2022
VÀ CHỌN ĐỘI DỰ TUYỂN DỰ THI CHỌN HSG QUỐC GIA NĂM HỌC 2022-2023
Khóa ngày 25 tháng 4 năm 2022
Môn thi: TOÁN

VÒNG 1

Đáp án này gồm có 06 trang

YÊU CẦU CHUNG

** Đáp án chỉ trình bày một lời giải cho mỗi câu. Trong bài làm của học sinh yêu cầu phải lập luận lôgic chặt chẽ, đầy đủ, chi tiết và rõ ràng.*

** Trong mỗi câu, nếu học sinh giải sai ở bước giải trước thì cho điểm 0 đối với những bước giải sau có liên quan. Ở câu 4 nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì cho điểm 0.*

** Điểm thành phần của mỗi câu nói chung phân chia đến 0,25 điểm. Đối với điểm thành phần là 0,5 điểm thì tuỳ tổ giám khảo thống nhất để chiết thành từng 0,25 điểm.*

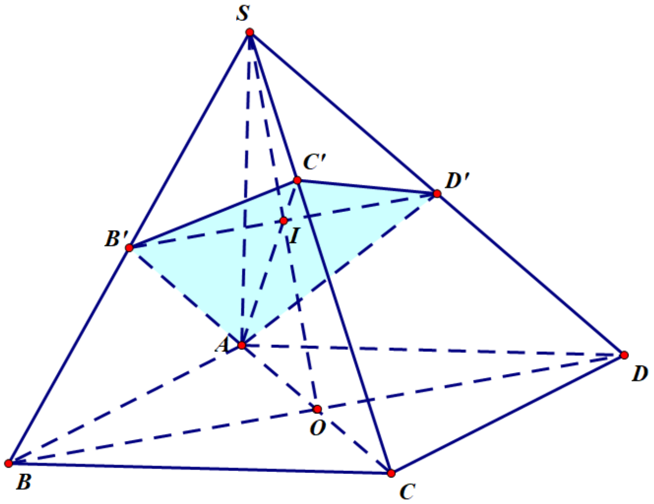
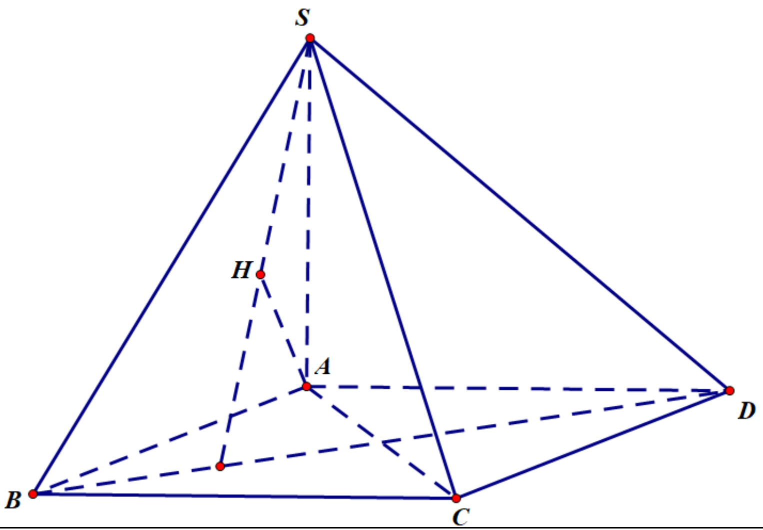
** Học sinh có lời giải khác đáp án (nếu đúng) vẫn cho điểm tối đa tuỳ theo mức điểm của từng câu.*

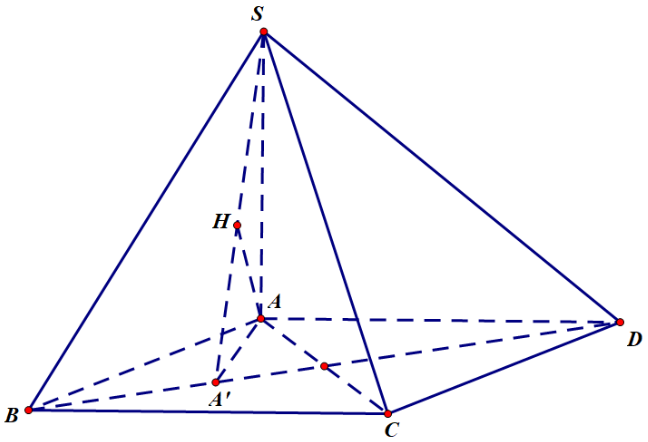
** Điểm của toàn bài là tổng (không làm tròn số) của điểm tất cả các câu.*

Câu	Nội dung	Điểm
1a	**Giải phương trình** $2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin^2 x-\tan x$.	
	ĐK: $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ $pt\Leftrightarrow 1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin^2 x-\tan x$ $\Leftrightarrow 1-\sin 2x=2\sin^2 x-\tan x$	**0.25**
	$\Leftrightarrow \cos x-2\sin x\cos^2 x=2\sin^2 x\cos x-\sin x$ $\Leftrightarrow \sin x+\cos x-2\sin x\cos x\left(\sin x+\cos x\right)=0$ $\Leftrightarrow \left(\sin x+\cos x\right)\left(1-\sin 2x\right)=0$	**0.25**
	$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ 1-\sin 2x=0\end{array}\right.$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \sin 2x=1\end{array}\right.$	**0.25**
	$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\left(TM\right)\\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi\left(TM\right)\end{array}\right.$ Vậy phương trình có nghiệm là $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ và $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$.	**0.25**

1b	**Chứng minh rằng phương trình $m^2x^{2022}+2x^2-x-m^2=0$ luôn có ít nhất hai nghiệm phân biệt với mọi tham số *m*.**	
	TH1: $m=0$ Phương trình trở thành $2x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ (đúng).	**0.25**
	TH2: $m\neq 0$ Xét hàm số $f(x)=m^2x^{2022}+2x^2-x-m^2$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên nó liên tục trên các đoạn $\left[-1;0\right],\left[0;1\right]$.	**0.25**
	Lại có: $f\left(-1\right)=3, f\left(0\right)=-m^2, f\left(1\right)=1$.	**0.25**
	Nên $f\left(-1\right).f\left(0\right)=-3m^2<0,\ f\left(0\right).f\left(1\right)=-m^2<0,\forall m\in\mathbb{R}$. Suy ra trên mỗi khoảng $\left(-1;0\right),\left(0;1\right)$ phương trình $m^2x^{2022}+2x^2-x-m^2=0$ luôn có ít nhất 1 nghiệm. Vậy phương trình đã cho luôn có ít nhất hai nghiệm phân biệt với mọi m.	**0.25**
2a	**Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $1.C_n^1+2.C_n^2+...+n.C_n^n=16n$. Tìm hệ số của số hạng chứa x^7 trong khai triển của nhị thức $\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^{2n+1}$, $x\neq 0$.**	
	Đặt $S=1.C_n^1+2.C_n^2+...+n.C_n^n$. Sử dụng công thức $C_n^k=C_n^{n-k}$ với $k=0;1;...;n$, ta viết lại tổng S như sau: $S=nC_n^0+\left(n-1\right)C_n^1+\left(n-2\right)C_n^2+...+1C_n^{n-1}$. Suy ra $2S=n\left(C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n\right)$. $\Leftrightarrow 2S=n.2^n \Leftrightarrow S=n.2^{n-1}$.	**0.25**
	Nên $S=16n$ hay $n.2^{n-1}=16n \Leftrightarrow n=5$.	**0.25**
	Lúc đó: $\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^{2n+1}=\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^{11}=\sum\limits_{k=0}^{11}C_{11}^k\left(x^2\right)^{11-k}\left(-\dfrac{2}{x}\right)^k$ $=\sum\limits_{k=0}^{11}C_{11}^k\left(-2\right)^k x^{22-3k}$.	**0.25**
	Ta tìm k sao cho $22-3k=7 \Leftrightarrow k=5$. Vậy hệ số cần tìm là: $C_{11}^5\left(-2\right)^5=-14784$.	**0.25**
2b	**Cho cấp số cộng $\left(u_n\right)$ có các số hạng đều là số nguyên và có công sai d là một số dương. Biết rằng $u_{20}=m>0$ và $u_m=17$. Tính u_{2022}.**	
	Từ giả thiết: $m=u_{20}=u_1+19d$ và $17=u_m=u_1+(m-1)d$.	**0.25**
	$\Rightarrow m-17=19d-\left(m-1\right)d \Rightarrow m=\dfrac{20d+17}{d+1}=20-\dfrac{3}{d+1}$.	**0.25**
	Vì $m\in\mathbb{Z}$ và $d>0$ nên $d+1$ là ước số lớn hơn 1 của 3 hay $d+1=3$. Ta được $d=2, m=19$.	**0.25**
	Vậy $u_{2022}=4023$.	**0.25**

3a	**Tính giới hạn** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$**.**	
	Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-(x+1)}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$	**0.25**
	$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+2x-(x+1)^2}{x^2\left(\sqrt{1+2x}+x+1\right)}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^3-(1+3x)}{x^2\left[(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[3]{(1+3x)^2}\right]}$	**0.25**
	$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{\left(\sqrt{1+2x}+x+1\right)}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+3}{\left[(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[3]{(1+3x)^2}\right]}$	**0.25**
	$=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{3}{3}=\dfrac{1}{2}$. Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.	**0.25**
3b	**Cho dãy số** (u_n) **xác định bởi:** $u_1=9$ **và** $(n+3)u_{n+1}-(n+5)u_n=22$ **với mọi** $n\geq 1$**. Tính giới hạn** $\lim\dfrac{2021u_n}{25+4n+2022n^2}$**.**	
	Với $\forall n\in\mathbb{N}^*$, đặt $v_n=u_n+11$, khi đó $v_1=20$ và $22=(n+3)(v_{n+1}-11)-(n+5)(v_n-11)$. $\Rightarrow (n+3)v_{n+1}=(n+5)v_n$.	**0.25**
	$\Rightarrow v_{n+1}=\dfrac{n+5}{n+3}v_n=\dfrac{(n+5)(n+4)}{(n+3)(n+2)}v_{n-1}=\dfrac{(n+5)(n+4)}{(n+2)(n+1)}v_{n-2}$ $=\cdots=\dfrac{(n+5)(n+4)}{5.4}v_1=(n+5)(n+4)$.	**0.25**
	Nên $v_n=(n+4)(n+3)=n^2+7n+12$ suy ra $u_n=n^2+7n+1$.	**0.25**
	Vậy $\lim\dfrac{2021u_n}{25+4n+2022n^2}=\lim\dfrac{2021(n^2+7n+1)}{25+4n+2022n^2}=\dfrac{2021}{2022}$.	**0.25**
4	**Cho hình chóp** $S.ABCD$ **có đáy** $ABCD$ **là một hình chữ nhật,** SA **vuông góc với mặt phẳng** $(ABCD)$ **và** $SA=a, AB=b, AD=c$**. Gọi** H **là hình chiếu vuông góc của** A **lên mặt phẳng** (SBD)**.**	
4a	**Trong trường hợp** $SA=\sqrt{7}, AB=AD=1$**, gọi** (P) **là mặt phẳng đi qua** A **và vuông góc với** SC**. Hãy xác định thiết diện của hình chóp** $S.ABCD$ **khi cắt bởi mặt phẳng** (P) **và tính diện tích thiết diện đó.**	

<table>
<tr><td></td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Gọi C' là hình chiếu vuông góc của A lên SC suy ra $C'\in(P)$.
Có $BD\perp AC, BD\perp SA\Rightarrow BD\perp SC$.
Mặt khác $SC\perp(P)\Rightarrow BD//(P)$.
Gọi $O=AC\cap BD$ và $I=SO\cap AC'$. Trong (SBD) kẻ đường thẳng qua I song song với BD, đường thẳng này cắt SB,SD lần lượt tại B',D'. Khi đó thiết diện cần tìm là tứ giác $AB'C'D'$.</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td></td><td>Ta có $BD\perp(SAC)$ nên $BD\perp AC'$ mà $B'D'//BD$ suy ra $B'D'\perp AC'$. Lúc đó $S_{AB'C'D'}=\frac{1}{2}AC'.B'D'$.</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td></td><td>Ta chứng minh được AD' là đường cao trong tam giác vuông SAD nên: $SD'.SD=SA^2\Rightarrow SD'=\frac{SA^2}{SD}$.
Mặt khác $\frac{B'D'}{BD}=\frac{SD'}{SD}\Rightarrow B'D'=\frac{SD'.BD}{SD}=\frac{SA^2.BD}{SD^2}=\frac{7\sqrt{2}}{8}$.</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td></td><td>Vì AC' là đường cao trong tam giác vuông SAC nên $\frac{1}{AC'^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AC^2}\Rightarrow AC'=\frac{\sqrt{14}}{3}$.
Vậy: $S_{AB'C'D'}=\frac{1}{2}AC'.B'D'=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{14}}{3}.\frac{7\sqrt{2}}{8}=\frac{7\sqrt{7}}{24}$.</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>4b</td><td>
</td><td></td></tr>
</table>

	Chứng minh rằng H là trực tâm tam giác SBD.	
	Theo giả thiết $AH \perp (SBD)$, mặt khác $SA \perp (ABD)$ nên $SA \perp BD$ suy ra $SH \perp BD$(định lý ba đường vuông góc) tức là H thuộc một đường cao của tam giác SBD.	**0.5**
	Tương tự, ta cũng có H thuộc đường cao thứ hai của tam giác SBD. Vậy H là trực tâm của tam giác SBD.	**0.5**
4c	**Chứng minh rằng $a.S_{HBD}+b.S_{HSD}+c.S_{HSB}\le \dfrac{abc\sqrt{3}}{2}$, ở đây kí hiệu S_{XYZ} là diện tích của tam giác XYZ.**	
		
	Gọi $A'=SH\cap BD$. Vì $BD\perp (SAA')$ nên $\big((ABD),(SBD)\big)=SA'A=AA'H$. Lại do $AH\perp (SBD)$ nên ΔHBD là hình chiếu vuông góc của ΔABD lên (SBD). Theo công thức định lý hình chiếu ta có: $\dfrac{S_{HBD}}{S_{ABD}}=\cos AA'H=\sin ASH=\dfrac{AH}{AS}$.	**0.25**
	Tương tự $\dfrac{S_{HSD}}{S_{ASD}}=\dfrac{AH}{AB}$, $\dfrac{S_{HSB}}{S_{ASB}}=\dfrac{AH}{AD}$. Suy ra: $a.S_{HBD}+b.S_{HSD}+c.S_{HSB}=\dfrac{abc}{2}\left(\dfrac{AH}{AS}+\dfrac{AH}{AB}+\dfrac{AH}{AD}\right)$.	**0.25**
	Ta chứng minh được $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AS^2}+\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AD^2}$. Nên $\left(\dfrac{AH}{AS}+\dfrac{AH}{AB}+\dfrac{AH}{AD}\right)^2\le 3\left(\dfrac{AH^2}{AS^2}+\dfrac{AH^2}{AB^2}+\dfrac{AH^2}{AD^2}\right)=3$. Suy ra: $\dfrac{AH}{AS}+\dfrac{AH}{AB}+\dfrac{AH}{AD}\le\sqrt{3}$.	**0.25**
	Vậy $a.S_{HBD}+b.S_{HSD}+c.S_{HSB}\le\dfrac{abc\sqrt{3}}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.	**0.25**

5	**Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương nhỏ hơn 1000. Một số thuộc S được gọi là số *"thú vị"* nếu số đó là hợp số và không chia hết cho ba số $2;\ 3;\ 5$. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn là số *"thú vị"*.**	
	+) Gọi A, B, C lần lượt là các tập hợp các số thuộc S và chia hết cho 2;3;5. Giả sử $x \in A$ suy ra $x = 2k,\ k \in \mathbb{N}^*$ và $1 \le 2k \le 999 \Leftrightarrow 0.5 \le k \le 499.5 \Rightarrow k \in \{1; 2; ...; 499\}$. Suy ra số phần tử của A là $\lvert A \rvert = 499$. Lập luận tương tự ta cũng có: $\lvert B \rvert = 333,\ \lvert C \rvert = 199$. +) $A \cap B$ là tập hợp các số thuộc S và chia hết cho 6 suy ra $\lvert A \cap B \rvert = 166$, $A \cap C$ là tập hợp các số thuộc S và chia hết cho 10 suy ra $\lvert A \cap C \rvert = 99$, $B \cap C$ là tập hợp các số thuộc S và chia hết cho 15 suy ra $\lvert B \cap C \rvert = 66$. +) $A \cap B \cap C$ là tập hợp các số thuộc S và chia hết cho 30 suy ra $\lvert A \cap B \cap C \rvert = 33$.	**0.25**
	Dễ thấy tập hợp các số thuộc S chia hết cho ít nhất một trong ba số 2;3;5 là $A \cup B \cup C$ và $\lvert A \cup B \cup C \rvert = \lvert A \rvert + \lvert B \rvert + \lvert C \rvert - \lvert A \cap B \rvert - \lvert B \cap C \rvert - \lvert C \cap A \rvert + \lvert A \cap B \cap C \rvert$ $= 499 + 333 + 199 - 166 - 99 - 66 + 33 = 733.$	**0.25**
	Do đó số các số tự nhiên nhỏ hơn 1000 và không chia hết cho cả ba số 2;3;5 là 999 -733=266. Trong tập hợp 266 số trên có cả số 1 và các số nguyên tố khác 2;3;5 . Ta biết rằng có tất cả 165 số nguyên tố nhỏ hơn 1000 và khác 2;3;5. Nên số các số *"thú vị"* phải tìm là $266 - (165 + 1) = 100$ số.	**0.25**
	Số phần tử không gian mẫu là $\lvert \Omega \rvert = 999$. Vậy xác suất cần tìm là $P = \dfrac{100}{999}$.	**0.25**

-------- **HẾT** --------

SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH

<u>ĐỀ CHÍNH THỨC</u>

KỲ THI CHỌN HSG LỚP 11 NĂM HỌC 2021-2022
VÀ CHỌN ĐỘI DỰ TUYỂN DỰ THI CHỌN HSG QUỐC GIA NĂM HỌC 2022-2023
Khóa ngày 25 tháng 4 năm 2022
Môn thi: TOÁN
VÒNG 2

SỐ BÁO DANH:……………

Thời gian: 180 phút *(không kể thời gian giao đề)*
Đề gồm có 01 trang và 04 câu.

Câu 1 *(3,0 điểm).*

a. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{2}{x^3(y+z)} + \dfrac{2}{y^3(z+x)} + \dfrac{2}{z^3(x+y)}$.

b. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a,b), $b > 1$ để hai số $\dfrac{a^3b-1}{a+1}$ và $\dfrac{b^3a+1}{b-1}$ đều là số nguyên dương.

Câu 2 *(2,0 điểm).*

Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$u_1 = \frac{5}{2} \text{ và } u_{n+1} = \sqrt{u_n^3 - 12u_n - 2002 + \frac{2022n+2023}{n+1}} \text{ với mọi } n \geq 1.$$

a. Chứng minh rằng $u_n > 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b. Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 3 *(3,0 điểm).* Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi G, H lần lượt là trọng tâm, trực tâm của tam giác ABC, D là chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ A, M là trung điểm của cạnh BC. Đường thẳng DG cắt cung nhỏ BC của (O) tại điểm E.

a. Chứng minh rằng AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE.

b. Đường trung trực của cạnh BC cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại P, Q. Gọi N là trung điểm của đoạn PQ. Chứng minh rằng đường thẳng HM cắt đường thẳng AN tại một điểm nằm trên đường tròn (O).

Câu 4 *(2,0 điểm).* Người ta tô màu tất cả các số nguyên dương bằng hai màu xanh và đỏ (mỗi số chỉ được tô đúng một màu). Biết rằng có vô hạn các số được tô màu xanh và tổng của hai số được tô khác màu là một số được tô màu đỏ. Gọi số nguyên dương nhỏ nhất lớn hơn 1 được tô màu đỏ là q.

a. Hãy chỉ ra (có chứng minh) một cách tô màu thỏa mãn yêu cầu bài toán khi $q = 2$.

b. Chứng minh rằng q là một số nguyên tố.

-------------HẾT-------------

SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH **<u>HƯỚNG DẪN CHẤM</u>**	**KỲ THI CHỌN HSG LỚP 11 NĂM HỌC 2021-2022 VÀ CHỌN ĐỘI DỰ TUYỂN DỰ THI CHỌN HSG QUỐC GIA NĂM HỌC 2022-2023** **Khóa ngày 25 tháng 4 năm 2022** **Môn thi: TOÁN** **VÒNG 2** *Đáp án này gồm có 05 trang*

YÊU CẦU CHUNG

** Đáp án chỉ trình bày một lời giải cho mỗi câu. Trong bài làm của học sinh yêu cầu phải lập luận lôgic chặt chẽ, đầy đủ, chi tiết và rõ ràng.*

** Trong mỗi câu, nếu học sinh giải sai ở bước giải trước thì cho điểm 0 đối với những bước giải sau có liên quan. Ở câu 3 nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì cho điểm 0.*

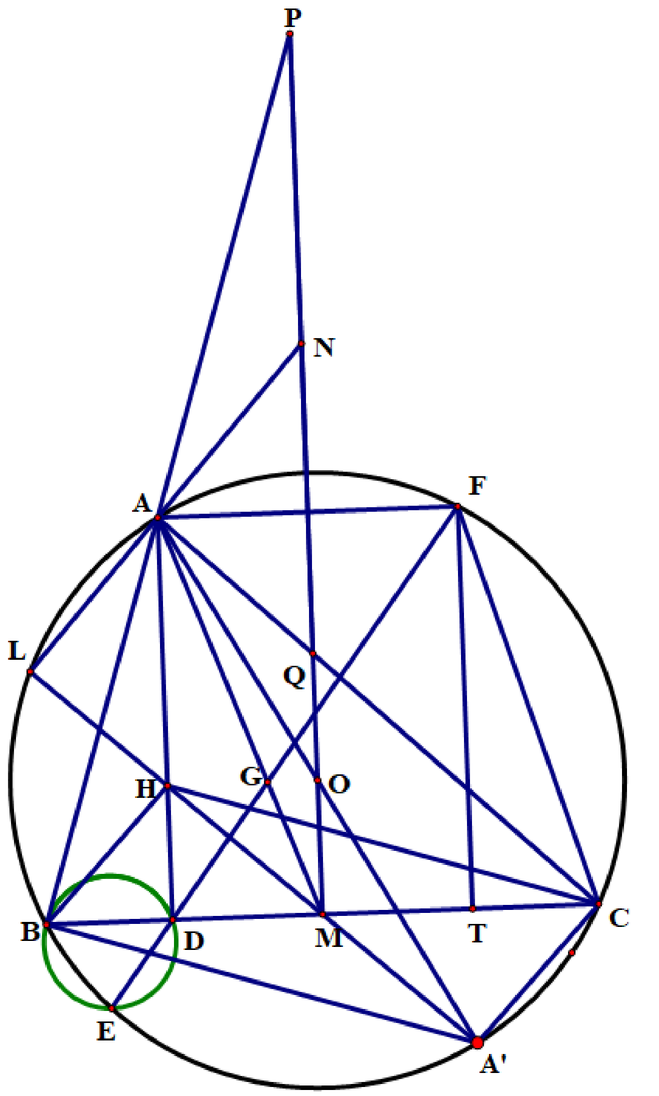
** Điểm thành phần của mỗi câu nói chung phân chia đến 0,25 điểm. Đối với điểm thành phần là 0,5 điểm thì tuỳ tổ giám khảo thống nhất để chiết thành từng 0,25 điểm.*

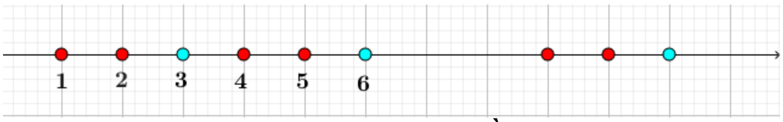
** Học sinh có lời giải khác đáp án (nếu đúng) vẫn cho điểm tối đa tuỳ theo mức điểm của từng câu.*

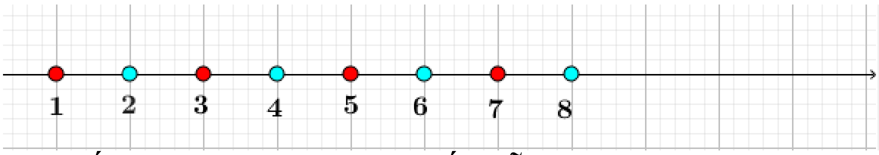
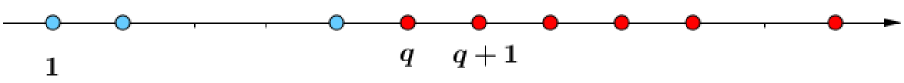
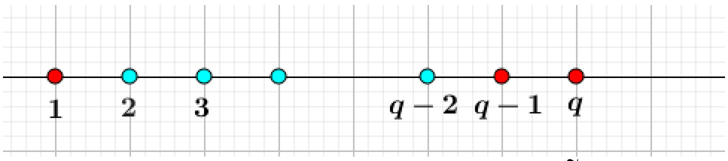
** Điểm của toàn bài là tổng (không làm tròn số) của điểm tất cả các câu.*

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1a	**Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{2}{x^3(y+z)}+\frac{2}{y^3(z+x)}+\frac{2}{z^3(x+y)}$.**	
	Đặt $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z}\Rightarrow a,b,c>0;abc=1$ $P=\frac{2a^3bc}{b+c}+\frac{2b^3ac}{a+c}+\frac{2c^3ab}{a+b}=2\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)$	**0.5**
	Áp dụng BĐT Cô-si ta được: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\ge a$, $\frac{b^2}{c+a}+\frac{c+a}{4}\ge b$, $\frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b}{4}\ge c$.	**0.5**
	Cộng từng vế ba BĐT trên ta có: $P\ge(a+b+c)\ge 3\sqrt[3]{abc}=3$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 3 khi $x=y=z=1$.	**0.5**
1b	**Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a,b), $b>1$ để hai số $\frac{a^3b-1}{a+1}$ và $\frac{b^3a+1}{b-1}$ đều là số nguyên dương.**	
	Do $a^3b-1=b(a^3+1)-(b+1)$ và $(a+1)\mid(a^3+1)$ nên $(a+1)\mid(b+1)$ (1) Do $b^3a+1=a(b^3-1)+(a+1)$ và $(b-1)\mid(b^3-1)$ nên $(b-1)\mid(a+1)$ (2)	**0.5**
	Từ (1) và (2) $(b-1)\mid(b+1)\Rightarrow(b-1)\mid 2$ suy ra $b\in\{2;3\}$.	**0.5**
	+) Nếu $b=2$ thì $(a+1)\mid 3$ suy ra $a=2$. Nên $(a,b)=(2,2)$. +) Nếu $b=3$ thì $(a+1)\mid 4$ suy ra $a=1,\ a=3$. Nên $(a,b)=(1,3)$ và $(a,b)=(3,3)$. Vậy có ba cặp số cần tìm là $(1;3),(2;2),(3;3)$.	**0.5**

2	**Cho dãy số (u_n) xác định bởi:** $u_1=\dfrac{5}{2}$ **và** $u_{n+1}=\sqrt{u_n^3-12u_n-2002+\dfrac{2022n+2023}{n+1}}$ **với mọi** $n\geq 1$**.**	
2a	**Chứng minh rằng** $u_n>2,\forall n\in\mathbb{N}^*$**.**	
	Viết lại $u_{n+1}=\sqrt{u_n^3-12u_n+20+\dfrac{1}{n+1}}$ (1) Ta chứng minh $u_n>2,\forall n\geq 1$ bằng phương pháp quy nạp: Thật vậy $u_1=\dfrac{5}{2}>2$, giả sử $u_n>2$. Khi đó $u_{n+1}>2\Leftrightarrow u_n^3-12u_n+16+\dfrac{1}{n+1}>0$ $\Leftrightarrow (u_n+4)(u_n-2)^2+\dfrac{1}{n+1}>0$ (luôn đúng). Chứng tỏ $u_n>2,\forall n\in\mathbb{N}^*$.	**0.75**
2b	**Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.**	
	Ta chứng minh (u_n) là dãy giảm Ta có $u_2=\dfrac{7\sqrt{2}}{4}<u_1$. Giả sử $2<u_n<...<u_1=\dfrac{5}{2}$ ta sẽ chứng minh $u_{n+1}<u_n$, thật vậy: $u_{n+1}<u_n\Leftrightarrow u_{n+1}^2<u_n^2$ $\Leftrightarrow \left(u_n^3-u_{n-1}^3\right)-12\left(u_n-u_{n-1}\right)+\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}<0$ $\Leftrightarrow \left(u_n-u_{n-1}\right).\left(u_n^2+u_n.u_{n-1}+u_{n-1}^2-12\right)+\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}<0(2)$ Vì $u_n<u_{n-1}$ nên $u_n-u_{n-1}<0$ và $u_n>2$, $u_{n+1}>2$ suy ra $u_n^2+u_n.u_{n-1}+u_{n-1}^2-12>0$ và $\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}<0$ Do đó BĐT (2) đúng. Chứng tỏ $u_{n+1}<u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$.	**0.5**
	Như vậy, dãy số (u_n) giảm và bị chặn dưới bởi 2 nên tồn tại $\lim u_n=L,\left(2\leq L<\dfrac{5}{2}\right)$.	**0.25**
	Lấy giới hạn ở đẳng thức truy hồi (1) ta có phương trình: $L=\sqrt{L^3-12L+20}\Leftrightarrow (L-2)\left(L^2+L-10\right)=0$, ta có các nghiệm $L_1=2;L_2=\dfrac{-1+\sqrt{41}}{2}>\dfrac{5}{2};L_3=\dfrac{-1-\sqrt{41}}{2}<2$. Vậy $\lim u_n=2$.	**0.5**

3	**Cho tam giác nhọn** $ABC,(AB<AC)$ **nội tiếp đường tròn** (O)**. Gọi** G,H **lần lượt là trọng tâm, trực tâm của tam giác** ABC**,** D **là chân đường cao của tam giác** ABC **kẻ từ** A**,** M **là trung điểm của cạnh** BC**. Đường thẳng** DG **cắt cung nhỏ** BC **của** (O) **tại điểm** E**.**	
		
3a	**Chứng minh rằng** AB **là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác** BDE**.**	
	Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt (O) tại $F,(F\neq A)$. Ta chứng minh ba điểm D,G,F thẳng hàng, thật vậy: Vì tứ giác $ABCF$ là một hình thang nội tiếp (O) nên hình thang $ABCF$ cân.	**0.5**
	Gọi T là hình chiếu vuông góc của F lên BC $\Rightarrow BD=TC$ hay M là trung điểm của DT.	**0.25**
	Khi đó $\frac{DM}{FA}=\frac{GM}{GA}=\frac{1}{2}$ kết hợp với $GMD=GAF$ suy ra ΔGMD đồng dạng với ΔGAF. Lúc đó ta có $DGM=FGA$. Hay ba điểm D,G,F thẳng hàng.	**0.5**
	Vì thế $BED=BEF=BCF=ABC=ABD$ Suy ra AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE.	**0.25**

3b	**Đường trung trực của cạnh BC cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại P, Q. Gọi N là trung điểm của đoạn PQ. Chứng minh rằng đường thẳng HM cắt đường thẳng AN tại một điểm nằm trên đường tròn (O).**	
	Có: $APQ = BPM = 90^0 - MBP = 90^0 - CBA = HCB$ (1) và $AQP = MQC = 90^0 - QCM = 90^0 - ACB = CBH$ (2) Từ (1) và (2) suy ra hai tam giác APQ, HCB đồng dạng.	**0.5**
	Mà M, N lần lượt là trung điểm của BC, PQ Suy ra hai tam giác AQN, HBM cũng đồng dạng, vì thế ta có: $ANQ = HMB$.	**0.25**
	Gọi $L = AN \cap HM$, ta có: $MLN = 180^0 - LNM - LMN = 180^0 - LMB - LMN = 90^0$	**0.25**
	Kẻ đường kính AA' dễ dàng chứng minh được tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành. Suy ra H, A' đối xứng nhau qua M suy ra $A' \in MH$. Và $A'LA = MLN = 90^0$ kết hợp AA' là đường kính nên ta có $L \in (O)$.	**0.5**
4	**Người ta tô màu tất cả các số nguyên dương bằng hai màu xanh và đỏ (mỗi số chỉ được tô đúng một màu). Biết rằng có vô hạn các số được tô màu xanh và tổng của hai số được tô khác màu là một số được tô màu đỏ. Gọi số nguyên dương nhỏ nhất lớn hơn 1 được tô màu đỏ là q.**	
4a	**Hãy chỉ ra (có chứng minh) một cách tô màu thỏa mãn yêu cầu bài toán khi $q = 2$.**	
	Với $q = 2$ ta chỉ ra một cách tô thỏa mãn yêu cầu bài toán như sau: các số chia hết cho 3 ta tô màu xanh và các số không chia hết cho 3 ta tô màu đỏ.  Cách tô như trên thỏa mãn yêu cầu bài toán, thật vậy: +) Xét hai số nguyên dương y, z bất kỳ được tô bởi hai màu khác nhau. Chứng tỏ trong hai số này có một số chia hết cho 3 và một số không chia hết cho 3. Khi đó số $x = y + z$ là một số không chia hết cho 3 và sẽ được tô màu đỏ. +) Có vô hạn số nguyên dương chia hết cho 3 nên có vô hạn số được tô màu xanh. +) Số nguyên dương nhỏ nhất lớn hơn 1 được tô màu đỏ là $q = 2$. Như vậy khi $q = 2$ ta xây dựng được một cách tô màu phù hợp với yêu cầu bài toán.	**0.5**

4b	**Chứng minh rằng q là một số nguyên tố.**	
	Với $q=3$ ta chỉ ra một cách tô thỏa mãn yêu cầu bài toán như sau:  Các số lẻ ta tô màu đỏ, các số chẵn ta tô màu xanh, lúc đó thỏa mãn yêu cầu bài toán, thật vậy: +) Xét hai số nguyên dương b,c bất kỳ được tô bởi hai màu khác nhau. Chứng tỏ trong hai số này có một số chẵn và một số lẻ. Khi đó số $a=b+c$ là một số lẻ nên phải tô màu đỏ. +) Có vô hạn số chẵn nên có vô hạn số được tô màu xanh. +) Số nguyên dương nhỏ nhất lớn hơn 1 được tô màu đỏ là $q=3$. Như vậy, khi $q=3$ ta xây dựng một được cách tô màu phù hợp với yêu cầu bài toán.	**0.5**
	Ta chứng minh số 1 phải được tô màu đỏ. Thật vậy, giả sử số 1 được tô màu xanh:  Vì q được tô màu đỏ nên $q+1$ được tô màu đỏ. Số $q+2=(q+1)+1$ nên số $q+2$ được tô màu đỏ. Cứ tiếp tục như vậy thì mọi số lớn hơn q đều được tô màu đỏ. Nên chỉ có một số hữu hạn số được tô màu xanh. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Chứng tỏ số 1 phải được tô màu đỏ.	**0.5**
	+) Với $q>3$ ta chứng minh không thể thực hiện được yêu cầu của bài toán. Thật vậy, giả sử tồn tại được cách tô ứng với $q>3$, Khi đó $q-2\in\mathbb{N}^*$, $q-2<q$ và số $q-2$ được tô màu xanh. Do $q-1=(q-2)+1$ nên số $q-1$ được tô màu đỏ.  Nhưng $q-1<q$, do đó ta có mâu thuẫn với giả thiết q là số nhỏ nhất được tô màu đỏ. Vậy bài toán được chứng minh xong.	**0.5**

-------- **HẾT** -------