

BÀI 5. PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT – BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

Mục tiêu

❖ Kiến thức

1. Biết cách giải các dạng phương trình lôgarit.
2. Biết cách giải các dạng bất phương trình lôgarit.

❖ Kỹ năng

1. Giải được một số phương trình mũ và phương trình lôgarit đơn giản bằng các phương pháp đưa về cùng cơ số, lôgarit hóa, mũ hóa, đặt ẩn phụ, phương pháp hàm số.
2. Nhận dạng được các phương trình và bất phương trình lôgarit.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Phương trình lôgarit

Dạng 1: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) > 0 \end{cases}$

Chú ý: Việc lựa chọn điều kiện $f(x) > 0$ hoặc $g(x) > 0$ tùy thuộc vào độ phức tạp của $f(x) > 0$ và $g(x) > 0$

Dạng 2: $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = a^b \end{cases}$

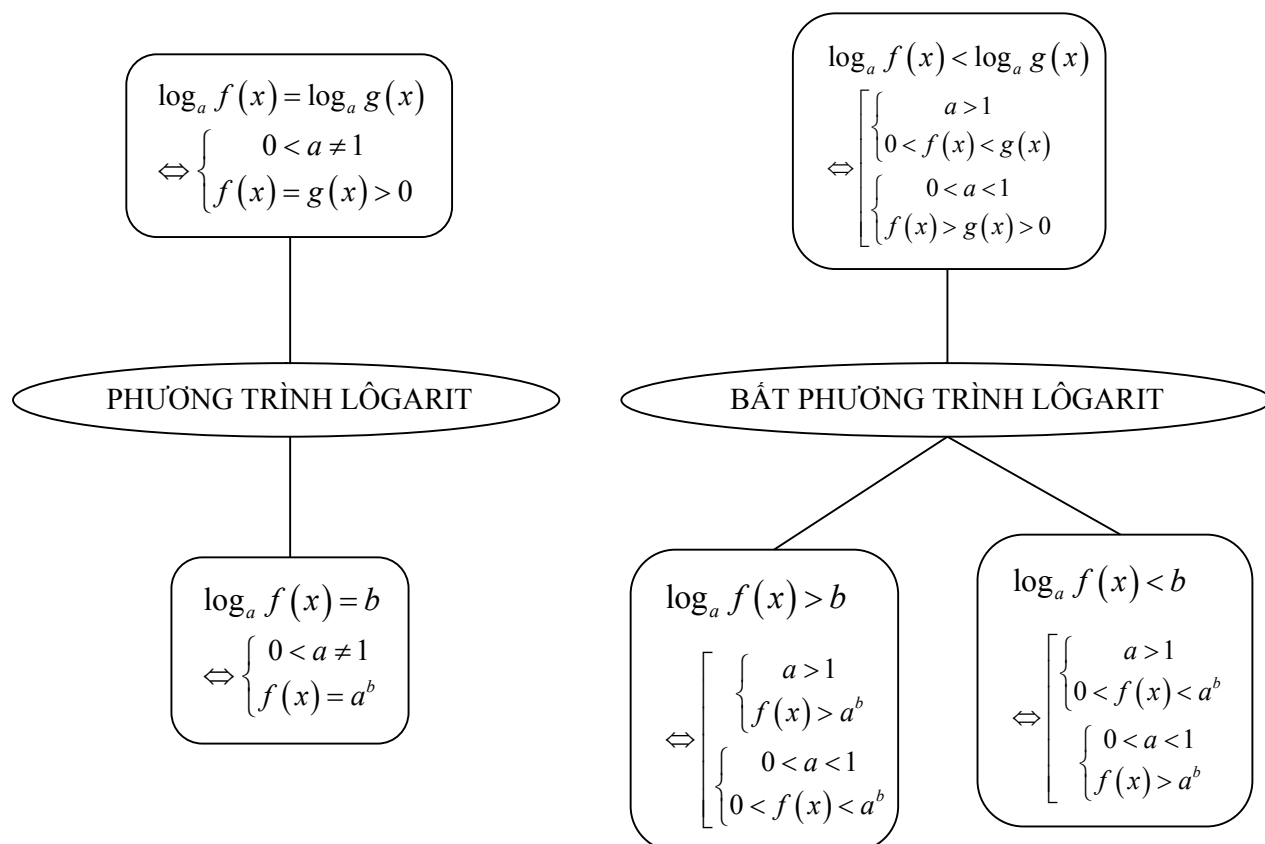
2. Bất phương trình lôgarit $y = \log_a x (0 < a \neq 1)$.

Dạng 1: $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases}$
 $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > g(x) > 0 \end{cases}$

Dạng 2: $\log_a f(x) < b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ 0 < f(x) < a^b \end{cases}$
 $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > a^b \end{cases}$

Dạng 3: $\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > a^b \end{cases}$
 $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) < a^b \end{cases}$

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Phương trình lôgarit

Bài toán 1. Biến đổi về dạng phương trình cơ bản

► Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3(x^2 - x + 1) = -\log_{\frac{1}{3}}(2x - 1)$ là

A. 0

B. 2

C. 6

D. 3

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\log_3(x^2 - x + 1) = \log_3(2x - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x^2 - x + 1 = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

Nên phương trình chỉ có một nghiệm là $x = 3$.

Chọn D.

Chú ý: Đưa cả hai vế cùng về lôgarit cơ số 3.

Ví dụ 2: Số nghiệm của phương trình $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = \log_{20} x$ là

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Hướng dẫn giải

Ta có: $\log_2 x + \log_3 2 \cdot \log_2 x + \log_4 2 \cdot \log_2 x = \log_{20} 2 \cdot \log_2 x$

$$\Leftrightarrow \log_2 x \cdot (1 + \log_3 2 + \log_4 2 - \log_{20} 2) = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Nên phương trình có duy nhất một nghiệm.

Chọn A.

Chú ý: Đưa cả hai vế cùng về lôgarit cơ số 2.

$$\log_3 x = \log_3 2 \cdot \log_2 x$$

$$\log_{20} x = \log_{20} 2 \cdot \log_2 x$$

Ví dụ 3: Cho phương trình $\log_4(x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x} + \log_8(4+x)^3$. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình là

A. $2\sqrt{6} - 4$

B. 2

C. 4

D. $2\sqrt{6}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} (x+1)^2 > 0 \\ 4-x > 0 \\ (4+x)^3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x < 4 \\ x > -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < 4 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \log_2|x+1| + \log_2 4 = \log_2(4-x) + \log_2(4+x) \Leftrightarrow 4|x-1| = 16-x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 4x-4 = 16-x^2 \\ x < 1 \\ -4x+4 = 16-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2+2\sqrt{6} \\ x = -2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Tổng tất cả các nghiệm của phương trình là $x = 2\sqrt{6} - 4$.

Chọn A.

Chú ý: Đưa cả hai vế cùng về lôgarit cơ số 2.

$$\log_{a^2} x^2 = \log_a |x|$$

Ví dụ 4: Cho phương trình $\log_2(\log_3(\log_2 x)) = 1$. Gọi a là nghiệm của phương trình, biểu thức nào sau đây là đúng?

A. $\log_2 a = 10$

B. $\log_2 a = 8$

C. $\log_2 a = 7$

D. $\log_2 a = 9$

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x > 0; \log_2 x > 0; \log_3(\log_2 x) > 0$ suy ra $x > 2$

Khi đó $\log_2(\log_3(\log_2 x)) = 1 \Leftrightarrow x = 2^9 \Rightarrow a = 2^9 \Rightarrow \log_2 a = 9$

Chọn D.

Ví dụ 5: Tìm nghiệm của phương trình $\log|x| = |\log x|$.

A. $S = (1; +\infty)$

B. $S = (0; +\infty)$

C. $S = \{1; 10\}$

D. $S = [1; +\infty)$

Hướng dẫn giải

Điều kiện $\begin{cases} |x| > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$ (*).

Khi đó $\log|x| = |\log x| \Leftrightarrow \log x = |\log x| \Leftrightarrow \log x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow x \in [1; +\infty)$

Kết hợp với (*) ta được $x \in [1; +\infty)$ thỏa mãn.

Vậy $S = [1; +\infty)$

Chọn D.

Bài toán 2. Phương trình theo một hàm số lôgarit

► **Phương pháp giải**

Bước 1. Sử dụng công thức lôgarit biến đổi về lôgarit cùng cơ số

Ví dụ: Phương trình $\log^2_{\sqrt{2}} x + 3\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} x = 2$

có hai nghiệm x_1, x_2 . Khi đó $|x_1 - x_2|$ bằng

A. $\sqrt{2} - \frac{1}{2}$

B. $\sqrt{5}$

C. $2^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} - 2^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$

D. $\frac{1}{2} - \sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$4\log^2_2 x + 3\log_2 x - \log_2 x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\log^2_2 x + 2\log_2 x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = -1 \\ \log_2 x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } |x_1 - x_2| = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$$

Chọn A.

Bước 2. Áp dụng phương pháp giải dạng 1.

► **Ví dụ mẫu**

Ví dụ 1: Phương trình $\log_3(3^x - 1) \cdot \log_3(3^{x+1} - 3) = 6$ có

A. hai nghiệm dương

B. một nghiệm dương

C. phương trình vô nghiệm

D. một nghiệm kép

Hướng dẫn giải

Ta có: $\log_3(3^x - 1) \cdot \log_3(3^{x+1} - 3) = 6 \Leftrightarrow \log_3(3^x - 1) \cdot \log_3(3 \cdot 3^x - 3) = 6$

$\Leftrightarrow \log_3(3^x - 1) \cdot \log_3[3 \cdot (3^x - 1)] = 6 \Leftrightarrow \log_3(3^x - 1) \cdot [1 + \log_3(3^x - 1)] = 6$

$\Leftrightarrow [\log_3(3^x - 1)]^2 + \log_3(3^x - 1) - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(3^x - 1) = 2 \\ \log_3(3^x - 1) = -3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x - 1 = 9 \\ 3^x - 1 = \frac{1}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 10 \\ 3^x = \frac{28}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_3 10 \\ x = \log_3 \frac{28}{27} \end{cases}$

Chọn A.

Chú ý: Biến đổi về phương trình có ẩn là $\log_3(3^x - 1)$

Bài toán 3. Phương pháp hàm số



Phương pháp giải

Sử dụng tính đơn điệu của hàm số

+ Tính chất 1. Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên $(a; b)$ thì số nghiệm của phương trình $f(x) = k$ trên $(a; b)$ không nhiều hơn một và $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v, \forall u, v \in (a; b)$.

+ Tính chất 2. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và đồng biến (hoặc nghịch biến), hàm số $y = g(x)$ liên tục và nghịch biến (hoặc đồng biến) trên D thì số nghiệm trên D của phương trình $f(x) = g(x)$ không nhiều hơn một.

► Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Phương trình $\log_3(x + 2) + \log_7(3x + 4) = 2$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1

B. 0

C. 2

D. 3

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x > -\frac{4}{3}$. Ta có: $\log_3(x + 2) + \log_7(3x + 4) - 2 = 0$.

Đặt $f(x) = \log_3(x + 2) + \log_7(3x + 4) - 2$

$f'(x) = \frac{1}{(x + 2) \cdot \ln 3} + \frac{1}{(3x + 4) \cdot \ln 7} > 0, \forall x > -\frac{4}{3}$

Nên phương trình $f(x) = 0$ có tối đa một nghiệm.

Mà $f(1) = 0$ nên phương trình có duy nhất một nghiệm $x = 1$.

Chọn A.

Ví dụ 2: Phương trình $\ln(x^2 + x + 1) - \ln(2x^2 + 1) = x^2 - x$ có tổng bình phương các nghiệm bằng

A. 5

B. 25

C. 9

D. 1

Hướng dẫn giải

Ta có: $\ln(x^2 + x + 1) - \ln(2x^2 + 1) = x^2 - x$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) = \ln(2x^2 + 1) + (2x^2 + 1)$$

Xét hàm số $f(t) = \ln t + t$ trên $(0; +\infty)$, ta có $f'(t) = \frac{1}{t} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$

$$\text{Mà } f(x^2 + x + 1) = f(2x^2 + 1) \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 2x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy tổng bình phương các nghiệm của phương trình là 1.

Chọn D.

Ví dụ 3: Số nghiệm của phương trình $\ln(x-1) = \frac{1}{x-2}$ là

A. 1

B. 0

C. 3

D. 2

Hướng dẫn giải

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, x \neq 2 \\ \ln(x-1) - \frac{1}{x-2} = 0 \end{cases}$$

Xét hàm số $y = \ln(x-1) - \frac{1}{x-2}$

$$y' = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-2)^2} > 0, \forall x \in (1; +\infty) \setminus \{2\}$$

Lập bảng biến thiên của hàm số trên $D = (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

Suy ra phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Chọn A.

Ví dụ 4: Số nghiệm của phương trình $\log_3 |x^2 - \sqrt{2}x| = \log_5 (x^2 - \sqrt{2}x + 2)$ là

A. 3

B. 2

C. 1

D. 4

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x \neq 0; x \neq \sqrt{2}$

$$\text{Đặt } t = x^2 - \sqrt{2}x \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x + 2 = t + 2 \Rightarrow \log_3 |t| = \log_5 (t + 2)$$

$$\text{Đặt } \log_3 |t| = \log_5 (t + 2) = u$$

$$\begin{cases} \log_3 |t| = u \\ \log_5 (t + 2) = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |t| = 3^u \\ t + 2 = 5^u \end{cases} \Rightarrow |5^u - 2| = 3^u \Rightarrow \begin{cases} 5^u - 2 = 3^u \\ 5^u - 2 = -3^u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^u + 3^u = 2 \\ 3^u + 2 = 5^u \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5^u + 3^u = 2 & (1) \\ \left(\frac{3}{5}\right)^u + 2\left(\frac{1}{5}\right)^u = 1 & (2) \end{cases}$$

+

$$\text{Xét (1): } 5^u + 3^u = 2$$

Ta thấy $u = 0$ là một nghiệm, dùng phương pháp hàm số hoặc dùng bất đẳng thức để chứng minh nghiệm $u = 0$ là duy nhất.

Với $u = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$, phương trình này vô nghiệm.

+

$$\text{Xét (2): } \left(\frac{3}{5}\right)^u + 2\left(\frac{1}{5}\right)^u = 1$$

Ta thấy $u = 1$ là một nghiệm, dùng phương pháp hàm số hoặc dùng bất đẳng thức để chứng minh nghiệm $u = 1$ là duy nhất.

Với $u = 0 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x - 3 = 0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x \neq 0; x \neq \sqrt{2}$.

Chọn B.

Ví dụ 5: Biết rằng phương trình $\log_2(1 + x^{1009}) = 2018 \log_3 x$ có nghiệm duy nhất x_0 . Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $3^{\frac{1}{1008}} < x_0 < 3^{\frac{1}{1006}}$

B. $x_0 > 3^{\frac{2}{1009}}$

C. $1 < x_0 < 3^{\frac{1}{1008}}$

D. $3^{\frac{1}{1007}} < x_0 < 1$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x > 0$

Đặt $t = \log_2(1 + x^{1009}) = 2018 \log_3 x$. Khi đó $t > 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + x^{1009} = 2^t \\ x^{2018} = 3^t \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2^t - 1)^2 = 3^t \Leftrightarrow 2^t - 1 = (\sqrt{3})^t \Leftrightarrow (\sqrt{3})^t + 1 = 2^t \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^t + \left(\frac{1}{2}\right)^t = 1 \quad (*)$$

Ta thấy hàm số $f(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^t + \left(\frac{1}{2}\right)^t$ luôn nghịch biến và liên tục trên $(0; +\infty)$ và $f(2) = 1$ nên phương trình (*) có duy nhất một nghiệm $t = 2$.

$$\Rightarrow x^{1009} = 3 \text{ hay } x_0 = 3^{\frac{1}{1009}}$$

$$\text{Mà } 0 < \frac{1}{1009} < \frac{1}{1008} \text{ nên } 1 < x_0 < 3^{\frac{1}{1008}}$$

Chọn C.

Ví dụ 6: Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a \ln^2 x + b \ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5 \log^2 x + b \log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 x_2 > x_3 x_4$. Tính giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của $S = 2a + 3b$.

A. $S_{\min} = 30$

B. $S_{\min} = 25$

C. $S_{\min} = 33$

D. $S_{\min} = 17$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x > 0$

Đặt $t = \ln x$, $u = \log x$. Khi đó ta được $at^2 + bt + 5 = 0$ (1), $5u^2 + bu + a = 0$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow b^2 - 20a > 0 \Leftrightarrow b^2 > 20a$.

$$\text{Với } t = \ln x \Leftrightarrow x = e^t \Rightarrow x_1 x_2 = e^{t_1} \cdot e^{t_2} = e^{t_1 + t_2} = e^{-\frac{b}{a}}$$

$$\text{Với } u = \log x \Leftrightarrow x = 10^u \Rightarrow x_3 x_4 = 10^{u_1} \cdot 10^{u_2} = 10^{u_1 + u_2} = 10^{-\frac{b}{5}}$$

$$\text{Ta có: } x_1 x_2 > x_3 x_4 \Rightarrow e^{-\frac{b}{a}} > 10^{-\frac{b}{5}}$$

Lấy lôgarit cơ số e hai vế ta được

$$-\frac{b}{5} > -\frac{b}{5} \ln 10 \Leftrightarrow ab \ln 10 > 5b \Leftrightarrow a \ln 10 > 5 \Leftrightarrow a > \frac{5}{\ln 10} \text{ (do } a, b \text{ nguyên dương).}$$

$$S_{\min} \Leftrightarrow a_{\min}, b_{\min}. \text{ Mà } a_{\min} = 3 \Rightarrow b^2 > 60 \Rightarrow b_{\min} = 8.$$

$$\Rightarrow S = 2a + 3b = 2.3 + 3.8 = 30$$

Chọn A.

Bài toán 4. Mũ hóa hoặc lấy lôgarit hai vế

► Phương pháp giải

Các lý thuyết được sử dụng

$$+ \quad a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1, b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$$

$$+ \quad a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \\ \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot \log_a b$$

$$\text{Hoặc } \log_b a^{f(x)} = \log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \cdot \log_b a = g(x).$$

► Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Phương trình $8^{\log_2(x^2-8)} = (x-2)^3$ có tất cả bao nhiêu nghiệm phân biệt?

A. 0

B. 2

C. 1

D. 3

Hướng dẫn giải

$$\text{Điều kiện xác định: } x^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2\sqrt{2} \\ x > 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Điều kiện có nghiệm là } x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

Nên nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm của phương trình thỏa mãn $x > 2\sqrt{2}$

$$\text{Ta có: } 8^{\log_2(x^2-8)} = (x-2)^3 \Leftrightarrow \log_2(x^2-8) = \log_8(x-2)^3$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2-8) = \log_2(x-2) \Leftrightarrow x^2-8 = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

So với điều kiện, ta nhận $x = 3$ là nghiệm của phương trình.

Chọn C.

Ví dụ 2: Phương trình $5x^2 + 22 \cdot x^{\log_5 15} - 5 \cdot 3^{\log_5 5x^2} = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 0

B. 2

C. 1

D. 3

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x > 0$

Ta có:

$$5x^2 + 22 \cdot x^{1+\log_5 3} - 5 \cdot 3^{1+2\log_5 x} = 0 \Leftrightarrow 5x^2 + 22 \cdot x^{1+\log_5 3} - 5 \cdot 3 \cdot 3^{2\log_5 x} = 0$$

$$\text{Vì } x^{\log_5 15} = x^{1+\log_5 3} = x \cdot x^{\log_5 3} = x \cdot 3^{\log_5 x}. \text{ Đặt } t = \log_5 x \Rightarrow x = 5^t.$$

$$\text{Phương trình trở thành: } 5 \cdot (5^t)^2 + 22 \cdot 5^t \cdot 3^t - 15 \cdot (3^t)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2t} + 22 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^t - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{5}{3}\right)^t = \frac{3}{5} \\ \left(\frac{5}{3}\right)^t = -5 \end{cases} \Leftrightarrow t = -1$$

$$\text{Nên } \log_5 x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$$

Chọn C.

Bài toán 5. Đặt ẩn phụ**Phương pháp giải****Bước 1:** Đặt $t = \log_a f(x) \Leftrightarrow f(x) = a^t$

$$\Rightarrow \log_a^n f(x) = t^n, \log_{f(x)} a = \frac{1}{t}, t \neq 0$$

Bước 2: Chuyển phương trình về phương trình ẩn t **Bước 3:** Giải phương trình và kết hợp điều kiện. Có thể đặt ẩn phụ hoàn toàn hoặc không hoàn toàn để giải phương trình.**Ví dụ:** Biết phương trình $\log_2 x - \log_x 64 = 1$ có hai nghiệm phân biệt. Khi đó tích hai nghiệm này bằng**A.** 2**B.** 1**C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{2}$ **Hướng dẫn giải**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Với điều kiện trên phương trình đã cho trở thành

$$\log_2 x - 6 \log_x 2 = 1 \Leftrightarrow \log_2 x - \frac{6}{\log_2 x} = 1$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x)^2 - \log_2 x - 6 = 0$$

Đặt $t = \log_2 x$, phương trình trở thành

$$t^2 - t - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_2 x = 3 \\ \log_2 x = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Chọn A.**Ví dụ mẫu****Ví dụ 1:** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $3\sqrt{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 = 0$ bằng**A.** 35**B.** 84**C.** 65**D.** 28**Hướng dẫn giải**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x > 0 \\ \log_3 x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$\text{Phương trình } 3\sqrt{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{\log_3 x} - \log_3 3 - \log_3 x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x - 3\sqrt{\log_3 x} + 2 = 0$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\log_3 x}; (t > 0).$$

Phương trình trở thành:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 81 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 84$$

Chọn B.**Ví dụ 2:** Phương trình $\log_3^2 x + (x-12)\log_3 x + 11 - x = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 0

B. 2

C. 1

D. 3

Hướng dẫn giảiĐiều kiện: $x > 0$ Phương trình $\log_3^2 x + (x-12)\log_3 x + 11 - x = 0$ là phương trình bậc hai theo ẩn $\log_3 x$ và tham số x .Giải phương trình tham số x , ta được:
$$\begin{cases} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = 11 - x \quad (*) \end{cases}$$
Giải phương trình (*), ta có: $\log_3 x + x - 11 = 0$ Đặt $f(x) = \log_3 x + x - 11$ trên $(0; +\infty)$, ta có: $f'(x) = \frac{1}{x \ln 3} + 1 > 0$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.Do đó, phương trình $f(x) = 0$ có tối đa một nghiệm. Mà $f(9) = 0$ nên $x = 9$ là nghiệm duy nhất của (*).Tóm lại phương trình có hai nghiệm: $x = 3, x = 9$.**Chọn B.****Bài toán 6. Phương trình tích****► Ví dụ mẫu****Ví dụ 1:** Tổng các nghiệm của phương trình $2\log^2 x - \ln x = 2\ln x \cdot \log x - \log x$ là một số có dạng $\frac{a+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$ với a, b là các số nguyên dương. Giá trị của $a+b$ là

A. 11

B. 13

C. 3

D. 5

Hướng dẫn giảiTa có: $2\log^2 x + \log x - \ln x - 2\ln x \cdot \log x \Leftrightarrow \log x(2\log x + 1) - \ln x(2\log x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (2\log x + 1)(\log x - \ln x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log x = -\frac{1}{2} \\ \log x - \ln x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \log e \cdot \ln x - \ln x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \ln x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}} \\ x = 1 \end{cases}$$

Nên tổng các nghiệm của phương trình là $1 + \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1+\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=10 \end{cases} \Rightarrow a+b=11$ **Chọn A.****Bài toán 7. Phương trình lôgarit chứa tham số****► Phương pháp giải****Ví dụ:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 10)$ để phương trình $\log_3^2 x + \log_3 x + m = 0$ có nghiệm?

A. 11

B. 10

C. 12

D. 5

Hướng dẫn giảiTập xác định $D = (0; +\infty)$. Đặt $\log_3 x = t$.Khi đó phương trình trở thành $t^2 + t + m = 0$ (*)**Bước 1:** Đặt $t = \log_3 x; x \in (0; +\infty) \Rightarrow t \in \mathbb{R}$ **Bước 2:** Sử dụng định lý Vi-ét, hoặc cô lập m .Xét hàm $f(t)$, lập bảng biến thiên để tìm m .

Phương trình đã cho có nghiệm khi phương trình

$$(*) \text{ có nghiệm: } \Delta = 1 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4}$$

Vậy để phương trình có nghiệm thực thì $m \leq \frac{1}{4}$

Chọn B.

► Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 10)$ để phương trình $\log_2(5^x - 1) \log_4(2 \cdot 5^x - 2) = m$ có nghiệm $x \geq 1$?

A. 6

B. 8

C. 9

D. 7

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $5^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$$\log_2(5^x - 1) \log_4(2 \cdot 5^x - 2) = m \Leftrightarrow \log_2(5^x - 1) \frac{1}{2} \log_2(2(5^x - 1)) = m$$

$$\Leftrightarrow \log_2(5^x - 1) (1 + \log_2(5^x - 1)) = 2m \Leftrightarrow \log_2^2(5^x - 1) + \log_2(5^x - 1) = 2m$$

Đặt $\log_2(5^x - 1) = t$. Khi đó phương trình đã cho trở thành $t^2 + t - 2m = 0$ (*)

Phương trình đã cho có nghiệm $x \geq 1$ khi phương trình (*) có nghiệm $t \geq 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 \geq t_2 \geq 2 & (**) \\ t_1 \leq 2 \leq t_2 & (***) \end{cases}$$

$$\text{(Loại (**)) vì nếu } \Delta = 1 - 8m \geq 0 \text{ thì (*) có nghiệm } \begin{cases} t_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 8m}}{2} < 2, \forall m \\ t_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8m}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ta có (***) } \Leftrightarrow af(2) \leq 0 \Leftrightarrow 6 - 2m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 3$$

Vậy phương trình có nghiệm thực $x \geq 1$ thì $m \geq 3$

Chọn D.

Ví dụ 2: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 10)$ để phương trình $\frac{\log(mx)}{\log(x+1)} = 2$ có nghiệm thực duy nhất?

A. 11

B. 16

C. 12

D. 15

Hướng dẫn giải

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{\log(mx)}{\log(x+1)} = 2 \Leftrightarrow \log(mx) = 2 \log(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \log(mx) = \log(x+1)^2 \Leftrightarrow mx = (x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (2-m)x + 1 = 0 \quad (*)$$

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi phương trình (*) có một nghiệm thỏa mãn $\begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$ (Ta thấy

(*) luôn có nghiệm khác 0)

+

Trường hợp 1:

Phương trình (*) có hai nghiệm thỏa mãn $-1 < x_1 \leq x_2$ khi

$$\begin{cases} \Delta = m^2 - 4m \geq 0 \\ af(-1) > 0 \\ \frac{S}{2} = \frac{m-2}{2} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 4 \\ m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 4 \\ m > 0 \end{cases}$$

+

Trường hợp 2:

Phương trình (*) có hai nghiệm thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2; af(-1) < 0 \Leftrightarrow m < 0$

Các giá trị m cần tìm $\begin{cases} m \geq 4 \\ m < 0 \end{cases}$

Chọn D.

Ví dụ 3: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 10)$ để phương trình $m \log_{\frac{1}{2}}(x-4) - 2(m^2+1) \log_{\frac{1}{2}}(x-4) + m^3 + m + 2 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt trong khoảng $(4; 6)$?

A. 6

B. 8

C. 9

D. 7

Hướng dẫn giải

Đặt $\log_{\frac{1}{2}}(x-4) = t$. Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$mt^2 - 2(m^2+1)t + m^3 + m + 2 = 0 \quad (*)$$

Yêu cầu bài toán tương đương với (*) phải có hai nghiệm phân biệt $-1 < t_1 \leq t_2$:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ t_1 + 1 > 0 \\ t_2 + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 > 0 \\ (t_1+1)(t_2+1) > 0 \\ (t_1+1) + (t_2+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \\ t_1 t_2 + (t_1 + t_2) + 1 > 0 \\ (t_1 + t_2) + 2 > 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \\ \frac{m^3 + m + 2}{m} + \frac{2(m^2+1)}{m} + 1 > 0 \\ \frac{2(m^2+1)}{m} + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \\ \frac{m^3 + 2m^2 + 2m + 4}{m} > 0 \\ \frac{m^2 + m + 1}{m} > 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \\ \frac{(m+2)(m^2+2)}{m} > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq 1 \\ \frac{m+2}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \neq 1 \end{aligned}$$

Vậy $0 < m \neq 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn B.

Ví dụ 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có nghiệm trong đoạn $[1; 3^{\sqrt{3}}]$?

A. 6

B. 4

C. 1

D. 0

Hướng dẫn giảiĐiều kiện: $x > 0$ Đặt $\sqrt{\log_3^2 x + 1} = t$

Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$t^2 + t - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t = 2m + 2 \quad (*)$$

Yêu cầu bài toán tương đương với (*) phải có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1; 2]$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$ trên đoạn $[1; 2]$. Ta có $f'(t) = 2t + 1, \forall t \in [1; 2]$ nên
 $\min_{[1; 2]} f(t) = f(1) = 2; \max_{[1; 2]} f(t) = f(2) = 6$

Để (*) có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1; 2]$ thì $2 < 2m + 2 < 6 \Leftrightarrow 0 < m < 2$ **Chọn C.**

Ví dụ 5: Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

A. $m \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$

B. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$

C. $m \in (-\infty; 0]$

D. $m \in \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$

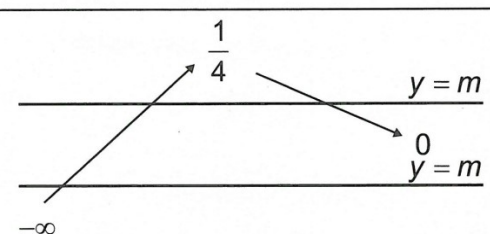
Hướng dẫn giảiĐiều kiện: $x > 0$

$$4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 + \log_2 x + m = 0$$

Đặt $t = \log_2 x$, do $x \in (0; 1) \Rightarrow t \in (-\infty; 0)$ Phương trình trở thành $t^2 + t + m = 0 \Leftrightarrow m = -t^2 - t \quad (*)$ Số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm giữa đồ thị hàm số $f(t) = -t^2 - t$ với đường thẳng $y = m$ Xét hàm số $f(t) = -t^2 - t$ trên $t \in (-\infty; 0)$

Ta có: $f'(t) = -2t - 1, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$			

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có nghiệm trong khoảng $(0;1)$ khi $m \leq \frac{1}{4}$

Chọn B.

Ví dụ 6: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-10;10)$ để phương trình $(m-4)\log_2^2 x - 2(m-2)\log_2 x + m-1 = 0$ có hai nghiệm thỏa mãn $1 < x_1 < 2 < x_2$?

- A. 5 B. 4 C. 1 D. 0

Hướng dẫn giải

Đặt $\log_2 x = t \Rightarrow 2^t = x$, khi đó phương trình đã cho trở thành

$$(m-4)t^2 - 2(m-2)t + m-1 = 0 \Leftrightarrow m = \left(\frac{2t-1}{t-1}\right)^2 (*)$$

(do $t=1$ không phải là nghiệm).

Yêu cầu bài toán tương đương với (*) phải có hai nghiệm thỏa mãn $0 < t_1 < 1 < t_2$

Xét hàm số $f(t) = \left(\frac{2t-1}{t-1}\right)^2$; $f'(t) = \frac{-2(2t-1)}{(t-1)^3}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+	-
$f(t)$	1	0	$+\infty$	4

Từ bảng biến thiên suy ra $m > 4$

Chọn A.

► **Bài tập tự luyện dạng 1**

Câu 1: Nghiệm phương trình là $\log_4(x-1) = 3$

- A. $x = 63$ B. $x = 82$ C. $x = 80$ D. $x = 65$

Câu 2: Tổng các nghiệm không âm của phương trình $\log_{\sqrt{3}} x - \log_3(2x^2 - 4x + 3) = 0$ là

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 3: Phương trình $\log_2(4 - 2^x) = 2 - x$ tương đương với phương trình nào sau đây?

- A. $4 - 2^x = 2 - x$ B. $4 - 2^x = 2^{2-x}$
C. $(2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 4 = 0$ D. Cả 3 đáp án đều sai

Câu 4: Cho phương trình $\log_a(x^2 + 3x) = \log_{\sqrt{a}} 2x$, ($a > 0$; $a \neq 1$), số nghiệm của phương trình trên là

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 5: Phương trình $\log_{a^3+2} 3 - \log_{4-a} 3 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 6: Một học sinh giải phương trình $\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 1 = 0$ theo các bước như sau:

Bước 1: Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$

Bước 2: Từ điều kiện trên phương trình đã cho trở thành:

$$(\log_2 x)^2 - 2\log_2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = 1$$

Bước 3: Vậy nghiệm phương trình là $x = 2^1 = 2$ (nhận)

Lời giải trên sai ở bước nào?

- A. Bước 1 B. Bước 2 C. Bước 3 D. Không sai bước nào

Câu 7: Nghiệm của phương trình $\log_{0,4}(x-3) + 2 = 0$ là

- A. Vô nghiệm B. Có nghiệm $\forall x > 3$
C. $x = 2$ D. $x = \frac{37}{4}$

Câu 8: Phương trình $(\ln x)^2 - 7\ln x + 6 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 9: Nghiệm của phương trình $\log_{\frac{\pi}{3}}(\log_2(x-3)) = 0$ là?

- A. 3 B. 2 C. 4 D. 5

Câu 10: Với giá trị m bằng bao nhiêu thì phương trình $\log_{2+\sqrt{3}}(mx+3) + \log_{2-\sqrt{3}}(m^2+1) = -1$ có nghiệm là

- A. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$ C. $m < 3$ D. $m > 3$

Câu 11: Phương trình $\log_2(2x-1) - \log_{\frac{1}{2}}(x-1) = 1$ có nghiệm là

- A. $\begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{17}}{4} \\ x = \frac{3-\sqrt{17}}{4} \end{cases}$ B. $x = \frac{3+\sqrt{17}}{4}$ C. $x = \frac{3-\sqrt{17}}{4}$ D. $x = 1$

Câu 12: Tập nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{3}}|x-1| = 2$ là

- A. $\{3\}$ B. $\{-3; 4\}$ C. $\{-2; -3\}$ D. $\{4; -2\}$

Câu 13: Tất cả các giá trị x thỏa mãn $x+2 = 3^{\log_3(x+2)}$ là

- A. $x \neq -2$ B. $x \in \mathbb{R}$ C. $x \geq -2$ D. $x > -2$

Câu 14: Với giá trị nào của m thì phương trình $\log_2(4^x + 2m^3) = x$ có hai nghiệm phân biệt?

- A. $m < \frac{1}{2}$ B. $m > -\sqrt[3]{\frac{4^x}{2}}$ C. $0 < m < \frac{1}{2}$ D. $m > 0$

Câu 15: Phương trình $\log_3(3^x - 1) \cdot \log_3(3^{x+1} - 3) = 6$ có

- A. hai nghiệm dương B. một nghiệm dương
C. phương trình vô nghiệm D. một nghiệm kép

Câu 16: Phương trình $\log_{\sqrt{a}}\sqrt{2a-x} + \log_{\frac{1}{a}}x = 0$ có nghiệm là

- A. $x = a$ B. $x = 2a$
C. $x = 2a+1$ D. Phương trình vô nghiệm

Câu 17: Cho phương trình $\log_3(\log_2 \sqrt{x^2 + 5}) = 1$, tổng bình phương các nghiệm của phương trình trên là

- A. 0 B. 244 C. 59 D. 118

Câu 18: Phương trình $\log_3(\sqrt{x} + 2) = \log_7 x$ có nghiệm là

- A. $x = 4$ B. $x = 49$ C. $x = 25$ D. Đáp án khác

Câu 19: Với giá trị nào của m thì phương trình $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} = 3m$ có nghiệm trên $[1; 3]$?

- A. $m \in (1 + \sqrt{2}; 1)$ B. $m \in \left[\frac{1}{3}; \frac{1 + \sqrt{2}}{3}\right]$
C. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$ D. $m \in \left[\frac{1 + \sqrt{2}}{3}; 1\right]$

Câu 20: Tìm tổng các nghiệm của phương trình $\log_{2x-1}(2x^2 + x - 1) + \log_{x+1}(2x - 1)^2 = 4$

- A. 2 B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{15}{4}$ D. $\frac{13}{4}$

Câu 21: Tập nghiệm của phương trình $\log_4(x + 2) = \log_2 x$ là

- A. $S = \{2; -1\}$ B. $S = \{2; \}$ C. $S = \{4\}$ D. $S = \{4; -1\}$

Câu 22: Giải phương trình $\log_3 x + \log_3(x + 2) = 1$ ta được nghiệm

- A. $x = 3$ B. $x = 3$ và $x = -1$ C. $x = \frac{-1}{2}$ D. $x = 3$ và $x = 6$

Câu 23: Tập nghiệm của phương trình $\log(x + 10) + \frac{1}{2} \log x^2 = 2 - \log 4$ là

- A. $S = \{-5; -5 + 5\sqrt{2}\}$ B. $S = \{-5; -5 - 5\sqrt{2}\}$
C. $S = \{-5; -5 - 5\sqrt{2}; -5 + 5\sqrt{2}\}$ D. $S = \{-5 - 5\sqrt{2}; -5 + 5\sqrt{2}\}$

Câu 24: Tập nghiệm của phương trình $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = \log_{20} x$ là

- A. $S = \{1\}$ B. $S = \emptyset$ C. $S = \{1; 2\}$ D. $S = \{2\}$

Câu 25: Tập nghiệm của phương trình $\log \sqrt{1+x} + 3 \log \sqrt{1-x} - 2 = \log \sqrt{1-x^2}$ là

- A. $S = \{1\}$ B. $S = \emptyset$ C. $S = \{1; 2\}$ D. $S = \{2\}$

Câu 26: Phương trình $\frac{1}{3} \log_2(3x - 4)^6 \cdot \log_2 x^3 = 8(\log_2 \sqrt{x})^2 + (\log_2(3x - 4))^2$ có tập nghiệm là

- A. $S = \left\{1; 2; \frac{16}{9}\right\}$ B. $S = \{1; 2\}$ C. $S = \left\{1; \frac{16}{9}\right\}$ D. $S = \left\{2; \frac{16}{9}\right\}$

Câu 27: Tập nghiệm của phương trình $\log_{2+\sqrt{3}}(x + 1) = \log_{2-\sqrt{3}}(x + 2)$ là

- A. $S = \left\{\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right\}$ B. $S = \left\{\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right\}$
C. $S = \left\{\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right\}$ D. $S = \left\{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right\}$

Câu 28: Tập nghiệm của phương trình $\frac{3}{2} \log_{\frac{1}{4}}(x + 2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(4 - x)^3 + \log_{\frac{1}{4}}(x + 6)^3$ là

A. $S = \{2\}$

B. $S = \{1 - \sqrt{33}\}$

C. $S = \{2; 1 + \sqrt{33}\}$

D. $S = \{2; 1 - \sqrt{33}\}$

Câu 29: Tìm số nghiệm của phương trình $\log_2^2 x + 3\log_2 x + 2 = 0$

A. 2 nghiệm

B. 1 nghiệm

C. Vô nghiệm

D. 3 nghiệm

Câu 30: Tìm số nghiệm của phương trình $\log_2^2(x^2 - 1) + \log_2(x - 1) + \log_2(x + 1) - 2 = 0$

A. 4 nghiệm

B. 1 nghiệm

C. 2 nghiệm

D. 3 nghiệm

Câu 31: Tìm số nghiệm của phương trình $\log_2(x + 1) = \log_{x+1} 16$

A. Vô nghiệm

B. 3 nghiệm

C. 1 nghiệm

D. 2 nghiệm

Câu 32: Tìm số nghiệm của phương trình $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$

A. 2 nghiệm

B. 1 nghiệm

C. 4 nghiệm

D. 3 nghiệm

Câu 33: Tìm số nghiệm của phương trình $\log_3^2 x + 5\sqrt{\log_3^2 x + 1} + 7 = 0$

A. 1 nghiệm

B. Vô nghiệm

C. 2 nghiệm

D. 3 nghiệm

Câu 34: Tìm số nghiệm của phương trình $\log_2^2 x + \sqrt{\log_2^2 x + 1} = 1$

A. Vô nghiệm

B. 2 nghiệm

C. 1 nghiệm

D. 3 nghiệm

Câu 35: Tìm số nghiệm của phương trình $\log_2^2 x + (x - 12)\log_2 x + 11 - x = 0$

A. Vô nghiệm

B. 3 nghiệm

C. 1 nghiệm

D. 2 nghiệm

Câu 36: Phương trình $\log_x(x^2 + 4x - 4) = 3$ có số nghiệm là

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Câu 37: Giải phương trình $\log_4 \{2\log_3 [1 + \log_2 (1 + 3\log_2 x)]\} = \frac{1}{2}$ ta được nghiệm $x = a$. Khi đó giá trị a thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0; 3)$ B. $(2; 5)$ C. $(5; 6)$ D. $(6; +\infty)$

Câu 38: Phương trình $\log_3(x^2 + 4x + 12) = 2$. Chọn phương án đúng.

A. Có hai nghiệm cùng dương

B. Có hai nghiệm trái dấu

C. Có hai nghiệm cùng âm

D. Vô nghiệm

Câu 39: Phương trình $x + \log_2(9 - 2^x) = 3$ có nghiệm nguyên dương là a . Tính giá trị của biểu thức

$$T = a^3 - 5a - \frac{9}{a^2}$$

A. $T = -7$ B. $T = 12$ C. $T = 11$ D. $T = 6$

Câu 40: Tập nghiệm của phương trình $\log_2(2^x - 1) = -2$ là

A. $\{2 - \log_2 5\}$ B. $\{2 + \log_2 5\}$ C. $\{\log_2 5\}$ D. $\{-2 + \log_2 5\}$

Câu 41: Số nghiệm của phương trình $\log_3(x + 1)^2 = 2$ là

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Câu 42: Tìm m để phương trình $\log_2(x^3 - 3x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. $m < 1$ B. $0 < m < 1$ C. $m > 0$ D. $m > 1$

Câu 43: Tìm m để phương trình $\log_2(4^x - m) = x + 1$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

A. $0 < m < 1$ B. $0 < m < 2$ C. $-1 < m < 0$ D. $-2 < m < 0$

Câu 44: Nghiệm của phương trình $x + 2.3^{\log_2 x} = 3$ là

A. $x = 1$

B. $x = -3; x = 1$

C. $x = 3; x = 1$

D. $x = 3$

Câu 45: Tìm tích các nghiệm của phương trình $\log_3 \left[(x+1)^3 + 3(x+1)^2 + 3x + 4 \right] = 2 \log_2 (x+1)$

A. -1

B. -7

C. 7

D. 11

Câu 46: Cho phương trình $\log_2 (x + 3^{\log_6 x}) = \log_6 x$ có nghiệm $x = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó tổng $a + b$ bằng?

A. 1

B. 3

C. 5

D. 7

Câu 47: Phương trình $2^{\log_5(x+3)} = x$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1

B. 2

C. 3

D. Vô nghiệm

Câu 48: Gọi T là tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{3}} x - 5 \log_3 x + 6 = 0$. Tính T

A. $T = 36$

B. $T = -3$

C. $T = 5$

D. $T = \frac{1}{243}$

Câu 49: Phương trình $\log_3 \left(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 2 \right) + \left(\frac{1}{5} \right)^{3x - x^2 - 1} = 2$ có tổng các nghiệm bằng?

A. $\sqrt{5}$

B. 3

C. -3

D. $-\sqrt{5}$

Câu 50: Hiệu của nghiệm lớn nhất với nghiệm nhỏ nhất của phương trình $7^{x-1} - 2 \log_7 (6x - 5)^3 = 1$ là

A. 1

B. 2

C. -1

D. -2

Câu 51: Phương trình $\log_3 \frac{2x+1}{(x-1)^2} = x^2 - 4x$ có nghiệm là

A. $x = 0$

B. $x = 0; x = 4$

C. Vô nghiệm

D. $x = 4$

Câu 52: Phương trình $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 6x^2 + 9x + m)2^{x-2} = 2^{x+1} + 1$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \in (a; b)$, đặt $T = b^2 - a^2$ thì

A. $T = 36$

B. $T = 64$

C. $T = 48$

D. $T = 72$

Câu 53: Nghiệm của phương trình $\frac{x^3}{3} + \log_2 (x+1) = 11$ là

A. Vô nghiệm

B. $x = 2$

C. $\begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$

D. $x = 3$

Câu 54: Cho phương trình $e^{m \cos x - \sin x} - e^{2(1 - \sin x)} = 2 - \sin x - m \cos x$ với m là tham số thực. Gọi S là tập các giá trị của m để phương trình có nghiệm. Khi đó S có dạng $(-\infty; a] \cup [b; +\infty)$. Tính $T = 10a + 20b$

A. $T = 1$

B. $T = 0$

C. $T = 10\sqrt{3}$

D. $T = 3\sqrt{10}$

Câu 55: Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x \cdot \log_2 (x-1) + m = m \cdot \log_2 (x-1) + x$ có hai nghiệm thực phân biệt thuộc $(1; 3]$

A. $m > 3$

B. $1 < m < 3$

C. $m \neq 3$

D. Không có m

Câu 56: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - (m+2) \log_3 x + 3m - 1 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 x_2 = 27$

A. $m = \frac{4}{3}$

B. $m = 25$

C. $m = \frac{28}{3}$

D. $m = 1$

Câu 57: Định điều kiện cho tham số m để $\log_x m + \log_{mx} m + \log_{m^2 x} m = 0$ có nghiệm.

A. $m > 0$

B. $\begin{cases} m > 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$

C. $m \neq 1$

D. $m > 1$

Câu 58: Số nghiệm của phương trình $\log_4 x^2 = \log_{\sqrt{2}} 2$ là

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Câu 59: Nghiệm phương trình $\log_4 (3x+4) \cdot \log_x 2 = 1$ là

A. $x = -2$

B. $x = 4$

C. $\begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$

D. Vô nghiệm

Câu 60: Biết rằng phương trình $\left[\log_{\frac{1}{3}} (9x) \right]^2 + \log_3 \frac{x^2}{81} - 7 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Tính $P = x_1 x_2$

A. $P = \frac{1}{9^3}$

B. $P = 3^6$

C. $P = 9^3$

D. $P = 3^8$

Câu 61: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_{\sqrt{2}} (x-1) + \log_{\frac{1}{2}} (x+1) = 1$.

A. $S = \left\{ \frac{3+\sqrt{13}}{2} \right\}$

B. $S = \{3\}$

C. $S = \{2-\sqrt{5}; 2+\sqrt{5}\}$

D. $S = \{2+\sqrt{5}\}$

Câu 62: Biết rằng phương trình $\log_3 (3^{x+1} - 1) = 2x + \log_{\frac{1}{3}} 2$ có hai nghiệm x_1 và x_2 . Hãy tính tổng $S = 27^{x_1} + 27^{x_2}$

A. $S = 180$

B. $S = 45$

C. $S = 9$

D. $S = 252$

Câu 63: Số nghiệm của phương trình $\frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{\ln(x-1)} = 0$ là

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Câu 64: Biết rằng phương trình $2\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} (1-\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}} (x-2\sqrt{x}+2)$ có nghiệm duy nhất dạng $a+b\sqrt{3}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính tổng $S = a+b$

A. $S = 6$

B. $S = 2$

C. $S = -2$

D. $S = -6$

Câu 65: Phương trình $\log_3 \frac{x^2 - 2x + 1}{x} + x^2 + 1 = 3x$ có tổng các nghiệm bằng:

A. 3

B. 5

C. $\sqrt{5}$

D. 2

Câu 66: Gọi S là tổng các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $\log_4 (2^{2x} + 2^{x+2} + 2^2) = \log_2 |m-2|$ vô nghiệm. Giá trị của S bằng

A. $S = 6$

B. $S = 8$

C. $S = 10$

D. $S = 12$

Câu 67: Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\frac{\log(mx) - 2}{\log(x+1)} = 1$ có nghiệm duy nhất

A. $0 < m < 100$

B. $m < 0; m > 100$

C. $m = 1$

D. Không tồn tại m

Câu 68: Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{3}}^2 x - m \log_{\sqrt{3}} x + 1 = 0$ có nghiệm duy nhất nhỏ hơn 1.

A. $m = 2$

B. $m = -2$

C. $m = \sqrt{2}$

D. $m = 0$

Câu 69: Gọi m_0 là giá trị thực nhỏ nhất của tham số m sao cho phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}(x-2) - (m-5)\log_{\frac{1}{2}}(x-2) + m - 1 = 0$ có nghiệm thuộc $(2; 4)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $m \in \left(-5; -\frac{5}{2}\right)$

B. $m \in \left(-1; \frac{4}{3}\right)$

C. $m \in \left(2; \frac{10}{3}\right)$

D. Không tồn tại m

Câu 70: Cho phương trình $\sqrt{\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3} = m(\log_2 x - 3)$ với m là tham số thực. Tìm các giá trị của m để phương trình có nghiệm thuộc $[16; +\infty)$

A.

$1 < m \leq 2$

B. $1 < m \leq \sqrt{5}$

C. $\frac{3}{4} \leq m \leq \sqrt{5}$

D.

$1 \leq m \leq \sqrt{5}$

Câu 71: Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc $[-2017; 2017]$ để phương trình $\log(mx) = 2\log(x+1)$ có nghiệm duy nhất?

A. 2017

B. 4014

C. 2018

D. 4015

Câu 72: Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $\log_2 \frac{4^x - 1}{4^x + 1} - m = 0$ có nghiệm.

A. $m < 0$

B. $-1 < m < 1$

C. $m \leq -1$

D. $-1 < m < 0$

Câu 73: Cho phương trình $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2)$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt.

A. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

B. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$

C. $m \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

D. $m \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

Câu 74: Cho phương trình $\log_3(x^2 + 4mx) + \log_{\frac{1}{3}}(2x - 2m - 1) = 0$ với m là tham số thực. Gọi S là tập tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm duy nhất, khi đó S có dạng $[a; b] \cup \{c\}$ với $a < b < c$. Tính $P = 2a + 10b + c$

A. $P = 0$

B. $P = 15$

C. $P = -2$

D. $P = 13$

Dạng 2. Bất phương trình lôgarit

Bài toán 1. Biến đổi về dạng bất phương trình cơ bản

► Phương pháp giải

Áp dụng lý thuyết

$$\text{Dạng 1: } \log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases}$$

$$\text{Dạng 2: } \log_a f(x) < b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ 0 < f(x) < a^b \end{cases}$$

Dạng 3: $\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > a^b \end{cases}$
 $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) < a^b \end{cases}$

► **Ví dụ mẫu**

Ví dụ 1: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3 \left(\log_{\frac{1}{2}} x \right) \geq 0$ có dạng $S = \left(a; \frac{b}{c} \right]$, với $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản và a là số nguyên. Tính $a + b + c$

A. 3

B. 2

C. -2

D. 6

Hướng dẫn giải

Ta có: $\log_3 \left(\log_{\frac{1}{2}} x \right) \geq 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x \geq 1 \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{2}$

Nên $a = 0, b = 1, c = 2$, do đó $a + b + c = 3$

Chọn A.

Ví dụ 2: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}} \left[\log_2 (2 - x^2) \right] > 0$ là $S = (a; b) \setminus \{0\}$. Tính $a + 3b$

A. 3

B. 2

C. -2

D. 0

Hướng dẫn giải

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}} \left[\log_2 (2 - x^2) \right] > 0 \Leftrightarrow 0 < \log_2 (2 - x^2) < 1 \Leftrightarrow 1 < 2 - x^2 < 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < 1 \\ x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$. Nên $a = -1; b = 1$. Do đó $a + 3b = 2$

Chọn B.

Ví dụ 3: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{2}{3}} \left[\log_3 |x - 3| \right] \geq 0$

A. 7

B. 4

C. 6

D. 5

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 3 \\ \log_3 |x - 3| > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ |x - 3| > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < 2 \end{cases}$

Ta có: $\log_{\frac{2}{3}} \left[\log_3 |x - 3| \right] \geq 0 \Leftrightarrow 0 < \log_3 |x - 3| \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |x - 3| \leq 3 \\ |x - 3| > 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x - 3 \leq 3 \\ -1 > x - 3 \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 < x \leq 6 \\ 2 > x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0; 2) \cup (4; 6]$

Vậy số nghiệm nguyên của bất phương trình là 4

Chọn B.

Ví dụ 4: Bất phương trình $\max \left\{ \log_3 x, \log_{\frac{1}{2}} x \right\} < 3$ có tập nghiệm là

A. $(-\infty; 27)$

B. $(8; 27)$

C. $\left(\frac{1}{8}; 27 \right)$

D. $(27; +\infty)$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x > 0$

$$\text{Ta có } \max \left\{ \log_3 x, \log_{\frac{1}{2}} x \right\} < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x < 3 \\ \log_{\frac{1}{2}} x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 27 \\ x > \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{8} < x < 27$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = \left(\frac{1}{8}; 27 \right)$

Chọn C.

Bài toán 2. Bất phương trình theo một hàm số lôgarit



Phương pháp giải

Ví dụ: Số nghiệm nguyên của bất phương trình

$$\log_{\sqrt{2}}^2(2x) - 2\log_2(4x^2) - 8 \leq 0 \text{ là}$$

- A. Vô số B. 2
C. 0 D. 1

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\log_{\sqrt{2}}^2(2x) - 2\log_2(4x^2) - 8 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4\log_2^2(2x) - 4\log_2(2x) - 8 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \log_2(2x) \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 2x \leq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq x \leq 2$$

Bất phương trình có 2 nghiệm nguyên.

Chọn B.

Bước 1. Sử dụng công thức lôgarit biến đổi về lôgarit cùng cơ số

Bước 2. Giải như dạng 1.



Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{2 - \ln x} + \frac{1}{\ln x} > 2$ là $S = (a; e^b) \setminus \{e^c\}$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $a + b + c$

- A. 3 B. 2 C. 4 D. 6

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \frac{2 - 2\ln x \cdot (2 - \ln x)}{(2 - \ln x) \cdot \ln x} > 0 \Leftrightarrow \frac{2\ln^2 x - 4\ln x + 2}{(2 - \ln x) \cdot \ln x} > 0$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
VT	-	+	0	+	-

$$\text{Do đó: } \begin{cases} 0 < \ln x < 2 \\ \ln x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < e^2 \\ x \neq e \end{cases} \text{ nên } a = 1, b = 2, c = 1 \text{ suy ra } a + b + c = 4$$

Chọn C.

Ví dụ 2: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_3 x + \log_{3x} 3^6 \leq 3$ là

- A. 9 B. 0 C. 11 D. 5

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \log_3 x + \frac{1}{\log_{3^6} 3x} < 3 \Leftrightarrow \log_3 x + \frac{6}{1 + \log_3 x} - 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_3^2 x - 2\log_3 x + 3}{\log_3 x + 1} \leq 0 \Leftrightarrow \log_3 x + 1 < 0 \text{ vì } \log_3^2 x - 2\log_3 x + 3 > 0, \forall x > 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x < -1 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{3} \text{ nên không có giá trị nguyên thỏa mãn bài toán.}$$

Chọn B.

Ví dụ 3: Bất phương trình $\log_{\frac{2}{3}}(2x^2 - x - 1) > 0$ có tập nghiệm là $(a; b) \cup (c; d)$. Tính tổng $a + b + c + d$

A. $\frac{3}{2}$

B. 0

C. 1

D. $-\sqrt{17}$

Hướng dẫn giải

Ta có $\log_{\frac{2}{3}}(2x^2 - x - 1) > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 1 > 0 \\ 2x^2 - x - 1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \vee x > 1 \\ \frac{1 - \sqrt{17}}{4} < x < \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{17}}{4} < x < -\frac{1}{2} \\ 1 < x < \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1 - \sqrt{17}}{4}; b = -\frac{1}{2} \\ c = 1; d = \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

Vậy $a + b + c + d = 1$

Chọn C

Bài toán 4. Mũ hóa hoặc lấy lôgarit hai vế



Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Bất phương trình $x^{-2+\log x} < 1000$ có tất cả bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 999

B. 1000

C. Vô số

D. 1001

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x > 0$

Ta có:

$$x^{-2+\log x} < 1000 \Leftrightarrow \log(x^{-2+\log x}) < \log 1000$$

$$\Leftrightarrow (\log x - 2)\log x < 3 \Leftrightarrow \log^2 x - 2\log x - 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow -1 < \log x < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{10} < x < 1000 \text{ nên bất phương trình có 999 nghiệm nguyên.}$$

Chọn A.

Chú ý: khi cơ số $a > 1$, giữ nguyên chiều bất phương trình; $0 < a < 1$ đảo chiều bất phương trình.

Ví dụ 2: Biết tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{6}}[\log_3(x-2)] > 0$ là khoảng $(a; b)$. Tính $b - a$

A. 2

B. 4

C. 3

D. 5

Hướng dẫn giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x - 2 > 0 \\ \log_3(x - 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x - 2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$$

$$\log_{\frac{\pi}{6}}[\log_3(x - 2)] > 0 \Leftrightarrow \log_3(x - 2) < 1 \Leftrightarrow x - 2 < 3 \Leftrightarrow x < 5$$

So với điều kiện, tập nghiệm bất phương trình $S = (3; 5)$

Do đó: $b - a = 5 - 3 = 2$

Chọn A.

Bài toán 5. Đặt ẩn phụ

► **Phương pháp giải**

Bước 1. Đặt $t = \log_a f(x) \Leftrightarrow f(x) = a^t$

$$\Rightarrow \log_a^n f(x) = t^n, \log_{f(x)} a = \frac{1}{t}, t \neq 0$$

Bước 2. Chuyển phương trình về phương trình ẩn t

Bước 3. Giải phương trình và kết hợp điều kiện

Ví dụ: Có bao nhiêu giá trị nguyên $x \in (0; 30)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}} x - 5 \log_3 x + 6 > 0$?

A. 9

B. 10

C. 26

D. 27

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x > 0$

Xét phương trình: $\log_{\frac{1}{3}} x - 5 \log_3 x + 6 > 0$

$$\Leftrightarrow (-\log_3 x)^2 - 5 \log_3 x + 6 > 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_3 x)^2 - 5 \log_3 x + 6 > 0 \quad (1)$$

Đặt $t = \log_3 x$

$$(1) \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 > 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 2)(t - 3) > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t < 2 \\ t > 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_3 x < 2 \\ \log_3 x > 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 9 \\ x > 27 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn})$$

Do $x \in (0; 30)$ nên có 10 giá trị thỏa mãn.

Chọn B.



Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{\log_2 \frac{x}{2}}{\log_2 x} - \frac{\log_2 x^2}{\log_2 x - 1} \leq 1$

A. $\left(0; \frac{1}{2}\right] \cup (1; \sqrt{2}] \cup (2; +\infty)$

B. $\left(0; \frac{1}{2}\right] \cup (1; \sqrt{2}]$

C. $\left(0; \frac{1}{2}\right] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$

D. $\left(0; \frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty)$

Hướng dẫn giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ x^2 > 0 \\ \log_2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \neq 2$$

$$\frac{\log_2 \frac{x}{2}}{\log_2 x} - \frac{\log_2 x^2}{\log_2 - 1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\log_2 x - 1}{\log_2 x} - \frac{2 \log_2 x}{\log_2 - 1} \leq 1$$

Đặt $t = \log_2 x$

$$\text{Bất phương trình trở thành } \frac{t-1}{t} - \frac{2t}{t-1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-2t^2 - t + 1}{t(t-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t > 1 \\ 0 < t \leq \frac{1}{2} \\ t \leq -1 \end{cases}$$

$$+ \quad \text{Với } t > 1: \log_2 x > 1 \Leftrightarrow x > 2$$

$$+ \quad \text{Với } 0 < t \leq \frac{1}{2}: 0 < \log_2 x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 < x \leq \sqrt{2}$$

$$+ \quad \text{Với } t \leq -1: \log_2 x \leq -1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

Kết hợp với điều kiện, bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup (1; \sqrt{2}] \cup (2; +\infty)$

Chọn A.

Ví dụ 2: Biết rằng bất phương trình $\log_2(5^x + 2) + 2 \cdot \log_{(5^x+2)} 2 > 3$ có tập nghiệm là $S = (\log_a b; +\infty)$, với a, b là các số nguyên dương nhỏ hơn 6 và $a \neq 1$. Tính $P = 2a + 3b$

A. $P = 11$

B. $P = 16$

C. $P = 18$

D. $P = 7$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \log_2(5^x + 2) + 2 \cdot \log_{(5^x+2)} 2 > 3 \Leftrightarrow \log_2(5^x + 2) + 2 \cdot \frac{1}{\log_2(5^x + 2)} > 3 \quad (*)$$

$$\text{Đặt } t = \log_2(5^x + 2) > 1. \text{ Khi đó } (*) \text{ trở thành } t + \frac{2}{t} > 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 > 0 \Leftrightarrow t > 2 \text{ (do } t > 1)$$

$$\text{Với } t > 2 \text{ thì } \log_2(5^x + 2) > 2 = \log_2 2^3 \Leftrightarrow 5^x > 2 \Leftrightarrow x > \log_5 2$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a = 5 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow P = 2a + 3b = 16$$

Chọn B.

Bài toán 6. Bất phương trình tích



Ví dụ mẫu

Ví dụ: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_4(x-1) \cdot \log_5(x+1) \leq \log_{20}(x-1)$ có dạng là $S = [a^{\log_{ab} b} - c; d]$ với a, b, c, d là các số nguyên dương. Tính tổng $a + b + c + d$

A. 11

B. 13

C. 12

D. 5

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x > 1$, bất phương trình trở thành:

$$\log_4(x-1) \cdot \log_5(x+1) - \log_{20} 4 \cdot \log_{20}(x-1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_4(x-1) \cdot [\log_5(x+1) - \log_{20} 4] \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4(x-1) \leq 0 \\ \log_5(x+1) \geq \log_{20} 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \log_4(x-1) \geq 0 \\ \log_5(x+1) \leq \log_{20} 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 5^{\log_{20} 4} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow 5^{\log_{20} 4} - 1 \leq x \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 5^{\log_{20} 4} - 1 \end{cases}$$

Nên $a=5, b=4, c=1, d=2$. Từ đó ta có: $a+b+c+d=12$

Chọn C.

Bài toán 7. Bất phương trình lôgarit chứa tham số



Phương pháp giải

Ví dụ: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 10)$ để bất phương trình $4(\log_2 \sqrt{x})^2 + \log_2 x + m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in (1; 64)$

A. 8

B. 11

C. 10

D. 9

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x > 0$

Ta có: $4(\log_2 \sqrt{x})^2 + \log_2 x + m \geq 0$

$\Leftrightarrow \log_2^2 x + \log_2 x + m \geq 0$ (*)

Đặt $\log_2 x = t$

Lại có $1 < x < 64 \Leftrightarrow 0 < \log_2 x < 6 \Leftrightarrow 0 < t < 6$

Bất phương trình (*) có dạng

$t^2 + t + m \geq 0 \Leftrightarrow t^2 + t \geq -m$

Ta tìm m để $t^2 + t \geq -m$ có nghiệm với $0 < t < 6$

Xét hàm $f(t) = t^2 + t$

$f'(t) = 2t + 1, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$

Lập bảng biến thiên ta có:

t	0	6
$f'(t)$	+	
$f(t)$	0	42

Vậy phương trình $t^2 + t \geq -m$ có nghiệm với $0 < t < 6 \Leftrightarrow -m < 0 \Leftrightarrow m > 0$

Chọn D.



Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 10)$ để bất phương trình $\ln^2 x - m \ln x + m + 3 \leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x > 3$

A. 6

B. 4

C. 1

D. 0

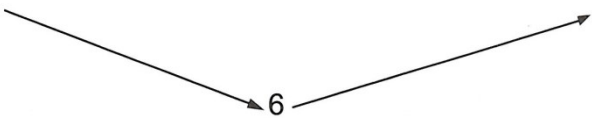
Hướng dẫn giải

Ta có: $\ln^2 x - m \ln x + m + 3 \leq 0 \Leftrightarrow m(\ln x - 1) \leq \ln^2 x + 3 \Leftrightarrow m \leq \frac{\ln^2 x + 3}{\ln x - 1}$

Đặt $t = \ln x; t \geq \ln 3$. Ta xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 + 3}{t - 1}$

$f(t) = \frac{t^2 + 3}{t - 1} = t + 1 + \frac{4}{t - 1} \Rightarrow f'(t) = 1 - \frac{4}{(t - 1)^2};$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{(t - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -1 \end{cases}$

x	$\ln 3$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

Vậy bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x > 3$ khi $m \geq 6$ khi đó có 4 giá trị nguyên m thỏa mãn

Chọn B.

Ví dụ 2: Số giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\log 5 + \log(x^2 + 1) \geq \log(mx^2 + 4x + m)$ nghiệm đúng với mọi x là

A. 2

B. 4

C. 1

D. 0

Hướng dẫn giải

Điều kiện xác định:

$$mx^2 + 4x + m > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 16 - 4m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m > 2 \\ m < -2 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$$

$$\log 5 + \log(x^2 + 1) \geq \log(mx^2 + 4x + m) \Leftrightarrow \log 5(x^2 + 1) \geq \log(mx^2 + 4x + m)$$

$$\Leftrightarrow 5(x^2 + 1) \geq (mx^2 + 4x + m) \Leftrightarrow (5 - m)x^2 - 4x + 5 - m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 - m > 0 \\ 16 - 4(5 - m)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ 4 \geq (5 - m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ -2 \leq 5 - m \\ 5 - m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ m \leq 7 \\ m \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq m$$

Có hai giá trị nguyên thỏa mãn $m \in \{3; 4\}$

Chọn A.

► Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Giải bất phương trình $\log_2(3x - 2) > \log_2(6 - 5x)$ được tập nghiệm là $(a; b)$. Hãy tính tổng $S = a + b$

A. $S = \frac{26}{5}$

B. $S = \frac{11}{5}$

C. $S = \frac{28}{15}$

D. $S = \frac{8}{3}$

Câu 2: Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{4}}(x^2 - 1) < \log_{\frac{\pi}{4}}(3x - 3)$

A. $S = (1; 2)$

B. $S = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

C. $S = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$

D. $S = (2; +\infty)$

Câu 3: Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) > \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$ có tập nghiệm là

A. $(3; +\infty)$

B. $(-\infty; 3)$

C. $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$

D. $(-2; 3)$

Câu 4: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,8}(x^2+x) < \log_{0,8}(-2x+4)$ là

A. $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$

B. $(-4; 1)$

C. $(-\infty; -4) \cup (1; 2)$

D. $(1; 2)$

Câu 5: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(3x^2+1) < \log_{\frac{1}{2}}(4x)$

A. $S = \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$

B. $S = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$

C. $S = \left(\frac{1}{3}; 1\right)$

D. $S = \left[0; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$

Câu 6: Tập nghiệm của bất phương trình $\ln(x^2-3x+2) \geq \ln(5x+2)$ là

A. $(-\infty; 0] \cup [8; +\infty)$

B. $[0; 1) \cup (2; 8]$

C. $\left[-\frac{2}{5}; 0\right] \cup [8; +\infty)$

D. $[8; +\infty)$

Câu 7: Bất phương trình $\log_4(x+7) > \log_2(x+1)$ có tập nghiệm là

A. $(1; 4)$

B. $(-1; 2)$

C. $(5; +\infty)$

D. $(-\infty; 1)$

Câu 8: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3 x < \log_{\sqrt{3}}(12-x)$ là

A. $(0; 12)$

B. $(9; 16)$

C. $(0; 9)$

D. $(0; 16)$

Câu 9: Với m là tham số thực dương khác 1. Hãy tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_m(2x^2+x+3) \leq \log_m(3x^2-x)$, biết rằng $x=1$ là một nghiệm của bất phương trình.

A. $S = (-2; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right]$

B. $S = (-1; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 2\right]$

C. $S = [-1; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right]$

D. $S = (-1; 0) \cup (1; 3]$

Câu 10: Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\ln(x-1) + \ln(x+1)}$ là

A. $(1; +\infty)$

B. $(-\infty; \sqrt{2})$

C. $\emptyset$

D. $[\sqrt{2}; +\infty)$

Câu 11: Bất phương trình $\log_{\frac{3}{2}} x \leq \log_{\frac{9}{4}}(x-1)$ tương đương với bất phương trình nào sau đây?

A. $\log_{\frac{3}{2}} x \leq \log_{\frac{9}{4}} x - \log_{\frac{9}{4}} 1$

B. $2 \log_{\frac{3}{2}} x \leq \log_{\frac{3}{2}}(x-1)$

C. $\log_{\frac{9}{4}} x \leq \log_{\frac{3}{2}}(x-1)$

D. $\log_{\frac{3}{2}} x \leq 2 \log_{\frac{3}{2}}(x-1)$

Câu 12: Tất cả các giá trị của m để bất phương trình $\log_2(7x^2+7) \geq \log_2(mx^2+4x+m)$ có nghiệm đúng với mọi giá trị của x là

A. $m \leq 5$

B. $2 < m \leq 5$

C. $m \geq 7$

D. $2 \leq m \leq 5$

Câu 13: Có bao nhiêu số nguyên dương x thỏa mãn điều kiện $\log(x-40) + \log(60-x) < 2$?

- A. 20 B. 18 C. 21 D. 19

Câu 14: Tập nghiệm của bất phương trình $2\log_2(x-1) \leq \log_2(5-x) + 1$ là

- A. $(1; 5)$ B. $[1; 3]$ C. $(1; 3]$ D. $[3; 5]$

Câu 15: Bất phương trình $2\log_3(4x-3) + \log_{\frac{1}{3}}(2x+3) \leq 2$ là

- A. $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$ B. $\left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$ C. $\left(\frac{3}{4}; 3\right]$ D. $\left[\frac{3}{4}; 3\right]$

Câu 16: Bất phương trình $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x > \log_{20} x$ có tập nghiệm là

- A. $[1; +\infty)$ B. $(0; 1]$ C. $(0; 1)$ D. $(1; +\infty)$

Câu 17: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x+2) - \log_2(x-2) < 2$ là

- A. $\left(\frac{10}{3}; +\infty\right)$ B. $(-2; +\infty)$ C. $(2; +\infty)$ D. $(-2; 2)$

Câu 18: Tập nghiệm của bất phương trình $\log(x^2 + 2x - 3) + \log(x+3) - \log(x-1) < 0$ là

- A. $(-4; -2) \cup (1; +\infty)$ B. $(-2; 1)$ C. $(1; +\infty)$ D. $\emptyset$

Câu 19: Bất phương trình $\log_2(2x-1) - \log_{\frac{1}{2}}(x-2) \leq 1$ có tập nghiệm là

- A. $(2; +\infty)$ B. $(2; 3]$ C. $\left(2; \frac{5}{2}\right]$ D. $\left[\frac{5}{2}; 3\right]$

Câu 20: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x) > \log_2(x^2 - x) - 1$.

- A. $S = (2; +\infty)$ B. $S = (1; 2)$ C. $S = (0; 2)$ D. $S = (1; 2]$

Câu 21: Cho bất phương trình $\log_{0,2} x - \log_5(x-2) < \log_{0,2} 3$. Nghiệm của bất phương trình đã cho là

- A. $x > 3$ B. $2 \leq x < 3$ C. $x \geq 2$ D. $2 < x < 3$

Câu 22: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}}\left(x + \frac{1}{2}\right) \geq 1$ là

- A. Vô số B. 0 C. 2 D. 3

Câu 23: Tập nghiệm của bất phương trình $\log(x+1) + \log x > \log 20$ là

- A. $(-5; 4)$ B. $(-\infty; -5)$ C. $(-\infty; -5) \cup (4; +\infty)$ D. $(4; +\infty)$

Câu 24: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x+1) - 2\log_2(5-x) < 1 - \log_2(x-2)$ chứa khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; 2)$ B. $(-4; 3)$ C. $(2; 3)$ D. $(-2; 5)$

Câu 25: Bất phương trình $3\log_3(x-1) + \log_{\sqrt[3]{3}}(2x-1) \leq 3$ có tập nghiệm là

- A. $(1; 2]$ B. $[1; 2]$ C. $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$ D. $\left(-\frac{1}{2}; 2\right]$

Câu 26: Nghiệm của bất phương trình $\log_5 x^3 + \log_{0,2} x + \log_{\sqrt[3]{25}} x \leq 7$ là

- A. $x \leq 25$ B. $0 < x \leq 25$ C. $x \geq 10$ D. $0 < x \leq 10$

Câu 27: Nghiệm của bất phương trình $2\log_2 \sqrt{x+1} \leq 2 - \log_2(x-2)$ là

A. $2 < x \leq 3$

B. $x < -2$

C. $3 < x$

D. $-2 < x < 3$

Câu 28: Nghiệm của bất phương trình $\log_2(\sqrt{3x+1}+6)-1 \geq \log_2(7-\sqrt{10-x})$ là

A. $x \leq 1$

B. $x \leq \frac{369}{49}$

C. $x \geq \frac{369}{49}$

D. $1 \leq x \leq \frac{369}{49}$

Câu 29: Nghiệm của bất phương trình $\log_3 \sqrt{x^2-5x+6} + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x-2} < \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}}(x+3)$ là

A. $x > 5$

B. $x > 3$

C. $3 < x < 4$

D. $x > \sqrt{10}$

Câu 30: Giá trị nào của tham số m thì bất phương trình $\log_2(3x^2-2mx-m^2-2m+4) > 1 + \log_2(x^2+2)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A. $m < -1 \vee m > 0$

B. $-1 < m < 0$

C. $m > 0$

D. $m < -1$

Câu 31: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x - 5 \log_2 x - 6 \leq 0$ là

A. $S = \left[\frac{1}{2}; 64\right]$

B. $S = \left(0; \frac{1}{2}\right]$

C. $S = [64; +\infty)$

D. $S = \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup [64; +\infty)$

Câu 32: Nghiệm của bất phương trình $\log_2^2 x - 6 \log_2 x > -5$ là

A. $\begin{cases} x > 32 \\ x < 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x > 5 \\ x < 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x > 32 \\ 0 < x < 2 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x \geq 32 \\ x \leq 1 \end{cases}$

Câu 33: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2(2-x) + 4 \log_2(2-x) \geq 5$

A. $S = (-\infty; 0] \cup \left[\frac{63}{32}; 2\right)$

B. $S = (-\infty; 0] \cup \left[\frac{63}{32}; +\infty\right)$

C. $S = [2; +\infty)$

D. $S = (-\infty; 0]$

Câu 34: Nghiệm của bất phương trình $(\ln x)^2 - 2 \ln x > -1$ là

A. $\begin{cases} x \neq e \\ x > 0 \end{cases}$

B. $x \neq 1$

C. $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

D. $x \in \mathbb{R}$

Câu 35: Nghiệm của bất phương trình $\log_2^2 - 3 \log_2 x \leq -2$ là

A. $1 < x < 2$

B. $2 < x < 4$

C. $2 \leq x \leq 4$

D. $1 \leq x \leq 2$

Câu 36: Tập nghiệm của bất phương trình $\ln^2 x - 3 \ln x + 2 \geq 0$ là

A. $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$

B. $[e^2; +\infty)$

C. $(-\infty; e] \cup [e^2; +\infty)$

D. $(0; e] \cup [e^2; +\infty)$

Câu 37: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3 \frac{3}{x} \cdot \log_3 x - \log_3 \frac{x^3}{\sqrt{3}} > \frac{1}{2} + 2 \log_3 \sqrt{x}$ là

A. $(0; +\infty)$

B. $\left(0; \frac{\sqrt{3}}{8}\right) \cup (1; +\infty)$

C. $\left(\frac{\sqrt{3}}{8}; 1\right)$

D. $\left(\frac{1}{27}; 1\right)$

Câu 38: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2^2 x - 6 \log_4 x - 4 < 0$ là

A. $\left(\frac{1}{2}; 16\right)$

B. $(-1; 4)$

C. $(-1; 16)$

D. $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$

Câu 39: Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\ln^2 x - 3 \ln x + 2}$ là

A. $(0; e] \cup [e^2; +\infty)$

B. $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$

C. $(-\infty; e] \cup [e^2; +\infty)$

D. $[e^2; +\infty)$

Câu 40: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\sqrt{2}}^2(2x) - 2\log_2(4x^2) - 8 \leq 0$

- A. $S = \left[\frac{1}{4}; 2\right]$ B. $S = (-\infty; 2]$ C. $S = [-2; 2]$ D. $S = (0; 2]$

Câu 41: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\sqrt{2}}^2 x - 10\log_2 \sqrt{x} + 1 > 0$ là

- A. $(2; +\infty)$ B. $\left(-\infty; 2^{\frac{1}{4}}\right) \cup (2; +\infty)$ C. $\left(0; 2^{\frac{1}{4}}\right) \cup (2; +\infty)$ D. $\left(0; 2^{\frac{1}{4}}\right)$

Câu 42: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2^2 x + 9\log_8 x \geq \frac{5}{2}\log_{4\sqrt{2}} 16$ là

- A. $\left[\frac{1}{16}; 2\right)$ B. $\left(0; \frac{1}{16}\right] \cup [2; +\infty)$ C. $\left[\frac{1}{16}; +\infty\right)$ D. $[2; +\infty)$

Câu 43: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2^2(2-x) - 8\log_{0,25}(2-x) - 5 \geq 0$ là

- A. $(-\infty; 0] \cup \left[\frac{63}{32}; 2\right)$ B. $\left(-\infty; \frac{63}{32}\right]$ C. $(-\infty; -5] \cup [1; +\infty)$ D. $(-\infty; 2)$

Câu 44: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\sqrt{2}}^2 x - 5\log_2 x + 1 < 0$ là

- A. $\left(2^{\frac{1}{4}}; 2\right)$ B. $\left(0; 2^{\frac{1}{4}}\right) \cup (2; +\infty)$ C. $(2; +\infty)$ D. $(0; 2)$

Câu 45: Cho bất phương trình $\log_4 x \cdot \log_2(4x) + \log_{\sqrt{2}}\left(\frac{x^3}{2}\right) < 0$. Nếu đặt $t = \log_2 x$, ta được bất phương trình nào sau đây?

- A. $t^2 + 11t - 2 < 0$ B. $t^2 + 11t - 3 < 0$ C. $t^2 + 14t - 2 < 0$ D. $t^2 + 14t - 4 < 0$

Câu 46: Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_3^2 x^5 - 25\log_3 x^2 - 750 \leq 0$ là

- A. 925480 B. 38556 C. 378225 D. 388639

Câu 47: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_4(3^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{4}} \frac{3^x - 1}{16} \leq \frac{3}{4}$ là

- A. $(1; 2] \cup [3; +\infty)$ B. $(-1; 1] \cup [4; +\infty)$
C. $(0; 4] \cup [5; +\infty)$ D. $(0; 1] \cup [2; +\infty)$

Câu 48: Bất phương trình $2\log_{\frac{2}{3}} x \cdot \log_{\frac{3}{2}} x + 2\log_{\frac{2}{3}} x - 4\log_{\frac{3}{2}} x - 4 > 0$ có nghiệm là

- A. $x < \frac{2}{3}$ B. $x < \frac{4}{9}$ C. $x > \frac{4}{9}$ D. $\frac{4}{9} < x < \frac{2}{3}$

Câu 49: Bất phương trình $\log_4 x - \log_x 4 \leq -\frac{3}{2}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên trên đoạn $[1; 5]$

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 50: Nghiệm của bất phương trình $\log_x 100 - \frac{1}{2}\log_{100} x > 0$ là

- A. $1 < x < 10^{2\sqrt{2}}$ B. $\begin{cases} x < \frac{1}{10^{2\sqrt{2}}} \\ 1 < x < 10^{2\sqrt{2}} \end{cases}$ C. $0 < x < \frac{1}{10^{2\sqrt{2}}}$ D. $\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{10^{2\sqrt{2}}} \\ 1 < x < 10^{2\sqrt{2}} \end{cases}$

Câu 51: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $2\log_5 x - \log_x 125 < 1$ là

- A. 1 B. 9 C. 10 D. 11

Câu 52: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_3 x + \log_{3x} 27 \leq 3$ là

A. 9

B. 0

C. 5

D. 11

Câu 53: Giải bất phương trình $\frac{\ln x + 2}{\ln x - 1} < 0$ ta được tập nghiệm là

A. $\left(\frac{1}{e^2}; e\right)$

B. $(-\infty; e)$

C. $\left(-\infty; \frac{1}{e^2}\right)$

D. $(e; +\infty)$

Câu 54: Mệnh đề nào sau đây đúng khi phát biểu về bất phương trình $\frac{3}{4 - 2\log_2 x} + \frac{1}{2 - 3\log_3 x} < 1$

A. Tập xác định của bất phương trình đã cho là $T = (0; +\infty)$

B. Tập xác định của bất phương trình đã cho là $T = [0; +\infty)$

C. Tập xác định của bất phương trình đã cho là $T = \left(0; \frac{8}{27}\right) \cup \left(\frac{8}{27}; 4\right) \cup (4; +\infty)$

D. Tập xác định của bất phương trình đã cho là $T = \left(0; \sqrt[3]{9}\right) \cup \left(\sqrt[3]{9}; 4\right) \cup (4; +\infty)$

Câu 55: Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{2 - \ln x} + \frac{1}{\ln x} > 2$ là

A. $(-\infty; 0) \cup (1; e) \cup (e^2; +\infty)$

B. $(-\infty; 1)$

C. $(1; e^2) \setminus \{e\}$

D. $(-\infty; e) \cup (e^2; +\infty)$

Câu 56: Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{\log_6 e} > \frac{1}{\log_{4-x} e} + \frac{1}{\log_{3+x} e}$ là

A. $(-3; -2) \cup (3; 4)$

B. $(-3; 4) \cup (-3; 2)$

C. $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$

D. $(-\infty; -3) \cup (4; +\infty)$

Câu 57: Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{4 + \log_2 x} + \frac{2}{2 - \log_2 x} \leq 1$ là

A. $\left(0; \frac{1}{16}\right) \cup \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right] \cup (2; 4) \cup (4; +\infty)$

B. $\left(0; \frac{1}{16}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup (2; 4) \cup (4; +\infty)$

C. $\left(0; \frac{1}{16}\right) \cup \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right] \cup [2; 4] \cup (4; +\infty)$

D. $\left(0; \frac{1}{16}\right) \cup \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right] \cup (4; +\infty)$

Câu 58: Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{16\log_2 x}{\log_2 x^2 + 3} - \frac{3\log_2 x^2}{\log_2 x + 1} < 0$ là

A. $(0; 1) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$

B. $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$

C. $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; \sqrt{2})$

D. $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}; 1\right) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$

Câu 59: Tìm m để bất phương trình $\log^2 x - m \log x + m + 3 \leq 0$ có nghiệm $x > 1$

A. $\begin{cases} m < -3 \\ m \geq 6 \end{cases}$

B. $-3 < m \leq 6$

C. $m < -3$

D. $m \geq 6$

Câu 60: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_x [\log_9 (3^x - 9)] < 1$ là

A. $\emptyset$

B. $\mathbb{R}$

C. $(3; +\infty)$

D. $(\log_3 10; +\infty)$

Câu 61: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_x \left[\log_4 (2^x - 4) \right] \leq 1$ là

- A. $\mathbb{R}$ B. $\emptyset$ C. $(\log_2 5; +\infty)$ D. $(2; +\infty)$

Câu 62: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{2x} (x^2 - 5x + 6) < 1$ là

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 63: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{x}{5}} (x^2 - 8x + 16) \geq 0$ là

- A. $[3; +\infty) \setminus \{4\}$ B. $[3; +\infty)$ C. $(5; +\infty)$ D. $[3; +\infty) \setminus \{5\}$

Câu 64: Bất phương trình $\log_2 (2^x + 1) + \log_3 (4^x + 2) \leq 2$ có tập nghiệm

- A. $(-\infty; 0)$ B. $[0; +\infty)$ C. $(-\infty; 0]$ D. $(0; +\infty)$

Câu 65: Giải bất phương trình $\log_x (\log_3 (9^x - 72)) \leq 1$ ta được:

- A. $x \leq 2$ B. $\begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$ C. $\log_9 72 \leq x \leq 2$
D. $\log_9 73 \leq x \leq 2$

Câu 66: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 (7 \cdot 10^x - 5 \cdot 25^x) > 2x + 1$ là

- A. $[-1; 0)$ B. $(-1; 0)$ C. $[-1; 0)$ D. $[-1; 0]$

Câu 67: Bất phương trình $2\log_9 (9^x + 9) + \log_{\frac{1}{3}} (28 - 2 \cdot 3^x) \geq x$ có tập nghiệm là

- A. $(-\infty; -1] \cup [2; \log_3 14]$ B. $(-\infty; -1] \cup [2; \log_3 14)$
C. $(-\infty; -1] \cup \left[2; \frac{12}{5} \right]$ D. $(-\infty; \log_3 14]$

Câu 68: Với giá trị nào của tham số m thì bất phương trình $\log_m (x^2 - 2x + m + 5) > 1$ có vô số nghiệm

- A. $m > 1$ B. $0 < m < 1$ C. $m \geq 1$ D. $m > 0$

ĐÁP ÁN BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Phương trình lôgarit

1- D	2- D	3- B	4- A	5- B	6- D	7- D	8- C	9- D	10- B
11- B	12- D	13- D	14- C	15- A	16- A	17- D	18- B	19- B	20- D
21- B	22- A	23- A	24- A	25- B	26- A	27- C	28- D	29- A	30- C
31- D	32- A	33- B	34- C	35- D	36- B	37- A	38- C	39- C	40- D
41- C	42- A	43- C	44- A	45- C	46- D	47- A	48- A	49- B	50- A
51- B	52- C	53- D	54- C	55- B	56- D	57- A	58- C	59- B	60- A
61- D	62- A	63- B	64- B	65- A	66- C	67- B	68- B	69- A	70- B
71- C	72- A	73- A	74- C						

Dạng 2. Bất phương trình lôgarit

1- B	2- D	3- C	4- C	5- A	6- C	7- B	8- C	9- C	10- D
11- B	12- B	13- B	14- C	15- C	16- D	17- A	18- D	19- C	20- B
21- A	22- B	23- D	24- C	25- A	26- B	27- A	28- D	29- C	30- B
31- A	32- C	33- A	34- A	35- C	36- D	37- D	38- A	39- A	40- A
41- C	42- B	43- A	44- A	45- D	46- A	47- D	48- D	49- A	50- D
51- C	52- A	53- A	54- D	55- C	56- A	57- D	58- C	59- A	60- D
61- C	62- C	63- D	64- C	65- D	66- B	67- B	68- A		