

## BÀI 4. HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LÔGARIT

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

#### 1. Hàm số mũ

##### Định nghĩa

Hàm số  $y = a^x$  ( $a > 0$ ;  $a \neq 1$ ) được gọi là hàm số mũ cơ số  $a$ .

##### Tập xác định

Hàm số  $y = a^x$  ( $a > 0$ ;  $a \neq 1$ ) có tập xác định là  $\mathbb{R}$ .

##### Đạo hàm

Hàm số  $y = a^x$  ( $a > 0$ ;  $a \neq 1$ ) có đạo hàm tại mọi  $x$ .

**Đặc biệt:**  $(e^x)' = e^x$ .

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

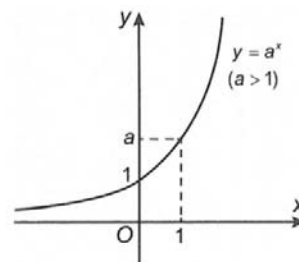
$$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \quad (a > 1);$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 \quad (0 < a < 1).$$

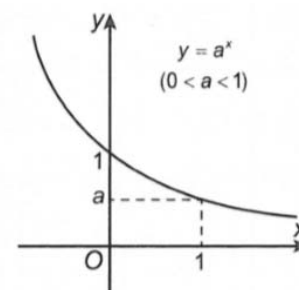
##### Sự biến thiên

- Khi  $a > 1$  hàm số luôn đồng biến.
- Khi  $0 < a < 1$  hàm số luôn nghịch biến.



##### Đồ thị

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là trục  $Ox$  và luôn đi qua các điểm  $(0;1)$ ,  $(1;a)$  và nằm phía trên trục hoành.



#### 2. Hàm số lôgarit

##### Định nghĩa

Hàm số  $y = \log_a x$  ( $a > 0$ ;  $a \neq 1$ ) được gọi là hàm số lôgarit cơ số  $a$ .

---

---

## Tập xác định

Tập xác định:  $(0; +\infty)$ .

## Đạo hàm

Hàm số  $y = \log_a x$  ( $a > 0; a \neq 1$ ) có đạo hàm tại mọi  $x$  dương và

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

**Đặc biệt:**  $(\ln x)' = \frac{1}{x}.$

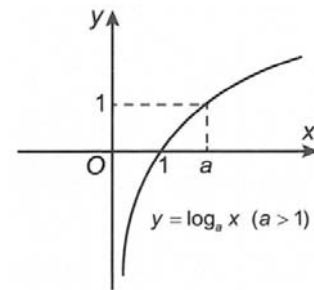
## Giới hạn đặc biệt

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty \quad (a > 1);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty \quad (0 < a < 1).$$

## Sự biến thiên

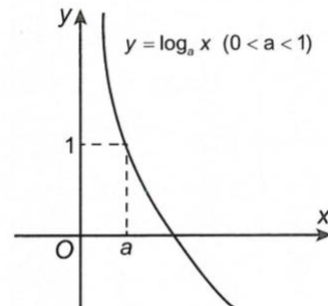
- Khi  $a > 1$  hàm số luôn đồng biến.
- Khi  $0 < a < 1$  hàm số luôn nghịch biến.



## Đồ thị

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là trục  $Oy$  và luôn đi qua các điểm  $(1; 0)$ ,  $(a; 1)$  và nằm bên phải trục tung.

**Nhận xét:** Đồ thị của các hàm số  $y = a^x$  và  $y = \log_a x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) đối xứng với nhau qua đường thẳng  $y = x$ .



## Ứng dụng

**1. Lãi đơn** là số tiền lãi chỉ tính trên số tiền gốc mà không tính trên số tiền lãi do số tiền gốc sinh ra, tức là tiền lãi của kì hạn trước không được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn kế tiếp, cho dù đến kì hạn người gửi không đến rút tiền ra.

**Công thức tính:** Khách hàng gửi vào ngân hàng  $A$  đồng với lãi đơn  $r$  (% / kì hạn) thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn

---

---

lãi sau  $n$  kì hạn ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) là:  $S_n = A + nAr = A(1 + nr)$

**2. Lãi kép** là tiền lãi của kì hạn trước nếu người gửi không rút ra thì được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn sau.

**Công thức tính:** Khách hàng gửi vào ngân hàng  $A$  đồng với lãi kép  $r$  (% / kì hạn) thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau  $n$  kì hạn ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) là:  $S_n = A(1 + r)^n$ .

$$n = \log_{(1+r)} \left( \frac{S_n}{A} \right);$$

**3. Tiền gửi hàng tháng:** Mỗi tháng gửi đúng cùng một số tiền vào một thời gian cố định.

$$r\% = \sqrt[n]{\frac{S_n}{A}} - 1;$$

**Công thức tính:** Đầu mỗi tháng, khách hàng gửi vào ngân hàng số tiền  $A$  đồng với lãi kép  $r$  (% / tháng) thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau  $n$  tháng ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) (nhận tiền cuối tháng, khi ngân hàng đã tính lãi) là  $S_n$ .

$$A = \frac{S_n}{(1 + r)^n}$$

$$n = \log_{(1+r)} \left( \frac{S_n \cdot r}{A(1 + r)} + 1 \right);$$

$$n = \log_{(1+r)} \left( \frac{S_n \cdot r}{A(1 + r)} + 1 \right);$$

Ta có 
$$S_n = \frac{A}{r} \left[ (1 + r)^n - 1 \right] (1 + r)$$

$$A = \frac{S_n \cdot r}{(1 + r) \left[ (1 + r)^n - 1 \right]}$$

#### 4. Gửi ngân hàng và rút tiền gửi hàng tháng

Gửi ngân hàng số tiền là  $A$  đồng với lãi suất  $r$  (% / tháng).  
Mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi, rút ra số tiền là  $X$  đồng.

**Công thức tính:** 
$$X = \left[ A(1 + r)^n - S_n \right] \frac{r}{(1 + r)^n - 1}.$$

Khi đó số tiền còn lại sau  $n$  tháng là

$$S_n = A(1 + r)^n - X \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

**5. Vay vốn trả góp:** Vay ngân hàng số tiền là  $A$  đồng với lãi suất  $r$  (% / tháng). Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ cách nhau đúng một tháng, mỗi hoàn nợ số tiền là  $X$  đồng và trả hết tiền nợ sau đúng  $n$  tháng.

**Công thức tính:** Cách tính số tiền còn lại sau  $n$  tháng giống hoàn toàn công thức tính gửi ngân hàng và rút tiền hàng tháng

nên ta có 
$$S_n = A(1 + r)^n - X \frac{(1 + r)^n - 1}{r}.$$

---

---

Đề sau đúng  $n$  tháng trả hết nợ thì  $S_n = 0$  nên

$$A(1+r)^n - X \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0.$$

Suy ra mỗi lần hoàn nợ số tiền là 
$$X = \frac{A(1+r)^n \cdot r}{(1+r)^n - 1}.$$

**6. Bài toán tăng lương:** Một người được lãnh lương khởi điểm là  $A$  (đồng/tháng). Cứ sau  $n$  tháng thì lương người đó được tăng thêm  $r$  (%) / tháng). Hỏi sau  $kn$  tháng, người đó lĩnh được bao nhiêu tiền?

**Công thức tính:** Lương nhận được sau  $kn$  tháng là

$$S_{kn} = An \cdot \frac{(1+r)^k - 1}{r}.$$

## 7. Bài toán tăng trưởng dân số

Công thức tính tăng trưởng dân số:

$$X_m = X_n (1+r)^{m-n}, m, n \in \mathbb{Z}^+, m \geq n$$

Trong đó:  $r$  % là tỉ lệ tăng dân số từ năm  $n$  đến năm  $m$ ;

$X_m$  dân số năm  $m$ ,  $X_n$  dân số năm  $n$ .

Từ đó ta có công thức tính tỉ lệ tăng dân số là 
$$r\% = m-n \sqrt[m-n]{\frac{X_m}{X_n}} - 1$$

## 8. Lãi kép liên tục

Gửi vào ngân hàng  $A$  đồng với lãi kép  $r$  (%) / năm) thì số tiền nhận được cả vốn lẫn lãi sau  $n$  năm ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) là:

$$S_n = A(1+r)^n.$$

Giả sử ta chia mỗi năm thành  $m$  kì hạn để tính lãi và lãi suất mỗi kì hạn là  $\frac{r}{m}$  % thì số tiền thu được sau  $n$  năm là:

$$S_n = A \left( 1 + \frac{r}{m} \right)^{m \cdot n}$$

---

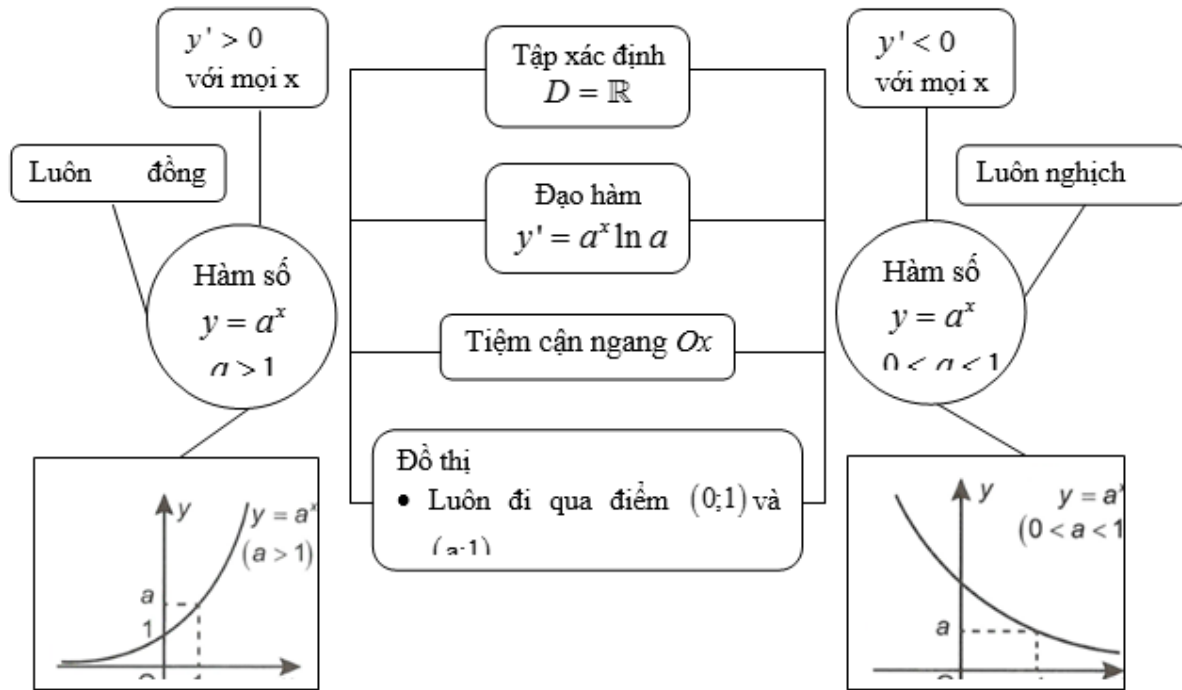
---

Khi tăng số kì hạn của mỗi năm lên vô cực, tức là  $m \rightarrow +\infty$ , gọi là hình thức lãi kép liên tục thì người ta chứng minh được số tiền nhận được cả gốc lẫn lãi là:

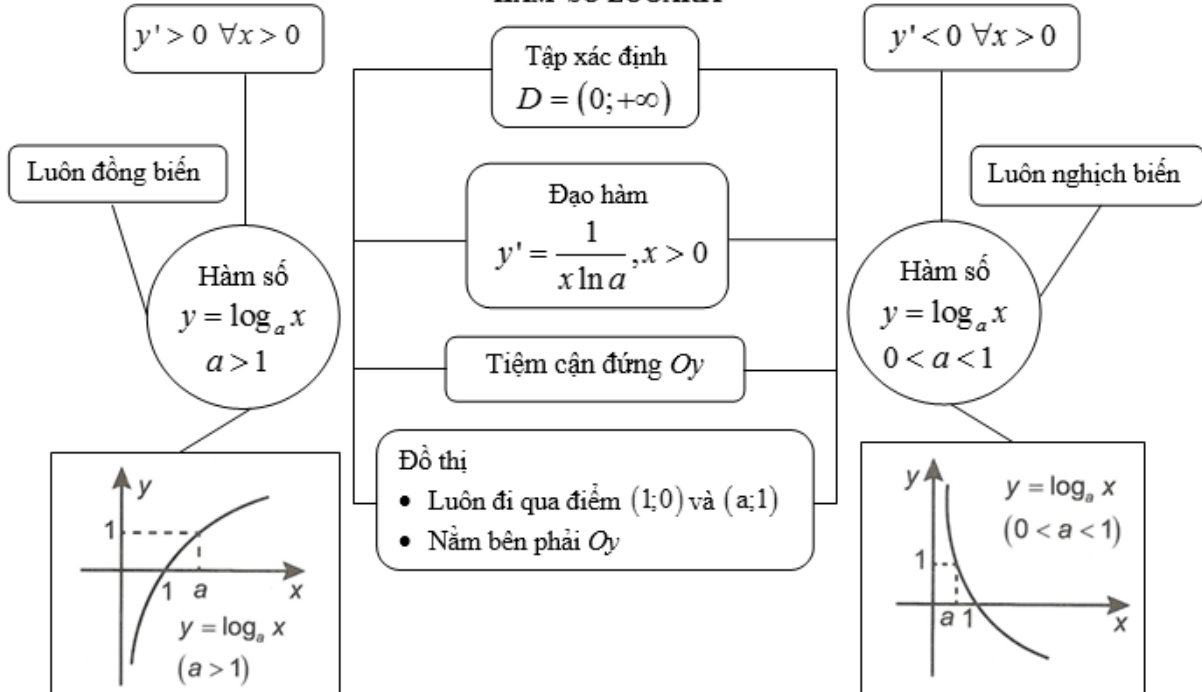
$$\boxed{S = Ae^{n.r}} \text{ (công thức tăng trưởng mũ).}$$

## SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA

### HÀM SỐ MŨ



### HÀM SỐ LÔGARIT



---

## B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

### Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số chứa mũ – lôgarit.

#### 1. Phương pháp giải

\* Hàm số  $y = a^x$  ( $a > 0; a \neq 1$ ) có tập xác định là  $\mathbb{R}$ .

\* Hàm số  $y = \log_a x$  ( $a > 0; a \neq 1$ ) có tập xác định là  $(0; +\infty)$ .

\* Tìm điều kiện của tham số để hàm số  $y = \log_a f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  trong đó  $f(x)$  là một tam thức bậc hai.

Áp dụng tính chất

- Tam thức bậc hai  $f(x) = ax^2 + bx + c > 0 \forall x \in \mathbb{R}$  khi và chỉ khi  $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ .

\* Tìm điều kiện của tham số để hàm số  $y = \log_a f(x)$  xác định trên khoảng  $D$ .

- Cô lập tham số  $m$ .
- Sử dụng phương pháp khảo sát hàm số.

#### 2. Bài tập

**Bài tập 1:** Điều kiện xác định  $D$  của hàm số  $y = \frac{1}{\sqrt{\log_9 \frac{2x}{x+1} - \frac{1}{2}}}$  là

A.  $x < -3$

B.  $x > -1$

C.  $-3 < x < -1$

D.  $0 < x < 3$

*Hướng dẫn giải*

*Chọn C*

$$\text{Hàm số xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_9 \frac{2x}{x+1} > \frac{1}{2} \\ \frac{2x}{x+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{x+1} > 9^{\frac{1}{2}} \\ \frac{2x}{x+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} > 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3}{x+1} < 0 \Leftrightarrow -3 < x < -1$$

**Bài tập 2:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \ln(x^2 - 2mx + 4)$  xác định với mọi  $x \in \mathbb{R}$ ?

A. 5

B. 2

C. 4

D. 3

*Hướng dẫn giải*

---

---

**Chọn D.**

Hàm số xác định  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ 4m^2 - 16 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 2.$$

Do  $m \in \mathbb{Z}$  nên  $m \in \{-1; 0; 1\}$

**Bài tập 3:** Tìm  $m$  để hàm số  $y = \log_2[(m+2)x^2 + 2(m+2)x + m+3]$  có tập xác định  $D = \mathbb{R}.$

A.  $m \leq -2$

B.  $m > -2$

C.  $m < -2$

D.  $m \geq -2$

*Hướng dẫn giải*

**Chọn D.**

Hàm số xác định trên  $\mathbb{R} \Leftrightarrow (m+2)x^2 + 2(m+2)x + m+3 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$ .

Trường hợp 1:  $a \neq 0.$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 > 0 \\ 4(m+2)^2 - 4(m+2)(m+3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ -m-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2.$$

Trường hợp 2:  $a = 0 \Leftrightarrow m = -2$ , ta có

$(*) \Leftrightarrow 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$  (đúng), nhận  $m = -2$

Vậy  $m \geq -2.$

**Bài tập 4:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  nằm trong khoảng  $(-10; 10)$  để hàm số  $y = \log_2(4^x - 2^x + m)$  có tập xác định  $D = \mathbb{R}?$

A. 9

B. 10

C. 11

D. 8

*Hướng dẫn giải*

**Chọn A.**

Hàm số có tập xác định  $D = \mathbb{R}$  khi  $4^x - 2^x + m > 0 \forall x \in \mathbb{R} \quad (1).$

Đặt  $t = 2^x, t > 0.$

Khi đó (1) trở thành  $t^2 - t + m > 0 \forall t \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m > -t^2 + t \forall t \in (0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow m > \max_{(0; +\infty)} f(t) = \frac{1}{4} \text{ với } f(t) = -t^2 + t.$$

---

---

Do  $m \in \mathbb{Z}$  và  $m \in (-10;10)$  nên  $m \in \{1;2;3;\dots;8;9\}$ .

**Bài tập 5:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  nằm trong khoảng  $(-10;10)$  để hàm số

$$y = \frac{1}{m \log_3^2 x - 4 \log_3 x + m + 3} \text{ xác định trên khoảng } (0; +\infty)?$$

A. 13

B. 11

C. 12

D. 10

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Hàm số xác định  $\forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \log_3^2 x - 4 \log_3 x + m + 3 \neq 0, \forall x \in (0; +\infty) \quad (*)$ .

Đặt  $t = \log_3 x, t \in \mathbb{R}$ .

$(*) \Leftrightarrow mt^2 - 4t + m + 3 = 0$  vô nghiệm.

*Trường hợp 1:*  $m = 0$ . Phương trình có nghiệm (loại  $m = 0$ ).

*Trường hợp 2:*  $m \neq 0$ . Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow 4 - m(m + 3) < 0 \Leftrightarrow m < -4 \text{ hoặc } m > 1.$$

Do  $m \in \mathbb{Z}$  và  $m \in (-10;10)$  nên  $m \in \{-9; -8; -7; -6; -5; 2; 3; \dots; 8; 9\}$ .

Vậy có 13 giá trị nguyên thỏa mãn.

**Bài tập 6:** Hàm số  $y = \log_2(4^x - 2^x + m)$  có tập xác định  $D = \mathbb{R}$  khi.

A.  $m \geq \frac{1}{4}$ .

B.  $m > \frac{1}{4}$ .

C.  $m > 0$ .

D.  $m < \frac{1}{4}$ .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Hàm số  $y = \log_2(4^x - 2^x + m)$  có tập xác định  $\mathbb{R}$  khi và chỉ khi.

$$4^x - 2^x + m > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m > 2^x - 4^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m > \max(2^x - 4^x) = \frac{1}{4}.$$

**Bài tập 7:** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{m \log_3^2 x - 4 \log_3 x + m + 3}$  xác định trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

**Hướng dẫn giải**

Đặt  $t = \log_3 x$ , khi đó  $x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow t \in \mathbb{R}$ .

---

$$y = \frac{1}{m \log_3^2 x - 4 \log_3 x + m + 3} \text{ trở thành } y = \frac{1}{mt^2 - 4t + m + 3}.$$

Hàm số  $y = \frac{1}{m \log_3^2 x - 4 \log_3 x + m + 3}$  xác định trên khoảng  $(0; +\infty)$  khi và chỉ khi hàm

số  $y = \frac{1}{mt^2 - 4t + m + 3}$  xác định trên  $\mathbb{R}$ .

$$\Leftrightarrow f(t) = mt^2 - 4t + m + 3 \text{ vô nghiệm.}$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = 4 - m^2 - 3m < 0 \Leftrightarrow m < -4; m > 1.$$

**Bài tập 8:** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{\ln(x^2 - 16)}{x - 5 + \sqrt{x^2 - 10x + 25}}$  là:

- A.  $(5; +\infty)$ .      B.  $(-\infty; 5)$ .      C.  $\mathbb{R}$ .      D.  $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ .

#### Hướng dẫn giải

**Chọn A.**

$$\text{Viết lại } y = \frac{\ln(x^2 - 16)}{x - 5 + \sqrt{x^2 - 10x + 25}} = \frac{\ln(x^2 - 16)}{x - 5 + \sqrt{(x-5)^2}} = \frac{\ln(x^2 - 16)}{x - 5 + |x - 5|}.$$

Biểu thức  $\frac{\ln(x^2 - 16)}{x - 5 + |x - 5|}$  có nghĩa khi và chỉ khi  $\begin{cases} x^2 - 16 > 0 \\ x - 5 + |x - 5| \neq 0 \end{cases}$ .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 16 \\ |x - 5| \neq 5 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| > 4 \\ 5 - x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5.$$

Suy ra hàm số có tập xác định là  $(5; +\infty)$ .

**Bài tập 9:** Cho hàm số  $y = \frac{1}{(x-m) \log_2 [x^2 - 2(2m-1)x + 4m^2]}$ . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số đã cho xác định với mọi  $x \in (1; +\infty)$ .

- A.  $m \in (-\infty; 2)$ .      B.  $m \in (-1; 1]$ .      C.  $m \in (-\infty; 1)$ .      D.  $m \in (-\infty; 1]$ .

#### Hướng dẫn giải

**Chọn D.**

Hàm số  $y = \frac{1}{(x-m) \log_2 [x^2 - 2(2m-1)x + 4m^2]}$  xác định với  $\forall x \in (1; +\infty)$  khi

$$\begin{cases} x - m \neq 0 \\ x^2 - 2(2m - 1)x + 4m^2 > 0 \text{ (lđ)} \text{ với } \forall x \in (1; +\infty) \\ x^2 - 2(2m - 1)x + 4m^2 \neq 1 \text{ (lđ)} \end{cases}$$

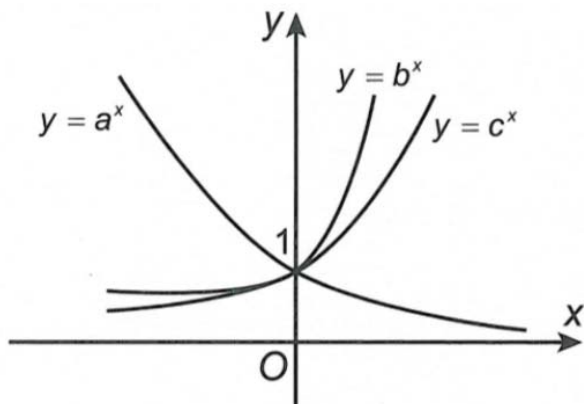
$$\Leftrightarrow m \notin (1; +\infty) \Leftrightarrow m \leq 1$$

## Dạng 2: Đồ thị hàm số

### 1. Phương pháp

### 2. Bài tập

**Bài tập 1:** Cho ba số thực dương  $a, b, c$  khác 1. Đồ thị các hàm số  $y = a^x, y = b^x, y = c^x$  được cho trong hình vẽ sau



Mệnh đề nào đúng?

A.  $a < b < c$

B.  $a < c < b$

C.  $b < c < a$

D.  $c < a < b$

**Hướng dẫn giải**

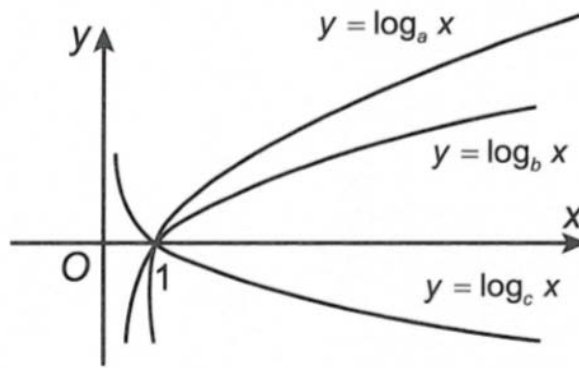
**Chọn B.**

Ta có:  $y = a^x$  nghịch biến nên  $0 < a < 1$ .

Mặt khác,  $y = b^x, y = c^x$  đồng biến, đồng thời cho  $x = 1 \Rightarrow y = b > y = c$ .

Vậy  $a < c < b$

**Bài tập 2:** Từ các đồ thị  $y = \log_a x, y = \log_b x, y = \log_c x$  đã cho ở hình vẽ sau:



Khẳng định nào sau đây đúng?

A.  $0 < a < b < 1 < c$

B.  $0 < c < 1 < a < b$

C.  $0 < c < a < 1 < b$

D.  $0 < c < 1 < b < a$

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

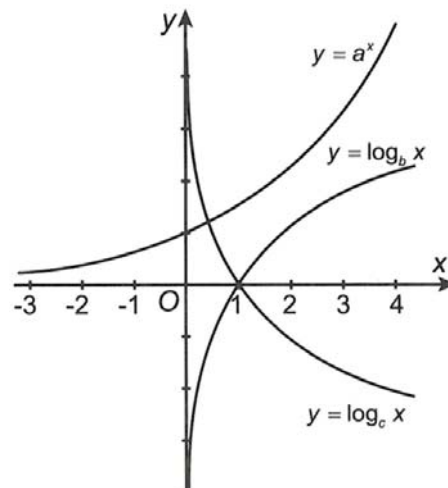
Ta có:  $y = \log_c x$  nghịch biến nên  $0 < c < 1$ .

Mặt khác,  $y = \log_a x$  và  $y = \log_b x$  đồng biến nên  $a, b > 1$  đồng thời cho  $y = 1$  thì  $x = a < x = b$ .

Vậy  $0 < c < 1 < a < b$ .

**Bài tập 3:** Cho các hàm số  $y = a^x$ ,  $y = \log_b x$ ,  $y = \log_c x$  có đồ thị như hình vẽ.

Chọn mệnh đề đúng?



A.  $b < c < a$

B.  $a < c < b$

C.  $c < b < a$

D.  $c < a < b$

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Ta có  $y = \log_c x$  nghịch biến nên  $0 < c < 1$  còn  $y = \log_b x$  và  $y = a^x$  đồng biến nên  $b > 1$  và  $a > 1$ .

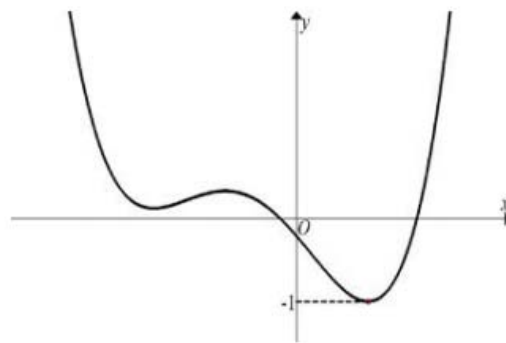
Xét  $y = a^x$ : Với  $x = 1 \Rightarrow y = a \Rightarrow 1 < a < 2$ .

Xét  $y = \log_b x$ : Với  $y = 1 \Rightarrow x = b \Rightarrow b = 2$ .

Do đó  $a < b$

Vậy  $c < 1 < a < b$ .

**Bài tập 4:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm số điểm cực trị của hàm số  $y = 3^{f(x)} - 4^{f(x)}$ .



A. 5.

B. 3.

C. 6.

D. 4.

### Hướng dẫn giải

**Chọn A.**

Đặt  $y = g(x) = 3^{f(x)} - 4^{f(x)}$ .

Quan sát đồ thị, ta thấy hàm số  $y = f(x)$  có ba điểm cực trị.

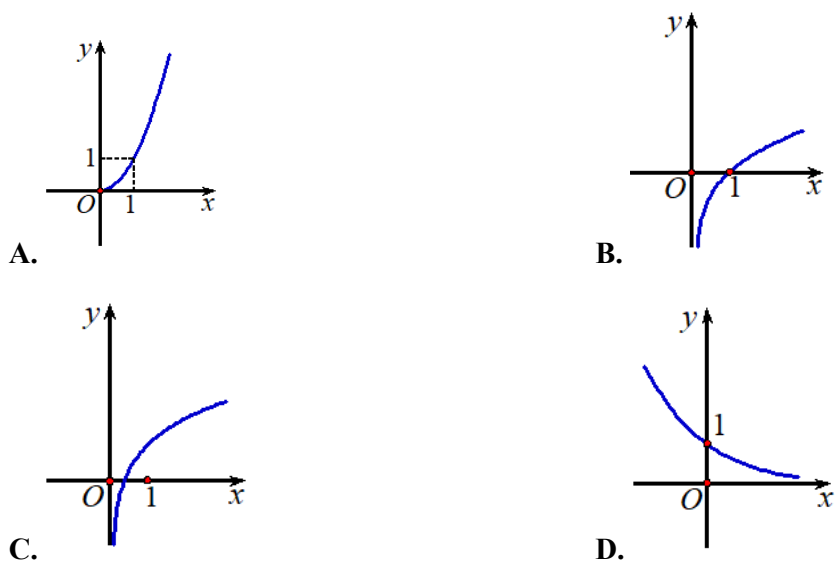
$$\text{Ta có } y' = f'(x) \cdot [3^{f(x)} \cdot \ln 3 - 4^{f(x)} \cdot \ln 4] \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ 3^{f(x)} \cdot \ln 3 - 4^{f(x)} \cdot \ln 4 = 0 \end{cases}.$$

$$3^{f(x)} \cdot \ln 3 - 4^{f(x)} \cdot \ln 4 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{f(x)} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \Leftrightarrow f(x) = \log_{\frac{3}{4}} \left(\frac{\ln 4}{\ln 3}\right) \approx -0,8. \text{ Phương trình này}$$

có hai nghiệm phân biệt khác các nghiệm của phương trình  $f'(x) = 0$  nên hàm số

$y = 3^{f(x)} - 4^{f(x)}$  có năm điểm cực trị.

**Bài tập 5:** Cho hàm số  $f(x) = x \ln x$ . Một trong bốn đồ thị cho trong bốn phương án A, B, C, D dưới đây là đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$ . Tìm đồ thị đó?



**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

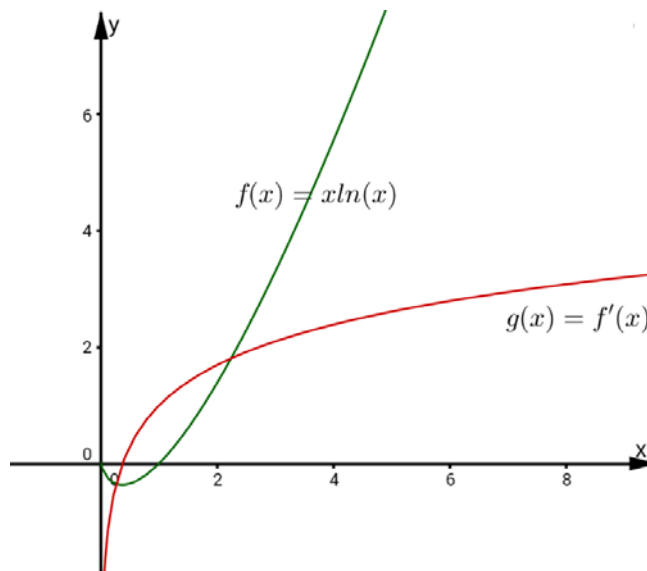
Tập xác định  $D = (0; +\infty)$

Ta có  $f(x) = x \ln x \Rightarrow f'(x) = g(x) = \ln x + 1$ .

Ta có  $g(1) = 1$  nên đồ thị hàm số đi qua điểm  $(1; 1)$ . Loại hai đáp án B và D

Và  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(x) + 1]$ . Đặt  $t = \frac{1}{x}$ . Khi  $x \rightarrow 0^+$  thì  $t \rightarrow +\infty$ .

Do đó  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (g(x)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ \ln\left(\frac{1}{t}\right) + 1 \right] = -\lim_{t \rightarrow +\infty} [\ln(t)] + 1 = -\infty$  nên loại đáp án A.



**Cách 2 :** Ta nhận thấy  $f(x) = x \ln x \Rightarrow f'(x) = g(x) = \ln x + 1$  nằm bên phải trục tung và không đi qua  $(1; 0)$ . Vậy chọn đáp án **C**.

### Dạng 3: Xét tính đơn điệu, cực trị, GTLN và GTNN của hàm số mũ, logarit

#### 1. Phương pháp.

Phương pháp chung:

Bước 1: Tìm tập xác định

Bước 2: Tìm đạo hàm  $f'(x)$ . Tìm các điểm  $x_i$  làm cho  $f'(x) = 0$  hoặc không xác định.

Bước 3: Sắp xếp các điểm  $x_i$  theo thứ tự tăng dần và lập BBT.

Bước 4: Kết luận.

Ngoài ra cần chú ý tính chất của hàm số mũ và hàm số logarit:

+) Hàm số  $y = a^x$  và hàm số  $y = \log_a x$  đồng biến trên TXĐ  $\Leftrightarrow a > 1$ .

+) Hàm số  $y = a^x$  và hàm số  $y = \log_a x$  nghịch biến trên TXĐ  $\Leftrightarrow 0 < a < 1$ .

#### 2. Bài tập

**Bài tập 1.** Gọi  $a$ ,  $b$  lần lượt là số điểm cực đại và số điểm cực tiểu của hàm số  $y = (x^3 + 3x + 1)e^{-2x}$ . Tính  $2a - b$ .

A. 0.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Ta có  $y = (x^3 + 3x + 1)e^{-2x}$ . Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$ .

$$y' = (x^3 + 3x + 1)' e^{-2x} + (x^3 + 3x + 1)(e^{-2x})' = (3x^2 + 3)e^{-2x} - 2e^{-2x}(x^3 + 3x + 1).$$

$$= e^{-2x}(-2x^3 + 3x^2 - 6x + 1); y' = 0 \text{ có một nghiệm là } x_0.$$

Bảng biến thiên:

|      |           |       |           |
|------|-----------|-------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $x_0$ | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $0$   |           |
|      |           | $+$   | $-$       |
| $y$  |           | $3$   |           |

$-\infty \swarrow \quad \searrow -\infty$

Suy ra hàm số có 1 điểm cực đại và 0 điểm cực tiểu.

Vậy  $2a - b = 2$ .

**Bài tập 2.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^2 \ln x$  trên đoạn  $\left[\frac{1}{e}; e\right]$ .

- A.  $\min_{\left[\frac{1}{e}; e\right]} y = -\frac{1}{e^2}$ .      B.  $\min_{\left[\frac{1}{e}; e\right]} y = -e$ .      C.  $\min_{\left[\frac{1}{e}; e\right]} y = -\frac{1}{e}$ .      D.  $\min_{\left[\frac{1}{e}; e\right]} y = -\frac{1}{2e}$ .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

•Đạo hàm  $y' = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin \left(\frac{1}{e}; e\right) \\ x = \frac{1}{\sqrt{e}} \in \left(\frac{1}{e}; e\right) \end{cases}$

•Tính các giá trị:  $y\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e^2}$ ,  $y(e) = e^2$ ,  $y\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$ .

•Vậy  $\min_{\left[\frac{1}{e}; e\right]} y = -\frac{1}{2e}$ .

**Bài tập 3.** Cho  $1 < x < 64$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = \log_2^4 x + 12 \log_2^2 x \cdot \log_2 \frac{8}{x}$ .

- A. 82.      B. 96.      C. 64.      D. 81.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

$$P = \log_2^4 x + 12 \log_2^2 x \cdot \log_2 \frac{8}{x} = \log_2^4 x + 12 \log_2^2 x \cdot (\log_2 8 - \log_2 x) = \log_2^4 x + 12 \log_2^2 x \cdot (3 - \log_2 x)$$

Đặt  $t = \log_2 x$ , do  $1 < x < 64$  nên  $0 < t < 6$ .

$$f(t) = t^4 + 12t^2(3-t) \text{ với } 0 < t < 6.$$

$$f'(t) = 4t^3 - 36t^2 + 72t; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 3 \\ t = 6 \end{cases}$$

|         |   |    |   |
|---------|---|----|---|
| $t$     | 0 | 3  | 6 |
| $f'(t)$ | + | 0  | - |
| $f(t)$  |   | 81 |   |

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = 81$ .

**Bài tập 4.** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực  $m$  để hàm số  $y = \frac{3^{-x} - 3}{3^{-x} - m}$  nghịch biến trên  $(-1; 1)$ .

A.  $m < \frac{1}{3}$ .

B.  $\frac{1}{3} < m < 3$ .

C.  $m \leq \frac{1}{3}$ .

D.  $m > 3$ .

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có  $y = \frac{3^{-x} - 3}{3^{-x} - m} = \frac{3 \cdot 3^x - 1}{m \cdot 3^x - 1}$

Đặt  $t = 3^x$ . Vì  $x \in (-1; 1)$  nên  $t \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$ .

Khi đó  $y = \frac{3t - 1}{mt - 1} \Rightarrow y' = \frac{m - 3}{(mt - 1)^2}$

+ Với  $m = 0$  thỏa mãn.

+ Với  $m \neq 0$ . Yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 < 0 \\ \left[ \frac{1}{m} \leq \frac{1}{3} \right] \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \setminus \{0\}. \\ \frac{1}{m} \geq 3 \end{cases}$

**Bài tập 5.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \ln(x^2 + 1) - 2mx + 2$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

A. Không tồn tại  $m$ .

B.  $m \geq \frac{1}{2}$ .

C.  $m \leq -\frac{1}{2}$ .

D.  $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$ .

### Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số  $y = \ln(x^2 + 1) - 2mx + 2$  xác định với  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

$$\text{Ta có: } y' = [\ln(x^2 + 1) - 2mx + 2]' = \frac{2x}{x^2 + 1} - 2m$$

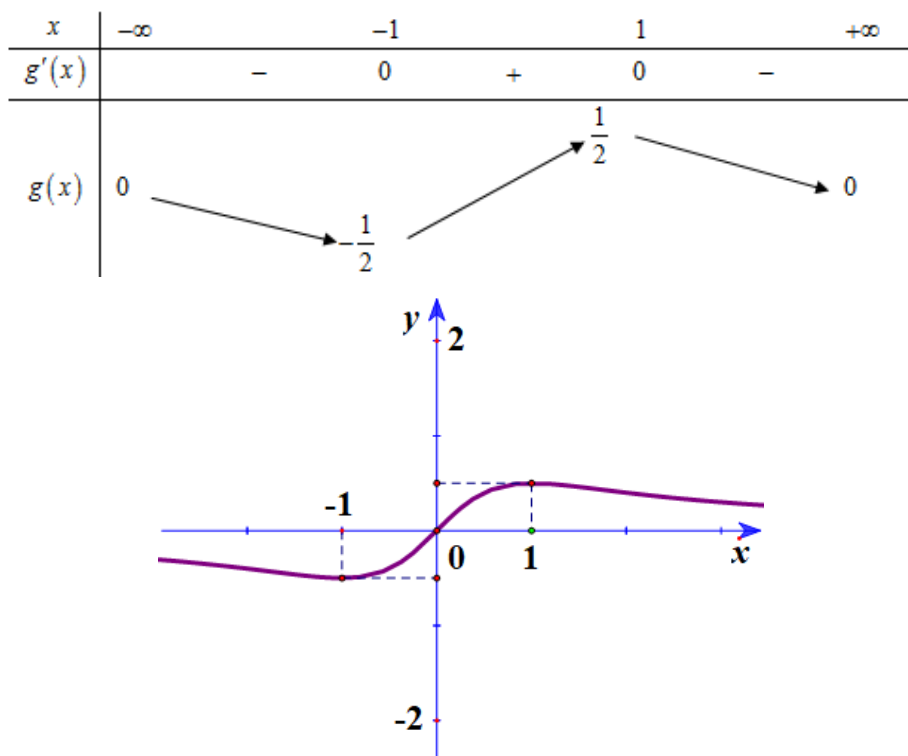
Để hàm số  $y = \ln(x^2 + 1) - 2mx + 2$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$  thì  $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} - 2m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{x}{x^2 + 1} \geq m, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Xét hàm số  $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$  xác định với mọi  $x \in \mathbb{R}$ ;  $g'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$ .

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Lập bảng biến thiên của  $g(x)$ :



Theo bảng biến thiên trên thì hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$  hay  $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{2}$ .

**Bài tập 6.** Có bao nhiêu giá trị của  $m$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = |e^{2x} - 4e^x + m|$  trên  $[0; \ln 4]$  bằng 6.

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

### Hướng dẫn giải

**Chọn D**

Đặt  $t = e^x$ , với  $x \in [0; \ln 4] \Rightarrow t \in [1; 4]$ . Khi đó  $f(x) = |t^2 - 4t + m| = |g(t)|$ .

Có  $g'(t) = 2t - 4 \Rightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$ .

Ta có bảng biến thiên

| $t$     | 1 | 2 | 4 |
|---------|---|---|---|
| $g'(t)$ | - | 0 | + |
| $g(t)$  |   |   |   |

Từ bảng biến thiên ta thấy  $\min_{[0;4]} |g(t)| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -6 \\ m - 4 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -6 \\ m = 10 \end{cases}$ .

**Bài tập 7.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = (20x^2 + 20x - 1283)e^{40x}$  trên tập hợp các số tự nhiên là:

A. -1283.

B.  $-163.e^{280}$ .

C.  $157.e^{320}$ .

D.  $-8.e^{300}$ .

### Hướng dẫn giải

**Chọn B.**

Ta có  $y' = (40x + 20)e^{40x} + 40(20x^2 + 20x - 1283)e^{40x} = 20e^{40x}(40x^2 + 42x - 2565)$

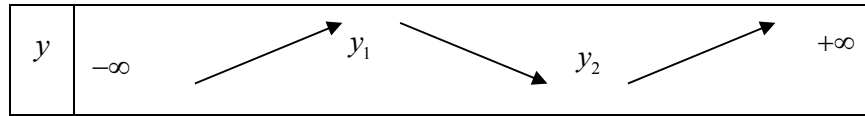
$$y' = 0 \Leftrightarrow 40x^2 + 42x - 2565 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{2} \\ x = -\frac{171}{20} \end{cases}$$

Đặt  $y_1 = y\left(-\frac{171}{20}\right)$ ;  $y_2 = y\left(\frac{15}{2}\right)$

$y(7) = -163.e^{280}$ ;  $y(8) = 157.e^{320}$

Bảng biến thiên

|      |           |                   |                |           |   |
|------|-----------|-------------------|----------------|-----------|---|
| $x$  | $-\infty$ | $-\frac{171}{20}$ | $\frac{15}{2}$ | $+\infty$ |   |
| $y'$ | +         | 0                 | -              | 0         | + |



Dựa vào bảng biến thiên ta có Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = (20x^2 + 20x - 1283)e^{40x}$  trên tập hợp các số tự nhiên là  $-163.e^{280}$ .

**Bài tập 8.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực  $m$  để hàm số  $y = 4^x - 2^{x+2} - mx + 1$  đồng biến trên khoảng  $(-1; 1)$ .

A.  $\left(-\infty; -\frac{1}{2} \ln 2\right]$ .

B.  $(-\infty; 0]$ .

C.  $(-\infty; -2 \ln 2]$ .

D.  $\left(-\infty; -\frac{3}{2} \ln 2\right]$ .

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có  $y = 4^x - 2^{x+2} - mx + 1 \Rightarrow y' = 4^x \ln 4 - 4 \cdot 2^x \ln 2 - m = (4^x - 2 \cdot 2^x) \ln 4 - m$

Theo đề  $y' \geq 0, \forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow (4^x - 2 \cdot 2^x) \ln 4 - m \geq 0, \quad \forall x \in (-1; 1)$

$\Leftrightarrow m \leq (4^x - 2 \cdot 2^x) \ln 4 = g(x), \quad \forall x \in (-1; 1)$

$\Leftrightarrow m \leq \min_{(-1; 1)} g(x)$

$\min_{(-1; 1)} g(x) = -\ln 4.$

**Bài tập 9.** Giá trị nhỏ nhất của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{e^x - m - 2}{e^x - m^2}$  đồng biến trên khoảng

$\left(\ln \frac{1}{4}; 0\right)$  gần nhất với số nào sau đây:

A. 0,03.

B. 1.

C. -0,45.

D. -1,01.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Đặt  $e^x = t$ . Suy ra  $y = \frac{t - m - 2}{t - m^2}$  đồng biến trên khoảng  $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$ .

$y' = \frac{-m^2 + m + 2}{(t - m^2)^2}.$

Để hàm số đồng biến trên khoảng  $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$  cần:

$$\begin{cases} -m^2 + m + 2 > 0 \\ m \notin \left(\frac{1}{4}; 1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 2 \\ m \geq 1 \\ m \leq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq m < 2 \\ -1 < m \leq \frac{1}{4} \end{cases}. \text{ Suy ra chọn C.}$$

**Bài tập 10.** Cho hàm số  $y = \left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x} - (m-1)e^x + 1}$ . Tìm  $m$  để hàm số đồng biến trên khoảng  $(1; 2)$ .

A.  $m < 3e^2 + 1$ .

B.  $3e^2 + 1 \leq m \leq 3e^3 + 1$ .

C.  $3e^3 + 1 \leq m < 3e^4 + 1$ .

D.  $m \geq 3e^4 + 1$ .

### Hướng dẫn giải

**Chọn D.**

$$y' = \left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x} - (m-1)e^x + 1} \cdot \ln\left(\frac{4}{2017}\right) \cdot (e^{3x} - (m-1)e^x + 1)'$$

$$= y' = \left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x} - (m-1)e^x + 1} \cdot \ln\left(\frac{4}{2017}\right) \cdot (3e^{3x} - (m-1)e^x).$$

Hàm số đồng biến trên khoảng  $(1; 2) \Leftrightarrow$

$$y' = \left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x} - (m-1)e^x + 1} \cdot \ln\left(\frac{4}{2017}\right) \cdot (3e^{3x} - (m-1)e^x) \geq 0, \forall x \in (1; 2) (*), \quad \text{mà}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x} - (m-1)e^x + 1} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \ln\left(\frac{4}{2017}\right) < 0 \end{cases}. \quad \text{Nên } (*) \Leftrightarrow 3e^{3x} - (m-1)e^x \leq 0, \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow$$

$$3e^{2x} + 1 \leq m, \forall x \in (1; 2).$$

• Đặt  $g(x) = 3e^{2x} + 1, \forall x \in (1; 2), g(x) = 3e^{2x} \cdot 2 > 0, \forall x \in (1; 2)$ .

|         |   |   |
|---------|---|---|
| $x$     | 1 | 2 |
| $g'(x)$ |   |   |
| $g(x)$  |   |   |

Vậy (\*) xảy ra khi  $m \geq g(2) \Leftrightarrow m \geq 3e^4 + 1$ .

### Dạng 4: Tìm GTLN và GTNN của hàm số mũ, logarit nhiều biến

#### 1. Phương pháp

PP1: Sử dụng các bất đẳng thức cổ điển như: Côsi, Bunhiacôpski và một số BĐT quen thuộc khác

PP2: Sử dụng phương pháp dồn biến:

+ ) Biến đổi biểu thức đã cho theo một biểu thức chung mà ta đặt là biến  $t$ .

+ ) Biểu diễn biểu thức đã cho theo  $t$  ta được hàm  $f(t)$ . Tìm điều kiện cho  $t$ .

---

+) Lập bảng biến thiên của  $f(t)$ . Suy ra kết quả.

## 2. Bài tập

**Bài tập 1.** Cho 2 số dương  $a$  và  $b$  thỏa mãn  $\log_2(a+1) + \log_2(b+1) \geq 6$ . Giá trị nhỏ nhất của  $S = a + b$  là.

- A.  $\min S = 8$ .      B.  $\min S = 14$ .      C.  $\min S = 12$ .      D.  $\min S = 16$ .

### Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Đặt } \begin{cases} \log_2(a+1) = x \\ \log_2(b+1) = y \end{cases} \Rightarrow x + y \geq 6.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} a+1 = 2^x \\ b+1 = 2^y \end{cases} \Rightarrow a+b+2 = 2^x + 2^y \geq 2\sqrt{2^{x+y}} = 2\sqrt{2^6} = 16 \Rightarrow a+b \geq 14.$$

**Bài tập 2.** Cho các số thực  $m, n$  thỏa mãn  $m > n > 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  của biểu thức

$$P = \log_{\frac{m}{n}}^2(m^2) + 3\log_n\left(\frac{m}{n}\right).$$

- A.  $P_{\min} = 13$ .      B.  $P_{\min} = 15$ .      C.  $P_{\min} = 16$ .      D.  $P_{\min} = 14$ .

### Hướng dẫn giải

Chọn B.

Do  $m > n > 1$  nên ta có.

$$\begin{aligned} P &= \log_{\frac{m}{n}}^2(m^2) + 3\log_n\left(\frac{m}{n}\right) = \left(2\log_{\frac{m}{n}} m\right)^2 + 3(\log_n m - 1) \\ &= \frac{4}{\left(\log_m \frac{m}{n}\right)^2} + 3(\log_n m - 1) = \frac{4}{(1 - \log_m n)^2} + \frac{3}{\log_m n} - 3. \end{aligned}$$

$$\text{Do } m > n > 1 \text{ nên } \begin{cases} \log_m n < \log_m m = 1 \\ \log_m n > \log_m 1 = 0 \end{cases}.$$

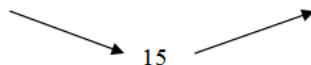
$$\text{Xét hàm số } y = \frac{4}{(1-x)^2} + \frac{3}{x} - 3 \text{ trên } (0;1).$$

$$\text{Ta có } y' = \frac{8}{(1-x)^3} - \frac{3}{x^2}.$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{(1-x)^3} - \frac{3}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{3x^3 - x^2 + 9x - 3}{x^2(1-x)^3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

---

Bảng biến thiên.

|      |                                                                                    |               |   |
|------|------------------------------------------------------------------------------------|---------------|---|
| $x$  | 0                                                                                  | $\frac{1}{3}$ | 1 |
| $y'$ | -                                                                                  | 0             | + |
| $y$  |  |               |   |

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức là  $P_{\min} = 15$ .

**Bài tập 3.** Cho ba số thực  $a, b, c \in \left(\frac{1}{4}; 1\right)$ . Tìm giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  của biểu

thức.  $P = \log_a \left(b - \frac{1}{4}\right) + \log_b \left(c - \frac{1}{4}\right) + \log_c \left(a - \frac{1}{4}\right)$ .

A.  $P_{\min} = 1$ .

B.  $P_{\min} = 3$ .

C.  $P_{\min} = 3\sqrt{3}$ .

D.  $P_{\min} = 6$ .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Với mọi  $x \in \left(\frac{1}{4}; 1\right)$  ta có  $x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq x - \frac{1}{4}$ .

Lấy logarit 2 vế, ta được  $\log_t x^2 \leq \log_t \left(x - \frac{1}{4}\right)$  (với  $t \in (0; 1)$ ) (\*).

Áp dụng BĐT (\*) ta được:  $\log_a \left(b - \frac{1}{4}\right) \geq \log_a b^2 = 2 \log_a b$ .

$$\log_b \left(c - \frac{1}{4}\right) \geq \log_b c^2 = 2 \log_b c$$

$$\log_c \left(a - \frac{1}{4}\right) \geq \log_c a^2 = 2 \log_c a$$

Suy ra  $P \geq 2[\log_a b + \log_b c + \log_c a] \geq 2.3\sqrt[3]{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a} = 6 = P_{\min}$ .

**Bài tập 4.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = (\log_a b^2)^2 + 6 \left( \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \right)^2$  với  $a, b$  là các số thực

thỏa mãn  $\sqrt{b} > a > 1$ .

A. 30.

B. 40.

C. 60.

D. 50.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Ta có  $(\log_a b^2)^2 = 4(\log_a b)^2$ . Đặt  $\log_a b = t$ .

$$\begin{aligned}\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} &= \frac{1}{2} \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \left( \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} b - \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} a \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\log_b \frac{\sqrt{b}}{a}} - \frac{1}{\log_a \frac{\sqrt{b}}{a}} \right) \\&= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\frac{1}{2} - \log_b a} - \frac{1}{\frac{1}{2} \log_a b - 1} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{1 - 2 \log_b a} - \frac{2}{\log_a b - 2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{2 \log_a b - 6 + 4 \log_b a}{\log_a b + 4 \log_b a - 4} \right) \\&= \frac{1}{2} \frac{2t - 6 + \frac{4}{t}}{t + \frac{4}{t} - 4} = \frac{1}{2} \frac{2(t^2 - 3t + 2)}{t^2 - 4t + 4} = \frac{(t-1)(t-2)}{(t-2)^2} = \frac{t-1}{t-2}.\end{aligned}$$

Ta được  $P = 4t^2 + 6 \left( \frac{t-1}{t-2} \right)^2$ .

Với  $\sqrt{b} > a > 1 \Rightarrow b > a^2$  (\*) Lấy log cơ số  $a > 1$  hai vế của (\*) ta được  $\log_a b > 2$  nên  $t > 2$ .

\*) Xét hàm số  $f(t) = 4t^2 + 6 \left( \frac{t-1}{t-2} \right)^2, t \in D = (2; +\infty)$ .

Ta được.

$$f'(t) = 8t - \frac{12(t-1)}{(t-2)^2} = 0 \Rightarrow 8t(t^2 - 4t + 4) - 12(t-1) = 0 \Leftrightarrow 8t^3 - 32t^2 + 20t + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ t = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Do  $t > 2$  nên  $f'(t) = 0$  có nghiệm  $t = 3$ .

Ta có  $\lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) = +\infty; f(3) = 60; \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$  nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 60.

**Bài tập 5.** Cho hai số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $\log_3 [(x+1)(y+1)]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1)$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = x + 2y$ .

A.  $P_{\min} = \frac{11}{2}$ .      B.  $P_{\min} = \frac{27}{5}$ .      C.  $P_{\min} = -5 + 6\sqrt{3}$ .      D.

$P_{\min} = -3 + 6\sqrt{2}$ .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Ta có  $\log_3 [(x+1)(y+1)]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1) \Leftrightarrow \log_3 (x+1) + x + 1 = \frac{9}{y+1} + \log_3 \frac{9}{y+1}$ .

Xét hàm số  $f(t) = \log_3 t + t, t > 1; f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 1.$

Suy ra  $f(x+1) = f\left(\frac{9}{y+1}\right) \Leftrightarrow x+1 = \frac{9}{y+1} \Leftrightarrow x = \frac{8-y}{y+1} \Rightarrow P = \frac{8-y}{y+1} + 2y = \frac{2y^2 + y + 8}{y+1}.$

Bảng biến thiên của hàm số  $P = \frac{2y^2 + y + 8}{y+1}, y > 1$

|      |                |                            |           |
|------|----------------|----------------------------|-----------|
| $x$  | 1              | $\frac{-2 + \sqrt{18}}{2}$ | $+\infty$ |
| $y'$ |                | - 0 +                      |           |
| $y$  | $\frac{11}{2}$ | $-3 + 6\sqrt{2}$           | $+\infty$ |

Vậy  $P_{\min} = -3 + 6\sqrt{2}.$

**Bài tập 6.** Trong các nghiệm  $(x; y)$  thỏa mãn bất phương trình  $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1.$  Giá trị lớn nhất của biểu thức  $T = 2x + y$  bằng:

A. 9.

B.  $\frac{9}{8}.$

C.  $\frac{9}{4}.$

D.  $\frac{9}{2}.$

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Bất PT  $\Leftrightarrow \log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2y^2 > 1 \\ 2x + y \geq x^2 + 2y^2 \end{cases} (I), \begin{cases} 0 < x^2 + 2y^2 < 1 \\ 0 < 2x + y \leq x^2 + 2y^2 \end{cases} (II).$

Xét  $T = 2x + y.$

TH1:  $(x; y)$  thỏa mãn (II) khi đó  $0 < T = 2x + y \leq x^2 + 2y^2 < 1.$

TH2:  $(x; y)$  thỏa mãn (I)  $x^2 + 2y^2 \leq 2x + y \Leftrightarrow (x-1)^2 + (\sqrt{2}y - \frac{1}{2\sqrt{2}})^2 \leq \frac{9}{8}.$  Khi đó.

$$2x + y = 2(x-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}y - \frac{1}{2\sqrt{2}}) + \frac{9}{4} \leq \sqrt{(2^2 + \frac{1}{2}) \left[ (x-1)^2 + (\sqrt{2}y - \frac{1}{2\sqrt{2}})^2 \right]} + \frac{9}{4} \leq \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{9}{8}} + \frac{9}{4} = \frac{9}{2}.$$

Suy ra :  $\max T = \frac{9}{2} \Leftrightarrow (x; y) = (2; \frac{1}{2}).$

**Bài tập 7.** Cho hai số thực  $a, b$  thỏa mãn  $1 > a \geq b > 0.$  Tính giá trị nhỏ nhất  $T_{\min}$  của biểu thức sau  $T = \log_a^2 b + \log_{a.b} a^{36}.$

A.  $T_{\min} = 16.$

B.  $T_{\min} = 13.$

C.  $T_{\min}$  không tồn tại.

D.  $T_{\min} = 19$ .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

$$T = \log_a^2 b + \log_{a.b} a^{36} = \log_a^2 b + \frac{36}{\log_a ab} = \log_a^2 b + \frac{36}{1 + \log_a b}.$$

Đặt  $t = \log_a b$ , vì  $1 > a \geq b > 0 \Rightarrow \log_a b \geq \log_b b \Rightarrow t \geq 1$ .

$$\text{Xét } f(t) = t^2 + \frac{36}{1+t} \Rightarrow f'(t) = 2t - \frac{36}{(1+t)^2}. \text{ Cho } f'(t) = 0 \Rightarrow t = 2.$$

$$\text{Hàm số } f(t) \text{ liên tục trên } [1; +\infty) \text{ có } \begin{cases} f(1) = 19 \\ f(2) = 16 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \min_{[1; +\infty)} f(t) = 16 \Rightarrow \min_{[1; +\infty)} T = 16.$$

**Bài tập 8.** Xét các số thực  $a, b$  thỏa mãn  $a \geq b > 1$ . Biết rằng biểu thức  $P = \frac{1}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}}$  đạt giá trị lớn nhất khi  $b = a^k$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A.  $k \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$ .

B.  $k \in (2; 3)$ .

C.  $k \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$ .

D.  $k \in (-1; 0)$ .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

$$\text{Ta có } P = \frac{1}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}} = \log_a ab + \sqrt{1 - \log_a b} = 1 + \log_a b + \sqrt{1 - \log_a b}.$$

Khi  $b = a^k \Rightarrow P = 1 + k + \sqrt{1 - k}$ . Đặt  $t = \sqrt{1 - k}$ . Với  $k \leq 1$ .

$$\Rightarrow P = -t^2 + t + 2 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \leq \frac{9}{4}.$$

$$\Rightarrow \max P = \frac{9}{4}. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{3}{4} \in \left(0; \frac{3}{2}\right).$$

**Bài tập 9.** Xét các số thực  $a, b$  thỏa mãn  $a > b > 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  của biểu thức  $P = \log_{\frac{a}{b}}^2(a^2) + 3 \log_b \left(\frac{a}{b}\right)$ .

A.  $P_{\min} = 19$ .

B.  $P_{\min} = 13$ .

C.  $P_{\min} = 14$ .

D.  $P_{\min} = 15$ .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

---

Với điều kiện đề bài, ta có.

$$\begin{aligned} P &= \log_{\frac{a}{b}}^2(a^2) + 3 \log_b \left( \frac{a}{b} \right) = \left[ 2 \log_{\frac{a}{b}} a \right]^2 + 3 \log_b \left( \frac{a}{b} \right) = 4 \left[ \log_{\frac{a}{b}} \left( \frac{a}{b} \cdot b \right) \right]^2 + 3 \log_b \left( \frac{a}{b} \right) \\ &= 4 \left[ 1 + \log_{\frac{a}{b}} b \right]^2 + 3 \log_b \left( \frac{a}{b} \right) \end{aligned}$$

Đặt  $t = \log_{\frac{a}{b}} b > 0$  (vì  $a > b > 1$ ), ta có  $P = 4(1+t)^2 + \frac{3}{t} = 4t^2 + 8t + \frac{3}{t} + 4 = f(t)$ .

$$\text{Ta có } f'(t) = 8t + 8 - \frac{3}{t^2} = \frac{8t^3 + 8t^2 - 3}{t^2} = \frac{(2t-1)(4t^2 + 6t + 3)}{t^2}.$$

Vậy  $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$ . Khảo sát hàm số, ta có  $P_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 15$ .

**Bài tập 10.** Cho các số thực  $a, b, c$  không âm thỏa mãn  $2^a + 4^b + 8^c = 4$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $S = a + 2b + 3c$ . Giá trị của biểu thức  $4^M + \log_M m$  bằng

A.  $\frac{2809}{500}$ .

B.  $\frac{281}{50}$ .

C.  $\frac{4096}{729}$ .

D.  $\frac{14}{25}$ .

### Hướng dẫn giải

**Chọn C**

$$2^a + 4^b + 8^c = 4 \Leftrightarrow 2^a + 2^{2b} + 2^{3c} = 4.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = 2^a \\ y = 2^{2b} \\ z = 2^{3c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 4 \\ x, y, z \geq 1 \end{cases}.$$

$$S = a + 2b + 3c = \log_2 x + \log_2 y + \log_2 z = \log_2 (xyz).$$

$$\text{Ta có } xyz \leq \left( \frac{x+y+z}{3} \right)^3 = \left( \frac{4}{3} \right)^3 \Rightarrow S \leq 3 \log_2 \frac{4}{3}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } x = y = z = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Do đó } M = 3 \log_2 \frac{4}{3} \Leftrightarrow a = 2b = 3c = \log_2 \frac{4}{3}.$$

Mặt khác

---

$$\begin{aligned}
xyz &= (x-1)(y-1)(z-1) + (x-1)(y-1) + (y-1)(z-1) + (z-1)(x-1) + (x+y+z) - 2 \\
&= (x-1)(y-1)(z-1) + (x-1)(y-1) + (y-1)(z-1) + (z-1)(x-1) + 2 \geq 2.
\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi 
$$\begin{cases} x=1; y=1; z=2 \\ x=1; y=2; z=1 \\ x=2; y=1; z=1 \end{cases}.$$

Suy ra  $m=1$ .

Vậy  $4^M + \log_M m = \left(\frac{4}{3}\right)^6 = \frac{4096}{729}$ .

**Bài tập 11.** Cho các số thực  $a, b, c, d$  thỏa mãn  $\frac{1}{2^a} + \frac{1}{4^b} + \frac{1}{8^c} + \frac{1}{16^d} = \frac{1}{4}$ . Gọi  $m$  là giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $S = a + 2b + 3c + 4d$ . Giá trị của biểu thức  $\log_2 m$  bằng

A.  $\frac{1}{2}$ .

B.  $\frac{1}{4}$ .

C. 4.

D. 2.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C**

$$\frac{1}{2^a} + \frac{1}{4^b} + \frac{1}{8^c} + \frac{1}{16^d} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{-a} + 2^{-2b} + 2^{-3c} + 2^{-4d} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = 2^{-a} \\ y = 2^{-2b} \\ z = 2^{-3c} \\ t = 2^{-4d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z + t = \frac{1}{4} \\ x, y, z, t > 0 \end{cases}.$$

$$S = a + 2b + 3c + 4d = -(\log_2 x + \log_2 y + \log_2 z + \log_2 t) = -\log_2 (xyzt).$$

$$\text{Ta có } xyzt \leq \left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^4 = \frac{1}{16^4} = 2^{-16} \Rightarrow S \geq 16.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } x = y = z = t = \frac{1}{16}.$$

$$\text{Do đó } m = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \\ c = \frac{4}{3} \\ d = 1 \end{cases}.$$

**Bài tập 12.** Cho  $a, b, c$  là các số thực lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  của biểu thức:

$$P = \frac{4}{\log_{\sqrt{bc}} a} + \frac{1}{\log_{ac} \sqrt{b}} + \frac{8}{3 \log_{ab} \sqrt[3]{c}}.$$

A.  $P_{\min} = 20$ .

B.  $P_{\min} = 10$ .

C.  $P_{\min} = 18$ .

D.  $P_{\min} = 12$ .

### Hướng dẫn giải

**Chọn A.**

$$\text{Ta có: } P = \frac{4}{2 \log_{bc} a} + \frac{1}{\frac{1}{2} \log_{ac} b} + \frac{8}{\log_{ab} c} = 2 \log_a bc + 2 \log_b ac + 8 \log_c ab$$

$$= 2 \log_a b + 2 \log_a c + 2 \log_b a + 2 \log_b c + 8 \log_c a + 8 \log_c b$$

$$= (2 \log_a b + 2 \log_b a) + (2 \log_a c + 8 \log_c a) + (2 \log_b c + 8 \log_c b).$$

Vì  $a, b, c$  là các số thực lớn hơn 1 nên:  $\log_a b, \log_b a, \log_a c, \log_c a, \log_b c, \log_c b > 0$ .

Do đó

áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$P \geq 2\sqrt{2 \log_a b \cdot 2 \log_b a} + 2\sqrt{2 \log_a c \cdot 8 \log_c a} + 2\sqrt{2 \log_b c \cdot 8 \log_c b} = 4 + 8 + 8 = 20.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \log_a b = \log_b a \\ \log_a c = 4 \log_c a \\ \log_b c = 4 \log_c b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = a^2 \\ c = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \sqrt{c} > 1.$$

Vậy  $P_{\min} = 20$ .

### Dạng 5: Bài toán lãi suất

#### 1. Phương pháp

#### 2. Bài tập

**Bài tập 1:** Một người gửi tiết kiệm số tiền 80 000 000 đồng với lãi suất 6,9% một năm. Biết rằng tiền lãi hàng năm được cộng vào tiền gốc, hỏi sau 5 năm người đó rút được cả tiền gốc lẫn tiền lãi gần với con số nào sau đây?

A. 105370000 đồng

B. 111680000 đồng

C. 107667000 đồng

D. 116570000 đồng

**Ghi nhớ:**

Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép  $r$  (% / kì hạn) thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau  $n$  kì hạn ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) là:

$$S_n = A(1+r)^n$$

### Hướng dẫn giải

**Chọn B**

Gọi  $A$  là số tiền gửi ban đầu,  $r$  là lãi suất hàng năm.

---

Số tiền gốc và lãi sau năm thứ nhất là  $S_1 = A + A.r = A(1 + r)$ .

Số tiền gốc và lãi sau năm thứ hai là  $S_2 = S_1 + S_1.r = A(1 + r)^2$ .

...

Số tiền gốc và lãi người đó rút ra được sau 5 năm là

$$S_5 = A.(1 + r)^5 = 80000000.(1 + 6,9\%)^5 \approx 111680799 \text{ (đồng)}$$

**Bài tập 2:** Một người gửi ngân hàng 100 triệu với lãi suất 0,5% một tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được cộng vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu?

- A. 45 tháng    B. 46 tháng    C. 47 tháng    D. 44 tháng

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A**

Sau  $n$  tháng, tổng số tiền gốc và lãi là:  $100(1 + 0,5\%)^n$ .

Theo đề bài:  $100(1 + 0,5\%)^n > 125 \Leftrightarrow n > \log_{(1+0,5\%)} \frac{125}{100} \approx 44,74$

Vậy sau ít nhất 45 tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu.

*Từ công thức lãi kép*

$$S_n = A(1 + r)^n, \text{ ta suy ra}$$

$$n = \log_{(1+r)} \left( \frac{S_n}{A} \right).$$

**Bài tập 3:** Bác Toàn gửi số tiền 58 triệu đồng vào một ngân hàng theo hình thức lãi kép và ổn định trong 9 tháng thì lĩnh về được 61758000 đồng. Hỏi lãi suất ngân hàng hàng tháng là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất không thay đổi trong thời gian gửi.

- A. 0.8%    B. 0,6%    C. 0,7%    D. 0,5%

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Gọi  $r$  là lãi suất tiền gửi của ngân hàng theo tháng.  $A$ ,  $S_n$  lần lượt là số tiền gửi ban đầu và số tiền sau  $n = 9$  tháng. Áp dụng công thức lãi kép ta có

*Từ công thức lãi kép*

$$S_n = A(1 + r)^n, \text{ ta có}$$

$$r = \sqrt[n]{\frac{S_n}{A}} - 1.$$

---

$$S_n = A(1+r)^n \Leftrightarrow 61758000 = 58000000(1+r)^9$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt[9]{\frac{61758000}{58000000}} - 1 \approx 7.10^{-3} = 0,7\%$$

Vậy lãi suất ngân hàng hàng tháng là 0,7%

**Bài tập 4:** Để đủ tiền mua nhà, anh An vay ngân hàng 500 triệu theo phương thức trả góp với lãi suất 0,85% mỗi tháng. Nếu sau mỗi tháng, kể từ thời điểm vay, anh An trả nợ cho ngân hàng số tiền cố định là 10 triệu đồng bao gồm cả tiền lãi vay và tiền gốc. Biết phương thức trả lãi và gốc không thay đổi trong suốt quá trình anh An trả nợ. Hỏi sau bao nhiêu tháng anh trả hết nợ ngân hàng?

- A. 65                  B. 66                  C. 67                  D. 68

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B**

Đặt  $A = 500$  triệu là số tiền đã vay,  $X = 10$  triệu là số tiền trả trong mỗi tháng và  $r = 0,85\%$  là lãi suất ngân hàng,  $n$  là số tháng anh An phải trả hết nợ.

Theo đề bài:

Cuối tháng thứ nhất anh An còn nợ số tiền là

$$A + Nr - X = A(1+r) - X.$$

Cuối tháng thứ hai anh An còn nợ số tiền là

$$[A(1+r) - X] + [A(1+r) - X]r - X = A(1+r)^2 - X[(1+r) + 1].$$

Cuối tháng thứ ba anh An còn nợ số tiền là

$$[A(1+r)^2 - X[(1+r) + 1]](1+r) - X = A(1+r)^3 - X[(1+r)^2 + (1+r) + 1]$$

...

Cuối tháng thứ  $n$  anh An còn nợ số tiền là

$$A(1+r)^n - X[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + (1+r) + 1]$$

**Bài toán vay vốn trả góp:**

Vay ngân hàng số tiền là  $A$  đồng với lãi suất  $r$  (% / tháng). Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ cách nhau đúng một tháng, mỗi hoàn nợ số tiền là  $X$  đồng và trả hết tiền nợ sau đúng  $n$  tháng.

Cách tính số tiền còn lại sau  $n$  tháng là:

$$S_n = A(1+r)^n - X \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Để sau đúng  $n$  tháng trả hết nợ thì

$$A(1+r)^n - X \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0.$$

Suy ra

$$n = \log_{(1+r)} \left( \frac{X}{X - Ar} \right).$$

---

Đề sau  $n$  tháng, anh An trả hết nợ thì

$$A(1+r)^n - X[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + (1+r) + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow A(1+r)^n = X[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + (1+r) + 1]$$

$$\Leftrightarrow A(1+r)^n = X \frac{(1+r)^n - 1}{r} \Leftrightarrow (1+r)^n = \frac{X}{X - Ar} \Leftrightarrow n = \log_{(1+r)} \left( \frac{X}{X - Ar} \right)$$

$$\text{Áp dụng ta có: } n = \log_{(1+0,0085)} \left( \frac{10}{10 - 500.0,0085} \right) \Leftrightarrow n \approx 65,38.$$

Vậy anh An phải trả trong vòng 66 tháng.

**Bài tập 5:** Bác An có 400 triệu đồng mang đi gửi tiết kiệm ở hai kì hạn khác nhau đều theo hình thức lãi kép. Bác gửi 200 triệu đồng theo kì hạn quý với lãi suất 2,1% một quý; 200 triệu còn lại bác gửi theo kì hạn tháng với lãi suất 0,73% một tháng. Sau khi gửi được đúng 1 năm, bác rút tất cả số tiền ở loại kì hạn theo quý và gửi theo tháng. Hỏi sau đúng 2 năm kể từ khi gửi tiền lần đầu, bác An thu được tất cả bao nhiêu tiền lãi? (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

- A. 75,304 triệu đồng                      B. 75,303 triệu đồng  
C. 470,656 triệu đồng                      D. 475,304 triệu đồng

***Hướng dẫn giải***

**Chọn A**

Công thức tính lãi kép là  $S_n = A(1+r)^n$ .

Tổng số tiền bác An thu được sau 1 năm theo kì hạn quý là:

$$S_1 = 200(1 + 2,1\%)^4 \text{ triệu đồng}$$

Tổng số tiền bác An thu được sau 1 năm theo kì hạn tháng là:

$$S_2 = 200(1 + 0,73\%)^{12} \text{ triệu đồng}$$

Tổng số tiền bác An thu được sau 1 năm là  $S_1 + S_2$  triệu đồng.

Tổng số tiền bác An thu được sau 2 năm là

---

---

$$S = (S_1 + S_2)(1 + 0,73\%)^{12} = 475,304 \text{ triệu đồng.}$$

Vậy tiền lãi bác An thu được sau 2 năm là  $L = S - 400 = 75,304$  triệu đồng.

**Bài tập 6:** Một người vay ngân hàng số tiền 350 triệu đồng, mỗi tháng trả góp 8 triệu đồng và lãi suất cho số tiền chưa trả là 0,79% một tháng. Kỳ trả đầu tiên là cuối tháng thứ nhất. Hỏi số tiền phải trả ở kỳ cuối là bao nhiêu để người này hết nợ ngân hàng? (làm tròn đến hàng nghìn)

- A. 2921000 đồng                      B. 7084000 đồng  
C. 2944000 đồng                      D. 7140000 đồng

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D**

Kỳ trả đầu tiên là cuối tháng thứ nhất nên đây là bài toán vay vốn trả góp cuối kỳ.

Gọi  $A$  là số tiền vay ngân hàng,  $B$  là số tiền trả trong mỗi chu kỳ,  $d = r\%$  là lãi suất cho số tiền chưa trả trên một chu kỳ,  $n$  là số kỳ trả nợ.

Số tiền còn nợ ngân hàng (tính cả lãi) trong từng chu kỳ như sau:

+ Đầu kỳ thứ nhất là  $A$

+ Cuối kỳ thứ nhất là  $A(1 + d) - B$ .

+ Cuối kỳ thứ hai là

$$[A(1 + d) - B](1 + d) - B = A(1 + d)^2 - B[(1 + d) + 1]$$

+ Cuối kỳ thứ ba là

$$[A(1 + d)^2 - B[(1 + d) + 1]](1 + d) - B = A(1 + d)^3 - B[(1 + d)^2 + (1 + d) + 1]$$

...

+ Theo giả thiết quy nạp, cuối kỳ thứ  $n$  là

$$A(1 + d)^n - B[(1 + d)^{n-1} + \dots + (1 + d) + 1] = A(1 + d)^n - B \frac{(1 + d)^n - 1}{d}$$

Vậy số tiền còn nợ (tính cả lãi) sau  $n$  chu kỳ là

---

$$A(1+d)^n - B \frac{(1+d)^n - 1}{d}.$$

Người đó trả hết nợ ngân hàng khi  $A(1+d)^n - B \frac{(1+d)^n - 1}{d} = 0$

$$\Leftrightarrow 350.1,0079^n - 8. \frac{1,0079^n - 1}{0,0079} = 0 \Leftrightarrow n \approx 53,9.$$

Tức là phải mất 54 tháng người này mới trả hết nợ.

Cuối tháng thứ 53, số tiền còn nợ (tính cả lãi) là

$$S_{53} = 350.1,0079^{53} - 8. \frac{1,0079^{53} - 1}{0,0079} \text{ (triệu đồng)}$$

Kì trả nợ tiếp theo là cuối tháng thứ 54, khi đó phải trả số tiền  $S_{53}$  và lãi của số tiền này nữa là  $S_{53} + 0,0079.S_{53} = S_{53}.1,0079 \approx 7,139832$  (triệu đồng).

**Bài tập 7:** Ông A vay dài hạn ngân hàng 300 triệu, với lãi suất 12% năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một năm kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một năm, số tiền hoàn ở mỗi lần là như nhau và trả hết nợ sau đúng 4 năm kể từ ngày vay. Hỏi theo cách đó, số tiền  $m$  mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

$$\text{A. } m = \frac{36(1,12)^4}{(1,12)^4 - 1} \text{ (triệu đồng)} \quad \text{B. } m = 36(1,12)^2 \text{ (triệu đồng)}$$

$$\text{C. } m = \frac{36(1,12)^3 - 1}{(1,12)^3} \text{ (triệu đồng)} \quad \text{D. } m = \frac{300(1,12)^4}{(1,12)^4 - 1} \text{ (triệu đồng)}$$

### Hướng dẫn giải

#### Chọn A

Số tiền nợ sau năm thứ nhất:  $T_1 = 300(1+12\%) - m = 300p - m$ , với  $p = 1+12\% = 1,12$ .

Số tiền nợ sau năm thứ hai:  $T_2 = (300p - m)p - m = 300p^2 - mp - m$

---

Số tiền nợ sau năm thứ ba:

$$T_3 = (300p^2 - mp - m)p - m = 300p^3 - mp^2 - mp - m$$

Trả hết nợ sau năm thứ tư:  $(300p^3 - mp^2 - mp - m)p - m = 0$

$$\Leftrightarrow 300p^4 - mp^3 - mp^2 - mp - m = 0 \Leftrightarrow 300p^4 - m(p^3 + p^2 + p + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 300p^4 - m \cdot \frac{(p^4 - 1)}{p - 1} = 0 \Leftrightarrow 300(1,12)^4 = m \cdot \frac{[(1,12)^4 - 1]}{0,12}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{300(1,12)^4 \cdot (0,12)}{(1,12)^4 - 1} \Leftrightarrow m = \frac{36(1,12)^4}{(1,12)^4 - 1}$$

$$\text{Vậy } m = \frac{36(1,12)^4}{(1,12)^4 - 1}.$$

**Bài tập 8:** Một người mỗi đầu tháng gửi vào ngân hàng  $T$  triệu đồng với lãi suất kép 0,6% một tháng. Biết cuối tháng thứ 15 thì số tiền cả gốc lẫn lãi sẽ thu về là 10 triệu đồng. Hỏi số tiền  $T$  gần với số nào nhất trong các số sau đây?

A. 535000 đồng

B. 635000 đồng

C. 613000 đồng

D. 643000 đồng

### Hướng dẫn giải

#### Chọn B

Sau tháng gửi đầu tiên số tiền cả gốc và lãi thu được là  $T(1+r)$

Sau tháng thứ hai số tiền cả gốc và lãi thu được là  $T(1+r)^2 + T(1+r)$ .

...

Sau tháng thứ 15, số tiền cả gốc và lãi thu được là

$$T(1+r)^n + T(1+r)^{n-1} + \dots + T(1+r).$$

Để số tiền cả gốc lẫn lãi thu về là 10 triệu đồng thì

#### Bài toán tiền gửi ngân hàng:

Đầu mỗi tháng, khách hàng gửi vào ngân hàng số tiền  $A$  đồng với lãi kép  $r$  (% / tháng) thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau  $n$  tháng ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) (nhận tiền cuối tháng, khi ngân hàng đã tính lãi) là

$$S_n = \frac{A}{r} [(1+r)^n - 1](1+r).$$

---

$$T(1+r)^{15} + T(1+r)^{14} + \dots + T(1+r) = 10000000$$

$$\Leftrightarrow T(1+r) \frac{(1+r)^{15} - 1}{r} = 10000000 \Rightarrow T \approx 635.000 \text{ (đồng)}.$$

**Bài tập 9:** Một huyện A có 100 000 dân. Với mức tăng dân số bình quân 1,8% năm thì sau ít nhất bao nhiêu năm nữa dân số sẽ vượt 150 000 dân.

- A. 22                      B. 23                      C. 27                      D. 28

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B**

Giả sử sau  $n$  năm nữa thì dân số sẽ vượt 150 000 dân.

Áp dụng công thức:  $X' = X(1+r)^n$ .

$$\text{Suy ra } n = \log_{1+r} \left( \frac{X'}{X} \right) = \log_{1+1,8\%} \frac{150000}{100000} = 22,72796911.$$

**Bài tập 10:** Tỷ lệ tăng dân số hàng năm ở Việt Nam được duy trì ở mức 1,05%. Theo số liệu của Tổng cục Thống kê, dân số của Việt Nam năm 2014 là 90728900 người. Với tốc độ tăng dân số như thế thì vào năm 2030, dân số của Việt Nam là:

- A. 106118331 người                      B. 198049810 người  
C. 107232574 người                      D. 108358516 người

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C**

Áp dụng công thức:  $X_{2030} = X_{2014}(1+r)^n$

Trong đó:  $X_{2014} = 90728900$ ;  $r = 1,05$ ;  $n = 16$

Ta được dân số đến hết năm 2030 là:  $X_{2030} = 107232574$ .

**Bài tập 11:** Trong vật lý, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bởi công thức:  $m(t) = m_0 \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$ , trong đó  $m_0$  là khối lượng ban đầu của chất phóng xạ (tại thời điểm  $t = 0$ );  $T$  là chu kỳ bán rã (tức là

*Công thức tính tăng trưởng dân số:*

$$X_m = X_n(1+r)^{m-n}$$

$$(m, n \in \mathbb{Z}^+, m \geq n)$$

*Trong đó:  $r\%$  là tỉ lệ tăng dân số từ năm  $n$  đến năm  $m$ ;  $X_m$  dân số năm  $m$ ,  $X_n$  dân số năm  $n$ .*

khoảng thời gian để một nửa khối lượng chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Chu kì bán rã của Carbon  $^{14}\text{C}$  là khoảng 5730 năm. Cho trước mẫu Carbon có khối lượng 100g. Hỏi sau khoảng thời gian  $t$  thì khối lượng còn bao nhiêu gam?

- A.  $m(t) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$       B.  $m(t) = 100 \cdot e^{-\frac{t \ln 2}{5730}}$
- C.  $m(t) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{100t}{5730}}$       D.  $m(t) = 100 \cdot e^{-\frac{100t}{5730}}$

### Hướng dẫn giải

#### Chọn A

Theo công thức:  $m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$  ta có:

$$m(t) = 100 \cdot \frac{1}{2}^{\frac{t}{5730}}$$

**Bài tập 12:** Cường độ ánh sáng đi qua môi trường khác không khí (chẳng hạn sương mù, nước,...) sẽ giảm dần tùy thuộc độ dày của môi trường và hằng số  $\mu$  gọi là khả năng hấp thụ của môi trường, tùy thuộc môi trường thì khả năng hấp thụ tính theo công thức  $I = I_0 e^{-\mu x}$  với  $x$  là độ dày của môi trường đó và được tính bằng đơn vị mét. Biết rằng nước biển có  $\mu = 1,4$ . Hãy tính cường độ ánh sáng giảm đi bao nhiêu khi từ độ sâu 2m xuống đến 20m?

- A.  $e^{25,2}$       B.  $e^{22,5}$       C.  $e^{32,5}$       D.  $e^{52,5}$

### Hướng dẫn giải

#### Chọn A

Cường độ ánh sáng thay đổi khi từ độ sâu  $x_1$  đến độ sâu  $x_2$  là:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{I_0 e^{-\mu x_1}}{I_0 e^{-\mu x_2}} = e^{\mu(x_2 - x_1)}.$$

Thay  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = 20$ ,  $\mu = 1,4$  ta có  $\frac{I_1}{I_2} = e^{25,2}$ .