SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **TỈNH ĐỒNG THÁP**	**KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI** **DỰ THI CẤP QUỐC GIA NĂM HỌC 2021 – 2022** **Môn: TOÁN**
ĐỀ CHÍNH THỨC *(Đề gồm có 01 trang)*	Ngày thi: **20/6/2021** *Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề*

Câu 1. (5,0 điểm)

1. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn:

$$\begin{cases} x+y+z=-1 \\ x^3+y^3+z^3=11 \end{cases}$$

a) Biểu diễn xz theo y.

b) Chứng minh rằng trong ba số x, y, z có ít nhất một số thuộc nửa khoảng $[-2; -1)$.

2. Cho a, b, c là các số nguyên dương, a, b nguyên tố cùng nhau và

$$T = \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

là số nguyên. Chứng minh rằng a là số chính phương.

Câu 2. (4,0 điểm)

Cho dãy số (a_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} a_0 = 1,\ a_1 = 13 \\ a_{n+2} = 14a_{n+1} - a_n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n:

a) $2a_n - 1$ là số chính phương.

b) a_n viết được dưới dạng tổng bình phương của hai số tự nhiên.

Câu 3. (3,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm số lẻ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(f(x)+y) = 2x + f(x - f(y)), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ cắt nhau tại A, B sao cho tam giác AO_1O_2 vuông tại A. Tia O_1O_2 cắt đường tròn (O_2) tại E, F và cắt đường tròn (O_1) tại D. Điểm M thay đổi trên đường tròn (O_1) và không thuộc đường thẳng O_1O_2. Kẻ đường kính MP của (O_1). Tia O_2M cắt đường tròn (O_1) tại điểm thứ hai N. Tia O_2P cắt đường tròn (O_1) tại điểm thứ hai Q. Chứng minh rằng:

a) MD là phân giác của góc EMF.

b) MP, NQ và AB đồng quy hoặc đôi một song song.

c) NQ luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5. (2,0 điểm)

Có 2021 viên bi, đựng trong 100 cái hộp. Mỗi lần, cho phép lấy 2 viên bi, 2 viên bi đó thuộc vào tối đa 2 hộp và bỏ chúng vào 1 hộp khác. Chứng minh rằng sau một số bước có thể bỏ tất cả các viên bi vào cùng 1 hộp.

--- HẾT---