

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

TRẮC NGHIỆM VD - VDC

SỐ PHỨC

- * CÓ ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT
- * PHÂN LOẠI CÁC DẠNG TOÁN
- * CHIA PHẦN BÀI TẬP VÀ LỜI GIẢI RIÊNG



ÔN THI THPT QUỐC GIA

MỤC LỤC

A – LÝ THUYẾT CHUNG.....	2
1. SỐ PHỨC	2
2. PHÉP CỘNG TRỪ NHÂN CHIA SỐ PHỨC	2
3. TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN SỐ PHỨC	3
4. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC	3
5. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN MAX – MIN MÔ ĐUN SỐ PHỨC	4
B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	6
DẠNG 1: TÍNH TOÁN VÀ CÁC YẾU TỐ TRÊN SỐ PHỨC	6
DẠNG 2: PT, HPT TRÊN SỐ PHỨC	10
DẠNG 3: TÌM TẬP HỢP ĐIỂM, BIỂU DIỄN SỐ PHỨC	15
ĐIỂM BIỂU DIỄN	15
TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN LÀ ĐƯỜNG THẲNG.....	16
TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN LÀ ĐƯỜNG TRÒN.....	18
TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN LÀ HÌNH TRÒN	23
TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN LÀ ĐƯỜNG CÔNIC	24
TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN LÀ ĐƯỜNG CONG	25
TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN LIÊN QUAN ĐA GIÁC.....	27
DẠNG 4: SỐ PHỨC CÓ MÔ ĐUN NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT.....	29
MÔ ĐUN MIN, MAX CỦA SỐ PHỨC CÓ TẬP HỢP BIỂU DIỄN LÀ ĐƯỜNG ĐƯỜNG THẲNG.....	29
MÔ ĐUN MIN, MAX CỦA SỐ PHỨC CÓ TẬP HỢP BIỂU DIỄN LÀ ĐƯỜNG TRÒN, HÌNH TRÒN...	31
MÔ ĐUN MIN, MAX CỦA SỐ PHỨC CÓ TẬP HỢP BIỂU DIỄN LÀ ELIP.....	34
DẠNG 5: MIN, MAX SỐ PHỨC PP ĐẠI SỐ.....	35
ÁP DỤNG CÁC TÍNH CHẤT BĐT, ĐÁNH GIÁ.....	35
ÁP DỤNG CÁC BĐT BUNHIACOPXKI	38
ÁP DỤNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ	39
DẠNG 6: MIN, MAX SỐ PHỨC PP HÌNH HỌC	41

SỐ PHỨC**A – LÝ THUYẾT CHUNG****1. SỐ PHỨC****1.1. Khái niệm số phức**

Số phức (dạng đại số) : $z = a + bi$; ($a, b \in \mathbb{R}$). Trong đó : a là phần thực, b là phần ảo, i là đơn vị ảo, $i^2 = -1$.

Tập hợp số phức kí hiệu: $\mathbb{C}$.

z là số thực $\Leftrightarrow$ phần ảo của z bằng 0 ($b = 0$).

z là số ảo (hay còn gọi là thuần ảo) $\Leftrightarrow$ phần thực bằng 0 ($a = 0$).

Số 0 vừa là số thực vừa là số ảo.

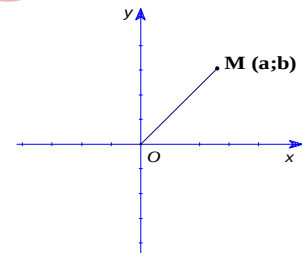
1.2. Hai số phức bằng nhau

Hai số phức $z_1 = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) và $z_2 = c + di$ ($c, d \in \mathbb{R}$) bằng nhau khi phần thực và phần ảo của chúng tương đương bằng nhau.

Khi đó ta viết $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$

1.3. Biểu diễn hình học số phức

Số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ hay bởi $\vec{u} = (a; b)$ trong mặt phẳng phức với hệ tọa độ Oxy.

**1.4. Số phức liên hợp**

Số phức liên hợp của $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là $\bar{z} = a - bi$.

$$\bar{\bar{z}} = z; \quad \overline{z \pm z'} = \bar{z} \pm \bar{z}'; \quad \overline{z z'} = \bar{z} \bar{z}'; \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}; \quad z \bar{z} = a^2 + b^2.$$

z là số thực $\Leftrightarrow z = \bar{z}$; z là số ảo $z = -\bar{z}$.

1.5. Môđun của số phức

Độ dài của vectơ $\vec{OM}$ được gọi là **môđun của số phức z** và kí hiệu là $|z|$. Vậy $|z| = |\vec{OM}|$ hay

$$|z| = |a + bi| = |\vec{OM}| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Một số tính chất:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \bar{z}} = |\vec{OM}|; \quad |\bar{z}| = |z|$$

$$|z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}; \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|; \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}; \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

2. PHÉP CỘNG TRỪ NHÂN CHIA SỐ PHỨC**2.1. Phép cộng và phép trừ số phức**

Cho hai số phức $z_1 = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) và $z_2 = c + di$ ($c, d \in \mathbb{R}$). Khi đó:

$$z_1 \pm z_2 = (a + c) \pm (b + d)i$$

Số đối của số phức $z = a + bi$ là $-z = -a - bi$.

Tổng của một số phức với số phức liên hợp của nó bằng hai lần phần thực của số thực đó:

$$z = a + bi, z + \bar{z} = 2a.$$

2.2. Phép nhân số phức

Cho hai số phức $z_1 = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) và $z_2 = c + di$ ($c, d \in \mathbb{R}$).

$$\text{Khi đó: } z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Với mọi số thực k và mọi số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), ta có

$$k.z = k.(a + bi) = ka + kbi. \text{ Đặc biệt: } 0.z = 0 \text{ với mọi số phức } z.$$

$$\text{Lũy thừa của } i : i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = i^2.i = -i$$

$$i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2.3. Chia hai số phức

Số phức nghịch đảo của z khác 0 là số $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$.

$$\text{Phép chia hai số phức } z' \text{ và } z \neq 0 \text{ là } \frac{z'}{z} = z' z^{-1} = \frac{z' \bar{z}}{|z|^2} = \frac{z' \bar{z}}{z \bar{z}}.$$

3. TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN SỐ PHỨC

Một số tập hợp điểm biểu diễn số phức z thường gặp:

- $ax + by + c = 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là đường thẳng
- $x = 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là trục tung Oy
- $y = 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là trục hoành Ox
- $(x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2 \Rightarrow$ tập hợp điểm là hình tròn tâm $I(a; b)$, bán kính R
- $\begin{cases} (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \end{cases} \Rightarrow$ tập hợp điểm là đường tròn có tâm $I(a; b)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$
- $x > 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là miền bên phải trục tung
- $y < 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là miền phía dưới trục hoành
- $x < 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là miền bên trái trục tung
- $y > 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là phía trên trục hoành
- $y = ax^2 + bx + c \Rightarrow$ tập hợp điểm là đường Parabol
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ tập hợp điểm là đường Elip
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ tập hợp điểm là đường Hyperbol

4. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC

4.1. Căn bậc hai của số thực âm

Cho số z , nếu có số phức z_1 sao cho $z_1^2 = z$ thì ta nói z_1 là một căn bậc hai của z .

Mọi số phức $z \neq 0$ đều có hai căn bậc hai.

Căn bậc hai của số thực z âm là $\pm i\sqrt{|z|}$.

Tổng quát, các căn bậc hai của số thực a âm là $\pm i\sqrt{|a|}$.

4.2. Phương trình bậc hai với hệ số thực

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0, \forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Xét biệt số $\Delta = b^2 - 4ac$ của phương trình. Ta thấy:

Khi $\Delta = 0$, phương trình có một nghiệm thực $x = -\frac{b}{2a}$.

Khi $\Delta > 0$, phương trình có hai nghiệm thực phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Khi $\Delta < 0$, phương trình có hai nghiệm phức $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

5. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN MAX – MIN MÔ ĐUN SỐ PHỨC

- Cho số phức z thỏa mãn $|z_1 \cdot z + z_2| = r, (r > 0)$

$$\begin{cases} \max |z| = \left| \frac{z_2}{z_1} \right| + \frac{r}{|z_1|} \\ \min |z| = \left| \frac{z_2}{z_1} \right| - \frac{r}{|z_1|} \end{cases}$$
- Cho số phức z thỏa mãn $|z_1 \cdot z - z_2| = r_1, (r_1 > 0)$.

$$\max P = \left| \frac{z_2}{z_1} - z_3 \right| + \frac{r_1}{|z_1|} \text{ và } \min P = \left| \frac{z_2}{z_1} - z_3 \right| - \frac{r_1}{|z_1|}$$

- Cho số phức z thỏa mãn $|z_1 \cdot z + z_2| + |z_1 \cdot z - z_2| = k, (k > 0)$.

$$\max |z| = \frac{k}{2|z_1|} \text{ và } \min |z| = \frac{\sqrt{k^2 - 4|z_2|^2}}{2|z_1|}$$

6. ARGUMEN CỦA SỐ PHỨC $z \neq 0$

Định nghĩa

Cho số phức $z \neq 0$. Gọi M là điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số z . Số đo (radian) của mỗi góc lượng giác tia đầu Ox , tia cuối OM được gọi là argumen của z .

Chú ý

Nếu φ là một argumen của z (hình dưới) thì gọi argumen của z có dạng $\varphi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. (người ta thường nói: Argumen của $z \neq 0$ xác định sai khác $k2\pi, k \in \mathbb{Z}$).

7. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC

Xét số phức $z = a + bi \neq 0 (a, b \in \mathbb{R})$. Kí hiệu r là mô đun của z và φ của một argumen của z (hình dưới) thì dễ thấy rằng: $a = r \cos \varphi, b = r \sin \varphi$.

Vậy $z = a + bi \neq 0$ có thể viết dưới dạng $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Định nghĩa

Dạng $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, trong đó $r > 0$, được gọi là **dạng lượng giác của số phức** $z \neq 0$.

Dạng $z = a + bi \neq 0 (a, b \in \mathbb{R})$, được gọi là **dạng đại số của số phức** z .

Nhận xét. Để tìm dạng lượng giác $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ của số phức $z = a + bi \neq 0 (a, b \in \mathbb{R})$ khác 0 cho trước ta cần:

- Tìm r : đó là mô đun của $z, r = \sqrt{a^2 + b^2}$; số r cũng là khoảng cách từ gốc O đến điểm M biểu diễn số z trong mặt phẳng phức.

2. Tìm φ : đó là một argumen của z ; φ là số thực sao cho $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ và $\sin\varphi = \frac{b}{r}$; số φ đó cũng là số đo một góc lượng giác tia đầu Ox , tia cuối OM .

Chú ý

1. $|Z|=1$ khi và chỉ khi $Z = \cos\varphi + i\sin\varphi$; ($\varphi \in \mathbb{R}$).

2. Khi $z=0$ thì $|z|=r=0$ nhưng argumen của z không xác định (đôi khi coi argumen của 0 là số thực tùy ý và vẫn viết $0=0(\cos\varphi+i\sin\varphi)$).

3. Cần để ý đòi hỏi $r>0$ trong dạng lượng giác $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ của số phức $z \neq 0$.

8. NHÂN VÀ CHIA SỐ PHỨC LƯỢNG GIÁC

Ta đã công thức nhân và chia số phức dưới dạng đại số. Sau đây là định lý nêu lên công thức nhân và chia số phức dưới dạng lượng giác; chúng giúp cho các quy tắc tính toán đơn giản về nhân và chia số phức.

Định lý

Nếu $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; $z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$ ($r \geq 0, r' \geq 0$)

Thì $zz' = rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')]$; $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}[\cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi')]$; (khi $r > 0$)

Nói một cách khác, để nhân các số phức dưới dạng lượng giác, ta lấy tích các mô đun và tổng argumen; để chia các số phức dưới dạng lượng giác ta lấy thương các mô đun và hiệu các argumen.

Chứng minh

$$\begin{aligned} zz' &= [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)][r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')] \lim_{x \rightarrow \infty} \\ &= rr'[\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi' + i(\sin\varphi\cos\varphi' + \cos\varphi\sin\varphi')] \\ &= rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')]. \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]$. Theo công thức nhân số phức,

$$\text{Ta có: } \frac{z}{z'} = z \cdot \frac{1}{z'} = \frac{r}{r'}[\cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi')].$$

9. CÔNG THỨC MOA-VƠ (MOIVRE)

Từ công thức nhân số phức dưới dạng lượng giác, bằng quy nạp toán học dễ dàng suy ra rằng với mọi số nguyên dương n .

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Và khi $r=1$, ta có

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

Cả hai công thức đó đều được gọi là công thức Moa – vơ.

10. CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC DƯỚI DẠNG LƯỢNG GIÁC

Từ công thức Moa – vơ, dễ thấy số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r > 0$ có căn bậc hai là

$$\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) \text{ và } -\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)\right).$$

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**DẠNG 1: TÍNH TOÁN VÀ CÁC YẾU TỐ TRÊN SỐ PHỨC**

- Câu 1:** (THTT số 3) Cho số phức $z \neq 1$ thỏa mãn $z^3 = 1$. Tính $(1 - z + z^{2018})(1 + z - z^{2018})$.
A. 1. **B.** Đáp số khác. **C.** 4. **D.** 2.
- Câu 2:** (THPT-Chuyên-Sơn-La-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z + w| = \sqrt{17}$, $|z + 2w| = \sqrt{58}$ và $|z - 2w| = 5\sqrt{2}$. Giá trị của biểu thức $P = \bar{z}.w + z.\bar{w}$ bằng
A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.
- Câu 3:** Cho số phức $z = \left(\frac{2+6i}{3-i}\right)^m$, m nguyên dương. Có bao nhiêu giá trị $m \in [1; 50]$ để z là số thuần ảo?
A. 24. **B.** 26. **C.** 25. **D.** 50.
- Câu 4:** Nếu $|z| = 1$ thì $\frac{z^2 - 1}{z}$
A. lấy mọi giá trị phức. **B.** là số thuần ảo.
C. bằng 0. **D.** lấy mọi giá trị thực.
- Câu 5:** Nếu $|z| = a$; ($a > 0$) thì $\frac{\bar{z}^2 - a}{\bar{z}}$
A. lấy mọi giá trị phức. **B.** là số thuần ảo.
C. bằng 0. **D.** lấy mọi giá trị thực.
- Câu 6:** Có bao nhiêu số phức z thỏa $\left|\frac{z+1}{i-z}\right| = 1$ và $\left|\frac{z-i}{2+z}\right| = 1$?
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.
- Câu 7:** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$; $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$. Tính $|z_1 + z_2|$
A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4
- Câu 8:** Tính $z = i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2008}$ có kết quả:
A. 0 **B.** 1 **C.** $-i$ **D.** i
- Câu 9:** (THTT số 3) Cho số phức $z = 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \dots + 2018i^{2017}$ có phần thực là a và phần ảo là b . Tính $b - a$.
A. 1. **B.** -1 . **C.** 1010. **D.** -2017 .
- Câu 10:** Tính $S = 1009 + i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + 2017i^{2017}$.
A. $S = 2017 - 1009i$. **B.** $1009 + 2017i$. **C.** $2017 + 1009i$. **D.** $1008 + 1009i$.
- Câu 11:** Cho số phức z có mô đun bằng 2017 và w là số phức thỏa mãn biểu thức $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w}$.
 Mô đun của số phức w bằng:
A. 1 **B.** 2 **C.** 2016 **D.** 2017
- Câu 12:** Cho số phức z thỏa mãn: $z - \frac{\bar{z}}{1+3i} = \frac{6+7i}{5}$. Tìm phần thực của số phức z^{2017} .
A. -2^{1008} **B.** 2^{1008} **C.** 2^{504} **D.** 2^{2017}
- Câu 13:** (Ngô Quyền Hà Nội) Cho số phức z thỏa mãn: $(3+2i)z + (2-i)^2 = 4+i$. Hiệu phần thực và phần ảo của số phức z là
A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.
- Câu 14:** (Ngô Quyền Hà Nội) Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z - (2-i)\bar{z} = 3$. Mô đun của số phức $w = \frac{i-2z}{1-i}$ là?

A. $\frac{\sqrt{122}}{5}$. B. $\frac{3\sqrt{10}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{45}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{122}}{2}$.

Câu 15: (Chuyên Bắc Giang) Tìm mô đun của số phức số z biết $(2z-1)(1+i) + (\bar{z}+1)(1-i) = 2-2i$.

A. $\frac{1}{9}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{2}{9}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 16: Cho số phức z thỏa mãn $\frac{5(\bar{z}+i)}{z+1} = 2-i$ (1). Tính mô đun của số phức $\omega = 1+z+z^2$.

A. $\sqrt{13}$ B. $\sqrt{15}$ C. $\sqrt{17}$ D. $\sqrt{19}$

Câu 17: Cho z_1, z_2 là hai số phức liên hợp của nhau và thỏa mãn $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$ và $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{3}$. Tính mô đun của số phức z_1 .

A. $|z_1| = \sqrt{5}$. B. $|z_1| = 3$. C. $|z_1| = 2$. D. $|z_1| = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 18: (THPT NINH BÌNH – BẠC LIÊU LẦN 4 NĂM 2019) Cho số phức z có phần thực là số nguyên và z thỏa mãn $|z| - 2\bar{z} = -7 + 3i + z$. Tính mô-đun của số phức $\omega = 1 - z + z^2$ bằng

A. $|\omega| = \sqrt{37}$. B. $|\omega| = \sqrt{457}$. C. $|\omega| = \sqrt{425}$. D. $|\omega| = \sqrt{445}$.

Câu 19: (Đặng Thành Nam Đề 15) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $2|z| + \sqrt{3}iz = 4 - z$. Tính $S = ab$.

A. $S = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $S = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $S = \frac{\sqrt{3}}{4}$. D. $S = -\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 20: (Trần Đại Nghĩa) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, a > 0$) thỏa $z\bar{z} - 12|z| + (z - \bar{z}) = 13 + 10i$. Tính $S = a + b$.

A. $S = 7$. B. $S = 17$. C. $S = -17$. D. $S = 5$.

Câu 21: (Đặng Thành Nam Đề 17) Cho hai số phức z và w khác 0 thỏa mãn $|z + 3w| = 5|w|$ và $|z - 2wi| = |z - 2w - 2wi|$. Phần thực của số phức $\frac{z}{w}$ bằng

A. 1. B. -3. C. -1. D. 3.

Câu 22: (THPT LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NGÃI) Cho số phức z thỏa mãn $2|z+1|^2 = |z-i|^2$. Tính mô đun của số phức $z + 2 + i$.

A. 1. B. 3. C. 4. D. 2.

Câu 23: Cho z là số phức có mô đun bằng 2017 và w là số phức thỏa mãn $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w}$. Mô đun của số phức z là:

A. 2015 B. 1 C. 2017 D. 0

Câu 24: Cho các số phức z_1, z_2 khác nhau thỏa mãn: $|z_1| = |z_2|$. Chọn phương án đúng:

A. $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} = 0$. B. $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ là số phức với phần thực và phần ảo đều khác 0.
C. $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ là số thực. D. $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ là số thuần ảo.

Câu 25: Cho hai số phức u, v thỏa mãn $|u| = |v| = 10$ và $|3u - 4v| = \sqrt{2016}$. Tính $M = |4u + 3v|$.

A. $\sqrt{2984}$ B. $\sqrt{2884}$ C. $\sqrt{2894}$ D. $\sqrt{24}$

- Câu 26: (Thuan-Thanh-Bac-Ninh)** Cho số phức z thỏa mãn $(3+i)|z| = \frac{-2+14i}{z} + 1 - 3i$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?
- A. $\frac{3}{2} < |z| < 2$. B. $\frac{13}{4} < |z| < 4$. C. $\frac{7}{4} < |z| < \frac{11}{5}$. D. $1 < |z| < \frac{3}{2}$.
- Câu 27: (Chuyên Vinh Lần 2)** Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = \sqrt{3}$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Môđun $|2z_1 + 3z_2|$ bằng
- A. $\sqrt{52}$. B. $\sqrt{53}$. C. $5\sqrt{2}$. D. $\sqrt{51}$.
- Câu 28: (Chuyên Vinh Lần 2)** Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 3, |z_2| = 4$ và $|z_1 - z_2| = 6$. Môđun $|z_1 + z_2|$ bằng
- A. $\sqrt{12}$. B. $\sqrt{13}$. C. $\sqrt{14}$. D. $\sqrt{10}$.
- Câu 29: (Chuyên Vinh Lần 2)** Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 2, |z_2| = 3$ và $|z_1 - z_2| = 4$. Môđun $|z_1 + 3z_2|$ bằng
- A. $6\sqrt{2}$. B. $\sqrt{70}$. C. $5\sqrt{3}$. D. $2\sqrt{19}$.
- Câu 30: (Chuyên Vinh Lần 2)** Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 2, |z_2| = 3$ và $|z_1 - z_2| = 4$. Môđun $|2018z_1 - 2019z_2|$ bằng
- A. $\sqrt{65199571}$. B. $\sqrt{65199456}$.
C. $\sqrt{65147871}$. D. $\sqrt{45199473}$.
- Câu 31: (Cầu Giấy Hà Nội 2019 Lần 1)** Nếu các số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1| = 3, |z_2| = 4, |z_1 - z_2| = 5$ thì khẳng định nào sau đây là đúng?
- A. $|z_1 + z_2| = 5$. B. $|z_1 + z_2| = 3$. C. $|z_1 + z_2| = 4$. D. $|z_1 + z_2| = 7$.
- Câu 32:** Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và $z_1 + z_2 + z_3 = 1$. Mệnh đề nào sau đây là sai.
- A. Trong ba số đó có hai số đối nhau.
B. Trong ba số đó phải có một số bằng 1.
C. Trong ba số đó có nhiều nhất hai số bằng 1.
D. Tích của ba số đó luôn bằng 1.
- Câu 33:** Cho số phức $z = \frac{m+1}{1+m(2i-1)} (m \in \mathbb{R})$. Số các giá trị nguyên của m để $|z - i| < 1$ là
- A. 0 B. 1 C. 4 D. Vô số
- Câu 34:** Cho số phức z thỏa mãn $|z| \leq 1$. Đặt $A = \frac{2z-i}{2+iz}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. $|A| \leq 1$. B. $|A| \geq 1$. C. $|A| < 1$. D. $|A| > 1$.
- Câu 35:** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z^2 + 4| = 2|z|$. Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A. $\frac{\sqrt{3}-1}{6} \leq |z| \leq \frac{\sqrt{3}+1}{6}$. B. $\sqrt{5}-1 \leq |z| \leq \sqrt{5}+1$.
C. $\sqrt{6}-1 \leq |z| \leq \sqrt{6}+1$. D. $\frac{\sqrt{2}-1}{3} \leq |z| \leq \frac{\sqrt{2}+1}{3}$.
- Câu 36:** Cho z_1, z_2, z_3 là các số phức thỏa mãn $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ và $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| = |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|.$

B. $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| \leq |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|.$

C. $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| \geq |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|.$

D. $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| \neq |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|.$

Câu 37: Cho z_1, z_2, z_3 là các số phức thỏa $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|.$

B. $|z_1 + z_2 + z_3| > |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|.$

C. $|z_1 + z_2 + z_3| < |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|.$

D. $|z_1 + z_2 + z_3| \neq |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|.$

Câu 38: Tìm số phức z có $|z| = 1$ và $|z + i|_{\max}$:

A. 1

B. -1

C. i

D. $-i$

Câu 39: Tìm phần thực của số phức $z = (1 + i)^n$, $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn phương trình:

$\log_4(n - 3) + \log_4(n + 9) = 3$

A. 5

B. 6

C. 7

D. 8

Câu 40: Cho hai số phức phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn điều kiện $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ là số ảo. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|z_1| = 1; |z_2| = 1$

B. $z_1 = \overline{z_2}$

C. $|z_1| = |z_2|$

D. $z_1 = -z_2$

Câu 41: Cho 3 số phức z_1, z_2, z_3 thỏa $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ |z_1| = |z_2| = |z_3| = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$. Tính $A = |z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2$

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

B. $2\sqrt{2}$

C. $\frac{8}{3}$

D. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

Câu 42: Xét số phức z thỏa $2|z - 1| + 3|z - i| \leq 2\sqrt{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\frac{3}{2} < |z| < 2$

B. $|z| > 2$

C. $|z| < \frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$

Câu 43: Xét số phức z thỏa mãn $(1 + 2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\frac{3}{2} < |z| < 2$.

B. $|z| > 2$.

C. $|z| < \frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$.

Câu 44: Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là nghiệm của phương trình $\left(\frac{z-1}{2z-i}\right)^4 = 1$. Tính giá trị của biểu thức:

$P = (z_1^2 + 1)(z_2^2 + 1)(z_3^2 + 1)(z_4^2 + 1).$

A. 1.

B. $\frac{19}{7}$.

C. $\frac{17}{9}$.

D. 2.

Câu 45: Tính module của $z = 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \dots + 2017i^{2016}$.

A. $|z| = \sqrt{2036164}$

B. $|z| = \sqrt{2030113}$

C. $|z| = \sqrt{2034145}$

D. $|z| = \sqrt{2032130}$

Câu 46: (KINH MÔN HẢI DƯƠNG 2019) Cho số phức u, v thỏa mãn: $|u| = |v| = 10$ và $|3u - 4v| = \sqrt{2019}$. Ta có $|4u + 3v|$ là

A. $\sqrt{2890}$.

B. $\sqrt{2981}$.

C. $\sqrt{2891}$.

D. $\sqrt{2982}$.

Câu 47: (Chuyên KHTN) Cho khai triển $(\sqrt{3} + x)^{2019} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{2019}x^{2019}$. Hãy tính tổng $S = a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \dots + a_{2016} - a_{2018}$.

- A. 0. B. 2^{2019} . C. $(\sqrt{3})^{1009}$. D. 2^{1009} .

Câu 48: (Chuyên Vinh Lần 2) Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = \sqrt{3}$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Môđun $|z_1 + z_2|$ bằng

- A. 2. B. 3. C. $\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{2}$.

Câu 49: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – NAM ĐỊNH 2019 – LẦN 1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $z_1; z_2; z_1 + z_2$. Xét các mệnh đề sau

1) $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = z_2 \\ z_1 = -z_2 \end{cases}$ 3) Nếu $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0$ thì $z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1} = 0$

2) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ 4) $OC^2 + AB^2 = 2(OA^2 + OB^2)$

Trong các mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề đúng?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 50: (THPT LƯƠNG THẾ VINH 2019 LẦN 3) Cho hai số phức z_1, z_2 khác 0 thỏa mãn $\frac{z_1}{z_2}$ là số thuần ảo và $|z_1 - z_2| = 10$. Giá trị lớn nhất của $|z_1| + |z_2|$ bằng

- A. 10. B. $10\sqrt{2}$. C. $10\sqrt{3}$. D. 20.

DẠNG 2: PT, HPT TRÊN SỐ PHỨC

Câu 1: Gọi z_1, z_2 là 2 nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 2 = 0$ trên tập số phức. Tìm môđun của số phức $\omega = (z_1 - 1)^{2015} + (z_2 - 1)^{2016}$.

- A. $|\omega| = \sqrt{5}$ B. $|\omega| = \sqrt{2}$ C. $|\omega| = 1$ D. $|\omega| = \sqrt{3}$

Câu 2: (Cụm THPT Vũng Tàu) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị của biểu thức $(z_1 - 1)^{2019} + (z_2 - 1)^{2019}$ bằng

- A. 2^{1009} . B. 2^{1010} . C. 0. D. -2^{1010} .

Câu 3: (CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ HÒA BÌNH LẦN 4 NĂM 2019) Có bao nhiêu giá trị dương của số thực a sao cho phương trình $z^2 + \sqrt{3}z + a^2 - 2a = 0$ có nghiệm phức z_0 thỏa $|z_0| = \sqrt{3}$.

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 4: (Chuyên Hùng Vương Gia Lai) Cho z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình

$$2z^2 - 4z + 11 = 0. \text{ Tính giá trị biểu thức } P = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{(z_1 + z_2)^2}$$

- A. $\frac{9}{2}$. B. $\frac{11}{4}$. C. $\frac{11}{2}$. D. $\frac{9}{4}$.

Câu 5: (Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2) Gọi S là tổng các giá trị thực của m để phương trình $9z^2 + 6z + 1 - m = 0$ có nghiệm phức thỏa mãn $|z| = 1$. Tính S .

- A. 20. B. 12. C. 14. D. 8.

Câu 6: (Chuyên Lý Tự Trọng Cần Thơ) Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $(z - 3 + i)^2 - 4z - 4i + 25 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

- A. $A = 50$. B. $A = 70$. C. $A = 13$. D. $A = 8$.

Câu 7: Tìm các số thực b, c để phương trình (với ẩn z) $z^2 + bz + c = 0$ nhận $z = 1 + i$ là một nghiệm.

- A. $b = 2; c = -2$ B. $b = 2; c = 2$ C. $b = -2; c = -2$ D. $b = -1; c = 1$

Câu 8: Tìm các số thực a, b, c sao cho hai phương trình $az^2 + bz + c = 0, cz^2 + bz + a + 16 - 16i = 0$ có nghiệm chung là $z = 1 + 2i$

- A. $(a, b, c) = (1; -2; 5)$ B. $(a, b, c) = (1; 2; 5)$
C. $(a, b, c) = (-1; -2; 5)$ D. $(a, b, c) = (1; -2; -5)$

Câu 9: Tìm các số thực a, b, c để phương trình (với ẩn z) $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ nhận $z = 1 + i$ làm nghiệm và cũng nhận $z = 2$ làm nghiệm.

- A. $a = -4; b = 6; c = -4$ B. $a = -4; b = 5; c = -4$
C. $a = -3; b = 4; c = -2$ D. $a = -1; b = 0; c = 2$

Câu 10: (CHUYÊN HẠ LONG NĂM 2019) Biết phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ nhận $z_1 = -1 + i$ và $z_2 = 1 + \sqrt{2}i$ là nghiệm. Tính $a + b + c + d$.

- A. 10. B. 9. C. -7. D. 0.

Câu 11: Tìm điều kiện cần và đủ về các số thực m, n để phương trình $z^4 + mz^2 + n = 0$ không có nghiệm thực.

- A. $m^2 - 4n > 0$. B. $m^2 - 4n < 0$ hoặc $\begin{cases} m^2 - 4n > 0 \\ m < 0 \\ n > 0 \end{cases}$.
C. $\begin{cases} m^2 - 4n \geq 0 \\ m > 0 \\ n > 0 \end{cases}$. D. $m^2 - 4n < 0$ hoặc $\begin{cases} m^2 - 4n \geq 0 \\ m > 0 \\ n > 0 \end{cases}$.

Câu 12: Gọi $z_1; z_2; z_3; z_4$ là 4 nghiệm phức của phương trình $z^4 + (4 + m)z^2 + 4m = 0$. Tìm tất cả các giá trị m để $|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = 6$.

- A. $m = -1$ B. $m = \pm 2$ C. $m = \pm 3$ D. $m = \pm 1$

Câu 13: (Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đắk Lắk) Gọi S là tập tất cả các nghiệm phức của phương trình $z^4 - 2iz^3 + (i - 1)z^2 + 2z - i = 0$. Tổng các phần tử của S bằng

- A. 1. B. $1 + i$. C. i . D. $2i$.

Câu 14: (THTT lần 5) Kí hiệu $z_1; z_2; z_3; z_4$ là bốn nghiệm phức của phương trình $(z^2 - 3z + 6)(z^2 + 3z + 3) - z(9 + 2z^2) + z^2 = 0$. Giá trị của biểu thức $|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$ bằng

- A. $2\sqrt{3}(1 + \sqrt{2})$. B. 2. C. $2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})$. D. $2\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})$.

Câu 15: (Sở Bắc Ninh 2019) Cho số phức z, w khác 0 thỏa mãn $z + w \neq 0$ và $\frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{6}{z + w}$. Khi đó

$\left| \frac{z}{w} \right|$ bằng:

- A. 3. B. $\frac{1}{3}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 16: (Nam Tiền Hải Thái Bình Lần 1) Cho số phức z thỏa mãn $|z| - 2\bar{z} = -7 + 3i + z$. Tính $|z|$.

- A. $|z| = 5$. B. $|z| = 3$. C. $|z| = \frac{13}{4}$. D. $|z| = \frac{25}{4}$.

Câu 17: (Kim Liên 2016-2017) Tìm tập hợp T gồm tất cả các số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo.

A. $T = \{-1-i; 1-i; -1+i; 1+i\}$.

B. $T = \{1-i; 1+i\}$.

C. $T = \{-1+i\}$.

D. $T = \{-1-i\}$.

Câu 18: (Nguyễn Tất Thành Yên Bái) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 1 + 3i - |z|i = 0$.
 Tính $S = 2a + 3b$.

A. $S = -6$.

B. $S = 6$.

C. $S = -5$.

D. $S = 5$.

Câu 19: (PHÂN-TÍCH-BL-VÀ-PT-ĐẠI-HỌC-SP-HÀ-NỘI) Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn điều kiện $z^4 = |z|$. Số phần tử của S là

A. 7.

B. 6.

C. 5.

D. 4.

Câu 20: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z| = 1$ và $\frac{z+1}{z-1}$ là số thuần ảo?

A. Vô số.

B. 0.

C. 2.

D. 4.

Câu 21: (Đặng Thành Nam Đề 5) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}; a, b \neq 0$) thỏa mãn $z + 4\bar{z} = \left(\frac{5}{3} - 2\sqrt{2}i\right)|z|$. Tính $S = \frac{2a+b}{2a-b}$.

A. $S = -2\sqrt{2} - 3$.

B. $S = 2\sqrt{2} - 2$.

C. $S = 2 - 2\sqrt{2}$.

D. $S = 2\sqrt{2} + 3$.

Câu 22: (KSCL-Lần-2-2019-THPT-Nguyễn-Đức-Cảnh-Thái-Bình) Cho số phức $z = a + bi$ (với a, b là các số thực và $a^2 + b^2 \neq 0$) thỏa mãn điều kiện $\bar{z}(2+i-z) = |z|^2$. Tính $S = a^2 + 2b^2 - ab$.

A. $S = 3$.

B. $S = -1$.

C. $S = 2$.

D. $S = 1$.

Câu 23: (Đặng Thành Nam Đề 14) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z - 2 + 3i) + 4i = (4 + 5i)z$.

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Câu 24: (THPT-Yên-Mô-A-Ninh-Bình-2018-2019-Thi-tháng-4) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z - 5 - i) + 2i = (6 - i)z$?

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Câu 25: (Đặng Thành Nam Đề 9) Có tất cả bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 4$ và $|z - 2 - 2i| = 3\sqrt{2}$.

A. 7.

B. 3.

C. 2.

D. 5.

Câu 26: (Sở Lạng Sơn 2019) Giả sử z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $|(2+i)z|(z - (1-2i)z) = |1+3i|$ và $|z_1 - z_2| = 1$. Tính $M = |2z_1 + 3z_2|$.

A. $M = \sqrt{19}$.

B. $M = 19$.

C. $M = 25$.

D. $M = 5$.

Câu 27: (Đặng Thành Nam Đề 2) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2 = |z + \bar{z}| + |z - \bar{z}|$ và z^2 là số thuần ảo.

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Câu 28: (Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du-Đăk Lăk) Phương trình $z^3 = \bar{z}$ có bao nhiêu nghiệm phức?

A. 3.

B. 5.

C. 2.

D. 4.

Câu 29: (SỞ QUẢNG BÌNH NĂM 2019) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $3|z + \bar{z}| + 2|z - \bar{z}| = 12$ và $|z + 2 - 3i| = |\bar{z} - 4 + i|$?

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

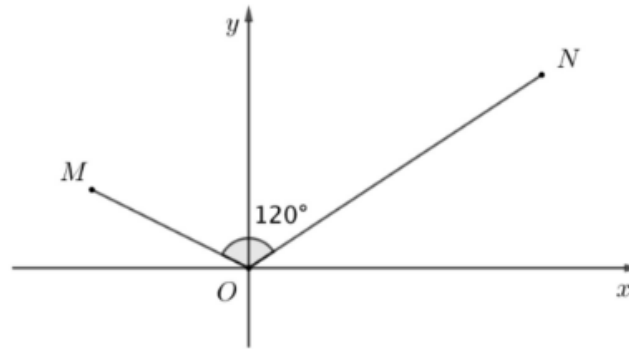
- Câu 30: (THPT ISCHOOL NHA TRANG)** Cho số phức z không phải là số thực và $\frac{z^2 - 2z + 4}{z^2 + 2z + 4}$ là số thực. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z^2|$?
- A. 0. B. 2. C. 4. D. 8.
- Câu 31: (Triệu Thái Vĩnh Phúc Lần 3)** Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 5$ và $|z + 3| = |z + 3 - 10i|$. Tìm số phức $w = z - 4 + 3i$.
- A. $w = -3 + 8i$. B. $w = 1 + 3i$. C. $w = -1 + 7i$. D. $w = -4 + 8i$.
- Câu 32: (Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đắk Lắk)** Cho các số phức z thỏa mãn hai điều kiện $|z| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo. Tổng bình phương phần thực của tất cả các số phức z đó bằng
- A. 5. B. 4. C. 2. D. 3.
- Câu 33: (ĐH Vinh Lần 1)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z - 1|^2 + |z - \bar{z}|i + (z + \bar{z})i^{2019} = 1$?
- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.
- Câu 34: (Sở Điện Biên)** Cho số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$ và $|z + 2|^2 - |z - i|^2 = 33$. Môđun của số phức $z - 2 - i$ bằng:
- A. $\sqrt{5}$ B. 9. C. 25. D. 5.
- Câu 35:** Tính tổng mô-đun tất cả các nghiệm của phương trình: $(z + i)(z^2 - 1)(z^3 + i) = 0$
- A. 3. B. 4. C. 6. D. 8
- Câu 36: (CHUYÊN THÁI BÌNH LẦN V NĂM 2019)** Số phức $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ là nghiệm của phương trình $\frac{(|z| - 1)(1 + iz)}{z - \frac{1}{z}} = i$. Tổng $T = a^2 + b^2$ bằng
- A. 4. B. $4 - 2\sqrt{3}$. C. $3 + 2\sqrt{2}$. D. 3.
- Câu 37:** Trong mặt phẳng phức, các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $(iz - 1)(z + 3i)(\bar{z} - 2 + 3i) = 0$ là các điểm nào sau đây?
- A. $A(0; -1); B(0; -3); C(2; 3)$ B. $A(1; 0); B(3; 0); C(2; -3)$
 C. $A(0; -2); B(0; 1); C(-2; 3)$ D. $A(2; -2); B(-1; 1); C(-1; 0)$
- Câu 38:** Phương trình $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^4 = 1$ có bao nhiêu nghiệm.
- A. 1 nghiệm B. 2 nghiệm C. 3 nghiệm D. 4 nghiệm
- Câu 39:** Số nghiệm phức của phương trình $\bar{z} + \frac{25}{z} = 8 - 6i$ là?
- A. 1 nghiệm B. 2 nghiệm C. 3 nghiệm D. 4 nghiệm
- Câu 40: (Sở Ninh Bình 2019 lần 2)** Tính tổng phần thực của tất cả các số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $\left(z + \frac{5}{|z|}\right)i = 7 - z$.
- A. 2. B. -2. C. -3. D. 3.
- Câu 41:** Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là các nghiệm của phương trình $\left(\frac{z-1}{2z-i}\right)^4 = 1$. Tính giá trị biểu thức $P = (z_1^2 + 1)(z_2^2 + 1)(z_3^2 + 1)(z_4^2 + 1)$.

- A. $P = 2$. B. $P = \frac{17}{9}$. C. $P = \frac{16}{9}$. D. $P = \frac{15}{9}$.

- Câu 42:** Tìm số thực $m = a - b\sqrt{20}$ (a, b là các số nguyên khác 0) để phương trình $2z^2 + 2(m-1)z + (2m+1) = 0$ có hai nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| + |z_2| = \sqrt{10}$. Tìm a .
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- Câu 43:** (Đặng Thành Nam Đề 10) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z + |z|^2 i - 1 - \frac{3}{4}i = 0$?
A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.
- Câu 44:** (THPT SỐ 1 TƯ NGHĨA LẦN 2 NĂM 2019) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-1+i| = \sqrt{10}$ và $\frac{z-2}{z-4}$ là số thuần ảo.
A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.
- Câu 45:** (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị Lần 1) Tính tổng của tất cả các giá trị của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn đồng thời $|z| = m$ và $|z - 4m + 3mi| = m^2$.
A. 4. B. 6. C. 9. D. 10.
- Câu 46:** (KÊNH TRUYỀN HÌNH GIÁO DỤC QUỐC GIA VTV7 -2019) Cho số phức $z = \frac{m+1}{1+m(2i-1)}$, ($m \in \mathbb{Z}$). Tìm các giá trị của m để $|z-i| < 1$.
A. 0. B. 1. C. 4. D. vô số.
- Câu 47:** (Chuyên Bắc Giang) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+i\sqrt{5}| + |z-i\sqrt{5}| = 6$, biết z có môđun bằng $\sqrt{5}$?
A. 3. B. 4. C. 2. D. 0.
- Câu 48:** (Chuyên Hùng Vương Gia Lai) Môđun của số phức z thỏa mãn $|z-1| = 5$ và $17(z+\bar{z}) - 5z\bar{z} = 0$ bằng
A. $\sqrt{53}$. B. $\sqrt{34}$. C. $\sqrt{29}$ và $\sqrt{13}$. D. $\sqrt{29}$.
- Câu 49:** (THẠCH THÀNH I - THANH HÓA 2019) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2 = 2|z+\bar{z}| + 4$ và $|z-1-i| = |z-3+3i|$?
A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.
- Câu 50:** (Trung Tâm Thanh Trường Nghệ An Lần 2) Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z có phần thực và phần ảo là các số nguyên thỏa mãn hai điều kiện: $|z-3-4i| \leq 2$ và $|z+\bar{z}| \leq |z-\bar{z}|$. Số phần tử của tập S là
A. 11. B. 12. C. 13. D. 10.
- Câu 51:** Có bao nhiêu giá trị của m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z\bar{z} = 1$ và $|z - \sqrt{3} + i| = m$.
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
- Câu 52:** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z\bar{z} = 1$ và $|z-3-4i| = m$. Tính tổng các phần tử thuộc S .
A. 10 B. 42 C. 52 D. 40

DẠNG 3: TÌM TẬP HỢP ĐIỂM, BIỂU DIỄN SỐ PHỨC**ĐIỂM BIỂU DIỄN**

- Câu 1:** Cho A, B, C, D là bốn điểm trong mặt phẳng tọa độ theo thứ tự biểu diễn các số phức $1+2i; 1+\sqrt{3}+i; 1+\sqrt{3}-i; 1-2i$. Biết $ABCD$ là tứ giác nội tiếp tâm I . Tâm I biểu diễn số phức nào sau đây?
A. $z=\sqrt{3}$. **B.** $z=1-\sqrt{3}i$. **C.** $z=1$. **D.** $z=-1$.
- Câu 2:** Cho A là điểm biểu diễn của các số phức: $z=1-2i; M_1, M_2$ lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1 và z_2 . Điều kiện để $\triangle AM_1M_2$ cân tại A là:
A. $|z_1|=|z_2|$ **B.** $|z_1-1+2i|=|z_2-1+2i|$
C. $|z_1-z_2|=|1-2i|$ **D.** $|z_1-1+2i|=|z_1-z_2|$
- Câu 3:** Cho 3 số phức: $1; 3i; -3-5i$ biểu diễn bởi các điểm A, B, C . Điểm I thỏa mãn $2\vec{IA}-3\vec{IB}+2\vec{IC}=\vec{0}$ biểu diễn số phức nào sau đây?
A. $4+19i$ **B.** $4-19i$ **C.** $-4-19i$ **D.** $4-6i$
- Câu 4:** Gọi M là điểm biểu diễn số phức $\varpi = \frac{2z+\bar{z}+1-i}{z^2+i}$, trong đó z là số phức thỏa mãn $(1-i)(z-i)=2-i+z$. Gọi N là điểm trong mặt phẳng sao cho $(\vec{Ox}, \vec{ON})=2\varphi$, trong đó $\varphi=(\vec{Ox}, \vec{OM})$ là góc lượng giác tạo thành khi quay tia Ox tới vị trí tia OM . Điểm N nằm trong góc phần tư nào?
A. Góc phần tư thứ (I). **B.** Góc phần tư thứ (II).
C. Góc phần tư thứ (III). **D.** Góc phần tư thứ (IV).
- Câu 5:** **(ĐH Vinh Lần 1)** Cho các số phức z thỏa mãn $|2iz-2i^{2021}|=|3\bar{z}-1|$ và $|\bar{z}|=1$. Điểm biểu diễn cho số phức z có hoành độ bằng
A. -4 . **B.** 4 . **C.** -1 . **D.** 1 .
- Câu 6:** Cho hai số phức z_1, z_2 khác 0 thỏa mãn $z_1^2-z_1z_2+z_2^2=0$. Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 . Tam giác OAB có diện tích bằng $\sqrt{3}$. Tính môđun của số phức z_1+z_2 .
A. $2\sqrt{3}$ **B.** $\sqrt{3}$ **C.** 2 **D.** 4
- Câu 7:** Cho số phức z thỏa mãn $|z|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ và điểm A trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của z . Biết rằng trong hình vẽ bên, điểm biểu diễn của số phức $w=\frac{1}{iz}$ là một trong bốn điểm M, N, P, Q . Khi đó điểm biểu diễn của số phức w là
A. điểm Q . **B.** điểm M . **C.** điểm N . **D.** điểm P .
- Câu 8:** **(Đặng Thành Nam Đề 10)** Hai điểm N, M trong hình vẽ bên dưới lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 .



Biết $ON = 2OM = 2\sqrt{5}$. Giá trị của $|z_1^2 + z_2^2|$ bằng

- A. $5\sqrt{13}$. B. $5\sqrt{37}$. C. $5\sqrt{21}$. D. $5\sqrt{11}$.

Câu 9: Cho 3 số phức z_1, z_2, z_3 phân biệt thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$ và $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_3}$. Biết z_1, z_2, z_3 lần lượt được biểu diễn bởi các điểm A, B, C trong mặt phẳng phức. Tính góc $\angle ACB$.

TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN LÀ ĐƯỜNG THẲNG

Câu 10: Trong mặt phẳng phức Oxy , các số phức z thỏa $|z + 2i - 1| = |z + i|$. Tìm số phức z được biểu diễn bởi điểm M sao cho MA ngắn nhất với $A(1, 3)$.

- A. $3 + i$. B. $1 + 3i$. C. $2 - 3i$. D. $-2 + 3i$.

Câu 11: (Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du-Đắk Lắk) Trong mặt phẳng Oxy , tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $2|z - 1| = |z - \bar{z} + 2|$ là hình gồm:

- A. hai đường thẳng. B. hai đường tròn. C. một đường tròn. D. một đường thẳng.

Câu 12: Tìm tập hợp (T) các điểm M trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z thỏa mãn hệ thức $z + \bar{z} = |z|$

- A. Đường tròn tâm $O(0; 0)$, bán kính $R = 1$ B. Đường tròn tâm $I(0; 1)$, bán kính $R = 1$
C. Đường thẳng $x = y\sqrt{3}, x = -y\sqrt{3}$ D. Đường thẳng $y = x\sqrt{3}, y = -x\sqrt{3}$

Câu 13: (Chuyên Sơn La Lần 3 năm 2018-2019) Xét các số phức z thỏa mãn điều kiện $(z + 1 - i)(\bar{z} - i)$ là số thực. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn hình học của z là một đường thẳng. Hệ số góc của đường thẳng đó là

- A. -1 . B. 1 . C. -2 . D. 2 .

Câu 14: Điểm M biểu diễn số phức $z \neq 0$ và điểm M' biểu diễn số phức $z' = \frac{1}{z}$. Nếu điểm M di động trên đường tròn tâm $A(-1; 1)$ bán kính $R = \sqrt{2}$ thì M' di động trên đường nào?

- A. $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ B. $2x + 2y + 1 = 0$
C. $2x - 2y + 1 = 0$ D. $2x + 2y - 1 = 0$

Câu 15: Trong mặt phẳng phức, gọi N, M, A, B theo thứ tự là điểm biểu diễn các số:

$z = x + yi; Z = X + Yi = \frac{z+1}{z-1}; 1; -1$. Tìm tập hợp điểm M khi N chạy trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

- A. Đường tròn tâm $I(2 + \sqrt{2}; 0)$, bán kính $R = \sqrt{5 + 4\sqrt{2}}$
B. Đường tròn tâm $I(0; 1)$, bán kính $R = 1$
C. Trục tung

D. Trục hoành

Câu 16: Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z sao cho: $z + \bar{z} = k|z|$. Với k là một số thực cho trước.

A. Đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

C. Nửa trục Ox , nửa trục Ox'

D. Nửa trục Ox'

Câu 17: Trong mặt phẳng phức, cho M là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi, M \neq 0$. Xem số phức $Z = \frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{1}{z^2} \right)$. Tìm tập hợp điểm M sao cho Z là một số thực.

A. Trục tung (hay trục hoành), không kể điểm O .

B. Trục tung hay trục hoành

C. Đường thẳng $y = 1$

D. Đường thẳng $x = 1$

Câu 18: Cho $Z = \frac{1-iz}{1+iz}, z \in \mathbb{C}, z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Tìm tập hợp điểm M sao cho Z là một số thực.

A. Trục tung ngoại trừ điểm $A(0;1)$

B. Trục hoành ngoại trừ điểm $A(0;1)$

C. Đường thẳng $y = 1$

D. Đường thẳng $x = 1$

Câu 19: Tìm tập hợp (T) các điểm M biểu diễn các số phức z sao cho $\log_{\frac{1}{2}} |z-2| > \log_{\frac{1}{2}} |z|$.

A. Miền phẳng nằm bên phải đường thẳng $x=1$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

C. Hình vành khăn gồm các điểm giữa hai hình tròn $(O;1)$ và $(O;2)$ kể cả các điểm nằm trên đường tròn $(O;2)$; không kể các điểm nằm trên đường tròn $(O;1)$

D. Đường thẳng $x = 1$

Câu 20: Trong mặt phẳng phức, tìm tập hợp các điểm M là ảnh của số phức z sao cho: Ảnh của các số z, z^2, z^4 thẳng hàng.

A. Đường tròn $x^2 + y^2 - x - y = 0$, có tâm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R=1$ ngoại trừ điểm $(0;1)$

B. Đường tròn $x^2 + y^2 - x - y = 0$, có tâm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$

C. Một hyperbol vuông góc và trục hoành Ox

D. Đường thẳng $x = -\frac{1}{2}$ và trục hoành Ox

Câu 21: (THPT-Phúc-Trạch-Hà-Tĩnh-lần-2-2018-2019-thi-tháng-4) Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 2i^{2020}| = |\bar{z} - 1 + 2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = 2\bar{z} - 1 + 4i$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Khoảng cách từ $I(2; -3)$ đến đường thẳng đó bằng

A. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{18\sqrt{5}}{5}$.

C. $\frac{10\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{18\sqrt{13}}{13}$.

Câu 22: Trong mặt phẳng phức, cho M, M' theo thứ tự là điểm biểu diễn của hai số phức z và $z': z = x + yi, z' = \frac{z-1+i}{z-1}$. Tìm tập hợp điểm (E) các điểm M sao cho: Điểm M' nằm trên trục hoành và $M' \neq 0$.

- A. Đường tròn tâm $I\left(1; -\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{1}{2}$ ngoại trừ các điểm $(1; 0)$ và $(1; -1)$.
 B. Đường tròn tâm $I(0; 1)$, bán kính $R = 1$ ngoại trừ các điểm $(1; 0)$ và $(1; -1)$.
 C. Đường thẳng $y = 1$ ngoại trừ các điểm $(1; 0)$ và $(1; -1)$.
 D. Đường thẳng $x = 1$ ngoại trừ các điểm $(1; 0)$ và $(1; -1)$.

Câu 23: Trong mặt phẳng phức Oxy , tập hợp các điểm biểu diễn số phức Z thỏa mãn $\left|z^2 + (\bar{z})^2 + 2|z|^2\right| = 16$ là hai đường thẳng d_1, d_2 . Khoảng cách giữa 2 đường thẳng d_1, d_2 là bao nhiêu?

- A. $d(d_1, d_2) = 2$. B. $d(d_1, d_2) = 4$. C. $d(d_1, d_2) = 1$. D. $d(d_1, d_2) = 6$.

Câu 24: (ĐH Vinh Lần 1) Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 2i^{2020}| = |\bar{z} - 1 + 2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = 2\bar{z} - 1 + 4i$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Khoảng cách từ $I(2; -3)$ đến đường thẳng đó bằng

- A. $\frac{18\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{18\sqrt{13}}{13}$. C. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{10\sqrt{5}}{5}$.

TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN LÀ ĐƯỜNG TRÒN

Câu 25: (THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho số phức z thỏa mãn: $|z + 2 - i| = 3$. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) biểu diễn số phức $\omega = 1 + \bar{z}$ là

- A. Đường tròn tâm $I(-2; 1)$ bán kính $R = 3$.
 B. Đường tròn tâm $I(2; -1)$ bán kính $R = 3$.
 C. Đường tròn tâm $I(-1; -1)$ bán kính $R = 9$.
 D. Đường tròn tâm $I(-1; -1)$ bán kính $R = 3$.

Câu 26: Trong mặt phẳng phức, tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức z sao cho: $|z| = 2|z - i|$.

- A. $x^2 + y^2 - \frac{8}{3}y + \frac{4}{3} = 0$ B. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$
 C. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ D. $3x^2 + 4y^2 - 36 = 0$

Câu 27: Cho thỏa mãn $z \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $(2+i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} + 1 - 2i$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = (3-4i)z - 1 + 2i$ là đường tròn I , bán kính R . Khi đó.

- A. $I(-1; -2), R = \sqrt{5}$. B. $I(1; 2), R = \sqrt{5}$. C. $I(-1; 2), R = 5$. D. $I(1; -2), R = 5$.

Câu 28: Trong mặt phẳng phức, tìm tập hợp các điểm M là ảnh của số phức z sao cho: Ảnh của các số i, z, iz thẳng hàng.

- A. Đường tròn $x^2 + y^2 - x - y = 0$, có tâm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ngoại trừ điểm $(0; 1)$
 B. Đường tròn $x^2 + y^2 - x - y = 0$, có tâm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$

C. Một hyperbol vuông góc

D. Đường thẳng $x = 1$

Câu 29: Trong mặt phẳng phức, cho M, M' theo thứ tự là điểm biểu diễn của hai số phức z và $z': z = x + yi, z' = \frac{z-1+i}{z-1}$. Tìm tập hợp điểm (E) các điểm M sao cho: Điểm M' nằm trên trục tung và $M' \neq 0$.

A. Đường tròn tâm $I\left(1; -\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{1}{2}$ ngoại trừ các điểm $(1; 0)$ và $(1; -1)$.

B. Đường tròn tâm $I(0; 1)$, bán kính $R = 1$ ngoại trừ các điểm $(1; 0)$ và $(1; -1)$.

C. Đường thẳng $y = 1$ ngoại trừ các điểm $(1; 0)$ và $(1; -1)$.

D. Đường thẳng $x = 1$ ngoại trừ các điểm $(1; 0)$ và $(1; -1)$.

Câu 30: Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z sao cho $u = \frac{z+2+3i}{z-i}$ là một số thuần ảo.

A. Đường tròn tâm $I(-1; -1)$, bán kính bằng $\sqrt{5}$, khuyết 2 điểm $(0; 1)$ và $(-2; -3)$.

B. Đường tròn tâm $I(-1; -3)$, bán kính bằng $\sqrt{5}$, khuyết 2 điểm $(0; 1)$ và $(-2; -3)$.

C. Đường tròn tâm $I(-1; -4)$, bán kính bằng $\sqrt{5}$, khuyết 2 điểm $(0; 1)$ và $(-2; -3)$.

D. Đường tròn tâm $I(-2; -1)$, bán kính bằng $\sqrt{5}$, khuyết 2 điểm $(0; 1)$ và $(-2; -3)$.

Câu 31: Tìm trong mặt phẳng tập hợp (λ) các điểm M biểu diễn số phức z sao cho $Z = z + \frac{4}{z}$ là một số thực.

A. Trục hoành $x'Ox$ ngoại trừ điểm gốc và đường tròn tâm O , bán kính $R = 2$

B. Trục hoành $x'Ox$ ngoại trừ điểm gốc và đường tròn tâm O , bán kính $R = 1$

C. Đường tròn tâm O , bán kính $R = 1$

D. Trục hoành $x'Ox$ ngoại trừ điểm gốc

Câu 32: Trong mặt phẳng phức, cho M là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi, M \neq 0$. Xem số phức

$Z = \frac{1}{2}\left(z^2 - \frac{1}{z^2}\right)$. Tìm tập hợp điểm M sao cho Z là một số thuần ảo.

A. Đường tròn tâm O , bán kính $R = 1$

B. Đường tròn tâm $I(0; 1)$ bán kính $R = 1$

C. Đường thẳng $y = 1$

D. Đường thẳng $x = 1$

Câu 33: Trong mặt phẳng phức, cho m và M là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi, M \neq 0$.

$Z = X + Yi = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$. Tìm tập hợp điểm M sao cho Z là một số thực.

A. Đường tròn tâm O , bán kính $R = 1$ và trục hoành Ox , không kể điểm gốc O

B. Đường tròn tâm O , bán kính $R = 1$

C. Đường thẳng $y = 1$.

D. Đường thẳng $x = -\frac{1}{2}$ và trục hoành Ox

Câu 34: Trong mặt phẳng phức, cho m và M theo thứ tự là điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi$ và

$Z = \frac{z-1}{z+2i}$. Tìm tập hợp các điểm m sao cho: Z là một số thuần ảo.

A. Đường tròn tâm $I\left(\frac{1}{2}; -1\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

C. Đường thẳng $y = 2x - 2$

D. Đường thẳng $x = 1$

Câu 35: (Sở Thanh Hóa 2019) Xét các số phức z thỏa mãn $(2-z)(\bar{z}+i)$ là số thuần ảo. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng tọa độ là

A. Đường tròn có tâm $I\left(1; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

B. Đường tròn có tâm $I\left(1; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$ nhưng bỏ đi hai điểm $A(2;0)$, $B(0;1)$.

C. Đường tròn có tâm $I\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

D. Đường tròn có tâm $I(2;1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

Câu 36: (Chuyên Thái Nguyên) Cho z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn điều kiện $|z-5-3i|=5$ đồng thời $|z_1-z_2|=8$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = z_1 + z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình

A. $(x-10)^2 + (y-6)^2 = 36$.

B. $(x-10)^2 + (y-6)^2 = 16$.

C. $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = 9$.

D. $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

Câu 37: Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ thỏa mãn điều kiện: $|z|^2 - 5z - 5\bar{z} = 0$.

A. Đường thẳng qua gốc tọa độ.

B. Đường tròn bán kính 1.

C. Đường tròn tâm $I(5;0)$ bán kính 5

D. Đường tròn tâm $I(5;0)$ bán kính 3

Câu 38: (KINH MÔN II LẦN 3 NĂM 2019) Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+3i|=3\sqrt{2}$. Biết rằng số phức $w = (1-i^{2019})(\bar{z}+3i) + 2019$ có tập hợp các điểm biểu diễn thuộc đường tròn (C) . Diện tích S của hình tròn (C) bằng

A. 18π .

B. 36π .

C. 9π .

D. 12π .

Câu 39: (Sở Quảng NamT) Cho số phức z có mô đun bằng $2\sqrt{2}$. Biết rằng tập hợp điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức $w = (1-i)(z+1) - i$ là đường tròn có tâm $I(a; b)$, bán kính R . Tổng $a+b+R$ bằng:

A. 5.

B. 7.

C. 1.

D. 3.

Câu 40: (CHUYÊN HUỖNH MÃN ĐẠT 2019 lần 1) Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=2$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = \frac{\bar{z}}{1-i}$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có tâm là

A. $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

B. $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

C. $I\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

D. $I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 41: (THPT-Ngô-Quyên-Hải-Phòng-Lần-2-2018-2019-Thi-24-3-2019) Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-1|=2$. Biết rằng tập hợp các số phức $w = (1+\sqrt{3}i)z + 2$ là đường tròn có bán kính bằng R . Tính R .

A. $R = 8$. B. $R = 2$. C. $R = 16$. D. $R = 4$.

Câu 42: (Chuyên Thái Nguyên) Cho các số phức z thỏa mãn $|z+1|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (1+i\sqrt{8})z+i$ là một đường tròn. Bán kính r của đường tròn đó là

A. 9. B. 36. C. 6. D. 3.

Câu 43: (THPT ISCHOOL NHA TRANG) Cho số phức z thỏa mãn $|z-1|=2$; $w = (1+\sqrt{3}i)z+2$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn, bán kính của đường tròn đó bằng

A. 5. B. 3. C. 4. D. 2.

Câu 44: (Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đắk Lắk) Cho số phức z có $|z|=2$. Biết tập hợp biểu diễn các số phức $w = 3+i-(3-4i)z$ là một đường tròn, bán kính đường tròn đó bằng

A. $5\sqrt{2}$. B. $5\sqrt{5}$. C. 10. D. $2\sqrt{5}$.

Câu 45: (CỤM TRƯỜNG SÓC SƠN MÊ LINH HÀ NỘI) Xét các số phức z thỏa mãn $|z-i+1|=4$, biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w = (3-4i)\bar{z}+5i$ là một đường tròn. Bán kính r của đường tròn đó là

A. $r=10$. B. $r=18$. C. $r=20$. D. $r=25$.

Câu 46: (Sở Hà Nam) Cho số phức z thỏa mãn $(z+1-3i)(\bar{z}+1+3i)=25$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là một đường tròn có tâm $I(a;b)$ và bán kính c . Tổng $a+b+c$ bằng

A. 9. B. 3. C. 2. D. 7.

Câu 47: Trong mặt phẳng phức, cho số phức a bất kỳ, tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z sao cho: $|z-a| \cdot |\bar{z}-\bar{a}| = a\bar{a}$.

A. Đường tròn tâm A , bán kính $R=AO$
 B. Đường tròn tâm A , bán kính $R=2$
 C. Một hyperbol vuông góc
 D. Đường thẳng $x=1$

Câu 48: (PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH) Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn phương trình $|z-2-3i|=5$ và $|z_1-z_2|=6$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = z_1 + z_2$ là một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

A. $R=8$. B. $R=4$. C. $R=2\sqrt{2}$. D. $R=2$.

Câu 49: Cho các số phức z thỏa mãn $|z|=4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (3+4i)z+i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=4$. B. $r=5$. C. $r=20$. D. $r=22$.

Câu 50: (THPT LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NGÃI) Xét số phức z thỏa mãn $\frac{z+2}{z+i}$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là một đường tròn, tâm I của đường tròn có tọa độ là

A. $I\left(1; \frac{3}{2}\right)$. B. $I\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$. C. $I(2;1)$. D. $I\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Câu 51: (THTT lần 5) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z^2+3|=2|z+\bar{z}|$ và $|z-4+3i|=3$?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 52: (THPT PHỤ DỤC – THÁI BÌNH) Xét các số phức z thỏa mãn $(z+2i)(\bar{z}+2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (1+i)z + 2019 - 2019i$ là một đường tròn, bán kính đường tròn là

- A. 2. B. 1. C. $2019\sqrt{2}$. D. 4.
- Câu 53:** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa: $|z_1 + z_2| = 5$. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa: $|z - z_1| = 2|z + z_2|$ là đường tròn và có bán kính R . Tính giá trị của R .
- A. $R = \frac{5}{3}$. B. $R = \frac{7}{3}$. C. $R = \frac{10}{3}$. D. $R = \frac{14}{3}$.
- Câu 54:** (SỞ BÌNH THUẬN 2019) Gọi z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 5i| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 6$. Tìm môđun của số phức $\omega = z_1 + z_2 - 6 + 10i$.
- A. $|\omega| = 10$. B. $|\omega| = 32$. C. $|\omega| = 16$. D. $|\omega| = 8$.
- Câu 55:** (Sở Thanh Hóa 2019) Gọi z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 8$. Tìm môđun của số phức $w = z_1 + z_2 - 2 + 4i$.
- A. $|w| = 6$. B. $|w| = 10$. C. $|w| = 16$. D. $|w| = 13$.
- Câu 56:** Cho số phức z thỏa mãn $|z| = m^2 + 2m + 5$ với m là số thực. biết rằng tập hợp điểm của số phức $w = (3 + 4i)z - 2i$ là đường tròn. Tính bán kính R nhỏ nhất của đường tròn đó.
- A. $R_{\min} = 5$ B. $R_{\min} = 20$ C. $R_{\min} = 4$ D. $R_{\min} = 25$
- Câu 57:** Cho số phức z thỏa mãn $|z| = m^2 + 2m + 5$ với m là số thực. Biết rằng tập hợp điểm của số phức $w = (3 + 4i)z - 2i$ là đường tròn. Tìm bán kính R nhỏ nhất của đường tròn đó.
- A. $R = 5$. B. $R = 10$. C. $R = 15$. D. $R = 20$
- Câu 58:** (Chuyên Vinh Lần 2) Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên m sao cho tồn tại 2 số phức phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn đồng thời các phương trình $|(3 + 4i)z + 25| = 20$ và $|z + m + 2i| = 5$. Số các phần tử của S là
- A. 8. B. 7. C. 6. D. 5.
- Câu 59:** (KIM LIÊN HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 6$ và $|z_2| = 2$. Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức z_1 và iz_2 . Biết $\widehat{MON} = 60^\circ$. Tính $T = |z_1^2 + 9z_2^2|$.
- A. $T = 36\sqrt{2}$. B. $T = 36\sqrt{3}$. C. $24\sqrt{3}$. D. 18.
- Câu 60:** Tập hợp điểm biểu diễn số phức $|z - 2i| = 3$ là đường tròn tâm I . Tất cả giá trị m thỏa mãn khoảng cách từ I đến $\Delta: 3x + 4y - m = 0$ bằng $\frac{1}{5}$ là:
- A. $m = -7; m = 9$ B. $m = -8; m = 8$ C. $m = 7; m = 9$ D. $m = 8; m = 9$
- Câu 61:** (Chuyên Vinh Lần 2) Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên m sao cho tồn tại 2 số phức phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn đồng thời các phương trình $|z - 1| = |z - i|$ và $|z + 2m| = m + 1$. Tổng tất cả các phần tử của S là
- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.
- Câu 62:** (Chuyên Vinh Lần 2) Gọi S là tập hợp tất cả các số m sao cho tồn tại đúng một số phức z thỏa mãn đồng thời các phương trình $|z + 2 + i| = |z + 1|$ và $\sqrt{2}|z - 3 + 2i| = m^2 - 5m + 9$. Tích tất cả các phần tử của S là
- A. 6. B. 5. C. 2. D. 3.
- Câu 63:** (Chuyên Phan Bội Châu Lần 2) Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để có đúng 4 số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z^2|$ và $|z| = m$.

- A. $\{2; 2\sqrt{2}\}$. B. $[2; 2\sqrt{2}]$. C. $\{2\}$. D. $(2; 2\sqrt{2})$.

TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN LÀ HÌNH TRÒN

Câu 64: (KỶ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG) Cho số phức z thỏa mãn $|3z + i|^2 \leq z \cdot \bar{z} + 9$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức ω thỏa mãn $\omega = \bar{z} + 1 - i$

- A. Hình tròn $(x-1)^2 + \left(y + \frac{5}{8}\right)^2 \leq \frac{73}{64}$. B. Đường tròn $(x-1)^2 + \left(y + \frac{5}{8}\right)^2 \leq \frac{73}{64}$. C. Đường tròn $(x-1)^2 + (y+3)^2 \leq 9$. D. Hình tròn $(x-1)^2 + (y+3)^2 \leq 9$.

Câu 65: Gieo một con súc sắc cân đối đồng chất 2 lần. Ký hiệu $(a; b)$ là kết quả sẽ xảy ra sau khi gieo, trong đó a, b lần lượt là số chấm xuất hiện lần thứ nhất, thứ hai. Gọi A là biến cố số chấm xuất hiện trên hai lần gieo như nhau. Tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố A là tập hợp con của tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn điều kiện nào sau đây?

- A. $|z + 2 + 3i| \leq 12$ B. $|z + 2 + 3i| = 10$
C. $|z + 2 + 3i| \leq 13$ D. $|z + 2 + 3i| \leq 11$

Câu 66: Tìm quỹ tích các điểm M biểu diễn số phức $w = (1 + i\sqrt{3})z + 2$ biết số phức z thỏa mãn: $|z - 1| \leq 2(1)$.

- A. Hình tròn $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 \leq 16$ B. Hình tròn $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 \leq 9$
C. Hình tròn $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 \leq 25$ D. Hình tròn $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 \leq 36$

Câu 67: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 3 + 4i| \leq 2$. Trong mặt phẳng Oxy tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = 2z + 1 - i$ là hình tròn có diện tích

- A. $S = 9\pi$. B. $S = 12\pi$. C. $S = 16\pi$. D. $S = 25\pi$.

Câu 68: (SỞ BÌNH THUẬN 2019) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 + 3i| \leq 3$. Trong mặt phẳng Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = 2z + 1 - i$ là hình tròn có diện tích

- A. $S = 25\pi$. B. $S = 16\pi$. C. $S = 9\pi$. D. $S = 36\pi$.

Câu 69: (Ngô Quyền Hà Nội) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 3 + 4i| \leq 2$. Trong mặt phẳng Oxy tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = 2z + 1 - i$ là hình tròn có diện tích là

- A. $S = 25\pi$. B. $S = 9\pi$. C. $S = 12\pi$. D. $S = 16\pi$.

Câu 70: (Đặng Thành Nam Đề 6) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| \leq 1$ và $z - \bar{z}$ có phần ảo không âm. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một miền phẳng. Tính diện tích S của miền phẳng này

- A. $S = \pi$. B. $S = 2\pi$. C. $S = \frac{1}{2}\pi$. D. $S = 1$.

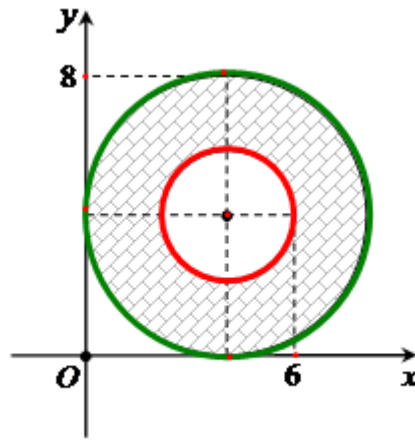
Câu 71: Biết số phức z thỏa điều kiện $3 \leq |z - 3i + 1| \leq 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z tạo thành một hình phẳng. Diện tích của hình phẳng đó bằng

- A. 16π B. 4π C. 9π D. 25π

Câu 72: Trong mặt phẳng phức Oxy, tập hợp biểu diễn số phức Z thỏa $1 \leq |z + 1 - i| \leq 2$ là hình vành khăn. Chu vi P của hình vành khăn là bao nhiêu?

- A. $P = 4\pi$. B. $P = \pi$. C. $P = 2\pi$. D. $P = 3\pi$

Câu 73: (THTT Lần 4) Phần gạch trong hình vẽ dưới là hình biểu diễn của tập các số phức thỏa mãn điều kiện nào sau đây?



- A. $6 \leq |z| \leq 8$. B. $2 \leq |z + 4 + 4i| \leq 4$. C. $2 \leq |z - 4 - 4i| \leq 4$. D. $4 \leq |z - 4 - 4i| \leq 16$.

Câu 74: (ĐOÀN THƯỢNG-HẢI DƯƠNG LẦN 2 NĂM 2019) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy gọi hình (H) là tập hợp các điểm biểu diễn số phức

z thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} |z + 2 - i| \leq 2 \\ x + y + 1 \geq 0 \end{cases}$. Tính diện tích (S) của hình phẳng (H)

- A. $S = 4\pi$. B. $S = \frac{1}{4}\pi$. C. $S = \frac{1}{2}\pi$. D. $S = 2\pi$.

Câu 75: (CHUYÊN SƯ PHẠM HÀ NỘI LẦN 4 NĂM 2019) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi (H)

là tập hợp các điểm biểu diễn hình học của số phức z thỏa mãn $\begin{cases} |z + \bar{z}| \geq 12 \\ |z - 4 - 3i| \leq 2\sqrt{2} \end{cases}$. Diện tích

của hình phẳng (H) là

- A. $4\pi - 4$. B. $8\pi - 8$. C. $2\pi - 4$. D. $8\pi - 4$.

TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN LÀ ĐƯỜNG CONIC

Câu 76: Trong mặt phẳng phức Oxy, giả sử M là điểm biểu diễn số phức Z thỏa mãn $|z + 2| + |z - 2| = 8$.

Tập hợp những điểm M là?

- A. (E): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$. B. (E): $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$.
C. (T): $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 64$. D. (T): $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$

Câu 77: (Sở Ninh Bình 2019 lần 2) Hình phẳng giới hạn bởi tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z - 3| + |z + 3| = 10$ có diện tích bằng

- A. 12π . B. 20π . C. 15π . D. 25π .

Câu 78: (Chuyên KHTN) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - i| = 10$.

- A. 15π . B. 12π . C. 20π . D. Đáp án khác.

Câu 79: Tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện $|z + 1| + |z - 1| = 4$ là:

- A. $x^2 + y^2 = 4$ B. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$
C. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ D. $3x^2 + 4y^2 - 36 = 0$

Câu 80: (Lương Thế Vinh Đồng Nai) Cho số phức z thỏa mãn $|z + 2| + |z - 2| = 4$. Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng tọa độ là

A. Một đường elip.

B. Một đường parabol.

C. Một đoạn thẳng.

D. Một đường tròn.

Câu 81: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2|+|z+2|=10$.

A. Đường tròn $(x-2)^2+(y+2)^2=100$.B. Elip $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$.C. Đường tròn $(x-2)^2+(y+2)^2=10$.D. Elip $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$.

Câu 82: Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z trong mặt phẳng phức, biết số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z+4|+|z-4|=10$.

A. Tập hợp các điểm cần tìm là đường tròn có tâm $O(0;0)$ và có bán kính $R=4$.B. Tập hợp các điểm cần tìm là đường elip có phương trình $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$.C. Tập hợp các điểm cần tìm là những điểm $M(x;y)$ trong mặt phẳng Oxy thỏa mãn phương trình $\sqrt{(x+4)^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+y^2}=12$.D. Tập hợp các điểm cần tìm là đường elip có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Câu 83: (THTT lần 5) Trong mặt phẳng Oxy, gọi (H) là hình biểu diễn tập hợp các số phức z thỏa mãn $|7z-\bar{z}|\leq 10$. Diện tích của hình (H) bằng

A. $\frac{5\pi}{2}$.B. $\frac{25\pi}{12}$.C. $\frac{7\pi}{2}$.D. 5π .

Câu 84: Tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện $|z-2|-|z+2|=3$ là:

A. $x^2-y^2=1$ B. $(x-2)^2+(y+2)^2=9$ C. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ D. $\frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=1$

Câu 85: Gọi M và A là các điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số phức $z=x+yi; a=10+6i$. Tìm tập hợp E_2 các điểm M sao cho tích $z(z-a)$ là một số thuần ảo.

A. Đường tròn tâm $I(2+\sqrt{2};0)$, bán kính $R=\sqrt{5+4\sqrt{2}}$ B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$ C. Là một hyperbol vuông góc có tâm đối xứng $I(-5;-3)$, có trục thực nằm trên trục Ox, độ dài các trục đều bằng 8.D. Là một hyperbol có tâm đối xứng $I(5;3)$, có trục thực nằm trên trục Ox, độ dài các trục đều bằng 8.

TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN LÀ ĐƯỜNG CONG

Câu 86: Trong mặt phẳng phức, cho số phức a bất kì, tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z sao cho: $z^2-a^2=\bar{z}^2-\bar{a}^2$.

A. Đường tròn tâm A , bán kính $R=AO$ B. Đường tròn tâm A , bán kính $R=2$

C. Một hyperbol vuông góc

D. Đường thẳng $x=1$

Câu 87: Gọi M và A là các điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số phức $z = x + yi; a = 10 + 6i$. Tìm tập hợp E_1 các điểm M sao cho tích $z(z - a)$ là một số thực.

A. Đường tròn tâm $I(2 + \sqrt{2}; 0)$, bán kính $R = \sqrt{5 + 4\sqrt{2}}$

B. Đường tròn tâm $I(0; 1)$, bán kính $R = 1$

C. Là một hyperbol vuông góc $y = \frac{3x}{x-5}, x \neq 5$

D. Là một hyperbol $y = \frac{3x}{x-5}, x \neq 5$

Câu 88: Cho hai số phức: $p = a + bi; q = c + di$

Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z sao cho số $(z - p)(z - q)$ là số thực.

A. Đường tròn tâm $O(0; 0)$, bán kính $R = 1$

B. Đường tròn tâm $I(0; 1)$, bán kính $R = 1$

C. Một hyperbol vuông góc có tiệm cận là $x = \frac{a+c}{2}; y = \frac{b+d}{2}$

D. Các đường thẳng $y = 2x$, trừ gốc tọa độ $O(0; 0)$

Câu 89: (THPT ĐÔNG LƯƠNG 3 LẦN 2) Xét các số phức z thỏa mãn $\frac{z-1+i}{(z+\bar{z})i+1}$ là số thực. Tập hợp

các điểm biểu diễn của số phức $w = \frac{z}{2}$ là parabol có đỉnh

A. $I\left(\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

B. $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

C. $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

D. $I\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

Câu 90: Cho số phức $z = m - 2 + (m^2 - 1)i$ với $m \in \mathbb{R}$. Gọi (C) là tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và Ox .

A. 1.

B. $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{32}{3}$.

D. $\frac{8}{3}$.

Câu 91: (Thuan-Thanh-Bac-Ninh) Cho số phức $z = m + 3 + (m^2 - 1)i$, với m là tham số thực thay đổi. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thuộc đường cong (C) . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành.

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{8}{3}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{4}{3}$.

Câu 92: (KIM LIÊN HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho số phức $z = m + 3 + (m^2 - m - 6)i$ với $m \in \mathbb{R}$. Gọi (P) là tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và trục hoành bằng

A. $\frac{125}{6}$.

B. $\frac{17}{6}$.

C. 1.

D. $\frac{55}{6}$.

Câu 93: (Đặng Thành Nam Đề 14) Cho số phức $z = m + (m^3 - m)i$, với m là tham số thực thay đổi. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là đường cong (C) . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành.

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{3}{2}$.

TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN LIÊN QUAN ĐA GIÁC

- Câu 94:** Cho $z_1 = 1+i; z_2 = -1-i$. Tìm $z_3 \in \mathbb{C}$ sao cho các điểm biểu diễn z_1, z_2, z_3 tạo thành tam giác đều.
- A. $z_3 = -\sqrt{2}(1+i)$ và $z_3 = \sqrt{2}(1-i)$ B. $z_3 = -\sqrt{3}(1+i)$ và $z_3 = \sqrt{3}(1-i)$
 C. $z_3 = \sqrt{2}(1+i)$ và $z_3 = -\sqrt{2}(1-i)$ D. $z_3 = \sqrt{3}(1+i)$ và $z_3 = -\sqrt{3}(1-i)$
- Câu 95:** Gọi điểm A, B lần lượt biểu diễn các số phức $z_1; z_2; (z_1 \cdot z_2 \neq 0)$ trên mặt phẳng tọa độ (A, B, C và A', B', C' đều không thẳng hàng) và $z_1^2 + z_2^2 = z_1 \cdot z_2$. Với O là gốc tọa độ, khẳng định nào sau đây đúng?
- A. Tam giác OAB đều. B. Tam giác OAB vuông cân tại O .
 C. Tam giác OAB vuông cân tại B . D. Diện tích tam giác OAB không đổi.
- Câu 96:** Gọi điểm A, B lần lượt biểu diễn các số phức z và $z' = \frac{1+i}{2}z; (z \neq 0)$ trên mặt phẳng tọa độ (A, B, C và A', B', C' đều không thẳng hàng). Với O là gốc tọa độ, khẳng định nào sau đây đúng?
- A. Tam giác OAB đều. B. Tam giác OAB vuông cân tại O .
 C. Tam giác OAB vuông cân tại B . D. Tam giác OAB vuông cân tại A .
- Câu 97: (CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3)** Cho hai số phức z_1, z_2 khác 0 , thỏa mãn $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$. M, N lần lượt là hai điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 trên mặt phẳng Oxy . Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. Tam giác OMN nhọn và không đều. B. Tam giác OMN đều.
 C. Tam giác OMN tù. D. Tam giác OMN vuông.
- Câu 98:** Xét 3 điểm A, B, C của mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn ba số phức phân biệt z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3|$. Nhận định nào sau đây đúng?
- A. Tam giác ABC đều
 B. O là tâm của tam giác ABC
 C. O là trọng tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC
 D. Trọng tâm của $\triangle ABC$ là điểm biểu diễn của số phức $z_1 + z_2 + z_3$
- Câu 99:** Trong mặt phẳng phức cho các điểm O (gốc tọa độ), A biểu diễn số 1 , B biểu diễn số phức z không thực, A' biểu diễn số phức $z' \neq 0$ và B' biểu diễn số phức zz' . Nhận định nào sau đây đúng?
- A. Tam giác OAB đều
 B. Hai tam giác $OAB, OA'B'$ là hai tam giác đồng dạng
 C. O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác $AA'B'$
 D. Trọng tâm của $\triangle OAB$ là điểm biểu diễn của số phức $z_1 + z_2 + z_3$
- Câu 100:** Các điểm A, B, C và A', B', C' lần lượt biểu diễn các số phức z_1, z_2, z_3 và z'_1, z'_2, z'_3 trên mặt phẳng tọa độ (A, B, C và A', B', C' đều không thẳng hàng). Biết $z_1 + z_2 + z_3 = z'_1 + z'_2 + z'_3$, khẳng định nào sau đây đúng?
- A. Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bằng nhau.
 B. Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trực tâm.
 C. Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.
 D. Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng tâm đường tròn ngoại tiếp.
- Câu 101: (ĐỀ-THI-THU-ĐH-THPT-CHUYÊN-QUANG-TRUNG-L5-2019)** Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại 4 số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 2$ và $z(\bar{z} + 2) - (z + \bar{z}) - m$ là số thuần ảo. Tổng các phần tử của S là.

- A. $\sqrt{2}+1$. B. $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$. C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 102: (THANH CHƯƠNG 1 NGHỆ AN 2019 LẦN 3) Cho số phức z thỏa mãn $|z-4+\bar{z}|+|z-\bar{z}|\geq 4$ và số phức $w=(z-2i)(\bar{z}i+2-4i)$ có phần ảo là số thực không dương. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hình phẳng (H) là tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z . Diện tích hình (H) gần nhất với số nào sau đây?

- A. 7. B. 17. C. 21. D. 193.

Câu 103: Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=\sqrt{3}$, $|z_2|=2$ được biểu diễn trong mặt phẳng phức lần lượt là các điểm M, N . Biết $\angle(\overline{OM}, \overline{ON})=\frac{\pi}{6}$, tính giá trị của biểu thức $\left|\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right|$.

- A. $\sqrt{13}$ B. 1 C. $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{1}{\sqrt{13}}$

Câu 104: (THPT-Nguyễn-Công-Trứ-Hà-Tĩnh-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3) Cho z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn phương trình $|2z-i|=|2+iz|$, biết $|z_1-z_2|=1$. Tính giá trị của biểu thức $P=|z_1+z_2|$.

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 105: (SỞ GDĐT KIÊN GIANG 2019) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=4, |z_2|=6$ và $|z_1+z_2|=10$. Giá trị của $\frac{|z_1-z_2|}{2}$ là

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 106: Xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M và M' . Số phức $z(4+3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là N và N' . Biết rằng $MM'N'N$ là một hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z+4i-5|$.

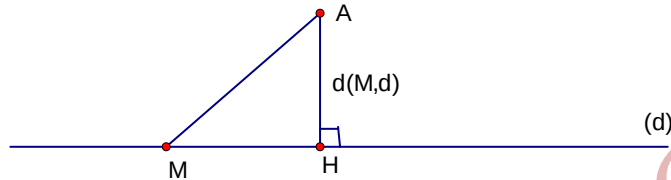
- A. $\frac{5}{\sqrt{34}}$. B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. D. $\frac{4}{\sqrt{13}}$.

DẠNG 4: SỐ PHỨC CÓ MODUN NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT MODUN MIN, MAX CỦA SỐ PHỨC CÓ TẬP HỢP BIỂU DIỄN LÀ ĐƯỜNG ĐƯỜNG THẲNG

Bài toán 1:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm A và đường thẳng (d) . Điểm M chạy trên đường thẳng (d) sao cho độ dài đoạn AM nhỏ nhất. Khi đó hãy tìm vị trí điểm M và tính độ dài AM .

Phương pháp giải:



Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng (d) . Khi đó $AM \geq AH$, nên độ dài đoạn AM nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng (d) và $AM_{\min} = AH = d(M, d)$.

Câu 1. Cho số phức z có điểm biểu diễn nằm trên đường thẳng $(d): 3x - 4y - 3 = 0$. Tính giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

- A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $\frac{4}{5}$. D. $\frac{2}{5}$.

Câu 2. Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z + 2 - 2i| = |z - 4i|$, $w = iz + 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|w|$ là

- A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. B. 2. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $2\sqrt{2}$.

Câu 3. Cho số phức z không phải số thuần ảo thỏa điều kiện $|z^2 + 4| = |z(z + 2i)|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z + i|$ bằng

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Câu 4. Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = |\bar{z} - 2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|\bar{z} + 7 - i|$ là

- A. $\frac{4\sqrt{10}}{5}$. B. 3. C. $\frac{3\sqrt{10}}{5}$. D. $\sqrt{10}$.

Câu 5. Trong các số phức thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$. Tìm môđun nhỏ nhất của số phức $z + 2i$.

- A. $\sqrt{5}$ B. $3\sqrt{5}$. C. $3\sqrt{2}$ D. $3 + \sqrt{2}$

Câu 6. Trong các số phức z thỏa mãn: $|z - 3 + 4i| = |z|$ thì số phức z có modul nhỏ nhất là

- A. $z = \frac{11}{2} + i$. B. $z = \frac{3}{2} - 2i$. C. $z = -5 - \frac{5}{2}i$. D. $z = -3 + \frac{1}{6}i$

Câu 7. Trong các số phức thỏa mãn điều kiện $|z + 3i| = |z + 2 - i|$. Tìm số phức có môđun nhỏ nhất?

- A. $z = 1 - 2i$. B. $z = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$. C. $z = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$. D. $z = -1 + 2i$.

Câu 8. Trong các số phức z thỏa mãn: $|z + 1 - 5i| = |\bar{z} + 3 - i|$, biết rằng số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) có modul nhỏ nhất. Khi đó, tỉ số $\frac{a}{b}$ bằng

- A. 3. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $P = -\sqrt{2}$

Câu 9. Trong mặt phẳng phức Oxy , các số phức z thỏa $|z+2i-1|=|z+i|$. Tìm số phức z được biểu diễn bởi điểm M sao cho MA ngắn nhất với $A(1,3)$.

- A. $3+i$. B. $1+3i$. C. $2-3i$. D. $-2+3i$.

Câu 10. **(KỶ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG)** Cho tất cả các số phức $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+2i-1|=|z+i|$. Biết z được biểu diễn bởi điểm M sao cho MA ngắn nhất với $A(1;3)$. Tìm $P = 2x + 3y$.

- A. 9. B. 11. C. -3. D. 5.

Câu 11. **(Lê Quý Đôn Điện Biên Lần 3)** Trong các số phức z thỏa mãn $|z-1+i| = |\bar{z}+1-2i|$, số phức z có mô đun nhỏ nhất có phần ảo là

- A. $\frac{3}{10}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $-\frac{3}{5}$. D. $-\frac{3}{10}$.

Câu 12. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+2i|=|z-1-2i|$. Gọi w là số phức thỏa mãn điều kiện $w = (1+i)z + 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |w|$ là:

- A. $P_{\min} = \frac{1}{5}$. B. $P_{\min} = \frac{5}{\sqrt{34}}$. C. $P_{\min} = \frac{5}{\sqrt{41}}$. D. $P_{\min} = \frac{1}{3}$

Câu 13. Xét số phức z thỏa mãn $|z+i+1| = |\bar{z}-4i+2|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z-2i+1|$.

- A. $\frac{98}{5}$. B. $\frac{102}{5}$. C. $\frac{7\sqrt{10}}{5}$. D. $\frac{\sqrt{470}}{5}$.

Câu 14. Cho số phức z thỏa $|z|=5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\left| \frac{3+4i}{z-5} \right|$.

Lời giải

$$\text{Đặt } A = \frac{3+4i}{z-5} \Rightarrow z = \frac{3+5A+4i}{A} \Rightarrow |z| = \left| \frac{3+5A+4i}{A} \right| \Rightarrow \left| \frac{3+5A+4i}{A} \right| = 5 \Rightarrow |3+5A+4i| = 5|A|.$$

$$\text{Gọi } A = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \sqrt{(5x+3)^2 + (5y+4)^2} = 5\sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\Leftrightarrow 6x + 8y + 5 = 0.$$

Vậy tập hợp điểm của số phức $A \in (\Delta): 6x + 8y + 5 = 0$.

$$\Rightarrow \min |A| = d[O; (\Delta)] = \frac{1}{2}.$$

Câu 15. Cho số phức z thỏa $|z|=5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\left| \frac{z+4i}{z-5} \right|$.

Lời giải

Đặt $A = \frac{z+4i}{z-5}$. Xét $A=1 \Rightarrow$ không có số phức z nào thỏa. Vậy $A \neq 1$

$$\Rightarrow z = \frac{5A+4i}{A-1} \Rightarrow |z| = \left| \frac{5A+4i}{A-1} \right| \Rightarrow \left| \frac{5A+4i}{A-1} \right| = 5 \Rightarrow |5A+4i| = 5|A-1|.$$

$$\text{Gọi } A = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \sqrt{(5x)^2 + (5y+4)^2} = 5\sqrt{(x-1)^2 + y^2}.$$

$$\Leftrightarrow 50x + 40y - 9 = 0.$$

Vậy tập hợp điểm của số phức $A \in (\Delta): 50x + 40y - 9 = 0$.

$$\Rightarrow \min |A| = d[O; (\Delta)] = \frac{9}{10\sqrt{41}}.$$

Câu 16. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}; a, b \geq 0$). Đặt đa thức $f(x) = ax^2 + bx - 2$. Biết $f(-1) \leq 0$, $f\left(\frac{1}{4}\right) \leq -\frac{5}{4}$. Tính giá trị lớn nhất của $|z|$.

MODUN MIN, MAX CỦA SỐ PHỨC CÓ TẬP HỢP BIỂU DIỄN LÀ ĐƯỜNG TRÒN, HÌNH TRÒN

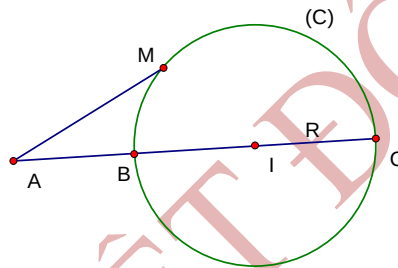
Bài toán 2

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm A và đường tròn (C) có tâm I bán kính R. Điểm M thay đổi trên đường tròn (C). Xác định vị trí điểm M để độ dài đoạn AM đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất và tính các giá trị này.

Phương pháp giải:

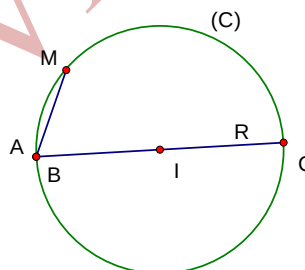
Ta xét ba trường hợp

□ Trường hợp 1: điểm A nằm ở miền ngoài đường tròn (C)



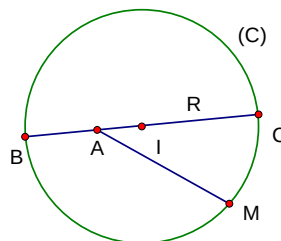
$$AM_{\min} = AB = AI - R \text{ và } AM_{\max} = AC = AI + R$$

□ Trường hợp 2: điểm A nằm ở trên đường tròn (C)



$$AM_{\min} = 0 \text{ và } AM_{\max} = AC = 2R$$

□ Trường hợp 3: điểm A nằm ở miền trong đường tròn (C)



$$AM_{\min} = AB = R - AI \text{ và } AM_{\max} = AC = AI + R$$

Câu 17. Cho số phức z có $|z| = 2$ thì số phức $w = z + 3i$ có modun nhỏ nhất và lớn nhất lần lượt là
#A. 2 và 5. **B.** 1 và 6. **C.** 2 và 6. **D.** 1 và 5.

Câu 18. Cho số phức z thỏa $|z - 3 + 4i| = 2$ và $w = 2z + 1 - i$. Khi đó $|w|$ có giá trị lớn nhất là:

A. $16 + \sqrt{74}$. B. $2 + \sqrt{130}$. C. $4 + \sqrt{74}$. D. $4 + \sqrt{130}$.

Câu 19. Cho số phức z , tìm giá trị lớn nhất của $|z|$ biết rằng z thỏa mãn điều kiện $\left| \frac{-2-3i}{3-2i}z + 1 \right| = 1$
 #A. 3. B. 2. C. 1. D. $\sqrt{2}$.

Câu 20. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3|=2|z|$ và $\min \left| z + \frac{3}{2} + 2i \right| = a + b\sqrt{2}$. Tính $a+b$.
 A. 1. B. $2\sqrt{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 21. Cho số phức z thỏa mãn $|z+2-2i|=1$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ lần lượt là
 A. $2\sqrt{2}+1; 2\sqrt{2}-1$. B. $\sqrt{2}+1; \sqrt{2}-1$. C. 2; 1. D. $\sqrt{3}+1; \sqrt{3}-1$

Câu 22. Cho số phức z thỏa mãn $|z+1+2i|=4\sqrt{5}$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ lần lượt là
 A. $\sqrt{5}$. B. $3\sqrt{5}$. C. $5\sqrt{5}$. D. $5\sqrt{3}$

Câu 23. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=2$. Tìm môđun lớn nhất của số phức z .
 A. $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$. B. $\sqrt{11+4\sqrt{5}}$ C. $\sqrt{6+4\sqrt{5}}$ D. $\sqrt{5+6\sqrt{5}}$

Câu 24. Cho số phức z thỏa mãn $|z-4i-2|=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.
 A. 1 B. 3 C. 7 D. 8

Câu 25. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2+3i|=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$
 A. $\sqrt{13}-3$. B. 2. C. $\sqrt{13}-2$. D. 2

Câu 26. Cho số phức z thỏa mãn $|(1+i)z+1-7i|=\sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$
 A. $\max|z|=4$. B. $\max|z|=3$. C. $\max|7|$. D. $\max|z|=6$

Câu 27. Cho số phức z thỏa $|z-3-4i|=2$ và $P=|z+2-i|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của P . Tính $A=M+m$.

Lời giải

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có: $|z-3-4i|=2 \Leftrightarrow (a-3)^2 + (b-4)^2 = 4$.

Vậy tập hợp điểm $M \in (C): (a-3)^2 + (b-4)^2 = 4$ có tâm $I(3;4)$ và bán kính $R=2$

Trong mặt phẳng phức xét $A(-2;1)$, ta có: $P=|z+2-i|=MA$ với $M \in (C): (a-3)^2 + (b-4)^2 = 4$.

Vậy: $\begin{cases} MA_{\min} = |AI - R| = \sqrt{34} - 2 \\ MA_{\max} = AI + R = \sqrt{34} + 2 \end{cases}$

Câu 28. (Nguyễn Trãi Hải Dương Lần1) Xét các số phức z thỏa mãn $|z-1-3i|=2$. Số phức z mà $|z-1|$ nhỏ nhất là

A. $z=1+5i$. B. $z=1+i$. C. $z=1+3i$. D. $z=1-i$.

Câu 29. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=3$. Tìm môđun lớn nhất của số phức $z-2i$.

A. $\sqrt{26+6\sqrt{17}}$. B. $\sqrt{26-6\sqrt{17}}$. C. $\sqrt{26+8\sqrt{17}}$. D. $\sqrt{26-4\sqrt{17}}$.

Câu 30. Cho số phức z thỏa mãn $|(1-i)z-6-2i|=\sqrt{10}$. Tìm môđun lớn nhất của số phức z .

A. $4\sqrt{5}$ B. $3\sqrt{5}$. C. 3. D. $3+\sqrt{5}$

- Câu 31.** Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 4i| = 2$. Gọi A và B lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$. Tính giá trị của biểu thức $P = A^2 - 2B$.
- A. $P = 43$. B. $P = 80$. C. $P = 8$. D. $P = 48$
- Câu 32.** Trong các số phức z thỏa $|z + 3 + 4i| = 2$, gọi z_0 là số phức có mô đun nhỏ nhất. Khi đó
- A. Không tồn tại số phức z_0 . B. $|z_0| = 2$.
C. $|z_0| = 7$. D. $|z_0| = 3$.
- Câu 33.** Trong tất cả các số phức z thỏa mãn $\left| \frac{(1+i)z}{1-i} + 2 \right| = 1$ hãy tìm số phức z có mô đun nhỏ nhất.
- A. $|z|_{\min} = 1$. B. $|z|_{\min} = 2 - \sqrt{2}$. C. $|z|_{\min} = 0$. D. $|z|_{\min} = 2$
- Câu 34.** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5}$ và $w = z + 1 + i$ có mô đun lớn nhất. Số phức z có mô đun bằng:
- A. $2\sqrt{5}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $\sqrt{6}$. D. $5\sqrt{2}$.
- Câu 35.** Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 3i| = 1$. Giá trị lớn nhất của $|\bar{z} + 1 + i|$ là:
- A. $\sqrt{13} + 2$. B. 4. C. 6. D. $\sqrt{13} + 1$
- Câu 36.** (Sở Vĩnh Phúc) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 3i| = 1$. Giá trị lớn nhất của $|\bar{z} + 1 + i|$ là
- A. 4 B. 6 C. $\sqrt{13} + 1$. D. $\sqrt{13} + 2$.
- Câu 37.** Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 2i| = 4$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z + 2 + i|$. Giá trị của $T = M^2 + m^2$ là
- A. $T = 50$. B. $T = 64$. C. $T = 68$. D. $T = 16$
- Câu 38.** Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - i| = \sqrt{2}$. Gọi A và B lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z - 2 + i|$. Giá trị của biểu thức $P = 2A + B^2$ gần bằng.
- A. 6. B. 7. C. 8. D. 9
- Câu 39.** Cho số phức z thỏa mãn: $|z - 1 + i| = \sqrt{2}$. Gọi A và B lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z + 2|$. Khi đó $A^2 + B^2$ có giá trị bằng
- A. 20. B. 18. C. 24. D. 32
- Câu 40.** Cho số phức z thỏa mãn $|\bar{z} - 1 + 2i| = \sqrt{10}$. Giá trị lớn nhất của $|z + 1 - 4i|$ bằng
- A. $\sqrt{10}$. B. $10\sqrt{3}$. C. $3\sqrt{10}$. D. $4\sqrt{10}$
- Câu 41.** Cho số phức z thỏa mãn: $|z + 1 - 2i| = 2\sqrt{5}$. Gọi A và B lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z + i|$. Khi đó AB có giá trị bằng
- A. 10. B. -10. C. 12. D. -12
- Câu 42.** Cho số phức z thỏa mãn $\left| \frac{1+i}{1-i} z - 1 + i \right| = 2$. Giá trị lớn nhất của $A = |z - 2 + i|$ là.
- A. $2 + \sqrt{2}$. B. $\sqrt{5} - 2$. C. $2 + \sqrt{5}$. D. 5
- Câu 43.** Số phức z có mô đun lớn nhất và thỏa mãn điều kiện $|\bar{z}(1+i) - 3 + 2i| = \frac{\sqrt{13}}{2}$ là:
- A. $z = 1 + 3i$ B. $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}i$ C. $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ D. $z = \frac{3}{4} + \frac{15}{4}i$

- Câu 44.** Trong mặt phẳng phức Oxy, các số phức z thỏa $|z - 5i| \leq 3$. Nếu số phức z có môđun nhỏ nhất thì phần ảo bằng bao nhiêu?
A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4
- Câu 45.** Cho số phức z thỏa mãn: $|z(1+i) - 1 + 2i| = 2$. Gọi A và B lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z + 1 + 3i|$. Khi đó $2A^2 - B^2$ có giá gần nhất bằng
A. 20. **B.** 18. **C.** 64. **D.** 32
- Câu 46.** Trong mặt phẳng phức Oxy, trong các số phức z thỏa $|z + 1 - i| \leq 1$. Nếu số phức z có môđun lớn nhất thì số phức z có phần thực bằng bao nhiêu?
A. $\frac{-\sqrt{2} - 2}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{2} - 2}{2}$. **C.** $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$
- Câu 47.** Cho hai số phức z và w biết chúng thỏa mãn $\left| \frac{(1+i)z}{1-i} + 2 \right| = 1$ và $w = iz$. Tìm giá trị lớn nhất của $M = |z - w|$.
A. $3\sqrt{3}$ **B.** 3 **C.** $3\sqrt{2}$ **D.** $2\sqrt{3}$
- Câu 48.** Trong mặt phẳng phức Oxy, trong các số phức z thỏa $|z + 1 - i| \leq 1$. Nếu số phức z có môđun lớn nhất thì số phức z có phần thực bằng bao nhiêu?
A. $\frac{-\sqrt{2} - 2}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{2} - 2}{2}$. **C.** $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$.
- Câu 49.** Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - 2z + 5| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)|$ và số phức w thỏa $w = z - 2 + 2i$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|w|$.

MODUN MIN, MAX CỦA SỐ PHỨC CÓ TẬP HỢP BIỂU DIỄN LÀ ELIP

- Câu 50.** (CHUYÊN NGUYỄN QUANG ĐIỀU ĐỒNG THÁP 2019 LẦN 2) Gọi S là tập hợp các số phức thỏa $|z - 3| + |z + 3| = 10$. Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc S có môđun nhỏ nhất. Giá trị biểu thức $P = z_1^2 + z_2^2$ là
A. 16. **B.** -16. **C.** 32. **D.** -32.
- Câu 51.** (Chuyên Hạ Long lần 2-2019) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 6| + |z + 6| = 20$. Gọi M, n lần lượt là môđun lớn nhất và nhỏ nhất của z . Tính $M - n$
A. $M - n = 2$. **B.** $M - n = 4$. **C.** $M - n = 7$. **D.** $M - n = 14$.
- Câu 52.** Cho số phức z thỏa mãn $|z - 8| + |z + 8| = 20$. Gọi m, n lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z|$. Tính $P = m + n$.
A. $P = 16$. **B.** $P = 10\sqrt{2}$. **C.** $P = 17$. **D.** $P = 5\sqrt{10}$.
- Câu 53.** Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3| + |z + 3| = 8$. Gọi M, m lần lượt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất $|z|$. Khi đó $M + m$ bằng
A. $4 - \sqrt{7}$. **B.** $4 + \sqrt{7}$. **C.** 7. **D.** $4 + \sqrt{5}$.
- Câu 54.** (KÊNH TRUYỀN HÌNH GIÁO DỤC QUỐC GIA VTV7 -2019) Trong các số phức z thỏa mãn $|z + 4 - 3i| + |z - 8 - 5i| = 2\sqrt{38}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z - 2 - 4i|$.
A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 2. **D.** 1.

- Câu 55. (THPT-Toàn-Thắng-Hải-Phòng)** Cho số phức z thỏa mãn $|(1+i)z+2|+|(1+i)z-2|=4\sqrt{2}$.
Gọi $m = \max |z|$; $n = \min |z|$ và số phức $w = m + ni$. Tính $|w|^{2018}$
A. 4^{1009} . B. 5^{1009} . C. 6^{1009} . D. 2^{1009} .
- Câu 56. (THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4)** Cho hai số phức z và $\omega = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn: $|z + \sqrt{5}| + |z - \sqrt{5}| = 6$; $5a - 4b - 20 = 0$. Giá trị nhỏ nhất của $|z - \omega|$ là
A. $\frac{3}{\sqrt{41}}$. B. $\frac{5}{\sqrt{41}}$. C. $\frac{4}{\sqrt{41}}$. D. $\frac{3}{41}$.

DẠNG 5: MIN, MAX SỐ PHỨC PP ĐẠI SỐ ÁP DỤNG CÁC TÍNH CHẤT ĐBT, ĐẪNH GIÁ

- Câu 1.** Số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $|z| \geq 2$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left| \frac{z+i}{z} \right|$.
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- Câu 2.** Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \left| 1 + \frac{5i}{z} \right|$.
A. 5. B. 4. C. 6. D. 8.
- Câu 3.** Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất $M_{\max}$ và giá trị nhỏ nhất $M_{\min}$ của biểu thức $M = |z^2 + z + 1| + |z^3 + 1|$.
A. $M_{\max} = 5$; $M_{\min} = 1$. B. $M_{\max} = 5$; $M_{\min} = 2$.
C. $M_{\max} = 4$; $M_{\min} = 1$. D. $M_{\max} = 4$; $M_{\min} = 2$.
- Câu 4.** Xét số phức z thỏa mãn $|z^2 - 6z + 25| = 2|z - 3 + 4i|$. Hỏi giá trị lớn nhất của $|z|$ là:
A. 7. B. 5. C. 3. D. 10.
- Câu 5.** Cho số phức z có $|z| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
 $P = 1008|1+z| + |1+z^2| + |1+z^3| + \dots + |1+z^{2017}|$
A. $P_{\min} = 1007$ B. $P_{\min} = 2018$ C. $P_{\min} = 1008$ D. $P_{\min} = 2016$
- Câu 6. (Nguyễn Du Dak-Lak 2019)** Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-i| = |\bar{z}-2+3i|$, số phức z_0 có môđun nhỏ nhất. Phần ảo của z_0 là
A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{4}{3}$. C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{3}{4}$.
- Câu 7.** Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - 2z + 5| = |(z-1+2i)(z+3i-1)|$. Tính $\min |w|$, với $w = z - 2 + 2i$.
A. $\min |w| = \frac{3}{2}$. B. $\min |w| = 2$. C. $\min |w| = 1$. D. $\min |w| = \frac{1}{2}$.
- Câu 8. (CỤM TRẦN KIM HƯNG -HÙNG YÊN NĂM 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 + iz + 2| = |z^2 + z - i + 1|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z - 2 + i|$ là
A. $2\sqrt{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. 2. D. $\sqrt{5} - \frac{1}{2}$.
- Câu 9. (HKII-CHUYÊN-NGUYỄN-HUYỆ-HÀ-NỘI)** Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - 2z + 5| = |(z-1+2i)(z+3i-1)|$. Tính $\min |w|$, với $w = z - 2 + 2i$.

A. $\min|w| = \frac{1}{2}$. B. $\min|w| = 1$. C. $\min|w| = \frac{3}{2}$. D. $\min|w| = 2$.

Câu 10. (THPT-Phúc-Trạch-Hà-Tĩnh-lần-2-2018-2019-thi-tháng-4) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$ và biểu thức $|iz + 2 - i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm phần ảo của số phức z .

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $-\frac{5}{2}$. C. $-\frac{3}{2}$. D. $\frac{5}{2}$.

Câu 11. (Chuyên Vinh Lần 2) Cho các số phức z và w thỏa mãn $(2+i)|z| = \frac{z}{w} + 1 - i$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = |w + 1 - i|$.

A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. D. $\sqrt{2}$.

Câu 12. (Chuyên Vinh Lần 2) Cho số phức z và w thỏa mãn $(3+2i)|z| = \frac{z}{iw-1+3i} + 1 - i$. Tính giá trị lớn nhất của $T = |w|$

A. $\frac{\sqrt{2}}{3} + \sqrt{11}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{5} + \sqrt{10}$. C. $\frac{5}{\sqrt{2}}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{5} + \sqrt{13}$

Câu 13. (Chuyên KHTN lần 2) Xét các số phức z thỏa mãn $|z - 2 - i| = 1$. Gọi m, M là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $|z|$. Giá trị $M + m$ bằng:

A. 3. B. 2. C. $1 + 2\sqrt{5}$. D. $2\sqrt{5}$.

Câu 14. Cho số phức z thỏa mãn $z \neq \bar{z}$, $\frac{4+z+z^2}{4-z+z^2}$ là số thực. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z + 1 - i|$. Tính $P = M + m$.

A. $P = 4$. B. $P = 2$ C. $P = 4 + \sqrt{2}$ D. $P = 4 + 2\sqrt{2}$

Câu 15. (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – NAM ĐỊNH 2019 – LẦN 1) Cho số phức z thỏa mãn $2|z| = |z^2 + 4|$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$.

A. $1 + \sqrt{5}$. B. $1 + 3\sqrt{5}$. C. $3 + \sqrt{5}$. D. $\sqrt{6 + \sqrt{13}}$.

Câu 16. Cho số phức $z = a + bi$ ($a \geq 0, b \geq 0$) thỏa mãn $a - b - 2 \leq 0$, $a + 4b - 12 \leq 0$. Hỏi giá trị lớn nhất của $|z|$ là

A. $2\sqrt{5}$. B. $3\sqrt{2}$. C. 5. D. $2\sqrt{6}$.

Câu 17. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 + 4| = |z|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính $P = M + m$.

A. $P = \frac{2\sqrt{17} + 1}{2}$. B. $P = \sqrt{17}$. C. $P = \frac{\sqrt{17} + 1}{2}$. D. $P = \frac{2\sqrt{17} - 1}{2}$.

Câu 18. Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là số phức thỏa mãn hai điều kiện $|z - 2|^2 + |z + 2|^2 = 26$ và $\left|z - \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i\right|$ đạt giá trị lớn nhất. Tính tích xy .

A. $xy = \frac{9}{4}$. B. $xy = \frac{13}{2}$. C. $xy = \frac{16}{9}$. D. $xy = \frac{9}{2}$.

- Câu 19.** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $\frac{z-2i}{z-2}$ là số thuần ảo. Khi số phức z có môđun lớn nhất. Tính giá trị biểu thức $P = a + b$.
- A. $P = 0$ B. $P = 4$ C. $P = 2\sqrt{2} + 1$ D. $P = 1 + 3\sqrt{2}$
- Câu 20.** Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z - 1 - i| = 5$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z - 7 - 9i| + \sqrt{2}|(1+i)z + 8 - 8i|$ là?
- A. $3\sqrt{5}$. B. $5\sqrt{5}$. C. $2\sqrt{5}$. D. $4\sqrt{5}$.
- Câu 21.** Cho số phức z thỏa mãn $|z - i| = 2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z + 2| + |z + 2 - 2i|$. Tính $P = M + m$
- A. $P = 2 + \sqrt{17}$. B. $P = 2 + 2\sqrt{17}$. C. $P = \sqrt{2 + 2\sqrt{17}}$. D. $P = \sqrt{2 + \sqrt{17}}$.
- Câu 22.** Cho số thực z_1 và số phức z_2 thỏa mãn $|z_2 - 2i| = 1$ và $\frac{z_2 - z_1}{1+i}$ là số thực. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$. Tính giá trị của biểu thức $T = M + m$?
- A. $T = 4$ B. $T = 4\sqrt{2}$ C. $T = 3\sqrt{2} + 1$ D. $T = \sqrt{2} + 3$
- Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2(m+1)z + m^2 + 1 = 0$, với m là tham số
- Câu 23.** thực. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|}$ là M_0 đạt tại $m = m_0$. Tính $T = M_0 + m_0$.
- A. $T = 2\sqrt{2}$. B. $T = 2$ C. $T = 2\sqrt{2} + 2$ D. $T = 2\sqrt{2} - 2$
- Câu 24.** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z + \frac{4i}{z}\right| = 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z - 1 + i|$. Tính $P = M.m$.
- A. $P = 4$. B. $P = 2 - \sqrt{2}$. C. $P = \sqrt{34}$. D. $P = 2 - \sqrt{2}$.
- Câu 25.** Trong các số phức z thỏa mãn $|iz + 6 - 3i| = |2z - 6 - 9i|$ có hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - z_2| = \frac{8}{5}$. Hỏi giá trị lớn nhất của $|z_1 + z_2|$ là?
- A. $\frac{56}{5}$. B. 10 . C. $\frac{44}{5}$. D. $\frac{76}{5}$.
- Câu 26.** (Kim Liên 2016-2017) Cho số phức z và w biết chúng đồng thời thỏa mãn hai điều kiện: $\left|\frac{(1+i)z}{1-i} + 2\right| = 1$ và $w = iz$. Tìm giá trị lớn nhất của $M = |z - w|$
- A. $M = 3\sqrt{3}$. B. $M = 3$. C. $M = 3\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{3}$.
- Câu 27.** Cho số phức $z = x + 2yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa $|z| = 1$. Tính tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = x - y$.
- A. 0 . B. $\sqrt{5}$. C. $-\sqrt{5}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$
- Câu 28.** Cho biết $\left|z + \frac{4}{z}\right| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z|^2 + |z| + 1$?
- A. $8 - 3\sqrt{5}$ B. $6 + \sqrt{5}$ C. $6 - \sqrt{5}$ D. $8 + 3\sqrt{5}$
- Câu 29.** Cho số phức $|z^{2017} - 1| = 1$. Gọi $P = |z|$. Tính $A = 2017 \cdot (\max P) - 2017 \cdot (\min P)$.

- A. $A = 2017 \cdot \sqrt[2016]{2}$ B. $A = 2017 \cdot \sqrt[2017]{3}$ C. $A = 2017 \cdot \sqrt[2017]{2}$ D. $A = 2017$

ÁP DỤNG CÁC BĐT BUNHIACOPXKI

- Câu 30.** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 - z_2 = 3 + 4i$ và $|z_1 + z_2| = 5$. Hỏi giá trị lớn nhất của biểu thức $|z_1| + |z_2|$ là?
- A. 5. B. $5\sqrt{3}$. C. $12\sqrt{5}$. D. $5\sqrt{2}$.
- Câu 31.** Cho số phức z thỏa $|z| = 1$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z + 1| + 2|z - 1|$.
- A. $\max T = 2\sqrt{5}$. B. $\max T = 2\sqrt{10}$. C. $\max T = 3\sqrt{5}$. D. $\max T = 3\sqrt{2}$
- Câu 32.** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = |z + i| + |z - 2 - i|$.
- A. $\max T = 8\sqrt{2}$. B. $\max T = 4$. C. $\max T = 4\sqrt{2}$. D. $\max T = 8$.
- Câu 33. (THPT LÝ THƯỜNG KIỆT – HÀ NỘI)** Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $|z + i|$
- A. $\sqrt{61}$. B. $\sqrt{41}$. C. $5\sqrt{3}$. D. $3\sqrt{5}$.
- Câu 34.** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z_1| + |z_2|$.
- A. $P = 4\sqrt{6}$ B. $P = 2\sqrt{26}$ C. $P = 5 + 3\sqrt{5}$ D. $P = 32 + 3\sqrt{2}$
- Câu 35. (THPT TX QUẢNG TRỊ LẦN 1 NĂM 2019)** Cho hai số phức z, w thỏa mãn $z + 3w = 2 + 2\sqrt{3}i$ và $|z - w| = 2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z| + |w|$ bằng
- A. $2\sqrt{21}$ B. $2\sqrt{7}$ C. $\frac{\sqrt{21}}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{21}}{3}$
- Câu 36. (NGUYỄN TRUNG THIÊN HÀ TĨNH)** Với ai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z_1| + |z_2|$ là:
- A. $5 + 3\sqrt{5}$. B. $2\sqrt{26}$. C. $4\sqrt{6}$. D. $34 + 3\sqrt{2}$.
- Câu 37. (Nguyễn Tất Thành Yên Bái)** Cho z là số phức thỏa mãn $|\bar{z}| = |z + 2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z - 1 + 2i| + |z + 1 + 3i|$ là
- A. $5\sqrt{2}$. B. $\sqrt{13}$. C. $\sqrt{29}$. D. $\sqrt{5}$.
- Câu 38. (Đặng Thành Nam Đề 12)** Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|2z + 2 - 3i| = 1$. Khi biểu thức $P = 2|z + 2| + |z - 3|$ đạt giá trị lớn nhất thì giá trị của $a - b$ bằng
- A. -3. B. 2. C. -2. D. 3.
- Câu 39. (SỞ NAM ĐỊNH 2018-2019)** Cho các số phức z, w thỏa mãn $|w + i| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w = (2 + i)(z - 4)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z - 2i| + |z - 6 - 2i|$.
- A. 7. B. $2\sqrt{53}$. C. $2\sqrt{58}$ D. $4\sqrt{13}$.
- Câu 40. (Sở Bắc Ninh 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|(1 + i)z + 1 - 3i| = 3\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z + 2 + i| + \sqrt{6}|z - 2 - 3i|$ bằng
- A. $5\sqrt{6}$. B. $\sqrt{15}(1 + \sqrt{6})$. C. $6\sqrt{5}$. D. $\sqrt{10} + 3\sqrt{15}$.

Câu 41. (SỞ GD&ĐT KIÊN GIANG 2019) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 2 + 3i| = 5|z_2 + 2 + 3i| = 3$. Gọi m_0 là giá trị lớn nhất của phần thực số phức $\frac{z_1 + 2 + 3i}{z_2 + 2 + 3i}$. Tìm m_0 .

- A. $m_0 = \frac{3}{5}$. B. $m_0 = \frac{81}{25}$. C. $m_0 = 3$. D. $m_0 = 5$.

Câu 42. (Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đắk Lắk) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 2| = |z + 2i|$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |z - 1 - 2i| + |z - 3 - 4i| + |z - 5 - 6i|$ được viết dạng $\frac{a + b\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$ với a, b là số hữu tỉ. Giá trị của $3a - b$ bằng

- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 43. (Đặng Thành Nam Đề 3) Trong các số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = 2$ có hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - z_2| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1|^2 - |z_2|^2$ bằng

- A. -10. B. $-4 - 3\sqrt{5}$. C. -5. D. $-6 - 2\sqrt{5}$.

ÁP DỤNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

Câu 44. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |1 + z| + 3|1 - z|$.

- A. $3\sqrt{15}$ B. $6\sqrt{5}$ C. $\sqrt{20}$ D. $2\sqrt{20}$.

Câu 45. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 1| + |z^2 - z + 1|$. Tính giá trị của $M.m$.

- A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{39}{4}$. C. $3\sqrt{3}$. D. $\frac{13}{4}$.

Câu 46. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z^2 - z| + |z^2 + z + 1|$ với z là số phức thỏa mãn $|z| = 1$.

- A. $\max P = \frac{13}{4}$ B. $\max P = \frac{9}{4}$ C. $\max P = \frac{13}{3}$ D. $\max P = \frac{11}{3}$

Câu 47. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z^2 + 1| - |1 + z|$. Tính $T = a + b$.

- A. $T = 2 - \sqrt{2}$. B. $T = 2 + \sqrt{2}$. C. $T = 2 - \sqrt{2}$. D. $T = -\sqrt{2}$.

Câu 48. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 1| + |z^2 - z + 1|$. Tính $T = \frac{a}{b^2 + 1}$.

- A. $T = \frac{5}{4}$. B. $T = \frac{5}{26}$. C. $T = \frac{\sqrt{3}}{4}$. D. $T = \frac{13}{16}$.

Câu 49. Cho số phức z thỏa mãn $|(z + 2)i + 1| + |(\bar{z} - 2)i - 1| = 6$. Tính tổng $T = \max|z| + \min|z|$?

- A. $T = \frac{5\sqrt{5} - 2}{2}$. B. $T = 0$. C. $T = 6$. D. $T = \frac{3\sqrt{5} - 2}{2}$.

Câu 50. Cho hai số phức z thỏa mãn: $|z| = 1$. Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z^3 + 1| + |z^2 - z + 1|$. Tính $T = a + b$.

- A. $T = \frac{4(13 + 5\sqrt{10})}{27}$. B. $T = 5$. C. $T = \frac{4(15 + 5\sqrt{10})}{27}$. D. $T = \frac{4(14 + 5\sqrt{10})}{27}$.

Câu 51. Cho số phức thỏa $|z| = 1$. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = |z + 1| + |z^2 - z + 1|$.

- Câu 52. (Sở Hưng Yên Lần 1)** Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1|+|z^2-z+1|$. Tính $M.m$.
- A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{39}{4}$. C. $3\sqrt{3}$. D. $\frac{13}{4}$.
- Câu 53.** Cho số phức $z=x+yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn điều kiện $|z+1-i|+|z+2-3i|=\sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P=x|z|^2$. Tổng $M+2m$ bằng
- A. -54 . B. 27 . C. 18 . D. -9 .
- Câu 54.** Cho số phức $z=\frac{i-m}{1-m(m-2i)}$ ($m \in \mathbb{R}$). Gọi k ($k \in \mathbb{R}$) là giá trị nhỏ nhất sao cho tồn tại $|z-1| \leq k$. Giá trị k thuộc khoảng nào sau đây.
- A. $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$. B. $\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$. C. $\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{5}\right)$. D. $\left(\frac{4}{5}; 1\right)$.
- Câu 55. (THPT Sơn Tây Hà Nội 2019)** Cho số phức z có $|z|=1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|1-z|+|1+z^2|$. Tính giá trị M^2+m^2 .
- A. 20 . B. 18 . C. 24 . D. 16 .
- Câu 56. (SỞ PHÚ THỌ LẦN 2 NĂM 2019)** Giả sử z là số phức thỏa mãn $|iz-2-i|=3$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $2|z-4-i|+|z+5+8i|$ bằng
- A. $18\sqrt{5}$. B. $3\sqrt{15}$. C. $15\sqrt{3}$. D. $9\sqrt{5}$.
- Câu 57. (Chuyên Sơn La Lần 3 năm 2018-2019)** Cho số phức z có phần thực bằng $\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của $\left|\frac{1}{z}-i\right|$ bằng
- A. $\sqrt{2}$. B. 1 . C. $1+\sqrt{2}$. D. 2 .
- Câu 58. (CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG QUẢNG NAM LẦN 2 NĂM 2019)** Xét tập hợp S các số phức $z=x+yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn điều kiện $|3z-\bar{z}|=|(1+i)(2+2i)|$. Biểu thức $Q=|z-\bar{z}|(2-x)$ đạt giá trị lớn nhất là M và đạt được tại $z_0=x_0+y_0i$ (khi z thay đổi trong tập S). Tính giá trị $T=M.x_0y_0^2$.
- A. $T=-\frac{9\sqrt{3}}{2}$. B. $T=\frac{9\sqrt{3}}{4}$. C. $T=\frac{9\sqrt{3}}{2}$. D. $T=-\frac{9\sqrt{3}}{4}$.
- Câu 59. (KHTN Hà Nội Lần 3)** Xét các số phức z thỏa mãn $|z|=1$, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|z^4+z+\frac{1}{2}\right|^2$ bằng
- A. $\frac{\sqrt{2}}{8}$. B. $\frac{1}{8}$. C. $\frac{1}{16}$. D. $\frac{1}{4}$.
- Câu 60. (Chuyên Bắc Giang)** Cho số phức z có $|z|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z^2-z|+|z^2+z+1|$ là
- A. $\frac{13}{4}$. B. 3 . C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{11}{4}$.

Câu 61. (CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP 2019 LẦN 2) Cho các số phức z và w thỏa mãn $(3-i)|z| = \frac{z}{w-1} + 1-i$. Tìm giá trị lớn nhất $T = |w+i|$.

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. C. 2. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 62. (CỤM TRƯỜNG SÓC SƠN MÊ LINH HÀ NỘI) Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-2i| + |z-4-6i| = 9$, giá trị lớn nhất của $|z-10-14i|$ là

- A. 17. B. 20. C. 15. D. 12.

Câu 63. (THPT PHỤ DỤC – THÁI BÌNH) Hai số phức z, w thay đổi nhưng luôn thỏa mãn đẳng thức $(1+i)|z^2 - 2iz - 1| = \frac{2019\bar{z} + 2019i}{w} + 2 - 2i$. Giá trị lớn nhất của $|w|$ là

- A. $\frac{2019\sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{2019\sqrt{2}}{2}$. C. 2019. D. Đáp án khác.

DẠNG 6: MIN, MAX SỐ PHỨC PP HÌNH HỌC

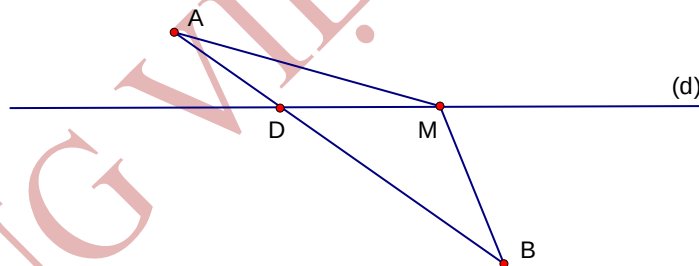
Bài toán 1

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm phân biệt A, B và đường thẳng (d) . Điểm M chạy trên đường thẳng (d) sao cho tổng độ dài đoạn $AM + BM$ nhỏ nhất. Khi đó hãy tìm vị trí điểm M và tính $AM + BM$.

Phương pháp giải:

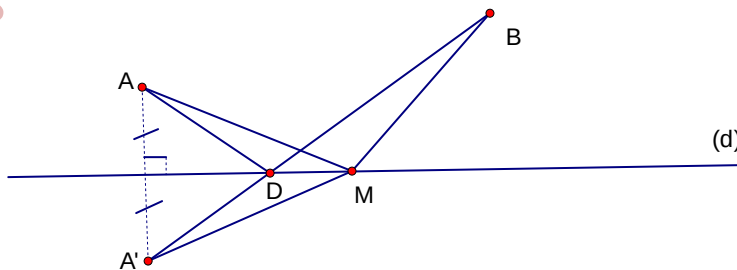
Ta xét hai trường hợp

+) Trường hợp 1: hai điểm A, B nằm về hai phía đối với đường thẳng (d)



Ta có $MA + MB \geq AB$ nên $(MA + MB)_{\min} = AB$, đạt được khi $M = AB \cap (d)$.

+) Trường hợp 2: hai điểm A, B cùng phía đối với đường thẳng (d)



Gọi điểm A' là điểm đối xứng của điểm A qua đường thẳng (d) . Khi đó $MA = MA'$

$\Rightarrow MA + MB = MA' + MB \geq A'B$ nên $(MA + MB)_{\min} = A'B$, đạt được khi $M = A'B \cap (d)$.

Câu 1. Cho các số phức z thỏa mãn $|z-1| = |z+1|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z+2-4i| + |z-4-6i|$ là

- A. $\sqrt{10} + \sqrt{5}$. B. $\sqrt{13}$. C. $2\sqrt{5}$. D. $2\sqrt{10}$.

- Câu 2.** Cho các số phức z thỏa mãn $|2z + 5 - 4i| = |2z + 3 + 4i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z + 1 - 4i| + |z - 1 - i|$ là
- A. 5 B. $\sqrt{13}$. C. $\sqrt{41}$ D. $\sqrt{10}$.
- Câu 3.** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z + 1 + i| = |z + 2i|$ và $P = |z - 2 - 3i| + |z + 1|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P = a + 2b$:
- Câu 4.** Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z + 1 + i| = |z + 2i|$ và $P = |z - 2 - 3i| + |z - 1 + 2i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P = a + 2b$:
- Câu 5. (Sở Hà Nam)** Cho số phức $z = a + bi$ với a, b là hai số thực thỏa mãn $a - 2b = 1$. Tính $|z|$ khi biểu thức $|z + 1 + 4i| + |z - 2 - 5i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- A. $\frac{1}{5}$. B. $\sqrt{5}$. C. $\sqrt{\frac{1}{5}}$. D. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

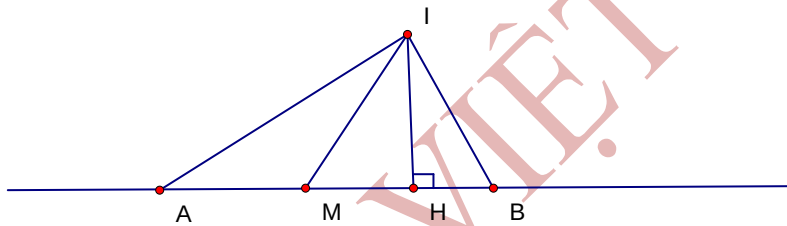
Bài toán 2

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm I và đoạn thẳng AB . Điểm M chạy trên đoạn thẳng AB sao cho độ dài đoạn IM nhỏ nhất. Khi đó hãy tìm vị trí điểm M và tính độ dài IM .

Phương pháp giải:

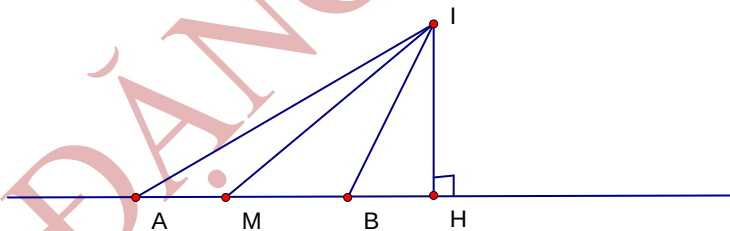
Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm I lên đường thẳng (AB) . Ta xét hai trường hợp

□ Trường hợp 1: điểm H nằm trong đoạn AB



Dễ dàng thấy $IM_{\min} = IH$ và $IM_{\max} = \max\{IA; IB\}$.

□ Trường hợp 2: điểm H nằm ngoài đoạn AB



Dễ dàng thấy $IM_{\min} = \min\{IA; IB\}$ và $IM_{\max} = \max\{IA; IB\}$.

- Câu 6.** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 2 - i| + |z - 2 - 3i| = 2\sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính giá trị $M.m$.
- A. $\frac{\sqrt{65}}{5}$ B. $\sqrt{65}$ C. $2\sqrt{26}$ D. $\frac{4\sqrt{65}}{5}$
- Câu 7.** Xét số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z - 1 + i|$. Tính $P = m + M$.
- A. $P = \sqrt{13} + \sqrt{73}$. B. $P = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$.

C. $P = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}$. D. $P = \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{73}}{2}$.

Câu 8. Xét số phức z thỏa mãn $|z+1-2i| + |z-2+2i|$ nhỏ nhất. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z-4i|$. Tính $P = \frac{M}{m}$.

A. $P = 2$. B. $P = 2\sqrt{2}$. C. $P = 2\sqrt{5}$. D. $P = 5\sqrt{2}$.

Câu 9. Xét số phức z thỏa mãn $\begin{cases} |z+2| = |z-8-8i| \\ |z| \leq 5 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z-4i|$

A. 4. B. 3. C. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$. D. $2\sqrt{5}$.

Câu 10. Xét các số phức z thỏa $|z+2-i| + |z-4-7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z-1+i|$. Tính $P = m + M$.

A. $P = \sqrt{13} + \sqrt{73}$. B. $P = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$. C. $P = 5\sqrt{2} + \sqrt{73}$. D. $P = \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{73}}{2}$.

Câu 11. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-3i| + |z+4+5i| = 10$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z-1+i|$. Tính $P = M \cdot m$.

A. $P = \frac{8\sqrt{41}}{5}$. B. $P = \sqrt{697}$. C. $P = 5\sqrt{41}$. D. $P = \frac{8\sqrt{41}}{3}$.

Câu 12. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2+2i| - |z+1-3i| = \sqrt{34}$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của $|z+1+i|$ là?

A. $\frac{9}{\sqrt{34}}$. B. 4. C. $\sqrt{13}$. D. 3.

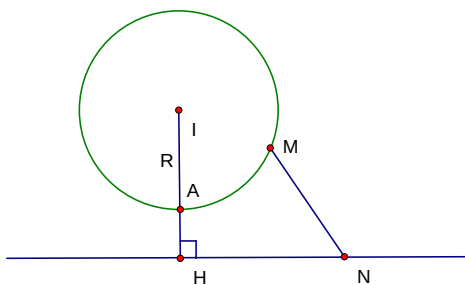
Câu 13. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+2-i| + |z-2-3i| = 2\sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của mô đun $z+1-2i$, tính $M + m$.

A. $\frac{2\sqrt{5} + 5\sqrt{10}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{5} + 5\sqrt{10}}{5}$. C. $\sqrt{2} + \sqrt{10}$. D. $\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$.

Bài toán 3:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d) và đường tròn (C) có tâm I bán kính R không có điểm chung. Điểm M thay đổi trên đường tròn (C) , điểm N thay đổi trên đường thẳng (d) . Xác định vị trí hai điểm M, N để độ dài đoạn MN giá trị nhỏ nhất và tính các giá trị này.

Phương pháp giải:



$$MN_{\min} = AH = d(I, d) - R.$$

Câu 14. Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $\begin{cases} |z_1 - i| = |z_1 + 1| \\ |z_2 - 1 - i| = 1 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$.

- A. $\sqrt{2}$. B. 1. C. $\sqrt{2} - 1$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 15. (Hùng Vương Bình Phước) Cho 2 số phức $z_1; z_2$ thỏa mãn $|z_1 + 5| = 5; |z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 - z_2|$ là

- A. $P_{\min} = 3$. B. $P_{\min} = \frac{3}{2}$. C. $P_{\min} = \frac{5}{2}$. D. $P_{\min} = 5$.

Câu 16. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 5| = 5, |z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i|$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$ là?

- A. 3. B. $\frac{5}{2}$. C. $\frac{3}{2}$. D. 5.

Câu 17. (Nguyễn Du Dak-Lak 2019) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - i| = 1$ và số phức z' thỏa mãn điều kiện $|\overline{z'} + 1 + 2i| = |z' - 1|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z - z'|$ bằng

- A. $\sqrt{2} + 1$. B. $2\sqrt{2} + 1$. C. $\sqrt{2} - 1$. D. $2\sqrt{2} - 1$.

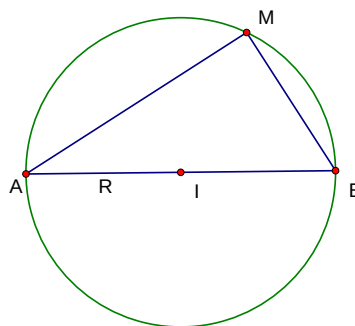
Câu 18. (HKII Kim Liên 2017-2018) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 1 + i| = 1$ và $z_2 = 2iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = |2z_1 - z_2|$.

- A. $P_{\min} = 2 - \sqrt{2}$. B. $P_{\min} = 8 - \sqrt{2}$. C. $P_{\min} = 2 - 2\sqrt{2}$. D. $P_{\min} = 4 - 2\sqrt{2}$.

Bài toán 4:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có tâm I bán kính R . Đoạn AB là một đường kính của (C) . Điểm M thay đổi trên đường tròn (C) . Xác định vị trí điểm M để tổng độ dài $k.MA + l.MB$ (với $k \geq l > 0$) đạt giá trị nhỏ nhất và tính giá trị này.

Phương pháp giải:

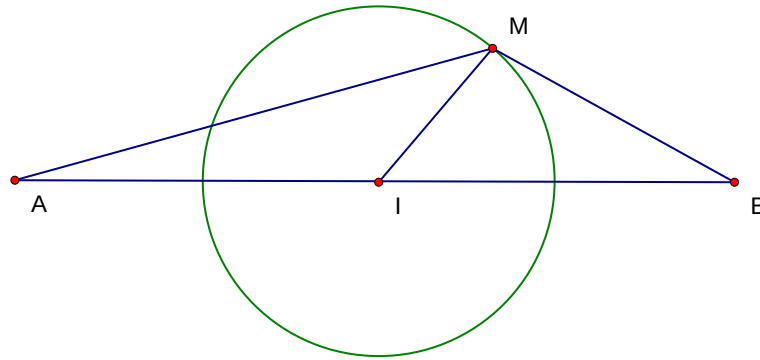


Ta có: $k \geq l > 0 \Rightarrow kMA + lMB \geq l(MA + MB) \geq lAB$, dấu bằng xảy ra khi $M \equiv A$.

Bài toán 5:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có tâm I bán kính R . Đoạn AB cố định nhận điểm I làm trung điểm. Điểm M thay đổi trên đường tròn (C) . Xác định vị trí điểm M để tổng độ dài $k.MA + l.MB$ (với $k > 0, l > 0$) đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị này.

Phương pháp giải:



Theo công thức đường trung tuyến ta có $MI^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$

$$\Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = a = \text{const}$$

Lại có: $k \cdot MA + l \cdot MB \leq \sqrt{k^2 + l^2} \cdot \sqrt{MA^2 + MB^2} = \sqrt{k^2 + l^2} \cdot \sqrt{a}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{MA}{k} = \frac{MB}{l} \Rightarrow MA = \frac{k}{l} MB \Rightarrow (\frac{k^2 + l^2}{l}) MB = \sqrt{k^2 + l^2} \cdot \sqrt{a}$, hay M là giao điểm của đường

(C) với đường tròn tâm B bán kính $\frac{l\sqrt{a}}{\sqrt{k^2 + l^2}}$.

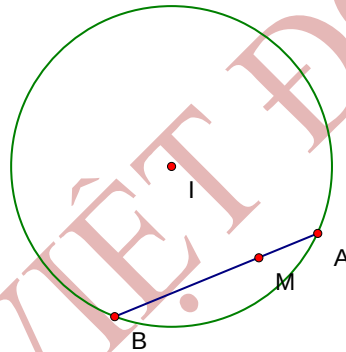
- Câu 19. (Nam Tiền Hải Thái Bình Lần1)** Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z+1| + 2|z-1|$.
- A. $\max T = 3\sqrt{2}$. B. $\max T = 2\sqrt{10}$. C. $\max T = 2\sqrt{5}$. D. $\max T = 3\sqrt{5}$.
- Câu 20.** Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = |z+1| + 2|z-1|$.
- A. $\min T = 2\sqrt{5}$. B. $\min T = 2$. C. $\min T = \sqrt{5}$. D. $\min T = \sqrt{2}$.
- Câu 21.** Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |1+z| + 3|1-z|$.
- A. $3\sqrt{15}$ B. $\sqrt{20}$ C. $2\sqrt{10}$ D. $6\sqrt{5}$
- Câu 22. (Sở Ninh Bình 2019 lần 2)** Cho số phức z thỏa mãn $|z+1| = \sqrt{3}$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = |z+4-i| + |z-2+i|$.
- A. $2\sqrt{26}$. B. $2\sqrt{46}$. C. $2\sqrt{13}$. D. $2\sqrt{23}$.
- Câu 23.** Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z+1| + 2|z-1|$.
- A. $\max T = 2\sqrt{5}$ B. $\max T = 2\sqrt{10}$ C. $\max T = 3\sqrt{5}$ D. $\max T = 3\sqrt{2}$
- Câu 24.** Xét các số phức $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z+2+3i| = 2$. Tính $P = a+b$ khi $|z+2-5i| + |z-6+3i|$ đạt giá trị lớn nhất.
- A. $P = 3$ B. $P = -3$ C. $P = 7$ D. $P = -7$
- Câu 25.** Cho $|z-4-3i| = \sqrt{5}$. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z+1-3i| + |z-1+i|$. Tính $P = M^2 + m^2$?
- A. $P = 240$ B. $P = 250$ C. $P = 270$ D. $P = 320$
- Câu 26.** Cho $|2z+1-3i| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z-1| + 3|z+1-2i|$?
- A. $4\sqrt{2}$ B. $4\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{2}$ D. 4

- Câu 27. (Sở Đà Nẵng 2019)** Cho số phức z thay đổi thỏa $|z+i|=2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+i-4|+2|z+3i-3|$ bằng
- A. $2\sqrt{3}$. B. $\sqrt{2}$. C. $4\sqrt{2}$. D. 6.
- Câu 28. (Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đắk Lắk)** Cho các số phức z, w thỏa mãn $|w+i|=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ và $\frac{5w}{z-4}=2+i$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z-1-2i|+|z-5-2i|$ bằng
- A. $\sqrt{52}+\sqrt{55}$. B. $2\sqrt{53}$. C. $\frac{29}{2}$. D. $3+\sqrt{134}$.

Bài toán 6:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có tâm I bán kính R . Điểm M cố định nằm ở miền trong đường tròn; hai điểm A, B thay đổi trên (C) sao cho ba điểm M, A, B thẳng hàng. Xác định vị trí hai điểm A, B để tổng độ dài $k.MA+l.MB$ (với $k>0, l>0$) giá trị nhỏ nhất và tính giá trị này.

Phương pháp giải:



Ta có tích $MA.MB$ chính là độ lớn phương tích của điểm M với đường tròn (C) , suy ra $MA.MB=R^2-MI^2$. Nên $k.MA+l.MB \geq 2\sqrt{klMA.MB}=2\sqrt{kl(R^2-MI^2)}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $kMA=lMB=\sqrt{kl(R^2-MI^2)} \Rightarrow MA=\sqrt{\frac{l}{k}(R^2-MI^2)}$ hay A là giao điểm của đường tròn tâm M bán kính $\sqrt{\frac{l}{k}(R^2-MI^2)}$ với đường tròn (C) .

- Câu 29.** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $\begin{cases} |z_1-1-i|=|z_2-1-i|=1 \\ |z_1-z_2|=|z_1-1-\frac{1}{2}i|+|z_2-1-\frac{1}{2}i| \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=|2z_1-2-i|+|2iz_2+1-2i|$.
- A. $\min T=2\sqrt{5}$. B. $\min T=2\sqrt{3}$. C. $\min T=2\sqrt{2}$. D. $\min T=3\sqrt{2}$.
- Câu 30.** Cho hàm số phức $f(z)=(4+i)z^2+az+b$ với a, b là số phức. Biết $f(1), f(i)$ là số thực. Tính giá trị nhỏ nhất của $P=|a|+|b|$.
- Câu 31.** Cho số phức z thỏa $|z+1-2i|=2\sqrt{2}$. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-1|+2017|\bar{z}+3+4i|$.

- Câu 32. (THANH CHƯƠNG 1 NGHỆ AN 2019 LẦN 3)** Cho hai số phức $z_1; z_2$ thỏa mãn $z_1 \neq z_2$ và $z_1^2 - 5z_1z_2 + 4z_2^2 = 0$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của số phức $z_1, \bar{z}_2$ thỏa mãn diện tích tam giác OMN bằng 12. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |2z_1 - z_2|$ là
- A. $14\sqrt{3}$. B. $21\sqrt{2}$. C. $\frac{14\sqrt{6}}{3}$. D. $7\sqrt{6}$.
- Câu 33. (Đặng Thành Nam Đề 5)** Cho z_1, z_2 là các số phức khác 0 thỏa mãn $|z_1|z_1 = 9|z_2|z_2$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1 và $\bar{z}_2$. Biết tam giác OMN có diện tích bằng 6, giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + z_2|$ bằng
- A. 8. B. 6. C. $4\sqrt{2}$. D. $3\sqrt{2}$.
- Câu 34. (Thanh Chương Nghệ An Lần 2)** Các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $w = \frac{z_1 + 2 - i}{(z_1 + \bar{z}_1)i + 1}$ là số thực và $|4z_2 + 8 + 13i| = 4$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 + z_2|$ bằng
- A. $\frac{21}{16}$. B. $\frac{\sqrt{37}}{4}$. C. 0. D. $\frac{\sqrt{37} - 4}{4}$.
- Câu 35. (PHÂN TÍCH BL_PT ĐỀ ĐH VINH L3 -2019..)** Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z| = 2, |iw - 2 + 5i| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z^2 - wz - 4|$ bằng
- A. 4. B. $2(\sqrt{29} - 3)$. C. 8. D. $2(\sqrt{29} - 5)$.
- Câu 36. (TRƯỜNG THỰC HÀNH CAO NGUYÊN – ĐẠI HỌC TÂY NGUYÊN NĂM 2019)** Biết rằng hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3 - 4i| = 1$ và $|z_2 - 3 - 4i| = \frac{1}{2}$. Số phức z có phần thực là a và phần ảo là b thỏa mãn $3a - 2b = 12$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z - z_1| + |z - 2z_2| + 2$ bằng:
- A. $P = \frac{\sqrt{9945}}{11}$. B. $P = 5 - 2\sqrt{3}$.
 C. $P = \frac{\sqrt{9945}}{13}$. D. $P = 5 + 2\sqrt{5}$.
- Câu 37. (THPT-Yên-Mô-A-Ninh-Bình-2018-2019-Thi-tháng-4)** Gọi M là điểm biểu diễn số phức $z_1 = a + (a^2 - 2a + 2)i$ (với a là số thực thay đổi) và N là điểm biểu diễn số phức z_2 biết $|z_2 - 2 - i| = |\bar{z}_2 - 6 - i|$. Tìm độ dài ngắn nhất của đoạn MN .
- A. $2\sqrt{5}$. B. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$. C. 1. D. 5.
- Câu 38. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị Lần 1)** Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z - 3\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|w - 4\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2}$. Biết rằng $|z - w|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z = z_0, w = w_0$. Tính $|3z_0 - w_0|$.
- A. $2\sqrt{2}$. B. $4\sqrt{2}$. C. 1. D. $6\sqrt{2}$.
- Câu 39. (Cụm 8 trường Chuyên Lần 1)** Cho số phức z thỏa mãn $3|z + \bar{z}| + 2|z - \bar{z}| \leq 12$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $|z - 4 + 3i|$. Giá trị của $M.m$ bằng
- A. 28. B. 24. C. 26. D. 20.
- Câu 40. (Chuyên Phan Bội Châu Lần 2)** Cho số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $P = |z - 2 - 2i|$. Đặt $A = M + n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $A \in [4; 3\sqrt{3})$. B. $A \in (\sqrt{34}; 6)$. C. $A \in (2\sqrt{7}; \sqrt{33})$. D. $A \in (6; \sqrt{42})$.

Câu 41. Cho số phức $z = a + 2bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) và đa thức: $f(x) = ax^2 - bx + 1$. Biết $|f(\pm 1)| \leq 1$. Tính giá trị lớn nhất của $|z|$.

A. 2. B. $2\sqrt{2}$. C. $\sqrt{5}$. D. $\sqrt{7}$.

Câu 42. (CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ HÒA BÌNH LẦN 4 NĂM 2019) Trong các số phức z thỏa mãn $|z^2 + 1| = 2|z|$, gọi z_1 và z_2 lần lượt là các số phức có môđun nhỏ nhất và lớn nhất. Giá trị của biểu thức $|z_1|^2 + |z_2|^2$ bằng

A. 6. B. $2\sqrt{2}$. C. $4\sqrt{2}$. D. 2.

Câu 43. (SỞ GD & ĐT CÀ MAU) Cho hai số phức z_1, z_2 thay đổi, luôn thỏa mãn $|z_1 - 1 - 2i| = 1$ và $|z_2 - 5 + i| = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = |z_1 - z_2|$.

A. $P_{\min} = 2$. B. $P_{\min} = 1$. C. $P_{\min} = 5$. D. $P_{\min} = 3$.

Câu 44. (Sở Lạng Sơn 2019) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3i + 5| = 2$ và $|iz_2 - 1 + 2i| = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |2iz_1 + 3z_2|$

A. $\sqrt{313}$. B. $\sqrt{313} + 8$. C. $\sqrt{313} + 16$. D. $\sqrt{313} + 2\sqrt{5}$.

Câu 45. Cho số phức z thỏa mãn $|z - (3 + 4i)| = \sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$. Tính giá trị $A = M^2 + m^2$.

Câu 46. Cho số phức $z \neq 0$ thỏa $|z| \geq 2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = \left| \frac{z+i}{z} \right|$. Tính $A = M^2 + m^2$:

Câu 47. Cho z_1 là số phức, z_2 là số thực thỏa mãn $|z_1 - 2i| = 1$ và $\frac{z_2 - z_1}{1+i}$ là số thực. Gọi M, m lần lượt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$. Tính $A = M^2 + m^2$.

Câu 48. Cho z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $|6 - 3i + iz| = |2z - 6 - 9i|$ thỏa mãn $|z_1 - z_2| = \frac{8}{5}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + z_2|$. Tính $P = M + m$.

Câu 49. Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3 - 4i| = 1$, $|z_2 + 1| = |z_2 - i|$ và $\frac{z_1 - z_2}{2 - i}$ là số thực. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$. Tính $P = M + m$.

Câu 50. Cho số phức z thỏa mãn z không phải là số thực và $w = \frac{z}{2 + z^2}$ là thực. Giá trị lớn nhất của $P = |z + 1 - i|$ là:

Câu 51. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|iz_1 + \sqrt{2}| = \frac{1}{2}$ và $z_2 = iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 - z_2|$.

A. $2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ B. $2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ C. $\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$ D. $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

Câu 52. Xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M, M' . Số phức $w = z(4 + 3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn lần lượt là N, N' . Biết rằng M, M', N, N' là bốn đỉnh của hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z + 4i - 5|$.

A. $\frac{5}{\sqrt{34}}$.

B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

D. $\frac{4}{\sqrt{13}}$.

Câu 53. Cho số phức z_1 thỏa $|z_1 + 1 - i| = |z_1|$, số phức z_2 thỏa $\frac{5-35i}{5z_2 - 23 - 4i}$ là số thực và số phức w thỏa điều kiện $2|w-1+i| + 3|w-2+i| \leq 2$. Cho $P = |w-z_1| + |w-z_2| + |z_1-z_2|$, gọi a là giá trị nhỏ nhất của biểu thức P (nếu có). Đáp án nào sau đây là đúng:

A. $a = \frac{16\sqrt{10}}{5}$.

B. $a = \frac{8\sqrt{10}}{5}$.

C. $a = \frac{6+4\sqrt{5}}{2}$.

D. $a = \frac{3+4\sqrt{5}}{2}$.

Câu 54. Cho số phức z_1, z_2 thỏa $|z+1-i| = |z|$ và $|z_1 - z_2| = 6\sqrt{2}$, số phức w_1, w_2 thỏa điều kiện $\frac{1+i}{w-4+2i}$ là số thực và $|w_1 - w_2| = 3\sqrt{2}$, số phức u thỏa $2|u+2-i| + 3|u-1+2i| \leq 6\sqrt{2}$. Gọi giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau (nếu có) là $P = |u-z_1| + |u-z_2| + |u-w_1| + |u-w_2|$. Đáp án nào sau đây là đúng:

A. $3 + \sqrt{26}$.

B. $9\sqrt{2} + 6$.

C. $6 + 2\sqrt{26}$.

D. $3 - \sqrt{26}$.

Câu 55. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+1-2i| = 2\sqrt{2}$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a|z-1| + b|\bar{z} + 3 + 4i|$ với a, b là số thực dương.

A. $\sqrt{a^2 + b^2}$.

B. $\sqrt{2a^2 + 2b^2}$.

C. $4\sqrt{2a^2 + 2b^2}$.

D. $a^2 + b^2$.

Câu 56. Xét tập (A) gồm các số phức z thỏa mãn $\frac{z-2i}{z-2}$ là số thuần ảo và các giá trị thực m, n thỏa mãn chỉ có duy nhất một số phức $z \in (A)$ thỏa mãn $|z-m-ni| = \sqrt{2}$. Đặt $M = \max(m+n)$ và $N = \min(m+n)$. Tính $P = M + N$?

A. $P = -2$.

B. $P = -4$.

C. $P = 4$.

D. $P = 2$.

Câu 57. Cho số phức z_1 thỏa mãn $|z_1 - 2|^2 - |z_1 + i|^2 = 1$ và số phức z_2 thỏa mãn $|z_2 - 4 - i| = \sqrt{5}$. Hỏi giá trị nhỏ nhất $|z_1 - z_2|$ là?

A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

B. $\sqrt{5}$.

C. $2\sqrt{5}$.

D. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Câu 58. Cho số phức $z_1 = 1+3i$, $z_2 = -5-3i$. Tìm điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z_3 , biết rằng M nằm trên đường thẳng $x - 2y + 1 = 0$ và số phức $w = 3z_3 - z_2 - 2z_1$ có giá trị nhỏ nhất?

A. $M\left(-\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

B. $M\left(\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

C. $M\left(\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right)$.

D. $M\left(-\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right)$.

Câu 59. Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z^2 - 2z + 5| = |(z-1+2i)(z+3i-1)|$ và $w = z - 2 + 2i$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của $|w|$ là:

A. $\frac{3}{2}$.

B. 1.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 2.

Câu 60. Cho ba số phức z, z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 6$ và $|z_1 - z_2| = 6\sqrt{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z| + |z - z_1| + |z - z_2|$.

A. $6\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

B. $3\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

C. $6\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

D. $3\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

- Câu 61.** Cho số phức z . Kí hiệu A, B, C, D lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $z, \bar{z}, z(4+3i)$ và $\overline{z(4+3i)}$. Biết A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình chữ nhật. Hỏi giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z+4i-5|$ là?
- A. $\frac{5}{\sqrt{34}}$. B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. D. $\frac{4}{\sqrt{13}}$.
- Câu 62.** Cho số phức $z = \frac{i-m}{1-m(m-2i)}$, trong đó m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho $|z-i| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Hỏi trong S có tất cả bao nhiêu phần tử nguyên?
- A. 1. B. 3. C. 2. D. 5.
- Câu 63.** Gọi z là số phức thỏa mãn $P = |z-1-i| + |z-1-4i| + |z-2+i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $|z|$.
- A. $\sqrt{2}$. B. 1. C. 2. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Câu 64. (ĐH Vinh Lần 1)** Giả sử z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $(z-6)(8+\bar{z}i)$ là số thực. Biết rằng $|z_1 - z_2| = 4$, giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + 3z_2|$ bằng
- A. $5 - \sqrt{21}$. B. $20 - 4\sqrt{21}$. C. $20 - 4\sqrt{22}$. D. $5 - \sqrt{22}$.
- Câu 65. (ĐH Vinh Lần 1)** Giả sử z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $(z+1)(\bar{z}-2i)$ là một số thuần ảo. Biết rằng $|z_1 - z_2| = 2$, giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + 5z_2|$ bằng
- A. $\sqrt{13} - \sqrt{5}$. B. $3\sqrt{5} - \sqrt{13}$. C. $3\sqrt{5} - 2\sqrt{13}$. D. $5 - \sqrt{22}$.
- Câu 66. (ĐH Vinh Lần 1)** Giả sử z_1, z_2 là hai trong số các số phức z thỏa mãn $|iz + \sqrt{2} - i| = 1$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Giá trị lớn nhất của $|z_1| + |z_2|$ bằng
- A. 4. B. $2\sqrt{3}$. C. $3\sqrt{2}$. D. 3.
- Câu 67. (Cầu Giấy Hà Nội 2019 Lần 1)** Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $\left|z - \frac{\sqrt{3}}{3}i\right| = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z+1| + |z-1| + |z-\sqrt{3}i|$ bằng
- A. $\frac{4}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{8}{\sqrt{3}}$. C. $\frac{16}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{32}{\sqrt{3}}$.
- Câu 68. (Hàm Rồng)** Cho số phức z, z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 4 - 5i| = |z_2 - 1| = 1$ và $|\bar{z} + 4i| = |z - 8 + 4i|$. Tính $|z_1 - z_2|$ khi $P = |z - z_1| + |z - z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- A. $2\sqrt{5}$. B. $\sqrt{41}$. C. 8. D. 6.
- Câu 69. (THPT NINH BÌNH – BẠC LIÊU LẦN 4 NĂM 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z^2|$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z - 5 - 2i|$ bằng bao nhiêu?
- A. $\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$. B. $\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$. C. $\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$. D. $\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$.
- Câu 70. (Chuyên KHTN lần 2)** Cho số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z^2|$. Gọi m và M lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z + 4 - 2i|$. Khi đó $m + M$ bằng
- A. $\sqrt{26} + \sqrt{2}$. B. $\sqrt{26} + 3\sqrt{2}$. C. $\sqrt{10} + \sqrt{34}$. D. $2\sqrt{26}$.

- Câu 71. (THPT NÔNG CỐNG 2 LẦN 4 NĂM 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z|^2$. Giả sử M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z - 3 - 2i|$. Tính $M + m$.
- A. $\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$. B. $5 + \sqrt{5}$. C. $2\sqrt{3} + \sqrt{5}$. D. $10 - \sqrt{5}$.
- Câu 72. (THPT ĐÔ LƯƠNG 3 LẦN 2)** Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 3i| + |\bar{z} + 5 + i| = 2\sqrt{65}$. Giá trị nhỏ nhất của $|z + 2 + i|$ đạt được khi $z = a + bi$ với a, b là các số thực dương. Giá trị của $2a^2 + b^2$ là
- A. 17. B. 33. C. 24. D. 36.
- Câu 73. (THĂNG LONG HN LẦN 2 NĂM 2019)** Cho số thực a thay đổi và số phức z thỏa mãn $\frac{z}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{i - a}{1 - a(a - 2i)}$. Trên mặt phẳng tọa độ, gọi M là điểm biểu diễn số phức z . Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai điểm M và $I(-3; 4)$ (khi a thay đổi) là
- A. 6. B. 5. C. 4. D. 3.
- Câu 74. (THPT SỐ 1 TƯ NGHĨA LẦN 2 NĂM 2019)** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 1 - 3i| = 1$ và $|z_2 + 1 - i| = |z_2 - 5 + i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_2 - 1 - i| + |z_2 - z_1|$ bằng
- A. $2\sqrt{5} - 1$. B. $\sqrt{10} + 1$. C. $\sqrt{10} - 1$. D. 3.
- Câu 75.** Biết số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $M = |z + 2|^2 - |z - i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính môđun của số phức $z + i$.
- A. $|z + i| = 2\sqrt{41}$ B. $|z + i| = 3\sqrt{5}$. C. $|z + i| = 5\sqrt{2}$ D. $|z + i| = \sqrt{41}$.
- Câu 76. (Đặng Thành Nam Đề 6)** Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z thỏa mãn $|z - 1| = \sqrt{34}$ và $|z + 1 + mi| = |z + m + 2i|$. Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc (S) sao cho $|z_1 - z_2|$ nhỏ nhất, giá trị của $|z_1 + z_2|$ bằng
- A. 2. B. $2\sqrt{3}$. C. $\sqrt{2}$. D. $3\sqrt{2}$.
- Câu 77. (CHUYÊN HUỖNH MÃN ĐẠT 2019 lần 1)** Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 2 + 2i| + |z_1 + 2 - 2i| = 10\sqrt{2}$, $|z_2 - 6 + 6i| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z_1 - z_2|$.
- A. $5\sqrt{2}$. B. $11\sqrt{2}$. C. $12\sqrt{2}$. D. $16\sqrt{2}$.
- Câu 78. (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội)** Cho các số phức z, z_1, z_2 thay đổi thỏa mãn các điều kiện sau: $|iz + 2i + 4| = 3$; phần thực của z_1 bằng 2; phần ảo của z_2 bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = |z - z_1|^2 + |z - z_2|^2$.
- A. 9. B. 2. C. 5. D. 4.
- Câu 79. (Cổ Loa Hà Nội)** Gọi z_1, z_2, z_3 là ba số phức thỏa mãn điều kiện $|z_1 + 1| + |z_1 - 3i| = \sqrt{10}$, $|z_2 - 3| + |z_2 - 3i| = 3\sqrt{2}$, $|z_3 + 1| + |z_3 - 3| = 4$. Đặt m là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_1|$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $m \in (4; 5)$. B. $m \in (5; 6)$. C. $m \in (6; 7)$. D. $m \in (7; 8)$.
- Câu 80. (Chuyên Vinh Lần 3)** Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z| = 2$, $|iw - 2 + 5i| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z^2 - wz - 4|$ bằng
- A. 4. B. $2(\sqrt{29} - 3)$. C. 8. D. $2(\sqrt{29} - 5)$.

Câu 81. (Kim Liên) Xét các số phức z thỏa mãn $|z+3-2i|+|z-3+i|=3\sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là hai giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|+|z-1-3i|$. Tìm M, m .

A. $M = \sqrt{17} + \sqrt{5}, m = 3\sqrt{2}$.

B. $M = \sqrt{26} + 2\sqrt{5}, m = \sqrt{2}$.

C. $M = \sqrt{26} + 2\sqrt{5}, m = 3\sqrt{2}$.

D. $M = \sqrt{17} + \sqrt{5}, m = \sqrt{2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

DẠNG 1: TÍNH TOÁN VÀ CÁC YẾU TỐ TRÊN SỐ PHỨC**Câu 1:** (THTT số 3) Cho số phức $z \neq 1$ thỏa mãn $z^3 = 1$. Tính $(1 - z + z^{2018})(1 + z - z^{2018})$.

A. 1.

B. Đáp số khác.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn CTa có: $z^3 = 1 \Rightarrow z^{2018} = (z^3)^{672} \cdot z^2 = z^2$ $z^3 = 1 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1) = 0$, mà $z \neq 1$ nên $z^2+z+1=0$ Do đó, $(1-z+z^{2018})(1+z-z^{2018}) = (1-z+z^2)(1+z-z^2)$ $= (1+z+z^2-2z)(1+z+z^2-2z^2)$ $= -2z(-2z^2) = 4z^3 = 4$.**Câu 2:** (THPT-Chuyên-Sơn-La-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z+w| = \sqrt{17}$, $|z+2w| = \sqrt{58}$ và $|z-2w| = 5\sqrt{2}$. Giá trị của biểu thức $P = \bar{z} \cdot w + z \cdot \bar{w}$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn BTa có $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, $\overline{az_1 + bz_2} = a\bar{z}_1 + b\bar{z}_2$ nên $|z+2w| = \sqrt{58} \Leftrightarrow |z+2w|^2 = 58 \Leftrightarrow (z+2w)(\bar{z}+2\bar{w}) = 58$ $\Leftrightarrow |z|^2 + 2\bar{z} \cdot w + 2z \cdot \bar{w} + 4|w|^2 = 58 \Leftrightarrow |z|^2 + 2P + 4|w|^2 = 58$.Tương tự $|z-2w| = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow |z-2w|^2 = 50 \Leftrightarrow |z|^2 - 2P + 4|w|^2 = 50$.Khi đó $\begin{cases} |z|^2 + 2P + 4|w|^2 = 58 \\ |z|^2 - 2P + 4|w|^2 = 50 \end{cases} \Rightarrow 4P = 8 \Rightarrow P = 2$.**Câu 3:** Cho số phức $z = \left(\frac{2+6i}{3-i}\right)^m$, m nguyên dương. Có bao nhiêu giá trị $m \in [1; 50]$ để z là số thuần ảo?

A. 24.

B. 26.

C. 25.

D. 50.

Lời giải

Ta có: $z = \left(\frac{2+6i}{3-i}\right)^m = (2i)^m = 2^m \cdot i^m$ z là số thuần ảo khi và chỉ khi $m = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$ (do $z \neq 0$; $\forall m \in \mathbb{N}^*$).Vậy có 25 giá trị m thỏa yêu cầu đề bài.**Chọn C****Câu 4:** Nếu $|z|=1$ thì $\frac{z^2-1}{z}$

A. lấy mọi giá trị phức.

B. là số thuần ảo.

C. bằng 0.

D. lấy mọi giá trị thực.

Lời giải

Ta có: $\frac{z^2-1}{z} = z - \frac{1}{z} = z - \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = z - \frac{\bar{z}}{|z|^2} = z - \bar{z}$ là số thuần ảo.**Chọn B**

Câu 5: Nếu $|z| = a; (a > 0)$ thì $\frac{\bar{z}^2 - a}{\bar{z}}$

- A. lấy mọi giá trị phức.
C. bằng 0.

- B. là số thuần ảo.
D. lấy mọi giá trị thực.

Lời giải

Ta có: $\frac{\bar{z}^2 - a^2}{\bar{z}} = \bar{z} - \frac{a}{\bar{z}} = \bar{z} - \frac{a^2 z}{\bar{z} \cdot z} = \bar{z} - \frac{a^2 z}{|z|^2} = \bar{z} - z$ là số thuần ảo.

Chọn B

Câu 6: Có bao nhiêu số phức z thỏa $\left| \frac{z+1}{i-z} \right| = 1$ và $\left| \frac{z-i}{2+z} \right| = 1$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \left| \frac{z+1}{i-z} \right| = 1 \\ \left| \frac{z-i}{2+z} \right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z+1| = |i-z| \\ |z-i| = |2+z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ 4x + 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow z = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i.$$

Chọn A

Câu 7: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1; |z_1 + z_2| = \sqrt{3}$. Tính $|z_1 - z_2|$

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Nhận xét: Bài này nhìn vào có vẻ khá khó, nhưng các em cần phải bình tĩnh, chỉ cần gọi $z_1 = a_1 + b_1 i; z_2 = a_2 + b_2 i$ ($a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$) sau đó viết hết các giả thiết đề bài cho:

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| = 1 \\ |z_1 + z_2| = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = 1 \\ (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 = 3 \end{cases}$$

Và viết cái cần tính ra $|z_1 - z_2|^2 = (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2$. Hãy quan sát cái cần tính và thấy rằng chỉ cần bình phương lên là có thể dùng được giả thiết.

Lời giải

Ta có: $z_1 = a_1 + b_1 i; z_2 = a_2 + b_2 i$ ($a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| = 1 \\ |z_1 + z_2| = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = 1 \\ (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow 2(a_1 b_1 + a_2 b_2) = 1 \Rightarrow (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = 1$$

Vậy: $|z_1 - z_2|^2 = (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = 1$.

Chọn A

Câu 8: Tính $z = i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2008}$ có kết quả:

- A. 0 B. 1 C. $-i$ D. i

Lời giải

Ta có $iz = i^2 + i^3 + \dots + i^{2008} + i^{2009}$ và $z = i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2008}$.

Suy ra $z(i-1) = i^{2009} - i = i(i^{2008} - 1) = 0 \Rightarrow z = 0$

Chọn A

Câu 9: (THTT số 3) Cho số phức $z = 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \dots + 2018i^{2017}$ có phần thực là a và phần ảo là b . Tính $b - a$.

- A. 1. B. -1 . C. 1010. D. -2017 .

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } z &= 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \dots + 2018i^{2017} \\ \Rightarrow iz &= 1i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + 2017i^{2017} + 2018i^{2018} \\ \Rightarrow z - iz &= 1 + i + i^2 + \dots + i^{2017} - 2018i^{2018} \\ \Rightarrow (1-i)z &= \frac{1-i^{2018}}{1-i} - 2018i^{2018} \end{aligned}$$

$$\text{Mà } i^{2018} = (i^2)^{1009} = (-1)^{1009} = -1$$

$$\text{Do đó, } (1-i)z = \frac{2}{1-i} + 2018 \Rightarrow z = 1009 + 1010i$$

$$\text{Vậy } a = 1009, b = 1010 \text{ hay } b - a = 1.$$

Câu 10: Tính $S = 1009 + i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + 2017i^{2017}$.

A. $S = 2017 - 1009i$. **B.** $1009 + 2017i$. **C.** $2017 + 1009i$. **D.** $1008 + 1009i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$\begin{aligned} S &= 1009 + i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + \dots + 2017i^{2017} \\ &= 1009 + (4i^4 + 8i^8 + \dots + 2016i^{2016}) + (i + 5i^5 + 9i^9 + \dots + 2017i^{2017}) + \\ &\quad + (2i^2 + 6i^6 + 10i^{10} + \dots + 2014i^{2014}) + (3i^3 + 7i^7 + 11i^{11} + \dots + 2015i^{2015}) \\ &= 1009 + \sum_{n=1}^{504} (4n) + i \sum_{n=1}^{505} (4n-3) - \sum_{n=1}^{504} (4n-2) - i \sum_{n=1}^{504} (4n-1) \\ &= 1009 + 509040 + 509545i - 508032 - 508536i = 2017 + 1009i. \end{aligned}$$

Cách khác:

Đặt

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2017}$$

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + 2017x^{2016}$$

$$xf'(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + 2017x^{2017} \quad (1)$$

Mặt khác:

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2017} = \frac{x^{2018} - 1}{x - 1}$$

$$f'(x) = \frac{2018x^{2017}(x-1) - (x^{2018} - 1)}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow xf'(x) = x \cdot \frac{2018x^{2017}(x-1) - (x^{2018} - 1)}{(x-1)^2} \quad (2)$$

Thay $x = i$ vào (1) và (2) ta được:

$$S = 1009 + i \cdot \frac{2018i^{2017}(i-1) - (i^{2018} - 1)}{(i-1)^2} = 1009 + i \cdot \frac{-2018 - 2018i + 2}{-2i} = 2017 + 1009i$$

Câu 11: Cho số phức z có mô đun bằng 2017 và w là số phức thỏa mãn biểu thức $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w}$.

Mô đun của số phức w bằng:

A. 1

B. 2

C. 2016

D. 2017

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w} \Leftrightarrow \frac{z+w}{zw} - \frac{1}{z+w} = 0 \Leftrightarrow \frac{(z+w)^2 - zw}{zw(z+w)} = 0$$

$$\Rightarrow z^2 + w^2 + zw = 0 \Leftrightarrow z^2 + zw + \frac{1}{4}w^2 + \frac{3}{4}w^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{2}w\right)^2 = -\frac{3}{4}w^2 \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{2}w\right)^2 = \left(\frac{i\sqrt{3}w}{2}\right)^2$$

$$\text{Từ } \left(z + \frac{w}{2}\right)^2 = \left(\frac{i\sqrt{3}w}{2}\right)^2 \Rightarrow z = \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)w \Rightarrow w = \frac{z}{\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$\text{Suy ra: } |w| = \frac{2017}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}} = 2017$$

Chọn D

Câu 12: Cho số phức z thỏa mãn: $z - \frac{\bar{z}}{1+3i} = \frac{6+7i}{5}$. Tìm phần thực của số phức z^{2017} .

A. -2^{1008} **B.** 2^{1008} **C.** 2^{504} **D.** 2^{2017} **Lời giải**

Cho số phức z thỏa mãn: $z - \frac{\bar{z}}{1+3i} = \frac{6+7i}{5}$. Tìm phần thực của số phức z^{2013} .

Gọi số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = a - bi$ thay vào (1) ta có $a + bi - \frac{a - bi}{1+3i} = \frac{6+7i}{5}$

$$a + bi - \frac{(a - bi)(1 - 3i)}{10} = \frac{6+7i}{5} \Leftrightarrow 10a + 10bi - a + 3b + i(b + 3a) = 12 + 14i$$

$$\Leftrightarrow 9a + 3b + i(11b + 3a) = 12 + 14i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9a + 3b = 12 \\ 11b + 3a = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$a = b = 1 \Rightarrow z = 1 + i \Rightarrow z^{2017} = ((1+i)^4)^{504} (1+i) = (-4)^{504} (1+i) = 2^{1008} + 2^{1008}i$$

Chọn B

Câu 13: (Ngô Quyền Hà Nội) Cho số phức z thỏa mãn: $(3+2i)z + (2-i)^2 = 4+i$. Hiệu phần thực và phần ảo của số phức z là

A. 2.**B.** 3.**C.** 1.**D.** 0.**Lời giải****Chọn D**

Gọi số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có } (3+2i)z + (2-i)^2 = 4+i \Leftrightarrow (3+2i)(a+bi) = 4+i - (2-i)^2.$$

$$\Leftrightarrow 3a - 2b + (2a + 3b)i = 4 + i - 3 + 4i \Leftrightarrow 3a - 2b + (2a + 3b)i = 1 + 5i.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b = 1 \\ 2a + 3b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a - b = 0.$$

Vậy hiệu phần thực và phần ảo của số phức z là 0.

$$\text{Cách 2: } (3+2i)z + (2-i)^2 = 4+i \Leftrightarrow z = \frac{4+i - (2-i)^2}{3+2i} = 1+i.$$

Phần thực $a=1$, phần ảo $b=1 \Rightarrow a-b=0$.

Câu 14: (Ngô Quyền Hà Nội) Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z - (2-i)\bar{z} = 3$. Môđun của số phức

$$w = \frac{i-2z}{1-i} \text{ là?}$$

A. $\frac{\sqrt{122}}{5}$.

B. $\frac{3\sqrt{10}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{45}}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{122}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z = a+bi \Rightarrow \bar{z} = a-bi$, ta có $(1+i)(a+bi) - (2-i)(a-bi) = 3$

$$a+bi+ai+bi^2 - (2a-2bi-ai+bi^2) = 3 \Leftrightarrow -a-3+(2a+3b)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a-3=0 \\ 2a+3b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow z = -3+2i$$

$$\text{Khi đó } w = \frac{i-2(-3+2i)}{1-i} = \frac{9}{2} + \frac{3}{2}i \Rightarrow |w| = \frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

Câu 15: (Chuyên Bắc Giang) Tìm môđun của số phức số z biết $(2z-1)(1+i) + (\bar{z}+1)(1-i) = 2-2i$.

A. $\frac{1}{9}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

C. $\frac{2}{9}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(2z-1)(1+i) + (\bar{z}+1)(1-i) = 2-2i$

$$\Leftrightarrow 2z(1+i) - 1 - i + (1-i)\bar{z} + 1 - i = 2 - 2i.$$

$$\Leftrightarrow 2z(1+i) = 2 - (1-i)\bar{z} \quad (1).$$

Đặt $z = a+bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

Ta có: $2z(1+i) = 2(a+bi)(1+i) = 2a-2b+(2a+2b)i$.

$$2 - (1-i)\bar{z} = 2 - (1-i)(a-bi) = 2-a+b+(a+b)i.$$

$$\text{Do đó (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-2b=2-a+b \\ 2a+2b=a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-3b=2 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=-\frac{1}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } z = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i \Rightarrow |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 16: Cho số phức z thỏa mãn $\frac{5(\bar{z}+i)}{z+1} = 2-i$ (1). Tính môđun của số phức $\omega = 1+z+z^2$.

A. $\sqrt{13}$

B. $\sqrt{15}$

C. $\sqrt{17}$

D. $\sqrt{19}$

Lời giải

Giả sử $z = a+bi$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{5(a-bi+i)}{a+bi+1} = 2-i \Leftrightarrow 5a-5i(b-1) = 2a+2bi+2-ai-bi^2-i$$

$$\Leftrightarrow 3a-2-b-i(5b-5-2b+a+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-2-b=0 \\ 3b+a-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow z = 1+i$$

$$\omega = 1 + 1 + i + 1 + 2i - 1 = 2 + 3i \Rightarrow |\omega| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

Chọn A

Câu 17: Cho z_1, z_2 là hai số phức liên hợp của nhau và thỏa mãn $\frac{z_1}{z_2^2} \in \mathbb{R}$ và $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{3}$. Tính môđun của số phức z_1 .

A. $|z_1| = \sqrt{5}$.

B. $|z_1| = 3$.

C. $|z_1| = 2$.

D. $|z_1| = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Gọi $z_1 = a + bi \Rightarrow z_2 = a - bi$; ($a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}$). Không mất tính tổng quát ta gọi $b \geq 0$.

$$\text{Do } |z_1 - z_2| = 2\sqrt{3} \Rightarrow |2bi| = 2\sqrt{3} \Rightarrow b = \sqrt{3}.$$

Do z_1, z_2 là hai số phức liên hợp của nhau nên $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R}$, mà $\frac{z_1}{z_2^2} = \frac{z_1^3}{(z_1 z_2)^2} \in \mathbb{R} \Rightarrow z_1^3 \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } z_1^3 = (a + bi)^3 = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3a^2b - b^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 3a^2 = b^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 = 1.$$

$$\text{Vậy } |z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = 2.$$

Chọn C

Câu 18: (THPT NINH BÌNH – BẠC LIÊU LẦN 4 NĂM 2019) Cho số phức z có phần thực là số nguyên và z thỏa mãn $|z| - 2\bar{z} = -7 + 3i + z$. Tính môđun của số phức $\omega = 1 - z + z^2$ bằng

A. $|\omega| = \sqrt{37}$.

B. $|\omega| = \sqrt{457}$.

C. $|\omega| = \sqrt{425}$.

D. $|\omega| = \sqrt{445}$.

Lời giải**Chọn B**

Đặt $z = a + bi$, ($a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có: } |z| - 2\bar{z} = -7 + 3i + z \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} - 2(a - bi) = -7 + 3i + a + bi$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} - 3a + 7 + (b - 3)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} - 3a + 7 = 0 \\ b - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + 9} = 3a - 7 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \frac{7}{3} \\ a^2 + 9 = 9a^2 - 42a + 49 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \frac{7}{3} \\ a = 4(N) \\ a = \frac{5}{4}(L) \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 4 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } z = 4 + 3i \Rightarrow \omega = 1 - z + z^2 = 4 + 21i \Rightarrow |\omega| = \sqrt{457}.$$

Câu 19: (Đặng Thành Nam Đề 15) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $2|z| + \sqrt{3}iz = 4 - z$. Tính $S = ab$.

A. $S = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $S = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $S = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

D. $S = -\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải**Chọn D****Cách 1**

$$\text{Ta có: } 2|z| + \sqrt{3}iz = 4 - z \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{3}i(a + bi) = 4 - (a + bi)$$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{a^2 + b^2} - b\sqrt{3}) + a\sqrt{3}i = (4 - a) - bi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{a^2 + b^2} - b\sqrt{3} = 4 - a \\ a\sqrt{3} = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a\sqrt{3} \\ 2\sqrt{a^2 + 3a^2} + 3a = 4 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a\sqrt{3} \\ |a| = 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = -\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Cách 2

$$2|z| + \sqrt{3}iz = 4 - z \Leftrightarrow (\sqrt{3}i + 1)z = 4 - 2|z|.$$

Lấy môđun 2 vế ta có:

$$|(\sqrt{3}i + 1)z| = |4 - 2|z|| \Leftrightarrow |4 - 2|z|| = 2|z| \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2|z| = 2|z| \\ 4 - 2|z| = -2|z| \end{cases} \Leftrightarrow |z| = 1$$

$$\Rightarrow z = \frac{4 - 2|z|}{\sqrt{3}i + 1} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \text{ Vậy } S = -\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 20: (Trần Đại Nghĩa) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, a > 0$) thỏa $z\bar{z} - 12|z| + (z - \bar{z}) = 13 + 10i$.

Tính $S = a + b$.

A. $S = 7$.

B. $S = 17$.

C. $S = -17$.

D. $S = 5$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, a > 0$). Khi đó phương trình ban đầu trở thành

$$a^2 + b^2 - 12\sqrt{a^2 + b^2} + 2bi = 13 + 10i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 12\sqrt{a^2 + b^2} = 13 \\ 2b = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = 13 \\ b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b = 5 \end{cases} \text{ (do } a > 0).$$

Vậy $S = a + b = 17$.

Câu 21: (Đặng Thành Nam Đề 17) Cho hai số phức z và w khác 0 thỏa mãn $|z + 3w| = 5|w|$ và

$|z - 2wi| = |z - 2w - 2wi|$. Phần thực của số phức $\frac{z}{w}$ bằng

A. 1.

B. -3.

C. -1.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\frac{z}{w} = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$.

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{aligned} \left| \frac{z+3w}{w} \right| = 5 &\Leftrightarrow \left| \frac{z}{w} + 3 \right| = 5 \\ \left| \frac{z-2wi}{w} \right| = \left| \frac{z-2w-2wi}{w} \right| &\Leftrightarrow \left| \frac{z}{w} - 2i \right| = \left| \frac{z}{w} - 2 - 2i \right| \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (a+3)^2 + b^2 = 25 \\ a^2 + (b-2)^2 = (a-2)^2 + (b-2)^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a+3)^2 + b^2 = 25 \\ 4a - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \pm 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phần thực của số phức $\frac{z}{w}$ bằng 1.

Câu 22: (THPT LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NGÃI) Cho số phức z thỏa mãn $2|z+1|^2 = |z-i|^2$. Tính môđun của số phức $z+2+i$.

A. 1 .

B. 3 .

C. 4 .

D. 2 .

Lời giải

Chọn D

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

Ta có : $2|z+1|^2 = |z-i|^2$

$$\Leftrightarrow 2|x+yi+1|^2 = |x+yi-i|^2$$

$$\Leftrightarrow 2[(x+1)^2 + y^2] = x^2 + (y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + y^2 + 2y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+1)^2 = 4$$

Do đó $|z+2+i| = \sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{4} = 2$.

Câu 23: Cho z là số phức có môđun bằng 2017 và w là số phức thỏa mãn $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w}$. Môđun của số phức z là:

A. 2015

B. 1

C. 2017

D. 0

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w} \text{ ta suy ra } z^2 + w^2 + zw = 0 \Rightarrow \left(z + \frac{w}{2}\right)^2 = \left(\frac{i\sqrt{3}w}{2}\right)^2 \Rightarrow z = \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)w$$

Lấy môđun hai vế ta có $|z| = |w| = 2017$.

Chọn C

Câu 24: Cho các số phức z_1, z_2 khác nhau thỏa mãn: $|z_1| = |z_2|$. Chọn phương án đúng:

A. $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} = 0$.

B. $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ là số phức với phần thực và phần ảo đều khác 0.

C. $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ là số thực.

D. $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ là số thuần ảo.

Lời giải

Chọn D

Phương pháp tự luận:

Vì $|z_1| = |z_2|$ và $z_1 \neq z_2$ nên cả hai số phức đều khác 0. Đặt $w = \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ và $|z_1| = |z_2| = a$, ta có

$$\overline{w} = \overline{\left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \right)} = \frac{\overline{z_1 + z_2}}{\overline{z_1 - z_2}} = \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{\overline{z_1} - \overline{z_2}} = \frac{\frac{a^2}{z_1} + \frac{a^2}{z_2}}{\frac{a^2}{z_1} - \frac{a^2}{z_2}} = \frac{z_1 + z_2}{z_2 - z_1} = -w$$

Từ đó suy ra w là số thuần ảo.

Chọn D

Phương pháp trắc nghiệm:

Số phức z_1, z_2 khác nhau thỏa mãn $|z_1| = |z_2|$ nên chọn $z_1 = 1; z_2 = i$, suy ra $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} = \frac{1+i}{1-i} = i$ là số thuần ảo.

- Câu 25:** Cho hai số phức u, v thỏa mãn $|u| = |v| = 10$ và $|3u - 4v| = \sqrt{2016}$. Tính $M = |4u + 3v|$.
- A. $\sqrt{2984}$ B. $\sqrt{2884}$ C. $\sqrt{2894}$ D. $\sqrt{24}$

Lời giải

Ta có $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$. Đặt $N = |3u - 4v|$.

Khi đó $N^2 = (3u - 4v)(3\bar{u} - 4\bar{v}) = 9|u|^2 + 16|v|^2 - 12(u\bar{v} + v\bar{u})$.

Tương tự ta có $M^2 = 16|u|^2 + 9|v|^2 - 12(u\bar{v} + v\bar{u})$.

Do đó $M^2 + N^2 = 25(|u|^2 + |v|^2) = 5000$.

Suy ra $M^2 = 5000 - N^2 = 5000 - 2016 = 2984 \Rightarrow M = \sqrt{2984}$.

- Câu 26: (Thuan-Thanh-Bac-Ninh)** Cho số phức z thỏa mãn $(3+i)|z| = \frac{-2+14i}{z} + 1 - 3i$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\frac{3}{2} < |z| < 2$. B. $\frac{13}{4} < |z| < 4$. C. $\frac{7}{4} < |z| < \frac{11}{5}$. D. $1 < |z| < \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Phân tích: Nếu đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thì thấy khối lượng tính toán lớn và đi đến một phương trình rất phức tạp. Nghĩ đến phép lấy mô đun hai vế của một biểu thức số phức là phép suy ra.

+) Ta có: $(3+i)|z| = \frac{-2+14i}{z} + 1 - 3i$ ($z \neq 0$)

$\Leftrightarrow z((3|z|-1) + (3+|z|)i) = -2+14i$.

+) sau khi lấy mô đun hai vế ta được một phương trình theo ẩn $|z| > 0$.

+) $|z| \cdot |(3|z|-1) + (3+|z|)i| = |-2+14i| \Leftrightarrow |z| \cdot \sqrt{(3|z|-1)^2 + (3+|z|)^2} = 10\sqrt{2}$.

+) $|z|^4 + |z|^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = 4 \\ |z|^2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 2 \\ |z| = -2 \end{cases} \text{ (L)}$.

+) Thử lại $|z| = 2$ ta được $z = \frac{6}{5} + \frac{8}{5}i$ thỏa yêu cầu bài toán.

- Câu 27: (Chuyên Vinh Lần 2)** Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = \sqrt{3}$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Mô đun $|2z_1 + 3z_2|$ bằng

- A. $\sqrt{52}$. B. $\sqrt{53}$. C. $5\sqrt{2}$. D. $\sqrt{51}$.

Lời giải

Chọn D

$$|2z_1 + 3z_2|^2 = 4|z_1|^2 + 9|z_2|^2 + 6(|z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2) = 51.$$

$$\Rightarrow |2z_1 + 3z_2| = \sqrt{51}.$$

Câu 28: (Chuyên Vinh Lần 2) Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 3, |z_2| = 4$ và $|z_1 - z_2| = 6$.

Môđun $|z_1 + z_2|$ bằng

A. $\sqrt{12}$.

B. $\sqrt{13}$.

C. $\sqrt{14}$.

D. $\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn C

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + (|z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2) = 14.$$

$$\Rightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{14}.$$

Câu 29: (Chuyên Vinh Lần 2) Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 2, |z_2| = 3$ và $|z_1 - z_2| = 4$. Môđun

$|z_1 + 3z_2|$ bằng

A. $6\sqrt{2}$.

B. $\sqrt{70}$.

C. $5\sqrt{3}$.

D. $2\sqrt{19}$.

Lời giải

Chọn D

$$|z_1 + 3z_2|^2 = |z_1|^2 + 9|z_2|^2 + 3(|z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2) = 76.$$

$$\Rightarrow |z_1 + 3z_2| = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}.$$

Câu 30: (Chuyên Vinh Lần 2) Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 2, |z_2| = 3$ và $|z_1 - z_2| = 4$. Môđun

$|2018z_1 - 2019z_2|$ bằng

A. $\sqrt{65199571}$.

B. $\sqrt{65199456}$.

C. $\sqrt{65147871}$.

D. $\sqrt{45199473}$.

Lời giải

Chọn A

$$|2018z_1 - 2019z_2|^2 = 2018^2|z_1|^2 + 2019^2|z_2|^2 - 2018.2019(|z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2) = 65199571.$$

$$\Rightarrow |2018z_1 - 2019z_2| = \sqrt{65199571}.$$

Câu 31: (Cầu Giấy Hà Nội 2019 Lần 1) Nếu các số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện

$|z_1| = 3, |z_2| = 4, |z_1 - z_2| = 5$ thì khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $|z_1 + z_2| = 5$.

B. $|z_1 + z_2| = 3$.

C. $|z_1 + z_2| = 4$.

D. $|z_1 + z_2| = 7$.

Lời giải

Chọn A

Đặt: $\begin{cases} z_1 = a_1 + b_1i \\ z_2 = a_2 + b_2i \end{cases} \quad (a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}).$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} |z_1| = 3 \\ |z_2| = 4 \\ |z_1 - z_2| = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = 9 \\ a_2^2 + b_2^2 = 16 \\ (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = 9 \\ a_2^2 + b_2^2 = 16 \\ 2a_1a_2 + 2b_1b_2 = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } |z_1 + z_2| = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + 2a_1a_2 + 2b_1b_2} = 5.$$

Cách 2:

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 .

Theo đề bài ta có: $OA = 3, OB = 4$ và $AB = 5$.

Khi đó: $|z_1 + z_2| = 2OI$ với I là trung điểm của AB .

Theo công thức độ dài đường trung tuyến trong tam giác OAB :

$$OI^2 = \frac{OA^2 + OB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} = \frac{25}{4}.$$

Suy ra: $|z_1 + z_2| = 5$.

Câu 32: Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và $z_1 + z_2 + z_3 = 1$. Mệnh đề nào sau đây là sai.

- A. Trong ba số đó có hai số đối nhau.
- B. Trong ba số đó phải có một số bằng 1.
- C. Trong ba số đó có nhiều nhất hai số bằng 1.
- D. Tích của ba số đó luôn bằng 1.

Lời giải

Ta có: $z_1 + z_2 + z_3 = 1 \Leftrightarrow 1 - z_1 = z_2 + z_3$.

Nếu $1 - z_1 = 0$ thì $z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow z_2 = -z_3$.

Nếu $1 - z_1 \neq 0$ thì điểm P biểu diễn số phức $1 - z_1 = z_2 + z_3$ không trùng với gốc tọa độ O.

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức $-z_1$ và A là điểm biểu diễn của số 1.

Khi đó ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP}$ (do P là điểm biểu diễn của số $1 + (-z_1)$) nên OAPM là hình bình hành.

Mà $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ nên các điểm biểu diễn cho ba số z_1, z_2, z_3 đều nằm trên đường tròn đơn vị. Ta cũng có $OA = OM = 1$ nên OAPM là hình thoi. Khi đó ta thấy M, A là giao điểm của đường trung trực đoạn OP với đường tròn đơn vị.

Tương tự do P cũng là điểm biểu diễn của $z_2 + z_3$, nếu M' và A' là hai điểm biểu diễn của số z_2, z_3 thì ta cũng có M', A' là giao điểm đường trung trực của OP và đường tròn đơn vị.

Vậy $M' \equiv M, A' \equiv A$ hoặc ngược lại. Nghĩa là $z_2 = 1, z_3 = -z_1$ hoặc $z_3 = 1, z_2 = -z_1$.

Do đó A, B là mệnh đề đúng.

C đúng là hiển nhiên, vì nếu ba số đều 1 một thì tổng bằng 3.

D sai vì với $z_1 = 1, z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ thỏa hai tính chất trên của đề bài nhưng

$$z_1 z_2 z_3 \neq 1.$$

Chọn D

Câu 33: Cho số phức $z = \frac{m+1}{1+m(2i-1)} (m \in \mathbb{R})$. Số các giá trị nguyên của m để $|z-i| < 1$ là

- A. 0
- B. 1
- C. 4
- D. Vô số

Lời giải

$$\text{Ta có } z - i = \frac{m+1}{1+m(2i-1)} - i = \frac{m+1-i(1+2mi-m)}{1+m(2i-1)} = \frac{3m+1+(m-1)i}{1-m+2mi}$$

$$\Rightarrow |z-i| = \left| \frac{3m+1+(m-1)i}{1-m+2mi} \right| = \frac{|3m+1+(m-1)i|}{|1-m+2mi|} < 1$$

$$\Leftrightarrow |3m+1+(m-1)i| < |1-m+2mi| \Leftrightarrow (3m+1)^2 + (m-1)^2 < (1-m)^2 + 4m^2$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 + 6m + 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < -\frac{1}{5}$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ Không có giá trị của m thỏa mãn.

Câu 34: Cho số phức z thỏa mãn $|z| \leq 1$. Đặt $A = \frac{2z-i}{2+iz}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $|A| \leq 1$.

B. $|A| \geq 1$.

C. $|A| < 1$.

D. $|A| > 1$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $Có a = a + bi, (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow a^2 + b^2 \leq 1$ (do $|z| \leq 1$)

$$|A| = \left| \frac{2z-i}{2+iz} \right| = \left| \frac{2a+(2b-1)i}{2-b+ai} \right| = \sqrt{\frac{4a^2+(2b-1)^2}{(2-b)^2+a^2}}$$

Ta chứng minh $\frac{4a^2+(2b-1)^2}{(2-b)^2+a^2} \leq 1$.

Thật vậy ta có $\frac{4a^2+(2b-1)^2}{(2-b)^2+a^2} \leq 1 \Leftrightarrow 4a^2+(2b-1)^2 \leq (2-b)^2+a^2 \Leftrightarrow a^2+b^2 \leq 1$

Dấu “=” xảy ra khi $a^2 + b^2 = 1$.

Vậy $|A| \leq 1$.

Câu 35: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z^2+4| = 2|z|$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\frac{\sqrt{3}-1}{6} \leq |z| \leq \frac{\sqrt{3}+1}{6}$.

B. $\sqrt{5}-1 \leq |z| \leq \sqrt{5}+1$.

C. $\sqrt{6}-1 \leq |z| \leq \sqrt{6}+1$.

D. $\frac{\sqrt{2}-1}{3} \leq |z| \leq \frac{\sqrt{2}+1}{3}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức $|u|+|v| \geq |u+v|$, ta được

$$2|z|+|-4| = |z^2+4|+|-4| \geq |z|^2 \Rightarrow |z|^2-2|z|-4 \leq 0 \Rightarrow |z| \leq \sqrt{5}+1.$$

$$2|z|+|z|^2 = |z^2+4|+|-z^2| \geq 4 \Rightarrow |z|^2+2|z|-4 \geq 0 \Rightarrow |z| \geq \sqrt{5}-1.$$

Vậy, $|z|$ nhỏ nhất là $\sqrt{5}-1$, khi $z = -i + i\sqrt{5}$ và $|z|$ lớn nhất là $\sqrt{5}+1$, khi $z = i + i\sqrt{5}$.

Chọn B.

Câu 36: Cho z_1, z_2, z_3 là các số phức thỏa mãn $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ và $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| = |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|$.

B. $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| \leq |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|$.

C. $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| \geq |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|$.

D. $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| \neq |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Ta có: $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow z_2 + z_3 = -z_1$

$$\begin{aligned}
 (z_1 + z_2 + z_3)^3 &= z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + 3(z_1 z_2 + z_1 z_3)(z_1 + z_2 + z_3) + 3z_2 z_3(z_2 + z_3) \\
 &= z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1 z_2 z_3 \Rightarrow z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 3z_1 z_2 z_3. \\
 \Rightarrow |z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| &= |3z_1 z_2 z_3| = 3|z_1||z_2||z_3| = 3
 \end{aligned}$$

Mặt khác $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ nên $|z_1|^3 + |z_2|^3 + |z_3|^3 = 3$. Vậy phương án D sai.

Cách 2: thay thử $z_1 = z_2 = z_3 = 1$ vào các đáp án, thấy đáp án D bị sai

Câu 37: Cho z_1, z_2, z_3 là các số phức thỏa $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$.
 B. $|z_1 + z_2 + z_3| > |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$.
 C. $|z_1 + z_2 + z_3| < |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$.
 D. $|z_1 + z_2 + z_3| \neq |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Kí hiệu Re : là phần thực của số phức.

Ta có $|z_1 + z_2 + z_3|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + 2\text{Re}(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_3 z_1) = 3 + 2\text{Re}(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_3 z_1)$ (1).

$$\begin{aligned}
 |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|^2 &= |z_1 z_2|^2 + |z_2 z_3|^2 + |z_3 z_1|^2 + 2\text{Re}(\bar{z}_1 \bar{z}_2 z_2 z_3 + \bar{z}_2 \bar{z}_3 z_3 z_1 + \bar{z}_3 \bar{z}_1 z_1 z_2) \\
 &= |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 + |z_2|^2 \cdot |z_3|^2 + |z_3|^2 \cdot |z_1|^2 + 2\text{Re}(\bar{z}_1 |z_2|^2 z_3 + \bar{z}_2 |z_3|^2 z_1 + \bar{z}_3 |z_1|^2 z_2) \\
 &= 3 + 2\text{Re}(\bar{z}_1 z_3 + \bar{z}_2 z_1 + \bar{z}_3 z_2) = 3 + 2\text{Re}(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_3 z_1) \text{ (2)}.
 \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$.

Các h khác: B hoặc C đúng suy ra D đúng Loại B, C.

Chọn $z_1 = z_2 = z_3 \Rightarrow$ A đúng và D sai

Cách 2: thay thử $z_1 = z_2 = z_3 = 1$ vào các đáp án, thấy đáp án D bị sai

Câu 38: Tìm số phức z có $|z|=1$ và $|z+i|_{\max}$:

- A. 1 B. -1 C. i D. $-i$

Lời giải

Đặt $z = a + bi$ thì $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$; $|z + i| = \sqrt{a^2 + (b+1)^2}$

Khi đó ta có:

$$|z|=1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow |b| \leq 1; |z+i| = \sqrt{a^2 + (b+1)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2b + 1} = \sqrt{2b + 2} \leq 2$$

Do đó giá trị lớn nhất đạt được bằng 2 khi $a = 0; b = 1; z = i$.

Chọn C

Câu 39: Tìm phần thực của số phức $z = (1+i)^n, n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn phương trình:

$$\log_4(n-3) + \log_4(n+9) = 3$$

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

Lời giải

Điều kiện $n > 3, n \in \mathbb{N}$

Phương trình: $\log_4(n-3) + \log_4(n+9) = 3 \Leftrightarrow \log_4(n-3)(n+9) = 3 \Leftrightarrow n = 7$ (so đk)

$$z = (1+i)^7 = (1+i) \left[(1+i)^2 \right]^3 = (1+i)(2i)^3 = 8-8i$$

Vậy phần thực của số phức z là 8.

Chọn D

Câu 40: Cho hai số phức phân biệt $z_1; z_2$ thỏa mãn điều kiện $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ là số ảo. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $|z_1| = 1; |z_2| = 1$ B. $z_1 = \overline{z_2}$ C. $|z_1| = |z_2|$ D. $z_1 = -z_2$

Lời giải

$$z_1 \neq z_2 \Leftrightarrow z_1 - z_2 \neq 0$$

$$\text{Thì } \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \text{ là số ảo} \Leftrightarrow \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} + \overline{\left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}\right)} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} + \frac{\overline{z_1 + z_2}}{\overline{z_1 - z_2}} = 0 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)(\overline{z_1 - z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = 0.$$

$$\Leftrightarrow 2(z_1 \overline{z_1} - z_2 \overline{z_2}) = 0 \Leftrightarrow z_1 \overline{z_1} - z_2 \overline{z_2} = 0 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|.$$

Chọn C

Câu 41: Cho 3 số phức $z_1; z_2; z_3$ thỏa $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ |z_1| = |z_2| = |z_3| = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$. Tính $A = |z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2$

- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} z_1 + z_2 = -z_3 \\ z_1 + z_3 = -z_2 \\ z_2 + z_3 = -z_1 \end{cases} \Rightarrow A = |-z_1|^2 + |-z_2|^2 + |-z_3|^2 = \frac{8}{3}.$$

Chọn C

Câu 42: Xét số phức z thỏa $2|z-1|+3|z-i| \leq 2\sqrt{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng:

- A. $\frac{3}{2} < |z| < 2$ B. $|z| > 2$ C. $|z| < \frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$

Lời giải

Ta xét các điểm $A(1;0), B(0;1)$ và $M(x;y)$ với M là điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng phức. Ta có: $2|z-1|+3|z-i| = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + 3\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 2MA + 3MB$.

$$\text{Ta có: } 2MA + 3MB = 2(MA + MB) + MB \geq 2AB + MB = 2\sqrt{2} + MB \geq 2\sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow 2|z-1|+3|z-i| \geq 2\sqrt{2}. \text{ Mà theo giả thuyết ta có: } 2|z-1|+3|z-i| \leq 2\sqrt{2}.$$

Vậy $2|z-1|+3|z-i| = 2\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} M \in AB \\ MB = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M \equiv B \Rightarrow M(0;1) \Rightarrow |z| = 1$$

Câu 43: Xét số phức z thỏa mãn $(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\frac{3}{2} < |z| < 2$. B. $|z| > 2$. C. $|z| < \frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } (|z|+2) + i(2|z|-1) = \frac{\sqrt{10}}{z} \Rightarrow \frac{\sqrt{10}}{|z|} = \sqrt{(|z|+2)^2 + (2|z|-1)^2} \Rightarrow \boxed{|z|=1}.$$

Chọn D

Câu 44: Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là nghiệm của phương trình $\left(\frac{z-1}{2z-i}\right)^4 = 1$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = (z_1^2 + 1)(z_2^2 + 1)(z_3^2 + 1)(z_4^2 + 1).$$

- A. 1. B. $\frac{19}{7}$. C. $\frac{17}{9}$. D. 2.

Lời giải

$$\text{Ta có: } (z-1)^4 = (2z-i)^4 \Leftrightarrow [(z-1)^2 - (2z-i)^2][(z-1)^2 + (2z-i)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow [(z-1) + (2z-i)][(z-1) - (2z-i)][(z-1)^2 + (2z-i)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow (3z-1-i)(-z-1+i)[5z^2 - (2+4i)z] = 0$$

$$\Leftrightarrow z_1 = \frac{1+i}{3}; z_2 = -1+i; z_3 = 0; z_4 = \frac{2+4i}{5} \Rightarrow \boxed{P = \frac{17}{9}}.$$

Chọn C

Câu 45: Tính module của $z = 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \dots + 2017 \cdot i^{2016}$.

- A. $|z| = \sqrt{2036164}$ B. $|z| = \sqrt{2030113}$ C. $|z| = \sqrt{2034145}$ D. $|z| = \sqrt{2032130}$

Lời giải

$$\text{Ta có } z = (1 + i + \dots + i^{2016}) + i(1 + i + \dots + i^{2015}) + \dots + i^{2015}(1 + i) + i^{2016}$$

$$= \frac{i^{2017} - 1}{i - 1} + \frac{i(i^{2016} - 1)}{i - 1} + \dots + \frac{i^{2015}(i^2 - 1)}{i - 1} + \frac{i^{2016}(i - 1)}{i - 1}$$

$$= \frac{2017 \cdot i^{2017} - (1 + i + \dots + i^{2016})}{i - 1} = \frac{2017 \cdot i^{2017}(i - 1) - i^{2017} + 1}{(i - 1)^2}$$

$$= \frac{2017 \cdot i^{2018} - 2018 \cdot i^{2017} + 1}{-2i} = -\frac{-2017 - 2018i + 1}{2i} = 1009 - 1008i \Rightarrow |z| = \sqrt{2034145}.$$

Chọn C

Câu 46: (KINH MÔN HẢI DƯƠNG 2019) Cho số phức u, v thỏa mãn: $|u| = |v| = 10$ và $|3u - 4v| = \sqrt{2019}$. Ta có $|4u + 3v|$ là

- A. $\sqrt{2890}$. B. $\sqrt{2981}$. C. $\sqrt{2891}$. D. $\sqrt{2982}$.

Lời giải**Chọn B**

$$\text{Ta có } |3u - 4v| = \sqrt{2019} \Leftrightarrow |3u - 4v|^2 = 2019 \Leftrightarrow (3u - 4v)(\overline{3u - 4v}) = 2019$$

$$\Leftrightarrow (3u - 4v)(\overline{3u} - \overline{4v}) = 2019 \Leftrightarrow 9(\overline{u})^2 - 12(u\overline{v} + \overline{u}v) + 16(\overline{v})^2 = 2019.$$

$$\text{Suy ra } u\overline{v} + \overline{u}v = \frac{481}{12}.$$

Tương tự như trên ta có

$$|4u + 3v|^2 = (4u + 3v)(\overline{4u + 3v}) = (4u + 3v)(\overline{4u} + \overline{3v}) = 16(\overline{u})^2 + 12(u\overline{v} + \overline{u}v) + 9(\overline{v})^2 = 2981.$$

$$\text{Do đó: } |4u + 3v| = \sqrt{2981}.$$

Câu 47: (Chuyên KHTN) Cho khai triển $(\sqrt{3} + x)^{2019} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{2019}x^{2019}$. Hãy tính tổng $S = a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \dots + a_{2016} - a_{2018}$.

A. 0.**B.** 2^{2019} .**C.** $(\sqrt{3})^{1009}$.**D.** 2^{1009} .**Lời giải****Chọn A**Với mọi $k \in \mathbb{N}$, ta có:

$$i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i \text{ và } (-i)^{4k} = 1, (-i)^{4k+1} = -i, (-i)^{4k+2} = -1, (-i)^{4k+3} = i$$

$$\text{Xét khai triển } (\sqrt{3} + x)^{2019} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{2019}x^{2019}$$

$$\text{Thay } x = i \text{ ta được: } (\sqrt{3} + i)^{2019} = a_0 + a_1i - a_2 - a_3i + a_4 + a_5i - a_6 - \dots - a_{2018} - a_{2019}i \\ = (a_0 - a_2 + a_4 - \dots - a_{2018}) + (a_1 - a_3 + a_5 - \dots - a_{2019})i$$

$$\text{Mà } (\sqrt{3} + i)^{2019} = 2^{2019} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^{2019} = 2^{2019} \cos \frac{2019\pi}{6} + i \sin \frac{2019\pi}{6} = 0 + i$$

$$\text{Suy ra } a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \dots - a_{2018} = 0$$

Câu 48: (Chuyên Vinh Lần 2) Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = \sqrt{3}$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Môđun $|z_1 + z_2|$ bằng

A. 2.**B.** 3.**C.** $\sqrt{2}$.**D.** $2\sqrt{2}$.**Lời giải****Chọn D****Cách 1:**Gọi các số phức $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ ($a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có: } z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.$$

$$\text{Ta có: } |z_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{3} \Rightarrow a_1^2 + b_1^2 = 3.$$

$$|z_2| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \sqrt{3} \Rightarrow a_2^2 + b_2^2 = 3.$$

$$|z_1 - z_2| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 - 2a_1a_2 - 2b_1b_2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 2a_1a_2 + 2b_1b_2 = 2.$$

$$\text{Do đó: } |z_1 + z_2| = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + 2a_1a_2 + 2b_1b_2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

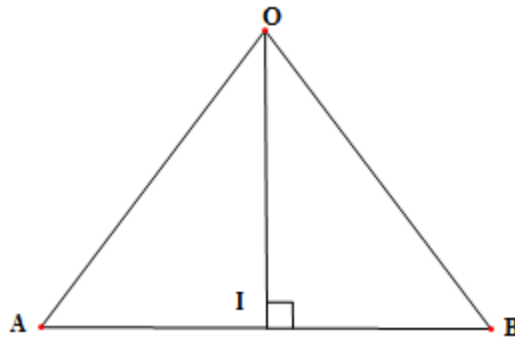
Cách 2:

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}) = 4$$

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 8$$

$$\Rightarrow |z_1 + z_2| = 2\sqrt{2}$$

Cách 3:



Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn 2 số phức z_1, z_2 . Khi đó tam giác OAB cân có $OA = OB = \sqrt{3}, AB = 2$. Gọi I là trung điểm của AB . Khi đó OI là đường cao của tam giác OAB .

$$OI = \sqrt{OA^2 - AI^2} = \sqrt{2}.$$

$$|z_1 + z_2| = 2|OI| = 2\sqrt{2}.$$

Cách 4:

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn 2 số phức z_1, z_2 . Khi đó tam giác OAB có

$$OA = OB = \sqrt{3}, AB = 2.$$

$$T = |z_1 + z_2| = |\vec{OA} + \vec{OB}| \Rightarrow T^2 = OA^2 + OB^2 + 2\vec{OA} \cdot \vec{OB}.$$

$$\text{Mà } \vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \cdot OB \cdot \cos(\angle AOB) = OA \cdot OB \cdot \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2} = 1.$$

$$\text{Vậy } T^2 = 8 \Rightarrow T = 2\sqrt{2}.$$

Cách 5:

$$\text{Ta có } |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.$$

$$\Rightarrow T = |z_1 + z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 - 4 = 8.$$

$$T = 2\sqrt{2}.$$

Cách 6: Chọn đại diện

$$\text{Chọn } \begin{cases} z_1 = \sqrt{3} \\ z_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{6}}{3}i \end{cases} \Rightarrow |z_1 + z_2| = \left| \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{6}}{3}i \right| = 2\sqrt{2}.$$

Cách 7:

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn 2 số phức z_1, z_2 . Khi đó tam giác OAB có

$$OA = OB = \sqrt{3}, AB = 2. \text{ Gọi } I \text{ là trung điểm của } AB.$$

$$\text{Ta có } T = |z_1 + z_2| = |\vec{OA} + \vec{OB}| = 2|OI| = 2OI = 2\sqrt{\frac{OA^2 + OB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}} = 2\sqrt{2}.$$

Cách 8: Tính nhanh.

$$\text{Tổng quát } |mz_1 + nz_2|^2 = m^2|z_1|^2 + n^2|z_2|^2 + mn(|z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2)$$

$$\text{Vậy } T^2 = |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + (|z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2) = 8 \Rightarrow T = 2\sqrt{2}.$$

Phân tích: Kiến thức cần nhớ về modun số phức:

Số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ trên mặt phẳng Oxy. Độ dài của vectơ

$$\vec{OM} \text{ được gọi là môđun của số phức } z. \text{ Kí hiệu } |z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Điểm M, N lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 thì khi đó $|z_1 - z_2| = MN$.

$$|mz_1 + nz_2|^2 = (mz_1 + nz_2)(\overline{mz_1 + nz_2}) = m^2 |z_1|^2 + n^2 |z_2|^2 + mn(z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2).$$

Suy ra hệ quả

- ☐ $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2.$
- ☐ $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2).$
- ☐ $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.$
- ☐ $|z + z_1|^2 + |z + z_2|^2 = 2 \left[\left| z + \frac{z_1 + z_2}{2} \right|^2 + \left| \frac{z_1 - z_2}{2} \right|^2 \right].$

Câu 49: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – NAM ĐỊNH 2019 – LẦN 1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $z_1; z_2; z_1 + z_2$. Xét các mệnh đề sau

- 1) $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = z_2 \\ z_1 = -z_2 \end{cases}$
- 2) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- 3) Nếu $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ thì $z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} = 0$
- 4) $OC^2 + AB^2 = 2(OA^2 + OB^2)$

Trong các mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề đúng?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Lời giải

Chọn B

+) Xét mệnh đề (1): Khi $z_1; z_2$ là hai số phức liên hợp thì ta có: $|z_1| = |z_2|$ nên mệnh đề (1) sai.

Theo giả thiết ta có: $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ lần lượt biểu diễn cho số phức $z_1; z_2$. Khi đó $|z_1| = |\overrightarrow{OA}|; |z_2| = |\overrightarrow{OB}|$

$$|z_1 + z_2| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|; |z_1 - z_2| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{AB}|$$

+) Xét mệnh đề (2)

Mệnh đề (2) tương đương $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| \leq |\overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{OB}|$, đúng theo tính chất của véc tơ.

Suy ra mệnh đề (2) đúng.

+) Xét mệnh đề (3): Gọi $z_1 = x_1 + y_1 i; z_2 = x_2 + y_2 i \Rightarrow A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$

$$\text{Do } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Rightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0.$$

$$\text{Xét } z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} = (x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i) + (x_1 - y_1 i)(x_2 + y_2 i) = 2(x_1 x_2 + y_1 y_2) = 0$$

Suy ra mệnh đề (3) đúng.

+) Xét mệnh đề (4)

$$\text{Mệnh đề (4) tương đương } |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|^2 = 2(|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2),$$

$$VT = OA^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + OB^2 + OA^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + OB^2 = 2(|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2) = VP.$$

Suy ra mệnh đề (4) đúng.

Câu 50: (THPT LƯƠNG THẾ VINH 2019 LẦN 3) Cho hai số phức z_1, z_2 khác 0 thỏa mãn $\frac{z_1}{z_2}$ là số

thuần ảo và $|z_1 - z_2| = 10$. Giá trị lớn nhất của $|z_1| + |z_2|$ bằng

- A. 10. B. $10\sqrt{2}$. C. $10\sqrt{3}$. D. 20.

Lời giải

Chọn B**Cách 1:**

Vì $\frac{z_1}{z_2}$ là số thuần ảo nên $\frac{z_1}{z_2} = ai$ (với $a \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow z_1 = aiz_2$.

Ta có $|z_1 - z_2| = 10 \Leftrightarrow |aiz_2 - z_2| = 10 \Leftrightarrow |z_2||ai - 1| = 10 \Leftrightarrow |z_2|\sqrt{1+a^2} = 10 \Leftrightarrow |z_2| = \frac{10}{\sqrt{1+a^2}}$.

Từ $z_1 = aiz_2 \Rightarrow |z_1| = |aiz_2| = \frac{10|a|}{\sqrt{1+a^2}}$.

Do đó $|z_1| + |z_2| = \frac{10|a|}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{10}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{10(1+|a|)}{\sqrt{1+a^2}} \leq \frac{10\sqrt{(1+1)(1+a^2)}}{\sqrt{1+a^2}} \leq 10\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = \pm 1 \Leftrightarrow z_1 = \pm iz_2$.

Vậy $\max(|z_1| + |z_2|) = 10\sqrt{2}$.

Cách 2:

Đặt $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$.

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2 .

$\Rightarrow A(a_1; b_1), B(a_2; b_2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}(a_1; b_1), \overrightarrow{OB}(a_2; b_2)$.

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{|z_2|^2}$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow \triangle OAB$ vuông

tại O.

$|z_1 - z_2| = AB = 10$.

$|z_1| + |z_2| = OA + OB \leq \sqrt{(OA^2 + OB^2) \cdot (1^2 + 1^2)} = \sqrt{2AB^2} = 10\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow OA = OB$.

Vậy $\max(|z_1| + |z_2|) = 10\sqrt{2}$.

DẠNG 2: PT, HPT TRÊN SỐ PHỨC

Câu 1: Gọi z_1, z_2 là 2 nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 2 = 0$ trên tập số phức. Tìm mô đun của số phức $\omega = (z_1 - 1)^{2015} + (z_2 - 1)^{2016}$.

A. $|\omega| = \sqrt{5}$

B. $|\omega| = \sqrt{2}$

C. $|\omega| = 1$

D. $|\omega| = \sqrt{3}$

Lời giải

Phương trình $z^2 - 2z + 2 = 0$ có $\Delta' = 1 - 2 = -1 = i^2$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm $\begin{cases} z_1 = 1 - i \\ z_2 = 1 + i \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} z_1 = 1 + i \\ z_2 = 1 - i \end{cases}$

Thay $\begin{cases} z_1 = 1 - i \\ z_2 = 1 + i \end{cases}$ vào ω ta được: $\omega = (-i)^{2015} + i^{2016} = -(i^2)^{1007} \cdot i + (i^2)^{1013} = -1 + i$.

Thay $\begin{cases} z_1 = 1 + i \\ z_2 = 1 - i \end{cases}$ vào $\omega = i^{2015} + (-i)^{2016} = (i^2)^{1002} \cdot i + (i^2)^{1003} = -1 + i$.

Vậy $|\omega| = \sqrt{2}$.

Chọn B

Câu 2: (Cụm THPT Vũng Tàu) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$.

Giá trị của biểu thức $(z_1 - 1)^{2019} + (z_2 - 1)^{2019}$ bằng

A. 2^{1009} .

B. 2^{1010} .

C. 0.

D. -2^{1010} .

Lời giải**Chọn D**

Xét phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0 \Leftrightarrow (z - 2)^2 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 2 + i \\ z_2 = 2 - i \end{cases}$

Khi đó ta có: $(z_1 - 1)^{2019} + (z_2 - 1)^{2019} = (1 + i)^{2019} + (1 - i)^{2019}$

$$= (1 + i) \cdot ((1 + i)^2)^{1009} + (1 - i) \cdot ((1 - i)^2)^{1009}$$

$$= (1 + i) \cdot (2i)^{1009} + (1 - i) \cdot (-2i)^{1009}$$

$$= (2i)^{1009} \cdot ((1 + i) - (1 - i)) = (2i)^{1010} = -2^{1010}.$$

Câu 3: (CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ HÒA BÌNH LẦN 4 NĂM 2019) Có bao nhiêu giá trị dương của số thực a sao cho phương trình $z^2 + \sqrt{3}z + a^2 - 2a = 0$ có nghiệm phức z_0 thỏa $|z_0| = \sqrt{3}$.

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải**Chọn B**

Phương trình $z^2 + \sqrt{3}z + a^2 - 2a = 0$ (*) có $\Delta = -4a^2 + 8a + 3$.

Xét 2 trường hợp:

$$\text{TH1. } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow -4a^2 + 8a + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{7}}{2} \leq a \leq \frac{2 + \sqrt{7}}{2} \quad (1).$$

Khi đó, phương trình (*) có nghiệm z_0 thì $z_0 \in \mathbb{R}$.

$$\text{Theo đề bài: } |z_0| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} z_0 = \sqrt{3} \\ z_0 = -\sqrt{3} \end{cases}.$$

$$* z_0 = -\sqrt{3}, \text{ thay vào phương trình (*) ta được } a^2 - 2a \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}.$$

$$* z_0 = \sqrt{3}, \text{ thay vào phương trình (*) ta được } a^2 - 2a + 6 = 0 \text{ (vô nghiệm).}$$

Kết hợp điều kiện $a > 0$ và điều kiện (1) suy ra $a = 2$.

$$\text{TH2. } \Delta < 0 \Leftrightarrow -4a^2 + 8a + 3 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{2 - \sqrt{7}}{2} \\ a > \frac{2 + \sqrt{7}}{2} \end{cases} (2).$$

Khi đó, phương trình (*) có nghiệm phức z_0 thì $\bar{z}_0$ cũng là một nghiệm của phương trình (*).

$$\text{Ta có } z_0 \cdot \bar{z}_0 = a^2 - 2a \Leftrightarrow |z_0|^2 = a^2 - 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 3 \end{cases}.$$

Kết hợp điều kiện $a > 0$ và điều kiện (2) suy ra $a = 3$.

Vậy có 2 giá trị a dương thỏa mãn là $a = 2$; $a = 3$.

Câu 4: (Chuyên Hùng Vương Gia Lai) Cho z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình

$$2z^2 - 4z + 11 = 0. \text{ Tính giá trị biểu thức } P = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{(z_1 + z_2)^2}$$

A. $\frac{9}{2}$.

B. $\frac{11}{4}$.

C. $\frac{11}{2}$.

D. $\frac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1.

$$2z^2 - 4z + 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}i \\ z = 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}i \end{cases}.$$

$$P = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{(z_1 + z_2)^2} = \frac{\left(1^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) + \left(1^2 + \left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)}{\left(\frac{2 + 3\sqrt{2}i + 2 - 3\sqrt{2}i}{2}\right)^2} = \frac{\frac{11}{2} + \frac{11}{2}}{4} = \frac{11}{4}.$$

$$\text{Cách 2. } 2z^2 - 4z + 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}i \\ z = 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}i \end{cases}.$$

$$|z_1|^2 = |z_2|^2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 = z_1 \cdot z_2 = \frac{11}{2}; z_1 + z_2 = 2 \Rightarrow P = \frac{2 \cdot \frac{11}{2}}{2^2} = \frac{11}{4}.$$

Câu 5: (Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2) Gọi S là tổng các giá trị thực của m để phương trình $9z^2 + 6z + 1 - m = 0$ có nghiệm phức thỏa mãn $|z| = 1$. Tính S .

A. 20.

B. 12.

C. 14.

D. 8.

Lời giải

Chọn B

$$9z^2 + 6z + 1 - m = 0 \quad (*)$$

Trường hợp 1: $(*)$ có nghiệm thực $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 9 - 9(1 - m) \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 1$.

$$|z| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\square \quad z = 1 \Rightarrow m = 16 \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\square \quad z = -1 \Rightarrow m = 4 \text{ (thỏa mãn).}$$

Trường hợp 2: $(*)$ có nghiệm phức $z = a + bi \ (b \neq 0) \Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow 9 - 9(1 - m) < 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Nếu z là một nghiệm của phương trình $9z^2 + 6z + 1 - m = 0$ thì $\bar{z}$ cũng là một nghiệm của phương trình $9z^2 + 6z + 1 - m = 0$.

$$\text{Ta có } |z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow \frac{c}{a} = 1 \Leftrightarrow \frac{1-m}{9} = 1 \Leftrightarrow m = -8 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy tổng các giá trị thực của m bằng 12.

Câu 6: (Chuyên Lý Tự Trọng Cần Thơ) Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $(z - 3 + i)^2 - 4z - 4i + 25 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

A. $A = 50$.

B. $A = 70$.

C. $A = 13$.

D. $A = 8$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Có } (z - 3 + i)^2 - 4z - 4i + 25 = 0 \Leftrightarrow [(z + i) - 3]^2 - 4(z + i) + 25 = 0 \Leftrightarrow (z + i)^2 - 10(z + i) + 34 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z + i = 5 + 3i \\ z + i = 5 - 3i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 5 + 2i \\ z_2 = 5 - 4i \end{cases}$$

$$A = |z_1|^2 + |z_2|^2 = |5 + 2i|^2 + |5 - 4i|^2 = 70.$$

Câu 7: Tìm các số thực b, c để phương trình (với ẩn z) $z^2 + bz + c = 0$ nhận $z = 1 + i$ là một nghiệm.

A. $b = 2; c = -2$

B. $b = 2; c = 2$

C. $b = -2; c = -2$

D. $b = -1; c = 1$

Lời giải

Nếu $z = 1 + i$ là nghiệm thì:

$$(1 + i)^2 + b(1 + i) + c = 0 \Leftrightarrow b + c + (b + 2)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 0 \\ b + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$$

Một phương trình bậc hai với hệ số thực, nếu có một nghiệm phức z thì cũng nhận $\bar{z}$ làm nghiệm. Vậy nếu $z = 1 + i$ là một nghiệm thì $\bar{z} = 1 - i$ cũng là nghiệm. Theo định lý Vi-ét:

$$\begin{cases} (1 + i) + (1 - i) = -b \Rightarrow b = -2 \\ (1 + i)(1 - i) = c \Rightarrow c = 2 \end{cases}$$

Chọn A

Câu 8: Tìm các số thực a, b, c sao cho hai phương trình $az^2 + bz + c = 0, cz^2 + bz + a + 16 - 16i = 0$ có nghiệm chung là $z = 1 + 2i$

A. $(a, b, c) = (1; -2; 5)$

B. $(a, b, c) = (1; 2; 5)$

C. $(a, b, c) = (-1; -2; 5)$

D. $(a, b, c) = (1; -2; -5)$

Lời giải

Theo giả thiết phương trình $az^2 + bz + c = 0$ có nghiệm $z = 1 + 2i$ khi

$$a(1 + 2i)^2 + b(1 + 2i) + c = 0 \Leftrightarrow -3a + b + c + (4a + 2b)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3a + b + c = 0 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Tương tự phương trình $cz^2 + bz + a + 16 - 16i = 0$ có nghiệm $z = 1 + 2i$ khi

$$c(1+2i)^2 + b(1+2i) + a + 16 - 16i = 0 \Leftrightarrow c(-3+4i) + b + 2bi + a + 16 - 16i = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-3c+16) + 2(b+2c-8)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-3c+16=0 \\ b+2c-8=0 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $(a, b, c) = (1; -2; 5)$.

Chọn A

Câu 9: Tìm các số thực a, b, c để phương trình (với ẩn z) $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ nhận $z = 1 + i$ làm nghiệm và cũng nhận $z = 2$ làm nghiệm.

A. $a = -4; b = 6; c = -4$

B. $a = -4; b = 5; c = -4$

C. $a = -3; b = 4; c = -2$

D. $a = -1; b = 0; c = 2$

Lời giải

$$z = 1 + i \text{ là nghiệm thì } (1+i)^3 + a(1+i)^2 + b(1+i) + c = 0$$

$$z = 2 \text{ là nghiệm thì } 8 + 4a + 2b + c = 0$$

$$\text{Từ đó ta có hệ phương trình } \begin{cases} b + c - 2 = 0 & (1) \\ 2a + b + 2 = 0 & (2) \\ 4a + 2b + c + 8 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1) suy ra } c = 2 - b$$

$$\text{Từ (2) suy ra } b = -2 - 2a \Rightarrow c = 2 - (-2 - 2a) = 4 + 2a$$

$$\text{Thay vào (3) ta có: } 4a + 2(-2 - 2a) + 4 + 2a + 8 = 0 \Rightarrow a = 4$$

$$\text{Với } a = -4 \Rightarrow b = 6; c = -4.$$

Chọn A

Câu 10: (CHUYÊN HẠ LONG NĂM 2019) Biết phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ nhận $z_1 = -1 + i$ và $z_2 = 1 + \sqrt{2}i$ là nghiệm. Tính $a + b + c + d$.

A. 10.

B. 9.

C. -7.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

$$+) \text{ Xét phương trình } x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (1), \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}).$$

$$+) \text{ Nhận thấy: Nếu } z \text{ là nghiệm của (1) thì } \bar{z} \text{ cũng là nghiệm của (1).}$$

$$+) \text{ Do đó, (1) có bốn nghiệm } z_1 = -1 + i, \quad z_2 = 1 + \sqrt{2}i, \quad z_3 = \bar{z}_1 = -1 - i, \quad z_4 = \bar{z}_2 = 1 - \sqrt{2}i.$$

$$+) \text{ Mà } \begin{cases} z_1 + z_3 = -2 \\ z_1 \cdot z_3 = 2 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} z_2 + z_4 = 2 \\ z_2 \cdot z_4 = 3 \end{cases}.$$

$$+) \text{ Do đó } x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 3)$$

$$\Leftrightarrow x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = x^4 + x^2 + 2x + 6.$$

$$\text{Suy ra } a = 0, \quad b = 1, \quad c = 2, \quad d = 6 \text{ hay } a + b + c + d = 9.$$

Câu 11: Tìm điều kiện cần và đủ về các số thực m, n để phương trình $z^4 + mz^2 + n = 0$ không có nghiệm thực.

A. $m^2 - 4n > 0$.

$$\text{B. } m^2 - 4n < 0 \text{ hoặc } \begin{cases} m^2 - 4n > 0 \\ m < 0 \\ n > 0 \end{cases}.$$

$$\text{C. } \begin{cases} m^2 - 4n \geq 0 \\ m > 0 \\ n > 0 \end{cases}.$$

$$\text{D. } m^2 - 4n < 0 \text{ hoặc } \begin{cases} m^2 - 4n \geq 0 \\ m > 0 \\ n > 0 \end{cases}.$$

Lời giải

Phương trình $z^4 + mz^2 + n = 0$ không có nghiệm thực trong các trường hợp:

TH1: Phương trình vô nghiệm, tức là $m^2 - 4n < 0$.

$$\text{TH2: Phương trình } t^4 + mt^2 + n = 0; (t = z^2) \text{ có hai nghiệm âm} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4n \geq 0 \\ m > 0 \\ n > 0 \end{cases}.$$

Chọn D

Câu 12: Gọi $z_1; z_2; z_3; z_4$ là 4 nghiệm phức của phương trình $z^4 + (4+m)z^2 + 4m = 0$. Tìm tất cả các giá trị m để $|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = 6$.

$$\text{A. } m = -1$$

$$\text{B. } m = \pm 2$$

$$\text{C. } m = \pm 3$$

$$\text{D. } m = \pm 1$$

Lời giải

$$z^4 + (4+m)z^2 + 4m = 0 \Leftrightarrow (z^2 + 4)(z^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_{1,2} = \pm 2i \\ z_{3,4} = \pm \sqrt{-m} \end{cases}$$

$$\text{Nếu } m \leq 0 \text{ hoặc } \Leftrightarrow \begin{cases} z_{1,2} = \pm 2i \\ z_{3,4} = \pm i\sqrt{m} \end{cases} \text{ nếu } m > 0$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} 6 = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = 4 + 2\sqrt{-m} \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$$

$$\text{Hoặc } \begin{cases} 6 = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = 4 + 2\sqrt{m} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

Kết hợp lại $m = \pm 1$ thỏa mãn bài toán.

Chọn D

Câu 13: (Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đắk Lắk) Gọi S là tập tất cả các nghiệm phức của phương trình $z^4 - 2iz^3 + (i-1)z^2 + 2z - i = 0$. Tổng các phần tử của S bằng

$$\text{A. } 1.$$

$$\text{B. } 1+i.$$

$$\text{C. } i.$$

$$\text{D. } 2i.$$

Lời giải**Chọn C**

$$\text{Ta có: } z^4 - 2iz^3 + (i-1)z^2 + 2z - i = 0$$

$$\Leftrightarrow (z-i)^2 \cdot (z^2 + i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z-i=0 \\ z^2+i=0 \Leftrightarrow z^2=-i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=i \\ z=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i \\ z=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$$

Khi đó, tập các nghiệm phức của phương trình đã cho: $S = \left\{ i; -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i; \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right\}$

Tổng các phần tử của S bằng: $i + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = i$.

- Câu 14: (THTT lần 5)** Kí hiệu $z_1; z_2; z_3; z_4$ là bốn nghiệm phức của phương trình $(z^2 - 3z + 6)(z^2 + 3z + 3) - z(9 + 2z^2) + z^2 = 0$. Giá trị của biểu thức $|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$ bằng
- A.** $2\sqrt{3}(1 + \sqrt{2})$. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})$. **D.** $2\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(z^2 - 3z + 6)(z^2 + 3z + 3) - z(9 + 2z^2) + z^2 = 0$

$$\Leftrightarrow z^2 - (9 + 2z^2)z + (z^2 - 3z + 6)(z^2 + 3z + 3) = 0$$

$$\Delta = (9 + 2z^2)^2 - 4(z^2 - 3z + 6)(z^2 + 3z + 3) = (6z - 3)^2 \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{2z^2 + 9 - 6z + 3}{2} = z^2 - 3z + 6 \\ z = \frac{2z^2 + 9 + 6z - 3}{2} = z^2 + 3z + 3 \end{cases}.$$

Với $z = z^2 - 3z + 6 \Leftrightarrow z^2 - 4z + 6 = 0$. Phương trình có hai nghiệm

$$z_1 = 2 + \sqrt{2}i \text{ và } z_2 = 2 - \sqrt{2}i$$

Với $z = z^2 + 3z + 3 \Leftrightarrow z^2 + 2z + 3 = 0$. Phương trình có hai nghiệm là

$$z_3 = -1 - \sqrt{2}i \text{ và } z_4 = -1 + \sqrt{2}i$$

$$\text{Vậy } |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = |2 + \sqrt{2}i| + |2 - \sqrt{2}i| + |-1 - \sqrt{2}i| + |-1 + \sqrt{2}i| = 2\sqrt{3}(1 + \sqrt{2}).$$

- Câu 15: (Sở Bắc Ninh 2019)** Cho số phức z, w khác 0 thỏa mãn $z + w \neq 0$ và $\frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{6}{z + w}$. Khi đó

$\left| \frac{z}{w} \right|$ bằng:

- A.** 3. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\sqrt{3}$.

D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn D

Với hai số phức z, w khác 0 thỏa mãn $z + w \neq 0$, ta có:

$$\frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{6}{z + w} \Leftrightarrow \frac{w + 3z}{zw} = \frac{6}{z + w} \Leftrightarrow (w + 3z)(z + w) = 6zw \Leftrightarrow 3z^2 - 2zw + w^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{z}{w}\right)^2 - 2\left(\frac{z}{w}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z}{w} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i \\ \frac{z}{w} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}i \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \left| \frac{z}{w} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

- Câu 16: (Nam Tiền Hải Thái Bình Lần 1)** Cho số phức z thỏa mãn $|z| - 2\bar{z} = -7 + 3i + z$. Tính $|z|$.

A. $|z| = 5$.

B. $|z| = 3$.

C. $|z| = \frac{13}{4}$.

D. $|z| = \frac{25}{4}$.

Lời giải**Chọn A**Gọi $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$|z| - 2\bar{z} = -7 + 3i + z \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} - 2(a - bi) = -7 + 3i + a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} - 2a = -7 + a \\ 2b = 3 + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ \sqrt{a^2 + 9} = 3a - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ 3a - 7 \geq 0 \\ a^2 + 9 = (3a - 7)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow z = 4 + 3i \Rightarrow |z| = 5.$$

Câu 17: (Kim Liên 2016-2017) Tìm tập hợp T gồm tất cả các số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo.

A. $T = \{-1-i; 1-i; -1+i; 1+i\}$.

B. $T = \{1-i; 1+i\}$.

C. $T = \{-1+i\}$.

D. $T = \{-1-i\}$.

Lời giải**Chọn A**Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$\Rightarrow z^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 - 2xyi.$$

$$\text{Khi đó } |z| = \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2.$$

$$z^2 \text{ là số thuần ảo nên ta có } x^2 - y^2 = 0.$$

$$\text{Từ đó ta có hệ } \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y = 1 \\ x = 1, y = -1 \\ x = -1, y = 1 \\ x = -1, y = -1 \end{cases}.$$

Câu 18: (Nguyễn Tấn Thành Yên Bái) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 1 + 3i - |z|i = 0$. Tính $S = 2a + 3b$.

A. $S = -6$.

B. $S = 6$.

C. $S = -5$.

D. $S = 5$.

Lời giải**Chọn A**

$$\text{Ta có } z + 1 + 3i - |z|i = 0 \Leftrightarrow (a+1) + (b+3-\sqrt{a^2+b^2})i = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+1=0 \\ b+3-\sqrt{a^2+b^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ \sqrt{1+b^2}=b+3 \end{cases} \quad (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq -3 \\ 1+b^2 = (b+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq -3 \\ b = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow b = -\frac{4}{3}.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a=-1 \\ b=-\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow S = 2a + 3b = -6.$$

Câu 19: (PHÂN-TÍCH-BL-VÀ-PT-ĐẠI-HỌC-SP-HÀ-NỘI) Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn điều kiện $z^4 = |z|$. Số phần tử của S là

A. 7.

B. 6.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } z^4 = |z| \Leftrightarrow |z|^4 = |z| \Leftrightarrow |z|(|z|^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 0 \\ |z| = 1 \end{cases}.$$

$$+) |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

$$+) |z| = 1 \Leftrightarrow z^4 = 1 \Leftrightarrow (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ z = 1 \\ z = i \\ z = -i \end{cases}.$$

 $\Rightarrow S$ có 5 phần tử.

Câu 20: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z| = 1$ và $\frac{z+1}{z-1}$ là số thuần ảo?

A. Vô số.

B. 0.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } |z|^2 = z\bar{z} = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}.$$

$$\frac{z+1}{z-1} \text{ là số thuần ảo} \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} + \overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} = 0 \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} + \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} + \frac{\frac{1}{z}+1}{\frac{1}{z}-1} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} + \frac{z+1}{1-z} = 0 \text{ luôn đúng } \forall z \neq 1.$$

Câu 21: (Đặng Thành Nam Đề 5) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}; a, b \neq 0$) thỏa mãn

$$z + 4\bar{z} = \left(\frac{5}{3} - 2\sqrt{2}i\right)|z|. \text{ Tính } S = \frac{2a+b}{2a-b}.$$

A. $S = -2\sqrt{2} - 3$.B. $S = 2\sqrt{2} - 2$.C. $S = 2 - 2\sqrt{2}$.D. $S = 2\sqrt{2} + 3$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}; a, b \neq 0$), ta có

$$(a + bi) + 4(a - bi) = \left(\frac{5}{3} - 2\sqrt{2}i\right)\sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow 5a - 3bi = \frac{5}{3}\sqrt{a^2 + b^2} - 2\sqrt{2}(a^2 + b^2)i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a = \frac{5}{3}\sqrt{a^2 + b^2} & (1) \\ -3b = -2\sqrt{2}(a^2 + b^2) & (2) \end{cases} \text{ . Từ đó suy ra } a > 0, b > 0.$$

$$\text{Chia (1) cho (2) được } b = 2\sqrt{2}a > 0 \Rightarrow S = \frac{2\sqrt{2} + 2}{2 - 2\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} - 3.$$

Vậy chọn đáp án A

Câu 22: (KSCL-Lần-2-2019-THPT-Nguyễn-Đức-Cảnh-Thái-Bình) Cho số phức $z = a + bi$ (với a, b là các số thực và $a^2 + b^2 \neq 0$) thỏa mãn điều kiện $\bar{z}(2 + i - z) = |z|^2$. Tính $S = a^2 + 2b^2 - ab$.

A. $S = 3$.B. $S = -1$.C. $S = 2$.D. $S = 1$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \bar{z}(2+i-z) = |z|^2 \Leftrightarrow (a-bi)(2+i-a-bi) = a^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow (a-2b)i + 2a + b - 2a^2 - 2b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2b=0 & (1) \\ 2a+b-2a^2-2b^2=0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow a=2b \text{ thay vào (2) ta được: } 10b^2 - 5b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$$

+ Với $b=0 \Rightarrow a=0$ (Loại)

+ Với $b=\frac{1}{2} \Rightarrow a=1$

$$\text{Vậy } S = a^2 + 2b^2 - ab = 1.$$

Câu 23: (Đặng Thành Nam Đề 14) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-2+3i)+4i=(4+5i)z$.

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = |z| (t \geq 0)$.

$$\text{Ta có: } (z-2+3i)t+4i=(4+5i)z \Leftrightarrow z(t-4-5i)=2t-(3t+4)i$$

Lấy môđun 2 vế ta được:

$$|z(t-4-5i)| = |2t-(3t+4)i| \Leftrightarrow t\sqrt{(t-4)^2+25} = \sqrt{4t^2+(3t+4)^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2((t-4)^2+25) = (4t^2+(3t+4)^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t^4-8t^3+28t^2-24t-16=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-2)(t^3-6t^2+16t+8)=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=2 \text{ (TMĐK)}$$

Với $t=2$, ta có:

$$2(z-2+3i)+4i=(4+5i)z$$

$$\Leftrightarrow 2[x-2+(y+3)i]+4i=(4+5i)(x+yi)$$

$$\Leftrightarrow 2(x-2)+(2y+10)=4x-5y+(5x+4y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4y=-4 \\ 5x+2y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow z=2$$

Vậy có duy nhất 1 số phức z thỏa yêu cầu.

Câu 24: (THPT Yên-Mô-A-Ninh-Bình-2018-2019-Thi-tháng-4) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-5-i)+2i=(6-i)z$?

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } |z|(z-5-i)+2i=(6-i)z \Leftrightarrow |z|z-5|z|-|z|i+2i=6z-iz$$

$$\Leftrightarrow z(|z|-6+i)=5|z|+(|z|-2)i \text{ (*)}$$

Mô đun hai vế của biểu thức (*) ta được:

$$|z(|z|-6+i)| = |5|z|+(|z|-2)i| \Leftrightarrow |z||z|-6+i = \sqrt{25|z|^2+(|z|-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow |z|\sqrt{(|z|-6)^2+1} = \sqrt{25|z|^2+(|z|-2)^2} \quad (**).$$

Đặt $|z|=t, t \geq 0$.

Phương trình (**) trở thành: $t\sqrt{(t-6)^2+1} = \sqrt{25t^2+(t-2)^2}$.

Bình phương hai vế ta được:

$$t^2[(t-6)^2+1] = 25t^2+(t-2)^2 \Leftrightarrow t^2(t^2-12t+36+1) = 25t^2+(t^2-4t+4)$$

$$\Leftrightarrow t^4-12t^3+11t^2+4t-4=0 \Leftrightarrow (t-1)(t^3-11t^2+4)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t-1=0 \\ t^3-11t^2+4=0 \end{cases} \text{ Suy ra } \begin{cases} t=1 \\ t \approx 10,967 \\ t \approx 0,621 \\ t \approx -0,588 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $t \geq 0$ ta có 3 giá trị của t thỏa mãn.

Từ (*) suy ra, ứng với mỗi $|z|=t$ sẽ có một số phức $z = \frac{5t+(t-2)i}{t-6+i}$ thỏa mãn đề bài.

Vậy có 3 số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 25: (Đặng Thành Nam Đề 9) Có tất cả bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=4$ và

$$|z-2-2i|=3\sqrt{2}.$$

A. 7.

B. 3.

C. 2.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Với $z=a+bi \Rightarrow |z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=4 \Leftrightarrow |2a|+|2b|=4 \Leftrightarrow |a|+|b|=2$.

Khi đó $|z-2-2i|=3\sqrt{2} \Leftrightarrow (a-2)^2+(b-2)^2=18$.

Vậy ta có hệ

$$\begin{cases} |a|+|b|=2 \\ (a-2)^2+(b-2)^2=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2(a,b \geq 0) (1) \\ -a+b=2(a \leq 0, b \geq 0) (2) \\ a-b=2(a \geq 0, b \leq 0) (3) \\ -a-b=2(a \leq 0, b \leq 0) (4) \\ (a-2)^2+(b-2)^2=18 (*) \end{cases}$$

Từ (1), (*) ta có hệ $\begin{cases} a = 2 - b (a, b \geq 0) \\ b^2 + (b - 2)^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - b (a, b \geq 0) \\ \begin{cases} b = 1 + 2\sqrt{2} \Rightarrow a = 1 - 2\sqrt{2} (l) \\ b = 1 - 2\sqrt{2} (l) \end{cases} \end{cases}$

Từ (2), (*) ta có hệ $\begin{cases} a = b - 2 (a \leq 0, b \geq 0) \\ (b - 4)^2 + (b - 2)^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 2 (a \leq 0, b \geq 0) \\ \begin{cases} b = 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow a = 1 + 2\sqrt{2} (l) \\ b = 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow a = 1 - 2\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$

Từ (3), (*) ta có hệ $\begin{cases} a = b + 2 (a \geq 0, b \leq 0) \\ b^2 + (b - 2)^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2 (a \geq 0, b \leq 0) \\ \begin{cases} b = 1 + 2\sqrt{2} (l) \\ b = 1 - 2\sqrt{2} \Rightarrow a = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$

Từ (4), (*) ta có hệ $\begin{cases} a = -b - 2 (a \leq 0, b \leq 0) \\ (b + 4)^2 + (b - 2)^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b - 2 (a \leq 0, b \leq 0) \\ \begin{cases} b = -1 \Rightarrow a = -1 \end{cases} \end{cases}$

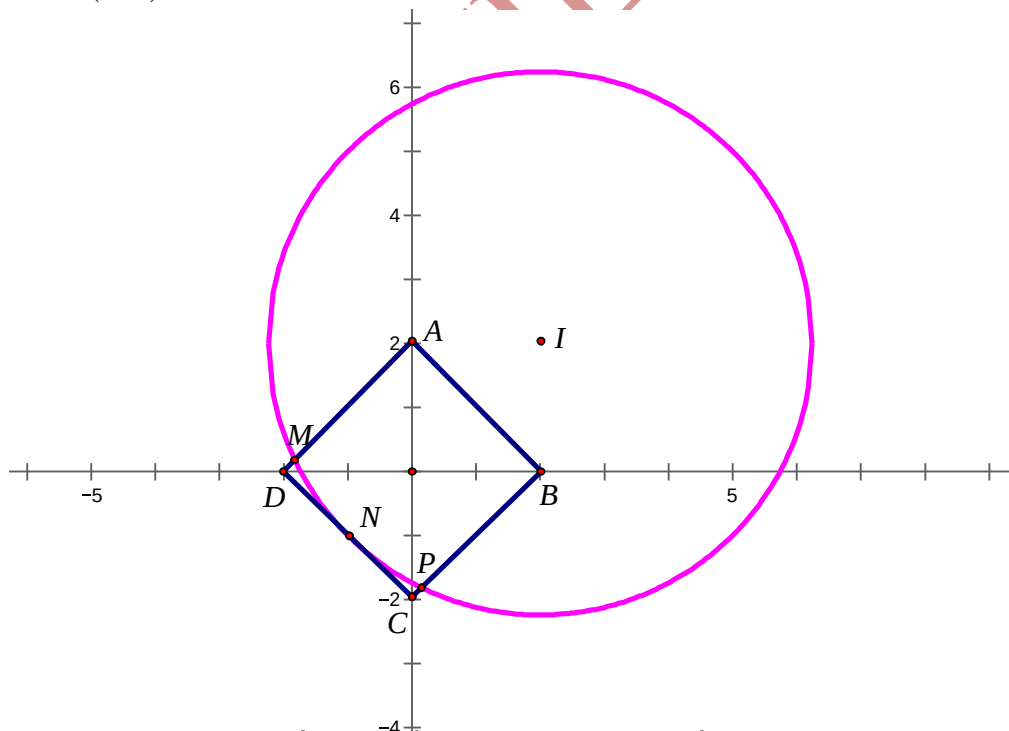
Vậy có 3 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2:

Với $z = x + yi; x, y \in \mathbb{R}$

$|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 4 \Leftrightarrow |x| + |y| = 2$. Khi đó tập hợp điểm biểu diễn số phức z là 4 cạnh hình vuông $ABCD$.

$|z - 2 - 2i| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 18$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(2; 2), R = 3\sqrt{2}$.



Dựa vào hình vẽ, ta thấy có 3 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán tương ứng với 3 điểm biểu diễn M, N, P .

Câu 26: (Sở Lạng Sơn 2019) Giả sử z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình

$$|(2+i)z|z - (1-2i)z| = |1+3i| \text{ và } |z_1 - z_2| = 1. \text{ Tính } M = |2z_1 + 3z_2|.$$

A. $M = \sqrt{19}$.

B. $M = 19$.

C. $M = 25$.

D. $M = 5$.

Lời giải

Chọn A

$$|(2+i)|z|z - (1-2i)z| = |1+3i| \Leftrightarrow |z|[(2|z|-1) + (|z|+2)i] = \sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow |z|\sqrt{(2|z|-1)^2 + (|z|+2)^2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow 5|z|^4 + 5|z|^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$$

Gọi $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$.

$$\text{Ta có: } |z_1| = |z_2| = 1 \Rightarrow a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = 1$$

$$\text{Ta có: } |z_1 - z_2| = 1 \Rightarrow (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = 1 \Rightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có: } M = |2z_1 + 3z_2| = |(2a_1 + 3a_2) + (2b_1 + 3b_2)i| = \sqrt{(2a_1 + 3a_2)^2 + (2b_1 + 3b_2)^2}$$

$$= \sqrt{4(a_1^2 + b_1^2) + 12(a_1a_2 + b_1b_2) + 9(a_2^2 + b_2^2)} = \sqrt{19}. \text{ Vậy chọn A.}$$

Câu 27: (Đặng Thành Nam Đề 2) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2 = |z + \bar{z}| + |z - \bar{z}|$ và z^2 là số thuần ảo.

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $z = a + bi$; ($a, b \in \mathbb{R}$), khi đó ta có $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ là số thuần ảo khi và chỉ khi $a^2 = b^2$.

$$\Leftrightarrow |a| = |b| \quad (1)$$

$$\text{Khi đó } \bar{z} = a - bi \text{ suy ra } |z + \bar{z}| = 2|a|, |z - \bar{z}| = 2|b|.$$

$$\text{Ta có } |z|^2 = |z^2| = 2|ab| \text{ nên kết hợp với giả thiết suy ra } |ab| = |a| + |b| \quad (2)$$

$$\text{Kết hợp (1) và (2) ta được hệ } \begin{cases} |a| = |b| \\ |ab| = |a| + |b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a|^2 = 2|a| \\ |a| = |b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| = |b| = 2 \\ |a| = |b| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 2 \\ a = b = -2 \\ a = -b = 2 \\ a = -b = -2 \\ a = b = 0 \end{cases}$$

Vậy có 5 số phức thỏa mãn.

Câu 28: (Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đắk Lắk) Phương trình $z^3 = \bar{z}$ có bao nhiêu nghiệm phức?

A. 3.

B. 5.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$z^3 = \bar{z} \Leftrightarrow (a + bi)^3 = a - bi \Leftrightarrow a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i = a - bi$$

$$\Leftrightarrow (a^3 - 3ab^2 - a) + (3a^2b - b^3 + b)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 3ab^2 - a = 0 \\ 3a^2b - b^3 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3b^2 - 1 = 0 \\ a = 0 \\ 3a^2 - b^2 + 1 = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ a=0 \\ b=\pm 1 \\ a=\pm 1 \\ b=0 \\ a^2=b^2=-\frac{1}{2} \quad (l) \end{cases}$$

Vậy phương trình $z^3 = \bar{z}$ có 5 nghiệm phức.

Câu 29: (SỞ QUẢNG BÌNH NĂM 2019) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $3|z+z|+2|z-\bar{z}|=12$ và $|z+2-3i|=|\bar{z}-4+i|$?

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} 3|z+\bar{z}|+2|z-\bar{z}|=12 \\ |z+2-3i|=|\bar{z}-4+i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3|2a|+2|2bi|=12 \\ |(a+2)+(b-3)i| = |(a-4)+(1-b)i| \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3|a|+2|b|=6 \\ \sqrt{(a+2)^2+(b-3)^2} = \sqrt{(a-4)^2+(1-b)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3|a|+2|b|=6 \\ 3a-b=1 \end{cases} \quad (1)$$

- TH1: $a \geq 0, b \geq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3a+2b=6 \\ 3a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{8}{9} \\ b=\frac{5}{3} \end{cases}$ (thỏa mãn) $\Rightarrow z = \frac{8}{9} + \frac{5}{3}i$

- TH2: $a \geq 0, b < 0$ thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3a-2b=6 \\ 3a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{4}{3} \\ b=-5 \end{cases}$, (loại)

- TH3: $a < 0, b \geq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} -3a+2b=6 \\ 3a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{8}{3} \\ b=7 \end{cases}$, (loại)

- TH4: $a < 0, b < 0$ thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} -3a-2b=6 \\ 3a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{4}{9} \\ b=-\frac{7}{3} \end{cases}$ (thỏa mãn) $\Rightarrow z = -\frac{4}{9} - \frac{7}{3}i$

Vậy có 2 số phức thỏa mãn $\Rightarrow$ chọn D

Câu 30: (THPT ISCHOOL NHA TRANG) Cho số phức z không phải là số thực và $\frac{z^2-2z+4}{z^2+2z+4}$ là số thực. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=|z^2|$?

A. 0.

B. 2.

C. 4.

D. 8.

Lời giải

Chọn B

Cách 1.

$\frac{z^2 - 2z + 4}{z^2 + 2z + 4}$ là số thực nên

$$\frac{z^2 - 2z + 4}{z^2 + 2z + 4} = \overline{\frac{z^2 - 2z + 4}{z^2 + 2z + 4}} \Leftrightarrow (z^2 - 2z + 4)(\bar{z}^2 + 2\bar{z} + 4) = (z^2 + 2z + 4)(\bar{z}^2 - 2\bar{z} + 4)$$

$$\Leftrightarrow 4z^2\bar{z} - 4z\bar{z}^2 - 16z + 16\bar{z} = 0 \Leftrightarrow |z|^2(z - \bar{z}) - 4(z - \bar{z}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (|z|^2 - 4)(z - \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \text{ vì } z - \bar{z} \neq 0 \quad (1)$$

Đặt $z = a + bi$ với $b \neq 0, a \in \mathbb{R}$

$$|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z|^2 \Leftrightarrow 2|a| + 2|b| = 4 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ |a| + |b| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| \cdot |b| = 0 \\ |a| + |b| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| = 0 \\ |b| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \\ a = 0 \\ b = -2 \end{cases}$

Cách 2.

Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$

Do z là số thực nên $b \neq 0$

$$\frac{z^2 - 2z + 4}{z^2 + 2z + 4} = \frac{(a + bi)^2 - 2(a + bi) + 4}{(a + bi)^2 + 2(a + bi) + 4} = \frac{(a^2 - b^2 - 2a + 4) + (2ab - 2b)i}{(a^2 - b^2 + 2a + 4) + (2ab + 2b)i}$$

$\frac{z^2 - 2z + 4}{z^2 + 2z + 4}$ là số thực nên phần ảo bằng 0

$$\Leftrightarrow -(a^2 - b^2 - 2a + 4)(2ab + 2b) + (2ab - 2b)(a^2 - b^2 + 2a + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4b(a^2 + b^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4 \text{ do } b \neq 0.$$

Mặt khác $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z|^2$

$$\Leftrightarrow |2a| + |2b| = a^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow 2(|a| + |b|) = a^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow 4(a^2 + 2|ab| + b^2) = (a^2 + b^2)^2$$

Thay (1) vào (2) ta có $4(4 + 2|ab|) = 16 \Leftrightarrow |ab| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ mà $b \neq 0$ nên nhận $a = 0$

Với $a = 0$ ta được $b = \pm 2$ nên $z = \pm 2i$

Câu 31: (Triệu Thái Vĩnh Phúc Lần 3) Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 5$ và $|z + 3| = |z + 3 - 10i|$. Tìm số phức $w = z - 4 + 3i$.

A. $w = -3 + 8i$.

B. $w = 1 + 3i$.

C. $w = -1 + 7i$.

D. $w = -4 + 8i$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có

$$\begin{cases} |z| = 5 \\ |z + 3| = |z + 3 - 10i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x + yi| = 5 \\ |x + 3 + yi| = |x + 3 + (y - 10)i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ (x + 3)^2 + y^2 = (x + 3)^2 + (y - 10)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 20y = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 25 - 5^2 = 0 \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}. \text{ Suy ra } z = 5i.$$

Từ đó ta có $w = z - 4 + 3i = -4 + 3i + 5i = -4 + 8i$.

Câu 32: (Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đắk Lắk) Cho các số phức z thỏa mãn hai điều kiện $|z| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo. Tổng bình phương phần thực của tất cả các số phức z đó bằng

A. 5.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có: $z^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ là số thuần ảo khi $x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm y$.

Mặt khác: $|z| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2$.

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} x = \pm y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm y \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \end{cases}.$$

Vậy tổng bình phương phần thực bằng 4.

Câu 33: (ĐH Vinh Lần 1) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-1|^2 + |z-\bar{z}|i + (z+\bar{z})i^{2019} = 1$?

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = a - bi$.

Ta có: $z-1 = a-1+bi$, $z-\bar{z} = 2bi$, $z+\bar{z} = 2a$.

$$i^{2019} = (i^2)^{1009} i = (-1)^{1009} i = -i.$$

$$\text{Do đó } |z-1|^2 + |z-\bar{z}|i + (z+\bar{z})i^{2019} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(a-1)^2 + b^2} \right)^2 + \sqrt{(2b)^2} \cdot i + 2a(-i) = 1$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 + 2|b|i - 2ai = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + b^2 = 1 \\ 2|b| - 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a + b^2 = 0 \\ a = |b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2|b|^2 - 2|b| = 0 \\ a = |b| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |b| = 0 \\ |b| = 1 \\ a = |b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \end{cases}.$$

Vậy có 3 số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 34: (Sở Điện Biên) Cho số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z-3-4i|=\sqrt{5}$ và $|z+2|^2-|z-i|^2=33$. Môđun của số phức $z-2-i$ bằng:

A. $\sqrt{5}$

B. 9.

C. 25.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z=a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có: $|z+2|^2-|z-i|^2=33 \Leftrightarrow |a+bi+2|^2-|a+bi-i|^2=33$

$$\Leftrightarrow (a+2)^2+b^2-a^2-(b-1)^2=33$$

$$\Leftrightarrow 4a+2b-30=0$$

$$\Leftrightarrow b=-2a+15$$

Ta có: $|z-3-4i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow |a+bi-3-4i|=\sqrt{5}$

$$(a-3)^2+(b-4)^2=5$$

Thay vào ta có: $(a-3)^2+(-2a+11)^2=5 \Leftrightarrow 5a^2-50a+125=0 \Leftrightarrow a=5 \Rightarrow b=5$

$$\Rightarrow z=5+5i$$

Vậy $|z-2-i|=|3+4i|=5$.

Câu 35: Tính tổng mô-đun tất cả các nghiệm của phương trình: $(z+i)(z^2-1)(z^3+i)=0$

A. 3.

B. 4.

C. 6.

D. 8

Lời giải

$$(z+i)(z^2-1)(z^3+i)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z=-i \\ z=\pm 1 \\ z^3-i^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-i \\ z=\pm 1 \\ z=i \\ z^2+iz-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-i \\ z=\pm 1 \\ z=i \\ z=\frac{-i \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Suy ra tổng mô-đun các nghiệm bằng 6.

Chọn C

Câu 36: (CHUYÊN THÁI BÌNH LẦN V NĂM 2019) Số phức $z=a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ là nghiệm của

phương trình $\frac{(|z|-1)(1+iz)}{z-\frac{1}{z}}=i$. Tổng $T=a^2+b^2$ bằng

A. 4.

B. $4-2\sqrt{3}$.C. $3+2\sqrt{2}$.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Điều kiện: $|z| \neq 1, z \neq 0$

$$\frac{(|z|-1)(1+iz)}{z-\frac{1}{z}}=i \Rightarrow \frac{(|z|-1)(1+iz)\bar{z}}{|z|^2-1}=i \Rightarrow \frac{(1+iz)\bar{z}}{|z|+1}=i \Rightarrow \bar{z}+|z|^2 i=(|z|+1)i$$

$$\Rightarrow a-bi+(a^2+b^2)i=(\sqrt{a^2+b^2}+1)i \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ -b+a^2+b^2=\sqrt{a^2+b^2}+1 \end{cases} \Rightarrow b^2-b=|b|+1(*)$$

Với $b < 0 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow z = i$ (loại vì $|z| = 1$).

Với $b \geq 0 \Rightarrow b^2 - 2b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1 + \sqrt{2}$ (nhận) $\Rightarrow z = (1 + \sqrt{2})i$ (thỏa mãn).

Vậy $T = a^2 + b^2 = 0^2 + (1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$.

Cách 2:

Điều kiện: $|z| \neq 1, z \neq 0$

$$\frac{(|z|-1)(1+iz)}{z - \frac{1}{z}} = i \Rightarrow \frac{(|z|-1)(1+iz)\bar{z}}{|z|^2 - 1} = i \Rightarrow \frac{(1+iz)\bar{z}}{|z|+1} = i \Rightarrow \bar{z} + |z|^2 i = (|z|+1)i$$

$$\Rightarrow \bar{z} = (-|z|^2 + |z| + 1)i.$$

Lấy môđun hai vế ta được:

$$|\bar{z}|^2 = (-|z|^2 + |z| + 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} |\bar{z}| = -|z|^2 + |z| + 1 \\ -|\bar{z}| = -|z|^2 + |z| + 1 \end{cases} \Leftrightarrow |z| = 1 + \sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = |z|^2 = 3 + 2\sqrt{2}.$$

Câu 37: Trong mặt phẳng phức, các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $(iz-1)(z+3i)(\bar{z}-2+3i)=0$ là các điểm nào sau đây?

A. $A(0;-1); B(0;-3); C(2;3)$

B. $A(1;0); B(3;0); C(2;-3)$

C. $A(0;-2); B(0;1); C(-2;3)$

D. $A(2;-2); B(-1;1); C(-1;0)$

Lời giải

$$(iz-1)(z+3i)(\bar{z}-2+3i)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} iz-1=0 \\ z+3i=0 \\ \bar{z}-2+3i=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\frac{1}{i}=-i \\ z=-3i \\ \bar{z}=2-3i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-i \\ z=-3i \\ z=2+3i \end{cases}$$

Vậy các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình đã cho là $A(0;-1); B(0;-3); C(2;3)$.

Chọn A

Câu 38: Phương trình $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^4 = 1$ có bao nhiêu nghiệm.

A. 1 nghiệm

B. 2 nghiệm

C. 3 nghiệm

D. 4 nghiệm

Lời giải

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 = 1, (1) \\ \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 = -1, (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z+1}{z-1} = 1 \\ \frac{z+1}{z-1} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z+1 = z-1 \\ z+1 = -z+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i = -i \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = 0$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z+1}{z-1} = i \\ \frac{z+1}{z-1} = -i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z+1 = iz+1 \\ z+1 = -iz-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ z=-1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm phương trình là: $z=0; z=1; z=-1$

Chọn C

Câu 39: Số nghiệm phức của phương trình $\bar{z} + \frac{25}{z} = 8 - 6i$ là?

A. 1 nghiệm

B. 2 nghiệm

C. 3 nghiệm

D. 4 nghiệm

Lời giải

Giả sử $z = a + bi$ với: $a, b \in \mathbb{R}$ và a, b không đồng thời bằng 0.

$$\text{Khi đó } \bar{z} = a - bi; \frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

Khi đó phương trình

$$\bar{z} + \frac{25}{z} = 8 - 6i \Leftrightarrow a - bi + \frac{25(a - bi)}{a^2 + b^2} = 8 - 6i \Leftrightarrow \begin{cases} a(a^2 + b^2 + 25) = 8(a^2 + b^2) & (1) \\ b(a^2 + b^2 + 25) = 6(a^2 + b^2) & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) chia (2) theo vế ta có $b = \frac{3}{4}a$, thế vào (1). Ta có $a=0$ hoặc $a=4$.

Với $a=0 \Rightarrow b=0$ (Loại)

Với $a=4 \Rightarrow b=3$. Ta có số phức $z = 4 + 3i$.

Chọn B

Câu 40: (Sở Ninh Bình 2019 lần 2) Tính tổng phần thực của tất cả các số phức $z \neq 0$ thỏa mãn

$$\left(z + \frac{5}{|z|}\right)i = 7 - z.$$

A. 2.

B. -2.

C. -3.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\left(z + \frac{5}{|z|}\right)i = 7 - z$. Chia hai vế cho i ta được: $z + \frac{5}{|z|} = -7i + zi$.

$$\text{Hay } z(1-i) = -7i - \frac{5}{|z|} \Rightarrow |z(1-i)| = \left| -7i - \frac{5}{|z|} \right| \Leftrightarrow \sqrt{2}|z| = \sqrt{49 + \frac{25}{(|z|)^2}}$$

Bình phương 2 vế, ta được: $2|z|^2 = 49 + \frac{25}{|z|^2} \Rightarrow$

$$2|z|^4 - 49|z|^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = 25 & (\text{t/m}) \\ |z|^2 = -\frac{1}{2} & (\text{kt/m}) \end{cases}$$

Do $|z| > 0$ nên $|z| = 5$. Thế $|z| = 5$ vào đề bài ta được: $\left(z + \frac{5}{5}\right)i = 7 - z \Leftrightarrow (z+1)i = 7 - z$. (1)

Đặt $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Thế vào (1) ta được: $(x + yi + 1)i = 7 - x - yi \Leftrightarrow -y + (x+1)i = 7 - x - yi$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y = 7 - x \\ x + 1 = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$$

Để thấy số phức $3-4i$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
 Vậy tổng phần thực của các số phức cần tìm là 3.

Câu 41: Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là các nghiệm của phương trình $\left(\frac{z-1}{2z-i}\right)^4 = 1$. Tính giá trị biểu thức

$$P = (z_1^2 + 1)(z_2^2 + 1)(z_3^2 + 1)(z_4^2 + 1).$$

A. $P = 2$.

B. $P = \frac{17}{9}$.

C. $P = \frac{16}{9}$.

D. $P = \frac{15}{9}$.

Lời giải

Ta có phương trình $\Leftrightarrow f(z) = (2z-i)^4 - (z-1)^4 = 0$.

Suy ra: $f(z) = 15(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$. Vì

$$z_1^2 + 1 = (z_1 - i)(z_1 + i) \Rightarrow P = \frac{f(i) \cdot f(-i)}{225} \quad (1).$$

Mà $f(i) = i^4 - (i-1)^4 = 5$; $f(-i) = (-3i)^4 - (i+1)^4 = 85$. Vậy từ (1) $\Rightarrow P = \frac{17}{9}$.

Chọn B

Câu 42: Tìm số thực $m = a - b\sqrt{20}$ (a, b là các số nguyên khác 0) để phương trình $2z^2 + 2(m-1)z + (2m+1) = 0$ có hai nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| + |z_2| = \sqrt{10}$. Tìm a .

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Lời giải

$$\Delta' = m^2 - 6m - 1 \in \mathbb{R}$$

TH1: $\Delta' > 0$ hay $m \in (-\infty; 3 - \sqrt{10}) \cup (3 + \sqrt{10}; +\infty)$

Khi đó $|z_1| + |z_2| = \sqrt{10} \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + 2|z_1 z_2| = 10$

$$\Leftrightarrow (1-m)^2 - (2m+1) + |2m+1| = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 \geq 0 \\ (1-m)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 + \sqrt{10} \\ m = 3 - \sqrt{20} \end{cases} \quad (\text{loại})$$

TH2: $\Delta' < 0$ hay $m \in (3 - \sqrt{10}; 3 + \sqrt{10})$

$$\text{Khi đó: } |z_1| + |z_2| = \sqrt{10} \Leftrightarrow \left| \frac{1-m+i\sqrt{-(m^2-6m-1)}}{2} \right| + \left| \frac{1-m-i\sqrt{-(m^2-6m-1)}}{2} \right| = \sqrt{10}$$

$$\text{Hay } \sqrt{(1-m)^2 + (-m^2 + 6m + 1)} = \sqrt{10} \Leftrightarrow m = 2$$

Vậy $m = 2$ hoặc $m = 3 - \sqrt{20}$

Câu 43: (Đặng Thành Nam Đề 10) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z + |z|^2 i - 1 - \frac{3}{4}i = 0$?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Biến đổi $z + |z|^2 i - 1 - \frac{3}{4}i = 0 \Leftrightarrow z = 1 + \left(\frac{3}{4} - |z|^2\right)i$. Lấy môđun hai vế ta có:

$$|z| = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4} - |z|^2\right)^2} \Leftrightarrow |z|^2 = 1 + \frac{9}{16} - \frac{3}{2}|z|^2 + |z|^4 \Leftrightarrow 16|z|^4 - 40|z|^2 + 25 = 0 \quad (|z|^2 \geq 0) \Leftrightarrow |z|^2 = \frac{5}{4}$$

$$\text{Thay vào } z = 1 + \left(\frac{3}{4} - |z|^2\right)i \Rightarrow z = 1 - \frac{1}{2}i.$$

Câu 44: (THPT SỐ 1 TƯ NGHĨA LẦN 2 NĂM 2019) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn

$$|z - 1 + i| = \sqrt{10} \text{ và } \frac{z-2}{z-4} \text{ là số thuần ảo.}$$

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z = a + bi$ ($a; b \in \mathbb{R}$). Điều kiện $z = 4$.

$$|z - 1 + i| = \sqrt{10} \Leftrightarrow (C_1): (a-1)^2 + (b+1)^2 = 10 \text{ có tâm } I_1(1; -1) \text{ và bán kính } R_1 = \sqrt{10}.$$

$$\frac{z-2}{z-4} = \frac{a-2+bi}{a-4+bi} = \frac{(a-2+bi)(a-4-bi)}{(a-4)^2 + b^2} \text{ là số thuần ảo khi } (a-2)(a-4) + b^2 = 0.$$

$$\text{Do đó, } (C_2): (a-3)^2 + b^2 = 1 \text{ có tâm } I_2(3; 0) \text{ và bán kính } R_2 = 1.$$

$$\text{Ta có, } I_1 I_2 = \sqrt{(3-1)^2 + (0-(-1))^2} = \sqrt{5} < R_1 + R_2 \text{ nên } (C_2) \text{ cắt } (C_1) \text{ tại hai điểm phân biệt.}$$

Vì $z = 4 + 0i \in (C_1) \cap (C_2)$ nên có duy nhất số phức thỏa yêu cầu bài.

Câu 45: (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị Lần 1) Tính tổng của tất cả các giá trị của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn đồng thời $|z| = m$ và $|z - 4m + 3mi| = m^2$.

A. 4.

B. 6.

C. 9.

D. 10.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có điểm biểu diễn z là $M(x; y)$.

Với $m = 0$, ta có $z = 0$, thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m > 0$, ta có:

$$+ |z| = m \Leftrightarrow M \text{ thuộc đường tròn } (C_1) \text{ tâm } I(0; 0), \text{ bán kính } R = m$$

$$+ |z - 4m + 3mi| = m^2 \Leftrightarrow (x - 4m)^2 + (y + 3m)^2 = m^4$$

$$\Leftrightarrow M \text{ thuộc đường tròn } (C_2) \text{ tâm } I'(4m; -3m), \text{ bán kính } R' = m^2.$$

+) Có duy nhất một số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán khi và chỉ khi (C_1) và (C_2) tiếp xúc

$$\text{nhau} \Leftrightarrow \begin{cases} II' = R + R' \\ II' = |R - R'| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m = m^2 + m \\ 5m = |m^2 - m| \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = 6 \end{cases}.$$

Kết hợp với $m = 0$, suy ra $m \in \{0; 4; 6\}$. Vậy tổng tất cả các giá trị của m là 10.

Câu 46: (KÊNH TRUYỀN HÌNH GIÁO DỤC QUỐC GIA VTV7 -2019) Cho số phức

$$z = \frac{m+1}{1+m(2i-1)}, (m \in \mathbb{Z}). \text{ Tìm các giá trị của } m \text{ để } |z-i| < 1.$$

A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. vô số.

Lời giải

Chọn A

$$z = \frac{m+1}{1+m(2i-1)} \Leftrightarrow z-i = \frac{m+1-(1-m)i+2m}{(1-m)+2mi} = \frac{3m+1-(1-m)i}{1-m+2mi}.$$

$$\text{Ta có: } |z-i| < 1 \Rightarrow \left| \frac{3m+1-(1-m)i}{(1-m)+2mi} \right| < 1 \Leftrightarrow (3m+1)^2 + (1-m)^2 < (1-m)^2 + (2m)^2.$$

$$\Leftrightarrow (m+1)(5m+1) < 0 \Leftrightarrow m \in \left(-1; -\frac{1}{5}\right).$$

Vậy không tồn tại $m \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 47: (Chuyên Bắc Giang) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+i\sqrt{5}| + |z-i\sqrt{5}| = 6$, biết z có môđun bằng $\sqrt{5}$?

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z = a+bi$ với $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} |z+i\sqrt{5}| + |z-i\sqrt{5}| = 6 \\ |z| = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a+(b+\sqrt{5})i| + |a+(b-\sqrt{5})i| = 6 \\ |a+bi| = \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+(b+\sqrt{5})^2} + \sqrt{a^2+(b-\sqrt{5})^2} = 6 \\ \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+b^2+2\sqrt{5}b+5} + \sqrt{a^2+b^2-2\sqrt{5}b+5} = 6 \\ a^2+b^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{10+2\sqrt{5}b} + \sqrt{10-2\sqrt{5}b} = 6 \\ a^2+b^2 = 5 \end{cases}, \text{ (điều kiện } -\sqrt{5} \leq a \leq \sqrt{5}, -\sqrt{5} \leq b \leq \sqrt{5})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20+2\sqrt{100-20b^2} = 36 \\ a^2+b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{100-20b^2} = 8 \\ a^2+b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 100-20b^2 = 64 \\ a^2+b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{16}{5} \\ b^2 = \frac{9}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{\sqrt{5}} \\ a = -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ b = \frac{3}{\sqrt{5}} \\ b = -\frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{\sqrt{5}} \\ a = -\frac{4}{\sqrt{5}} \end{cases} \vee \begin{cases} a = \frac{4}{\sqrt{5}} \\ a = -\frac{4}{\sqrt{5}} \end{cases} \vee \begin{cases} a = -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ a = \frac{4}{\sqrt{5}} \end{cases} \vee \begin{cases} a = -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ a = \frac{4}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta có bốn số phức cần tìm là: $z = \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}}i$, $z = \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}}i$,

$$z = -\frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}}i, z = -\frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}}i.$$

Câu 48: (Chuyên Hùng Vương Gia Lai) Môđun của số phức z thỏa mãn $|z-1|=5$ và $17(z+\bar{z})-5z\bar{z}=0$ bằng

A. $\sqrt{53}$.

B. $\sqrt{34}$.

C. $\sqrt{29}$ và $\sqrt{13}$.

D. $\sqrt{29}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \begin{cases} |z-1|=5 \\ 17(z+\bar{z})-5z\bar{z}=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2+b^2=25 \\ 17.2a-5(a^2+b^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a^2+b^2)-2a-24=0 \\ 17.2a-5(a^2+b^2)=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5[(a^2+b^2)-2a-24]=0 \\ 17.2a-5(a^2+b^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 34a+5(-2a-24)=0 \\ 5(a^2+b^2)=17.2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ a^2+b^2=34 \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{34}$.

Câu 49: (THẠCH THÀNH I - THANH HÓA 2019) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2 = 2|z+\bar{z}|+4$ và $|z-1-i|=|z-3+3i|$?

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó theo giả thiết ta có hệ.

$$\begin{aligned} \begin{cases} a^2+b^2=2|2a|+4 \\ \sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2}=\sqrt{(a-3)^2+(b+3)^2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+\left(\frac{a-4}{2}\right)^2=4|a|+4 \\ b=\frac{a-4}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2-8a=16|a| \\ b=\frac{a-4}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a=0, b=-2 \\ a=\frac{24}{5}, b=\frac{2}{5} \\ a=-\frac{8}{5}, b=-\frac{14}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy có 3 số phức z thỏa mãn.

Câu 50: (Trung-Tâm-Thanh-Trường-Nghệ-An-Lần-2) Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z có phần thực và phần ảo là các số nguyên thỏa mãn hai điều kiện: $|z-3-4i| \leq 2$ và $|z+\bar{z}| \leq |z-\bar{z}|$. Số phần tử của tập S là

A. 11.

B. 12.

C. 13.

D. 10.

Lời giải

Chọn D

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) là số phức thỏa mãn bài toán.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sqrt{(a-3)^2+(b-4)^2} \leq 2 \\ |2a| \leq |2b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)^2+(b-4)^2 \leq 4 \\ |a| \leq |b| \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a, b \in \mathbb{Z} \\ 1 \leq a \leq 5 \\ 2 \leq b \leq 6 \\ a \leq b \end{cases}$$

Bảng giá trị thỏa mãn

a	1	2			3				4	
b	4	3	4	5	3	4	5	6	4	5

Vậy tập S có tất cả 10 phần tử.

Câu 51: Có bao nhiêu giá trị của m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z\bar{z}=1$ và $|z-\sqrt{3}+i|=m$.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Lời giải

Gọi $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$, ta có hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x - \sqrt{3})^2 + (y + 1)^2 = m^2 \quad (m \geq 0) \end{cases}$$

Ta thấy $m = 0 \Rightarrow z = \sqrt{3} - i$ không thỏa mãn $z\bar{z} = 1$ suy ra $m > 0$. Xét trong hệ tọa độ Oxy tập hợp các điểm

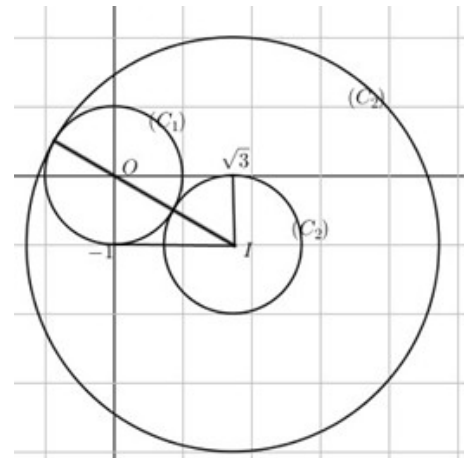
thỏa mãn (1) là đường tròn (C_1) có $O(0;0), R_1 = 1$, tập

hợp các điểm thỏa mãn (2) là đường tròn (C_2) tâm

$I(\sqrt{3}; -1), R_2 = m$, ta thấy $OI = 2 > R_1$ suy ra I nằm

ngoài (C_1) . Để có duy nhất số phức z thì hệ có nghiệm

duy nhất khi đó tương đương với $(C_1), (C_2)$ tiếp xúc ngoài và tiếp xúc trong, điều kiện này xảy ra khi $OI = R_1 + R_2 \Leftrightarrow m + 1 = 2 \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $R_2 = R_1 + OI \Leftrightarrow m = 1 + 2 = 3$.



Câu 52: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z\bar{z} = 1$ và $|z - 3 - 4i| = m$. Tính tổng các phần tử thuộc S .

A. 10

B. 42

C. 52

D. 40

Lời giải

Ta có quỹ tích là các đường tròn tâm $O(0;0), R = 1$ và tâm $I(3,4), R' = m$. Do đó có hai

trường hợp tiếp xúc ngoài và trong cho nên $R + R' = OI \Leftrightarrow \boxed{m = 4}$ hoặc $OI = R' - R \Leftrightarrow \boxed{m = 6}$.

Chọn A.

DẠNG 3: TÌM TẬP HỢP ĐIỂM, BIỂU DIỄN SỐ PHỨC**ĐIỂM BIỂU DIỄN**

Câu 1: Cho A, B, C, D là bốn điểm trong mặt phẳng tọa độ theo thứ tự biểu diễn các số phức $1+2i; 1+\sqrt{3}+i; 1+\sqrt{3}-i; 1-2i$. Biết $ABCD$ là tứ giác nội tiếp tâm I . Tâm I biểu diễn số phức nào sau đây?

A. $z = \sqrt{3}$.

B. $z = 1 - \sqrt{3}i$.

C. $z = 1$.

D. $z = -1$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}$ biểu diễn số phức $\sqrt{3}-i$; $\overrightarrow{DB}$ biểu diễn số phức $\sqrt{3}+3i$. Mặt khác $\frac{\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}-i} = \sqrt{3}i$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$. Tương tự (hay vì lí do đối xứng qua Ox), $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Từ đó suy ra AD là một đường kính của đường tròn đi qua A, B, C, D . Vậy $I(1;0) \Rightarrow z = 1$.

Chọn C

Câu 2: Cho A là điểm biểu diễn của các số phức: $z = 1-2i; M_1, M_2$ lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1 và z_2 . Điều kiện để $\triangle AM_1M_2$ cân tại A là:

A. $|z_1| = |z_2|$

B. $|z_1 - 1 + 2i| = |z_2 - 1 + 2i|$

C. $|z_1 - z_2| = |1 - 2i|$

D. $|z_1 - 1 + 2i| = |z_1 - z_2|$

Lời giải

$\triangle AM_1M_2$ cân tại A nên $M_1A = M_2A$ hay: $z_1 - 1 + 2i = z_2 - 1 + 2i$

Chọn B

Câu 3: Cho 3 số phức: $1; 3i; -3-5i$ biểu diễn bởi các điểm A, B, C . Điểm I thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ biểu diễn số phức nào sau đây?

A. $4+19i$

B. $4-19i$

C. $-4-19i$

D. $4-6i$

Lời giải

Ta có: $A(1;0), B(0;3), C(-3;-5)$

$$2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OI}) - 3(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OI}) + 2(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OI}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = 2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} \Rightarrow I(-4;-19)$$

Vậy điểm I biểu diễn số phức $z = -4-19i$.

Chọn C

Câu 4: Gọi M là điểm biểu diễn số phức $w = \frac{2z + \bar{z} + 1 - i}{z^2 + i}$, trong đó z là số phức thỏa mãn

$$(1-i)(z-i) = 2-i+z. \text{ Gọi } N \text{ là điểm trong mặt phẳng sao cho } (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{ON}) = 2\varphi, \text{ trong đó}$$

$\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$ là góc lượng giác tạo thành khi quay tia Ox tới vị trí tia OM . Điểm N nằm trong góc phần tư nào?

A. Góc phần tư thứ (I).

B. Góc phần tư thứ (II).

C. Góc phần tư thứ (III).

D. Góc phần tư thứ (IV).

Lời giải

$$\text{Ta có: } (1-i)(z-i) = 2-i+z \Rightarrow z = 3i \Rightarrow w = -\frac{7}{82} - \frac{19}{82}i \Rightarrow M\left(-\frac{7}{82}; -\frac{19}{82}\right) \Rightarrow \tan \varphi = \frac{19}{7}.$$

$$\text{Lúc đó: } \sin 2\varphi = \frac{2 \tan \varphi}{1 + \tan^2 \varphi} = \frac{133}{205} > 0; \cos 2\varphi = \frac{1 - \tan^2 \varphi}{1 + \tan^2 \varphi} = -\frac{156}{205} < 0.$$

Chọn C

- Câu 5:** (ĐH Vinh Lần 1) Cho các số phức z thỏa mãn $|2iz - 2i^{2021}| = |3\bar{z} - 1|$ và $|\bar{z}| = 1$. Điểm biểu diễn cho số phức z có hoành độ bằng
- A. -4. B. 4. C. -1. D. 1.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có } |2iz - 2i^{2021}| = |3\bar{z} - 1| \Leftrightarrow |2i(a + bi) - 2(i^2)^{1010}i| = |3(a - bi) - 1|$$

$$\Leftrightarrow |(2a - 2)i - 2b| = |(3a - 1) - 3bi| \Leftrightarrow \sqrt{(2a - 2)^2 + 4b^2} = \sqrt{(3a - 1)^2 + 9b^2}$$

$$\Leftrightarrow 5(a^2 + b^2) + 2a - 3 = 0 \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác: } |\bar{z}| = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 \quad (2).$$

Thay (2) vào (1) được $5 \cdot 1 + 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = -1$.

- Câu 6:** Cho hai số phức z_1, z_2 khác 0 thỏa mãn $z_1^2 - z_1z_2 + z_2^2 = 0$. Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 . Tam giác OAB có diện tích bằng $\sqrt{3}$. Tính môđun của số phức $z_1 + z_2$.

A. $2\sqrt{3}$

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. 4

Lời giải

Ta chứng minh được tam giác OAB đều cho nên diện tích bằng $\sqrt{3}$ chứng tỏ $|z_1| = |z_2| = 2$.

$$\text{Khi đấy: } |z_1 + z_2|^2 = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \cdot \cos 60^\circ = 12 \Rightarrow |z_1 + z_2| = 2\sqrt{3}.$$

- Câu 7:** Cho số phức z thỏa mãn $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và điểm A trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của z . Biết rằng trong hình vẽ bên, điểm biểu diễn của số phức $w = \frac{1}{iz}$ là một trong bốn điểm M, N, P, Q . Khi đó điểm biểu diễn của số phức w là

A. điểm Q.

B. điểm M.

C. điểm N.

D. điểm P.

Lời giải

Chọn D

Do điểm A là điểm biểu diễn của z nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng Oxy nên gọi $z = a + bi$ ($a, b > 0$).

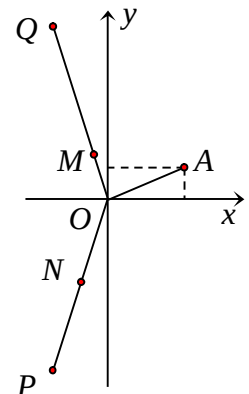
$$\text{Do } |z| = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ nên } \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

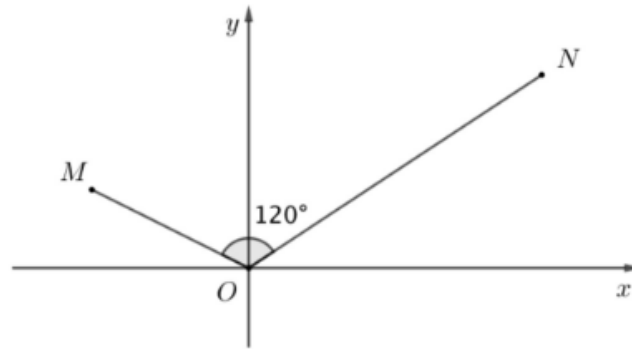
Lại có $w = \frac{1}{iz} = \frac{-b}{a^2 + b^2} - \frac{a}{a^2 + b^2}i$ nên điểm biểu diễn w nằm trong góc phần tư thứ ba của mặt phẳng Oxy .

$$|w| = \left| \frac{1}{iz} \right| = \frac{1}{|i| \cdot |z|} = \sqrt{2} = 2|z| = 2OA.$$

Vậy điểm biểu diễn của số phức w là điểm P .

- Câu 8:** (Đặng Thành Nam Đề 10) Hai điểm N, M trong hình vẽ bên dưới lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 .





Biết $ON = 2OM = 2\sqrt{5}$. Giá trị của $|z_1^2 + z_2^2|$ bằng

A. $5\sqrt{13}$.

B. $5\sqrt{37}$.

C. $5\sqrt{21}$.

D. $5\sqrt{11}$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết ta có:
$$\begin{cases} ON = |z_1| = 2\sqrt{5} \\ OM = |z_2| = \sqrt{5} \\ \widehat{MON} = 120^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow |z_1 - z_2| = MN = \sqrt{OM^2 + ON^2 - 2OM \cdot ON \cdot \cos \widehat{MON}} = \sqrt{35}$$

Khi đó
$$\begin{cases} \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = 2 \\ \left| \frac{z_1}{z_2} - 1 \right| = \frac{|z_1 - z_2|}{|z_2|} = \sqrt{7} \end{cases}$$

Đặt $\frac{z_1}{z_2} = a + bi \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ (a-1)^2 + b^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ -2a + 5 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = -1 \pm \sqrt{3}i \Rightarrow |z_1^2 + z_2^2| = |z_2|^2 \left| \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 + 1 \right| = 5 \left| (-1 \pm \sqrt{3}i)^2 + 1 \right| = 5 \left| -1 \pm 2\sqrt{3}i \right| = 5\sqrt{13}.$$

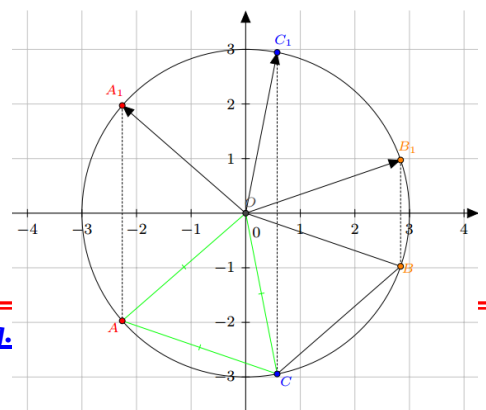
Câu 9: Cho 3 số phức z_1, z_2, z_3 phân biệt thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$ và $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_3}$. Biết z_1, z_2, z_3 lần lượt được biểu diễn bởi các điểm A, B, C trong mặt phẳng phức. Tính góc $\angle ACB$.

Lời giải

Ta có:
$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_3} \Leftrightarrow \frac{\bar{z}_1}{z_1 \cdot z_1} + \frac{\bar{z}_2}{z_2 \cdot z_2} = \frac{\bar{z}_3}{z_3 \cdot z_3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2} + \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{\bar{z}_3}{|z_3|^2} \Leftrightarrow \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \bar{z}_3$$

Do tính đối xứng trục Ox nên C là điểm thứ 3 của hình bình hành $OACB$.



Từ đó ta có: $\begin{cases} OB = AC \\ OB = OA = OC \end{cases} \Rightarrow OA = OC = AC.$
 $\Rightarrow \Delta OAC$ là tam giác đều
 $\Rightarrow$ Góc $\angle ACB = 120^\circ$.

TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN LÀ ĐƯỜNG THẲNG

Câu 10: Trong mặt phẳng phức Oxy, các số phức z thỏa $|z + 2i - 1| = |z + i|$. Tìm số phức z được biểu diễn bởi điểm M sao cho MA ngắn nhất với $A(1, 3)$.

A. $3 + i$.

B. $1 + 3i$.

C. $2 - 3i$.

D. $-2 + 3i$.

Lời giải

Gọi $M(x, y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

Gọi $E(1, -2)$ là điểm biểu diễn số phức $1 - 2i$

Gọi $F(0, -1)$ là điểm biểu diễn số phức $-i$

Ta có: $|z + 2i - 1| = |z + i| \Leftrightarrow ME = MF \Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường trung trực $EF: x - y - 2 = 0$.

Để MA ngắn nhất khi $MA \perp EF$ tại $M \Leftrightarrow M(3, 1) \Rightarrow z = 3 + i$

Chọn A

Câu 11: (Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đắk Lắk) Trong mặt phẳng Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $2|z - 1| = |z - \bar{z} + 2|$ là hình gồm:

A. hai đường thẳng.

B. hai đường tròn.

C. một đường tròn.

D. một đường thẳng.

Lời giải

Chọn A

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Số phức z có điểm biểu diễn $M(x, y)$.

Ta có $2|z - 1| = |z - \bar{z} + 2| \Leftrightarrow 2|x + yi - 1| = |x + yi - (x - yi) + 2| \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{4 + 4y^2}$
 $\Leftrightarrow 4(x-1)^2 + 4y^2 = 4 + 4y^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là hai đường thẳng có phương trình $x = 0$ và $x = 2$.

Câu 12: Tìm tập hợp (T) các điểm M trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z thỏa mãn hệ thức $z + \bar{z} = |z|$

A. Đường tròn tâm $O(0; 0)$, bán kính $R = 1$

B. Đường tròn tâm $I(0; 1)$, bán kính $R = 1$

C. Đường thẳng $x = y\sqrt{3}, x = -y\sqrt{3}$

D. Đường thẳng $y = x\sqrt{3}, y = -x\sqrt{3}$

Lời giải

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$

Ta có $z + \bar{z} = |z| \Leftrightarrow (x + yi) + (x - yi) = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow 2x = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 4x^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y = \pm x\sqrt{3} \end{cases}$

Tập hợp các điểm M trong mặt phẳng biểu diễn số phức $z = x + yi$ gồm hai đường thẳng:

$$D_1: y = x\sqrt{3}$$

$$D_2: y = -x\sqrt{3}$$

Chọn D

Câu 13: (Chuyên Sơn La Lần 3 năm 2018-2019) Xét các số phức z thỏa mãn điều kiện $(z+1-i)(\bar{z}-i)$ là số thực. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn hình học của z là một đường thẳng. Hệ số góc của đường thẳng đó là

A. -1.

B. 1.

C. -2.

D. 2.

Lời giải**Chọn C**

Gọi $z = x + yi$, ($x; y \in \mathbb{R}$).

Ta có $(z+1-i)(\bar{z}-i) = (x+yi+1-i)(x-yi-i) = (x^2+x+y^2-1) - (2x+y+1)i$.

Số phức $(z+1-i)(\bar{z}-i)$ là số thực khi $2x+y+1=0$

Suy ra tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng tọa độ là đường thẳng có phương trình $2x+y+1=0 \Leftrightarrow y=-2x-1$. Do đó hệ số góc của đường thẳng là -2.

Câu 14: Điểm M biểu diễn số phức $z \neq 0$ và điểm M' biểu diễn số phức $z' = \frac{1}{z}$. Nếu điểm M di động

trên đường tròn tâm A(-1;1) bán kính $R = \sqrt{2}$ thì M' di động trên đường nào?

A. $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ B. $2x + 2y + 1 = 0$ C. $2x - 2y + 1 = 0$ D. $2x + 2y - 1 = 0$

Đáp án: C

Giải: Ta có $z' = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. Do đó $\begin{cases} x' = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ y' = \frac{y}{x^2 + y^2} \end{cases}$

M di động trên đường tròn tâm A(-1;1) bán kính $R = \sqrt{2}$ nên

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 + 2x - 2y}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow 2x' - 2y' + 1 = 0$$

Câu 15: Trong mặt phẳng phức, gọi N, M, A, B theo thứ tự là điểm biểu diễn các số:

$$z = x + yi; Z = X + Yi = \frac{z+1}{z-1}; -1. \text{ Tìm tập hợp điểm } M \text{ khi } N \text{ chạy trên đường tròn } x^2 + y^2 = 1.$$

A. Đường tròn tâm $I(2 + \sqrt{2}; 0)$, bán kính $R = \sqrt{5 + 4\sqrt{2}}$

B. Đường tròn tâm $I(0; 1)$, bán kính $R = 1$

C. Trục tung

D. Trục hoành

Lời giải

$$\text{Ta có: } Z = X + Yi = \frac{z+1}{z-1} \Leftrightarrow X = \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2}; Y = \frac{-2y}{(x-1)^2 + y^2}$$

Vì N chạy trên đường tròn: $(x-1)^2 + y^2 = 1$ nên ta có $(x-1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow X = 0$

Vậy tập hợp điểm M là trục tung.

Chọn C

Câu 16: Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z sao cho: $z + \bar{z} = k|z|$. Với k là một số thực cho trước.

A. Đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

C. Nửa trục Ox , nửa trục Ox'

D. Nửa trục Ox'

Lời giải

Đặt $z = x + yi; x, y \in R$

Ta có: $z + \bar{z} = k|z| \Leftrightarrow 2x = k\sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$

Nếu $k = 0$, ta có: $x = 0$

Tập hợp các điểm M là trục tung.

Xét $k \neq 0$:

Ta có: $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 = k^2(x^2 + y^2) \\ kx \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4 - k^2)x^2 = k^2y^2 \\ kx \geq 0 \end{cases}$

Với $-2 \leq k \leq 2$ và $k \neq 0$, ta có:

$y^2 = \frac{4 - k^2}{k^2}x^2 \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{4 - k^2}}{k}x \quad (kx \geq 0)$

Do đó, tập hợp M phải tìm là:

- Các đường thẳng $y = \pm \frac{\sqrt{4 - k^2}}{k}x$

+ Giới hạn bởi $0 < k < 2, x \geq 0$.

+ Hoặc giới hạn bởi $-2 < k < 0, x \leq 0$.

- Nửa trục Ox nếu $k = 2$.

- Nửa trục Ox' nếu $k = -2$.

Chọn C

Câu 17: Trong mặt phẳng phức, cho M là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi, M \neq O$. Xem số phức

$Z = \frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{1}{z^2} \right)$. Tìm tập hợp điểm M sao cho Z là một số thực.

A. Trục tung (hay trục hoành), không kể điểm O .

B. Trục tung hay trục hoành

C. Đường thẳng $y = 1$

D. Đường thẳng $x = 1$

Lời giải

Trường hợp Z là một số thực $\Leftrightarrow$ Phần ảo bằng 0.

$\Leftrightarrow \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \left[(x^2 + y^2)^2 + 1 \right] = 0 \Leftrightarrow xy = 0, x^2 + y^2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y \neq 0 \\ y = 0, x \neq 0 \end{cases}$

Tập hợp điểm M trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z là

- Trục tung, không kể điểm O .

- Trục hoành, không kể điểm O .

Chọn A

Câu 18: Cho $Z = \frac{1-iz}{1+iz}$, $z \in \mathbb{C}$, $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Tìm tập hợp điểm M sao cho Z là một số thực.

A. Trục tung ngoại trừ điểm $A(0;1)$

B. Trục hoành ngoại trừ điểm $A(0;1)$

C. Đường thẳng $y = 1$

D. Đường thẳng $x = 1$

Lời giải

$$\text{Ta có: } z = x + yi; x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow Z = \frac{1-zi}{1+zi} = \frac{1-i(x+yi)}{1+i(x+yi)}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{1-yi^2-xi}{1+yi^2+xi} = \frac{1+y-xi}{1-y+xi} = \frac{(1+y-xi)(1-y-xi)}{(1-y+xi)(1-y-xi)}$$

$$= \frac{(1-xi)^2 - y^2}{(1-y)^2 - x^2i^2} = \frac{1+x^2i^2-2xi-y^2}{(1-y)^2+x^2} = \frac{1-x^2-y^2-2xi}{(1-y)^2+x^2}$$

Z là một số thực $\Leftrightarrow x = 0, y \neq 0$

Ta có $z = yi, y \neq 1$.

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là trục tung ngoại trừ điểm $A(1;0)$.

Chọn A

Câu 19: Tìm tập hợp (T) các điểm M biểu diễn các số phức z sao cho $\log_{\frac{1}{2}}|z-2| > \log_{\frac{1}{2}}|z|$.

A. Miền phẳng nằm bên phải đường thẳng $x=1$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

C. Hình vành khăn gồm các điểm giữa hai hình tròn $(O;1)$ và $(O;2)$ kể cả các điểm nằm trên đường tròn $(O;2)$; không kể các điểm nằm trên đường tròn $(O;1)$

D. Đường thẳng $x = 1$

Lời giải

Điều kiện: $z \neq 0, z \neq 2$

Cách 1: Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

$$\log_{\frac{1}{2}}|z-2| > \log_{\frac{1}{2}}|z| \Leftrightarrow |z-2| < |z| \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 < x^2 + y^2 \Leftrightarrow x > 1.$$

Do đó, tập hợp (T) các điểm M biểu diễn các số phức z là miền phẳng nằm bên phải đường thẳng $x=1$.

Cách 2: Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}|z-2| > \log_{\frac{1}{2}}|z| \Leftrightarrow |z-2| < |z|$.

Gọi A là điểm biểu diễn số phức $z_1 = 2 \Rightarrow A(2;0)$

Xét trường hợp $|z-2| = |z| \Leftrightarrow MA = MO$

Khi đó M chạy trên đường trung trực Δ của đoạn OA , có phương trình $x = 1$.

Với trường hợp $|z-2| < |z| \Leftrightarrow MA < MB$

$\Rightarrow M$ nằm bên phải đường thẳng Δ .

Do đó, tập hợp (T) các điểm M biểu diễn các số phức z là miền phẳng nằm bên phải đường thẳng Δ , trung trực của đoạn thẳng OA là miền phẳng nằm bên phải đường thẳng $x = 1$.

Chọn A

Câu 20: Trong mặt phẳng phức, tìm tập hợp các điểm M là ảnh của số phức z sao cho: Ảnh của các số z, z^2, z^4 thẳng hàng.

- A.** Đường tròn $x^2 + y^2 - x - y = 0$, có tâm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R=1$ ngoại trừ điểm $(0;1)$
- B.** Đường tròn $x^2 + y^2 - x - y = 0$, có tâm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- C.** Một hyperbol vuông góc và trục hoành Ox
- D.** Đường thẳng $x = -\frac{1}{2}$ và trục hoành Ox

Lời giải

Các điểm $M(z), M'(z^2), M''(z^4)$ thẳng hàng.

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MM''} = k \overrightarrow{MM'}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^4 - z = k(z^2 - z) \Leftrightarrow z(z^3 - 1) - kz(z - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow z(z - 1)(z^2 + z + 1 - k) = 0, z \neq 0, 1 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 - k = 0$$

Đặt $z = x + yi; x, y \in \mathbb{R}$

$$\text{Ta có: } k = z^2 + z + 1 = (x + yi)^2 + (x + yi) + 1 \Leftrightarrow k = x^2 - y^2 + x - 1 + (2xy + y)i$$

$$k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2xy + y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee x = -\frac{1}{2}$$

Vậy tập hợp điểm M gồm:

+ Trục hoành Ox .

+ Đường thẳng $x = -\frac{1}{2}$.

Chọn D

Câu 21: (THPT-Phúc-Trạch-Hà-Tĩnh-lần-2-2018-2019-thi-tháng-4) Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 2i^{2020}| = |\bar{z} - 1 + 2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = 2\bar{z} - 1 + 4i$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Khoảng cách từ $I(2; -3)$ đến đường thẳng đó bằng

A. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{18\sqrt{5}}{5}$.

C. $\frac{10\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{18\sqrt{13}}{13}$.

Lời giải**Chọn C**

Đặt $w = a + bi; a, b \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow a + bi = 2\bar{z} - 1 + 4i \Rightarrow \bar{z} = \frac{a+1}{2} + \frac{b-4}{2}i$$

$$|z - 2i^{2020}| = |\bar{z} - 1 + 2i| \text{ hay}$$

$$|z - 2| = |\bar{z} - 1 + 2i|$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a+1}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{b-4}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{b-4}{2} + 2\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (a-3)^2 + (b-4)^2 = (a-1)^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow a + 2b - 6 = 0$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường thẳng $(d): x + 2y - 6 = 0$

$$\text{Khoảng cách từ } I(2; -3) \text{ đến } (d) \text{ là: } \frac{|2 - 2 \cdot 3 - 6|}{\sqrt{1+4}} = \frac{10\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 22: Trong mặt phẳng phức, cho M, M' theo thứ tự là điểm biểu diễn của hai số phức z và $z': z = x + yi, z' = \frac{z-1+i}{z-1}$. Tìm tập hợp điểm (E) các điểm M sao cho: Điểm M' nằm trên trục hoành và $M' \neq 0$.

- A.** Đường tròn tâm $I\left(1; -\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{1}{2}$ ngoại trừ các điểm $(1; 0)$ và $(1; -1)$.
B. Đường tròn tâm $I(0; 1)$, bán kính $R = 1$ ngoại trừ các điểm $(1; 0)$ và $(1; -1)$.
C. Đường thẳng $y = 1$ ngoại trừ các điểm $(1; 0)$ và $(1; -1)$.
D. Đường thẳng $x = 1$ ngoại trừ các điểm $(1; 0)$ và $(1; -1)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } z' = \frac{z-1+i}{z-1} = \frac{(x-1)+(y+1)i}{(x-1)+yi} = \frac{(x-1)^2 + y(y+1) + (x-1)i}{(x-1)^2 + y^2}$$

Trường hợp M' nằm trên trục tung và $M' \neq 0$.

$\Rightarrow z'$ là một số thực.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y(y+1) \neq 0 \\ x-1 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (E)$ là đường thẳng $x = 1$ ngoại trừ các điểm $(1; 0)$ và $(1; -1)$.

Chọn D

Câu 23: Trong mặt phẳng phức Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức Z thỏa mãn $|z^2 + (\bar{z})^2 + 2|z|^2| = 16$ là hai đường thẳng d_1, d_2 . Khoảng cách giữa 2 đường thẳng d_1, d_2 là bao nhiêu?

- A.** $d(d_1, d_2) = 2$. **B.** $d(d_1, d_2) = 4$. **C.** $d(d_1, d_2) = 1$. **D.** $d(d_1, d_2) = 6$.

Lời giải

Gọi $M(x, y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$

$$\text{Ta có: } |z^2 + (\bar{z})^2 + 2|z|^2| = 16 \Leftrightarrow |x^2 + 2xyi - y^2 + x^2 - 2xyi - y^2 + 2x^2 + 2y^2| = 16$$

$$\Leftrightarrow |4x^2| = 16 \Leftrightarrow x = \pm 2 \Rightarrow d(d_1, d_2) = 4$$

Chọn B

Ở đây lưu ý hai đường thẳng $x = 2$ và $x = -2$ song song với nhau.

Câu 24: **(ĐH Vinh Lần 1)** Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 2i^{2020}| = |\bar{z} - 1 + 2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = 2\bar{z} - 1 + 4i$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Khoảng cách từ $I(2; -3)$ đến đường thẳng đó bằng

- A.** $\frac{18\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{18\sqrt{13}}{13}$. **C.** $\frac{10\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{10\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ và $w = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$.

$$\text{Ta có } |z - 2i^{2020}| = |\bar{z} - 1 + 2i| \Leftrightarrow |a + bi - 2(i^2)^{1010}| = |a - bi - 1 + 2i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a-2)^2 + b^2} = \sqrt{(a-1)^2 + (2-b)^2} \Leftrightarrow 2a - 4b + 1 = 0(1).$$

Theo giả thiết: $w = 2\bar{z} - 1 + 4i \Leftrightarrow x + yi = 2(a - bi) - 1 + 4i \Leftrightarrow x + yi = 2a - 1 + (4 - 2b)i$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a - 1 \\ y = 4 - 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x+1}{2} \\ b = \frac{4-y}{2} \end{cases} (2).$$

Thay (2) vào (1) ta được: $2 \cdot \frac{x+1}{2} - 4 \cdot \frac{4-y}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 6 = 0 (\Delta)$.

$$\text{Vậy: } d(I, \Delta) = \frac{10\sqrt{5}}{5}.$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN LÀ ĐƯỜNG TRÒN

Câu 25: (THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho số phức z thỏa mãn: $|z+2-i|=3$. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) biểu diễn số phức $\omega=1+\bar{z}$ là

- A. Đường tròn tâm $I(-2;1)$ bán kính $R=3$.
 B. Đường tròn tâm $I(2;-1)$ bán kính $R=3$.
 C. Đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R=9$.
D. Đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R=3$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\omega = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức ω .

Ta có: $\omega = 1 + \bar{z} \Leftrightarrow \bar{z} = \omega - 1 \Leftrightarrow \bar{z} = (x-1) + yi$

$$\Leftrightarrow z = (x-1) - yi.$$

Do $|z+2-i|=3$.

$$\Leftrightarrow |(x-1) - yi + 2 - i| = 3$$

$$\Leftrightarrow |(x+1) - (y+1)i| = 3$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = 9.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức ω là đường tròn tâm $I(-1;-1)$ và bán kính $R=3$.

Câu 26: Trong mặt phẳng phức, tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức z sao cho: $|z| = 2|z-i|$.

- A. $x^2 + y^2 - \frac{8}{3}y + \frac{4}{3} = 0$ B. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$
 C. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ D. $3x^2 + 4y^2 - 36 = 0$

Lời giải

Cách 1. Đặt $z = x + yi$, ($z \neq 0$) với $x, y \in \mathbb{R}$

$$\text{Ta có: } |z| = 2|z-i| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4(x^2 + (y-1)^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{8}{3}y + \frac{4}{3} = 0$$

$$\text{Cách 2. Ta có: } |z| = 2|z-i| \Leftrightarrow |\overrightarrow{OM}| = 2|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{OM}| = 2|\overrightarrow{BM}|$$

Với $B(1;0)$ là điểm biểu diễn số i .

$$\text{Do đó ta có: } OM = 2BM \Leftrightarrow \frac{MO}{MB} = 2$$

Ta suy ra tập hợp các điểm M là đường tròn Apollonius đường kính IJ , với I, J thuộc trục tung và:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OI} &= 2\overrightarrow{IB} \\ \overrightarrow{OJ} &= -2\overrightarrow{JB} \end{aligned} \Rightarrow I\left(0; \frac{2}{3}\right) \text{ và } J(0;2)$$

$$\text{Phương trình đường tròn: } x^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 (y-2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{8}{3}y + \frac{4}{3} = 0$$

Chọn A

Câu 27: Cho thỏa mãn $z \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $(2+i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} + 1 - 2i$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = (3-4i)z - 1 + 2i$ là đường tròn I , bán kính R . Khi đó.

- A. $I(-1; -2), R = \sqrt{5}$. B. $I(1; 2), R = \sqrt{5}$. C. $I(-1; 2), R = 5$. D. $I(1; -2), R = 5$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $z = a + bi$ và $|z| = c > 0$, với $a; b; c \in \mathbb{R}$.

$$\text{Lại có } w = (3 - 4i)z - 1 + 2i \Leftrightarrow z = \frac{w + 1 - 2i}{3 - 4i}.$$

Gọi $w = x + yi$ với $x; y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } |z| = c \Rightarrow \left| \frac{w + 1 - 2i}{3 - 4i} \right| = c \Leftrightarrow \frac{|w + 1 - 2i|}{|3 - 4i|} = c \Leftrightarrow |x + yi + 1 - 2i| = 5c$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = 5c \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 25c^2.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của số phức w là đường tròn $I(-1; 2)$.

Khi đó chỉ có đáp án C có khả năng đúng và theo đó $R = 5 \Rightarrow 5c = 5 \Rightarrow c = 1$.

Thử $c = 1$ vào phương trình (1) thì thỏa mãn.

Câu 28: Trong mặt phẳng phức, tìm tập hợp các điểm M là ảnh của số phức z sao cho: Ảnh của các số i, z, iz thẳng hàng.

- A. Đường tròn $x^2 + y^2 - x - y = 0$, có tâm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ngoại trừ điểm $(0; 1)$
 B. Đường tròn $x^2 + y^2 - x - y = 0$, có tâm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 C. Một hyperbol vuông góc
 D. Đường thẳng $x = 1$

Lời giải

Cách 1: Gọi điểm biểu diễn số phức z là $M(x; y)$.

Gọi điểm biểu diễn số phức i là $N(0; 1)$.

Gọi điểm biểu diễn số phức iz là $P(-y; x)$.

$$\overrightarrow{NM} = (x; y - 1); \overrightarrow{NP} = (-y; x - 1)$$

Vì 3 điểm M, N, P thẳng hàng nên ta có: $x(x - 1) = -y(y - 1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - y = 0$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn $x^2 + y^2 - x - y = 0$, có tâm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, bán kính

$$R = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ngoại trừ điểm } (0; 1).$$

Cách 2: Kí hiệu $M(z)$ dùng để chỉ M là điểm biểu diễn số phức z hay ảnh của số phức z .

Giả sử các điểm $A(i), M(z), M'(iz)$ thẳng hàng:

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = k\overrightarrow{MA}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow iz - z = k(i - z) \Leftrightarrow k = \frac{iz - z}{i - z}$$

$$\text{Đặt } z = x + yi \Rightarrow k = \frac{i(x + yi) - (x + yi)}{i - (x + yi)} \Rightarrow k = \frac{[-(y - x) + (x - y)i][(-x + (y - 1)i)]}{[-x - (y - 1)i][(-x + (y - 1)i)]}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{x^2 + y^2 + x - y}{x^2 + (y - 1)^2} - \frac{x^2 + y^2 - x - y}{x^2 + (y - 1)^2} i$$

k là một số thực. Do đó ta có:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 \neq 0 \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn $x^2 + y^2 - x - y = 0$, có tâm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, bán kính

$R = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ngoại trừ điểm $(0;1)$.

Chọn A

Câu 29: Trong mặt phẳng phức, cho M, M' theo thứ tự là điểm biểu diễn của hai số phức z và $z': z = x + yi, z' = \frac{z-1+i}{z-1}$. Tìm tập hợp điểm (E) các điểm M sao cho: Điểm M' nằm trên trục tung và $M' \neq 0$.

A. Đường tròn tâm $I\left(1; -\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{1}{2}$ ngoại trừ các điểm $(1;0)$ và $(1;-1)$.

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$ ngoại trừ các điểm $(1;0)$ và $(1;-1)$.

C. Đường thẳng $y=1$ ngoại trừ các điểm $(1;0)$ và $(1;-1)$.

D. Đường thẳng $x=1$ ngoại trừ các điểm $(1;0)$ và $(1;-1)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } z' = \frac{z-1+i}{z-1} = \frac{(x-1)+(y+1)i}{(x-1)+yi} = \frac{(x-1)^2 + y(y+1) + (x-1)i}{(x-1)^2 + y^2}$$

Trường hợp M' nằm trên trục tung và $M' \neq 0$.

$\Rightarrow z'$ là một số thuần ảo khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y(y+1) = 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + y - 1 = 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow (E)$ là đường tròn tâm $I\left(1; -\frac{1}{2}\right)$ bán kính $R = \frac{1}{2}$ ngoại trừ các điểm $(1;0)$ và $(1;-1)$.

Chọn A

Câu 30: Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z sao cho $u = \frac{z+2+3i}{z-i}$ là một số thuần ảo.

A. Đường tròn tâm $I(-1;-1)$, bán kính bằng $\sqrt{5}$, khuyết 2 điểm $(0;1)$ và $(-2;-3)$.

B. Đường tròn tâm $I(-1;-3)$, bán kính bằng $\sqrt{5}$, khuyết 2 điểm $(0;1)$ và $(-2;-3)$.

C. Đường tròn tâm $I(-1;-4)$, bán kính bằng $\sqrt{5}$, khuyết 2 điểm $(0;1)$ và $(-2;-3)$.

D. Đường tròn tâm $I(-2;-1)$, bán kính bằng $\sqrt{5}$, khuyết 2 điểm $(0;1)$ và $(-2;-3)$.

Lời giải

$$\text{Giả sử } z = a + bi (a, b \in \mathbb{R}), (z \neq i), \text{ khi đó: } u = \frac{a+2+bi+3i}{a+(b-1)i} = \frac{(a+2+(b+3)i)(a-(b-1)i)}{a^2+(b-1)^2}$$

Từ số bằng $a^2 + b^2 + 2a + 2b - 3 + 2(2a - b + 1)i$ u là số thuần ảo khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + 2a + 2b - 3 = 0 \\ 2a - b + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)^2 + (b+1)^2 = 5 \\ (a;b) \neq (0;1), (-2;-3) \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-1; -1)$, bán kính bằng $\sqrt{5}$, khuyết 2 điểm $(0;1)$ và $(-2; -3)$.

Chọn A

Câu 31: Tìm trong mặt phẳng tập hợp (λ) các điểm M biểu diễn số phức z sao cho $Z = z + \frac{4}{z}$ là một số thực.

- A. Trục hoành $x'Ox$ ngoại trừ điểm gốc và đường tròn tâm O , bán kính $R = 2$
- B. Trục hoành $x'Ox$ ngoại trừ điểm gốc và đường tròn tâm O , bán kính $R = 1$
- C. Đường tròn tâm O , bán kính $R = 1$
- D. Trục hoành $x'Ox$ ngoại trừ điểm gốc

Lời giải

Đặt $z = x + yi, (z \neq 0)$ với $x, y \in \mathbb{R}$

$$\text{Ta có: } Z = z + \frac{4}{z} = x + yi + \frac{4}{x + yi} = x + yi + \frac{4(x - yi)}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{x(x^2 + y^2 + 4) + y(x^2 + y^2 - 4)i}{x^2 + y^2}$$

$$Z \text{ là một số thực: } \Leftrightarrow \begin{cases} y(x^2 + y^2 + 4) = 0 \\ x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \vee x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases}$$

Do đó (λ) gồm:

- Trục hoành $x'Ox$ ngoại trừ điểm gốc.
- Đường tròn tâm O , bán kính $R = 2$.

Chọn A

Câu 32: Trong mặt phẳng phức, cho M là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi, M \neq 0$. Xem số phức $Z = \frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{1}{z^2} \right)$. Tìm tập hợp điểm M sao cho Z là một số thuần ảo.

- A. Đường tròn tâm O , bán kính $R = 1$
- B. Đường tròn tâm $I(0;1)$ bán kính $R = 1$
- C. Đường thẳng $y = 1$
- D. Đường thẳng $x = 1$

Lời giải

Trường hợp Z là một số thuần ảo $\Leftrightarrow$ Phần thực bằng 0.

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Tập hợp điểm M là đường tròn tâm O , bán kính $R = 1$.

Chọn A

Câu 33: Trong mặt phẳng phức, cho m và M là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi, M \neq 0$.

$$Z = X + Yi = \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right). \text{ Tìm tập hợp điểm } M \text{ sao cho } Z \text{ là một số thực.}$$

- A. Đường tròn tâm O , bán kính $R = 1$ và trục hoành Ox , không kể điểm gốc O
- B. Đường tròn tâm O , bán kính $R = 1$
- C. Đường thẳng $y = 1$.
- D. Đường thẳng $x = -\frac{1}{2}$ và trục hoành Ox

Lời giải

$$\text{Ta có: } Z = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2} \left(x + yi + \frac{1}{x + yi} \right) = \frac{(x^2 + y^2 + 1)x}{2(x^2 + y^2)} + \frac{(x^2 + y^2 - 1)y}{2(x^2 + y^2)}i$$

$$Z \text{ là số thực khi và chỉ khi: } Y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2 - 1)y = 0 \\ x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Tập hợp các điểm M phải gồm:

+ Trục hoành Ox , không kể điểm gốc O .

+ Đường tròn tâm O , bán kính $R=1$

Chọn A

Câu 34: Trong mặt phẳng phức, cho m và M theo thứ tự là điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi$ và $Z = \frac{z-1}{z+2i}$. Tìm tập hợp các điểm m sao cho: Z là một số thuần ảo.

A. Đường tròn tâm $I\left(\frac{1}{2}; -1\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

C. Đường thẳng $y = 2x - 2$

D. Đường thẳng $x = 1$

Lời giải

$$\text{Ta có: } Z = \frac{z-1}{z+2i} = \frac{(x+yi)-1}{(x+yi)+2i} = \frac{x-1+yi}{x+(y+2)i} = \frac{(x-1+yi)(x-(y+2)i)}{(x+(y+2)i)(x-(y+2)i)}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{x(x-1)+y(y+2)+(y-2x+2)i}{x^2+(y+2)^2}$$

$$Z \text{ là một số thuần ảo khi và chỉ khi: } x(x-1)+y(y+2)=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-x+2y=0$$

$$\text{Tập hợp các điểm } m \text{ là đường tròn tâm } I\left(\frac{1}{2}; -1\right), \text{ bán kính } R = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Chọn A

Câu 35: (Sở Thanh Hóa 2019) Xét các số phức z thỏa mãn $(2-z)(\bar{z}+i)$ là số thuần ảo. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng tọa độ là

A. Đường tròn có tâm $I\left(1; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

B. Đường tròn có tâm $I\left(1; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$ nhưng bỏ đi hai điểm $A(2;0)$, $B(0;1)$.

C. Đường tròn có tâm $I\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

D. Đường tròn có tâm $I(2;1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Gọi } z = x + yi, (x; y \in \mathbb{R}).$$

Ta có $(2-z)(\bar{z}+i) = (2-x-yi)(x-yi+i) = -x^2 - y^2 + 2x + y - (x+2y-2)i$.

Các số phức z thỏa mãn $(2-z)(\bar{z}+i)$ là số thuần ảo khi $-x^2 - y^2 + 2x + y = 0$

Hay $(x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$.

Suy ra tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng tọa độ là đường tròn có tâm $I\left(1; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 36: (Chuyên Thái Nguyên) Cho z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn điều kiện $|z-5-3i|=5$ đồng thời $|z_1-z_2|=8$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = z_1 + z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình

A. $(x-10)^2 + (y-6)^2 = 36$.

B. $(x-10)^2 + (y-6)^2 = 16$.

C. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 9$.

D. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn A

+) Đặt $z = x + yi$

Khi đó $|z-5-3i|=5 \Leftrightarrow |x-5+(y-3)i|=5 \Leftrightarrow (x-5)^2 + (y-3)^2 = 25$ (C)

Gọi A, B lần lượt là 2 điểm biểu diễn số phức z_1, z_2

$\Rightarrow A, B$ thuộc đường tròn (C) có tâm I (5; 3), bán kính $R = 5$ và $|z_1 - z_2| = 8 \Rightarrow AB = 8$

+) Gọi H là điểm biểu diễn số phức $w' = \frac{z_1 + z_2}{2}$

$\Rightarrow H$ là trung điểm AB $\Rightarrow AH = \frac{AB}{2} = 4$

Xét tam giác AIH vuông tại H có $AH = 4, AI = 5$ nên $IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

$\Rightarrow H$ thuộc đường tròn (C') có tâm I (5; 3), bán kính $R' = 3$ (*)

+) Gọi M là điểm biểu diễn số phức $w = z_1 + z_2$

$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OH}$

$\Rightarrow M$ là ảnh của H qua phép vị tự tâm O, tỉ số $k = 2$ với O là gốc tọa độ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow$ tập hợp M là đường tròn (C'') là ảnh của (C') phép vị tự tâm O, tỉ số $k = 2$

+) Giả sử đường tròn (C'') có tâm J (a; b) và bán kính R''

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2.5 = 10 \\ b = 2.3 = 6 \\ R'' = 2.R' = 6 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn (C'') là $(x-10)^2 + (y-6)^2 = 36$

Câu 37: Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ thỏa mãn điều kiện:

$|z|^2 - 5z - 5\bar{z} = 0$.

A. Đường thẳng qua gốc tọa độ.

B. Đường tròn bán kính 1.

C. Đường tròn tâm I (5; 0) bán kính 5

D. Đường tròn tâm I (5; 0) bán kính 3

Lời giải

Đặt $z = x + yi$, ta có $\bar{z} = x - yi$.

Do đó: $|z|^2 - 5z - 5\bar{z} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 5x - 5yi - 5x + 5yi = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 + y^2 = 25$

Trên mặt phẳng tọa độ, đó là tập hợp các điểm thuộc đường tròn bán kính bằng 5 và tâm là $I(5;0)$.

Chọn C

Câu 38: (KINH MÔN II LẦN 3 NĂM 2019) Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+3i|=3\sqrt{2}$. Biết rằng số phức $w=(1-i^{2019})(\bar{z}+3i)+2019$ có tập hợp các điểm biểu diễn thuộc đường tròn (C) . Diện tích S của hình tròn (C) bằng

A. 18π .

B. 36π .

C. 9π .

D. 12π .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } |z-1+3i|=3\sqrt{2} \Rightarrow |\overline{z-1+3i}|=3\sqrt{2} \Rightarrow |\bar{z}-1-3i|=3\sqrt{2}.$$

$$\text{Mà } w=(1-i^{2019})(\bar{z}+3i)+2019=(1+i)((\bar{z}-1-3i)+(1+6i))+2019$$

$$\text{hay } w=(1+i)(\bar{z}-1-3i)+2014+7i \Leftrightarrow w-2014-7i=(1+i)(\bar{z}-1-3i).$$

$$\text{Suy ra: } |w-2014-7i|=|(1+i)(\bar{z}-1-3i)| \Leftrightarrow |w-2014-7i|=|1+i||\bar{z}-1-3i|=\sqrt{2}.3\sqrt{2}=6$$

$$\Leftrightarrow |w-2014-7i|=6.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn là đường tròn (C) có tâm $I(2014;7)$ và bán kính $R=6$.

Suy ra diện tích S của hình tròn (C) bằng: $S=\pi R^2=36\pi$.

Câu 39: (Sở Quảng NamT) Cho số phức z có mô đun bằng $2\sqrt{2}$. Biết rằng tập hợp điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức $w=(1-i)(z+1)-i$ là đường tròn có tâm $I(a;b)$, bán kính R . Tổng $a+b+R$ bằng:

A. 5.

B. 7.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Gọi $w=x+yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Theo bài ra ta có:

$$z=\frac{w-1+2i}{1-i}.$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{(x-1)+(y+2)i}{1-i}.$$

$$\Leftrightarrow |z|=\left|\frac{(x-1)+(y+2)i}{1-i}\right|.$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}=\frac{|(x-1)+(y+2)i|}{|1-i|}.$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}}{\sqrt{2}}.$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=16$$

Tập hợp điểm biểu diễn cho số phức w là đường tròn có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R=4$.

Vậy tổng $a+b+R=3$

Câu 40: (CHUYÊN HUỖNH MÃN ĐẠT 2019 lần 1) Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=2$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = \frac{\bar{z}}{1-i}$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có tâm là

- A. $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. B. $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. C. $I\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. D. $I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $w = \frac{\bar{z}}{1-i} \Leftrightarrow \bar{z} = (1-i)w$

Khi đó: $|z-1+2i|=2 \Leftrightarrow |\bar{z}-1-2i|=2 \Leftrightarrow |(1-i)w-1-2i|=2 \Leftrightarrow \left|(1-i) \cdot \left(w - \frac{1+2i}{1-i}\right)\right|=2$
 $\Leftrightarrow |1-i| \cdot \left|w - \frac{1+2i}{1-i}\right|=2 \Leftrightarrow \left|w - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)\right| = \sqrt{2}.$

Tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

Câu 41: (THPT-Ngô-Quyên-Hải-Phòng-Lần-2-2018-2019-Thi-24-3-2019) Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-1|=2$. Biết rằng tập hợp các số phức $w = (1+\sqrt{3}i)z+2$ là đường tròn có bán kính bằng R . Tính R .

- A. $R = 8$. B. $R = 2$. C. $R = 16$. D. $R = 4$.

Lời giải

Chọn D

$w = (1+\sqrt{3}i)z+2$

$\Rightarrow w = (1+\sqrt{3}i)(z-1)+3+\sqrt{3}i$

$\Rightarrow |w-3-\sqrt{3}i| = |(1+\sqrt{3}i)(z-1)|$

$\Rightarrow |w-3-\sqrt{3}i| = 4(*)$.

Đặt $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thì: $(*) \Leftrightarrow |x-3+i(y-\sqrt{3})| = 4$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 16.$

Vậy tập hợp các số phức w là đường tròn tâm $I(3; \sqrt{3})$, bán kính $R = 4$.

Câu 42: (Chuyên Thái Nguyên) Cho các số phức z thỏa mãn $|z+1|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (1+i\sqrt{8})z+i$ là một đường tròn. Bán kính r của đường tròn đó là

- A. 9. B. 36. C. 6. D. 3.

Lời giải

Chọn C

Gọi $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

Theo đề bài ta có:

$w = (1+i\sqrt{8})z+i \Leftrightarrow w-i = (1+i\sqrt{8})z \Leftrightarrow w-i = (1+i\sqrt{8})(z+1) - (1+i\sqrt{8})$

$\Leftrightarrow w-i+1+i\sqrt{8} = (1+i\sqrt{8})(z+1) \Leftrightarrow (x+1) + (y-1+\sqrt{8})i = (1+i\sqrt{8})(z+1)$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-1+\sqrt{8})^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{8})^2} \cdot 2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1+\sqrt{8})^2 = 36$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (1+i\sqrt{8})z+i$ là một đường tròn có bán kính $r = 6$.

Câu 43: (THPT ISCHOOL NHA TRANG) Cho số phức z thỏa mãn $|z-1|=2$; $w = (1+\sqrt{3}i)z+2$.

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn, bán kính của đường tròn đó bằng

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Cách 1.

Giả sử $w = a+bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } a+bi = (1+\sqrt{3}i)z+2 \Leftrightarrow z = \frac{a-2+bi}{1+\sqrt{3}i} \Leftrightarrow z-1 = \frac{a-3+(b-\sqrt{3})i}{1+\sqrt{3}i}.$$

$$\text{Ta có } |z-1|=2 \Leftrightarrow \left| \frac{a-3+(b-\sqrt{3})i}{1+\sqrt{3}i} \right| = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(a-3)^2 + (b-\sqrt{3})^2}}{2} = 2$$

$$\Leftrightarrow (a-3)^2 + (b-\sqrt{3})^2 = 16.$$

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 16$.

Suy ra bán kính của đường tròn đó là 4.

Cách 2.

$$\text{Ta có } w-2 = (1+\sqrt{3}i)z \Leftrightarrow w-2-1-\sqrt{3}i = (1+\sqrt{3}i)(z-1).$$

$$\text{Suy ra } |w-3-\sqrt{3}i| = |(1+\sqrt{3}i)(z-1)| \Leftrightarrow |w-(3+\sqrt{3}i)| = |1+\sqrt{3}i| \cdot |z-1| \Leftrightarrow |w-(3+\sqrt{3}i)| = 4.$$

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm $I(3;\sqrt{3})$, bán kính $R = 4$.

Câu 44: (Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đắk Lắk) Cho số phức z có $|z|=2$. Biết tập hợp biểu diễn các số phức $w = 3+i-(3-4i)z$ là một đường tròn, bán kính đường tròn đó bằng

A. $5\sqrt{2}$.B. $5\sqrt{5}$.

C. 10.

D. $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi số phức $w = x+yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có: $w = 3 + i - (3 - 4i)z \Leftrightarrow w - 3 - i = (-3 + 4i)z \Rightarrow |w - 3 - i| = |(-3 + 4i)z| \Rightarrow |w - 3 - i| = 10$
 $\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = 10 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = 100.$

Vậy tập hợp biểu diễn các số phức w là một đường tròn có bán kính bằng 10.

- Câu 45: (CỤM TRƯỜNG SÓC SƠN MÊ LINH HÀ NỘI)** Xét các số phức z thỏa mãn $|z - i + 1| = 4$, biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w = (3 - 4i)\bar{z} + 5i$ là một đường tròn. Bán kính r của đường tròn đó là
- A.** $r = 10.$ **B.** $r = 18.$ **C.** $r = 20.$ **D.** $r = 25.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $w = (3 - 4i)\bar{z} + 5i \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{w - 5i}{3 - 4i}.$

Do vậy $|z - i + 1| = 4 \Leftrightarrow |\overline{z - i + 1}| = 4 \Leftrightarrow |\bar{z} + i + 1| = 4$

$\Leftrightarrow \left| \frac{w - 5i}{3 - 4i} + i + 1 \right| = 4 \Leftrightarrow \frac{|w + 7 - 6i|}{|3 - 4i|} = 4 \Leftrightarrow |w + 7 - 6i| = 20.$

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn cho số phức w ta có:

$|x + yi + 7 - 6i| = 20 \Leftrightarrow (x + 7)^2 + (y - 6)^2 = 20^2.$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn bán kính $r = 20.$

- Câu 46: (Sở Hà Nam)** Cho số phức z thỏa mãn $(z + 1 - 3i)(\bar{z} + 1 + 3i) = 25$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là một đường tròn có tâm $I(a; b)$ và bán kính c . Tổng $a + b + c$ bằng
- A.** 9. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 7.
- Lời giải**

Chọn D

Giả sử $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}.$

Ta có $(z + 1 - 3i)(\bar{z} + 1 + 3i) = 25 \Leftrightarrow [(x + 1) + (y - 3)i][(x + 1) - (y - 3)i] = 25$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25.$

Tập các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-1; 3)$, bán kính bằng 5.

Vậy $a + b + c = -1 + 3 + 5 = 7.$

- Câu 47:** Trong mặt phẳng phức, cho số phức a bất kì, tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z sao cho: $|z - a| \cdot |\bar{z} - \bar{a}| = a\bar{a}.$
- A.** Đường tròn tâm A , bán kính $R = AO$
B. Đường tròn tâm A , bán kính $R = 2$
C. Một hyperbol vuông góc
D. Đường thẳng $x = 1$

Lời giải

Ta có: $|z - a| \cdot |\bar{z} - \bar{a}| = a\bar{a} \Leftrightarrow |z - a|^2 = |a|^2 \quad (1)$

Gọi A là điểm biểu diễn số phức a trong mặt phẳng phức.

Ta có: $(1) \Leftrightarrow |\overline{MA}|^2 = |\overline{OA}|^2 \Leftrightarrow AM^2 = OA^2 \Rightarrow AM = AO$

Do đó, tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A , bán kính $R = AO.$

Chọn A

Câu 48: (PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH) Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn phương trình $|z - 2 - 3i| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 6$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = z_1 + z_2$ là một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

A. $R = 8$.**B.** $R = 4$.**C.** $R = 2\sqrt{2}$.**D.** $R = 2$.**Lời giải****Chọn A**

Giả sử A, B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ Oxy. Theo giả thiết ta có

A, B thuộc đường tròn tâm $I(2; 3)$, bán kính $r = 5$ và $AB = 6$.

Gọi M là trung điểm của AB khi đó M cũng là điểm biểu diễn số phức $u = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{w}{2}$.

Lại có

$$IM^2 = IA^2 - AM^2 = r^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 16 \Rightarrow IM = 4.$$

Vậy M thuộc đường tròn tâm $I(2; 3)$ bán kính $r' = 4$.

Suy ra các điểm biểu diễn số phức $w = z_1 + z_2 = 2u$ là một đường tròn bán kính $R = 2r' = 8$

Câu 49: Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (3 + 4i)z + i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r = 4$.**B.** $r = 5$.**C.** $r = 20$.**D.** $r = 22$.**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Gọi } w = a + bi, \text{ ta có } w = a + bi &= (3 + 4i)z + i \Leftrightarrow z = \frac{a + (b-1)i}{3 + 4i} = \frac{[a + (b-1)i](3 - 4i)}{9 - 16i^2} \\ &= \frac{3a + 4b - 4}{25} + \frac{(3b - 4a - 3)}{25}i \Rightarrow |z| = \frac{\sqrt{(3a + 4b - 4)^2 + (3b - 4a - 3)^2}}{25} \end{aligned}$$

$$\text{Mà } |z| = 4 \text{ nên } \Leftrightarrow (3a + 4b - 4)^2 + (3b - 4a - 3)^2 = 100^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2b = 399$$

Theo giả thiết, tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (3 + 4i)z + i$ là một đường tròn nên ta có

$$a^2 + b^2 - 2b = 399 \Leftrightarrow a^2 + (b-1)^2 = 400 \Rightarrow r = \sqrt{400} = 20$$

Chọn C

Câu 50: (THPT LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NGÃI) Xét số phức z thỏa mãn $\frac{z+2}{z+i}$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là một đường tròn, tâm I của đường tròn có tọa độ là

A. $I\left(1; \frac{3}{2}\right)$.**B.** $I\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.**C.** $I(2; 1)$.**D.** $I\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.**Lời giải****Chọn B**

Đặt $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{z+2}{z+i} &= \frac{x+yi+2}{x+yi+i} = \frac{(x+2)+yi}{x+(y+1)i} = \frac{[(x+2)+yi] \cdot [x-(y+1)i]}{x^2+(y+1)^2} \\ &= \frac{x(x+2)+y(y+1)-[(x+2)(y+1)-xy]i}{x^2+(y+1)^2} = \frac{x^2+y^2+2x+y}{x^2+(y+1)^2} - \frac{x+2y+2}{x^2+(y+1)^2}i. \end{aligned}$$

$$\text{Số phức } \frac{z+2}{z+i} \text{ là số thuần ảo} \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2+2x+y}{x^2+(y+1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+2x+y=0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

$$\text{Vậy tâm } I\left(-1; -\frac{1}{2}\right).$$

Câu 51: (THTT lần 5) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z^2+3|=2|z+\bar{z}|$ và $|z-4+3i|=3$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm $M(x; y)$.

Ta có:

$$*/ |z^2+3|=2|z+\bar{z}| \Leftrightarrow |x^2-y^2+3+2xyi|=2|2x|$$

$$\Leftrightarrow (x^2-y^2+3)^2+4x^2y^2=16x^2 \Leftrightarrow (x^2+y^2)^2-6(x^2+y^2)+9=4x^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2-3)^2=4x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-3=2x \\ x^2+y^2-3=-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+y^2=4 \\ (x+1)^2+y^2=4 \end{cases}$$

$$*/ |z-4+3i|=3 \Leftrightarrow (x-4)^2+(y+3)^2=9.$$

$$\text{Khi đó, từ giả thiết bài toán ta có: } \begin{cases} (x-1)^2+y^2=4 \\ (x-4)^2+(y+3)^2=9 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} (x+1)^2+y^2=4 \\ (x-4)^2+(y+3)^2=9 \end{cases} \quad (2)$$

Gọi (C_1) là đường tròn tâm $I_1(1;0)$, bán kính $R_1=2$.

(C_2) là đường tròn tâm $I_2(-1;0)$, bán kính $R_2=2$.

(C) là đường tròn tâm $I(4;-3)$, bán kính $R=3$.

Ta thấy:

+) $|R_1-R| < I_1I = 3\sqrt{2} < R_1+R$ nên (C_1) và (C) cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Suy ra hệ (1) có hai nghiệm phân biệt.

+) $I_2I = \sqrt{34} > R_2+R$ nên (C_2) và (C) không cắt nhau. Do đó hệ (2) vô nghiệm.

Kết luận: Có 2 số phức z thỏa mãn đề bài.

Câu 52: (THPT PHỤ DỤC – THÁI BÌNH) Xét các số phức z thỏa mãn $(z+2i)(\bar{z}+2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=(1+i)z+2019-2019i$ là một đường tròn, bán kính đường tròn là

A. 2.

B. 1.

C. $2019\sqrt{2}$.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Gọi số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có:

$$(z+2i)(\bar{z}+2) = [a+(b+2)i][(a+2)-bi] = [a(a+2)+b(b+2)] + [(a+2)(b+2)-ab]i.$$

$(z + 2i)(\bar{z} + 2)$ là số thuần ảo nên $a(a + 2) + b(b + 2) = 0 \Leftrightarrow (a + 1)^2 + (b + 1)^2 = 2$.

Gọi số phức $w = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có $x + yi = (1 + i)z + 2019 - 2019i = (1 + i)(a + bi) + 2019 - 2019i$

$$\Leftrightarrow x + yi = a - b + 2019 + (a + b - 2019)i \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - b + 2019 \\ y = a + b - 2019 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{x + y}{2} \\ b = \frac{y - x + 2 \cdot 2019}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } (a + 1)^2 + (b + 1)^2 = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{x + y}{2} + 1\right)^2 + \left(\frac{y - x + 2 \cdot 2019}{2} + 1\right)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4038x + 4042y + 8160789 = 0.$$

Vậy, tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn có bán kính

$$R = \sqrt{2019^2 + 2021^2 - 8160789} = 2.$$

Câu 53: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa: $|z_1 + z_2| = 5$. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa:

$|z - z_1| = 2|z + z_2|$ là đường tròn và có bán kính R . Tính giá trị của R .

A. $R = \frac{5}{3}$.

B. $R = \frac{7}{3}$.

C. $R = \frac{10}{3}$.

D. $R = \frac{14}{3}$.

Lời giải

Trong mặt phẳng phức, gọi Z, Z_1, Z_2 lần lượt là hai điểm biểu diễn số phức z, z_1, z_2 .

A là điểm thứ tư của hình bình hành OZ_2AZ_1 .

$$\Rightarrow \overrightarrow{OZ_1} + \overrightarrow{OZ_2} = \overrightarrow{OA}$$

$$\Rightarrow |z_1 + z_2| = OA = 5$$

Ta có: $|z - z_1| = |\overrightarrow{OZ} - \overrightarrow{OZ_1}| = ZZ_1$ và $|z + z_2| = |\overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{OZ_2}| = OP$ với P là điểm thứ tư của hình bình hành OZ_2PZ .

Gọi N là trung điểm $OA \Rightarrow ON = 2,5$ và H là trung điểm cạnh $OP \Rightarrow OP = 2OH$ và H cũng là trung điểm cạnh ZZ_2 .

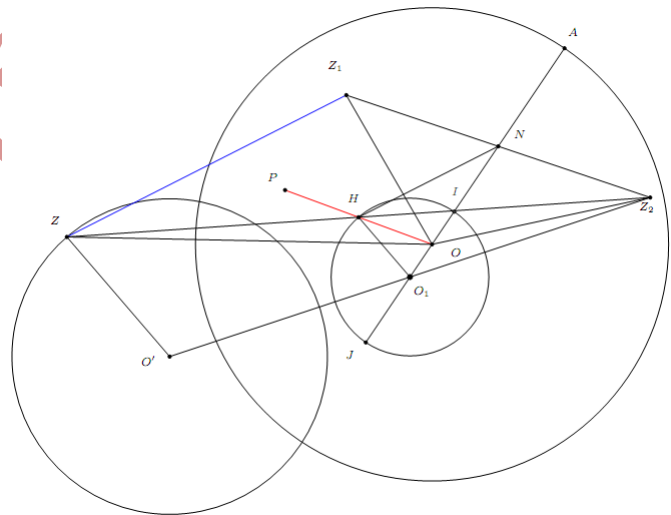
Ta có HN là đường trung bình của ΔZZ_1Z_2

$$\Rightarrow ZZ_1 = 2HN.$$

$$|z - z_1| = 2|z + z_2| \Leftrightarrow ZZ_1 = 2OP \Leftrightarrow 2HN = 4OH \Leftrightarrow HN = 2HO.$$

$$\text{Gọi } I, J \text{ lần lượt là hai điểm thỏa: } \begin{cases} \overrightarrow{IN} = -2\overrightarrow{IO} \Rightarrow OI = \frac{ON}{3} = \frac{2,5}{3} \\ \overrightarrow{JN} = 2\overrightarrow{JO} \Rightarrow OJ = ON = 2,5 \end{cases}$$

Ta chứng minh được HI, HJ lần lượt đường phân giác trong và phân giác ngoài tại đỉnh H của $\Delta HON \Rightarrow HI \perp HJ \Rightarrow H$ thuộc đường tròn đường kính $IJ = \frac{10}{3}$.



Gọi O_1 là trung điểm $IJ \Rightarrow O_1I = \frac{5}{3}$.

Gọi O' là là điểm sao cho O_1 là trung điểm $O'Z_2$.

Ta có: O_1H là đường trung bình của $O'ZZ_2 \Rightarrow O'Z = 2O_1H = \frac{10}{3}$.

Với z_1, z_2 không đổi thì $A, Z_1, Z_2 \Rightarrow N$ cố định $\Rightarrow I, J$ cố định $\Rightarrow O_1$ cố định $\Rightarrow O'$ cố định.

Vậy Z thuộc đường tròn tâm O' , bán kính $R = \frac{10}{3}$.

Câu 54: (SỞ BÌNH THUẬN 2019) Gọi z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 5i| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 6$. Tìm môđun của số phức $\omega = z_1 + z_2 - 6 + 10i$.

A. $|\omega| = 10$.

B. $|\omega| = 32$.

C. $|\omega| = 16$.

D. $|\omega| = 8$.

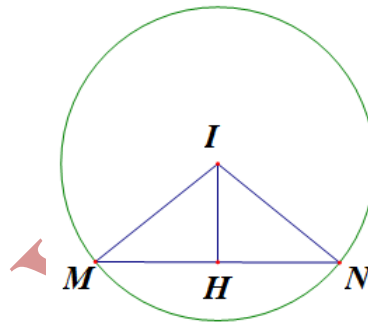
Lời giải

Chọn D

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 5i| = 5$ là đường tròn (C) tâm $I(3; -5)$ bán kính $R = 5$.

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của số phức z_1, z_2 suy ra M, N nằm trên đường tròn (C) .

Gọi H là trung điểm của MN suy ra $IH \perp MN$



Do $|z_1 - z_2| = 6 \Rightarrow MN = 6 \Rightarrow MH = NH = 3 \Rightarrow IH = \sqrt{IM^2 - MH^2} = 4$.

$\omega = z_1 + z_2 - 6 + 10i = z_1 - (3 - 5i) + z_2 - (3 - 5i)$

$\Rightarrow |\omega| = |\vec{IM} + \vec{IN}| = |2\vec{IH}| = 2IH = 8$.

Câu 55: (Sở Thanh Hóa 2019) Gọi z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 8$. Tìm môđun của số phức $w = z_1 + z_2 - 2 + 4i$.

A. $|w| = 6$.

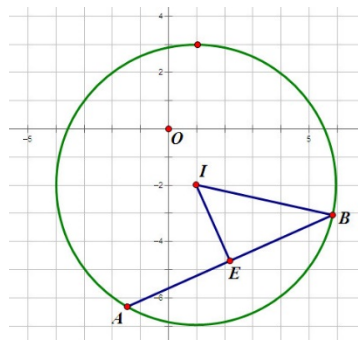
B. $|w| = 10$.

C. $|w| = 16$.

D. $|w| = 13$.

Lời giải

Chọn A



Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 . Gọi E là trung điểm của AB .

Do $|z - 1 + 2i| = 5$ nên A, B thuộc đường tròn tâm $I(1; -2)$, bán kính $R = 5$. Gọi C là điểm biểu diễn số phức w ta có $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OI} = 2\overrightarrow{OE} - 2\overrightarrow{OI} = 2\overrightarrow{IE}$.
 $|w| = 2IE = 2\sqrt{IB^2 - EB^2} = 2\sqrt{25 - 16} = 6$.

Câu 56: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = m^2 + 2m + 5$ với m là số thực. biết rằng tập hợp điểm của số phức $w = (3 + 4i)z - 2i$ là đường tròn. Tính bán kính R nhỏ nhất của đường tròn đó.

- A. $R_{\min} = 5$ B. $R_{\min} = 20$ C. $R_{\min} = 4$ D. $R_{\min} = 25$

Lời giải

Ta có: $|(3 + 4i)z| = 5(m^2 + 2m + 5) \Rightarrow |w + 2i| = 5(m^2 + 2m + 5)$. Vậy $R = 5(m^2 + 2m + 5) \geq 20$.

Câu 57: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = m^2 + 2m + 5$ với m là số thực. Biết rằng tập hợp điểm của số phức $w = (3 + 4i)z - 2i$ là đường tròn. Tìm bán kính R nhỏ nhất của đường tròn đó.

- A. $R = 5$. B. $R = 10$. C. $R = 15$. D. $R = 20$

Lời giải

$$w + 2i = (3 + 4i)z \Rightarrow |w + 2i| = |(3 + 4i)z| = |(3 + 4i)||z| = 5[(m + 1)^2 + 4] \geq 20.$$

$\Rightarrow |w + 2i| \geq 20$. Vậy đường tròn có bán kính $R_{\min} = 20$ với tâm $I(0; 2)$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m = -1$.

Câu 58: (Chuyên Vinh Lần 2) Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên m sao cho tồn tại 2 số phức phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn đồng thời các phương trình $|(3 + 4i)z + 25| = 20$ và $|z + m + 2i| = 5$.

Số các phần tử của S là

- A. 8. B. 7. C. 6. D. 5.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } |(3 + 4i)z + 25| = 10 \Leftrightarrow |z + 3 - 4i| = 2 \quad (1)$$

$\Rightarrow$ tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn (1) là đường tròn tâm $I(-3; 4)$, bán kính $R = 2$.

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z + m + 2i| = 5$ (2) là đường tròn tâm $J(-m; -2)$, bán kính $R = 5$.

Yêu cầu bài toán xảy ra khi hai đường tròn $(I; 2), (J; 5)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow 3 < IJ < 7 \Leftrightarrow 9 < (m - 3)^2 + 36 < 49 \Leftrightarrow (m - 3)^2 < 13$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{13} < m - 3 < \sqrt{13} \Leftrightarrow 3 - \sqrt{13} < m < 3 + \sqrt{13}$$

$$\text{mà } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in S = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

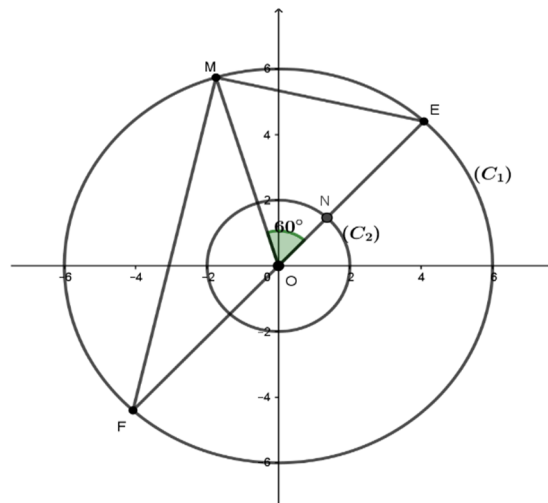
Câu 59: (KIM LIÊN HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 6$ và $|z_2| = 2$. Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức z_1 và iz_2 . Biết $\widehat{MON} = 60^\circ$.

$$\text{Tính } T = |z_1^2 + 9z_2^2|.$$

- A. $T = 36\sqrt{2}$. B. $T = 36\sqrt{3}$. C. $24\sqrt{3}$. D. 18.

Lời giải

Chọn B



Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1 và iz_2 , gọi E, F lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $3iz_2$ và $-3iz_2$.

Theo bài ra ta có:

$|z_1| = 6$ nên tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O , bán kính $R = 6$, gọi là đường tròn (C_1) ; $|z_2| = 2 \Rightarrow |iz_2| = |i| \cdot |z_2| = 2$ do đó tập hợp các điểm N biểu diễn số phức iz_2 thuộc đường tròn tâm O , bán kính $r = 2$, gọi là đường tròn (C_2) .

Lại thấy: $|3iz_2| = 6$ và $|-3iz_2| = 6$ suy ra các điểm E, F thuộc đường tròn (C_1) .

Hơn nữa: $3iz_2$ và $-3iz_2$ là các số phức đối nên EF là một đường kính của (C_1) .

Mặt khác: $\overline{OE} = 3\overline{ON}$ nên N nằm giữa O và $E \Rightarrow \widehat{MOE} = 60^\circ$, suy ra tam giác MOE là tam giác đều cạnh bằng 6 và tam giác MEF vuông tại M .

- Khi đó: $T = |z_1^2 + 9z_2^2| = |z_1^2 - (3iz_2)^2| = |z_1 - 3iz_2| \cdot |z_1 + 3iz_2| = ME \cdot MF$.

- Nhận thấy: $ME \cdot MF = 2 \cdot S_{\triangle MEF} = 4 \cdot S_{\triangle MOE} = 4 \cdot \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$. Vậy $T = 36\sqrt{3}$.

Câu 60: Tập hợp điểm biểu diễn số phức $|z - 2i| = 3$ là đường tròn tâm I . Tất cả giá trị m thỏa mãn khoảng cách từ I đến $\Delta: 3x + 4y - m = 0$ bằng $\frac{1}{5}$ là:

- A.** $m = -7; m = 9$ **B.** $m = -8; m = 8$ **C.** $m = 7; m = 9$ **D.** $m = 8; m = 9$

Lời giải

$$|z - 2i| = 3 \Leftrightarrow |x + (y - 2)i| = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = 3 \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 9 \Rightarrow I(0; 2)$$

$$d(I, \Delta) = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 - m|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{5} |8 - m|$$

$$d(I, \Delta) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{5} |8 - m| = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - m = 1 \\ 8 - m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 7 \\ m = 9 \end{cases}$$

Chọn C

Câu 61: (**Chuyên Vinh Lần 2**) Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên m sao cho tồn tại 2 số phức phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn đồng thời các phương trình $|z - 1| = |z - i|$ và $|z + 2m| = m + 1$. Tổng tất cả các phần tử của S là

- A.** 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $|z + 2m| = m + 1 \geq 0$

Trường hợp 1: $m + 1 = 0 \Rightarrow |z + 2m| = 0 \Rightarrow z = -2m = 2$ (có một giá trị nên không thỏa mãn).

Trường hợp 2: $m + 1 > 0$

Đặt $z = x + yi$

$$\text{Ta có } \begin{cases} |z - 1| = |z - i| \\ |z + 2m| = m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 & (1) \\ (x + 2m)^2 + y^2 = (m + 1)^2 & (2) \end{cases}$$

Xét trong hệ tọa độ Oxy, (1) là phương trình đường thẳng $d: x - y = 0$, (2) là phương trình đường tròn (C) tâm $I(-2m; 0)$, bán kính $R = m + 1$

Yêu cầu bài toán xảy ra khi và chỉ khi hệ phương trình (1), (2) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng d cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow d(I, d) = \frac{|2m|}{\sqrt{2}} < m + 1 \Leftrightarrow 2m^2 < m^2 + 2m + 1 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 1 < 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} < m < 1 + \sqrt{2}$$

Kết hợp với $m + 1 > 0$ và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in S = \{0; 1; 2\}$

Vậy tổng các phần tử của tập S bằng 3.

Câu 62: (Chuyên Vinh Lần 2) Gọi S là tập hợp tất cả các số m sao cho tồn tại đúng một số phức z thỏa mãn đồng thời các phương trình $|z + 2 + i| = |z + 1|$ và $\sqrt{2}|z - 3 + 2i| = m^2 - 5m + 9$. Tích tất cả các phần tử của S là

A. 6.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $m^2 - 5m + 9 > 0$ luôn đúng với mọi m .

Đặt $z = x + yi$

$$\text{Ta có } \begin{cases} |z + 2 + i| = |z + 1| \\ \sqrt{2}|z - 3 + 2i| = m^2 - 5m + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2 = 0 & (1) \\ (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = \frac{1}{2}(m^2 - 5m + 9)^2 & (2) \end{cases}$$

Xét trong hệ tọa độ Oxy, (1) là phương trình đường thẳng $d: x + y + 2 = 0$, (2) là phương trình đường tròn (C) tâm $I(3; -2)$, bán kính $R = \frac{1}{\sqrt{2}}(m^2 - 5m + 9)$

Yêu cầu bài toán xảy ra khi và chỉ khi hệ phương trình (1), (2) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C)

$$\Leftrightarrow d(I, d) = \frac{|3|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(m^2 - 5m + 9) \Leftrightarrow m^2 - 5m + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \{2; 3\}$$

Vậy tích các phần tử của tập S bằng 6.

Câu 63: (Chuyên Phan Bội Châu Lần 2) Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để có đúng 4 số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z^2|$ và $|z| = m$.

A. $\{2; 2\sqrt{2}\}$.

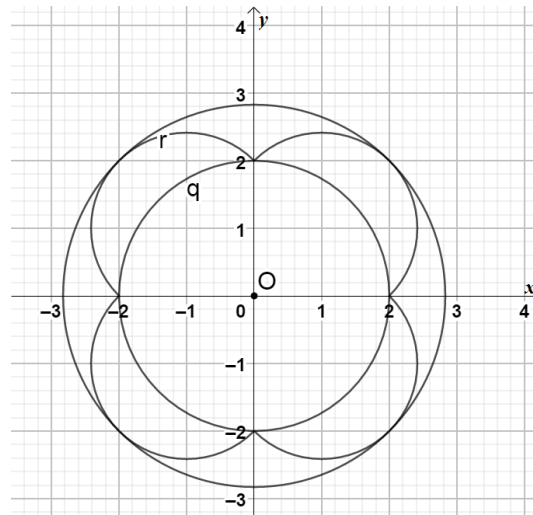
B. $[2; 2\sqrt{2}]$.

C. $\{2\}$.

D. $(2; 2\sqrt{2})$.

Lời giải.

Chọn A



Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó

$$|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z|^2 \Leftrightarrow 2|x| + 2|y| = x^2 + y^2 \Leftrightarrow (|x| - 1)^2 + (|y| - 1)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 & \text{khi } x \geq 0, y \geq 0 \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 = 2 & \text{khi } x \leq 0, y \leq 0 \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2 & \text{khi } x \geq 0, y \leq 0 \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2 & \text{khi } x \leq 0, y \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$|z| = m \Leftrightarrow x^2 + y^2 = m^2, (m \geq 0). \quad (2)$$

Điều kiện cần và đủ để có đúng 4 số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z|^2$ và $|z| = m$ là đường tròn $(C): x^2 + y^2 = m^2$ có đúng 4 điểm chung với cả 4 phần đường tròn trên.

Dựa vào đồ thị ta thấy có hai trường hợp thỏa mãn đó là $m = 2$ hoặc $m = 2\sqrt{2}$.

TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN LÀ HÌNH TRÒN

Câu 64: (KỶ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG) Cho số phức z thỏa mãn $|3z + i|^2 \leq z \cdot \bar{z} + 9$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức ω thỏa mãn $\omega = \bar{z} + 1 - i$

A. Hình tròn $(x-1)^2 + \left(y + \frac{5}{8}\right)^2 \leq \frac{73}{64}$.

B. Đường tròn $(x-1)^2 + \left(y + \frac{5}{8}\right)^2 \leq \frac{73}{64}$. **C.**

Đường tròn $(x-1)^2 + (y+3)^2 \leq 9$.

D. Hình tròn $(x-1)^2 + (y+3)^2 \leq 9$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $\omega = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Theo đề bài ta có $\omega = \bar{z} + 1 - i$

$$\Leftrightarrow \bar{z} = (x-1) + (y+1)i \Leftrightarrow z = (x-1) - (y+1)i$$

Từ đó ta có: $|3z + i|^2 \leq z \cdot \bar{z} + 9$

$$\Leftrightarrow |3[(x-1) - (y+1)i] + i|^2 \leq (x-1)^2 + (y+1)^2 + 9$$

$$\Leftrightarrow |3(x-1) - (3y+2)i|^2 \leq (x-1)^2 + (y+1)^2 + 9 \Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y + \frac{5}{8}\right)^2 \leq \frac{73}{64}$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức ω là hình tròn $(x-1)^2 + \left(y + \frac{5}{8}\right)^2 \leq \frac{73}{64}$.

Câu 65: Gieo một con súc sắc cân đối đồng chất 2 lần. Ký hiệu $(a; b)$ là kết quả sẽ xảy ra sau khi gieo, trong đó a, b lần lượt là số chấm xuất hiện lần thứ nhất, thứ hai. Gọi A là biến cố số chấm xuất hiện trên hai lần gieo như nhau. Tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố A là tập hợp con của tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn điều kiện nào sau đây?

- A. $|z + 2 + 3i| \leq 12$ B. $|z + 2 + 3i| = 10$
C. $|z + 2 + 3i| \leq 13$ D. $|z + 2 + 3i| \leq 11$

Lời giải

Ta có $A = \{(1;1), (2;2), (3;3), (4;4), (5;5), (6;6)\}$

Gọi $z = x + yi; x, y \in \mathbb{R}$ khi đó $|z + 2 + 3i| = \sqrt{(x+2)^2 + (y+3)^2}$

Giả sử $|z + 2 + 3i| \leq R \Rightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y+3)^2} \leq R$

$\Rightarrow (x+2)^2 + (y+3)^2 \leq R^2$. Khi đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là những điểm thuộc miền trong và trên đường tròn tâm $I(-2; -3)$ và bán kính R .

Để tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố A là tập hợp con của tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thì $IM \leq R, \forall M \in A$.

Khi đó ta được $R = 13$

Chọn C

Câu 66: Tìm quỹ tích các điểm M biểu diễn số phức $w = (1 + i\sqrt{3})z + 2$ biết số phức z thỏa mãn: $|z - 1| \leq 2(1)$.

- A. Hình tròn $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 \leq 16$ B. Hình tròn $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 \leq 9$
C. Hình tròn $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 \leq 25$ D. Hình tròn $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 \leq 36$

Lời giải

Giả sử $w = a + bi$

Ta có: $a + bi = (1 + i\sqrt{3})z + 2 \Leftrightarrow z = \frac{a-2+bi}{1+i\sqrt{3}} \Leftrightarrow z-1 = \frac{a-3+(b-\sqrt{3}i)}{1+i\sqrt{3}}$

$$(1) \Leftrightarrow \left| \frac{a-3+(b-\sqrt{3}i)}{1+i\sqrt{3}} \right| \leq 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(a-3)^2 + (b-\sqrt{3})^2}}{2} \leq 2 \Leftrightarrow (a-3)^2 + (b-\sqrt{3})^2 \leq 16$$

Vậy quỹ tích các điểm M biểu diễn số phức là hình tròn $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 \leq 16$ (kể cả những điểm nằm trên biên)

Chọn A

Câu 67: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 3 + 4i| \leq 2$. Trong mặt phẳng Oxy tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = 2z + 1 - i$ là hình tròn có diện tích

- A. $S = 9\pi$. B. $S = 12\pi$. C. $S = 16\pi$. D. $S = 25\pi$.

Lời giải

Chọn C

$$w = 2z + 1 - i \Rightarrow z = \frac{w-1+i}{2}$$

$$|z - 3 + 4i| \leq 2 \Leftrightarrow \left| \frac{w-1+i}{2} - 3 + 4i \right| \leq 2 \Leftrightarrow |w-1+i-6+8i| \leq 4 \Leftrightarrow |w-7+9i| \leq 4 \quad (1)$$

Giả sử $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), khi đó (1) $\Leftrightarrow (x-7)^2 + (y+9)^2 \leq 16$

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn tâm $I(7; -9)$, bán kính $r = 4$.

Vậy diện tích cần tìm là $S = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$.

Câu 68: (SỞ BÌNH THUẬN 2019) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 + 3i| \leq 3$. Trong mặt phẳng Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = 2z + 1 - i$ là hình tròn có diện tích

A. $S = 25\pi$. B. $S = 16\pi$. C. $S = 9\pi$. D. $S = 36\pi$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn cho số phức w .

Ta có $w = 2(z - 2 + 3i) + 4 - 6i + 1 - i \Leftrightarrow w - 5 + 7i = 2(z - 2 + 3i)$.

Khi đó $|w - 5 + 7i| = 2|z - 2 + 3i| \leq 6 \Leftrightarrow (x-5)^2 + (y+7)^2 \leq 36$.

$\Rightarrow$ tập hợp các điểm M trên mặt phẳng Oxy là hình tròn tâm $I(5; -7)$ bán kính $R = 6$.

Vậy diện tích hình tròn là $S = \pi R^2 = 36\pi$.

Câu 69: (Ngô Quyền Hà Nội) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 3 + 4i| \leq 2$. Trong mặt phẳng Oxy tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = 2z + 1 - i$ là hình tròn có diện tích là

A. $S = 25\pi$. B. $S = 9\pi$. C. $S = 12\pi$. D. $S = 16\pi$.

Lời giải

Chọn D

$$w = 2z + 1 - i \Leftrightarrow \frac{w - (1 - i)}{2} = z \Leftrightarrow \frac{w - (1 - i)}{2} - 3 + 4i = z - 3 + 4i \Leftrightarrow \frac{w - 7 + 9i}{2} = z - 3 + 4i$$

$$\Rightarrow \left| \frac{w - 7 + 9i}{2} \right| = |z - 3 + 4i|$$

$$\text{Ta được } \frac{|w - (7 - 9i)|}{2} = |z - 3 + 4i| \leq 2 \Leftrightarrow |w - (7 - 9i)| \leq 4.$$

Do đó tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn tâm $I(7; -9)$, bán kính bằng 4.

Vậy diện tích hình tròn là $S = 16\pi$.

Câu 70: (Đặng Thành Nam Đề 6) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| \leq 1$ và $z - \bar{z}$ có phần ảo không âm. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một miền phẳng. Tính diện tích S của miền phẳng này

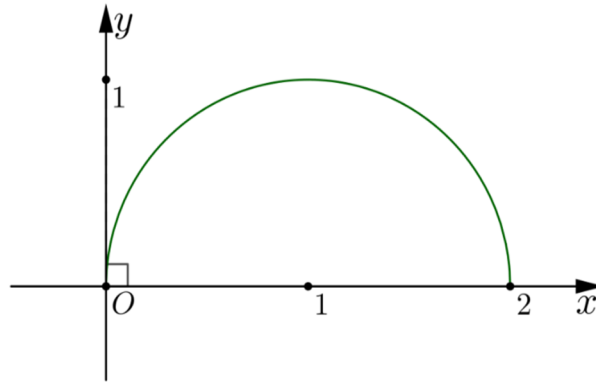
A. $S = \pi$. B. $S = 2\pi$. C. $S = \frac{1}{2}\pi$. D. $S = 1$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) theo giả thiết ta có $z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi$ và

$$\begin{cases} |x + yi - 1| \leq 1 \\ 2y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}.$$



Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là nửa hình tròn tâm $I(1;0)$, $R=1$.

$$\text{Vì vậy } S = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Câu 71: Biết số phức z thỏa điều kiện $3 \leq |z - 3i + 1| \leq 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z tạo thành một hình phẳng. Diện tích của hình phẳng đó bằng

A. 16π

B. 4π

C. 9π

D. 25π

Lời giải

Đặt $z = x + yi$

$$|z - 3i + 1| = |x - 1 + (y - 3)i| = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2}$$

Do đó

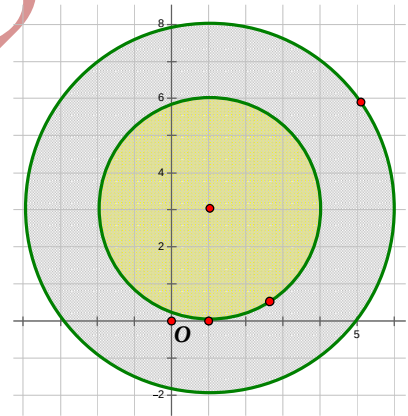
$$3 \leq |z - 3i + 1| \leq 5 \Leftrightarrow 9 \leq (x - 1)^2 + (y - 3)^2 \leq 25$$

Tập hợp các điểm biểu diễn của Z là hình phẳng nằm trong đường tròn

Tâm $I(1;3)$ với bán kính bằng $R=5$ đồng thời nằm ngoài đường tròn tâm $I(1;3)$ với bán kính $r=3$

Diện tích của hình phẳng đó là

$$S = \pi \cdot 5^2 - \pi \cdot 3^2 = 16\pi$$



Câu 72: Trong mặt phẳng phức Oxy, tập hợp biểu diễn số phức Z thỏa $1 \leq |z + 1 - i| \leq 2$ là hình vành khăn. Chu vi P của hình vành khăn là bao nhiêu?

A. $P = 4\pi$.

B. $P = \pi$.

C. $P = 2\pi$.

D. $P = 3\pi$

Lời giải

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), khi đó ta có

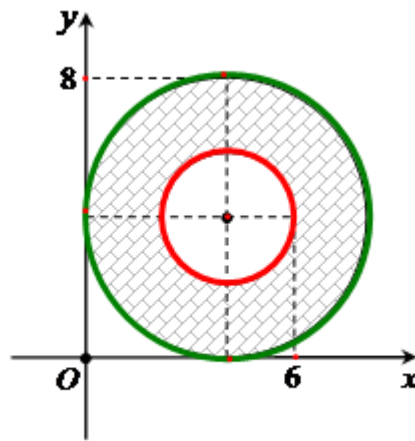
$\square |z + 1 - i| = |x + 1 + (y - 1)i| = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2} \geq 1 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 1 \rightarrow$ Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z nằm bên ngoài hình tròn có tâm $I_1(-1;1)$, bán kính $R_1 = 1$.

$\square |z + 1 - i| = |x + 1 + (y - 1)i| = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2} \leq 2 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 4 \rightarrow$ Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z nằm bên trong hình tròn có tâm $I_2(-1;1)$, bán kính $R_2 = 2$.

Vì hai đường tròn đồng tâm nên chu vi P hình vành khăn là $P = C_2 - C_1 = 2\pi(R_2 - R_1) = 2\pi$.

Chọn C

Câu 73: (TTHT Lần 4) Phần gạch trong hình vẽ dưới là hình biểu diễn của tập các số phức thỏa mãn điều kiện nào sau đây?



A. $6 \leq |z| \leq 8$.

B. $2 \leq |z + 4 + 4i| \leq 4$.

C. $2 \leq |z - 4 - 4i| \leq 4$.

D. $4 \leq |z - 4 - 4i| \leq 16$.

Lời giải

Chọn C

Để thấy điểm $I(4;4)$ là tâm của hai đường tròn.

Đường tròn nhỏ có phương trình là: $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 4$.

Đường tròn to có phương trình là: $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức thỏa mãn đề bài là $2 \leq |z - 4 - 4i| \leq 4$.

Câu 74: (ĐOÀN THUỶNG-HẢI DƯƠNG LẦN 2 NĂM 2019) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy gọi hình (H) là tập hợp các điểm biểu diễn số phức

z thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} |z + 2 - i| \leq 2 \\ x + y + 1 \geq 0 \end{cases}$. Tính diện tích (S) của hình phẳng (H)

A. $S = 4\pi$.

B. $S = \frac{1}{4}\pi$.

C. $S = \frac{1}{2}\pi$.

D. $S = 2\pi$.

Lời giải

Chọn D

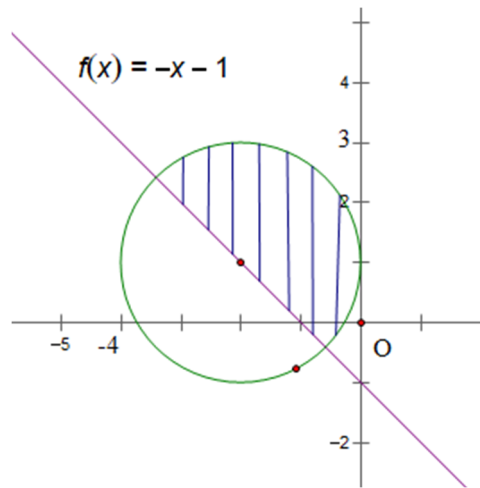
Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}; i^2 = -1$). Theo đề bài, ta có:

$$|z + 2 - i| \leq 2 \Leftrightarrow |x + yi + 2 - i| \leq 2 \Leftrightarrow |(x+2) + (y-1)i| \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 \leq 4. \text{ Đây là hình tròn tâm } I(-2;1), \text{ bán kính } R = 2.$$

Ta lại có, $x + y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -x - 1$. Đây là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng $y = -x - 1$ và chứa gốc tọa độ $O(0;0)$.

Vì đường thẳng $y = -x - 1$ đi qua tâm $I(-2;1)$ của hình tròn nên phần diện tích cần tính bằng một nửa diện tích của hình tròn.



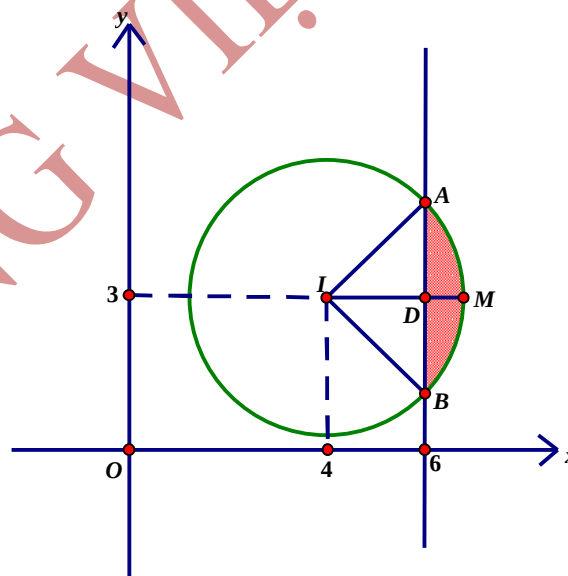
Diện tích của hình tròn là: $S = \pi.R^2 = \pi.2^2 = 4\pi$.

Diện tích cần tính là: $S_1 = \frac{1}{2}.S = \frac{1}{2}.4\pi = 2\pi$.

- Câu 75: (CHUYÊN SƯ PHẠM HÀ NỘI LẦN 4 NĂM 2019)** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi (H) là tập hợp các điểm biểu diễn hình học của số phức z thỏa mãn $\begin{cases} |z + \bar{z}| \geq 12 \\ |z - 4 - 3i| \leq 2\sqrt{2} \end{cases}$. Diện tích của hình phẳng (H) là
- A. $4\pi - 4$. B. $8\pi - 8$. C. $2\pi - 4$. D. $8\pi - 4$.

Lời giải

Chọn C



Cách 1:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ là điểm $M(x; y)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} |z + \bar{z}| \geq 12 \\ |z - 4 - 3i| \leq 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2x| \geq 12 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x \leq -6 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 \leq 8 \end{cases}$$

Hình phẳng (H) là hình tô đậm trên hình vẽ.

Ta có $IA = IB = 2\sqrt{2}$, $ID = 2$ và $AB = 2AD = 2\sqrt{IA^2 - ID^2} = 4$, suy ra $\widehat{AIB} = \frac{\pi}{2}$.

Gọi S_1 là diện tích hình quạt AIB . Ta có $S_1 = \frac{1}{4}\pi R^2 = 2\pi$.

Diện tích tam giác AIB là $S_2 = \frac{1}{2}IA \cdot IB = 4$.

Vậy diện tích hình phẳng (H) là $S_{(H)} = S_1 - S_2 = 2\pi - 4$.

Cách 2:

Hình phẳng (H) được biểu thị là phần tô màu trên hình vẽ (kể cả bờ), là hình giới hạn bởi đường tròn (C) có tâm $I(4;3)$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$ và đường thẳng $x = 6$.

Ta có $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 8 \Leftrightarrow (y-3)^2 = 8 - (x-4)^2 \Leftrightarrow y = 3 \pm \sqrt{8 - (x-4)^2}$.

(C) cắt đường thẳng $y = 3$ tại 2 điểm có tọa độ $(4 \pm 2\sqrt{2}; 3)$

Gọi S_0 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3 + \sqrt{8 - (x-4)^2}$, $y = 3$, $x = 6$, $x = 4 + 2\sqrt{2}$.

Ta có $S_{(H)} = 2.S_0 = 2 \cdot \int_6^{4+2\sqrt{2}} \left(\sqrt{8 - (x-4)^2} \right) dx \approx 2,2831$. Vậy ta chọn C.

TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN LÀ ĐƯỜNG CONIC

Câu 76: Trong mặt phẳng phức Oxy, giả sử M là điểm biểu diễn số phức Z thỏa mãn $|z+2| + |z-2| = 8$. Tập hợp những điểm M là?

A. $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$. **B.** $(E): \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$.

C. $(T): (x+2)^2 + (y-2)^2 = 64$.

D. $(T): (x+2)^2 + (y-2)^2 = 8$

Lời giải

Xét điểm $F_1(2;0)$ và $F_2(-2;0)$, ta có $MF_1 + MF_2 = 8 = 2a \Rightarrow a = 4$

$F_1F_2 = 4 = 2c \Rightarrow c = 2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 12 \Rightarrow$ Tập hợp điểm là Elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

Chọn A

Câu 77: (Sở Ninh Bình 2019 lần 2) Hình phẳng giới hạn bởi tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z-3| + |z+3| = 10$ có diện tích bằng

A. 12π .

B. 20π .

C. 15π .

D. 25π .

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

Gọi $A(3;0)$, $B(-3;0)$ lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức $z_1 = 3$ và $z_2 = -3$. Khi đó $AB = 6$.

$|z-3| + |z+3| = 10 \Leftrightarrow MA + MB = 10 > AB$.

Do đó quỹ tích của điểm M là đường Elip có bán trục lớn $a = 5$, nửa tiêu cự $c = 3$ và bán trục nhỏ là $b = 4$.

Vậy diện tích hình Elip là $S = \pi ab = 20\pi$.

Câu 78: (Chuyên KHTN) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - i| = 10$.

A. 15π .B. 12π .C. 20π .

D. Đáp án khác.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có: $|z + 2 - i| + |z - 4 - i| = 10 \Leftrightarrow |x + 2 + (y - 1)i| + |x - 4 + (y - 1)i| = 10$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 1)^2} + \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 1)^2} = 10 \quad (*)$$

Đặt $A(-2; 1), B(4; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{(4 + 2)^2 + 0^2} = 6$.

Khi đó phương trình (*) trở thành: $MA + MB = 10$.

Khi đó tập hợp những điểm M thỏa mãn phương trình (*) là một elip với.

+ Độ dài trục lớn $2a = 10 \Rightarrow a = \frac{10}{2} = 5$.

+ Tiêu cự $2c = AB = 6 \Rightarrow c = \frac{6}{2} = 3$.

+ Độ dài trục bé $2b$ với $b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow b = 4$.

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - i| = 10$ là diện tích Elip trên: $S = \pi ab = \pi 4.5 = 20\pi$.

Câu 79: Tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện $|z + 1| + |z - 1| = 4$ là:

A. $x^2 + y^2 = 4$

B. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$

C. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

D. $3x^2 + 4y^2 - 36 = 0$

Lời giải

Xét hai điểm: $F_1(-1; 0), F_2(1; 0)$, theo giả thiết ta có:

$$|z + 1| + |z - 1| = 4 \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 4, \forall M(z).$$

Vậy tập hợp điểm cần tìm là elip có các tiêu điểm $F_1(-1; 0), F_2(1; 0)$, nửa trục lớn $a = 2$, nửa

trục nhỏ $b = \sqrt{3}$. Phương trình elip $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

Chọn C

Câu 80: (Lương Thế Vinh Đồng Nai) Cho số phức z thỏa mãn $|z + 2| + |z - 2| = 4$. Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng tọa độ là

A. Một đường elip.

B. Một đường parabol.

C. Một đoạn thẳng.

D. Một đường tròn.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$.

Xét hai điểm $F_1(-2; 0), F_2(2; 0)$, khi đó theo giả thiết:

$$|z + 2| + |z - 2| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x + 2)^2 + y^2} + \sqrt{(x - 2)^2 + y^2} = 4 \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 4.$$

Mà $F_1F_2 = 4$, nên $MF_1 + MF_2 = F_1F_2$.

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn của z chính là đoạn thẳng F_1F_2 .

Câu 81: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2|+|z+2|=10$.

A. Đường tròn $(x-2)^2+(y+2)^2=100$.

B. Elip $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$.

C. Đường tròn $(x-2)^2+(y+2)^2=10$.

D. Elip $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Gọi A là điểm biểu diễn số phức 2

Gọi B là điểm biểu diễn số phức -2

Ta có: $|z+2|+|z-2|=10 \Leftrightarrow MB+MA=10$.

Ta có $AB=4$. Suy ra tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là Elip với 2 tiêu điểm là $A(2;0)$, $B(-2;0)$, tiêu cự $AB=4=2c$, độ dài trục lớn là $10=2a$, độ dài trục bé là

$$2b=2\sqrt{a^2-c^2}=2\sqrt{25-4}=2\sqrt{21}.$$

Vậy, tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2|+|z+2|=10$ là Elip

có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$.

Câu 82: Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z trong mặt phẳng phức, biết số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z+4|+|z-4|=10$.

A. Tập hợp các điểm cần tìm là đường tròn có tâm $O(0;0)$ và có bán kính $R=4$.

B. Tập hợp các điểm cần tìm là đường elip có phương trình $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$.

C. Tập hợp các điểm cần tìm là những điểm $M(x; y)$ trong mặt phẳng Oxy thỏa mãn phương trình $\sqrt{(x+4)^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+y^2}=12$.

D. Tập hợp các điểm cần tìm là đường elip có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi$.

Gọi $A(4;0)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = 4$.

Gọi $B(-4;0)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = -4$.

Khi đó: $|z+4|+|z-4|=10 \Leftrightarrow MA+MB=10$. (*)

Hệ thức trên chứng tỏ tập hợp các điểm M là elip nhận A, B là các tiêu điểm.

Gọi phương trình của elip là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, (a > b > 0, a^2 = b^2 + c^2)$

Từ (*) ta có: $2a=10 \Leftrightarrow a=5$.

$$AB=2c \Leftrightarrow 8=2c \Leftrightarrow c=4 \Rightarrow b^2=a^2-c^2=9$$

Vậy quỹ tích các điểm M là elip: $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

- Câu 83:** (THTT lần 5) Trong mặt phẳng Oxy, gọi (H) là hình biểu diễn tập hợp các số phức z thỏa mãn $|7z - \bar{z}| \leq 10$. Diện tích của hình (H) bằng
- A. $\frac{5\pi}{2}$. B. $\frac{25\pi}{12}$. C. $\frac{7\pi}{2}$. D. 5π .

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$. Từ: $|7z - \bar{z}| \leq 10$

$$\Rightarrow 36x^2 + 64y^2 \leq 100 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{100}{36}} + \frac{y^2}{\frac{100}{64}} \leq 1.$$

Do đó: (H) là hình Elip: $\frac{x^2}{\left(\frac{5}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{5}{4}\right)^2} = 1$ có trục lớn và trục bé lần lượt $2a = \frac{10}{3}; 2b = \frac{5}{2}$.

Theo công thức tính diện tích Elip ta có: $S = \pi ab = \pi \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{25\pi}{12}$ (đvdt).

- Câu 84:** Tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện $|z - 2| - |z + 2| = 3$ là:

- A. $x^2 - y^2 = 1$ B. $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 9$
 C. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ D. $\frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = 1$

Lời giải

Xét hai điểm $F_1(-2;0), F_2(2;0)$, theo giả thiết ta có:

$$|z - 2| - |z + 2| = 3 \Leftrightarrow MF_1 - MF_2 = 3, \forall M(z).$$

Vậy tập hợp các điểm cần tìm là hyperbol có các tiêu điểm $F_1(-2;0), F_2(2;0)$, nửa trục lớn

$$a = \frac{3}{2}, \text{ nửa trục nhỏ } b = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Phương trình của hyperbol } \frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = 1.$$

Chọn D

- Câu 85:** Gọi M và A là các điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số phức $z = x + yi; a = 10 + 6i$. Tìm tập hợp E_2 các điểm M sao cho tích $z(z - a)$ là một số thuần ảo.

- A. Đường tròn tâm $I(2 + \sqrt{2}; 0)$, bán kính $R = \sqrt{5 + 4\sqrt{2}}$
 B. Đường tròn tâm $I(0; 1)$, bán kính $R = 1$
 C. Là một hyperbol vuông góc có tâm đối xứng $I(-5; -3)$, có trục thực nằm trên trục Ox, độ dài các trục đều bằng 8.
 D. Là một hyperbol có tâm đối xứng $I(5; 3)$, có trục thực nằm trên trục Ox, độ dài các trục đều bằng 8.

Lời giải

Tích $z(z-a)$ là một số thuần ảo $\Leftrightarrow$ Phần thực bằng 0.

$$\Leftrightarrow x(x-10) - y(y-6) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 10x) - (y^2 - 6y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)^2 - (y-3)^2 = 16 \Leftrightarrow \frac{(x-5)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{16} = 1$$

Trong mặt phẳng phức, tập hợp E_2 là một hyperbol có tâm đối xứng $I(5;3)$, có trục thực nằm trên trục Ox , độ dài các trục đều bằng 8.

Chọn C

TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN LÀ ĐƯỜNG CONG

Câu 86: Trong mặt phẳng phức, cho số phức a bất kì, tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z sao cho: $z^2 - a^2 = \bar{z}^2 - \bar{a}^2$.

A. Đường tròn tâm A , bán kính $R = AO$

B. Đường tròn tâm A , bán kính $R = 2$

C. Một hyperbol vuông góc

D. Đường thẳng $x = 1$

Lời giải

$$\text{Ta có: } z^2 - a^2 = \bar{z}^2 - \bar{a}^2 \Leftrightarrow z^2 - \bar{z}^2 = a^2 - \bar{a}^2 \Leftrightarrow (z + \bar{z})(z - \bar{z}) = (a + \bar{a})(a - \bar{a}) \quad (2)$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} z = x + yi \\ a = \alpha + \beta i \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } (2) \Leftrightarrow 2x(2yi) = 2\alpha(2\beta i) \Leftrightarrow xy = \alpha\beta$$

Do đó, tập hợp các điểm M là một hyperbol vuông góc.

Chọn C

Câu 87: Gọi M và A là các điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số phức $z = x + yi; a = 10 + 6i$. Tìm tập hợp E_1 các điểm M sao cho tích $z(z-a)$ là một số thực.

A. Đường tròn tâm $I(2 + \sqrt{2}; 0)$, bán kính $R = \sqrt{5 + 4\sqrt{2}}$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R = 1$

C. Là một hyperbol vuông góc $y = \frac{3x}{x-5}, x \neq 5$

D. Là một hyperbol $y = \frac{3x}{x-5}, x \neq 5$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } z(z-a) &= (x+yi)(x+yi-10-6i) = (x+yi)[(x-10)+(y-6)i] \\ &= x(x-10) - y(y-6) + (2xy-10y-6x)i \end{aligned}$$

Tích $z(z-a)$ là một số thực.

$$\Leftrightarrow 2xy - 10y - 6x = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{x-5}, x \neq 5$$

Trong mặt phẳng phức, tập hợp E_1 là một hyperbol vuông góc có phương trình:

$$y = \frac{3x}{x-5}, x \neq 5.$$

Chọn C

Câu 88: Cho hai số phức: $p = a + bi; q = c + di$

Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z sao cho số $(z-p)(z-q)$ là số thực.

A. Đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

C. Một hyperbol vuông góc có tiệm cận là $x = \frac{a+c}{2}; y = \frac{b+d}{2}$

D. Các đường thẳng $y = 2x$, trừ gốc tọa độ $O(0;0)$

Lời giải

Đặt $z = x + yi; x, y \in \mathbb{R}$

Ta có: $z - p = x - a + (y - b)i$; $z - q = x - c + (y - d)i$

$$\Rightarrow (z - p)(z - q) = [x - a + (y - b)i][x - c + (y - d)i]$$

$$= (x - a)(x - c) - (y - b)(y - d) + [(x - a)(y - d) + (x - c)(y - b)]i$$

$(z - p)(z - q)$ là một số thực.

$$\Leftrightarrow (x - a)(x - c) - (y - b)(y - d) = 0$$

$$\Leftrightarrow [(x - a) + (x - c)]y = (x - a)d + (x - c)b$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{(b + d)x - (ad + bc)}{2x - (a + c)} \text{ với } x \neq \frac{a + c}{2}$$

Do đó ta có tập hợp các điểm M là một hyperbol vuông góc có tiệm cận là

$$x = \frac{a + c}{2}; y = \frac{b + d}{2}$$

Chọn C

Câu 89: (THPT ĐÔNG LƯƠNG 3 LẦN 2) Xét các số phức z thỏa mãn $\frac{z-1+i}{(z+\bar{z})i+1}$ là số thực. Tập hợp

các điểm biểu diễn của số phức $w = \frac{z}{2}$ là parabol có đỉnh

A. $I\left(\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

B. $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

C. $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

D. $I\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $w = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow z = 2w = 2x + 2yi \Rightarrow \frac{z-1+i}{(z+\bar{z})i+1} = \frac{(2x-1)+(2y+1)i}{1+4xi}$ là số thực

$$\Leftrightarrow [(2x-1)+(2y+1)i](1-4xi) \text{ là số thực } \Leftrightarrow -8x^2 + 4x + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 4x^2 - 2x - \frac{1}{2}$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn cho số phức w là parabol có đỉnh $I\left(\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

Câu 90: Cho số phức $z = m - 2 + (m^2 - 1)i$ với $m \in \mathbb{R}$. Gọi (C) là tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và Ox .

A. 1.

B. $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{32}{3}$.

D. $\frac{8}{3}$.

Lời giải

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ.

$$\text{Vì } z = m - 2 + (m^2 - 1)i \Rightarrow \begin{cases} x = m - 2 \\ y = m^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = x + 2 \\ y = m^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = x + 2 \\ y = (x + 2)^2 - 1 \end{cases}$$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức là đường cong (C) với $y = (x + 2)^2 - 1$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox ta có :

$$(x + 2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và Ox là $S = \int_{-3}^{-1} |(x + 2)^2 - 1| dx = \frac{4}{3}$.

Chọn B.

Câu 91: (Thuan-Thanh-Bac-Ninh) Cho số phức $z = m + 3 + (m^2 - 1)i$, với m là tham số thực thay đổi. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thuộc đường cong (C). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành.

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{8}{3}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Xét $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Mà } z = m + 3 + (m^2 - 1)i \Rightarrow \begin{cases} x = m + 3 \\ y = m^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = m \\ y = (x - 3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8 \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thuộc đường cong (C) : $y = x^2 - 6x + 8$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục Ox. $x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$

Diện tích giới hạn bởi (C) và trục hoành là:

$$S = \int_2^4 |x^2 - 6x + 8| dx = -\int_2^4 (x^2 - 6x + 8) dx = -\left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x\right)\Bigg|_2^4 = \frac{4}{3}$$

Câu 92: (KIM LIÊN HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho số phức $z = m + 3 + (m^2 - m - 6)i$ với $m \in \mathbb{R}$. Gọi (P) là tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và trục hoành bằng

A. $\frac{125}{6}$.

B. $\frac{17}{6}$.

C. 1.

D. $\frac{55}{6}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x; y)$ ($x; y \in \mathbb{R}$) là điểm biểu diễn số phức z . Từ bài ra ta có:

$$\begin{cases} x = m + 3 \\ y = m^2 - m - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = x - 3 \\ y = (x - 3)^2 - (x - 3) - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = x - 3 \\ y = x^2 - 7x + 6 \end{cases}$$

Vậy (P) là một Parabol có phương trình: $y = x^2 - 7x + 6$.

Hoành độ giao điểm của (P) và trục hoành là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và trục hoành bằng:

$$S = \int_1^6 |x^2 - 7x + 6| dx = \frac{125}{6} \text{ (đvdt)}.$$

Câu 93: (Đặng Thành Nam Đề 14) Cho số phức $z = m + (m^3 - m)i$, với m là tham số thực thay đổi. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là đường cong (C) . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành.

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$.

$$\text{Ta có: } z = m + (m^3 - m)i \Leftrightarrow x + yi = m + (m^3 - m)i \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ y = m^3 - m \end{cases} \Rightarrow y = x^3 - x.$$

Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là đường cong (C) có dạng: $y = x^3 - x$.

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm: } x^3 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Diện tích phẳng giới hạn bởi đường cong (C) và trục hoành:

$$S = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx - \int_0^1 (x^3 - x) dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN LIÊN QUAN ĐA GIÁC

Câu 94: Cho $z_1 = 1 + i; z_2 = -1 - i$. Tìm $z_3 \in \mathbb{C}$ sao cho các điểm biểu diễn z_1, z_2, z_3 tạo thành tam giác đều.

A. $z_3 = -\sqrt{2}(1 + i)$ và $z_3 = \sqrt{2}(1 - i)$

B. $z_3 = -\sqrt{3}(1 + i)$ và $z_3 = \sqrt{3}(1 - i)$

C. $z_3 = \sqrt{2}(1 + i)$ và $z_3 = -\sqrt{2}(1 - i)$

D. $z_3 = \sqrt{3}(1 + i)$ và $z_3 = -\sqrt{3}(1 - i)$

Lời giải

Để giải bài toán này ta cần chú ý đến kiến thức sau:

Giả sử $M_1(x_1; y_1)$ biểu diễn số phức $z_1 = x_1 + y_1 i$

Giả sử $M_2(x_2; y_2)$ biểu diễn số phức $z_2 = x_2 + y_2 i$

Khi đó khoảng cách giữa 2 điểm $M_1 M_2$ bằng mô đun của số phức $z_1 - z_2$.

$$\text{Vậy } M_1 M_2 = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Áp dụng vào bài toán: Giả sử $z_3 = x + yi$

Để các điểm biểu diễn của z_1, z_2, z_3 tạo thành một tam giác đều thì

$$\begin{cases} |z_1 - z_2| = |z_1 - z_3| \\ |z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4+4} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \\ \sqrt{4+4} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8 \\ x+y=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2y^2 = 6 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = \mp\sqrt{3}$$

Vậy có hai số phức thỏa mãn là: $z_3 = \sqrt{3}(1+i)$ và $z_3 = -\sqrt{3}(1-i)$

Chọn D

Câu 95: Gọi điểm A, B lần lượt biểu diễn các số phức $z_1; z_2; (z_1, z_2 \neq 0)$ trên mặt phẳng tọa độ (A, B, C và A', B', C' đều không thẳng hàng) và $z_1^2 + z_2^2 = z_1 \cdot z_2$. Với O là gốc tọa độ, khẳng định nào sau đây đúng?

A. Tam giác OAB đều.

B. Tam giác OAB vuông cân tại O .

C. Tam giác OAB vuông cân tại B .

D. Diện tích tam giác OAB không đổi.

Lời giải

Ta có: $z_1^2 + z_2^2 = z_1 \cdot z_2 \Rightarrow z_1^2 = z_1(z_2 - z_1); |z_1|^2 = |z_1| \cdot |z_2 - z_1|$. Do $z_1 \neq 0 \Rightarrow |z_2 - z_1| = \frac{|z_2|^2}{|z_1|}$; (1)

Mặt khác: $z_1^2 = z_2(z_1 - z_2) \Rightarrow |z_1|^2 = |z_2| \cdot |z_1 - z_2| \Leftrightarrow |z_1 - z_2| = \frac{|z_1|^2}{|z_2|}$ (do $z_2 \neq 0$) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{|z_2|^2}{|z_1|} = \frac{|z_1|^2}{|z_2|} \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$. Vậy ta có: $|z_1| = |z_2| = |z_2 - z_1| \Rightarrow OA = OB = AB$.

Chọn A

Câu 96: Gọi điểm A, B lần lượt biểu diễn các số phức z và $z' = \frac{1+i}{2}z; (z \neq 0)$ trên mặt phẳng tọa độ (A, B, C và A', B', C' đều không thẳng hàng). Với O là gốc tọa độ, khẳng định nào sau đây đúng?

A. Tam giác OAB đều.

B. Tam giác OAB vuông cân tại O .

C. Tam giác OAB vuông cân tại B .

D. Tam giác OAB vuông cân tại A .

Lời giải

Ta có: $OA = |z|; OB = |z'| = \left| \frac{1+i}{2} \cdot z \right| = \left| \frac{1+i}{2} \right| \cdot |z| = \frac{\sqrt{2}}{2} |z|$.

Ta có: $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \Rightarrow BA = \left| z - \frac{1+i}{2}z \right| = \left| \frac{1-i}{2} \right| \cdot |z| = \frac{\sqrt{2}}{2} |z|$.

Suy ra: $OA^2 = OB^2 + AB^2$ và $AB = OB \Rightarrow OAB$ là tam giác vuông cân tại B .

Chọn C

Câu 97: (**CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3**) Cho hai số phức z_1, z_2 khác 0, thỏa mãn $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$. M, N lần lượt là hai điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 trên mặt phẳng Oxy . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Tam giác OMN nhọn và không đều.

B. Tam giác OMN đều.

C. Tam giác OMN tù.

D. Tam giác OMN vuông.

Lời giải**Chọn B****Cách 1**

$$z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)^2 = -z_1 z_2$$

$$\Rightarrow |z_1 - z_2|^2 = |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow MN^2 = OM \cdot ON \quad (1)$$

Lại có:

$$z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2 \Leftrightarrow z_1^2 = z_2(z_1 - z_2)$$

$$\Rightarrow |z_1|^2 = |z_2| \cdot |z_1 - z_2| \Leftrightarrow OM^2 = ON \cdot MN \quad (2)$$

Tương tự ta có: $ON^2 = OM.MN$ (3)

Từ (2) và (3) ta có: $\frac{OM^2}{ON^2} = \frac{ON}{OM} \Leftrightarrow OM = ON$. (4)

Từ (1) và (4) ta có: $MN^2 = OM^2 \Leftrightarrow MN = OM$.

Từ đó suy ra: $OM = ON = MN$.

Vậy $\triangle OMN$ đều.

Cách 2

Ta có $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2 \Leftrightarrow z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2 = 0 \Leftrightarrow \left(z_1 - \frac{1}{2}z_2\right)^2 + \frac{3}{4}z_2^2 = 0$.

$$\Leftrightarrow \left(z_1 - \frac{1}{2}z_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}iz_2\right)\left(z_1 - \frac{1}{2}z_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}iz_2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_2 \\ z_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 - z_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_2 \\ z_1 - z_2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow |z_1 - z_2| = |z_2| \Leftrightarrow MN = ON \text{ . } (2)$$

$$\text{Cũng từ (1) ta suy ra } |z_1| = |z_2| \Leftrightarrow OM = ON \text{ . } (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra $\triangle OMN$ đều.

Cách 3 (Trắc nghiệm)

Chọn $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ và $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$.

Ta có $z_1^2 + z_2^2 = (1 + \sqrt{3}i)^2 + (-1 + \sqrt{3}i)^2 = 4$ và $z_1 z_2 = (1 + \sqrt{3}i)(-1 + \sqrt{3}i) = 4$

Suy ra $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$, nên hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Khi đó $M(1; \sqrt{3})$ và $N(-1; \sqrt{3})$, ta có $OM = ON = MN = 2$.

Vậy $\triangle OMN$ đều.

Câu 98: Xét 3 điểm A, B, C của mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn ba số phức phân biệt z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3|$. Nhận định nào sau đây đúng:

- A. Tam giác ABC đều
- B. O là tâm của tam giác ABC
- C. O là trọng tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC
- D. Trọng tâm của $\triangle ABC$ là điểm biểu diễn của số phức $z_1 + z_2 + z_3$

Lời giải

Từ điều kiện $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ chứng tỏ A, B, C nằm trên một đường tròn tâm O bán kính $R = |z_1|$.

Nếu ABC là tam giác đều thì tâm O là trọng tâm của tam giác ABC .

Theo tính chất trọng tâm ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ hay $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

Đảo lại, nếu $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, ta có:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = -(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = -\overrightarrow{OD}$$

Điểm D cũng nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC (vì $|\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OD}|$, $OADB$ là hình bình hành có $OA = OB = BD = DA$). Các tam giác OAD và OBD là các tam giác đều. Suy ra $\widehat{sdAB} = 120^\circ$.

Làm tương tự ta chứng minh được $\widehat{sdAC} = 120^\circ$.

Suy ra ΔABC đều.

Chọn A

Câu 99: Trong mặt phẳng phức cho các điểm O (gốc tọa độ), A biểu diễn số 1, B biểu diễn số phức z không thực, A' biểu diễn số phức $z' \neq 0$ và B' biểu diễn số phức zz' . Nhận định nào sau đây đúng?

A. Tam giác OAB đều

B. Hai tam giác $OAB, OA'B'$ là hai tam giác đồng dạng

C. O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác $AA'B'$

D. Trọng tâm của ΔOAB là điểm biểu diễn của số phức $z_1 + z_2 + z_3$

Lời giải

$$\text{Ta có } |z| = |\overrightarrow{OB}|, 1 = |\overrightarrow{OA}|, |z'| = |\overrightarrow{OA'}|, |zz'| = |z| \cdot |z'| = |\overrightarrow{OB'}|$$

$$\text{Ta có: } |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}| = |z - 1|$$

$$|\overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'}| = |zz' - z'| = |z'| \cdot |z - 1|$$

Từ trên ta suy ra

$$\frac{|z'|}{1} = \frac{|z'| \cdot |z|}{|z|} = \frac{|z'| \cdot |z - 1|}{|z - 1|} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB}$$

$$\Rightarrow \Delta OA'B' \sim \Delta OAB. \quad O A' x$$

Chọn B

Câu 100: Các điểm A, B, C và A', B', C' lần lượt biểu diễn các số phức z_1, z_2, z_3 và z'_1, z'_2, z'_3 trên mặt phẳng tọa độ (A, B, C và A', B', C' đều không thẳng hàng). Biết $z_1 + z_2 + z_3 = z'_1 + z'_2 + z'_3$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bằng nhau.

B. Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trục tâm.

C. Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

D. Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng tâm đường tròn ngoại tiếp.

Lời giải

$$\text{Gọi } z_1 = x_1 + y_1i; z_2 = x_2 + y_2i; z_3 = x_3 + y_3i; \quad (x'_k; y'_k \in \mathbb{R}; k = 1; 3).$$

Khi đó: $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2); C(x_3; y_3)$, gọi G là trọng tâm

$$\Delta ABC \Rightarrow G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right).$$

$$\text{Tương tự, gọi } z'_1 = x'_1 + y'_1i; z'_2 = x'_2 + y'_2i; z'_3 = x'_3 + y'_3i; \quad (x'_k; y'_k \in \mathbb{R}; k = 1; 3).$$

$$\text{Khi đó: } A'(x'_1; y'_1); B'(x'_2; y'_2); C'(x'_3; y'_3),$$

gọi G' là trọng tâm $\Delta A'B'C' \Rightarrow G' \left(\frac{x'_1 + x'_2 + x'_3}{3}, \frac{y'_1 + y'_2 + y'_3}{3} \right)$.

$$\begin{aligned} \text{Do } z_1 + z_2 + z_3 &= z'_1 + z'_2 + z'_3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3)i = (x'_1 + x'_2 + x'_3) + (y'_1 + y'_2 + y'_3)i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = x'_1 + x'_2 + x'_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 = y'_1 + y'_2 + y'_3 \end{cases} \Rightarrow G \equiv G'. \end{aligned}$$

Chọn C

Câu 101: (ĐỀ-THI-THU-ĐH-THPT-CHUYÊN-QUANG-TRUNG-L5-2019) Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại 4 số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 2$ và $z(\bar{z} + 2) - (z + \bar{z}) - m$ là số thuần ảo. Tổng các phần tử của S là.

A. $\sqrt{2} + 1$.

B. $\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}}$.

C. $\frac{3}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

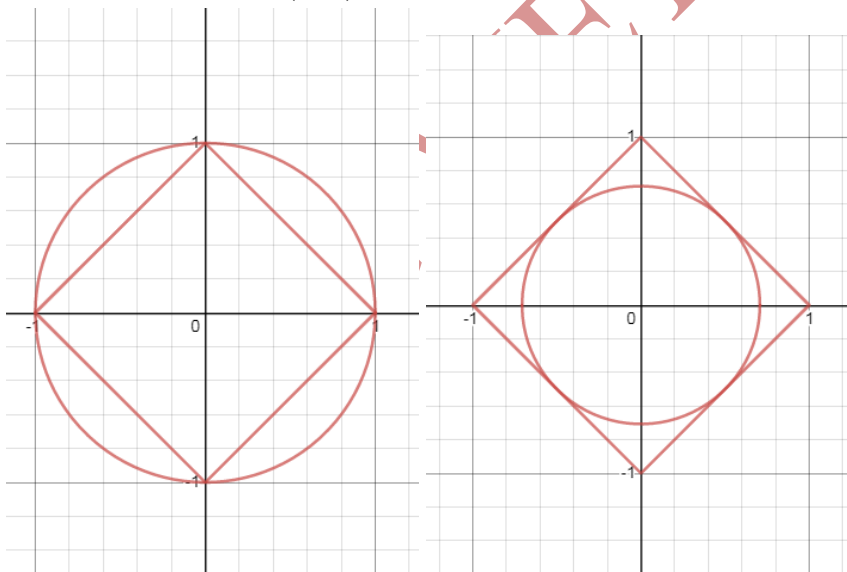
Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

$$|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 2 \Leftrightarrow |2x| + |2yi| = 2 \Leftrightarrow |x| + |y| = 1. \quad (1)$$

$$\text{Đặt } z' = z(\bar{z} + 2) - (z + \bar{z}) - m = |z|^2 + z - \bar{z} - m.$$

z' là số thuần ảo nên có phần thực bằng 0. Tức là: $x^2 + y^2 = m$. (2)

Tập hợp các điểm $M(x; y)$ thỏa mãn (1) là hình vuông tâm là gốc tọa



Để có 4 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời (1) và (2) thì (2) phải là một đường tròn nội tiếp hoặc ngoại tiếp hình vuông nói trên. Tức là $m > 0$ và $\sqrt{m} = 1$ hoặc $\sqrt{m} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = \frac{1}{2}$

Vậy tổng các phần tử của S là $\frac{3}{2}$.

Câu 102: (THANH CHƯƠNG 1 NGHỆ AN 2019 LẦN 3) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 4 + \bar{z}| + |z - \bar{z}| \geq 4$ và số phức $w = (z - 2i)(\bar{z} + 2 - 4i)$ có phần ảo là số thực không dương. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hình phẳng (H) là tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z . Diện tích hình (H) gần nhất với số nào sau đây?

A. 7.

B. 17.

C. 21.

D. 193.

Lời giải

Chọn C

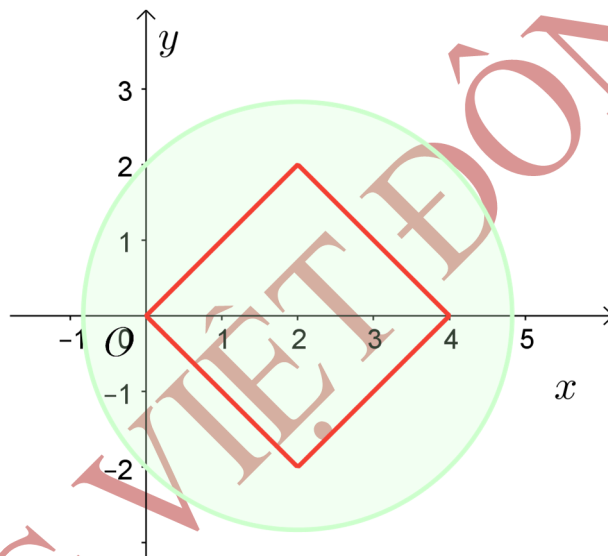
Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = x + iy$ ($x^2 + y^2 > 0$)Ta có: $|z - 4 + \bar{z}| + |z - \bar{z}| \geq 4 \Leftrightarrow |2x - 4| + |2y| \geq 4 \Leftrightarrow |x - 2| + |y| \geq 2$

$$* \quad w = (z - 2i)(\bar{z}i + 2 - 4i) = (x + (y - 2)i)((x - yi)i + 2 - 4i)$$

$$(x + (y - 2)i)(y + 2 + (x - 4)i) = x(y + 2) - (x - 4)(y - 2) + [x(x - 4) + y^2 - 4]i$$

Theo giả thiết, ta có: $x(x - 4) + y^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 4 \leq 0$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn của số phức z thỏa: $\begin{cases} |x - 2| + |y| \geq 2 \\ x^2 + y^2 - 4x - 4 \leq 0 \end{cases}$ có miền là hình vẽ dưới đây:



Hình phẳng (H) là phần không gian nằm bên ngoài hình vuông cạnh bằng 2 và nằm bên trong hình tròn (C) có tâm $I(2; 0)$ và bán kính $R = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$

Diện tích hình (H) là $S = \pi R^2 - 2^2 = \pi(2\sqrt{2})^2 - 4 = 8\pi - 4 \simeq 21.13$

Câu 103: Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = \sqrt{3}$, $|z_2| = 2$ được biểu diễn trong mặt phẳng phức lần lượt là

các điểm M, N . Biết $\angle(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \frac{\pi}{6}$, tính giá trị của biểu thức $\left| \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \right|$.

A. $\sqrt{13}$

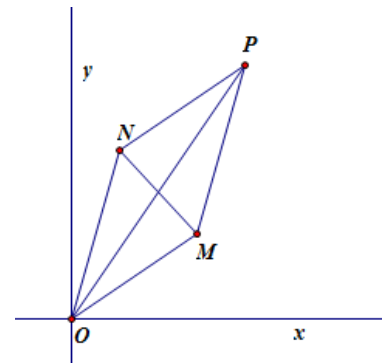
B. 1

C. $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{1}{\sqrt{13}}$

Lời giải

Dựng hình bình hành $OMPN$ trong mặt phẳng phức, khi đó biểu diễn của :

$$\begin{cases} |z_1 + z_2| = OP \\ |z_1 - z_2| = MN \Rightarrow \\ \begin{cases} |z_1 + z_2| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|\cos(150^\circ)} = 1 \\ |z_1 - z_2| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2|\cos(30^\circ)} = 1 \end{cases} \\ \Rightarrow \frac{|z_1 + z_2|}{|z_1 - z_2|} = \frac{|z_1 + z_2|}{|z_1 - z_2|} = 1. \end{cases}$$

**Chọn B**

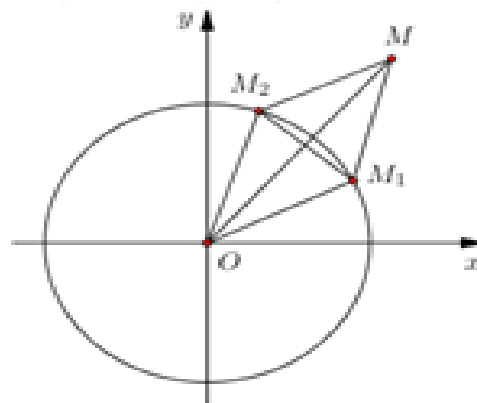
Câu 104: (THPT-Nguyễn-Công-Trứ-Hà-Tĩnh-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3) Cho z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn phương trình $|2z - i| = |2 + iz|$, biết $|z_1 - z_2| = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = |z_1 + z_2|$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. $\sqrt{2}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải**Chọn B**

Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) ta có $2z - i = 2x + (2y - 1)i$ và $2 + iz = 2 - y + xi$.

$$\text{Khi đó } |2z - i| = |2 + iz| \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + (2y - 1)^2} = \sqrt{(y - 2)^2 + x^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow \begin{cases} |z_1| = 1 \\ |z_2| = 1 \end{cases}$$

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 là đường tròn tâm O , bán kính $R = 1$.

Gọi $M_1(z_1), M_2(z_2) \Rightarrow OM_1 = OM_2 = 1$.

Ta có $|z_1 - z_2| = |\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}| = |\overrightarrow{M_2M_1}| = 1 \Rightarrow \Delta OM_1M_2$ là tam giác đều.

Mà $|z_1 + z_2| = |\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}| = |\overrightarrow{OM}| = OM$ với M là điểm thỏa mãn OM_1MM_2 là hình thoi cạnh bằng 1.

$$\Rightarrow OM = \sqrt{3} \Rightarrow P = \sqrt{3}.$$

Câu 105: (SỞ GD&ĐT KIÊN GIANG 2019) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 4, |z_2| = 6$ và

$$|z_1 + z_2| = 10. \text{ Giá trị của } \frac{|z_1 - z_2|}{2} \text{ là}$$

A. 1.

B. 0.

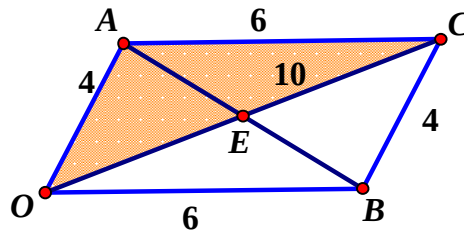
C. 2.

D. 3.

Lời giải**Chọn A**

Cách 1. Ta chọn luôn $z_1 = 4; z_2 = 6$ thì $|z_1 + z_2| = 10$. Khi đó, $\frac{|z_1 - z_2|}{2} = 1$.

Cách 2. Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn cho $z_1, z_2, z_1 + z_2$. Khi đó, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ nên $OACB$ là hình bình hành và $|z_1 - z_2| = AB$.



$\frac{|z_1 - z_2|}{2} = AE$ là đường trung tuyến của tam giác AOC nên

$$AE^2 = \frac{AO^2 + AC^2}{2} - \frac{OC^2}{4} = \frac{4^2 + 6^2}{2} - \frac{10^2}{4} = 1 \Rightarrow AE = 1.$$

Câu 106: Xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M và M' . Số phức $z(4 + 3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là N và N' . Biết rằng $MM'N'N$ là một hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z + 4i - 5|$.

A. $\frac{5}{\sqrt{34}}$.

B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

D. $\frac{4}{\sqrt{13}}$.

Lời giải

Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$

Khi đó số phức liên hợp của z là $\bar{z} = a - bi$ được biểu diễn bởi điểm $M'(a; -b)$

Ta có: $z(4 + 3i) = (a + bi)(4 + 3i) = 4a + 3ai + 4bi - 3b = (4a - 3b) + (3a + 4b)i$ do đó số phức $z(4 + 3i)$ được biểu diễn bởi điểm $N(4a - 3b; 3a + 4b)$

Khi đó điểm biểu diễn số phức liên hợp của số phức $z(4 + 3i)$ là $N'(4a - 3b; -3a - 4b)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{MM'} = (a - a; -b - b) \\ \overrightarrow{NN'} = (4a - 3b - 4a - 3b; -3a - 4b - 3a - 4b) \\ \overrightarrow{MN} = (4a - 3b - a; 3a + 4b - b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} = (0; -2b) \\ \overrightarrow{NN'} = (0; -6a - 8b) \\ \overrightarrow{MN} = (3a + 3b; 3a + 3b) \end{cases}$$

$$\text{Vì } MM'N'N \text{ là một hình chữ nhật nên ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b = -6a - 8b \\ a, b \neq 0 \\ -2b(3a + 3b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -b$$

$$\Rightarrow z = -b + bi \Rightarrow |z + 4i - 5| = |-b - 5 + (b + 4)i| = \sqrt{(-b - 5)^2 + (b + 4)^2} = \sqrt{2\left(b + \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

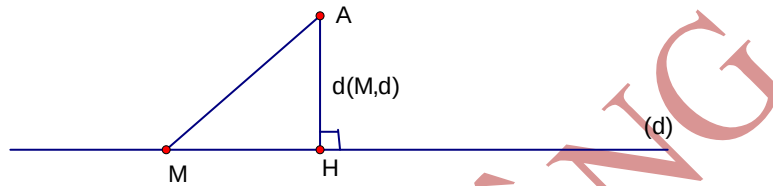
$$\text{Vậy } |z + 4i - 5|_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow b = -\frac{9}{2} \text{ hay } z = \frac{9}{2} - \frac{9}{2}i.$$

DẠNG 4: SỐ PHỨC CÓ MODUN NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT MODUN MIN, MAX CỦA SỐ PHỨC CÓ TẬP HỢP BIỂU DIỄN LÀ ĐƯỜNG ĐƯỜNG THẲNG

Bài toán 1:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm A và đường thẳng (d) . Điểm M chạy trên đường thẳng (d) sao cho độ dài đoạn AM nhỏ nhất. Khi đó hãy tìm vị trí điểm M và tính độ dài AM .

Phương pháp giải:



Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng (d) . Khi đó $AM \geq AH$, nên độ dài đoạn AM nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng (d) và $AM_{\min} = AH = d(M, d)$.

Câu 1. Cho số phức z có điểm biểu diễn nằm trên đường thẳng $(d): 3x - 4y - 3 = 0$. Tính giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. $\frac{1}{5}$.

B. $\frac{3}{5}$.

C. $\frac{4}{5}$.

D. $\frac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi M là điểm biểu diễn số phức $z \Rightarrow \min |z| = OM_{\min} = d(O; d) = \frac{3}{5}$

Câu 2. Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z + 2 - 2i| = |z - 4i|$, $w = iz + 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|w|$ là

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

B. 2.

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $A(-2; 2), B(0; 4)$ và M là điểm biểu diễn số phức z . Từ đề bài ta có: $MA = MB$, hay quỹ tích điểm M là đường trung trực đoạn $AB \Rightarrow$ Quỹ tích điểm M là đường thẳng $(d): x + y - 2 = 0$.

Mà $|w| = |iz + 1| = |i| \cdot \left| z + \frac{1}{i} \right| = |z - i| = IM$ với $I(0; 1) \Rightarrow \min |w| = d(I; d) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 3. Cho số phức z không phải số thuần ảo thỏa điều kiện $|z^2 + 4| = |z(z + 2i)|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z + i|$ bằng

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

$$|z^2 + 4| = |z(z + 2i)| \Rightarrow |z - 2i||z + 2i| = |z||z + 2i| \Rightarrow \begin{cases} |z - 2i| = |z| \\ z = 2i(l) \end{cases}$$

Câu 4. Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = |\bar{z} - 2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|\bar{z} + 7 - i|$ là

- A. $\frac{4\sqrt{10}}{5}$. B. 3. C. $\frac{3\sqrt{10}}{5}$. D. $\sqrt{10}$.

Lời giải

$$\begin{cases} |\bar{z} - 2i| = |\overline{z - 2i}| = |z + 2i| \\ |\bar{z} + 7 - i| = |\overline{z + 7 + i}| = |z + 7 + i| \end{cases}$$

Bài toán trở thành: Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = |z + 2i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z + 7 + i|$.

Câu 5. Trong các số phức thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$. Tìm môđun nhỏ nhất của số phức $z + 2i$.

- A. $\sqrt{5}$ B. $3\sqrt{5}$. C. $3\sqrt{2}$ D. $3 + \sqrt{2}$

Lời giải

Gọi $z = x + yi$; ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$).

Ta có: $|z - 2 - 4i| = |z - 2i| \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2} \Leftrightarrow x + y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 4 - x$.

Ta có: $|z + 2i|^2 = x^2 + (y+2)^2 = x^2 + (6-x)^2 = 2x^2 - 12x + 36 = 2(x-3)^2 + 18 \geq 18$
 $\Rightarrow |z + 2i|_{\min} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ khi $z = 3 + i$.

Chọn C

Câu 6. Trong các số phức z thỏa mãn: $|z - 3 + 4i| = |z|$ thì số phức z có modul nhỏ nhất là

- A. $z = \frac{11}{2} + i$. B. $z = \frac{3}{2} - 2i$. C. $z = -5 - \frac{5}{2}i$. D. $z = -3 + \frac{1}{6}i$

Lời giải

Ta có $|a + bi - 3 + 4i| = |a + bi| \Rightarrow (a-3)^2 + (b+4)^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 25 - 6a + 8b = 0 \Leftrightarrow a = \frac{8b+25}{6}$

$\Rightarrow |z|^2 = \left(\frac{8b+25}{6}\right)^2 + b^2 = \frac{25}{9}b^2 + \frac{100}{9}b + \frac{625}{36} = \left(\frac{5}{3}b + \frac{10}{3}\right)^2 + \frac{25}{4} \geq \frac{25}{4} \Rightarrow b = -2 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$.

Chọn B

Câu 7. Trong các số phức thỏa mãn điều kiện $|z + 3i| = |z + 2 - i|$. Tìm số phức có môđun nhỏ nhất?

- A. $z = 1 - 2i$. B. $z = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$. C. $z = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$. D. $z = -1 + 2i$.

Lời giải

Chọn C

Phương pháp tự luận

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} |z + 3i| &= |z + 2 - i| \Leftrightarrow |x + (y+3)i| = |(x+2) + (y-1)i| \Leftrightarrow x^2 + (y+3)^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2 \\ &\Leftrightarrow 6y + 9 = 4x + 4 - 2y + 1 \Leftrightarrow 4x - 8y - 4 = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2y + 1 \end{aligned}$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2y+1)^2 + y^2} = \sqrt{5y^2 + 4y + 1} = \sqrt{5\left(y + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}} \geq \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Suy ra $|z|_{\min} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ khi $y = -\frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{1}{5}$

Vậy $z = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$.

Phương pháp trắc nghiệm

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$|z + 3i| = |z + 2 - i| \Leftrightarrow |x + (y+3)i| = |(x+2) + (y-1)i| \Leftrightarrow x^2 + (y+3)^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 6y + 9 = 4x + 4 - 2y + 1 \Leftrightarrow 4x - 8y - 4 = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 1 = 0$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa điều kiện $|z + 3i| = |z + 2 - i|$ là đường thẳng $d: x - 2y - 1 = 0$.

Phương án A: $z = 1 - 2i$ có điểm biểu diễn $(1; -2) \notin d$ nên loại **A**.

Phương án B: $z = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ có điểm biểu diễn $\left(-\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right) \notin d$ nên loại **B**.

Phương án D: $z = -1 + 2i$ có điểm biểu diễn $(-1; 2) \notin d$ nên loại **B**.

Phương án C: $z = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$ có điểm biểu diễn $\left(\frac{1}{5}; -\frac{2}{5}\right) \in d$

Câu 8. Trong các số phức z thỏa mãn: $|z + 1 - 5i| = |z + 3 - i|$, biết rằng số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) có modul nhỏ nhất. Khi đó, tỉ số $\frac{a}{b}$ bằng

- A.** 3. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $P = -\sqrt{2}$

Lời giải

$$\text{Ta có } |a + bi + 1 - 5i| = |a - bi + 3 - i| \Rightarrow (a+1)^2 + (b-5)^2 = (a+3)^2 + (b+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 26 + 2a - 10b = 10 + 6a + 2b \Leftrightarrow 4a + 12b = 16 \Leftrightarrow a = 4 - 3b$$

$$\Rightarrow |z|^2 = (4 - 3b)^2 + b^2 = 10b^2 - 24b + 16 = \left(b\sqrt{10} - \frac{12}{\sqrt{10}}\right)^2 + \frac{8}{5} \Rightarrow b = \frac{6}{5} \Rightarrow a = \frac{2}{5}.$$

Chọn B

Câu 9. Trong mặt phẳng phức Oxy, các số phức z thỏa $|z + 2i - 1| = |z + i|$. Tìm số phức z được biểu diễn bởi điểm M sao cho MA ngắn nhất với $A(1, 3)$.

- A.** $3 + i$. **B.** $1 + 3i$. **C.** $2 - 3i$. **D.** $-2 + 3i$.

Lời giải

Gọi $M(x, y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

Gọi $E(1, -2)$ là điểm biểu diễn số phức $1 - 2i$

Gọi $F(0, -1)$ là điểm biểu diễn số phức $-i$

Ta có: $|z + 2i - 1| = |z + i| \Leftrightarrow ME = MF \Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường trung trực $EF: x - y - 2 = 0$.

Đề MA ngắn nhất khi $MA \perp EF$ tại $M \Leftrightarrow M(3, 1) \Rightarrow z = 3 + i$

Câu 10. (KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG) Cho tất cả các số phức $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z + 2i - 1| = |z + i|$. Biết z được biểu diễn bởi điểm M sao cho MA ngắn nhất với $A(1; 3)$. Tìm $P = 2x + 3y$.

A. 9.**B. 11.****C. -3.****D. 5.****Lời giải****Chọn A**

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có: $|z + 2i - 1| = |z + i|$

$$\Leftrightarrow |x + yi + 2i - 1| = |x + yi + i| \Leftrightarrow |(x-1) + (y+2)i| = |x + (y+1)i|$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = x^2 + (y+1)^2 \Leftrightarrow x - y - 2 = 0.$$

Dễ thấy tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường thẳng: $x - y - 2 = 0$

$$\Rightarrow M(x; x-2)$$

$$\overrightarrow{MA} = (x-1; x-5) \Rightarrow |\overrightarrow{MA}| = \sqrt{(x-1)^2 + (x-5)^2} = \sqrt{2x^2 - 12x + 26} = \sqrt{(x\sqrt{2} - 3\sqrt{2})^2 + 8} \geq 8$$

Suy ra: $MA_{\min} = 8$ khi $x\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 1$

$$\text{Vậy } P = 2x + 3y = 2.3 + 3.1 = 9$$

Câu 11. (Lê Quý Đôn Điện Biên Lần 3) Trong các số phức z thỏa mãn $|z - 1 + i| = |\bar{z} + 1 - 2i|$, số phức z có mô đun nhỏ nhất có phần ảo là

A. $\frac{3}{10}$.**B. $\frac{3}{5}$.****C. $-\frac{3}{5}$.****D. $-\frac{3}{10}$.****Lời giải****Chọn D**

Gọi $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm $M(x; y)$.

$$|z - 1 + i| = |\bar{z} + 1 - 2i| \Leftrightarrow |(x-1) + (y+1)i| = |(x+1) - (y+2)i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2} \Leftrightarrow 4x + 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = -2x - \frac{3}{2}.$$

Cách 1:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \left(-2x - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{5x^2 + 6x + \frac{9}{4}} = \sqrt{5\left(x + \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{9}{20}} \geq \frac{3\sqrt{5}}{10}, \forall x.$$

$$\text{Suy ra } \min |z| = \frac{3\sqrt{5}}{10} \text{ khi } x = -\frac{3}{5}; y = -\frac{3}{10}.$$

Vậy phần ảo của số phức z có mô đun nhỏ nhất là $-\frac{3}{10}$.

Cách 2:

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $d: 4x + 2y + 3 = 0$.

Ta có $|z| = OM$. $|z|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow OM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của O trên d .

Phương trình đường thẳng OM đi qua O và vuông góc với d là: $x - 2y = 0$.

Tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 4x + 2y + 3 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = -\frac{3}{10} \end{cases}$

$$\Rightarrow M\left(-\frac{3}{5}; -\frac{3}{10}\right). \text{ Hay } z = -\frac{3}{5} - \frac{3}{10}i.$$

Vậy phần ảo của số phức z có mô đun nhỏ nhất là $-\frac{3}{10}$.

Nhận xét: Ta có thể tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z như sau:

$$|z - 1 + i| = |\bar{z} + 1 - 2i| \Leftrightarrow |z - (1 - i)| = |z - (-1 - 2i)| \quad (*)$$

Gọi M biểu diễn số phức z , điểm $A(1; -1)$ biểu diễn số phức $1 - i$, điểm $B(-1; -2)$ biểu diễn số phức $-1 - 2i$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow MA = MB$. Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình $d: 4x + 2y + 3 = 0$.

Câu 12. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 2i| = |z - 1 - 2i|$. Gọi w là số phức thỏa mãn điều kiện $w = (1 + i)z + 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |w|$ là:

A. $P_{\min} = \frac{1}{5}$.

B. $P_{\min} = \frac{5}{\sqrt{34}}$.

C. $P_{\min} = \frac{5}{\sqrt{41}}$.

D. $P_{\min} = \frac{1}{3}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } |z + 2i| = |z - 1 - 2i| \Leftrightarrow |(1 + i)z - 2 + 2i| = |(1 + i)z + 1 - 3i|$$

$\Leftrightarrow |w - 4 + 2i| = |w - 1 - 3i|$. Gọi $A(4; -2); B(1; 3)$ và $M(w)$ suy ra $MA = MB$ nên tập hợp điểm M là trung trực của AB có PT là: $3x - 5y - 5 = 0 (d)$

$$\text{Ta có: } |w| = OM \Rightarrow OM_{\min} = d(O; d) = \frac{5}{\sqrt{34}}.$$

Chọn B

Câu 13. Xét số phức z thỏa mãn $|z + i + 1| = |\bar{z} - 4i + 2|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z - 2i + 1|$.

A. $\frac{98}{5}$.

B. $\frac{102}{5}$.

C. $\frac{7\sqrt{10}}{5}$.

D. $\frac{\sqrt{470}}{5}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } |a + bi + i + 1| = |a - bi - 4i + 2| \Rightarrow (a + 1)^2 + (b + 1)^2 = (a + 2)^2 + (b + 4)^2$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2a + 2b = 20 + 4a + 8b \Leftrightarrow 2a + 6b + 18 = 0 \Leftrightarrow a = -3b - 9.$$

$$\text{Khi đó } |z - 2i + 1|^2 = |a + bi - 2i + 1|^2 = (a + 1)^2 + (b - 2)^2 = (-3b - 8)^2 + (b - 2)^2$$

$$= 10b^2 + 44b + 68 = \left(b\sqrt{10} + \frac{22}{\sqrt{10}}\right)^2 + \frac{98}{5} \geq \frac{98}{5} \Rightarrow |z - 2i + 1| \geq \frac{7\sqrt{10}}{5}.$$

Chọn C

Câu 14. Cho số phức z thỏa $|z| = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\left|\frac{3 + 4i}{z - 5}\right|$.

Lời giải

$$\text{Đặt } A = \frac{3 + 4i}{z - 5} \Rightarrow z = \frac{3 + 5A + 4i}{A} \Rightarrow |z| = \left|\frac{3 + 5A + 4i}{A}\right| \Rightarrow \left|\frac{3 + 5A + 4i}{A}\right| = 5 \Rightarrow |3 + 5A + 4i| = 5|A|.$$

$$\text{Gọi } A = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \sqrt{(5x + 3)^2 + (5y + 4)^2} = 5\sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\Leftrightarrow 6x + 8y + 5 = 0.$$

Vậy tập hợp điểm của số phức $A \in (\Delta): 6x + 8y + 5 = 0$.

$$\Rightarrow \min |A| = d[O; (\Delta)] = \frac{1}{2}.$$

Câu 15. Cho số phức z thỏa $|z| = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\left| \frac{z+4i}{z-5} \right|$.

Lời giải

Đặt $A = \frac{z+4i}{z-5}$. Xét $A=1 \Rightarrow$ không có số phức z nào thỏa. Vậy $A \neq 1$

$$\Rightarrow z = \frac{5A+4i}{A-1} \Rightarrow |z| = \left| \frac{5A+4i}{A-1} \right| \Rightarrow \left| \frac{5A+4i}{A-1} \right| = 5 \Rightarrow |5A+4i| = 5|A-1|.$$

$$\text{Gọi } A = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \sqrt{(5x)^2 + (5y+4)^2} = 5\sqrt{(x-1)^2 + y^2}.$$

$$\Leftrightarrow 50x + 40y - 9 = 0.$$

Vậy tập hợp điểm của số phức $A \in (\Delta): 50x + 40y - 9 = 0$.

$$\Rightarrow \min |A| = d[O; (\Delta)] = \frac{9}{10\sqrt{41}}.$$

Câu 16. Cho số phức $z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R}; a, b \geq 0)$. Đặt đa thức $f(x) = ax^2 + bx - 2$. Biết $f(-1) \leq 0$, $f\left(\frac{1}{4}\right) \leq -\frac{5}{4}$. Tính giá trị lớn nhất của $|z|$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(-1) \leq 0 \Leftrightarrow a - b - 2 \leq 0 \Leftrightarrow b \geq a - 2$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) \leq -\frac{5}{4} \Rightarrow \frac{a}{16} + \frac{b}{4} - 2 \leq -\frac{5}{4} \Leftrightarrow b \leq 3 - \frac{a}{4}.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng Oxy là một miền kín được giới hạn bởi các đường thẳng sau:

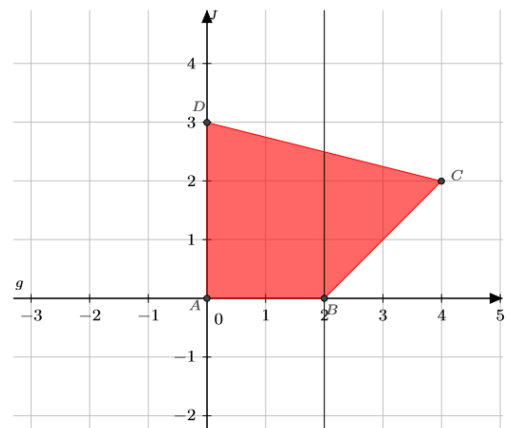
$$x = 0; y = 0; y = x - 2; y = -\frac{x}{4} + 3.$$

Gọi M là điểm biểu diễn số phức $z \Rightarrow \max |z| = \max OM$.

$\Rightarrow M$ là 1 trong các đỉnh sau

$$A(0;0), B(2;0), C(2;4), D(0;3).$$

$$\Rightarrow \max Om = OC = 2\sqrt{5}.$$



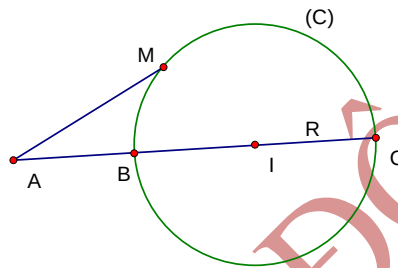
MODUN MIN, MAX CỦA SỐ PHỨC CÓ TẬP HỢP BIỂU DIỄN LÀ ĐƯỜNG TRÒN, HÌNH TRÒN**Bài toán 2**

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm A và đường tròn (C) có tâm I bán kính R . Điểm M thay đổi trên đường tròn (C) . Xác định vị trí điểm M để độ dài đoạn AM đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất và tính các giá trị này.

Phương pháp giải:

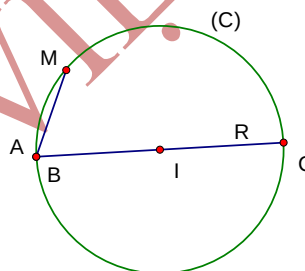
Ta xét ba trường hợp

□ Trường hợp 1: điểm A nằm ở miền ngoài đường tròn (C)



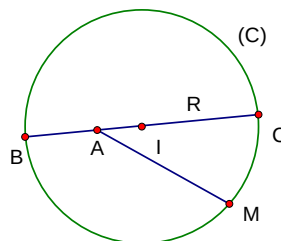
$$AM_{\min} = AB = AI - R \text{ và } AM_{\max} = AC = AI + R$$

□ Trường hợp 2: điểm A nằm ở trên đường tròn (C)



$$AM_{\min} = 0 \text{ và } AM_{\max} = AC = 2R$$

□ Trường hợp 3: điểm A nằm ở miền trong đường tròn (C)



$$AM_{\min} = AB = R - AI \text{ và } AM_{\max} = AC = AI + R$$

Câu 17. Cho số phức z có $|z| = 2$ thì số phức $w = z + 3i$ có modun nhỏ nhất và lớn nhất lần lượt là
#A. 2 và 5. **B.** 1 và 6. **C.** 2 và 6. **D.** 1 và 5.

Lời giải

□ **Gợi ý:** Gọi M là điểm biểu diễn số phức z . Vì $|z| = 2$ nên quỹ tích điểm M là đường tròn (C) tâm O bán kính $R = 2$. Đặt $A(0; -3)$ thì $|w| = |z + 3i| = AM$. Dễ thấy điểm A nằm ngoài đường tròn (C) nên $|w|_{\min} = AM_{\min} = AO - R = 1$ và $|w|_{\max} = AM_{\max} = AO + R = 5$.

Câu 18. Cho số phức z thỏa $|z - 3 + 4i| = 2$ và $w = 2z + 1 - i$. Khi đó $|w|$ có giá trị lớn nhất là:

- A. $16 + \sqrt{74}$. B. $2 + \sqrt{130}$. C. $4 + \sqrt{74}$. D. $4 + \sqrt{130}$.

Lời giải

□ **Gợi ý:** Gọi M là điểm biểu diễn số phức z . Vì $|z - 3 + 4i| = 2$ nên quỹ tích điểm M là đường tròn (C) tâm $I(3; -4)$ bán kính $R = 2$. Đặt $A(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ thì $|w| = |2z + 1 - i| = 2|z + \frac{1}{2} - \frac{i}{2}| = 2AM$. Dễ thấy điểm A nằm ngoài đường tròn (C) nên $|w|_{\max} = 2AM_{\max} = 2(AI + R) = 4 + \sqrt{130}$.

Câu 19. Cho số phức z , tìm giá trị lớn nhất của $|z|$ biết rằng z thỏa mãn điều kiện $\left| \frac{-2-3i}{3-2i}z + 1 \right| = 1$

- #A. 3. B. 2. C. 1. D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

□ **Gợi ý:** Gọi M là điểm biểu diễn số phức $z \Rightarrow |z| = OM$. Theo bài ra :
 $\left| \frac{-2-3i}{3-2i}z + 1 \right| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{-2-3i}{3-2i} \left(z + \frac{3-2i}{-2-3i} \right) \right| = 1 \Leftrightarrow |z + i| = 1$ nên quỹ tích điểm M là đường tròn (C) tâm $I(0; -1)$ bán kính $R = 1$. Dễ thấy điểm O nằm trên đường tròn (C) nên $|z|_{\max} = 2R = 2$.

Câu 20. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3| = 2|z|$ và $\min \left| z + \frac{3}{2} + 2i \right| = a + b\sqrt{2}$. Tính $a + b$.

- A. 1. B. $2\sqrt{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

□ **Gợi ý:** Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Từ $|z - 3| = 2|z| \Rightarrow (x - 3)^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2) \Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 9 = 0 \Rightarrow (x + 3)^2 + y^2 = 18 \Rightarrow |z + 3| = 3\sqrt{2}$. Gọi M là điểm biểu diễn số phức z thì quỹ tích M là đường tròn tâm $I(-3; 0)$, bán kính $R = 3\sqrt{2}$. Đặt $A(-\frac{3}{2}; -2)$ thì $\left| z + \frac{3}{2} + 2i \right| = AM$. Dễ thấy điểm A nằm ở miền trong đường tròn (C) nên $AM_{\min} = R - AI = -\frac{5}{2} + 3\sqrt{2} \Rightarrow a + b = \frac{1}{2}$.

- Câu 21.** Cho số phức z thỏa mãn $|z + 2 - 2i| = 1$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ lần lượt là
A. $2\sqrt{2} + 1; 2\sqrt{2} - 1$. **B.** $\sqrt{2} + 1; \sqrt{2} - 1$. **C.** $2; 1$. **D.** $\sqrt{3} + 1; \sqrt{3} - 1$

Lời giải

Ta có $|z + 2 - 2i| + |-z| \geq |z + 2 - 2i - z| = 2\sqrt{2} \Rightarrow |z| \geq 2\sqrt{2} - 1$.

Lại có $|z + 2 - 2i| + |2i - 2| \geq |z + 2 - 2i + 2i - 2| = |z| \Rightarrow |z| \leq 1 + 2\sqrt{2}$.

Chọn A

- Câu 22.** Cho số phức z thỏa mãn $|z + 1 + 2i| = 4\sqrt{5}$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ lần lượt là
A. $\sqrt{5}$. **B.** $3\sqrt{5}$. **C.** $5\sqrt{5}$. **D.** $5\sqrt{3}$

Lời giải

Ta có $4\sqrt{5} = |z + 1 + 2i| \leq |z| + |1 + 2i| = |z| + \sqrt{5} \Rightarrow |z| \geq 3\sqrt{5}$.

Chọn B

- Câu 23.** Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 2$. Tìm môđun lớn nhất của số phức z .
A. $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$. **B.** $\sqrt{11 + 4\sqrt{5}}$ **C.** $\sqrt{6 + 4\sqrt{5}}$ **D.** $\sqrt{5 + 6\sqrt{5}}$

Lời giải

Gọi $z = x + yi$; ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$). Ta có: $|z - 1 + 2i| = 2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$.

Đặt $x = 1 + 2\sin t$; $y = -2 + 2\cos t$; $t \in [0; 2\pi]$.

Lúc

$$|z|^2 = (1 + 2\sin t)^2 + (-2 + 2\cos t)^2 = 9 + (4\sin t - 8\cos t) = 9 + \sqrt{4^2 + 8^2} \sin(t + \alpha); (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow |z|^2 = 9 + 4\sqrt{5} \sin(t + \alpha) \Rightarrow z \in \left[-\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}; \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} \right]$$

$$\Rightarrow z_{\max} = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} \text{ đạt được khi } z = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} + \frac{-10 + 4\sqrt{5}}{5}i.$$

Chọn A.

- Câu 24.** Cho số phức z thỏa mãn $|z - 4i - 2| = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.
A. 1 **B.** 3 **C.** 7 **D.** 8

Lời giải

Giả sử $z = a + bi$, ta có: $|a + bi - 3 + 4i| = 4 \Rightarrow (a - 3)^2 + (b + 4)^2 = 16$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a - 3 = 4\sin \varphi \\ b + 4 = 4\cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 + 4\sin \varphi \\ b = 4\cos \varphi - 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |z|^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16\sin^2 \varphi + 24\sin \varphi + 16 - 32\cos \varphi$$

$$= 41 + 24\sin \varphi - 32\cos \varphi = 41 + 40\left(\frac{3}{5}\sin \varphi - \frac{4}{5}\cos \varphi\right)$$

$$\text{Đặt } \cos \varphi = \frac{3}{5}, \sin \varphi = \frac{4}{5} \Rightarrow |z|^2 = a^2 + b^2 = 41 + 40\sin(\varphi - \alpha) \geq 1.$$

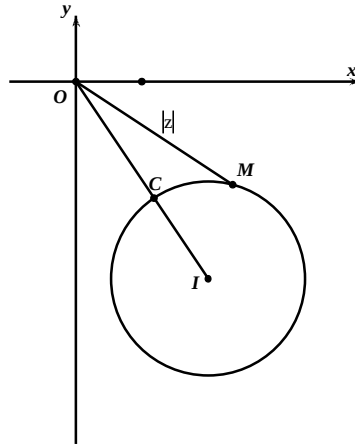
$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \varphi - \alpha = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} + \alpha + k2\pi.$$

Vậy $\min |z| = 1$.

Chọn A

- Câu 25.** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 + 3i| = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$
A. $\sqrt{13} - 3$. **B.** 2. **C.** $\sqrt{13} - 2$. **D.** 2

Lời giải



Các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - 2 + 3i| = 3$ nằm trên đường tròn (C) tâm $I(2; -3)$ và bán kính $R = 3$.

(Ý nghĩa hình học của $|z|$: độ dài OM)

Ta có $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ điểm $M \in (C)$ và OM nhỏ nhất.

(Bài toán hình học giải tích quen thuộc)

Ta có: $OM \geq OI - IM = OI - R = \sqrt{13} - 3$.

Dấu « = » xảy ra khi M là giao điểm của (C) và đoạn thẳng OI .

Vậy GTNN của $|z|$ là: $\sqrt{13} - 3$.

Chọn A

Câu 26. Cho số phức z thỏa mãn $|(1+i)z + 1 - 7i| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$

A. $\max |z| = 4$.

B. $\max |z| = 3$.

C. $\max |z| = 7$.

D. $\max |z| = 6$

Lời giải

$$\text{Đặt } w = (1+i)z + 1 - 7i \Rightarrow z = \frac{w - (1-7i)}{1+i}$$

Ta có: $|w| = \sqrt{2}$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm I là điểm biểu diễn số phức $\frac{0 - (1-7i)}{1+i} = 3 + 4i$, tức là $I(3; 4)$. Bán kính $r = \frac{\sqrt{2}}{|1+i|} = 1$

Vậy $\max |z| = OI + r = 6$

Câu 27. Cho số phức z thỏa $|z - 3 - 4i| = 2$ và $P = |z + 2 - i|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của P . Tính $A = M + m$.

Lời giải

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có: $|z - 3 - 4i| = 2 \Leftrightarrow (a-3)^2 + (b-4)^2 = 4$.

Vậy tập hợp điểm $M \in (C): (a-3)^2 + (b-4)^2 = 4$ có tâm $I(3; 4)$ và bán kính $R = 2$

Trong mặt phẳng phức xét $A(-2; 1)$, ta có: $P = |z + 2 - i| = MA$ với

$M \in (C): (a-3)^2 + (b-4)^2 = 4$.

$$\text{Vậy: } \begin{cases} MA_{\min} = |AI - R| = \sqrt{34} - 2 \\ MA_{\max} = AI + R = \sqrt{34} + 2 \end{cases}$$

Câu 28. (Nguyễn Trãi Hải Dương Lần1) Xét các số phức z thỏa mãn $|z-1-3i|=2$. Số phức z mà $|z-1|$ nhỏ nhất là

A. $z=1+5i$.

B. $z=1+i$.

C. $z=1+3i$.

D. $z=1-i$.

Lời giải

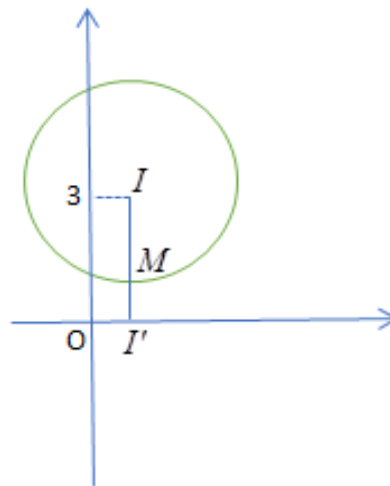
Chọn B

Gọi $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức z .

Theo bài ra ta có $|z-1-3i|=2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$.

Suy ra tập hợp điểm M là đường tròn tâm $I(1; 3)$ bán kính $R=2$.

Khi đó $|z-1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = I'M$ với $I'(1; 0)$.



$|z-1|$ nhỏ nhất khi $I'M$ ngắn nhất hay I, M, I' thẳng hàng, M nằm giữa I và I' .

Phương trình đường thẳng II' là $x=1$.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng II' với đường tròn tâm I bán kính $R=2$ là $M_1(1; 1)$ và $M_2(1; 5)$.

Thử lại ta thấy $M_1(1; 1)$ thỏa mãn. Vậy $z=1+i$.

Câu 29. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=3$. Tìm môđun lớn nhất của số phức $z-2i$.

A. $\sqrt{26+6\sqrt{17}}$.

B. $\sqrt{26-6\sqrt{17}}$.

C. $\sqrt{26+8\sqrt{17}}$.

D. $\sqrt{26-4\sqrt{17}}$.

Lời giải

Gọi $z = x + yi$; ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow z - 2i = x + (y-2)i$. Ta có:

$$|z-1+2i|=9 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9.$$

$$\text{Đặt } x=1+3\sin t; y=-2+3\cos t; t \in [0; 2\pi].$$

$$\Rightarrow |z-2i|^2 = (1+3\sin t)^2 + (-4+3\cos t)^2 = 26+6(\sin t-4\cos t) = 26+6\sqrt{17}\sin(t+\alpha); (\alpha \in \mathbb{R}).$$

$$\Rightarrow \sqrt{26-6\sqrt{17}} \leq |z-2i| \leq \sqrt{26+6\sqrt{17}} \Rightarrow |z-2i|_{\max} = \sqrt{26+6\sqrt{17}}.$$

Chọn A

Câu 30. Cho số phức z thỏa mãn $|(1-i)z-6-2i|=\sqrt{10}$. Tìm môđun lớn nhất của số phức z .

A. $4\sqrt{5}$

B. $3\sqrt{5}$.

C. 3.

D. $3+\sqrt{5}$

Lời giải

Gọi $z = x + yi$; ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có: } |(1-i)z - 6 - 2i| = \sqrt{10} \Leftrightarrow |(1-i)| \cdot \left| z + \frac{-6-2i}{1-i} \right| = \sqrt{10} \Leftrightarrow |z - 2 - 4i|$$

$$= \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 = 5.$$

$$\text{Đặt } x = 2 + \sqrt{5} \sin t; y = 4 + \sqrt{5} \cos t; t \in [0; 2\pi].$$

Lúc đó:

$$|z|^2 = (2 + \sqrt{5} \sin t)^2 + (4 + \sqrt{5} \cos t)^2 = 25 + (4\sqrt{5} \sin t + 8\sqrt{5} \cos t)$$

$$= 25 + \sqrt{(4\sqrt{5})^2 + (8\sqrt{5})^2} \sin(t + \alpha); (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow |z|^2 = 25 + 20 \sin(t + \alpha) \Rightarrow z \in [\sqrt{5}; 3\sqrt{5}]$$

$$\Rightarrow z_{\max} = 3\sqrt{5} \text{ đạt được khi } z = 3 + 6i.$$

Chọn B.

Câu 31. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 4i| = 2$. Gọi A và B lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$. Tính giá trị của biểu thức $P = A^2 - 2B$.

A. $P = 43$.

B. $P = 80$.

C. $P = 8$.

D. $P = 48$

Lời giải

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(3; -4)$ bán kính $R = 2$

$$\text{Khi đó } A = |z|_{\max} = OI + R = 5 + 2 = 7; B = |z|_{\min} = |OI - R| = 3$$

Suy ra $P = 43$.

Chọn A.

Câu 32. Trong các số phức z thỏa $|z + 3 + 4i| = 2$, gọi z_0 là số phức có mô đun nhỏ nhất. Khi đó

A. Không tồn tại số phức z_0 .

B. $|z_0| = 2$.

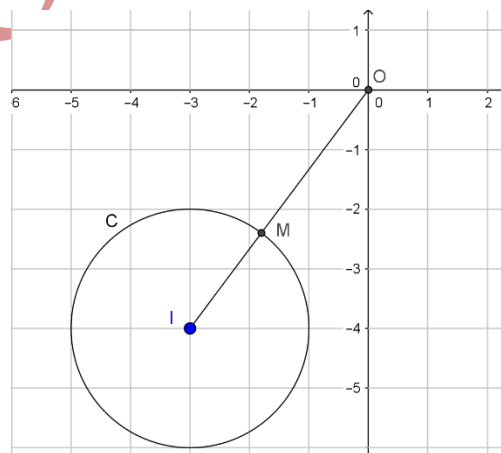
C. $|z_0| = 7$.

D. $|z_0| = 3$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:



$$\text{Đặt } z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R}). \text{ Khi đó } |z + 3 + 4i| = 2 \Leftrightarrow (a+3)^2 + (b+4)^2 = 4.$$

Suy ra biểu diễn hình học của số phức z là đường tròn (C) tâm $I(-3; -4)$ và bán kính $R = 5$.

Gọi $M(z)$ là điểm biểu diễn số phức z . Ta có: $M(z) \in (C)$.

$$|z| = OM \geq OI - R = 3.$$

Vậy $|z|$ bé nhất bằng 3 khi $M(z) = (C) \cap IM$.

Cách 2:

$$\text{Đặt } \begin{cases} a+3=2\cos\varphi \\ b+4=2\sin\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3+2\cos\varphi \\ b=-4+2\sin\varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(2\cos\varphi - 3)^2 + (2\sin\varphi - 4)^2} = \sqrt{29 - 12\cos\varphi - 16\sin\varphi}$$

$$= \sqrt{29 - 20\left(\frac{3}{5}\cos\varphi + \frac{4}{5}\sin\varphi\right)} = \sqrt{29 - 20\cos(\alpha - \varphi)} \geq \sqrt{9}$$

$$\Rightarrow |z_0| = 3$$

Câu 33. Trong tất cả các số phức z thỏa mãn $\left|\frac{(1+i)z}{1-i} + 2\right| = 1$ hãy tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

A. $|z|_{\min} = 1.$

B. $|z|_{\min} = 2 - \sqrt{2}.$

C. $|z|_{\min} = 0.$

D. $|z|_{\min} = 2$

Lời giải

$$\left|\frac{(1+i)z}{1-i} + 2\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1+i}{1-i}\right| \left|z + \frac{2(1-i)}{1+i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z - 2i| = 1$$

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(0; 2)$ bán kính $R = 1$

Ta có: $|z|_{\min} = |OI - R| = 1.$

Chọn A

Câu 34. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5}$ và $w = z + 1 + i$ có môđun lớn nhất. Số phức z có môđun bằng:

A. $2\sqrt{5}.$

B. $3\sqrt{2}.$

C. $\sqrt{6}.$

D. $5\sqrt{2}.$

Lời giải

Chọn B

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow z - 1 + 2i = (x - 1) + (y + 2)i$

Ta có: $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 2)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$

Suy ra tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z thuộc đường tròn (C) tâm $I(1; -2)$ bán kính $R = \sqrt{5}$ như hình vẽ:

Dễ thấy $O \in (C)$, $N(-1; -1) \in (C)$

Theo đề ta có:

$M(x; y) \in (C)$ là điểm biểu diễn cho số phức z thỏa mãn:

$$w = z + 1 + i = x + yi + 1 + i = (x + 1) + (y + 1)i \Rightarrow |z + 1 + i| = \sqrt{(x + 1)^2 + (y + 1)^2} = |\overrightarrow{MN}|$$

Suy ra $|z + 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow MN$ lớn nhất

Mà $M, N \in (C)$ nên MN lớn nhất khi MN là đường kính đường tròn (C)

$$\Leftrightarrow I \text{ là trung điểm } MN \Rightarrow M(3; -3) \Rightarrow z = 3 - 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 3i| = 1$. Giá trị lớn nhất của $|\bar{z} + 1 + i|$ là:

A. $\sqrt{13} + 2.$

B. 4.

C. 6.

D. $\sqrt{13} + 1$

Lời giải

Ta có:

$$|z - 2 - 3i| = 1 \Leftrightarrow |\overline{z - 2 - 3i}| = 1 \Leftrightarrow |\bar{z} - \overline{2 - 3i}| = 1 \Leftrightarrow |\bar{z} - (2 - 3i)| = 1$$

Đặt $w = \bar{z} + 1 + i$

Tập hợp điểm biểu diễn w là đường tròn tâm I , tâm I là điểm biểu diễn của số phức $2-3i+1+i=3-2i$, tức là $I(3;-2)$, bán kính $r=1$

$$\text{Vậy } |w|_{\max} = OI + r = \sqrt{3^2 + (-2)^2} + 1 = \sqrt{13} + 1$$

Chọn D

Câu 36. (Sở Vĩnh Phúc) Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-3i|=1$. Giá trị lớn nhất của $|\bar{z}+1+i|$ là

A. 4

B. 6

C. $\sqrt{13}+1$.

D. $\sqrt{13}+2$.

Lời giải

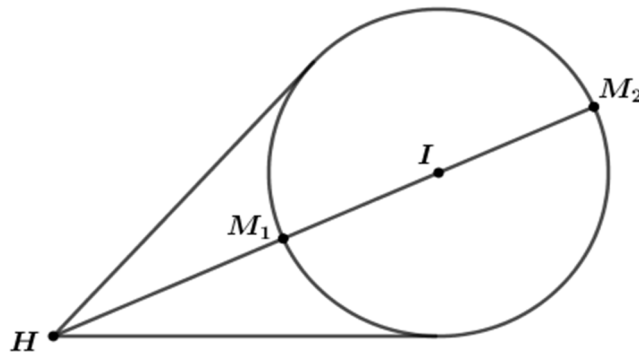
Chọn C

Cách 1:

Gọi $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$

Ta có $z - 2 - 3i = x + yi - 2 - 3i = x - 2 + (y - 3)i$.

Theo giả thiết $|z - 2 - 3i| = 1 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ nên điểm M biểu diễn cho số phức z nằm trên đường tròn (C) tâm $I(2;3)$, bán kính $R=1$



$$|\bar{z} + 1 + i| = |x - yi + 1 + i| = |x + 1 + (1 - y)i| = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2}.$$

Gọi $M(x; y)$ và $H(-1;1)$ thì $HM = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2}$.

Do M chạy trên đường tròn (C) , H cố định và H nằm ngoài đường tròn (C) nên MH lớn nhất khi M là giao của HI với đường tròn (C) sao cho I nằm giữa H và M .

$$\text{Phương trình } HI: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$$

Giao của HI với đường tròn ứng với t thỏa mãn: $9t^2 + 4t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{13}}$

$$\text{Suy ra } M\left(2 + \frac{3}{\sqrt{13}}; 3 + \frac{2}{\sqrt{13}}\right), M\left(2 - \frac{3}{\sqrt{13}}; 3 - \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$$

Với $M\left(2 + \frac{3}{\sqrt{13}}; 3 + \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$, ta có $MH = \sqrt{13} + 1$

Với $M\left(2 - \frac{3}{\sqrt{13}}; 3 - \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$, ta có $MH \approx 1,92$. Vậy GTLN của $|\bar{z} + 1 + i| = \sqrt{13} + 1$.

Cách 2:

Gọi $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$

Ta có $z - 2 - 3i = x + yi - 2 - 3i = x - 2 + (y - 3)i$.

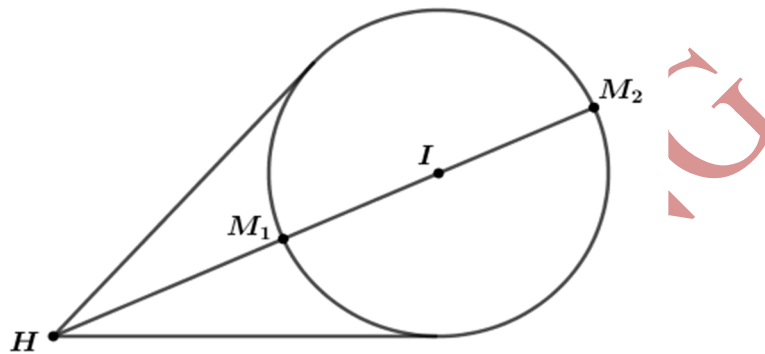
Theo giả thiết $|z - 2 - 3i| = 1 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ nên điểm M biểu diễn cho số phức z nằm trên đường tròn (C) tâm $I(2; 3)$, bán kính $R = 1$.

$$|\bar{z} + 1 + i| = |x - yi + 1 + i| = |x + 1 + (1 - y)i| = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2}.$$

Gọi $M(x; y)$ và $H(-1; 1)$ thì $HM = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2}$.

Do $HI = \sqrt{13} > 1 = R$ nên H nằm ngoài đường tròn (C) .

Tia HI luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M_1; M_2$ trong đó M_1 nằm trên đoạn HI và M_2 nằm ngoài đoạn HI .



Với điểm M bất kỳ thuộc (C) ta có:

$$HM^2 = HI^2 + IM^2 - 2HI \cdot IM \cos \widehat{HIM}$$

$$= HI^2 + R^2 - 2HI \cdot R \cos \widehat{HIM}$$

$$\leq HI^2 + R^2 + 2HI \cdot R = (HI + R)^2 = HM_2^2$$

Do đó $HM \leq HM_2 = HI + R = \sqrt{13} + 1$

Dấu “=” xảy ra khi $M \equiv M_2$.

Câu 37. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 2i| = 4$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z + 2 + i|$. Giá trị của $T = M^2 + m^2$ là

A. $T = 50$.

B. $T = 64$.

C. $T = 68$.

D. $T = 16$

Lời giải

Đặt $w = z + 2 + i \Leftrightarrow z = w - 2 - i$, khi đó $|z - 1 - 2i| = |w - 2 - i - 1 - 2i| = |w - 3 - 3i| = 4$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} M = |w|_{\max} = \sqrt{3^2 + 3^2} + 4 = 3\sqrt{2} + 4 \\ m = |w|_{\min} = \sqrt{3^2 + 3^2} - 4 = 3\sqrt{2} - 4 \end{cases} \rightarrow M^2 + m^2 = 68.$$

Chọn C

Câu 38. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - i| = \sqrt{2}$. Gọi A và B lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z - 2 + i|$. Giá trị của biểu thức $P = 2A + B^2$ gần bằng.

A. 6.

B. 7.

C. 8.

D. 9

Lời giải

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(1; 1)$ bán kính $R = \sqrt{2}$

Gọi $K(2; -1)$ khi đó $A = |z - 2 + i|_{\max} = IK + R = \sqrt{5} + \sqrt{2}$; $B = \sqrt{5} - \sqrt{2}$

Do đó $P = 2A + B^2 \approx 8$.

Chọn C

- Câu 39.** Cho số phức z thỏa mãn: $|z-1+i|=\sqrt{2}$. Gọi A và B lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z+2|$. Khi đó A^2+B^2 có giá trị bằng
- A. 20. B. 18. C. 24. D. 32

Lời giải

Giả sử M là điểm biểu diễn số phức z . Xét điểm $F(-2;0)$ và $E(1;-1) \Rightarrow EM = \sqrt{2}$
 Tập hợp điểm M là các điểm không nằm ngoài đường tròn (C) tâm E bán kính $R = \sqrt{2}$
 Ta có: $|FE-EM| \leq MF \leq FE+EM \Leftrightarrow \sqrt{10}-\sqrt{2} \leq MF \leq \sqrt{10}+\sqrt{2} \Rightarrow A^2+B^2=24$.

Chọn C

- Câu 40.** Cho số phức z thỏa mãn $|\bar{z}-1+2i|=\sqrt{10}$. Giá trị lớn nhất của $|z+1-4i|$ bằng
- A. $\sqrt{10}$. B. $10\sqrt{3}$. C. $3\sqrt{10}$. D. $4\sqrt{10}$

Lời giải

Ta có $|\bar{z}-1+2i|=\sqrt{10} \Leftrightarrow |\bar{z}-1+2i|^2=10 \Leftrightarrow (\bar{z}-1+2i) \cdot \overline{\bar{z}-1+2i}=10$.
 $\Leftrightarrow (\bar{z}-1+2i) \cdot (z-1+2i)=10 \Leftrightarrow |\bar{z}-1+2i| \cdot |z-1+2i|=10 \Rightarrow |z-1+2i|=\sqrt{10}$.
 Đặt $w=z+1-4i \Leftrightarrow z=w-1+4i$, khi đó $|z-1+2i|=|w-2+6i|=\sqrt{10}$.
 Vậy giá trị lớn nhất là $|w|_{\max}=\sqrt{10}+\sqrt{2^2+6^2}=3\sqrt{10} \Rightarrow |z+1-4i|_{\max}=3\sqrt{10}$.

Chọn C

- Câu 41.** Cho số phức z thỏa mãn: $|z+1-2i|=2\sqrt{5}$. Gọi A và B lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z+i|$. Khi đó AB có giá trị bằng
- A. 10. B. -10. C. 12. D. -12

Lời giải

Giả sử M là điểm biểu diễn số phức z . Xét điểm $F(0;-1)$ và $E(-1;2) \Rightarrow EM = 2\sqrt{5}$
 Tập hợp điểm M là các điểm không nằm ngoài đường tròn (C) tâm E bán kính $R = 2\sqrt{5}$
 Ta có: $|FE-EM| \leq MF \leq FE+EM \Leftrightarrow 2\sqrt{5}-\sqrt{10} \leq MF \leq 2\sqrt{5}+\sqrt{10} \Rightarrow AB=10$.

Chọn A

- Câu 42.** Cho số phức z thỏa mãn $\left| \frac{1+i}{1-i} z - 1 + i \right| = 2$. Giá trị lớn nhất của $A = |z-2+i|$ là.
- A. $2+\sqrt{2}$. B. $\sqrt{5}-2$. C. $2+\sqrt{5}$. D. 5

Lời giải

Ta có: $\left| \frac{1+i}{1-i} z - 1 + i \right| = 2 \Leftrightarrow |iz-1+i|=2 \Leftrightarrow |i| \cdot |z+1+i|=2 \Leftrightarrow |z+1+i|=2$

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R=2$
 Gọi $K(2;-1)$ suy ra $A_{\max}=IK+R=5$.

Chọn D

- Câu 43.** Số phức z có mô đun lớn nhất và thỏa mãn điều kiện $\left| \bar{z}(1+i) - 3 + 2i \right| = \frac{\sqrt{13}}{2}$ là:
- A. $z=1+3i$ B. $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}i$ C. $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ D. $z=\frac{3}{4}+\frac{15}{4}i$

Lời giải

+ Gọi $z=x+yi$

Từ giả thiết ta có: $(x+y-3)^2 + (x-y+2)^2 = \frac{13}{4}$.

+ Đồng thời $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ lớn nhất. Kiểm tra các đáp án và so sánh.

Chọn D

Câu 44. Trong mặt phẳng phức Oxy, các số phức z thỏa $|z-5i| \leq 3$. Nếu số phức z có môđun nhỏ nhất thì phần ảo bằng bao nhiêu?

A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 4

Lời giải

Giả sử M là điểm biểu diễn số phức z . Xét điểm $A(0;5) \Rightarrow AM \leq 3$

Tập hợp điểm M là các điểm không nằm ngoài đường tròn tâm A bán kính $R=3$

$\Rightarrow OM \geq AO - AM = 5 - 3 = 2$.

Chọn C

Câu 45. Cho số phức z thỏa mãn: $|z(1+i)-1+2i| = 2$. Gọi A và B lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z+1+3i|$. Khi đó $2A^2 - B^2$ có giá gần nhất bằng

A. 20.

B. 18.

C. 64.

D. 32

Lời giải

Ta có $|z(1+i)-1+2i| = 2 \Leftrightarrow \left| z - \frac{1-2i}{1+i} \right| = \left| z - \left(\frac{1}{2} + \frac{3i}{2} \right) \right| = \sqrt{2}$

Giả sử M là điểm biểu diễn số phức z . Xét điểm $F(-1;-3)$ và $E\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow EM = \sqrt{2}$

Tập hợp điểm M là các điểm không nằm ngoài đường tròn (C) tâm E bán kính $R = \sqrt{2}$

Ta có: $|FE - EM| \leq MF \leq FE + EM \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{10}}{2} - \sqrt{2} \leq MF \leq \frac{3\sqrt{10}}{2} + \sqrt{2} \Rightarrow 2A^2 - B^2 \approx 64$.

Chọn C

Câu 46. Trong mặt phẳng phức Oxy, trong các số phức z thỏa $|z+1-i| \leq 1$. Nếu số phức z có môđun lớn nhất thì số phức z có phần thực bằng bao nhiêu?

A. $\frac{-\sqrt{2}-2}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{2}-2}{2}$.

C. $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

Giả sử M là điểm biểu diễn số phức z . Xét điểm $A(-1;1) \Rightarrow AM \leq 1$

Tập hợp điểm M là các điểm không nằm ngoài đường tròn (C) tâm A bán kính $R=1$

$\Rightarrow OM \leq AO + AM = \sqrt{2} + 1$. Dấu bằng khi M là giao điểm của (C) và $OA: y = -x$

$\Rightarrow \begin{cases} x_M = -y_M \\ (x_M + 1)^2 + (y_M - 1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x_M = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x_M = \frac{-2 - \sqrt{2}}{2}$ (chọn điểm xa O hơn).

Chọn A

Câu 47. Cho hai số phức z và w biết chúng thỏa mãn $\left| \frac{(1+i)z}{1-i} + 2 \right| = 1$ và $w = iz$. Tìm giá trị lớn nhất của $M = |z - w|$.

A. $3\sqrt{3}$

B. 3

C. $3\sqrt{2}$

D. $2\sqrt{3}$

Lời giải

Ta có: $|(1+i)z + 2(1-i)| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z - 2i| = 1$. Vậy quỹ tích $M(z)$ là đường tròn tâm $I(0; 2), R = 1$. Lại có $|w - z| = |iz - z| = \sqrt{2} \cdot |z| \leq 3\sqrt{2}$.

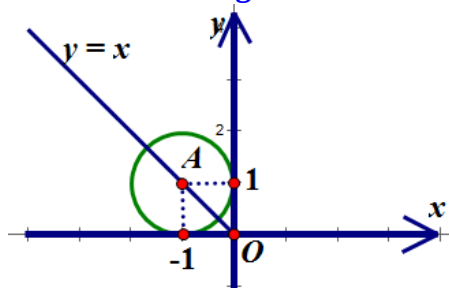
Chọn C

$$T = a + b = \frac{4(13 + 5\sqrt{10})}{27}.$$

Câu 48. Trong mặt phẳng phức Oxy , trong các số phức z thỏa $|z + 1 - i| \leq 1$. Nếu số phức z có môđun lớn nhất thì số phức z có phần thực bằng bao nhiêu?

A. $\frac{-\sqrt{2} - 2}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{2} - 2}{2}$. **C.** $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Gọi $M(x, y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$

Gọi A là điểm biểu diễn số phức $-1 + i$

Ta có: $|z + 1 - i| \leq 1 \Leftrightarrow MA \leq 1$. Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức là hình tròn tâm $A(-1, 1), R = 1$ như hình vẽ

Để $\max |z| \Leftrightarrow \max(OM)$

$$\Rightarrow M \text{ thỏa hệ: } \begin{cases} (x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 1 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2} - 2}{2}, x = -\frac{\sqrt{2} + 2}{2}$$

Câu 49. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - 2z + 5| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)|$ và số phức w thỏa $w = z - 2 + 2i$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|w|$.

Lời giải

Ta có: $|z^2 - 2z + 5| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)|$

$$\Leftrightarrow |(z - 1 + 2i)(z - 1 - 2i)| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)| \Leftrightarrow \begin{cases} |z - 1 + 2i| = 0 \\ |z - 1 - 2i| = |z + 3i - 1| \end{cases}$$

Trường hợp 1: $|z - 1 + 2i| = 0 \Leftrightarrow z = 1 - 2i \Rightarrow |w| = 1$.

Trường hợp 2: $|z - 1 - 2i| = |z + 3i - 1| \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}$ với $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$.

$$\Rightarrow w = \left(a - \frac{1}{2}i\right) - 2 + 2i = (a - 2) + \frac{3}{2}i \Rightarrow |w| = \sqrt{(a - 2)^2 + \frac{9}{4}} \geq \frac{3}{2}.$$

MODUN MIN, MAX CỦA SỐ PHỨC CÓ TẬP HỢP BIỂU DIỄN LÀ ELIP

Câu 50. (**CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP 2019 LẦN 2**) Gọi S là tập hợp các số phức thỏa $|z - 3| + |z + 3| = 10$. Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc S có môđun nhỏ nhất. Giá trị biểu thức $P = z_1^2 + z_2^2$ là

A. 16. **B.** -16. **C.** 32. **D.** -32.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z , $F_1(3; 0)$ và $F_2(-3; 0)$ lần lượt là hai điểm biểu diễn số phức $3 + 0i$ và $-3 + 0i$.

Ta có $|z - 3| + |z + 3| = 10 \Rightarrow MF_1 + MF_2 = 10$.

Vậy tập hợp điểm M là (E) có phương trình: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Khi đó z_1, z_2 là hai số phức có mô đun nhỏ nhất khi z_1, z_2 có điểm biểu diễn là hai đỉnh của (E) nằm trên trục tung, suy ra $z_1 = 0 + 4i$; $z_2 = 0 - 4i$.

Vậy ta có $P = z_1^2 + z_2^2 = -16 + (-16) = -32$.

- Câu 51. (Chuyên Hạ Long lần 2-2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z - 6| + |z + 6| = 20$. Gọi M, n lần lượt là mô đun lớn nhất và nhỏ nhất của z . Tính $M - n$.
- A.** $M - n = 2$. **B.** $M - n = 4$. **C.** $M - n = 7$. **D.** $M - n = 14$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$. Theo giả thiết, ta có $|z - 6| + |z + 6| = 20$.

$$\Leftrightarrow |x - 6 + yi| + |x + 6 + yi| = 20 \Leftrightarrow \sqrt{(x - 6)^2 + y^2} + \sqrt{(x + 6)^2 + y^2} = 20 \quad (*).$$

Gọi $M(x; y)$, $F_1(6; 0)$ và $F_2(-6; 0)$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 20 > F_1F_2 = 12$ nên tập hợp các điểm E là đường elip (E) có hai tiêu điểm F_1 và F_2 . Và độ dài trục lớn bằng 20.

Ta có $c = 6$; $2a = 20 \Leftrightarrow a = 10$ và $b^2 = a^2 - c^2 = 64 \Rightarrow b = 8$.

Do đó, phương trình chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$.

Suy ra $\max|z| = OA = OA' = 10$ khi $z = \pm 10$ và $\min|z| = OB = OB' = 8$ khi $z = \pm 8i$.

Vậy $M - n = 2$.

- Câu 52.** Cho số phức z thỏa mãn $|z - 8| + |z + 8| = 20$. Gọi m, n lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z|$. Tính $P = m + n$.
- A.** $P = 16$. **B.** $P = 10\sqrt{2}$. **C.** $P = 17$. **D.** $P = 5\sqrt{10}$.

Lời giải

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) và $M(x, y)$ là điểm biểu diễn của số phức z trong mặt phẳng phức.

Xét các điểm $F_1(-8; 0), F_2(8; 0)$. Ta có: $MF_1 = \sqrt{(-8-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{(x+8)^2 + y^2} = |z+8|$.

$$MF_2 = \sqrt{(8-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{(x-8)^2 + y^2} = |z-8|.$$

$$\Rightarrow |z-8| + |z+8| = 20 \Leftrightarrow \sqrt{(x+8)^2 + y^2} + \sqrt{(x-8)^2 + y^2} = 20 \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 20$$

Do $MF_1 + MF_2 \geq F_1F_2 \Rightarrow$ Tập hợp điểm M là một elip có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 20 \\ c = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 100 \\ b^2 = a^2 - c^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \max|z| = 10 \\ \min|z| = 6 \end{cases} \Rightarrow m+n = 16.$$

Câu 53. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3| + |z+3| = 8$. Gọi M, m lần lượt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất $|z|$. Khi đó $M+m$ bằng

A. $4-\sqrt{7}$.

B. $4+\sqrt{7}$.

C. 7.

D. $4+\sqrt{5}$.

Lời giải

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } 8 = |z-3| + |z+3| \geq |z-3+z+3| = |2z| \Leftrightarrow |z| \leq 4.$$

$$\text{Do đó } M = \max|z| = 4.$$

$$\text{Mà } |z-3| + |z+3| = 8 \Leftrightarrow |x-3+yi| + |x+3+yi| = 8 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 8.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$8 = 1 \cdot \sqrt{(x-3)^2 + y^2} + 1 \cdot \sqrt{(x+3)^2 + y^2} \leq \sqrt{(1^2 + 1^2)} \sqrt{((x-3)^2 + y^2) + ((x+3)^2 + y^2)}$$

$$\Leftrightarrow 8 \leq \sqrt{2(2x^2 + 2y^2 + 18)} \Leftrightarrow 2(2x^2 + 2y^2 + 18) \geq 64$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 7 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{7} \Leftrightarrow |z| \geq \sqrt{7}.$$

$$\text{Do đó } M = \min|z| = \sqrt{7}.$$

$$\text{Vậy } M+m = 4+\sqrt{7}.$$

Chọn B

Câu 54. (KÈNH TRUYỀN HÌNH GIÁO DỤC QUỐC GIA VTV7 –2019) Trong các số phức z thỏa mãn $|z+4-3i| + |z-8-5i| = 2\sqrt{38}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z-2-4i|$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{5}{2}$.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Gọi } \begin{cases} z = x + yi \Rightarrow M(x, y) \\ z_1 = -4 + 3i \Rightarrow F_1(-4; 3) \\ z_2 = 8 + 5i \Rightarrow F_2(8; 5) \\ z_0 = 2 + 4i \Rightarrow A(2; 4) \end{cases}.$$

Ta thấy: $z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2} \Rightarrow A$ là trung điểm của F_1F_2 .

$$\text{Theo giả thiết, ta có: } |z+4-3i| + |z-8-5i| = 2\sqrt{38} \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 2\sqrt{38}.$$

Suy ra, tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là Elip (E) có:

$$\begin{cases} a = \frac{2\sqrt{38}}{2} = \sqrt{38} \\ c = \frac{|z_1 - z_2|}{2} = \sqrt{37} \\ b = \sqrt{a^2 - c^2} = 1 \end{cases}$$

Ta có: $|z - 2 - 4i| = MA$.

Vì A là tâm Elip và M di chuyển trên Elip nên $min AM = b = 1$.

Câu 55. (THPT-Toàn-Thắng-Hải-Phòng) Cho số phức z thỏa mãn $|(1+i)z + 2| + |(1+i)z - 2| = 4\sqrt{2}$.

Gọi $m = \max|z|$; $n = \min|z|$ và số phức $w = m + ni$. Tính $|w|^{2018}$

A. 4^{1009} .

B. 5^{1009} .

C. 6^{1009} .

D. 2^{1009} .

Lời giải

Chọn C

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có $|(1+i)z + 2| + |(1+i)z - 2| = 4\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow |(1+i)z + (1+i)(1-i)| + |(1+i)z - (1+i)(1-i)| = 4\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |(1+i)(z+1-i)| + |(1+i)(z-1+i)| = 4\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |1+i||z+1-i| + |1+i||z-1+i| = 4\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |z+1-i| + |z-1+i| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = 4(*)$$

Gọi $M(x; y)$, $F_1(-1; 1)$, $F_2(1; -1)$. Ta có $(*) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 4$.

Do đó tập hợp điểm M biểu diễn cho số phức z là một Elip có hai tiêu điểm là F_1, F_2 ; tiêu cự bằng $\frac{1}{2}F_1F_2 = \sqrt{2}$; độ dài trục lớn bằng $MF_1 + MF_2 = 4$; một nửa độ dài trục bé bằng $\sqrt{2}$.

Ta có $m = \max|z| = 2$ (bằng một nửa độ dài trục lớn); $n = \min|z| = \sqrt{2}$ (bằng một nửa độ dài trục bé).

$$\Rightarrow w = 2 + \sqrt{2}i \Rightarrow |w| = \sqrt{6} \Rightarrow |w|^{2018} = (\sqrt{6})^{2018} = 6^{1009}.$$

Câu 56. (THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hai số phức z và $\omega = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn: $|z + \sqrt{5}| + |z - \sqrt{5}| = 6$; $5a - 4b - 20 = 0$. Giá trị nhỏ nhất của $|z - \omega|$ là

A. $\frac{3}{\sqrt{41}}$.

B. $\frac{5}{\sqrt{41}}$.

C. $\frac{4}{\sqrt{41}}$.

D. $\frac{3}{41}$.

Lời giải

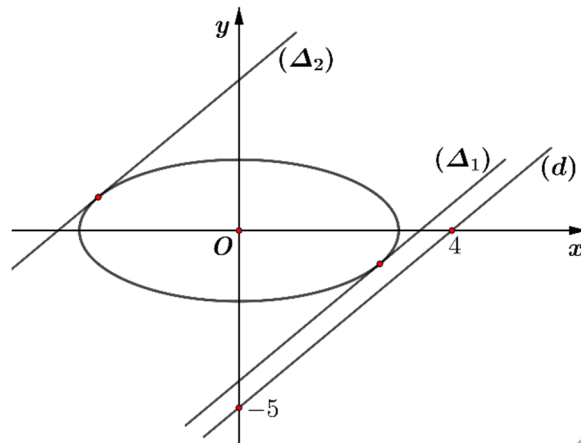
Chọn A

Gọi $M(a; b)$ là điểm biểu diễn cho số phức ω , từ điều kiện: $5a - 4b - 20 = 0$, suy ra M thuộc đường thẳng (d): $5x - 4y - 20 = 0$.

Giả sử $N(x; y)$ là điểm biểu diễn cho số phức z , ta có:

$$|z + \sqrt{5}| + |z - \sqrt{5}| = 6 \Leftrightarrow NA + NB = 6, \text{ với } A(-\sqrt{5}; 0), B(\sqrt{5}; 0), AB = 2\sqrt{5} < 6$$

Suy ra N thuộc Elip có phương trình $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.



Gọi (Δ) là tiếp tuyến của (E) và (Δ) song song với (d) .

+ (Δ) song song với (d) suy ra phương trình (Δ) có dạng: $5x - 4y + C = 0$.

+ (Δ) tiếp xúc với $(E) \Leftrightarrow 9.25 + 4.16 = C^2 \Leftrightarrow C^2 = 289 \Leftrightarrow C = \pm 17$.

(áp dụng điều kiện tiếp xúc của đường thẳng với (E) là: $a^2 A^2 + b^2 B^2 = C^2$)

+ Các tiếp tuyến của (E) và song song với (d) là $(\Delta_1): 5x - 4y - 17 = 0$ hoặc

$(\Delta_2): 5x - 4y + 17 = 0$.

Ta có: $|z - \omega| = MN$, với điểm M thuộc đường thẳng (d) và điểm N thuộc (E) .

Do đó: $MN_{\min} \Leftrightarrow MN = d(\Delta_1, d) = \frac{|-17 + 20|}{\sqrt{5^2 + 4^2}} = \frac{3}{\sqrt{41}}$.

DẠNG 5: MIN, MAX SỐ PHỨC PP ĐẠI SỐ**ÁP DỤNG CÁC TÍNH CHẤT BĐT, ĐÁNH GIÁ**

Câu 1. Số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $|z| \geq 2$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left| \frac{z+i}{z} \right|$.

A. 1**B. 2****C. 3****D. 4****Lời giải**

$$\text{Ta có } 1 - \left| \frac{i}{z} \right| \leq \left| 1 + \frac{i}{z} \right| \leq 1 + \left| \frac{i}{z} \right| \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{|z|} \leq \left| 1 + \frac{i}{z} \right| \leq 1 + \frac{1}{|z|}.$$

$$\text{Mặt khác } |z| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{|z|} \leq \frac{1}{2} \text{ suy ra } \frac{1}{2} \leq P \leq \frac{3}{2}.$$

Suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất là $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$. Vậy tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 2.

Chọn B

Câu 2. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \left| 1 + \frac{5i}{z} \right|$.

A. 5.**B. 4.****C. 6.****D. 8.****Lời giải**

$$\text{Ta có: } A = \left| 1 + \frac{5i}{z} \right| \leq |1| + \left| \frac{5i}{z} \right| = 1 + \frac{5}{|z|} = 6. \text{ Khi } z = i \Rightarrow A = 6.$$

Chọn C

Câu 3. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất $M_{\max}$ và giá trị nhỏ nhất $M_{\min}$ của biểu thức $M = |z^2 + z + 1| + |z^3 + 1|$.

A. $M_{\max} = 5; M_{\min} = 1$.**B. $M_{\max} = 5; M_{\min} = 2$.****C. $M_{\max} = 4; M_{\min} = 1$.****D. $M_{\max} = 4; M_{\min} = 2$.****Lời giải**

$$\text{Ta có: } M \leq |z|^2 + |z| + 1 + |z|^3 + 1 = 5, \text{ khi } z = 1 \Rightarrow M = 5 \Rightarrow M_{\max} = 5.$$

$$\text{Mặt khác: } M = \frac{|1 - z^3|}{|1 - z|} + |1 + z^3| \geq \frac{|1 - z^3|}{2} + \frac{|1 + z^3|}{2} \geq \frac{|1 - z^3 + 1 + z^3|}{2} = 1, \quad \text{khi}$$

$$z = -1 \Rightarrow M = 1 \Rightarrow M_{\min} = 1.$$

Chọn A

Câu 4. Xét số phức z thỏa mãn $|z^2 - 6z + 25| = 2|z - 3 + 4i|$. Hỏi giá trị lớn nhất của $|z|$ là:

A. 7.**B. 5.****C. 3.****D. 10.****Lời giải****Chọn A**

$$\text{Ta có: } z^2 - 6z + 25 = (z - 3 - 4i)(z - 3 + 4i)$$

$$\text{Do đó } |z^2 - 6z + 25| = 2|z - 3 + 4i| \Leftrightarrow |(z - 3 - 4i)(z - 3 + 4i)| = 2|z - 3 + 4i|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z-3+4i|=0 \\ |z-3-4i|=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3-4i \\ |z-3-4i|=2 \end{cases}$$

$$\text{Với } z=3-4i \Rightarrow |z|=5. \quad (1)$$

Với $|z-3-4i|=2$, sử dụng bất đẳng thức môđun ta có:

$$2 \geq |z| - |3+4i| = |z| - 5 \Rightarrow |z| \leq 7 \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $\max |z| = 7$.

Câu 5. Cho số phức z có $|z|=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 1008|1+z| + |1+z^2| + |1+z^3| + \dots + |1+z^{2017}|$$

A. $P_{\min} = 1007$

B. $P_{\min} = 2018$

C. $P_{\min} = 1008$

D. $P_{\min} = 2016$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} |1+z^{2017}| + |1+z^{2016}| \geq |(1+z^{2017}) - (1+z^{2016})| = |z|^{2016} |1-z| = |1-z| \\ |1+z^{2015}| + |1+z^{2014}| \geq |(1+z^{2015}) - (1+z^{2014})| = |z|^{2014} |1-z| = |1-z| \\ \dots \\ |1+z^3| + |1+z^2| \geq |(1+z^3) - (1+z^2)| = |z|^2 |1-z| = |1-z| \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy: } P &= 1008|1+z| + |1+z^2| + |1+z^3| + \dots + |1+z^{2017}| \\ &\geq 1008(|1+z| + |1-z|) \geq 1008|(1+z) + (1-z)| = 2016 \end{aligned}$$

Do đó $P_{\min} = 2016$ và đẳng thức xảy ra có nhiều trường hợp trong đó có $z = -1$.

Câu 6. (Nguyễn Du Dak-Lak 2019) Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-i| = |\bar{z}-2+3i|$, số phức z_0 có môđun nhỏ nhất. Phần ảo của z_0 là

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{3}{2}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn C

+ Giả sử $z_0 = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

+ Ta có:

$$|z-i| = |\bar{z}-2+3i| \Leftrightarrow |x+(y-1)i| = |(x-2)+(-y+3)i|$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = (x-2)^2 + (-y+3)^2$$

$$\Leftrightarrow y = -x + 3.$$

$$+ |z_0| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (-x+3)^2} = \sqrt{2x^2 - 6x + 9} = \sqrt{2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Vậy $|z_0|_{\min} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ khi và chỉ khi $x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2} \Rightarrow z_0 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$, suy ra phần ảo của z_0 bằng $\frac{3}{2}$.

Câu 7. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - 2z + 5| = |(z-1+2i)(z+3i-1)|$. Tính $\min |w|$, với $w = z - 2 + 2i$.

A. $\min |w| = \frac{3}{2}$. B. $\min |w| = 2$. C. $\min |w| = 1$. D. $\min |w| = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $|z^2 - 2z + 5| = |(z-1+2i)(z+3i-1)| \Leftrightarrow |(z-1+2i)(z-1-2i)| = |(z-1+2i)(z+3i-1)|$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} z-1+2i=0 \\ |(z-1-2i)| = |(z+3i-1)| \end{cases}$

Trường hợp 1: $z-1+2i=0 \Rightarrow w=-1 \Rightarrow |w|=1$ (1).

Trường hợp 2: $|z-1-2i| = |z+3i-1|$

Gọi $z=a+bi$ (với $a, b \in \mathbb{R}$) khi đó ta được

$$|a-1+(b-2)i| = |(a-1)+(b+3)i| \Leftrightarrow (b-2)^2 = (b+3)^2 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}.$$

Suy ra $w = z - 2 + 2i = a - 2 + \frac{3}{2}i \Rightarrow |w| = \sqrt{(a-2)^2 + \frac{9}{4}} \geq \frac{3}{2}$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $\min |w| = 1$.

Câu 8. (CỤM TRẦN KIM HÙNG -HÙNG YÊN NĂM 2019) Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 + iz + 2| = |z^2 + z - i + 1|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z - 2 + i|$ là

A. $2\sqrt{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. 2. D. $\sqrt{5} - \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $|z^2 + iz + 2| = |z^2 + z - i + 1| \Leftrightarrow |z^2 + iz - 2i^2| = |z^2 + z - i - i^2|$
 $\Leftrightarrow |(z-i)(z+2i)| = |(z-i)(z+i+1)| \Leftrightarrow |z-i| \cdot |z+2i| = |z-i| \cdot |z+i+1|$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} |z-i|=0 & (1) \\ |z+2i|=|z+i+1| & (2) \end{cases}$

+ Giải phương trình (1): Ta có $z=i \Rightarrow |z-2+i| = |2i-2| = 2\sqrt{2}$ (*).

+ Giải phương trình (2): Đặt $z=x+yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có

$$|z+2i| = |z+i+1| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} \Leftrightarrow y = x-1$$

Khi đó $|z-2+i| = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + x^2} = \sqrt{2(x-1)^2 + 2} \geq \sqrt{2}$

Từ (*) và (**) ta có $\min |z-2+i| = \sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ hay $z=1$.

Câu 9. (HKII-CHUYÊN-NGUYỄN-HUYỆ-HÀ-NỘI) Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - 2z + 5| = |(z-1+2i)(z+3i-1)|$. Tính $\min |w|$, với $w = z - 2 + 2i$.

A. $\min |w| = \frac{1}{2}$. B. $\min |w| = 1$. C. $\min |w| = \frac{3}{2}$. D. $\min |w| = 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $|z^2 - 2z + 5| = |(z-1+2i)(z+3i-1)| \Leftrightarrow |(z-1)^2 + 4| = |(z-1+2i)(z+3i-1)|$

$$\Leftrightarrow |(z-1+2i)(z-1-2i)| = |(z-1+2i)(z+3i-1)| \Leftrightarrow |z-1+2i||z-1-2i| = |z-1+2i||z+3i-1|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z-1+2i| = 0 \\ |z-1-2i| = |z+3i-1| \end{cases}$$

TH1: $|z-1+2i| = 0 \Leftrightarrow z = 1-2i \Rightarrow w = z-2+2i = 1-2i-2+2i = -1 \Rightarrow |w| = 1$ (1)

TH2: $|z-1-2i| = |z+3i-1| \Leftrightarrow |(z-2+2i)+1-4i| = |(z-2+2i)+1+i|$
 $\Leftrightarrow |w+1-4i| = |w+1+i|$ (*)

Gọi $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thì (*) $\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-4)^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$.

Khi đó $|w| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} \geq \frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$. Suy ra: $\min|w| = \frac{3}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\min|w| = 1$.

Câu 10. (THPT-Phúc-Trạch-Hà-Tĩnh-lần-2-2018-2019-thi-tháng-4) Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-4i| = |z-2i|$ và biểu thức $|iz+2-i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm phần ảo của số phức z .

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $-\frac{5}{2}$.

C. $-\frac{3}{2}$.

D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó:

$$|z-2-4i| = |z-2i| \Leftrightarrow \sqrt{(a-2)^2 + (b-4)^2} = \sqrt{a^2 + (b-2)^2} \Leftrightarrow a = 4-b.$$

$$|iz+2-i| = \sqrt{(2-b)^2 + (a-1)^2} = \sqrt{(2-b)^2 + (3-b)^2} = \sqrt{2b^2 - 10b + 13}$$

$$= \sqrt{2\left(b - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|iz+2-i|$ là $\frac{\sqrt{2}}{2}$ khi $b = \frac{5}{2}$; $a = \frac{3}{2}$.

Câu 11. (Chuyên Vinh Lần 2) Cho các số phức z và w thỏa mãn $(2+i)|z| = \frac{z}{w} + 1 - i$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = |w+1-i|$.

A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1

Ta có: $(2+i)|z| = \frac{z}{w} + 1 - i \Leftrightarrow (2|z|-1) + (|z|+1)i = \frac{z}{w}$

$$\Rightarrow |(2|z|-1) + (|z|+1)i| = \left|\frac{z}{w}\right| \Leftrightarrow \sqrt{(2|z|-1)^2 + (|z|+1)^2} = \frac{|z|}{|w|} \Leftrightarrow \sqrt{5|z|^2 - 2|z| + 2} = \frac{|z|}{|w|}.$$

Vì $5|z|^2 - 2|z| + 2 > 0 \quad \forall z \Rightarrow |z| > 0$. Đặt $t = |z|$ ($t > 0$).

Ta có: $\frac{1}{|w|} = \frac{\sqrt{5t^2 - 2t + 2}}{t} = \sqrt{5 - \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2}} = \sqrt{2\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \forall t > 0 \Rightarrow |w| \leq \frac{\sqrt{2}}{3}.$

Khi đó: $T = |w + 1 - i| \leq |w| + |1 - i| \leq \frac{\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} w = k(1 - i) \quad (k \in \mathbb{R}, k \geq 0) \\ |w| = \frac{\sqrt{2}}{3} \\ |z| = 2 \end{cases} \Rightarrow k\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow k = \frac{1}{3} \Leftrightarrow w = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i.$

Vậy $\max T = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$

Cách 2

Ta có: $(2 + i)|z| = \frac{z}{w} + 1 - i \Leftrightarrow (2|z| - 1) + (|z| + 1)i = \frac{z}{w}$
 $\Rightarrow |(2|z| - 1) + (|z| + 1)i| = \left|\frac{z}{w}\right| \Leftrightarrow \sqrt{(2|z| - 1)^2 + (|z| + 1)^2} = \frac{|z|}{|w|} \Leftrightarrow \sqrt{5|z|^2 - 2|z| + 2} = \frac{|z|}{|w|}.$

Vì $5|z|^2 - 2|z| + 2 > 0 \quad \forall z \Rightarrow |z| > 0.$ Đặt $t = |z| \quad (t > 0).$

Ta có: $\frac{1}{|w|} = \frac{\sqrt{5t^2 - 2t + 2}}{t} = \sqrt{5 - \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2}} = \sqrt{2\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \forall t > 0 \Rightarrow |w| \leq \frac{\sqrt{2}}{3}.$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức w là hình tròn tâm $O(0; 0)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{3}.$

Khi đó: $T = |w + 1 - i| = MI$ (ở đây $I(0; 2)$ là điểm biểu diễn cho số phức $z_0 = -1 + i$)

Dễ thấy điểm $I(0; 2)$ nằm ngoài đường tròn tâm $C(O; R)$, suy ra $T = MI$ đạt giá trị lớn nhất khi

và chỉ khi $T = MI = IO + R = 2 + \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{6 + \sqrt{5}}{3}.$

Vậy $\max T = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$

* Phân tích bài toán

- Dạng toán đề cập đến ở đây bao gồm 2 yếu tố:

+ Cho trước một điều kiện module của số phức w .

+ Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|w|$.

Với yếu tố thứ nhất thông thường ta phải tham số hóa module của z , ở đây là đặt $|z| = t \quad (t > 0)$, từ đó ta đánh giá để tìm ra miền biểu diễn số phức w .

Với yếu tố thứ hai, chúng ta phải tìm GTLN, GTNN của $|w|$.

Câu 12. (Chuyên Vinh Lần 2) Cho số phức z và w thỏa mãn $(3 + 2i)|z| = \frac{z}{iw - 1 + 3i} + 1 - i$. Tính giá trị lớn nhất của $T = |w|$

A. $\frac{\sqrt{2}}{3} + \sqrt{11}.$

B. $\frac{\sqrt{2}}{5} + \sqrt{10}.$

C. $\frac{5}{\sqrt{2}}.$

D. $\frac{\sqrt{5}}{5} + \sqrt{13}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $(3+2i)|z| = \frac{z}{iw-1+3i} + 1-i \Leftrightarrow 3|z|-1+(2|z|+1)i = \frac{z}{iw-1+3i}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(3|z|-1)^2 + (2|z|+1)^2} = \frac{|z|}{|i(w+3+i)|} \Leftrightarrow \sqrt{13|z|^2 - 2|z| + 2} = \frac{|z|}{|w+3+i|}$$

Đánh giá: $13|z|^2 - 2|z| + 2 > 0, \forall z \Rightarrow |z| > 0$. Đặt $t = |z|$ ($t > 0$)

Ta có: $\frac{1}{|w+3+i|} = \frac{\sqrt{13t^2 - 2t + 2}}{t} = \sqrt{13 - \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2}} = \sqrt{2\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{2}} \geq \frac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow |w+3+i| \leq \frac{\sqrt{2}}{5}$

Khi đó ta có: $|w| = |w+3+i+(-3-i)| \leq |w+3+i| + |-3-i| \leq \frac{\sqrt{2}}{5} + \sqrt{10}$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} w+3+i = k(-3-i), (k \in \mathbb{R}, k > 0) \\ |w+3+i| = \frac{\sqrt{2}}{5} \\ |z| = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{5} = k\sqrt{10} \Rightarrow k = \frac{1}{5\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow w+3+i = \frac{1}{5\sqrt{5}}(-3-i) \Leftrightarrow w = -\left(\frac{3}{5\sqrt{5}}+3\right) - \left(\frac{1}{5\sqrt{5}}+1\right)i$

Vậy: $\text{Max} T = \frac{\sqrt{2}}{5} + \sqrt{10}$

Câu 13. (Chuyên KHTN lần 2) Xét các số phức z thỏa mãn $|z-2-i|=1$. Gọi m, M là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $|z|$. Giá trị $M+m$ bằng:

A. 3.

B. 2.

C. $1+2\sqrt{5}$.D. $2\sqrt{5}$.**Lời giải****Chọn D**

Ta có: $|z| = |(z-2-i)+(2+i)|$.

Áp dụng bất đẳng thức $||z_1|-|z_2|| \leq |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$ ta có:

$$||z-2-i|-|2+i|| \leq |z| \leq |z-2-i|+|2+i| \Leftrightarrow |1-\sqrt{5}| \leq |z| \leq 1+\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{5}-1 \leq |z| \leq 1+\sqrt{5}$$

Vậy $m = \sqrt{5}-1, M = \sqrt{5}+1$, do đó $M+m = 2\sqrt{5}$.

Câu 14. Cho số phức z thỏa mãn $z \neq \bar{z}, \frac{4+z+z^2}{4-z+z^2}$ là số thực. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z+1-i|$. Tính $P = M+m$.

A. $P = 4$.B. $P = 2$ C. $P = 4 + \sqrt{2}$ D. $P = 4 + 2\sqrt{2}$ **Lời giải****Chọn A**

$$\frac{4+z+z^2}{4-z+z^2} = 1 + \frac{2z}{4-z+z^2} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{4-z+z^2}{z} = z-1 + \frac{4}{z} \in \mathbb{R} \Rightarrow z + \frac{4}{z} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow z + \frac{4}{z} = \overline{z + \frac{4}{z}} \Rightarrow z + \frac{4}{z} - \bar{z} - \frac{4}{\bar{z}} = 0 \Rightarrow (z - \bar{z})\left(|z|^2 - 4\right) = 0 \Rightarrow |z| = 2.$$

$$\begin{cases} |z+1-i| \geq |z|-|1-i| = 2-\sqrt{2} \\ |z+1-i| \leq |z|+|1-i| = 2+\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow P=4.$$

Câu 15. (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – NAM ĐỊNH 2019 – LẦN 1) Cho số phức z thỏa mãn $2|z| = |z^2 + 4|$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$.

A. $1+\sqrt{5}$.

B. $1+3\sqrt{5}$.

C. $3+\sqrt{5}$.

D. $\sqrt{6+\sqrt{13}}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Đặt: $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có: $2|z| = |z^2 + 4| \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x^2 - y^2 + 4)^2 + (2xy)^2}$
 $\Leftrightarrow 4(x^2 + y^2) = (x^2 - y^2 + 4)^2 + 4x^2y^2 \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 + 4x^2 - 12y^2 + 16 = 0$
 $\Leftrightarrow -(x^2 + y^2)^2 + 12(x^2 + y^2) - 16 = 16x^2 \geq 0 \Rightarrow 6 - 2\sqrt{5} \leq x^2 + y^2 \leq 6 + 2\sqrt{5}$
 $\Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = 1 + \sqrt{5}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $|z|$ là $1 + \sqrt{5}$ khi $z = (1 + \sqrt{5})i$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức trong số phức ta có:

$$|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2|| \Rightarrow |z^2 + 4| \geq ||z|^2 - |-4|| = ||z|^2 - 4| = |z|^2 - 4 \text{ khi } |z| \geq 2$$

Theo đề ta có: $2|z| = |z^2 + 4| \geq ||z|^2 - 4| \geq |z|^2 - 4$

$$\Rightarrow 2|z| \geq |z|^2 - 4 \Leftrightarrow |z|^2 - 2|z| - 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{5} \leq |z| \leq 1 + \sqrt{5}$$

Vậy giá trị lớn nhất của $|z|$ là $1 + \sqrt{5}$.

Câu 16. Cho số phức $z = a + bi$ ($a \geq 0, b \geq 0$) thỏa mãn $a - b - 2 \leq 0, a + 4b - 12 \leq 0$. Hỏi giá trị lớn nhất của $|z|$ là

A. $2\sqrt{5}$.

B. $3\sqrt{2}$.

C. 5.

D. $2\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ 4(a - b - 2) \leq 0 \\ a + 4b - 12 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ a \leq 4 \end{cases}.$$

Khi đó $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{a^2 + \left(\frac{12-a}{4}\right)^2}$.

Suy ra

$$\max |z| = \max_{[0;4]} \sqrt{a^2 + \left(\frac{12-a}{4}\right)^2} = y(4) = 2\sqrt{5}. \text{ Dấu bằng đạt tại } a = 4, b = 2 \Rightarrow z = 4 + 2i.$$

Câu 17. Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 + 4| = |z|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính $P = M + m$.

A. $P = \frac{2\sqrt{17}+1}{2}$. B. $P = \sqrt{17}$. C. $P = \frac{\sqrt{17}+1}{2}$. D. $P = \frac{2\sqrt{17}-1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $|z^2+4|=|z| \Leftrightarrow \left|\frac{z^2+4}{z}\right|=1 \Leftrightarrow \left|z+\frac{4}{z}\right|=1 \Leftrightarrow \left(z+\frac{4}{z}\right)\overline{\left(z+\frac{4}{z}\right)}=1 \Leftrightarrow \left(z+\frac{4}{z}\right)\left(\bar{z}+\frac{4}{\bar{z}}\right)=1$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} + \frac{16}{z\bar{z}} + 4\left(\frac{z}{z} + \frac{\bar{z}}{\bar{z}}\right) = 1 \Leftrightarrow |z|^2 + \frac{16}{|z|^2} + \frac{4(z^2 + \bar{z}^2)}{|z|^2} = 1.$$

Vậy với $a=|z|>0$, ta có $1 \geq a^2 + \frac{16}{a^2} - 8 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{17}-1}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{17}+1}{2}$.

Do đó $P = \frac{\sqrt{17}-1}{2} + \frac{\sqrt{17}+1}{2} = \sqrt{17}$.

Câu 18. Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là số phức thỏa mãn hai điều kiện $|z-2|^2 + |z+2|^2 = 26$ và $\left|z - \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i\right|$ đạt giá trị lớn nhất. Tính tích xy .

A. $xy = \frac{9}{4}$. B. $xy = \frac{13}{2}$. C. $xy = \frac{16}{9}$. D. $xy = \frac{9}{2}$.

Lời giải

Đặt $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Thay vào điều kiện thứ nhất, ta được $x^2 + y^2 = 36$.

Đặt $x = 3 \cos t, y = 3 \sin t$. Thay vào điều kiện thứ hai, ta có

$$P = \left|z - \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i\right| = \sqrt{18 - 18 \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)} \leq 6.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Rightarrow t = -\frac{3\pi}{4} \Rightarrow z = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$.

Chọn D

Câu 19. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $\frac{z-2i}{z-2}$ là số thuần ảo. Khi số phức z có môđun lớn nhất. Tính giá trị biểu thức $P = a + b$.

A. $P = 0$ B. $P = 4$ C. $P = 2\sqrt{2} + 1$ D. $P = 1 + 3\sqrt{2}$

Lời giải

Ta có: $\frac{z-2i}{z-2} = \frac{a+(b-2)i}{(a-2)+bi} = \frac{(a+(b-2)i)(a-2-bi)}{(a-2)^2+b^2}$ là số thuần ảo

$$\Leftrightarrow a(a-2) + b(b-2) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a + b^2 - 2b = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + \sqrt{2} \sin \alpha \\ b = 1 + \sqrt{2} \cos \alpha \end{cases}$$

Ta có: $a^2 + b^2 = 2(a+b) \Leftrightarrow |z|^2 = 4 + 2\sqrt{2}(\sin \alpha + \cos \alpha) \leq 4 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2} = 8$

$\Rightarrow |z|_{\max} = 2\sqrt{2}$ khi $\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{a+b=4}$.

Câu 20. Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-1-i|=5$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-7-9i|+\sqrt{2}|(1+i)z+8-8i|$ là?

A. $3\sqrt{5}$.

B. $5\sqrt{5}$.

C. $2\sqrt{5}$.

D. $4\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Với $z-1-i=5(\cos x+i\sin x)$, ta có:

$$\begin{aligned} P &= |1+i+5(\cos x+i\sin x)-7-9i| + 2\left|1+i+5(\cos x+i\sin x)+\frac{8-8i}{1+i}\right| \\ &= |(5\cos x-6)+i(5\sin x-8)| + 2\left|(5\cos x+1)+i(5\sin x-7)\right| \\ &= \sqrt{(5\cos x-6)^2+(5\sin x-8)^2} + 2\sqrt{(5\cos x+1)^2+(5\sin x-7)^2} \\ &= \sqrt{25-60\cos x-80\sin x+100} + 2\sqrt{25+10\cos x-70\sin x+50} \geq 5\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Câu 21. Cho số phức z thỏa mãn $|z-i|=2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z+2|+|z+2-2i|$. Tính $P=M+m$

A. $P=2+\sqrt{17}$.

B. $P=2+2\sqrt{17}$.

C. $P=\sqrt{2+2\sqrt{17}}$.

D. $P=\sqrt{2+\sqrt{17}}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z-i=2(\cos x+i\sin x)$ và

$$\begin{aligned} |z+2|+|z+2-2i| &= |2(\cos x+i\sin x)+i+2| + |2(\cos x+i\sin x)+i+2-2i| \\ &= \sqrt{(2\cos x+2)^2+(2\sin x+1)^2} + \sqrt{(2\cos x+2)^2+(2\sin x-1)^2} \\ &= \sqrt{9+8\cos x+4\sin x} + \sqrt{9+8\cos x-4\sin x} \\ &= \sqrt{18+16\cos x+2\sqrt{(9+8\cos x)^2-16\sin^2 x}} \\ &= \sqrt{18+16\cos x+2\sqrt{80\cos^2 x+144\cos x+65}} \in [2; 2\sqrt{17}]. \end{aligned}$$

Câu 22. Cho số thực z_1 và số phức z_2 thỏa mãn $|z_2-2i|=1$ và $\frac{z_2-z_1}{1+i}$ là số thực. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z_1-z_2|$. Tính giá trị của biểu thức $T=M+m$?

A. $T=4$

B. $T=4\sqrt{2}$

C. $T=3\sqrt{2}+1$

D. $T=\sqrt{2}+3$

Lời giải

Ta đặt $z_1=a, z_2=b+ci$ khi đó: $\frac{z_2-z_1}{1+i} = \frac{(a-b-ci)(i-1)}{2} \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{c=b-a}$ đồng thời ta cũng

có $|z_2-2i|=1 \Rightarrow \boxed{b^2+(c-2)^2=1}$. Do vậy $|z_1-z_2|=|(a-b)-ci|=|c+ci|=|c|\sqrt{2}$.

Vì $b^2+(c-2)^2=1 \geq (c-2)^2 \Rightarrow 1 \leq c \leq 3 \Rightarrow 1 \leq |c| \leq 3$ do đó

$$|z_1-z_2|=|c|\sqrt{2} \in [\sqrt{2}; 3\sqrt{2}] \Rightarrow \boxed{T=4\sqrt{2}}.$$

Câu 23. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2(m+1)z + m^2 + 1 = 0$, với m là tham số thực. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|}$ là M_0 đạt tại $m = m_0$. Tính $T = M_0 + m_0$.

A. $T = 2\sqrt{2}$.

B. $T = 2$

C. $T = 2\sqrt{2} + 2$

D. $T = 2\sqrt{2} - 2$

Lời giải

Chọn A

Theo Vi – et:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -2(m+1) \\ z_1 \cdot z_2 = m^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z_1 + z_2| = |2(m+1)| \\ |z_1 \cdot z_2| = m^2 + 1 \\ (z_1 - z_2)^2 = (z_1 + z_2)^2 - 4z_1 \cdot z_2 = 8m \Rightarrow |z_1 - z_2|^2 = 8m \geq 0 \end{cases}$$

$$P = \frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|} = \frac{|z_1| + |z_2|}{|z_1| \cdot |z_2|} = \frac{\sqrt{(|z_1| + |z_2|)^2}}{m^2 + 1} = \frac{\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + 4|z_1| \cdot |z_2|}}{m^2 + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{|z_1 \cdot z_2| + |z_2 \cdot z_1| + 4(m^2 + 1)}}{m^2 + 1} = \frac{\sqrt{\frac{|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2}{2} + 4(m^2 + 1)}}{m^2 + 1} = \frac{2(m+1)}{m^2 + 1} \leq 1 + \sqrt{2}$$

Khi đó $M_0 = 1 + \sqrt{2}$, $m_0 = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow T = 2\sqrt{2}$.

Câu 24. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z + \frac{4i}{z}\right| = 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z - 1 + i|$. Tính $P = M \cdot m$.

A. $P = 4$.

B. $P = 2 - \sqrt{2}$.

C. $P = \sqrt{34}$.

D. $P = 2 - \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B**Cách 1:**

Áp dụng bất đẳng thức moddun ta có

$$1 = \left|z + \frac{4i}{z}\right| \geq |z| - \left|\frac{4i}{z}\right| = |z| - \frac{4}{|z|} \Leftrightarrow |z|^2 - |z| - 4 \leq 0 \Leftrightarrow |z| \leq \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$1 = \left|z + \frac{4i}{z}\right| \leq |z| + \left|\frac{4i}{z}\right| = |z| + \frac{4}{|z|} \Leftrightarrow |z|^2 + |z| - 4 \leq 0 \Leftrightarrow |z| \geq \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

Do đó áp dụng bất đẳng thức mô đun, ta có:

$$\begin{cases} |z - 1 + i| \leq |z| + |1 - i| \leq |z| + \sqrt{2} \leq \frac{1 + \sqrt{17}}{2} + \sqrt{2} = \frac{1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{17}}{2} \\ |z - 1 + i| \geq |z| - |1 - i| \leq |z| - \sqrt{2} \geq \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} - \sqrt{2} = \frac{-1 - 2\sqrt{2} + \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Suy ra $P = 2 - \sqrt{2}$.**Cách 2:** Với $z = a + bi$, theo giả thiết, ta có:

$$\left| z + \frac{4i}{z} \right| = 1 \Leftrightarrow \left(z + \frac{4i}{z} \right) \overline{\left(z + \frac{4i}{z} \right)} = 1 \Leftrightarrow \left(z + \frac{4i}{z} \right) \left(\bar{z} - \frac{4i}{\bar{z}} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 + 4i \left(\frac{\bar{z}}{z} - \frac{z}{\bar{z}} \right) + \frac{16}{|z|^2} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 + \frac{16}{|z|^2} + \frac{4i \left(\frac{\bar{z}}{z} - \frac{z}{\bar{z}} \right)}{|z|^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{16ab}{a^2 + b^2} + a^2 + b^2 + \frac{16}{a^2 + b^2}.$$

$$\text{Vì } (a+b)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{16ab}{a^2 + b^2} \geq -8, \text{ do đó } 1 \geq |z|^2 + \frac{16}{|z|^2} - 8 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{17}-1}{2} \leq |z| \leq \frac{\sqrt{17}+1}{2}.$$

Do đó áp dụng bất đẳng thức mô đun, ta có:

$$\begin{cases} |z-1+i| \leq |z| + |1-i| \leq |z| + \sqrt{2} \leq \frac{1+\sqrt{17}}{2} + \sqrt{2} = \frac{1+2\sqrt{2}+\sqrt{17}}{2} \\ |z-1+i| \geq |z| - |1-i| \leq |z| - \sqrt{2} \geq \frac{-1+\sqrt{17}}{2} - \sqrt{2} = \frac{-1-2\sqrt{2}+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Suy ra $P = 2 - \sqrt{2}$.

Câu 25. Trong các số phức z thỏa mãn $|iz+6-3i|=|2z-6-9i|$ có hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - z_2| = \frac{8}{5}$. Hỏi giá trị lớn nhất của $|z_1 + z_2|$ là?

A. $\frac{56}{5}$.

B. 10.

C. $\frac{44}{5}$.

D. $\frac{76}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết ta có:

$$z = a + bi \Rightarrow \sqrt{(a-3)^2 + (6-b)^2} = \sqrt{(2a-6)^2 + (2b-9)^2}$$

$$\Leftrightarrow (a-3)^2 + (b-4)^2 = 1 \Leftrightarrow |z-3-4i| = 1.$$

Vận dụng bất đẳng thức modun cùng hằng đẳng thức đáng nhớ

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &= |z_1 - 3 - 4i + (z_2 - 3 - 4i) + 6 + 8i| \leq |6 + 8i| + |(z_1 - 3 - 4i) + (z_2 - 3 - 4i)| \\ &\leq 10 + \sqrt{2(|z_1 - 3 - 4i|^2 + |z_2 - 3 - 4i|^2)} - |(z_1 - 3 - 4i) - (z_2 - 3 - 4i)|^2 = 10 + \sqrt{4 - \frac{64}{25}} = \frac{56}{5}. \end{aligned}$$

Bằng cách tương tự ta có $|z_1 + z_2|_{\min} = \frac{44}{5}$.

Câu 26. (Kim Liên 2016-2017) Cho số phức z và w biết chúng đồng thời thỏa mãn hai điều kiện:

$$\left| \frac{(1+i)z}{1-i} + 2 \right| = 1 \text{ và } w = iz. \text{ Tìm giá trị lớn nhất của } M = |z - w|$$

A. $M = 3\sqrt{3}$.

B. $M = 3$.

C. $M = 3\sqrt{2}$.

D. $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

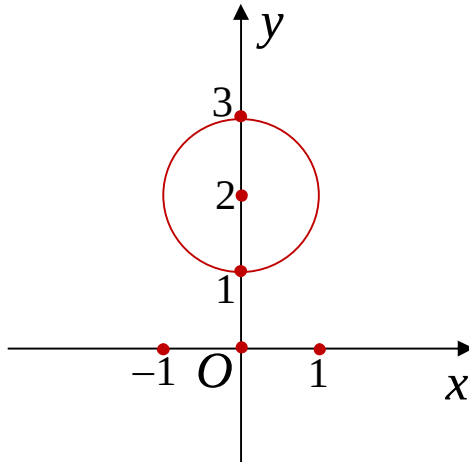
Cách 1.

Ta có: $\left| \frac{(1+i)z}{1-i} + 2 \right| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{(1+i)z + 2(1-i)}{1-i} \right| = 1 \Leftrightarrow |(1+i)z + 2(1-i)| = |1-i|$
 $\Leftrightarrow |(1+i)z + 2(1-i)| = \sqrt{2}.$

Mặt khác: $|(1+i)z| - |2(1-i)| \leq |(1+i)z + 2(1-i)| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |(1+i)z| \leq |2(1-i)| + \sqrt{2}$
 $\Leftrightarrow \sqrt{2}|z| \leq 3\sqrt{2}.$

Khi đó: $M = |z - w| = |z - iz| = |(1-i)z| = \sqrt{2}|z| \leq 3\sqrt{2}.$

Cách 2.



$$\left| \frac{(1+i)z}{1-i} + 2 \right| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{(1+i)z + 2(1-i)}{1-i} \right| = 1 \Leftrightarrow |(1+i)z + 2(1-i)| = |1-i|$$

$$\Leftrightarrow |(1+i)z + 2(1-i)| = \sqrt{2} \quad (1)$$

Đặt $z = x + yi$ thay vào (1) ta được $|(1+i)(x + yi) + 2(1-i)| = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow (x - y + 2)^2 + (x + y - 2)^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 1.$$

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z trên hệ trục tọa độ là đường tròn tâm $I(0; 2)$ bán kính $R = 1$.

Khi đó: $1 \leq |z| \leq 3$

$$\Rightarrow M = |z - w| = |z - iz| = |(1-i)z| = \sqrt{2}|z| \leq 3\sqrt{2}.$$

Câu 27. Cho số phức $z = x + 2yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa $|z| = 1$. Tính tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = x - y$.

A. 0.

B. $\sqrt{5}.$

C. $-\sqrt{5}.$

D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Lời giải

Theo giả thiết ta có:

$$\Rightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ P = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 1 \\ x = P + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (P + y)^2 + 4y^2 - 1 = 0 \\ x = P + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y^2 + 2Py + P^2 - 1 = 0 (*) \\ x = P + y \end{cases}.$$

Để hệ có nghiệm thì phương trình (*) có nghiệm với mọi $y \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \Delta'_{(*)} = P^2 - 5(P^2 - 1) \geq 0$$

$$\Rightarrow P^2 \leq \frac{5}{4} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{5}}{2} \leq P \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \max P + \min P = 0.$$

Câu 28. Cho biết $\left|z + \frac{4}{z}\right| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z|^2 + |z| + 1$?

A. $8 - 3\sqrt{5}$

B. $6 + \sqrt{5}$

C. $6 - \sqrt{5}$

D. $8 + 3\sqrt{5}$

Lời giải

$$\text{Ta có } 4 = \left(z + \frac{4}{z}\right)\left(\bar{z} + \frac{4}{\bar{z}}\right) = |z|^2 + \frac{16}{|z|^2} + 4\left(\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}\right)$$

$$\Rightarrow 4 = |z|^2 + \frac{16}{|z|^2} + 4 \cdot \frac{z^2 + \bar{z}^2}{|z|^2} = |z|^2 + \frac{16}{|z|^2} + 4 \cdot \frac{(z + \bar{z})^2 - 2|z|^2}{|z|^2}$$

$$\text{Vì } (z + \bar{z})^2 = 4[\operatorname{Re}(z)]^2 \geq 0 \text{ do đó } 4 \geq |z|^2 + \frac{16}{|z|^2} - 8$$

$$\Rightarrow |z|^4 - 12|z|^2 + 16 \leq 0 \Rightarrow 6 - 2\sqrt{5} \leq |z|^2 \leq 6 + 2\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{5} - 1 \leq |z| \leq \sqrt{5} + 1 \Rightarrow P \leq 8 + 3\sqrt{5}.$$

Chọn D

Câu 29. Cho số phức $|z^{2017} - 1| = 1$. Gọi $P = |z|$. Tính $A = 2017 \cdot (\max P) - 2017 \cdot (\min P)$.

A. $A = 2017 \cdot \sqrt[2016]{2}$

B. $A = 2017 \cdot \sqrt[2017]{3}$

C. $A = 2017 \cdot \sqrt[2017]{2}$

D. $A = 2017$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \max P = \max |z| > 0 \Leftrightarrow \max P^{2017} = \max |z|^{2017} = \max |z^{2017}|.$$

$$\text{Mặt khác ta cũng có: } \min P = |z| > 0 \Leftrightarrow \min P^{2017} = \min |z|^{2017} = \min |z^{2017}|.$$

Gọi $z^{2017} = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z^{2017} là đường tròn tâm $I(0;1)$

$$\text{có bán kính } R = 1 \Rightarrow \begin{cases} \max P^{2017} = 2 \\ \min P^{2017} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \max P = 2017 \cdot \sqrt[2017]{2} \\ \min P = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 2017 \cdot \sqrt[2017]{2}.$$

Chọn C

ÁP DỤNG CÁC BĐT BUNHIACOPXKI

Câu 30. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 - z_2 = 3 + 4i$ và $|z_1 + z_2| = 5$. Hỏi giá trị lớn nhất của biểu thức $|z_1| + |z_2|$ là?

- A. 5. B. $5\sqrt{3}$. C. $12\sqrt{5}$. D. $5\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Sử dụng đẳng thức đã biết, ta có:

$$2(|z_1|^2 + |z_2|^2) = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 5^2 + 3^2 + 4^2 = 50.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$|z_1| + |z_2| \leq \sqrt{2(|z_1|^2 + |z_2|^2)} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Câu 31. Cho số phức z thỏa $|z| = 1$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z+1| + 2|z-1|$.

- A. $\max T = 2\sqrt{5}$. B. $\max T = 2\sqrt{10}$. C. $\max T = 3\sqrt{5}$. D. $\max T = 3\sqrt{2}$

Lời giải

$$\text{Gọi } z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow a^2 + b^2 = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } T &= |z+1| + 2|z-1| = \sqrt{(a+1)^2 + b^2} + 2\sqrt{(a-1)^2 + b^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + 2a + 1} + 2\sqrt{a^2 + b^2 - 2a + 1} = \sqrt{2a+2} + 2\sqrt{2-2a} \stackrel{B.C.S}{\leq} \sqrt{(1^2 + 2^2)(4)} = 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \max T = 2\sqrt{5}.$$

Câu 32. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = |z+i| + |z-2-i|$.

- A. $\max T = 8\sqrt{2}$. B. $\max T = 4$. C. $\max T = 4\sqrt{2}$. D. $\max T = 8$.

Lời giải

$$T = |z+i| + |z-2-i| = |(z-1) + (1+i)| + |(z-1) - (1+i)|.$$

$$\text{Đặt } w = z-1. \text{ Ta có } |w| = 1 \text{ và } T = |w+(1+i)| + |w-(1+i)|.$$

$$\text{Đặt } w = x + yi. \text{ Khi đó } |w|^2 = 2 = x^2 + y^2.$$

$$\begin{aligned} T &= |(x+1) + (y+1)i| + |(x-1) + (y-1)i| \\ &= 1 \cdot \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} + 1 \cdot \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \\ &\leq \sqrt{(1^2 + 1^2)((x+1)^2 + (y+1)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2)} \\ &= \sqrt{2(2x^2 + 2y^2 + 4)} = 4 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \max T = 4.$$

Chọn B

Câu 33. (THPT LÝ THƯỜNG KIỆT – HÀ NỘI) Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $P = |z+2|^2 - |z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $|z+i|$

- A. $\sqrt{61}$. B. $\sqrt{41}$. C. $5\sqrt{3}$. D. $3\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Vì } |z - 3 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn của số phức z là đường tròn tâm $I(3; 4)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= |z + 2|^2 - |z - i|^2 = (x + 2)^2 + y^2 - x^2 - (y - 1)^2 = 4x + 2y + 3 \\ &= 4x - 12 + 2y - 8 + 23 = 4(x - 3) + 2(y - 4) + 23. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 4 số: $4, x - 3, 2, y - 4$ ta có:

$$P - 23 = 4(x - 3) + 2(y - 4) \leq \sqrt{16 + 4} \cdot \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 4)^2} = 10 \Rightarrow P \leq 33$$

$$\Rightarrow \text{Max} P = 33 \text{ khi } \begin{cases} \frac{x-3}{4} = \frac{y-4}{2} \\ 4x+2y=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4y=-10 \\ 4x+2y=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=5 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow |z + 1| = |5 + 6i| = \sqrt{61}.$$

Câu 34. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z_1| + |z_2|$.

A. $P = 4\sqrt{6}$

B. $P = 2\sqrt{26}$

C. $P = 5 + 3\sqrt{5}$

D. $P = 32 + 3\sqrt{2}$

Lời giải

$$\text{Gọi: } \begin{cases} z_1 = a + bi \\ z_2 = c + di \end{cases} (a, b, c, d \in \mathbb{R}) \Rightarrow \begin{cases} a + c + (b + d)i = 8 + 6i \\ (a - c)^2 + (b - d)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a + c)^2 + (b + d)^2 = 100 \\ (a - c)^2 + (b - d)^2 = 4 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow (a + c)^2 + (b + d)^2 + (a - c)^2 + (b - d)^2 = 104 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 52.$$

$$\text{Mặt khác: } P = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \stackrel{B.C.S}{\leq} \sqrt{(1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)} = 2\sqrt{26}.$$

Cách 2:

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 trên mặt phẳng phức và D là điểm thứ tư của hình bình hành $AOBD \Rightarrow D$ là điểm biểu diễn số phức $(z_1 + z_2) \Rightarrow OD = |z_1 + z_2| = 10$.

$|z_1 - z_2|$ chính là độ dài đoạn AB .

$$\Delta OAB \text{ có } \begin{cases} AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos \widehat{AOB} = 4 \\ OD^2 = OA^2 + OB^2 + 2OA \cdot OB \cdot \cos \widehat{AOB} = 100 \end{cases} \Rightarrow 104 = 2(OA^2 + OB^2) \geq (OA + OB)^2$$

$$\Rightarrow (OA + OB)_{\max} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26} \Leftrightarrow (|z_1| + |z_2|)_{\max} = 2\sqrt{26}.$$

Câu 35. (THPT TX QUẢNG TRỊ LẦN 1 NĂM 2019) Cho hai số phức z, w thỏa mãn $z + 3w = 2 + 2\sqrt{3}i$ và $|z - w| = 2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z| + |w|$ bằng

A. $2\sqrt{21}$

B. $2\sqrt{7}$

C. $\frac{\sqrt{21}}{3}$

D. $\frac{2\sqrt{21}}{3}$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có. } z + 3w = 2 + 2\sqrt{3}i \Rightarrow |z + 3w| = |2 + 2\sqrt{3}i| = 4.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z+3w|^2 = 16 \\ |z-w|^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (z+3w) \cdot (\bar{z}+3\bar{w}) = 16 \\ (z-w) \cdot (\bar{z}-\bar{w}) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 + 9|w|^2 + 3(\bar{z}w + z\bar{w}) = 16 \\ |z|^2 + |w|^2 - (\bar{z}w + z\bar{w}) = 4 \end{cases} \Rightarrow |z|^2 + 3|w|^2 = 7$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$(|z|+|w|)^2 \leq \left(1+\frac{1}{3}\right) \cdot (|z|^2 + 3|w|^2) = \frac{28}{3} \Rightarrow |z|+|w| \leq \frac{2\sqrt{21}}{3}.$$

$$\text{Vậy } P_{\max} = \frac{2\sqrt{21}}{3}.$$

Câu 36. (NGUYỄN TRUNG THIÊN HÀ TĨNH) Với ai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z_1| + |z_2|$ là:

A. $5 + 3\sqrt{5}$.

B. $2\sqrt{26}$.

C. $4\sqrt{6}$.

D. $34 + 3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z_1 = a + bi, z_2 = c + di, (a, b, c, d \in \mathbb{R})$.

$$\text{Ta có: } z_1 + z_2 = 8 + 6i \text{ nên } a + bi + c + di = 8 + 6i \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 8 \\ b + d = 6 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } (a+c)^2 + (b+d)^2 = 100 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 100 - 2ac - 2bd \quad (1).$$

Vì $|z_1 - z_2| = 2$ nên ta có:

$$|a + bi - c - di| = 2 \Leftrightarrow (a-c)^2 + (b-d)^2 = 4 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4 + 2ac + 2bd \quad (2).$$

$$\text{Cộng (1) và (2) ta được: } 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 104.$$

Áp dụng bất đẳng thức $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$ ta có:

$$P^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}\right)^2 \leq 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 104.$$

$$\text{Do đó } P \leq 2\sqrt{26}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức là $2\sqrt{26}$.

Câu 37. (Nguyễn Tấn Thành Yên Bái) Cho z là số phức thỏa mãn $|\bar{z}| = |z + 2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z - 1 + 2i| + |z + 1 + 3i|$ là

A. $5\sqrt{2}$.

B. $\sqrt{13}$.

C. $\sqrt{29}$.

D. $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$.

$$\text{Ta có: } |\bar{z}| = |z + 2i| \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (b+2)^2} \Leftrightarrow 4b + 4 = 0 \Leftrightarrow b = -1$$

$$\Rightarrow z = a - i.$$

$$\text{Xét: } |z - 1 + 2i| + |z + 1 + 3i| = |a - 1 + i| + |a + 1 + 2i| = \sqrt{(1-a)^2 + 1^2} + \sqrt{(1+a)^2 + 2^2}.$$

Áp dụng BĐT Mincôpxki:

$$\sqrt{(1-a)^2 + 1^2} + \sqrt{(1+a)^2 + 2^2} \geq \sqrt{(1-a+1+a)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}.$$

Suy ra: $|z-1+2i|+|z+1+3i|$ đạt GTNN là $\sqrt{13}$ khi $2(1-a)=1+a \Leftrightarrow a=\frac{1}{3}$.

Nhận xét : Bài toán trên có thể được giải quyết bằng cách đưa về bài toán hình học phẳng.

Câu 38. (Đặng Thành Nam Đề 12) Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|2z + 2 - 3i| = 1$. Khi biểu thức $P = 2|z + 2| + |z - 3|$ đạt giá trị lớn nhất thì giá trị của $a - b$ bằng

A. -3.

B. 2.

C. -2.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết có:

$$|2(a + bi) + 2 - 3i| = 1 \Leftrightarrow |(2a + 2) + (2b - 3)i| = 1 \Leftrightarrow (2a + 2)^2 + (2b - 3)^2 = 1.$$

$$\Leftrightarrow (a + 1)^2 + \left(b - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} (*)$$

Cách 1: (Đại số)

$$(*) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = -3 - 2a + 3b.$$

$$\text{Từ } (*) \text{ suy ra } \left(b - \frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 \leq b \leq 2.$$

Khi đó biến đổi và sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được:

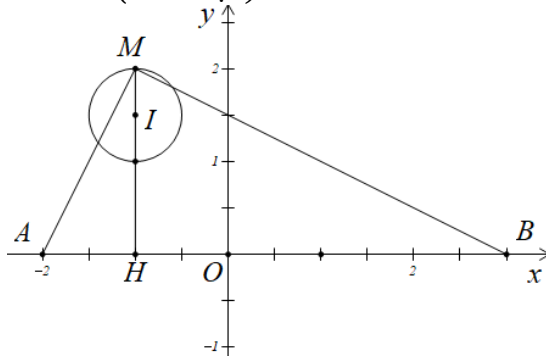
$$\begin{aligned} P &= 2|z + 2| + |z - 3| = 2\sqrt{(a + 2)^2 + b^2} + \sqrt{(a - 3)^2 + b^2} \\ &= 2\sqrt{a^2 + b^2 + 4a + 4} + \sqrt{a^2 + b^2 - 6a + 9} \\ &= 2\sqrt{(-3 - 2a + 3b) + 4a + 4} + \sqrt{(-3 - 2a + 3b) + 9 - 6a} \\ &= 2\sqrt{2a + 3b + 1} + \sqrt{-8a + 3b + 6} \\ &= \sqrt{8a + 12b + 4} + \sqrt{-8a + 3b + 6} \leq \sqrt{(1+1)(8a + 12b + 4 - 8a + 3b + 6)} \\ &= \sqrt{2(15b + 10)} \leq \sqrt{2(15 \cdot 2 + 10)} = 4\sqrt{5}. \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} 8a + 12b + 4 = -8a + 3b + 6 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Suy ra $\text{Max} P = 4\sqrt{5}$ khi $a = -1, b = 2$.

Vậy $a - b = -3$.

Cách 2: (Hình học)



Gọi $M(a; b)$ là điểm biểu diễn hình học của số phức z .

Từ (*) suy ra M thuộc đường tròn (C) có tâm $I\left(-1; \frac{3}{2}\right)$ bán kính $R = \frac{1}{2}$.

Gọi $A(-2; 0), B(3; 0)$ và $H(-1; 0)$.

Khi đó $P = 2MA + MB$ và $\overrightarrow{HB} = -4\overrightarrow{HA}$.

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được:

$$P^2 = (2MA + MB)^2 \leq (1+1)(4MA^2 + MB^2).$$

Ta có:

$$\begin{aligned} 4MA^2 + MB^2 &= 4\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 4(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA})^2 + (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB})^2 \\ &= (4MH^2 + 8\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HA} + HA^2) + (MH^2 + 2\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HB} + HB^2) \\ &= 5MH^2 + 2\overrightarrow{MH} (4\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB}) + (HA^2 + HB^2) = 5MH^2 + (HA^2 + HB^2). \end{aligned}$$

Do các điểm H, A, B cố định và $P > 0$ nên P lớn nhất khi MH là lớn nhất

$\Leftrightarrow M$ là giao điểm của đường thẳng IH với đường tròn (C) (I nằm giữa M và H).

Dễ dàng tìm được $M(-1; 2)$ hay $a = -1; b = 2$. Vậy $a - b = -3$.

Câu 39. (SỞ NAM ĐỊNH 2018-2019) Cho các số phức z, w thỏa mãn $|w + i| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w = (2 + i)(z - 4)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z - 2i| + |z - 6 - 2i|$.

A. 7.

B. $2\sqrt{53}$.

C. $2\sqrt{58}$

D. $4\sqrt{13}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1.

Ta có $5w = (2 + i)(z - 4) \Leftrightarrow 5w + 5i = 5i + (2 + i)(z - 4) \Leftrightarrow 5|w + i| = |(2 + i)z - 8 + i|$.

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ ta được $|(2 + i)(x + yi) - 8 + i| = 3\sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow |2x - y - 8 + (x + 2y + 1)i| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow (2x - y - 8)^2 + (x + 2y + 1)^2 = 45$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + y^2 + 64 - 4xy - 32x + 16y + x^2 + 4y^2 + 1 + 4xy + 2x + 4y = 45$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 5y^2 - 30x + 20y + 20 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

Đặt $\begin{cases} x = 3\sin \alpha + 3 \\ y = 3\cos \alpha - 2 \end{cases}$. Khi đó

$$P = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} + \sqrt{(x - 6)^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{18\sin \alpha - 24\cos \alpha + 34} + \sqrt{-18\sin \alpha - 24\cos \alpha + 34}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhia Copsky ta có

$$P \leq \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{-48\cos \alpha + 68} \leq 2\sqrt{58}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} \frac{\sqrt{18\sin \alpha - 24\cos \alpha + 34}}{1} = \frac{\sqrt{-18\sin \alpha - 24\cos \alpha + 34}}{1} \\ \cos \alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = -1 \\ \sin \alpha = 0 \end{cases}.$$

Suy ra $\max P = 2\sqrt{58}$ khi $z = 3 - 5i$.

Cách 2.

Ta có $5w = (2 + i)(z - 4) \Leftrightarrow 5w + 5i = 5i + (2 + i)(z - 4) \Leftrightarrow 5|w + i| = |(2 + i)z - 8 + i|$.

$$\Leftrightarrow 5|w + i| = \left| 2 + i \right| \left| z - \frac{8 - i}{2 + i} \right| \Leftrightarrow 3\sqrt{5} = \sqrt{5} |z - (3 - 2i)| \Leftrightarrow |z - (3 - 2i)| = 3.$$

Khi đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(3; -2)$ và bán kính $R = 3$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z ;

$A(0;2)$ là điểm biểu diễn số phức $z_1 = 2i$;

$B(6;2)$ là điểm biểu diễn số phức $z_2 = 6+2i$.

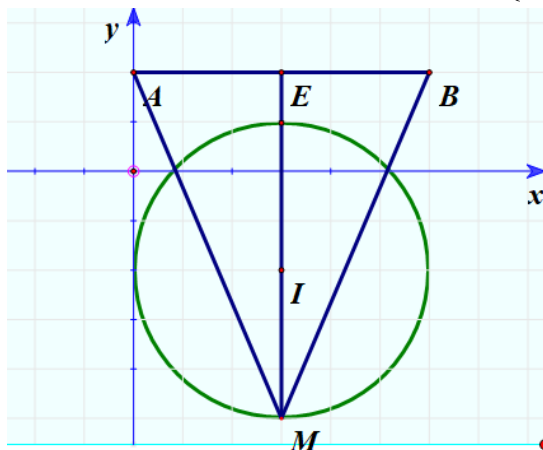
$E(3;2)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Ta có $P = MA + MB \Rightarrow P^2 = (MA + MB)^2 \leq 2(MA^2 + MB^2) = 4ME^2 + AB^2$.

Khi đó P đạt giá trị lớn nhất khi ME đạt giá trị lớn nhất hay $ME = R + IE$.

Vậy $P_{\max} = \sqrt{4(R + IE)^2 + AB^2} = 2\sqrt{58}$

$$\text{khi } \overrightarrow{MI} = \frac{3}{7}\overrightarrow{ME} \Leftrightarrow 7\overrightarrow{MI} - 3\overrightarrow{ME} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{7x_I - 3x_E}{4} \\ y_M = \frac{7y_I - 3y_E}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 3 \\ y_M = -5 \end{cases}$$



Câu 40. (Sở Bắc Ninh 2019) Cho số phức z thỏa mãn $|(1+i)z + 1 - 3i| = 3\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z + 2 + i| + \sqrt{6}|z - 2 - 3i|$ bằng

A. $5\sqrt{6}$.

B. $\sqrt{15}(1 + \sqrt{6})$.

C. $6\sqrt{5}$.

D. $\sqrt{10} + 3\sqrt{15}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $|(1+i)z + 1 - 3i| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow |z - 1 - 2i| = 3$ nên tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(1;2)$, bán kính $R = 3$.

Đặt $a = z - 1 - 2i, b = 1 + i$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} |z + 2 + i|^2 = |a + 3b|^2 = |a|^2 + 9|b|^2 + 3(a\bar{b} + \bar{a}b) \\ |z - 2 - 3i|^2 = |a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - (a\bar{b} + \bar{a}b) \end{cases}$$

$$\Rightarrow |z + 2 + i|^2 + 3|z - 2 - 3i|^2 = |a + 3b|^2 + 3|a - b|^2 = 4|a|^2 + 12|b|^2 = 60.$$

$$\text{Khi đó } P = |a + 3b| + \sqrt{2}\sqrt{3}|a - b| \leq \sqrt{(1+2)(|a + 3b|^2 + 3|a - b|^2)} = 6\sqrt{5}.$$

Câu 41. (SỞ GD&ĐT KIÊN GIANG 2019) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 2 + 3i| = 5|z_2 + 2 + 3i| = 3$

. Gọi m_0 là giá trị lớn nhất của phần thực số phức $\frac{z_1 + 2 + 3i}{z_2 + 2 + 3i}$. Tìm m_0 .

A. $m_0 = \frac{3}{5}$.

B. $m_0 = \frac{81}{25}$.

C. $m_0 = 3$.

D. $m_0 = 5$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} w_1 = z_1 + 2 + 3i = a + bi \\ w_2 = z_2 + 2 + 3i = c + di \end{cases}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, theo giả thiết ta có: $\begin{cases} |w_1| = 3 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ |w_2| = \frac{3}{5} = \sqrt{c^2 + d^2} \end{cases}$.

$$\frac{z_1 + 2 + 3i}{z_2 + 2 + 3i} = \frac{w_1}{w_2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{\frac{9}{25}}.$$

Phần thực của số phức $\frac{w_1}{w_2}$ là $\frac{25(ac + bd)}{9}$.

Ta có $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \Leftrightarrow (ac + bd)^2 \leq 9 \cdot \frac{9}{25} \Rightarrow ac + bd \leq \frac{9}{5}$.

$\Rightarrow \frac{25(ac + bd)}{9} \leq 5$. Dấu "=" xảy ra khi $ad = bc$ hay $\frac{w_1}{w_2}$ là số thực và $|w_1| = 5|w_2| = 3$.

Vậy $m_0 = 5$.

Câu 42. (Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đắk Lắk) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 2| = |z + 2i|$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |z - 1 - 2i| + |z - 3 - 4i| + |z - 5 - 6i|$ được viết dạng $\frac{a + b\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$ với a, b là số hữu tỉ. Giá trị của $3a - b$ bằng

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có: $|z + 2| = |z + 2i|$

$$\Leftrightarrow |(x + yi) + 2| = |(x + yi) + 2i| \Leftrightarrow |(x + 2) + yi| = |x + (y + 2)i| \Leftrightarrow (x + 2)^2 + y^2 = x^2 + (y + 2)^2$$

$$\Leftrightarrow x = y \text{ hay } z = x + xi$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} A &= |(x - 1) + (x - 2)i| + |(x - 3) + (x - 4)i| + |(x - 5) + (x - 6)i| \\ &= \sqrt{(x - 1)^2 + (x - 2)^2} + \sqrt{(x - 3)^2 + (x - 4)^2} + \sqrt{(x - 5)^2 + (x - 6)^2} \\ &= \sqrt{2x^2 - 6x + 5} + \sqrt{2x^2 - 14x + 25} + \sqrt{2x^2 - 22x + 61} \\ &= \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{11}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \right) + \sqrt{2\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \\ &\geq \sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(x - \frac{3}{2} + \frac{11}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{2\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \\ &\geq \sqrt{2} \cdot \sqrt{17} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1 + 2\sqrt{17}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} x - \frac{3}{2} = \frac{11}{2} - x \\ x - \frac{7}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}.$$

Vậy: $\min A = \frac{1+2\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$. Suy ra $a=1$, $b=2$ nên $3a-b=1$.

Câu 43. (Đặng Thành Nam Đề 3) Trong các số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=2$ có hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - z_2| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1|^2 - |z_2|^2$ bằng

A. -10 .

B. $-4-3\sqrt{5}$.

C. -5 .

D. $6-2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} z_1 = a + bi \\ z_2 = c + di \end{cases} (a, b, c, d \in \mathbb{R}). \text{ Theo đề ta có: } \begin{cases} (a-3)^2 + (b-4)^2 = 4 & (1) \\ (c-3)^2 + (d-4)^2 = 4 & (2) \\ (a-c)^2 + (b-d)^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

Khi lấy (1) - (2) theo vế có $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 6(a-c) + 8(b-d)$.

Kết hợp sử dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz và sử dụng (3) ta có:

$$|z_1|^2 - |z_2|^2 = a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 6(a-c) + 8(b-d) \geq -\sqrt{(6^2 + 8^2)[(a-c)^2 + (b-d)^2]} = -10.$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } |z_1|^2 - |z_2|^2 \text{ là } -10 \text{ khi } \begin{cases} (a-3)^2 + (b-4)^2 = 4 \\ (c-3)^2 + (d-4)^2 = 4 \\ (a-c)^2 + (b-d)^2 = 1 \\ \frac{a-c}{6} = \frac{b-d}{8} = k < 0 \end{cases}.$$

Tồn tại 2 cặp số phức thỏa mãn là:

$$\begin{cases} z_1 = \frac{27-4\sqrt{15}}{10} + \frac{144+12\sqrt{15}}{40}i \\ z_2 = \frac{33-4\sqrt{15}}{10} + \frac{176+12\sqrt{15}}{40}i \\ z_1 = \frac{27+4\sqrt{15}}{10} + \frac{144-12\sqrt{15}}{40}i \\ z_2 = \frac{33+4\sqrt{15}}{10} + \frac{176-12\sqrt{15}}{40}i \end{cases}.$$

ÁP DỤNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

Câu 44. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+3|1-z|$.

A. $3\sqrt{15}$

B. $6\sqrt{5}$

C. $\sqrt{20}$

D. $2\sqrt{20}$.

Lời giải

Gọi $z = x + yi$; ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$). Ta có: $|z|=1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x \in [-1; 1]$.

Ta có: $P = |1+z| + 3|1-z| = \sqrt{(1+x)^2 + y^2} + 3\sqrt{(1-x)^2 + y^2} = \sqrt{2(1+x)} + 3\sqrt{2(1-x)}$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2(1+x)} + 3\sqrt{2(1-x)}$; $x \in [-1; 1]$. Hàm số liên tục trên $[-1; 1]$ và với

$x \in (-1; 1)$ ta có: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2(1+x)}} - \frac{3}{\sqrt{2(1-x)}} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5} \in (-1; 1)$.

Ta có: $f(1) = 2$; $f(-1) = 6$; $f\left(-\frac{4}{5}\right) = 2\sqrt{20} \Rightarrow P_{\max} = 2\sqrt{20}$.

Chọn D

Câu 45. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+1| + |z^2 - z + 1|$. Tính giá trị của $M.m$.

A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{39}{4}$.

C. $3\sqrt{3}$.

D. $\frac{13}{4}$.

Lời giải

Gọi $z = x + yi$; ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$). Ta có: $|z|=1 \Leftrightarrow z.\bar{z} = 1$

Đặt $t = |z+1|$, ta có $0 = |z|-1 \leq |z+1| \leq |z|+1 = 2 \Rightarrow t \in [0; 2]$.

Ta có $t^2 = (1+z)(1+\bar{z}) = 1 + z.\bar{z} + z + \bar{z} = 2 + 2x \Rightarrow x = \frac{t^2 - 2}{2}$.

Suy ra $|z^2 - z + 1| = |z^2 - z + z.\bar{z}| = |z||z-1+\bar{z}| = \sqrt{(2x-1)^2} = |2x-1| = |t^2 - 3|$.

Xét hàm số $f(t) = t + |t^2 - 3|$, $t \in [0; 2]$. Bằng cách dùng đạo hàm, suy ra

$\max f(t) = \frac{13}{4}$; $\min f(t) = \sqrt{3} \Rightarrow M.m = \frac{13\sqrt{3}}{4}$.

Chọn A

Câu 46. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z^2 - z| + |z^2 + z + 1|$ với z là số phức thỏa mãn $|z|=1$.

A. $\max P = \frac{13}{4}$

B. $\max P = \frac{9}{4}$

C. $\max P = \frac{13}{3}$

D. $\max P = \frac{11}{3}$

Lời giải

Ta có $\begin{cases} |z^2 - z|^2 = (z^2 - z)(\bar{z}^2 - \bar{z}) = 2 - z - \bar{z} = 2 - 2x \Rightarrow |z^2 - z| = \sqrt{2 - 2x} \\ |z^2 + z + 1|^2 = (z^2 + z + 1)(\bar{z}^2 + \bar{z} + 1) = 1 + 2(z + \bar{z}) + (z + \bar{z})^2 \Rightarrow |z^2 + z + 1| = |2x + 1| \end{cases}$

Từ đây ta tìm được $\max P = \max_{[-1; 1]} (\sqrt{2 - 2x} + |2x + 1|) = \frac{13}{4} \Leftrightarrow x = \frac{7}{8}$.

Câu 47. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z^2 + 1| - |1 + z|$. Tính $T = a + b$.

- A. $T = 2 - \sqrt{2}$. B. $T = 2 + \sqrt{2}$. C. $T = 2 - \sqrt{2}$. D. $T = -\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Với $z = m + ni$, ta có: $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 1 = m^2 + n^2 \Rightarrow m^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$ và:

$$\begin{aligned} P &= \left| z \left(z + \frac{1}{z} \right) \right| - |z + 1| = \left| z + \frac{1}{z} \right| - |z + 1| = \left| z + \frac{z \cdot \bar{z}}{z} \right| - |z + 1| = |z + \bar{z}| - |z + 1| = 2|m| - \sqrt{(m+1)^2 + n^2} \\ &= 2|m| - \sqrt{(m+1)^2 + 1 - m^2} = 2|m| - \sqrt{2(1+m)}, \forall m \in [-1; 1]. \end{aligned}$$

Vậy $a = -\sqrt{2}, b = 2 \Rightarrow T = 2 - \sqrt{2}$.

Câu 48. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 1| + |z^2 - z + 1|$. Tính $T = \frac{a}{b^2 + 1}$.

- A. $T = \frac{5}{4}$. B. $T = \frac{5}{26}$. C. $T = \frac{\sqrt{3}}{4}$. D. $T = \frac{13}{16}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $z = m + ni$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = m^2 + n^2 = 1$

Do đó biến đổi P ta được

$$\begin{aligned} P &= |z + 1| + \left| z \left(z - 1 + \frac{1}{z} \right) \right| = |z + 1| + |z - 1 + \bar{z}| = \sqrt{(m+1)^2 + n^2} + |2m - 1| \\ &= |2m - 1| + \sqrt{2m + 2} \in \left[\sqrt{3}; \frac{13}{4} \right]; \forall -1 \leq m \leq 1. \end{aligned}$$

$$\text{Nên } a = \frac{13}{4}; b = \sqrt{3} \Rightarrow T = \frac{13}{4(1+3)} = \frac{13}{16}.$$

Câu 49. Cho số phức z thỏa mãn $|(z+2)i+1| + |(\bar{z}-2)i-1| = 6$. Tính tổng $T = \max|z| + \min|z|$?

- A. $T = \frac{5\sqrt{5}-2}{2}$. B. $T = 0$. C. $T = 6$. D. $T = \frac{3\sqrt{5}-2}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $z = a + bi$; $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } |(z+2)i+1| + |(\bar{z}-2)i-1| = 6$$

$$\Leftrightarrow |(a+bi+2)i+1| = 2|(a-bi-2)i-1| = 6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a+2)^2 + (1-b)^2} + \sqrt{(a-2)^2 + (b-1)^2} = 6$$

$$\Leftrightarrow 5(9-a^2) = 9(b-1)^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{45-9(b-1)^2}{5} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{5} \leq b \leq 1 + \sqrt{5}$$

$$\text{Khi đó } |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{45 - 9(b-1)^2}{5} + b^2}.$$

Khảo sát hàm số, ta có

$$\min_{[1-\sqrt{5}; 1+\sqrt{5}]} \sqrt{\frac{45 - 9(b-1)^2}{5} + b^2} = y(1 - \sqrt{5}) = \sqrt{5} - 1;$$

$$\max_{[1-\sqrt{5}; 1+\sqrt{5}]} \sqrt{\frac{45 - 9(b-1)^2}{5} + b^2} = y\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Vậy } T = \frac{5\sqrt{5} - 2}{2}$$

Câu 50. Cho hai số phức z thỏa mãn: $|z| = 1$. Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z^3 + 1| + |z^2 - z + 1|$. Tính $T = a + b$.

$$\text{A. } T = \frac{4(13 + 5\sqrt{10})}{27}.$$

$$\text{B. } T = 5.$$

$$\text{C. } T = \frac{4(15 + 5\sqrt{10})}{27}.$$

$$\text{D. } T = \frac{4(14 + 5\sqrt{10})}{27}.$$

Lời giải

Chọn A

Với $z = m + ni, z\bar{z} = |z|^2 = m^2 + n^2 = 1$ và biến đổi biểu thức P ta có:

$$\begin{aligned} P &= |z^3 + 1| + |z^2 - z + 1| = |z^2 - z + 1|(|z + 1| + 1) \\ &= \left| z \left(z - 1 + \frac{1}{z} \right) \right| (|z + 1| + 1) = |(z - 1 + \bar{z})| (|z + 1| + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (2m - 1) \left(1 + \sqrt{(m + 1)^2 + n^2} \right) \\ &= f(m) = (2m - 1) \left(1 + \sqrt{2m + 2} \right) \end{aligned}$$

Khảo sát $f(m) = (2m - 1) \left(1 + \sqrt{2m + 2} \right)$ trên $[-1; 1]$ ta có

$$\min_{[-1; 1]} f(m) = 0;$$

$$\max_{[-1; 1]} f(m) = f\left(\frac{-7 - 2\sqrt{10}}{18}\right) = \frac{4(13 + 5\sqrt{10})}{27}$$

Câu 51. Cho số phức thỏa $|z| = 1$. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = |z + 1| + |z^2 - z + 1|$.

Lời giải

$$\text{Đặt } z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow a^2 + b^2 = 1.$$

$$\square |z + 1| = \sqrt{(a + 1)^2 + b^2} = \sqrt{2(a + 1)}$$

$$\square |z^2 - z + 1| = |(a^2 + 2abi - b^2) - (a + bi) + a^2 + b^2| = |(2a^2 - a) + (2a - 1)bi|$$

$$= \sqrt{(2a^2 - a)^2 + (2a - 1)^2 b^2} = \sqrt{(2a - 1)^2 (a^2 + b^2)} = |2a - 1|.$$

$$\text{Vậy } P = \sqrt{2(a+1)} + |2a-1|.$$

$$\text{Xét } a \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \Rightarrow \begin{cases} \max P = P(1) = 3 \\ \min P = P\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} \end{cases} \cdot \text{Xét } a \in \left[-1; \frac{1}{2}\right] \Rightarrow \begin{cases} \max P = P\left(\frac{-7}{8}\right) = \frac{13}{4} \\ \min P = P\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} \end{cases}.$$

$$\text{Kết luận } \begin{cases} \max_{|z|=1} P = \frac{13}{4} \Rightarrow z = -\frac{7}{8} \pm \frac{\sqrt{15}}{8}i \\ \min_{|z|=1} P = \sqrt{3} \Rightarrow z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}.$$

Câu 52. (Sở Hưng Yên Lần1) Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+1| + |z^2 - z + 1|$. Tính $M.m$.

A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{39}{4}$.

C. $3\sqrt{3}$.

D. $\frac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

Do $|z|=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$. Suy ra $x, y \in [-1; 1]$.

Ta có $z.\bar{z} = |z|^2 = 1$. Thay vào P ta được:

$$\begin{aligned} P &= |z+1| + |z^2 - z + z.\bar{z}| = |z+1| + |z(z-1+\bar{z})| = |z+1| + |z| \cdot |z+\bar{z}-1| = |z+1| + |z+\bar{z}-1| \\ &= \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + |2x-1| = \sqrt{2x+2} + |2x-1|. \end{aligned}$$

Xét hàm số $y = f(x) = \sqrt{2x+2} + |2x-1|$

$$\text{Ta có } y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x+2} - 2x + 1 & \text{khi } -1 \leq x < \frac{1}{2} \\ \sqrt{2x+2} + 2x - 1 & \text{khi } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2x+2}} - 2 & \text{khi } -1 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2x+2}} + 2 & \text{khi } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2x+2}} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < \frac{1}{2} \\ \sqrt{2x+2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{7}{8}$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $[-1; 1]$

x	-1	$-\frac{7}{8}$	$\frac{1}{2}$	1		
y'		+	0	-		+
y	3	$\frac{13}{4}$	$\sqrt{3}$	3		

Suy ra $\begin{cases} m = \min_{[-1;1]} f(x) = \sqrt{3} \\ M = \max_{[-1;1]} f(x) = \frac{14}{3} \end{cases}$

Vậy $M.m = \frac{13\sqrt{3}}{4}$.

Câu 53. Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn điều kiện $|z+1-i| + |z+2-3i| = \sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P = x|z|^2$. Tổng $M + 2m$ bằng

A. -54.

B. 27.

C. 18.

D. -9.

Lời giải

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow M_{(z)} = (x; y)$ và $A(-1;1), B(-2;3)$ suy ra $AB = \sqrt{5}$.

Từ giả thiết ta có

$$|z+1-i| + |z+2-3i| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} = MA + MB = AB.$$

$\Rightarrow M$ thuộc đường thẳng $(AB): 2x + y + 1 = 0 \Rightarrow y = -2x - 1$ với $x \in [-2; -1]$.

Khi đó $P = x|z|^2 = x[x^2 + (2x+1)^2] = 5x^3 + 4x^2 + x$. Đặt $f(x) = 5x^3 + 4x^2 + x$.

Xét hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2; -1]$, có $f'(x) = 15x^2 + 8x + 1 > 0; \forall x \in [-2; -1]$.

Suy ra $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $[-2; -1] \Rightarrow \begin{cases} M = f(-1) = -2 \\ m = f(-2) = -26 \end{cases} \Rightarrow M + 2m = -54.$

Chọn A

Câu 54. Cho số phức $z = \frac{i-m}{1-m(m-2i)}$ ($m \in \mathbb{R}$). Gọi k ($k \in \mathbb{R}$) là giá trị nhỏ nhất sao cho tồn tại

$|z-1| \leq k$. Giá trị k thuộc khoảng nào sau đây.

A. $(\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$.

B. $(\frac{1}{2}; \frac{2}{3})$.

C. $(\frac{2}{3}; \frac{4}{5})$.

D. $(\frac{4}{5}; 1)$

Lời giải

$$z = \frac{i-m}{1-m(m-2i)} = \frac{i-m}{-i^2 + 2mi - m^2} = \frac{-1}{i-m} \Rightarrow z-1 = \frac{(1-m)+i}{m-i}$$

Ta có: $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ ($b \neq 0$). Áp dụng $|z-1| = \frac{|(1-m)+i|}{|m-i|} = \sqrt{\frac{m^2 - 2m + 1}{m^2 + 1}}$

$$\Rightarrow |z-1| \leq k \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ \frac{m^2-2m+2}{m^2+1} \leq k^2 \end{cases} \cdot \text{Xét } f(m) = \frac{m^2-2m+2}{m^2+1}$$

Theo yêu cầu bài toán, tồn tại $k_{\min}$ để $|z-1| \leq k \Rightarrow \min f(m) \leq k^2$

$$\text{Ta có } \min f(m) = f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4} \Rightarrow k \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2} (k > 0).$$

Vậy $k = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ là giá trị k cần tìm $\Rightarrow B$.

Cách biến đổi khác, bình thường hơn:

$$z = \frac{i-m}{1-m(m-2i)} = \frac{i-m}{-i^2+2mi-m^2} = \frac{-1}{i-m} = \frac{m}{m^2+1} + \frac{i}{m^2+1}$$

$$\Rightarrow z-1 = \frac{m-m^2-1}{m^2+1} + \frac{i}{m^2+1} \Rightarrow |z-1| = \sqrt{\left(\frac{m-m^2-1}{m^2+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{m^2+1}\right)^2}$$

$$\Rightarrow |z-1| = \sqrt{\left[\frac{m-(m^2+1)}{m^2+1}\right]^2 + \left(\frac{1}{m^2+1}\right)^2} = \sqrt{\frac{m^2-2m(m^2+1)+(m^2+1)^2+1}{(m^2+1)^2}} = \sqrt{\frac{m^2-2m+2}{m^2+1}}.$$

Câu 55. (THPT Sơn Tây Hà Nội 2019) Cho số phức z có $|z|=1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |1-z| + |1+z^2|$. Tính giá trị $M^2 + m^2$.

A. 20.

B. 18.

C. 24.

D. 16.

Lời giải

Cách 1: (Phương pháp đại số)

+) Gọi $z = x + yi$ (với $x, y \in \mathbb{R}$).

Vì $|z|=1$ ta có $z \cdot \bar{z} = 1$ và $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2$ (với $x \in [-1; 1]$).

+) Đặt $t = |1-z| \Rightarrow 0 \leq t = |1-z| \leq 1+|z| \Rightarrow t \in [0; 2]$ và

$$t = |1-z| = \sqrt{(1-x)^2 + y^2} = \sqrt{(1-x)(1-\bar{z})} = \sqrt{(1-x)(1-\bar{z})} = \sqrt{1-x-\bar{z}+z\bar{z}} = \sqrt{2-(x+yi)-(x-yi)} = \sqrt{2-2x}$$

$$\Rightarrow t^2 = 2-2x \Rightarrow x = \frac{2-t^2}{2}.$$

$$+) \text{ Ta có: } P = |1-z| + |1+z^2| = t + |z \cdot \bar{z} + z^2| = t + |z| \cdot |\bar{z} + z| = t + |2x| = t + |2 - t^2|$$

Xét hàm số $f(t) = t + |2-t^2|$ trên $[0; 2]$.

$$\square \text{ Với } t \in [0; \sqrt{2}] \text{ ta có: } f(t) = t + 2 - t^2 \Rightarrow f'(t) = 1 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{5} (10^1 i).$$

suy ra $f(0) = 2$ và $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

$$\square \text{ Với } t \in (\sqrt{2}; 2] \text{ ta có: } f(t) = t - 2 + t^2 \Rightarrow f'(t) = 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{5} (10^1 i).$$

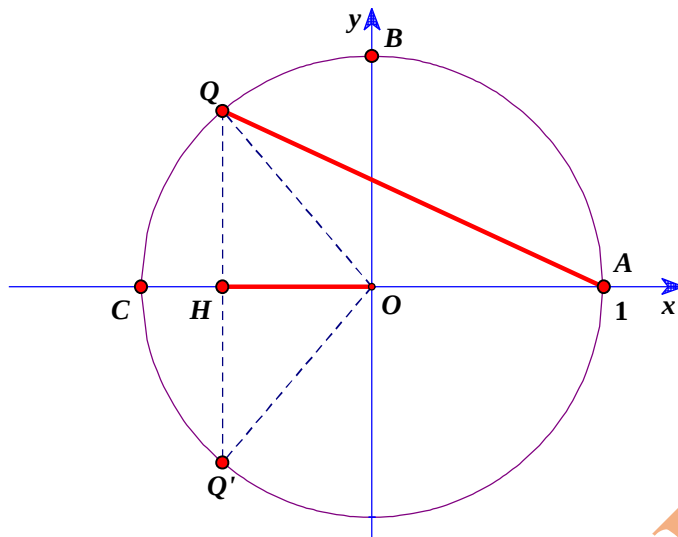
suy ra $f(2) = 4$.

Vậy $P_{\max} = M = 4$ và $P_{\min} = m = \sqrt{2} \Rightarrow M^2 + m^2 = 18$.

Cách 2: (Phương pháp hình học)

+) Giả sử số phức z được biểu diễn bởi điểm $Q(x; y) \Rightarrow \bar{z}$ có điểm biểu diễn là điểm $Q'(x; -y)$ đối xứng với điểm Q qua trục Ox .

+) Theo giả thiết $|z|=1$ nên tập hợp điểm Q là đường tròn tâm $O(0;0)$ và bán kính bằng 1. Ta có hình vẽ như sau:



$$+) |z|=1 \Rightarrow z\bar{z}=1 \Rightarrow P=|1-z|+|1+z^2|=|z-1|+|z\bar{z}+z^2|=|z-1|+|z|\cdot|\bar{z}+z|=|z-1|+|\bar{z}+z|.$$

+) Từ hình vẽ ta có: $|z-1|=AQ$ và $|\bar{z}+z|=|2x|=2.OH$, suy ra:

$$P=AQ+2.OH$$

$$\Rightarrow P_{\max} \Leftrightarrow Q \equiv C \Rightarrow M = P_{\max} = AC + 2OC = 2 + 2.1 = 4.$$

$$P_{\min} \Leftrightarrow Q \equiv B \Rightarrow m = P_{\min} = AB + 2.OO = AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } M^2 + m^2 = 18.$$

Câu 56. (SỞ PHÚ THỌ LẦN 2 NĂM 2019) Giả sử z là số phức thỏa mãn $|iz - 2 - i| = 3$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $2|z - 4 - i| + |z + 5 + 8i|$ bằng

A. $18\sqrt{5}$.

B. $3\sqrt{15}$.

C. $15\sqrt{3}$.

D. $9\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } |iz - 2 - i| = 3 \Leftrightarrow |i| \cdot \left| z - \frac{2+i}{i} \right| = 3 \Leftrightarrow |z - 1 + 2i| = 3 \quad (1)$$

Gọi $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Từ (1), ta có } (a-1)^2 + (b+2)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 + 3\sin t \\ b = -2 + 3\cos t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Suy ra } z = (1 + 3\sin t) + (-2 + 3\cos t)i.$$

$$\text{Đặt } P = 2|z - 4 - i| + |z + 5 + 8i|. \text{ Khi đó:}$$

$$\begin{aligned}
 P &= 2\sqrt{(-3+3\sin t)^2 + (-3+3\cos t)^2} + \sqrt{(6+3\sin t)^2 + (6+3\cos t)^2} \\
 &= 6\sqrt{3-2\sin t-2\cos t} + 3\sqrt{9+4\sin t+4\cos t} = 6\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)} + 3\sqrt{9+4\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}
 \end{aligned}$$

Đặt $u = \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$, $u \in [-1;1]$.

Xét hàm số $f(u) = 6\sqrt{3-2\sqrt{2}u} + 3\sqrt{9+4\sqrt{2}u}$ trên đoạn $[-1;1]$

$$f'(u) = \frac{-6\sqrt{2}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}u}} + \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{9+4\sqrt{2}u}}. \text{ Cho } f'(u) = 0 \Rightarrow u = \frac{-1}{\sqrt{2}} \in [-1;1]$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(u)$:

u	-1	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	1
f'(u)	+	0	-
f(u)	$12\sqrt{2}+3$	$9\sqrt{5}$	$12\sqrt{2}-3$

Do vậy giá trị lớn nhất của P là $9\sqrt{5}$. Dấu bằng xảy ra khi

$$u = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ t = -\pi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \begin{cases} z = -2-2i \\ z = 1-5i \end{cases}$$

Cách khác: Sử dụng Bất đẳng thức Bunhia đánh giá

$$\begin{aligned}
 P &= 6\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)} + 3\sqrt{9+4\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)} \\
 &= 3\sqrt{2}\sqrt{6-4\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)} + 3\sqrt{9+4\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)} \leq \sqrt{(18+9)(6+9)} = 9\sqrt{5}.
 \end{aligned}$$

Cách 2 (thông dụng hơn):

$$\text{Ta có: } |iz-2-i| = 3 \Leftrightarrow |i| \cdot \left|z - \frac{2+i}{i}\right| = 3 \Leftrightarrow |z-1+2i| = 3(1)$$

Gọi $z = a+bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Từ (1), ta có } (a-1)^2 + (b+2)^2 = 9 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2a - 4b + 4.$$

$$\text{Khi đó: } P = 2\sqrt{(a-4)^2 + (b-1)^2} + \sqrt{(a+5)^2 + (b+8)^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\sqrt{a^2 + b^2 - 8a - 2b + 17} + \sqrt{a^2 + b^2 + 10a + 16b + 89} = 2\sqrt{-6a - 6b + 21} + \sqrt{2}\sqrt{6a + 6b + \frac{91}{2}} \\
 &\leq \sqrt{(4+2)\left(21 + \frac{93}{2}\right)} = \sqrt{405} = 9\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

Câu 57. (Chuyên Sơn La Lần 3 năm 2018-2019) Cho số phức z có phần thực bằng $\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của $\left|\frac{1}{z} - i\right|$ bằng

A. $\sqrt{2}$.

B. 1.

C. $1+\sqrt{2}$.

D. 2.

Chọn A

Đặt $z = \sqrt{2} + bi, b \in \mathbb{R}$.

$$\left| \frac{1}{z} - i \right| = \left| \frac{1 - zi}{z} \right| = \frac{|1 - zi|}{|z|} = \frac{|1 - (\sqrt{2} + bi)i|}{\sqrt{2 + b^2}} = \frac{|(1 + b) - \sqrt{2}i|}{\sqrt{2 + b^2}} = \frac{\sqrt{(1 + b)^2 + 2}}{\sqrt{2 + b^2}} = \sqrt{\frac{b^2 + 2b + 3}{b^2 + 2}}$$

Xét hàm số $y = \sqrt{\frac{b^2 + 2b + 3}{b^2 + 2}}$

$$y' = \frac{-2b^2 - 2b + 4}{(b^2 + 2)^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{b^2 + 2b + 3}{b^2 + 2}}} = \frac{-b^2 - b + 2}{\sqrt{(b^2 + 2b + 3)(b^2 + 2)^3}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ b = 1 \end{cases}.$$

$$\lim_{b \rightarrow \pm\infty} y = 1.$$

Bảng biến thiên:

b	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$-$
y				

Từ bảng biến thiên ta thấy $\max y = \sqrt{2} \Leftrightarrow b = 1$.

Do đó giá trị lớn nhất của $\left| \frac{1}{z} - i \right|$ là $\sqrt{2}$.

Câu 58. (CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG QUẢNG NAM LẦN 2 NĂM 2019) Xét tập hợp S các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn điều kiện $|3z - \bar{z}| = |(1+i)(2+2i)|$. Biểu thức $Q = |z - \bar{z}|(2-x)$ đạt giá trị lớn nhất là M và đạt được tại $z_0 = x_0 + y_0i$ (khi z thay đổi trong tập S). Tính giá trị $T = M \cdot x_0 y_0^2$.

A. $T = -\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

B. $T = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

C. $T = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

D. $T = -\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chon D

Ta có $|3z - \bar{z}| = |(1+i)(2+2i)| \Leftrightarrow |3x+3yi-x+yi| = 4 \Leftrightarrow |2x+4yi| = 4$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = 4 \Leftrightarrow |2y| = \sqrt{4 - x^2} \quad (-2 \leq x \leq 2).$$

Khi đó $Q = |z - \bar{z}|(2 - x) \Leftrightarrow Q = |2yi|(2 - x) = |2y|(2 - x) = \sqrt{4 - x^2}(2 - x).$

Xét hàm số $f(x) = (2-x)\sqrt{4-x^2}$ với $x \in [-2; 2]$.

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2x - 4}{\sqrt{4 - x^2}}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên

x	-2	-1	2
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Nên $\max_{x \in [-2; 2]} f(x) = 3\sqrt{3} = f(-1)$.

$$\text{Vậy } M = 3\sqrt{3}; x_0 = -1; y_0^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow T = -\frac{9\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 59. (KHTN Hà Nội Lần 3) Xét các số phức z thỏa mãn $|z|=1$, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\left| z^4 + z + \frac{1}{2} \right|^2 \text{ bằng}$$

A. $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

B. $\frac{1}{8}$.

C. $\frac{1}{16}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Theo đề $|z|=1$. Đặt $z = \cos x + i \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$). Suy ra $z^4 = (\cos x + i \sin x)^4 = \cos 4x + i \sin 4x$.

$$\text{Khi đó } \left| z^4 + z + \frac{1}{2} \right|^2 = \left| \left(\cos 4x + \cos x + \frac{1}{2} \right) + (\sin 4x + \sin x)i \right|^2$$

$$= \left(\cos 4x + \cos x + \frac{1}{2} \right)^2 + (\sin 4x + \sin x)^2$$

$$= \frac{9}{4} + \cos 4x + 2 \cos 3x + \cos x$$

$$= \frac{9}{4} + 8 \cos^4 x + 8 \cos^3 x - 8 \cos^2 x - 5 \cos x + 1$$

$$= \frac{9}{4} + f(t). \text{ Với } f(t) = 8t^4 + 8t^3 - 8t^2 - 5t + 1, t \in [-1; 1].$$

$$\geq \frac{9}{4} + \min_{[-1; 1]} f(t) = \frac{9}{4} + f\left(\frac{-1 + \sqrt{11}}{4}\right) = \frac{1}{8}.$$

Câu 60. (Chuyên Bắc Giang) Cho số phức z có $|z|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = |z^2 - z| + |z^2 + z + 1| \text{ là}$$

A. $\frac{13}{4}$.

B. 3.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\frac{11}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Theo giả thiết ta có $x^2 + y^2 = 1$.

$$\text{Ta có: } P = |z^2 - z| + |z^2 + z + 1| = |z(z-1)| + |z^2 + z + 1| = |z| \cdot |z-1| + |z^2 + z + 1| = |z-1| + |z^2 + z + 1|.$$

$$|z-1| = |x+yi-1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1} = \sqrt{2-2x}.$$

$$z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + 2xyi + x + yi + 1 = 2x^2 + x + y(2x+1)i$$

$$\Rightarrow |z^2 + z + 1| = \sqrt{x^2(2x+1)^2 + y^2(2x+1)^2} = \sqrt{(2x+1)^2(x^2 + y^2)} = |2x+1|.$$

$$\text{Suy ra } P = \sqrt{2-2x} + |2x+1|.$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \sqrt{2-2x} + |2x+1| \text{ trên đoạn } [-1;1].$$

$$+ \text{ Trên } \left[-1; -\frac{1}{2}\right]:$$

$$f(x) = \sqrt{2-2x} - 2x - 1 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2-2x}} - 2 < 0, \forall x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right].$$

$$\text{Mặt khác hàm số } f(x) = \sqrt{2-2x} - 2x - 1 \text{ liên tục trên } \left[-1; -\frac{1}{2}\right].$$

$$\text{Do đó hàm số nghịch biến trên } \left[-1; -\frac{1}{2}\right] \Rightarrow f(x) \leq f(-1) = 3, \forall x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right].$$

$$\Rightarrow \max_{x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right]} f(x) = 3. (1)$$

$$+ \text{ Trên } \left[-\frac{1}{2}; 1\right]:$$

$$f(x) = \sqrt{2-2x} + 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2-2x}} + 2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-2x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7}{8}.$$

$$\text{Có: } f\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}; f\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{13}{4}; f(1) = 3.$$

$$\Rightarrow \max_{x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]} f(x) = \frac{13}{4}. (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow \max_{x \in [-1;1]} f(x) = \frac{13}{4} \text{ hay } P_{\max} = \frac{13}{4}.$$

Chú ý:

Ta có thể biến đổi theo hướng khác như sau

$$\text{Do } z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 1 \Rightarrow z^2 + z + 1 = z^2 + z + z \cdot \bar{z} = z(z + 1 + \bar{z}) = z(2x+1)$$

$$\Rightarrow |z^2 + z + 1| = |z(2x+1)| = |z| |2x+1| = |2x+1|.$$

Câu 61. (CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP 2019 LẦN 2) Cho các số phức z và w thỏa mãn $(3-i)|z| = \frac{z}{w-1} + 1-i$. Tìm giá trị lớn nhất $T = |w+i|$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

C. 2.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Đk: $w \neq 1$.

Ta có:

$$(3-i)|z| = \frac{z}{w-1} + 1-i \Leftrightarrow (3-i)|z| - 1+i = \frac{z}{w-1} \Leftrightarrow w = \frac{z}{(3|z|-1)+(1-|z|)i} + 1.$$

Vậy

$$T = |w+i| = \left| \frac{z}{(3|z|-1)+(1-|z|)i} + 1+i \right| \leq \left| \frac{z}{(3|z|-1)+(1-|z|)i} \right| + |1+i|$$

$$\leq \frac{|z|}{\sqrt{10|z|^2 - 8|z| + 2}} + \sqrt{2}.$$

Đặt $t = |z|$ điều kiện: $t \geq 0$. Xét hàm số $f(t) = \frac{t}{\sqrt{10t^2 - 8t + 2}} + \sqrt{2}$.

$$f'(t) = \frac{-4t+2}{(10t^2-8t+2)\sqrt{10t^2-8t+2}}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

BBT

t	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	$\sqrt{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{10}}{10} + \sqrt{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $T = |w+i| \leq \max_{[0;+\infty)} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 62. (CỤM TRƯỜNG SÓC SƠN MÊ LINH HÀ NỘI) Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-2i| + |z-4-6i| = 9$, giá trị lớn nhất của $|z-10-14i|$ là

A. 17.

B. 20.

C. 15.

D. 12.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Đặt $z = \frac{w}{3-4i} + \frac{5+8i}{2}$.

Ta có $|z-1-2i| + |z-4-6i| = \left| \frac{w}{3-4i} + \frac{3}{2} + 2i \right| + \left| \frac{w}{3-4i} - \frac{3}{2} - 2i \right| = 9 \Leftrightarrow \left| w + \frac{25}{2} \right| + \left| w - \frac{25}{2} \right| = 45$.

Đặt $w = x + yi$ và gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn w . Khi đó tập hợp điểm M là elip có phương trình là (E): $\frac{x^2}{\left(\frac{45}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{350} = 1$. Suy ra $y^2 = 350 - \frac{56}{81}x^2$ (1).

Mặt khác ta có $T = |z-10-14i| = \left| \frac{w}{3-4i} - \frac{15}{2} - 10i \right| = \frac{1}{5} \left| w - \frac{125}{2} \right| = \frac{1}{5} \sqrt{\left(x - \frac{125}{2}\right)^2 + y^2}$.

Suy ra $T = \frac{1}{5} \sqrt{\left(x - \frac{125}{2}\right)^2 + 350 - \frac{56}{81}x^2} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{25}{81}x^2 - 125x + \frac{17025}{4}}$.

Từ (1) ta có $-\frac{45}{2} \leq x \leq \frac{45}{2}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{25}{81}x^2 - 125x + \frac{17025}{4}$ trên đoạn $\left[-\frac{45}{2}; \frac{45}{2}\right]$.

$$f'(x) = \frac{50}{81}x - 125. \text{ Xét } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{405}{2} \notin \left[-\frac{45}{2}; \frac{45}{2}\right].$$

$$\text{Ta có } f\left(-\frac{45}{2}\right) = 7225; f\left(\frac{45}{2}\right) = 1600.$$

Vậy giá trị lớn nhất của T bằng $\frac{1}{5}\sqrt{f\left(-\frac{45}{2}\right)} = 17$.

Cách 2:

$$\text{Ta có } |z - 10 - 14i| \leq |z - 1 - 2i| + |-9 - 12i| = |z - 1 - 2i| + 15.$$

$$\text{Ta có } |z - 10 - 14i| \leq |z - 4 - 6i| + |-6 - 8i| = |z - 4 - 6i| + 10.$$

$$\text{Suy ra } 2|z - 10 - 14i| \leq 9 + 15 + 10 = 34 \Leftrightarrow |z - 10 - 14i| \leq 17.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } z = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i.$$

$$\text{Vậy } \max|z - 10 - 14i| = 17.$$

Cách 3

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z . Gọi $F_1(1; 2)$ và $F_2(4; 6)$. Suy ra $MF_1 + MF_2 = 9$.

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn z là Elip và có $F_1F_2 = 5$.

Ta có $P = |z - 10 - 14i| = MA$ với $A(10; 14)$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{F_1A} = (9; 12), \overrightarrow{F_1F_2} = (3; 4) \Rightarrow \overrightarrow{F_1A} = 3\overrightarrow{F_1F_2} \Rightarrow F_1, A, F_2 \text{ thẳng hàng và có } \begin{cases} F_1F_2 = 5 \\ F_1A = 15 \\ F_2A = 10 \end{cases}$$

Ta có $MA \leq MF_2 + F_2A \leq 7 + 10 = 17$. Dấu "=" xảy ra khi M, F_1, F_2 thẳng hàng và $MF_1 + F_1F_2 = MF_2$.

Câu 63. (THPT PHỤ DỤC – THÁI BÌNH) Hai số phức z, w thay đổi nhưng luôn thỏa mãn đẳng thức

$$(1+i)|z^2 - 2iz - 1| = \frac{2019\bar{z} + 2019i}{w} + 2 - 2i. \text{ Giá trị lớn nhất của } |w| \text{ là}$$

A. $\frac{2019\sqrt{2}}{4}$.

B. $\frac{2019\sqrt{2}}{2}$.

C. 2019.

D. Đáp án khác.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } |z - i| = |\bar{z} + i| \text{ nên } |z^2 - 2iz - 1| = |z - i|^2 = |\bar{z} + i|^2.$$

Như vậy:

$$\begin{aligned} (1+i)|z^2 - 2iz - 1| &= \frac{2019\bar{z} + 2019i}{w} + 2 - 2i \Leftrightarrow (1+i)|\bar{z} + i|^2 = \frac{2019(\bar{z} + i)}{w} + 2 - 2i \\ \Leftrightarrow (1+i)|\bar{z} + i|^2 + 2i - 2 &= \frac{2019(\bar{z} + i)}{w} \Leftrightarrow |\bar{z} + i|^2 - 2 + (|\bar{z} + i|^2 + 2)i = \frac{2019(\bar{z} + i)}{w}. \end{aligned}$$

Điều kiện: $w \neq 0$ suy ra $\bar{z} + i \neq 0$ hay $|\bar{z} + i| > 0$.

Đặt $t = |\bar{z} + i|, t > 0$ ta có $t^2 - 2 + (t^2 + 2)i = \frac{2019(\bar{z} + i)}{w}$. Lấy môđun hai vế ta được:

$$\sqrt{(t^2 - 2)^2 + (t^2 + 2)^2} = \frac{2019|\bar{z} + i|}{|w|} \Leftrightarrow \sqrt{(t^2 - 2)^2 + (t^2 + 2)^2} = \frac{2019t}{|w|}$$

$$\Leftrightarrow |w| = \frac{2019t}{\sqrt{(t^2 - 2)^2 + (t^2 + 2)^2}} \Leftrightarrow |w| = \frac{2019t}{\sqrt{2t^4 + 8}}.$$

$$\Rightarrow |w| \leq \frac{2019t}{2\sqrt{2}t} \Leftrightarrow |w| \leq \frac{2019\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Vậy } \max |w| = \frac{2019\sqrt{2}}{4} \text{ khi } 2t^4 = 8 \Leftrightarrow t^4 = 4 \Leftrightarrow t = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z - i| = \sqrt{2}.$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

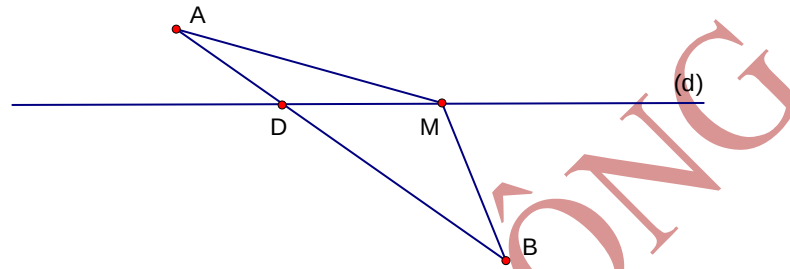
DẠNG 6: MIN, MAX SỐ PHỨC PP HÌNH HỌC**Bài toán 1**

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm phân biệt A, B và đường thẳng (d) . Điểm M chạy trên đường thẳng (d) sao cho tổng độ dài đoạn $AM + BM$ nhỏ nhất. Khi đó hãy tìm vị trí điểm M và tính $AM + BM$.

Phương pháp giải:

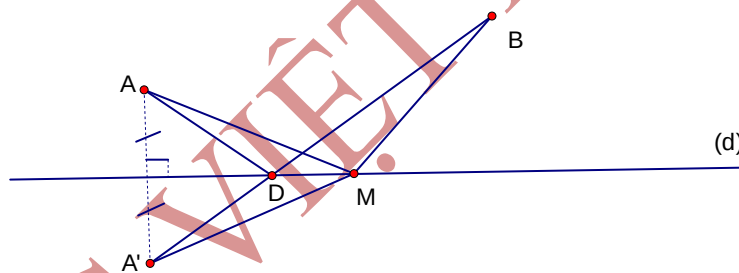
Ta xét hai trường hợp

+) Trường hợp 1 : hai điểm A, B nằm về hai phía đối với đường thẳng (d)



Ta có $MA + MB \geq AB$ nên $(MA + MB)_{\min} = AB$, đạt được khi $M = AB \cap (d)$.

+) Trường hợp 2 : hai điểm A, B cùng phía đối với đường thẳng (d)



Gọi điểm A' là điểm đối xứng của điểm A qua đường thẳng (d) . Khi đó $MA = MA'$

$\Rightarrow MA + MB = MA' + MB \geq A'B$ nên $(MA + MB)_{\min} = A'B$, đạt được khi $M = A'B \cap (d)$.

Câu 1. Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 1| = |z + 1|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z + 2 - 4i| + |z - 4 - 6i|$ là
A. $\sqrt{10} + \sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $2\sqrt{5}$ **D.** $2\sqrt{10}$.

Lời giải

□ **Gợi ý:** Gọi M là điểm biểu diễn số phức z , từ điều kiện $|z - 1| = |z + 1|$ suy ra được quỹ tích điểm M là trục Oy. Đặt $A(-2; 4), B(4; 6)$ thì A, B nằm về hai phía trục Oy. Khi đó $|z + 2 - 4i| + |z - 4 - 6i| = MA + MB \geq AB = 2\sqrt{10}$.

Câu 2. Cho các số phức z thỏa mãn $|2z + 5 - 4i| = |2z + 3 + 4i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z + 1 - 4i| + |z - 1 - i|$ là
A. 5 **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{41}$ **D.** $\sqrt{10}$.

Lời giải

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z , từ $|2z + 5 - 4i| = |2z + 3 + 4i|$

$\Rightarrow \left| z + \frac{5}{2} - 2i \right| = \left| z + \frac{3}{2} + 2i \right|$ suy ra được quỹ tích điểm M là đường thẳng $(d): x - 4y + 2 = 0$. Đặt $A(-1; 4), B(1; 1)$ thì A, B nằm về cùng một phía với đường thẳng (d) . Điểm $A'(-3; -4)$ là điểm đối xứng của điểm A qua đường thẳng (d) . Khi đó $|z + 1 - 4i| + |z - 1 - i| = MA + MB = MA' + MB \geq A'B = \sqrt{41}$.

Câu 3. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z + 1 + i| = |z + 2i|$ và $P = |z - 2 - 3i| + |z + 1|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P = a + 2b$:

Lời giải

Ta có: $|z + 1 + i| = |z + 2i| \Leftrightarrow a - b = 1$.

$$P = P = |z - 2 - 3i| + |z + 1| = \sqrt{(a - 2)^2 + (b - 3)^2} + \sqrt{(a + 1)^2 + b^2}.$$

Xét trong mặt phẳng phức Oab , xét các điểm $M(a; b), A(2; 3), B(-1; 0)$ với M điểm biểu diễn số phức $z \Rightarrow M \in (d): a - b - 1 = 0$.

Ta có: $MA + MB = \sqrt{(a - 2)^2 + (b - 3)^2} + \sqrt{(a + 1)^2 + b^2}$. Vậy ta tìm $M \in d$ sao cho $(MA + MB)_{\min}$.

Do $(x_A - y_A - 1)(x_B - y_B - 1) > 0 \Rightarrow A, B$ cùng thuộc một phía so với đường thẳng d .

$\Rightarrow$ Gọi A' là điểm đối xứng của A qua d .

Ta có: $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$. Dấu "=" xảy ra khi

$$M = A'B \cap d \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow P = a + 2b = \frac{5}{2}.$$

Câu 4. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z + 1 + i| = |z + 2i|$ và $P = |z - 2 - 3i| + |z - 1 + 2i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P = a + 2b$:

Lời giải

Ta có: $|z + 1 + i| = |z + 2i| \Leftrightarrow a - b = 1$.

$$P = P = |z - 2 - 3i| + |z + 1| = \sqrt{(a - 2)^2 + (b - 3)^2} + \sqrt{(a - 1)^2 + (b + 2)^2}.$$

Xét trong mặt phẳng phức Oab , xét các điểm $M(a; b), A(2; 3), B(1; -2)$ với M điểm biểu diễn số phức $z \Rightarrow M \in (d): a - b - 1 = 0$.

Ta có: $MA + MB = \sqrt{(a - 2)^2 + (b - 3)^2} + \sqrt{(a - 1)^2 + (b + 2)^2}$. Vậy ta tìm $M \in d$ sao cho $(MA + MB)_{\min}$.

Do $(x_A - y_A - 1)(x_B - y_B - 1) < 0 \Rightarrow A, B$ khác phía so với đường thẳng d .

Ta có: $MA + MB \geq AB$. Dấu "=" xảy ra khi $M = AB \cap d \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow P = a + 2b = \frac{5}{2}$.

Câu 5. (Sở Hà Nam) Cho số phức $z = a + bi$ với a, b là hai số thực thỏa mãn $a - 2b = 1$. Tính $|z|$ khi biểu thức $|z + 1 + 4i| + |z - 2 - 5i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $\frac{1}{5}$.

B. $\sqrt{5}$.

C. $\sqrt{\frac{1}{5}}$.

D. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(a, b)$ là điểm biểu diễn số phức z . Theo đề bài có $M \in \Delta: x - 2y - 1 = 0$.

Để $|z + 1 + 4i| + |z - 2 - 5i|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất với $A(-1; -4)$ và $B(2; 5)$. Vì A, B nằm khác phía với Δ nên $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất khi M, A, B thẳng hàng.

Ta có phương trình đường thẳng $AB: 3x - y = 1$.

Suy ra tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ y = -\frac{2}{5} \end{cases}.$$

Vậy $z = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{1}{5}}$.

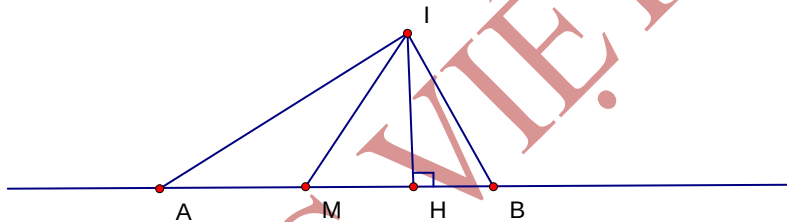
Bài toán 2

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm I và đoạn thẳng AB . Điểm M chạy trên đoạn thẳng AB sao cho độ dài đoạn IM nhỏ nhất. Khi đó hãy tìm vị trí điểm M và tính độ dài IM .

Phương pháp giải:

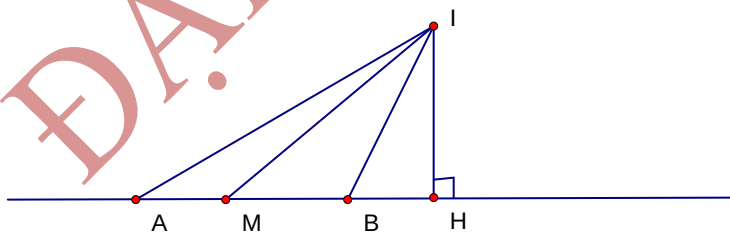
Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm I lên đường thẳng (AB) . Ta xét hai trường hợp

□ Trường hợp 1: điểm H nằm trong đoạn AB



Dễ dàng thấy $IM_{\min} = IH$ và $IM_{\max} = \max\{IA; IB\}$.

□ Trường hợp 2: điểm H nằm ngoài đoạn AB



Dễ dàng thấy $IM_{\min} = \min\{IA; IB\}$ và $IM_{\max} = \max\{IA; IB\}$.

Câu 6. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 2 - i| + |z - 2 - 3i| = 2\sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính giá trị $M.m$.

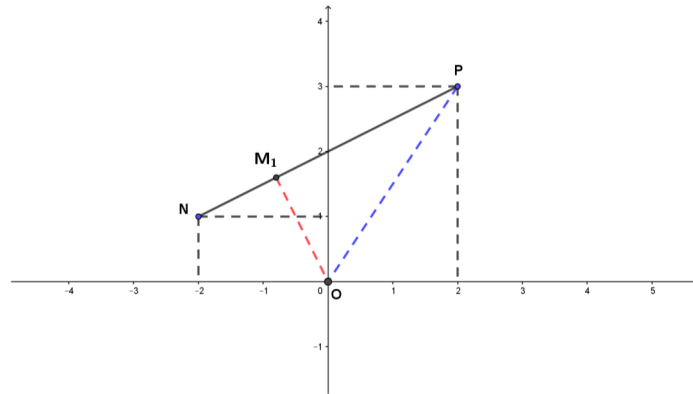
A. $\frac{\sqrt{65}}{5}$

B. $\sqrt{65}$

C. $2\sqrt{26}$

D. $\frac{4\sqrt{65}}{5}$

Lời giải

Chọn D

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Gọi $M(x; y)$, $N(-2; 1)$, $P(2; 3)$ lần lượt là điểm biểu diễn của số phức z , $z_1 = -2 + i$, $z_2 = 2 + 3i$.

$|z + 2 - i| + |z - 2 - 3i| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow MN + MP = 2\sqrt{5}$, mặt khác $NP = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ nên điểm M thuộc đoạn thẳng NP .

$|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow OM$ ngắn nhất $\Leftrightarrow M \equiv M_1$, với M_1 là hình chiếu vuông góc của M lên đoạn NP (quan sát hình hoặc nhận xét góc NOP tù do $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OP} < 0$ nên M_1 thuộc đoạn NP)

$|z|$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow OM = OP$ (quan sát hình hoặc so sánh ON và OP).

Phương trình $NP: x - 2y + 4 = 0$

Vậy $M.m = OP \cdot d(O, NP) = \sqrt{13} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{65}}{5}$.

Câu 7. Xét số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z - 1 + i|$. Tính $P = m + M$.

A. $P = \sqrt{13} + \sqrt{73}$.

B. $P = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$.

C. $P = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}$.

D. $P = \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{73}}{2}$.

Lời giải

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z , gọi $A(-2; 1), B(4; 7)$. Từ giả thiết $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow MA + MB = AB \Rightarrow$ Quỹ tích điểm M chính là đoạn thẳng AB . Gọi $I(1; -1)$ thì $|z - 1 + i| = IM$. Vẽ hình trực quan để kiểm tra hình chiếu của I lên

đường thẳng (AB) nằm trong đoạn AB . Lại có: $IA = \sqrt{13}, IB = \sqrt{73}, d(I; AB) = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow P = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}.$$

Câu 8. Xét số phức z thỏa mãn $|z + 1 - 2i| + |z - 2 + 2i|$ nhỏ nhất. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z - 4i|$. Tính $P = \frac{M}{m}$.

A. $P = 2$.

B. $P = 2\sqrt{2}$.

C. $P = 2\sqrt{5}$.

D. $P = 5\sqrt{2}$.

Lời giải

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z , gọi $A(-1;2), B(2;-2)$. Ta có $|z+1-2i|+|z-2+2i|=MA+MB \geq AB$, nghĩa là $|z+1-2i|+|z-2+2i|$ nhỏ nhất thì quỹ tích điểm M chính là đoạn thẳng AB . Gọi $I(0;4)$ thì $|z-4i|=IM$. Vẽ hình trực quan dễ kiểm tra hình chiếu của I lên đường thẳng (AB) nằm ngoài đoạn AB . Lại có: $IA=\sqrt{5}, IB=2\sqrt{10} \Rightarrow P=2\sqrt{2}$.

Câu 9. Xét số phức z thỏa mãn $\begin{cases} |z+2|=|z-8-8i| \\ |z| \leq 5 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z-4i|$

- A. 4. B. 3. C. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$. D. $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z , vì $|z+2|=|z-8-8i|$ nên M thuộc đường thẳng $(d): 2x+y-10=0$, mà $|z| \leq 5$ nên M thuộc miền trong đường tròn $(C): x^2+y^2=25$. Lại có (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A(3;4), B(5;0)$ nên quỹ tích điểm M là đoạn thẳng AB . Gọi $I(0;4)$ thì $|z-4i|=IM$, vẽ hình trực quan thấy hình chiếu vuông góc của điểm I lên đường thẳng (d) nằm ngoài đoạn AB mà $IA=\sqrt{41}, IB=3$ nên $|z-4i|_{\min}=3$.

Câu 10. Xét các số phức z thỏa $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z-1+i|$. Tính $P=m+M$.

- A. $P=\sqrt{13}+\sqrt{73}$. B. $P=\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$. C. $P=5\sqrt{2}+\sqrt{73}$. D. $P=\frac{5\sqrt{2}+\sqrt{73}}{2}$.

Lời giải**Chọn B**

Ta có $w=z-1+i=a+bi$; $a, b \in \mathbb{R}$

$$|(z-1+i)+3-2i|+|(z-1+i)+(-3-8i)|=6\sqrt{2} \Leftrightarrow |w+3-2i|+|w-3-8i|=6\sqrt{2}$$

Do đó xét các điểm $M(a;b), A(-3;2), B(3;8)$, ta có:

$$6\sqrt{2}=MA+MB \geq AB=6\sqrt{2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \in [AB]$, do đó $b=a+5$ và $-3 \leq a \leq 3$.

$$|w|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+(a+5)^2}=\sqrt{2a^2+10a+25}$$

$$m=\min_{[-3;3]}\sqrt{2a^2+10a+25}=\frac{5\sqrt{2}}{2}; M=\max_{[-3;3]}\sqrt{2a^2+10a+25}=\sqrt{73}.$$

$$\text{Vậy } P=\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}.$$

Cách 2: Cũng tương tự như trên, ta có:

$$|w|=OM \geq d(O; AB)=\frac{5\sqrt{2}}{2}, |w|=OM \leq OB=\sqrt{73}.$$

$$\text{Vậy } P=\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}.$$

Câu 11. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-3i|+|z+4+5i|=10$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z-1+i|$. Tính $P=M.m$.

- A. $P=\frac{8\sqrt{41}}{5}$. B. $P=\sqrt{697}$. C. $P=5\sqrt{41}$. D. $P=\frac{8\sqrt{41}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $w=z-1+i=a+bi$; $a, b \in \mathbb{R}$

$$|(z-1+i)+(-1-4i)|+|(z-1+i)+(5+4i)|=10 \Leftrightarrow |w-1-4i|+|w+5+4i|=10$$

Do đó xét các điểm $M(a;b), A(1;-4), B(-5;-4)$, ta có:

$$10=MA+MB \geq AB=10.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \in [AB]$, do đó $4a-3b+8=0$ và $-5 \leq a \leq 1$.

$$|w|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{4a+8}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{25a^2+64a+64}}{3}$$

$$m=\min_{[-5;1]} \frac{\sqrt{25a^2+64a+64}}{3}=y\left(-\frac{32}{25}\right)=\frac{8}{5}; M=\max_{[-5;1]} \frac{\sqrt{25a^2+64a+64}}{3}=y(-5)=\sqrt{41}.$$

$$\text{Vậy } P=m.M=\frac{8\sqrt{41}}{5}.$$

Câu 12. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2+2i|-|z+1-3i|=\sqrt{34}$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của $|z+1+i|$ là?

- A. $\frac{9}{\sqrt{34}}$. B. 4. C. $\sqrt{13}$. D. 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $z=a+bi$; $a, b \in \mathbb{R}$.

Do đó xét các điểm $M(a;b), A(2;-2), B(-1;3)$, ta có:

$$|z-2+2i|-|z+1-3i|=\sqrt{34} \Leftrightarrow \sqrt{34}=MA-MB \leq AB=\sqrt{34}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M$ thuộc tia AB và M nằm ngoài đoạn AB

Phương trình $AB: 5x+3y-4=0$, do đó $5a+3b-4=0$ và $a \leq -1$.

$$\text{Khi đó } |z+1+i|=\sqrt{(a+1)^2+(b+1)^2}=\sqrt{(a+1)^2+\left(\frac{4-5a}{3}+1\right)^2}$$

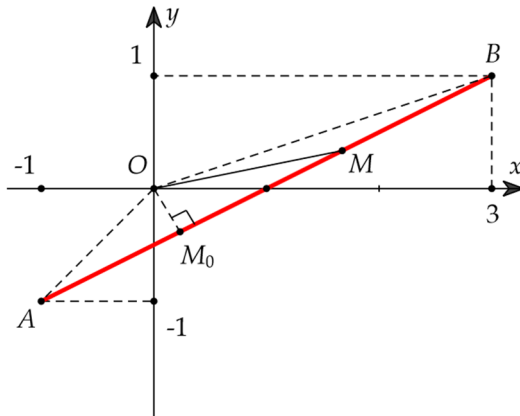
$$\min_{(-\infty;-1]} |z+1+i|=\min_{(-\infty;-1]} \sqrt{(a+1)^2+\left(\frac{4-5a}{3}+1\right)^2}=y(-1)=4.$$

Câu 13. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+2-i|+|z-2-3i|=2\sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của mô đun $z+1-2i$, tính $M+m$.

- A. $\frac{2\sqrt{5}+5\sqrt{10}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{5}+5\sqrt{10}}{5}$. C. $\sqrt{2}+\sqrt{10}$. D. $\sqrt{2}+2\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Có điểm biểu diễn $M(x, y)$ trên mặt phẳng tọa độ.

$$\text{Ta có } |z + 2 - i| + |z - 2 - 3i| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2} = 2\sqrt{5}.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{[(x+1)+1]^2 + [(y-2)+1]^2} + \sqrt{[(x+1)-3]^2 + [(y-2)-1]^2} = 2\sqrt{5} \quad (1)$$

Điểm $M'(x+1; y-2)$ biểu diễn số phức $z+1-2i = (x+1) + (y-2)i$ trên mặt phẳng phức.

$$\text{Đặt } A(-1; -1); B(3; 1) \text{ thì từ (1) ta có } AM' + BM' = 2\sqrt{5} \quad (2)$$

$$\text{Mặt khác } \overline{AB}(4; 2) \Rightarrow AB = 2\sqrt{5} \quad (3).$$

Từ (2), (3) suy ra M' thuộc đoạn thẳng. Ta có $OA = \sqrt{2}; OB = \sqrt{10}$, $AB: x - 2y - 1 = 0$.

Nhận xét góc $\widehat{OAB}, \widehat{OBM}$ là các góc nhọn (nhìn hình vẽ).

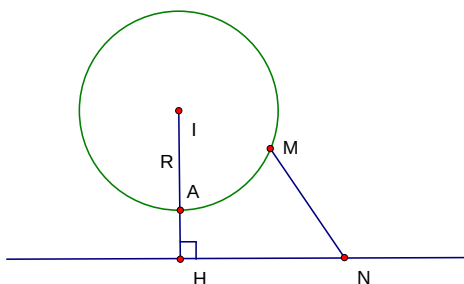
$$\text{ta có } M = |z|_{\max} = \max\{OA, OB\} = \sqrt{10}, m = |z|_{\min} = d(O, AB) = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Vậy } M + m = \frac{\sqrt{5} + 5\sqrt{10}}{5}.$$

Bài toán 3:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d) và đường tròn (C) có tâm I bán kính R không có điểm chung. Điểm M thay đổi trên đường tròn (C) , điểm N thay đổi trên đường thẳng (d) . Xác định vị trí hai điểm M, N để độ dài đoạn MN giá trị nhỏ nhất và tính các giá trị này.

Phương pháp giải:



$$MN_{\min} = AH = d(I, d) - R.$$

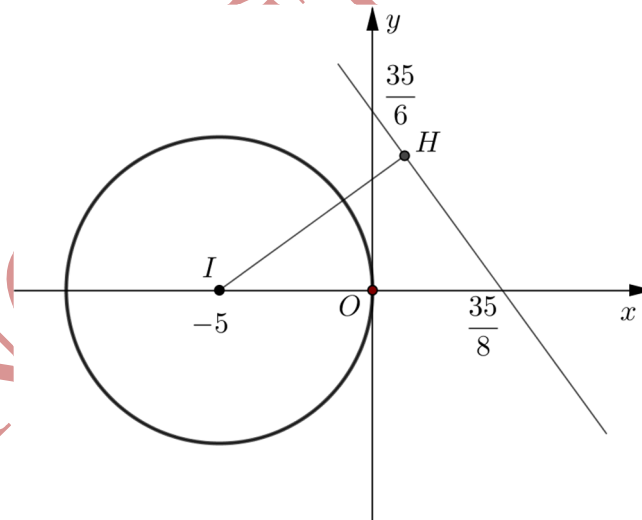
- Câu 14.** Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $\begin{cases} |z_1 - i| = |z_1 + 1| \\ |z_2 - 1 - i| = 1 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$.
- A. $\sqrt{2}$. B. 1. C. $\sqrt{2} - 1$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Gợi ý: Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của hai số phức z_1, z_2 . Theo bài ra $\begin{cases} |z_1 - i| = |z_1 + 1| \\ |z_2 - 1 - i| = 1 \end{cases}$, suy ra quỹ tích điểm M là đường thẳng $(d): x + y = 0$ và quỹ tích điểm N là đường tròn (C) tâm $I(1;1)$ có bán kính $R=1$. Vẽ hình trực quan dễ thấy (C) và (d) không có điểm chung, mà $|z_1 - z_2| = MN$ nên $|z_1 - z_2|_{\min} = MN_{\min} = d(I, d) - R = \sqrt{2} - 1$.

- Câu 15.** (Hùng Vương Bình Phước) Cho 2 số phức $z_1; z_2$ thỏa mãn $|z_1 + 5| = 5; |z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 - z_2|$ là

- A. $P_{\min} = 3$. B. $P_{\min} = \frac{3}{2}$. C. $P_{\min} = \frac{5}{2}$. D. $P_{\min} = 5$.

Lời giải**Chọn C**

Đặt $z_1 = x_1 + y_1 i (x_1, y_1 \in \mathbb{R})$ và $z_2 = x_2 + y_2 i (x_2, y_2 \in \mathbb{R})$.

Khi đó $z_1; z_2$ tương ứng được biểu diễn bởi hai điểm $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy . Do $|z_1 + 5| = 5$ nên $IA = 5$ với $I(-5; 0)$, hay A thuộc đường tròn $(I; 5)$.

Do $|z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i|$ nên $MB = NB$ với $M(-1; 3), N(3; 6)$ hay B thuộc trung trực của MN .

Trung điểm của MN có tọa độ $\left(1; \frac{9}{2}\right)$ và $\overrightarrow{MN}(4; 3)$ nên phương trình đường trung trực của

MN là $(\Delta): 4(x-1) + 3\left(y - \frac{9}{2}\right) = 0$ hay $4x + 3y - \frac{35}{2} = 0$.

Ta có: $d(I, \Delta) = \frac{|4 \cdot (-5) + 3 \cdot 0 - \frac{35}{2}|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{15}{2}$.

Do $P = |z_1 - z_2| = AB$ nên $P_{\min} = AB_{\min} = d(I, \Delta) - 5 = \frac{15}{2} - 5 = \frac{5}{2}$.

Câu 16. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 5| = 5, |z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i|$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$ là?

- A. 3. B. $\frac{5}{2}$. C. $\frac{3}{2}$. D. 5.

Lời giải

Chọn B

Giải sử $M(a; b)$ là điểm biểu diễn của số phức $z_1 = a + bi$, $N(c; d)$ là điểm biểu diễn số phức $z_2 = c + di$.

Ta có $|z_1 + 5| = 5 \Leftrightarrow (a + 5)^2 + b^2 = 25$. Vậy M thuộc đường tròn $(C): (x + 5)^2 + y^2 = 25$.

Và $|z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i| \Leftrightarrow 8c + 6d = 35$. Vậy N thuộc đường thẳng $\Delta: 8x + 6y = 35$.

Dễ thấy đường thẳng Δ không cắt (C) và $|z_1 - z_2| = MN$.

Áp dụng bất đẳng thức tam giác cho bộ ba điểm (I, M, N) ta có

$$MN \geq |IN - IM| = |IN - R| \geq |IN_0 - R| = |d(I, \Delta) - R| = \left| \frac{|8 \cdot (-5) + 6 \cdot 0 - 35|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} - 5 \right| = \frac{5}{2}.$$

Dấu bằng đạt tại $M \equiv M_0, N \equiv N_0$.

Câu 17. (Nguyễn Du Dak-Lak 2019) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - i| = 1$ và số phức z' thỏa mãn điều kiện $|\overline{z'} + 1 + 2i| = |z' - 1|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z - z'|$ bằng

- A. $\sqrt{2} + 1$. B. $2\sqrt{2} + 1$. C. $\sqrt{2} - 1$. D. $2\sqrt{2} - 1$.

Lời giải

Chọn C

***Chú ý:** $|\overline{z} + a + bi| = |z + a - bi|$.

+ Gọi M, N lần lượt là hai điểm biểu diễn số phức z và z' .

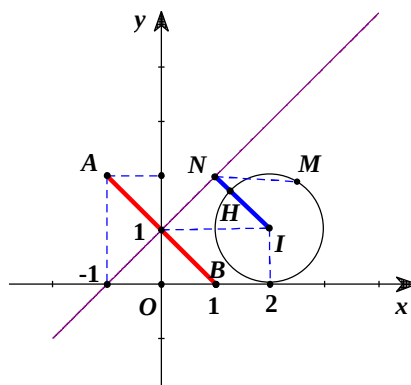
+ Ta có: $|z - 2 - i| = 1 \Rightarrow MI = 1$ với $I(2; 1)$.

Tập hợp điểm biểu diễn điểm M là đường tròn tâm I bán kính bằng $R = 1$.

+ Ta có: $|\overline{z'} + 1 + 2i| = |z' - 1| \Leftrightarrow |z' + 1 - 2i| = |z' - 1| \Rightarrow NA = NB$ với $A(-1; 2), B(1; 0)$.

Tập hợp điểm biểu diễn N là đường trung trực của AB có phương trình: $\Delta: x - y + 1 = 0$.

+ Ta có hình vẽ biểu diễn M, N trên cùng hệ trục tọa độ Oxy như sau:



+ Ta có $|z - z'|$ được biểu diễn hình học là MN , từ hình vẽ ta thấy, $MN_{\min}$ khi và chỉ khi $M \equiv H$ và $MN_{\min} = d(I, \Delta) - R = \frac{|2-1+1|}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1$.

Câu 18. (HKII Kim Liên 2017-2018) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 1 + i| = 1$ và $z_2 = 2iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = |2z_1 - z_2|$.

A. $P_{\min} = 2 - \sqrt{2}$.

B. $P_{\min} = 8 - \sqrt{2}$.

C. $P_{\min} = 2 - 2\sqrt{2}$.

D. $P_{\min} = 4 - 2\sqrt{2}$.

Lời giải

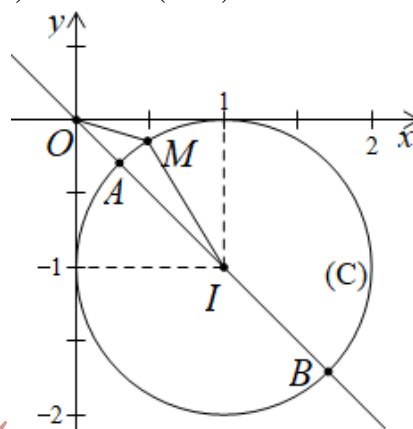
Chọn D

Từ $z_2 = 2iz_1$ ta được $P = |2z_1 - z_2| = |2z_1 - 2iz_1| = |(2 - 2i)z_1| = |2 - 2i| \cdot |z_1| = 2\sqrt{2} \cdot |z_1|$

Gọi $M(a; b)$ là điểm biểu diễn hình học của số phức z_1 .

Từ giả thiết $|z_1 - 1 + i| = 1$ ta được $|(a - 1) + (b + 1)i| = 1 \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b + 1)^2 = 1$.

Suy ra M thuộc đường tròn (C) có tâm $I(1; -1)$ bán kính $R = 1$.



Ta có $P = 2\sqrt{2}|z_1| = 2\sqrt{2} \cdot OM$ nên P đạt giá trị nhỏ nhất khi OM là nhỏ nhất

Giả sử OI cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B với A nằm giữa O và I .

Ta có $OM + MI \geq OI \Leftrightarrow OM + MI \geq OA + AI \Leftrightarrow OM \geq OA$ (do $IM = AI = R$)

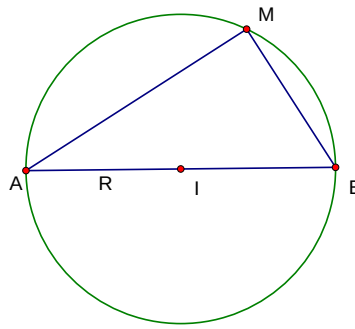
Nên OM nhỏ nhất bằng OA khi $M \equiv A$ và $OM = OI - R = \sqrt{2} - 1$.

Khi đó $P_{\min} = 2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) = 4 - 2\sqrt{2}$.

Bài toán 4:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có tâm I bán kính R . Đoạn AB là một đường kính của (C) . Điểm M thay đổi trên đường tròn (C) . Xác định vị trí điểm M để tổng độ dài $k \cdot MA + l \cdot MB$ (với $k \geq l > 0$) đạt giá trị nhỏ nhất và tính giá trị này.

Phương pháp giải:

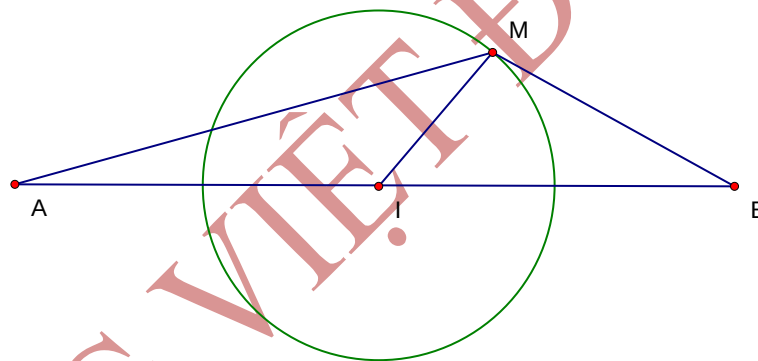


Ta có: $k \geq l > 0 \Rightarrow kMA + lMB \geq l(MA + MB) \geq lAB$, dấu bằng xảy ra khi $M \equiv A$.

Bài toán 5:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có tâm I bán kính R . Đoạn AB cố định nhận điểm I làm trung điểm. Điểm M thay đổi trên đường tròn (C) . Xác định vị trí điểm M để tổng độ dài $k.MA + l.MB$ (với $k > 0, l > 0$) đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị này.

Phương pháp giải:



Theo công thức đường trung tuyến ta có $MI^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$

$$\Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = a = \text{const}$$

Lại có: $k.MA + l.MB \leq \sqrt{k^2 + l^2} \cdot \sqrt{MA^2 + MB^2} = \sqrt{k^2 + l^2} \cdot \sqrt{a}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{MA}{k} = \frac{MB}{l} \Rightarrow MA = \frac{k}{l} MB \Rightarrow (\frac{k^2 + l^2}{l}) MB = \sqrt{k^2 + l^2} \cdot \sqrt{a}$, hay M là giao điểm của đường

(C) với đường tròn tâm B bán kính $\frac{l\sqrt{a}}{\sqrt{k^2 + l^2}}$.

Câu 19. (Nam Tiền Hải Thái Bình Lần1) Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z + 1| + 2|z - 1|$.

A. $\max T = 3\sqrt{2}$.

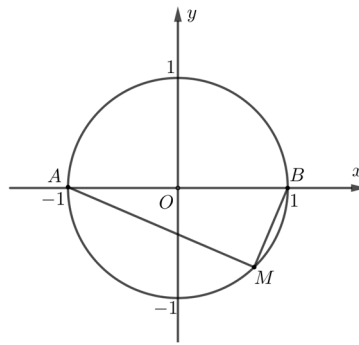
B. $\max T = 2\sqrt{10}$.

C. $\max T = 2\sqrt{5}$.

D. $\max T = 3\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C



Giả sử $z = x + y.i$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Số phức z được biểu diễn bởi điểm $M(x; y)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

Theo bài ra: $|z| = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$. Do đó điểm $M(x; y)$ luôn thuộc đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$.

Xét $T = |z+1| + 2|z-1| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = MA + 2MB$ với $A(-1;0)$, $B(1;0)$.

Nhận thấy $A(-1;0); B(1;0) \in (C)$ và AB là đường kính của đường tròn $(O;1)$.

Ta có: $T^2 = (MA + 2MB)^2 \leq 5(MA^2 + MB^2) = 5AB^2 = 20$.

$\Rightarrow T_{\max} = 2\sqrt{5}$.

Câu 20. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = |z+1| + 2|z-1|$.

A. $\min T = 2\sqrt{5}$. B. $\min T = 2$. C. $\min T = \sqrt{5}$. D. $\min T = \sqrt{2}$.

Lời giải

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z . Theo bài ra $|z| = 1$ nên quỹ tích điểm M là đường tròn (C) tâm O bán kính $R = 1$. Đặt $A(-1;0), B(1;0)$, vẽ hình trực quan dễ thấy AB là một đường kính của đường tròn (C) . Khi đó $T = |z+1| + 2|z-1| = MA + 2MB \geq MA + MB \geq AB = 2$, dấu bằng xảy ra khi $M \equiv B$. Suy ra $\min T = 2$.

Câu 21. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |1+z| + 3|1-z|$.

A. $3\sqrt{15}$ B. $\sqrt{20}$ C. $2\sqrt{10}$ D. $6\sqrt{5}$

Lời giải

Gọi $A(1;0), B(-1;0)$, ta có $P = MB + 3MA$.

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxky: $MB + 3MA \leq \sqrt{(1^2 + 3^2)(MA^2 + MB^2)} = 2\sqrt{10}$.

Chọn C

Câu 22. (Sở Ninh Bình 2019 lần 2) Cho số phức z thỏa mãn $|z+1| = \sqrt{3}$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = |z+4-i| + |z-2+i|$.

A. $2\sqrt{26}$. B. $2\sqrt{46}$. C. $2\sqrt{13}$. D. $2\sqrt{23}$.

Lời giải

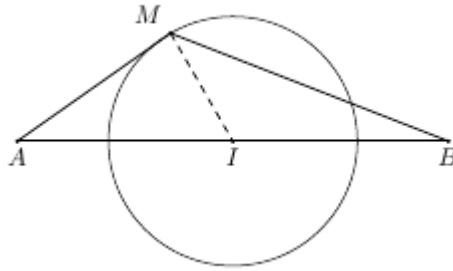
Chọn C

Giả sử $z = x + yi$ (với $x, y \in \mathbb{R}$) có điểm biểu diễn là $M(x; y)$.

Ta có $|z+1| = \sqrt{3} \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 3$.

Suy ra tập hợp các điểm M là đường tròn có tâm $I(-1;0)$ và bán kính $R = \sqrt{3}$.

Gọi $A(-4;1), B(2;-1)$. Khi đó ta thấy I là trung điểm của đoạn AB .



Xét tam giác MAB có $MI^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$.

Do đó $T = |z + 4 - i| + |z - 2 + i| = MA + MB$.

Suy ra $T^2 = (MA + MB)^2 \leq 2(MA^2 + MB^2) = 2\left(2MI^2 + \frac{AB^2}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow T^2 \leq 2\left(2R^2 + \frac{AB^2}{2}\right) = 52 \Leftrightarrow T \leq 2\sqrt{13}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của T bằng $2\sqrt{13}$ khi $\begin{cases} MA = MB \\ M \in (I) \end{cases}$.

Câu 23. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z + 1| + 2|z - 1|$.

A. $\max T = 2\sqrt{5}$ **B.** $\max T = 2\sqrt{10}$ **C.** $\max T = 3\sqrt{5}$ **D.** $\max T = 3\sqrt{2}$

Lời giải

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z . Theo bài ra $|z| = 1$ nên quỹ tích điểm M là đường tròn (C) tâm O bán kính $R = 1$. Đặt $A(-1; 0), B(1; 0)$, vẽ hình trực quan dễ thấy AB nhận O

làm trung điểm nên trong $\triangle MAB$ ta có $MO^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$

$$\Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2} = 4.$$

Khi đó

$T = |z + 1| + 2|z - 1| = MA + 2MB \leq \sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{MA^2 + MB^2} = 2\sqrt{5}$, dấu bằng xảy ra khi

$MB = 2MA \Rightarrow MA = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow A$ là giao điểm của đường tròn (C) với đường tròn tâm A bán

kính $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Suy ra $\max T = 2\sqrt{5}$.

Câu 24. Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z + 2 + 3i| = 2$. Tính $P = a + b$ khi $|z + 2 - 5i| + |z - 6 + 3i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P = 3$ **B.** $P = -3$ **C.** $P = 7$ **D.** $P = -7$

Lời giải

Do $|z + 2 + 3i| = 2 \Rightarrow (a + 2)^2 + (b + 3)^2 = 2$. Suy ra $M \in (C)$ có tâm $I(-2; -3)$ và bán kính

$R = \sqrt{2}$. Gọi $A(-2; 5), B(6; -3), I'(2; 1)$. Suy ra $P = MA + MB \leq \sqrt{2(MA^2 + MB^2)}$

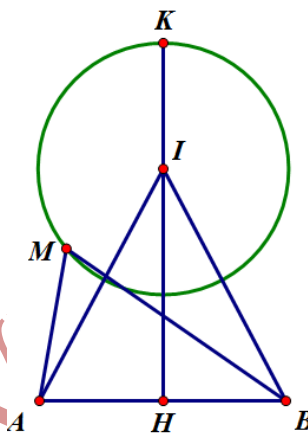
Mặt khác ta có $MA^2 + MB^2 = 2MI'^2 + \frac{AB^2}{2}$. Suy ra $P_{\max} \Leftrightarrow MI'_{\max} \Leftrightarrow I'$ là hình chiếu vuông góc của M trên $AB \Leftrightarrow M, I, I'$ thẳng hàng. Vì ta thấy $IA = IB \Rightarrow MA = MB$ nên xảy ra dấu $=$.
Ta có $\overrightarrow{IM} = (a+2; b+3), \overrightarrow{II'} = (4; 4)$ nên $AB \Leftrightarrow M, I, I'$ thẳng hàng $\Leftrightarrow 4(a+2) = 4(b+3) \Leftrightarrow a = b+1$.

Tọa độ M là nghiệm của hệ $\begin{cases} (a+2)^2 + (b+3)^2 = 2 \\ a = b+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3; b = -4 \\ a = -1; b = -2 \end{cases}$

Mặt khác $\begin{cases} M(-3; -4) \Rightarrow P = MA + MB = 2\sqrt{82} \\ M(-1; -2) \Rightarrow P = MA + MB = 2\sqrt{50} \end{cases}$. Vậy để $P_{\max}$ thì $M(-3; -4)$ Suy ra $a + b = -7$.

- Câu 25.** Cho $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5}$. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$.
Tính $P = M^2 + m^2$?
A. $P = 240$ B. $P = 250$ C. $P = 270$ D. $P = 320$

Lời giải



$(I; \sqrt{5}): (x-4)^2 + (y-3)^2 = 5$. Gọi $I(4; 3) \Rightarrow M(z) \in (I; \sqrt{5})$.

Gọi $A(-1; 3), B(1; -1) \Rightarrow IA = IB = 5 > R$

$$+) MA + MB \leq \sqrt{2(MA^2 + MB^2)} \Rightarrow MA + MB \leq \sqrt{4MH^2 + AB^2}$$

$$\Rightarrow MA + MB \leq \sqrt{4KH^2 + AB^2} = 10\sqrt{2}.$$

Để có $HK = HA = HB = \sqrt{5}$. Lấy C sao cho H trung điểm CK .

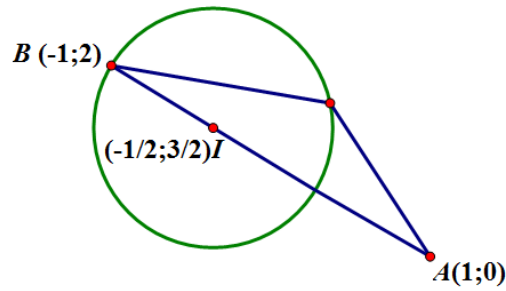
Ta có Ptolemy: $MACB + MB.CA \geq MC.AB \Rightarrow MA + MB \geq MC \cdot \frac{AB}{CB} \geq KC \cdot \sqrt{2}$

$$\Rightarrow MA + MB_{\min} = 2\sqrt{10}$$

- Câu 26.** Cho $|2z + 1 - 3i| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z - 1| + 3|z + 1 - 2i|$?

- A. $4\sqrt{2}$ B. $4\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{2}$ D. 4

Lời giải



Ta có: $M(z) \in \left(I; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) : \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$

Gọi $A(1;0), B(-1;2)$. Chú ý I, A, B thẳng hàng đồng thời ta có $IA = 3IB$. Ta tìm $\max MA + 3MB$.

Ta có: $MA^2 + 3MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$

$\Rightarrow MA^2 + 3MB^2 = 4MI^2 + IA^2 + 3IB^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB})$

$\Rightarrow MA^2 + 3MB^2 = 4MI^2 + IA^2 + 3IB^2 = 8$. Theo bất đẳng thức Bunhiacopxky ta có:

$MA + 3MB \leq \sqrt{(MA^2 + 3MB^2)(1+3)} = 4\sqrt{2}.$

Chọn A

Câu 27. (Sở Đà Nẵng 2019) Cho số phức z thay đổi thỏa $|z+i|=2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = |z+i-4| + 2|z+3i-3|$ bằng

A. $2\sqrt{3}.$

B. $\sqrt{2}.$

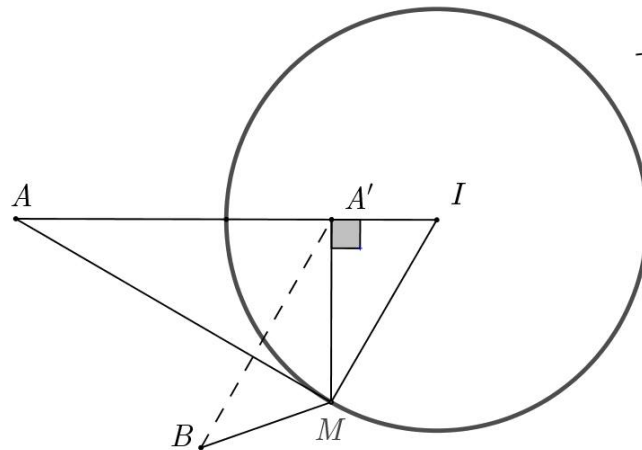
C. $4\sqrt{2}.$

D. 6.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:



Đặt $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$. Gọi M điểm có tọa độ $(x; y)$ biểu diễn cho số phức z .

Ta có $|z+i|=2 \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = 4$ khi đó điểm M thuộc đường tròn tâm $I(0; -1)$, $R = 2$.

Ta có: $P = |z+i-4| + 2|z+3i-3| = \sqrt{(x-4)^2 + (y+1)^2} + 2\sqrt{(x-3)^2 + (y+3)^2} = MA + 2MB$

với $M(x; y)$, $A(4; -1)$, $B(3; -3)$.

Ta thấy hai điểm A, B nằm ngoài đường tròn và $IA = 4 = 2R$.

Lấy điểm A' sao cho $\overrightarrow{IA'} = \frac{R^2}{IA^2} \cdot \overrightarrow{IA} = \frac{1}{4} \overrightarrow{IA}$.

$$\Rightarrow A'(1; -1) \Rightarrow IA' = 1 = \frac{R}{2}.$$

$\Rightarrow A'$ nằm trong đường tròn.

$$\text{Khi đó: } \frac{IA'}{IM} = \frac{IM}{IA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \triangle IA'M \sim \triangle IMA \Rightarrow \frac{A'M}{MA} = \frac{IA'}{IM} = \frac{1}{2} \Rightarrow MA = 2MA'.$$

$$\text{Do đó: } P = MA + 2MB = 2MA' + 2MB = 2(MA' + MB) \geq 2A'B.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi M là giao điểm của đường thẳng $A'B$ và đường tròn.

$$\text{Vậy } P_{\min} = 2A'B = 4\sqrt{2}.$$

Cách 2.

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$|z + i| = 2 \Leftrightarrow x^2 + (y + 1)^2 = 4.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= |z + i - 4| + 2|z + 3i - 3| = \sqrt{(x - 4)^2 + (y + 1)^2} + 2\sqrt{(x - 3)^2 + (y + 3)^2} \\ &= \sqrt{(x - 4)^2 + (y + 1)^2 + 3[x^2 + (y + 1)^2] - 12} + 2\sqrt{(x - 3)^2 + (y + 3)^2} \text{ với } A = x^2 + (y + 1)^2 \\ &= 2\left(\sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} + \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 3)^2}\right) \\ &= 2\left(\sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} + \sqrt{(-x + 3)^2 + (-y - 3)^2}\right) \geq 2\sqrt{2^2 + (-2)^2} = 4\sqrt{2} \text{ (BĐT Mincopxki)} \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(x - 1)(-y - 3) = (y + 1)(-x + 3) \Leftrightarrow x = -y$

$$\text{Thay vào } A, \text{ ta có: } x^2 + (-x + 1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1 + \sqrt{7}}{2}, y_1 = \frac{-1 - \sqrt{7}}{2} \\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{7}}{2}, y_2 = \frac{\sqrt{7} - 1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Thay vào biểu thức } P \text{ ta nhận } x_1 = \frac{1 + \sqrt{7}}{2}, y_1 = \frac{-1 - \sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = 4\sqrt{2}.$$

Câu 28. (Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đắk Lắk) Cho các số phức z, w thỏa mãn

$$|w + i| = \frac{3\sqrt{5}}{5} \text{ và } \frac{5w}{z - 4} = 2 + i. \text{ Giá trị lớn nhất của biểu thức } P = |z - 1 - 2i| + |z - 5 - 2i| \text{ bằng}$$

A. $\sqrt{52} + \sqrt{55}.$

B. $2\sqrt{53}.$

C. $\frac{29}{2}.$

D. $3 + \sqrt{134}.$

Lời giải

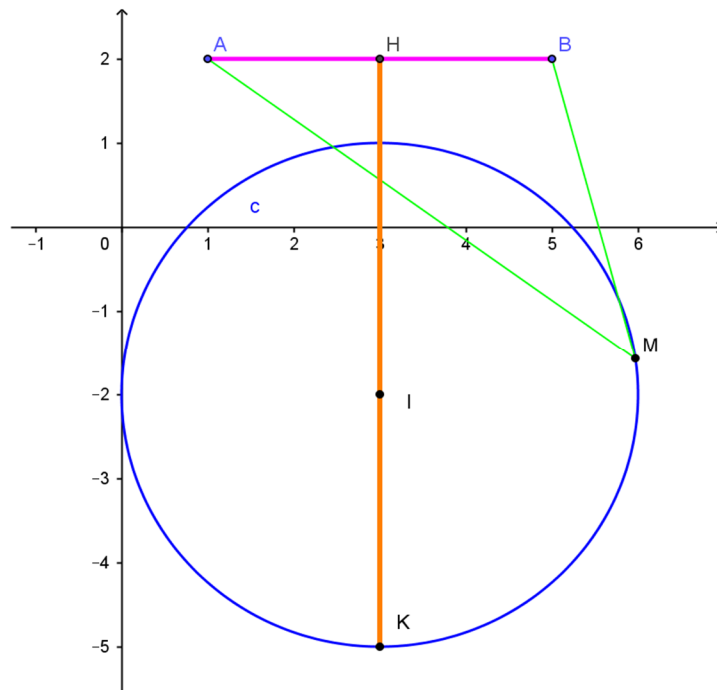
Chọn B

$$\text{Từ giả thiết } \frac{5w}{z - 4} = 2 + i, \text{ ta có } 5w = (2 + i)(z - 4).$$

$$\text{Khi đó: } |w + i| = \frac{3\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow |5w + 5i| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow |(2 + i)(z - 4) + 5i| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow |z - 3 + 2i| = 3.$$

Suy ra điểm $M(x; y)$ biểu diễn cho số phức z sẽ thuộc đường tròn $(C): (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$.

$$\text{Ta có: } P = MA + MB, \text{ với } A(1; 2), B(5; 2).$$



Gọi H là trung điểm của AB , ta có $H(3; 2)$. Khi đó:

$$P = MA + MB \leq \sqrt{2(MA^2 + MB^2)} = \sqrt{4MH^2 + AB^2}.$$

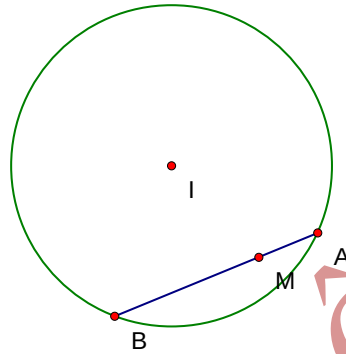
Mặt khác: $MH \leq KH$ với mọi điểm $M \in (C)$, nên

$$P \leq \sqrt{4KH^2 + AB^2} = \sqrt{4(IH + R)^2 + AB^2} = 2\sqrt{53}.$$

Vậy $P_{\max} = 2\sqrt{53}$ khi $\begin{cases} M \equiv K \\ MA = MB \end{cases}$ hay $z = 3 - 5i$ và $w = \frac{3}{5} - \frac{11}{5}i$.

Bài toán 6:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có tâm I bán kính R . Điểm M cố định nằm ở miền trong đường tròn; hai điểm A, B thay đổi trên (C) sao cho ba điểm M, A, B thẳng hàng. Xác định vị trí hai điểm A, B để tổng độ dài $k.MA + l.MB$ (với $k > 0, l > 0$) giá trị nhỏ nhất và tính giá trị này.

Phương pháp giải:

Ta có tích $MA.MB$ chính là độ lớn phương tích của điểm M với đường tròn (C) , suy ra $MA.MB = R^2 - MI^2$. Nên $k.MA + l.MB \geq 2\sqrt{klMA.MB} = 2\sqrt{kl(R^2 - MI^2)}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $kMA = lMB = \sqrt{kl(R^2 - MI^2)} \Rightarrow MA = \sqrt{\frac{l}{k}(R^2 - MI^2)}$ hay A là giao điểm của đường tròn tâm M bán kính $\sqrt{\frac{l}{k}(R^2 - MI^2)}$ với đường tròn (C) .

Câu 29. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $\begin{cases} |z_1 - 1 - i| = |z_2 - 1 - i| = 1 \\ |z_1 - z_2| = \left| z_1 - 1 - \frac{1}{2}i \right| + \left| z_2 - 1 - \frac{1}{2}i \right| \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = |2z_1 - 2 - i| + |2iz_2 + 1 - 2i|$.

A. $\min T = 2\sqrt{5}$. **B.** $\min T = 2\sqrt{3}$. **C.** $\min T = 2\sqrt{2}$. **D.** $\min T = 3\sqrt{2}$.

Lời giải

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn của hai số phức z_1, z_2 . Theo bài ra $|z_1 - 1 - i| = |z_2 - 1 - i| = 1$, suy ra quỹ tích điểm A và quỹ tích điểm B là đường tròn (C) tâm $I(1;1)$ có bán kính $R = 1$. Đặt điểm $M\left(1; \frac{1}{2}\right)$, ta có

$|z_1 - z_2| = \left| z_1 - 1 - \frac{1}{2}i \right| + \left| z_2 - 1 - \frac{1}{2}i \right| \Rightarrow MA + MB = AB \Rightarrow$ điểm M thuộc đoạn AB , nên

theo công thức phương tích ta có $MA.MB = R^2 - IM^2 = \frac{3}{4}$. Lại có

$$T = |2z_1 - 2 - i| + |2iz_2 + 1 - 2i| = 2\left| z_1 - 1 - \frac{i}{2} \right| + \left| 2i \left| z_2 + \frac{1}{2i} - 1 \right| \right| = 2\left(\left| z_1 - 1 - \frac{i}{2} \right| + \left| z_2 - 1 - \frac{i}{2} \right| \right)$$

$\Rightarrow T = 2(MA + MB) \geq 4\sqrt{MAMB} = 2\sqrt{3}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $MA = MB$ hay A, B là giao điểm của đường thẳng qua M vuông góc với IM và đường tròn (C) .

Các bài toán khác

Câu 30. Cho hàm số phức $f(z) = (4+i)z^2 + az + b$ với a, b là số phức. Biết $f(1), f(i)$ là số thực. Tính giá trị nhỏ nhất của $P = |a| + |b|$.

Lời giải

Gọi: $\begin{cases} a = x_1 + y_1 i \\ b = x_2 + y_2 i \end{cases} (x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R})$.

Ta có: $f(z) = (4+i)z^2 + az + b$.

$$\Rightarrow f(1) = 4 + i + a + b = (4 + x_1 + x_2) + (y_1 + y_2 + 1)i.$$

$$\Rightarrow f(i) = -(4+i) + ai + b = (-4 - y_1 + x_2) + (-1 + x_1 + y_2)i.$$

$$\text{Do } f(1), f(i) \text{ là số thực} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 + 1 = 0 \\ x_1 + y_2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 - y_1 + 2 = 0.$$

Vậy để thỏa yêu cầu bài toán thì $a \in (\Delta): x - y + 2 = 0$ trong mặt phẳng Oxy còn b là số phức tự do.

$$\Rightarrow P_{\min} = |a| + |b| = d[O; (\Delta)] + 0 = \sqrt{2}.$$

Câu 31. Cho số phức z thỏa $|z+1-2i| = 2\sqrt{2}$. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z-1| + 2017|\bar{z} + 3 + 4i|$.

Lời giải

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Gọi $M(a; b)$ là điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng phức.

Trong mặt phẳng phức xét các điểm $A(1; 0)$, $B(-3; 4)$.

$$\text{Ta luôn có: } \begin{cases} MA^2 + MB^2 = AB^2 \text{ (py - ta - go)} \\ P = MA + 2017MB \end{cases} \Rightarrow (P - 2017MB)^2 + MB^2 - AB^2 = 0.$$

$$\Rightarrow (2017^2 + 1)MB^2 - 2 \cdot P \cdot 2017MB + (P^2 - AB^2) = 0 \quad (*).$$

Để phương trình $(*)$ có nghiệm thì:

$$\Delta'_{(*)} \geq 0 \Leftrightarrow 2017^2 P^2 - (2017^2 + 1)(P^2 - AB^2) \geq 0$$

$$\Rightarrow P^2 \leq AB^2 (2017^2 + 1) \Rightarrow P \leq AB \sqrt{(2017^2 + 1)}.$$

Câu 32. (THANH CHƯƠNG 1 NGHỆ AN 2019 LẦN 3) Cho hai số phức $z_1; z_2$ thỏa mãn $z_1 \neq z_2$ và $z_1^2 - 5z_1 z_2 + 4z_2^2 = 0$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của số phức $z_1, \bar{z}_2$ thỏa mãn diện tích tam giác OMN bằng 12. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |2z_1 - z_2|$ là

A. $14\sqrt{3}$.

B. $21\sqrt{2}$.

C. $\frac{14\sqrt{6}}{3}$.

D. $7\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn D

Vì $z_1^2 - 5z_1 z_2 + 4z_2^2 = 0$ ($z_1 \neq z_2$) suy ra $z_1 = 4z_2 \Rightarrow P = |7z_2|$

$$\text{Mặt khác } S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} OM \cdot ON \cdot \sin \widehat{MON} \Leftrightarrow 12 = \frac{1}{2} |z_1| |z_2| \sin \widehat{MON} \Leftrightarrow |z_2|^2 \sin \widehat{MON} = 6.$$

$$\Rightarrow P = |7z_2| = 7 \sqrt{\frac{6}{\sin \widehat{MON}}}. \text{ Nên } P = |7z_2| \text{ nhỏ nhất khi } \sin \widehat{MON} \text{ lớn nhất } \Leftrightarrow \sin \widehat{MON} = 1.$$

$$\text{Khi đó } P = 7\sqrt{6}.$$

Câu 33. (Đặng Thành Nam Đề 5) Cho z_1, z_2 là các số phức khác 0 thỏa mãn $|z_1|z_1 = 9|z_2|z_2$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1 và $\bar{z}_2$. Biết tam giác OMN có diện tích bằng 6, giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + z_2|$ bằng

A. 8.

B. 6.

C. $4\sqrt{2}$.

D. $3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Từ giả thiết: } |z_1|z_1 = 9|z_2|z_2 \quad (1)$$

$$\text{Lấy môđun hai vế ta được: } |z_1|^2 = 9|z_2|^2 \Rightarrow |z_1| = 3|z_2|.$$

$$\text{Thay } |z_1| = 3|z_2| \text{ vào (1) ta được } z_1 = 3z_2.$$

$$\text{Gọi } z_2 = a + bi \quad (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow z_1 = 3a + 3bi, \bar{z}_2 = a - bi.$$

$$\text{Điểm } M(3a; 3b), N(a; -b) \Rightarrow S_{OMN} = \frac{1}{2} |-3ab - 3ab| = 3|a||b|.$$

$$\text{Mà } S_{OMN} = 6 \text{ nên } |a||b| = 2 \text{ và } |z_1 + z_2| = |4a + 4bi| = 4\sqrt{a^2 + b^2} \geq 4\sqrt{2|a||b|} = 8.$$

$$\text{Suy ra } \min |z_1 + z_2| = 8.$$

Lưu ý công thức tính diện tích tam giác OAB với $\vec{OA} = (a_1; a_2), \vec{OB} = (b_1; b_2)$ là

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1|.$$

Câu 34. (Thanh Chương Nghệ An Lần 2) Các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $w = \frac{z_1 + 2 - i}{(z_1 + \bar{z}_1)i + 1}$ là số thực và

$$|4z_2 + 8 + 13i| = 4. \text{ Giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = |z_1 + z_2| \text{ bằng}$$

A. $\frac{21}{16}$.

B. $\frac{\sqrt{37}}{4}$.

C. 0.

D. $\frac{\sqrt{37} - 4}{4}$.

Lời giải

Chọn D

+ Đặt $z_1 = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$, ta có

$$w = \frac{z_1 + 2 - i}{(z_1 + \bar{z}_1)i + 1} = \frac{(x + 2) + (y - 1)i}{1 + 2xi} = \frac{x + 2 + 2x(y - 1) + [y - 1 - 2x(x + 2)]i}{1 + 4x^2}.$$

$$+ \text{ Vì } w \text{ là số thực nên } y - 1 - 2x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow y = 2x^2 + 4x + 1.$$

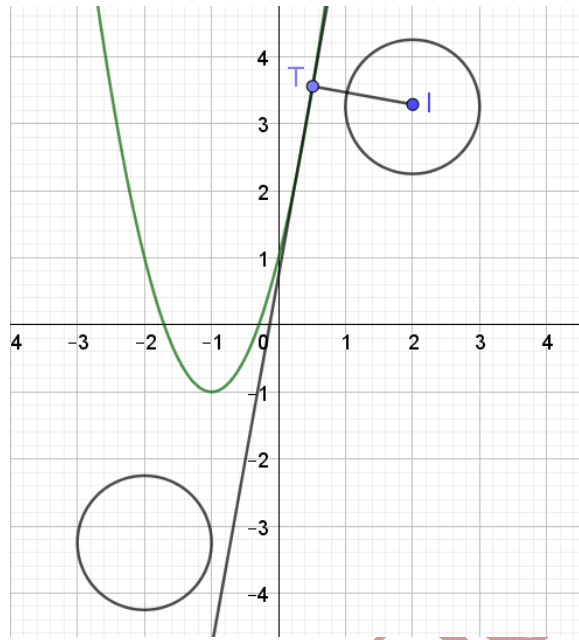
$$|4z_2 + 8 + 13i| = 4 \Leftrightarrow \left| z_2 + 2 + \frac{13}{4}i \right| = 1 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + \left(y + \frac{13}{4} \right)^2 = 1.$$

$$+ P = |z_1 + z_2| = |z_1 - (-z_2)|$$

+ Gọi M là điểm biểu diễn của z_1 thì điểm M thuộc parabol $(P): y = 2x^2 + 4x + 1$.

Gọi N là điểm biểu diễn của z_2 thì điểm N thuộc đường tròn $(C): (x + 2)^2 + \left(y + \frac{13}{4} \right)^2 = 1$

Gọi N_1 là điểm biểu diễn của $-z_2$ thì điểm N_1 thuộc đường tròn $(C_1): (x-2)^2 + \left(y-\frac{13}{4}\right)^2 = 1$



+ Phương trình tiếp tuyến Δ của (P) tại $T(x_0, 2x_0^2 + 4x_0 + 1)$, $(x_0 > -1)$ là

$$y = (4x_0 + 4)(x - x_0) + 2x_0^2 + 4x_0 + 1 \Leftrightarrow (4x_0 + 4)x - y - 2x_0^2 + 1 = 0.$$

+ Khi đó:

$P_{\min} \Leftrightarrow (MN_1)_{\min} \Leftrightarrow T$ là hình chiếu vuông góc của I lên Δ , với $I\left(2, \frac{13}{4}\right)$ là tâm (C_1)

$\Rightarrow \overline{IT}$ cùng phương với VTPT $\overline{n_\Delta}$, với $\overline{IT} = \left(x_0 - 2, 2x_0^2 + 4x_0 - \frac{9}{4}\right)$, $\overline{n_\Delta} = (4x_0 + 4, -1)$

$$\Leftrightarrow (4x_0 + 4)\left(2x_0^2 + 4x_0 - \frac{9}{4}\right) = 2 - x_0 \Leftrightarrow 8x_0^3 + 24x_0^2 + 8x_0 - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow T\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = IT - R = \frac{\sqrt{37}}{4} - 1 = \frac{\sqrt{37} - 4}{4}.$$

Câu 35. (PHÂN TÍCH BL_PT ĐỀ ĐH VINHL3 -2019..) Xét các số phức z, w thỏa mãn

$$|z| = 2, |iw - 2 + 5i| = 1. \text{ Giá trị nhỏ nhất của } |z^2 - wz - 4| \text{ bằng}$$

- A. 4. B. $2(\sqrt{29} - 3)$. **C. 8.** D. $2(\sqrt{29} - 5)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } |iw - 2 + 5i| = 1 \Leftrightarrow |w + 5 + 2i| = 1; |z| = 2 \Rightarrow z\bar{z} = 4$$

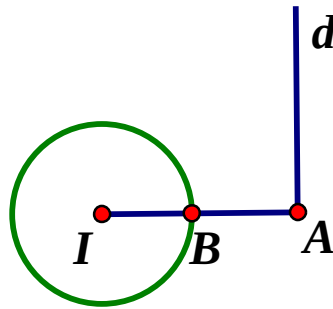
$$\text{Đặt: } z = x + iy, w = a + ib; (x, y, a, b \in \mathbb{R})$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (a+5)^2 + (b+2)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } |z^2 - wz - 4| = |z| \left| z - w - \frac{4}{z} \right| = 2 \left| (z - \bar{z}) - w \right|$$

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn $z - \bar{z}$ và w .

Dẫn đến: $A(0; 2y)$ với $-2 \leq y \leq 2$, B thuộc đường tròn có tâm $I(-5; -2)$ và có bán kính $R=1$.



Khi đó: $|z^2 - wz - 4| = 2AB$.

Ta có: $AB_{\min} = d(I, d) - R = 4$

Giá trị nhỏ nhất của $|z^2 - wz - 4| = 8$.

Nhận xét:

Ta xem bài toán trên gồm 3 giả thiết:

$$|z| = 2 \Rightarrow z \cdot \bar{z} = 4$$

$$|iw - 2 + 5i| = 1 \Leftrightarrow |w + 5 + 2i| = 1$$

$$|z^2 - wz - 4| = 2|z - w - \bar{z}| (*)$$

Việc đầu tiên, ta rút gọn các giả thiết của bài toán.

Từ (*), ta gọi A là điểm biểu diễn của $z - \bar{z}$, B là điểm biểu diễn của w .

Bài toán trở thành tìm độ dài AB nhỏ nhất.

Bài toán tương tự:

Câu 36. (TRƯỜNG THỰC HÀNH CAO NGUYÊN – ĐẠI HỌC TÂY NGUYÊN NĂM 2019) Biết rằng hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3 - 4i| = 1$ và $|z_2 - 3 - 4i| = \frac{1}{2}$. Số phức z có phần thực là a và phần ảo là b thỏa mãn $3a - 2b = 12$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z - z_1| + |z - 2z_2| + 2$ bằng:

A. $P = \frac{\sqrt{9945}}{11}$.

B. $P = 5 - 2\sqrt{3}$.

C. $P = \frac{\sqrt{9945}}{13}$.

D. $P = 5 + 2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

* Gọi A là điểm biểu diễn của số phức z_1 suy ra A thuộc đường tròn (C) tâm $I(3; 4)$, bán kính $R=1$.

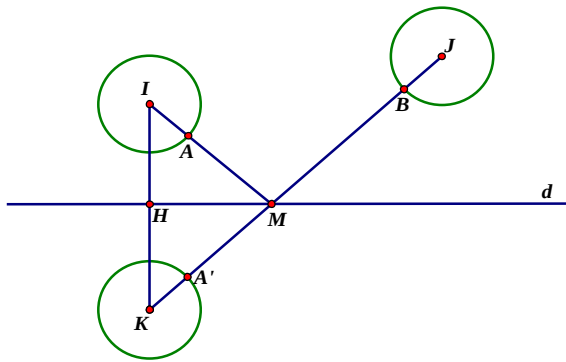
* Gọi A' là điểm đối xứng của A qua đường thẳng d .

$$|z_2 - 3 - 4i| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |2z_2 - 6 - 8i| = 1.$$

* Gọi B là điểm biểu diễn của số phức $2z_2$ suy ra B thuộc đường tròn (C_1) tâm $J(6; 8)$ bán kính $R_1 = 1$.

* Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z suy ra M thuộc đường thẳng $d: 3x - 2y - 12 = 0$.

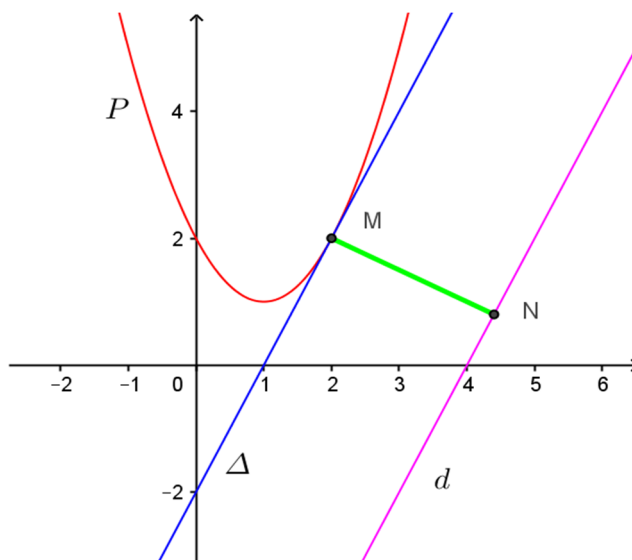
* Ta có: điểm I, J cùng phía so với đường thẳng d và đường thẳng d không có điểm chung với đường tròn (C) và đường tròn (C_1) .


$$* \text{ Suy ra } P_{\min} = A'B + 2 = JK - 1 - 1 + 2 = JK = \frac{\sqrt{9945}}{13}.$$

D. 5.

Lời giải

$$\min MN = \frac{|2.1 - 0 - 8|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$



Câu 38. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị Lần 1) Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z - 3\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|w - 4\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2}$. Biết rằng $|z - w|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z = z_0, w = w_0$. Tính $|3z_0 - w_0|$.

A. $2\sqrt{2}$.B. $4\sqrt{2}$.

C. 1.

D. $6\sqrt{2}$.

Lời giải

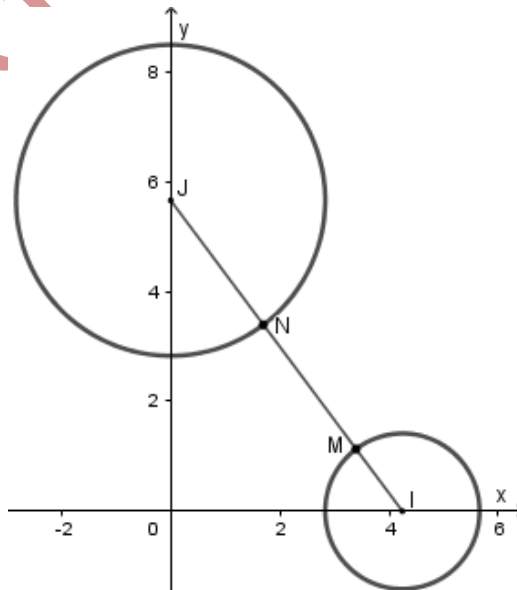
Chọn D

Ta có: $|z - 3\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn M biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I(3\sqrt{2}; 0)$, bán kính $r = \sqrt{2}$.

+ $|w - 4\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2}$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn N biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm $J(0; 4\sqrt{2})$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Ta có $\min|z - w| = \min MN$.

+ $IJ = 5\sqrt{2}; IM = r = \sqrt{2}; NJ = R = 2\sqrt{2}$.



Mặt khác $IM + MN + NJ \geq IJ \Rightarrow MN \geq IJ - IM - NJ$ hay $MN \geq 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

Suy ra $\min MN = 2\sqrt{2}$ khi I, M, N, J thẳng hàng và M, N nằm giữa I, J (Hình vẽ).

Cách 1:

Khi đó ta có: $|3z_0 - w_0| = |3\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}|$ và $IN = 3\sqrt{2} \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{IJ}; \overrightarrow{IN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$.

Mặt khác $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{OI} + \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$; $3\overrightarrow{OM} = 3(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}) = 3(\overrightarrow{OI} + \frac{1}{5}\overrightarrow{IJ}) = 3\overrightarrow{OI} + \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$.

Suy ra $|3z_0 - w_0| = |3\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}| = |3\overrightarrow{OI} + \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ} - (\overrightarrow{OI} + \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ})| = |2\overrightarrow{OI}| = 6\sqrt{2}$.

Cách 2:

Ta có $\overrightarrow{IN} = 3\overrightarrow{IM} \Rightarrow 3\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IN} = \vec{0}$.

Do đó $|3z_0 - w_0| = |3\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}| = |3(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}) - (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IN})| = |2\overrightarrow{OI}| = 2.OI = 2.3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

Cách 3:

$$+) \overrightarrow{IM} = \frac{IM}{IJ} \overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = \frac{1}{5} \overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{12\sqrt{2}}{5} \\ y_M = \frac{4\sqrt{2}}{5} \end{cases} \Rightarrow z_0 = \frac{12\sqrt{2}}{5} + \frac{4\sqrt{2}}{5}i.$$

$$+) \overrightarrow{IN} = \frac{IN}{IJ} \overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{IN} = \frac{3}{5} \overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = \frac{6\sqrt{2}}{5} \\ y_N = \frac{12\sqrt{2}}{5} \end{cases} \Rightarrow w_0 = \frac{6\sqrt{2}}{5} + \frac{12\sqrt{2}}{5}i.$$

Suy ra $|3z_0 - w_0| = |6\sqrt{2}| = 6\sqrt{2}$.

Câu 39. (Cụm 8 trường Chuyên Lân 1) Cho số phức z thỏa mãn $3|z + \bar{z}| + 2|z - \bar{z}| \leq 12$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $|z - 4 + 3i|$. Giá trị của $M.m$ bằng

A. 28.

B. 24.

C. 26.

D. 20.

Lời giải**Chọn B**

Đặt $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$), $P(x, y)$ là điểm biểu diễn của số phức z .

Ta có $3|z + \bar{z}| + 2|z - \bar{z}| \leq 12 \Leftrightarrow 3|2x| + 2|2yi| \leq 12 \Leftrightarrow 3|x| + 2|y| \leq 6$ (1).

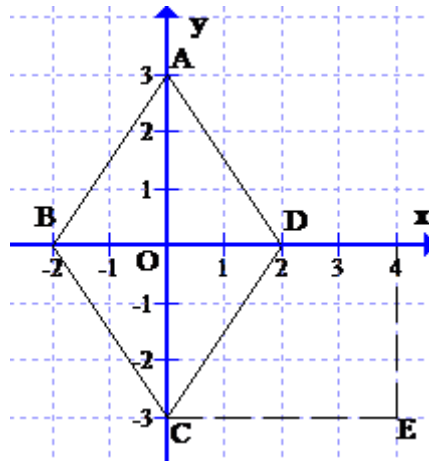
Khi $x \geq 0; y \geq 0$, ta có (1) $\Leftrightarrow 3x + 2y \leq 6$.

Khi $x \leq 0; y \leq 0$, ta có (1) $\Leftrightarrow -3x - 2y \leq 6$.

Khi $x \leq 0; y \geq 0$, ta có (1) $\Leftrightarrow -3x + 2y \leq 6$.

Khi $x \geq 0; y \leq 0$, ta có (1) $\Leftrightarrow 3x - 2y \leq 6$.

Suy ra quỹ tích điểm P là hình thoi $ABCD$ cùng miền trong của nó.



+) $|z - 4 + 3i| = EP$ với $E(4; -3)$ là điểm biểu diễn của số phức $z_1 = 4 - 3i$.

Từ hình vẽ ta có $m = \min EP = d(E, CD)$.

Đường thẳng CD có phương trình $3x - 2y - 6 = 0$, suy ra $m = \frac{12}{\sqrt{13}}$.

$\max EP = \max \{EA, EB, EC, ED\}$.

Lại có $EA = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$, $EB = \sqrt{9 + 36} = 3\sqrt{5}$, $EC = 4$, $ED = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$.

Do đó $M = EA = \sqrt{52}$. Vậy $M.m = 24$.

Câu 40. (Chuyên Phan Bội Châu Lần 2) Cho số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $P = |z - 2 - 2i|$. Đặt $A = M + n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $A \in [4; 3\sqrt{3})$. **B.** $A \in (\sqrt{34}; 6)$. **C.** $A \in (2\sqrt{7}; \sqrt{33})$. **D.** $A \in (6; \sqrt{42})$.

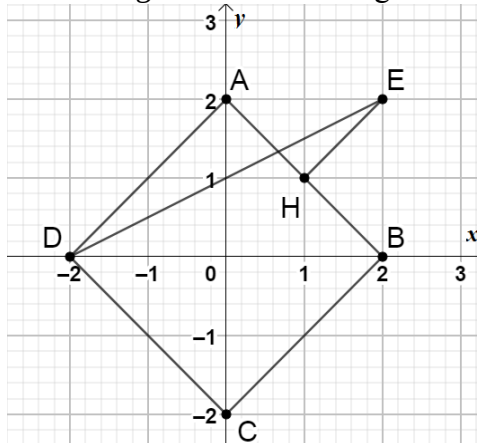
Lời giải.

Chọn B

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó

$$|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 4 \Leftrightarrow 2|x| + 2|y| = 4 \Leftrightarrow |x| + |y| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 & \text{khi } x \geq 0, y \geq 0 \\ x + y = -2 & \text{khi } x \leq 0, y \leq 0 \\ x - y = 2 & \text{khi } x \geq 0, y \leq 0 \\ -x + y = 2 & \text{khi } x \leq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Hình biểu diễn hệ nói trên là hình vuông $ABCD$ như trong hình vẽ



Khi đó $P = |z - 2 - 2i| = EM$ với $E(2; 2)$ và $M(x; y)$.

Dễ thấy $m = \min P = d(E; AB) = EH = \sqrt{2}$; $M = \max P = ED = \sqrt{20}$.

Do đó $M + m = \sqrt{2} + \sqrt{20} \in (\sqrt{34}; 6)$.

Câu 41. Cho số phức $z = a + 2bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) và đa thức: $f(x) = ax^2 - bx + 1$. Biết $|f(\pm 1)| \leq 1$. Tính giá trị lớn nhất của $|z|$.

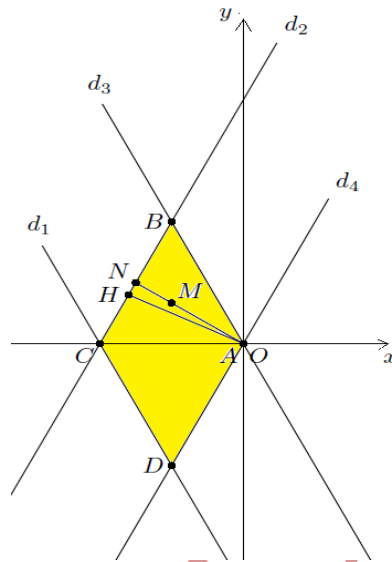
A. 2.

B. $2\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{5}$.

D. $\sqrt{7}$.

Lời giải



Ta có: $|z| = \sqrt{a^2 + (2b)^2}$.

$$|f(\pm 1)| \leq 1 \Leftrightarrow |a \pm b + 1| \leq 1 \Leftrightarrow |2a \pm 2b + 2| \leq 2 \quad (1).$$

$$(1) \Leftrightarrow |2x \pm y + 2| \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq 2x + y + 2 \leq 2 \\ -2 \leq 2x - y + 2 \leq 2 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} a = x \\ 2b = y \end{cases}$, ta có
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 4 \geq 0 \\ 2x - y + 4 \geq 0 \\ 2x + y \leq 0 \\ 2x - y \leq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Miền nghiệm S của $(*)$ là tứ giác $ABCD$ (kẻ cả cạnh). Với $A(0;0), B(-1;2), C(-2;0), D(-1;-2)$.

Dễ dàng nhận thấy $ABCD$ là hình thoi.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng $Oxy \Rightarrow M$ chạy tung tăng trong miền S .

Ta có $|z| = OM \Rightarrow |z|_{\max} = OM_{\max}$.

Ta dễ nhận thấy $OM_{\max} = OB = OD \Rightarrow |z|_{\max} = \sqrt{5}$. Nhưng nhóm muốn chứng minh thêm cho mọi người xem, phần chữ màu đỏ.

CHỨNG MINH:

Vì $\triangle OBC$ và $\triangle ODC$ đối xứng nhau qua trục Ox nên xét M chạy tung tăng trên $\triangle OBC$ ($O \equiv A$).

Gọi $N = OM \cap BC \Rightarrow OM \leq ON$ và N thuộc cạnh BC .

$$H \text{ là hình chiếu của } O \text{ trên } BC \Rightarrow \begin{cases} HN \leq HB \\ HN \leq HC \end{cases}$$

Ta lại có HN là hình chiếu của ON trên BC .

HB là hình chiếu của OB trên BC .

HC là hình chiếu của OC trên BC .

Từ đó ta có $\begin{cases} ON \leq OB \\ ON \leq OC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OM \leq OB \\ OM \leq OC \end{cases} \Rightarrow OM \max = \max \{OB; OC\}.$

Mà $\begin{cases} OB = \sqrt{5} \\ OC = 2 \end{cases} \Rightarrow OM \max = OB = \sqrt{5} \Leftrightarrow M \equiv B.$

Do tính đối xứng nên $OM \max \Leftrightarrow \begin{cases} M \equiv B(-1; 2) \\ M \equiv D(-1; -2) \end{cases} \Rightarrow |z| \max = \sqrt{5}.$

Câu 42. (CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ HÒA BÌNH LẦN 4 NĂM 2019) Trong các số phức z thỏa mãn $|z^2 + 1| = 2|z|$, gọi z_1 và z_2 lần lượt là các số phức có môđun nhỏ nhất và lớn nhất. Giá trị của biểu thức $|z_1|^2 + |z_2|^2$ bằng

A. 6.

B. $2\sqrt{2}.$

C. $4\sqrt{2}.$

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$|z^2 + 1| = 2|z| \Leftrightarrow |x^2 - y^2 + 2xyi + 1| = 2|x + yi|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

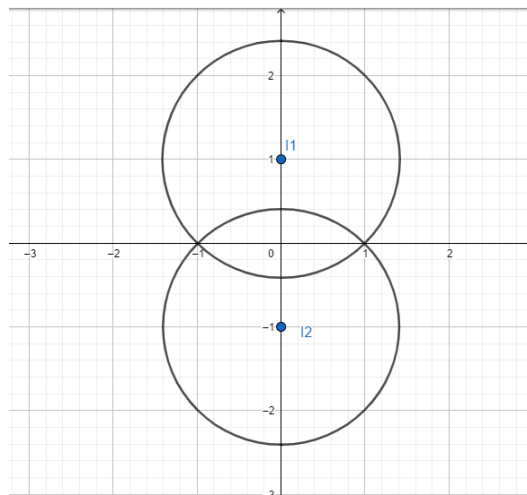
$$\Leftrightarrow x^4 + y^4 + 1 - 2x^2 - 6y^2 + 2x^2y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 + y^4 + 1 - 2x^2 - 2y^2 + 2x^2y^2 = 4y^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 1)^2 = 4y^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 2y \\ x^2 + y^2 - 1 = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0 & (C_1) \\ x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0 & (C_2) \end{cases}$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là hai đường tròn $(C_1); (C_2)$ có tâm và bán kính lần lượt là $I_1(0; 1); R_1 = \sqrt{2}$ và $I_2(0; -1); R_2 = \sqrt{2}$



Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn z_1 và z_2 có môđun nhỏ nhất và lớn nhất nên OM dài nhất và ON ngắn nhất.

$$OM \text{ dài nhất} \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OI_1 + R_1 \\ OM = OI_2 + R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M(0; 1+\sqrt{2}) \\ M(0; -1-\sqrt{2}) \end{cases} \Rightarrow |z_1| = 1+\sqrt{2} \Rightarrow |z_1|^2 = 3+2\sqrt{2}.$$

$$ON \text{ ngắn nhất} \Leftrightarrow \begin{cases} ON = R_1 - OI_1 \\ ON = R_2 - OI_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N(0; -\sqrt{2}+1) \\ N(0; \sqrt{2}-1) \end{cases} \Rightarrow |z_2| = \sqrt{2}-1 \Rightarrow |z_2|^2 = 3-2\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } |z_1|^2 + |z_2|^2 = 6.$$

Câu 43. (SỞ GD & ĐT CÀ MAU) Cho hai số phức z_1, z_2 thay đổi, luôn thỏa mãn $|z_1 - 1 - 2i| = 1$ và $|z_2 - 5 + i| = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = |z_1 - z_2|$.

A. $P_{\min} = 2$.

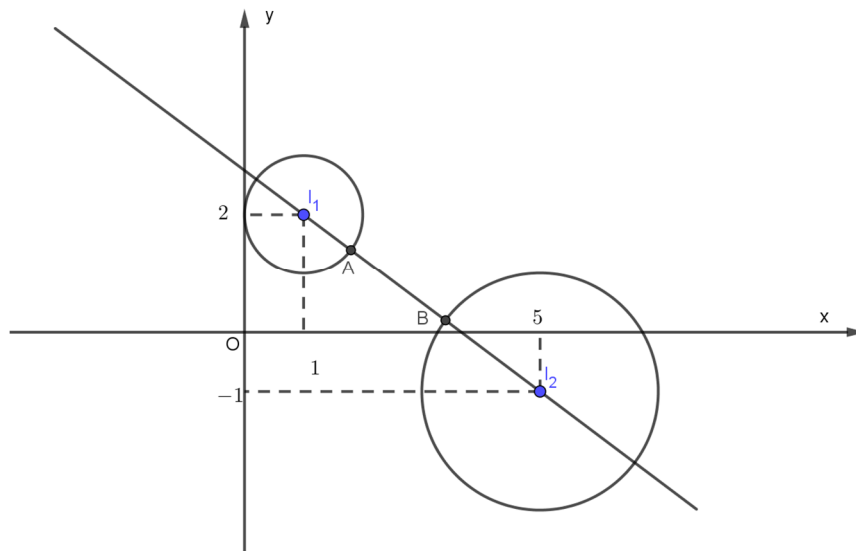
B. $P_{\min} = 1$.

C. $P_{\min} = 5$.

D. $P_{\min} = 3$.

Lời giải

Chọn A



Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2 . Khi đó $P = |z_1 - z_2| = AB$.

Ta có A thuộc đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1; 2)$, bán kính $R_1 = 1$ và B thuộc đường tròn (C_2) có tâm $I_2(5; -1)$, bán kính $R_2 = 2$.

$$I_1I_2 = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5 > R_1 + R_2 = 3 \text{ nên hai đường tròn } (C_1) \text{ và } (C_2) \text{ ở ngoài nhau.}$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = I_1I_2 - R_1 - R_2 = 5 - 1 - 2 = 2.$$

Câu 44. (Sở Lạng Sơn 2019) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3i + 5| = 2$ và $|iz_2 - 1 + 2i| = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |2iz_1 + 3z_2|$

A. $\sqrt{313}$.

B. $\sqrt{313} + 8$.

C. $\sqrt{313} + 16$.

D. $\sqrt{313} + 2\sqrt{5}$.

Lời giải

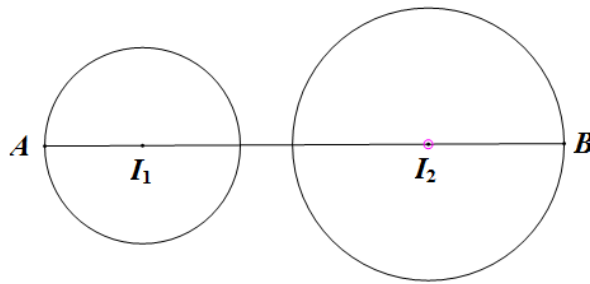
Chọn C

$$\text{Ta có } |z_1 - 3i + 5| = 2 \Leftrightarrow |2iz_1 + 6 + 10i| = 4 \quad (1)$$

$$|iz_2 - 1 + 2i| = 4 \Leftrightarrow |(-3z_2) - 6 - 3i| = 12 \quad (2)$$

Gọi A là điểm biểu diễn số phức $2iz_1$, B là điểm biểu diễn số phức $-3z_2$

Từ (1) và (2) suy ra điểm A nằm trên đường tròn tâm $I_1(-6; -10)$, bán kính $R_1 = 4$, điểm B nằm trên đường tròn tâm $I_2(6; 3)$, bán kính $R_2 = 12$



Ta có $T = |2iz_1 + 3z_2| = AB \leq I_1I_2 + R_1 + R_2 = \sqrt{12^2 + 13^2} + 4 + 12 = \sqrt{313} + 16$

Vậy $\max T = \sqrt{313} + 16$.

Câu 45. Cho số phức z thỏa mãn $|z - (3 + 4i)| = \sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$. Tính giá trị $A = M^2 + m^2$.

Lời giải

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có: $|z - (3 + 4i)| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a - 3)^2 + (b - 4)^2 = 5$.

$\Rightarrow z$ thuộc đường tròn (C) có tâm $I(3; 4)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

Mặt khác: $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2 \Rightarrow 4a + 2b + 3 - P = 0$.

Vậy z thuộc đường thẳng $(\Delta): 4a + 2b + 3 - P = 0$.

Ta có: $\begin{cases} z \in (C) \\ z \in (\Delta) \end{cases} \Rightarrow \text{Đề } \exists z \text{ thì } (C) \cap (\Delta) \Rightarrow d[I; (\Delta)] \leq R$

$\Rightarrow \frac{|23 - P|}{2\sqrt{5}} \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow 13 \leq P \leq 33 \Rightarrow A = 1258$.

Câu 46. Cho số phức $z \neq 0$ thỏa $|z| \geq 2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = \left| \frac{z+i}{z} \right|$. Tính $A = M^2 + m^2$.

Lời giải

Gọi $T = \frac{z+i}{z} \Rightarrow (T-1)z = i$. $T=1 \Rightarrow$ Không có số phức nào thỏa mãn.

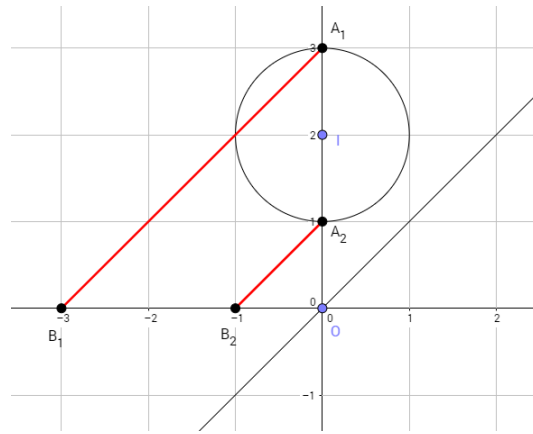
Xét $T \neq 1 \Rightarrow z = \frac{i}{T-1} \Leftrightarrow |z| = \left| \frac{i}{T-1} \right| \geq 2 \Rightarrow |T-1| \leq \frac{1}{2}$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức T là hình tròn tâm $I(1; 0)$ có bán kính $R = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow \begin{cases} M = OI + R = \frac{3}{2} \\ m = |OI - R| = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A = \frac{5}{2}$.

Câu 47. Cho z_1 là số phức, z_2 là số thực thỏa mãn $|z_1 - 2i| = 1$ và $\frac{z_2 - z_1}{1+i}$ là số thực. Gọi M, m lần lượt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$. Tính $A = M^2 + m^2$.

Lời giải



Trong mặt phẳng phức Oxy :

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 .

$$\Rightarrow A \in (C): x^2 + (y - 2)^2 = 1 \text{ và } B \in Ox$$

$$\Rightarrow |z_2 - z_1| = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{AB}|.$$

Ta có $\frac{z_1 - z_2}{1 - 2i} = k \ (k \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = k(1; 1) \Rightarrow$ Đường thẳng AB có vectơ pháp tuyến là $(1; -1)$.

Ta có: AB tạo với trục Ox một góc 45° .

$$\Rightarrow AB = \frac{AO}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \begin{cases} \max AB = \frac{\max AO}{\sin 45^\circ} = \frac{3}{\sin 45^\circ} = 3\sqrt{2} \\ \min AB = \frac{\min AO}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow P = 20.$$

Câu 48. Cho z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $|6 - 3i + iz| = |2z - 6 - 9i|$ thỏa mãn $|z_1 - z_2| = \frac{8}{5}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + z_2|$. Tính $P = M + m$.

Lời giải

Đặt $z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R})$. Ta có: $|6 - 3i + iz| = |2z - 6 - 9i| \Leftrightarrow (a - 3)^2 + (b - 4)^2 = 1 \ (C)$.

Trong mặt phẳng phức Oxy, gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 và I, H lần lượt là tâm đường tròn (C) , trung điểm AB .

$$\Rightarrow \begin{cases} A, B \in (C): (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 1 \\ |z_1 + z_2| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = 2|\overrightarrow{OH}| = 2OH \end{cases}$$

Với 3 điểm O, I, H ta có: $|OI - IH| \leq OH \leq OH + HI$.

$$\Leftrightarrow 2 \left| OI - \sqrt{IA^2 - \frac{AB^2}{4}} \right| \leq 2OH \leq 2 \left[OI + \sqrt{IA^2 - \frac{AB^2}{4}} \right] \Leftrightarrow \frac{44}{5} \leq 2OH \leq \frac{56}{5} \Rightarrow P = 20.$$

Dấu "=" xảy ra:

Khi OH đạt giá trị nhỏ nhất thì O, H, I thẳng hàng theo thứ tự đó.

Khi OH đạt giá trị lớn nhất thì O, I, H thẳng hàng theo thứ tự đó.

Câu 49. Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3 - 4i| = 1, |z_2 + 1| = |z_2 - i|$ và $\frac{z_1 - z_2}{2 - i}$ là số thực. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$. Tính $P = M + m$.

Lời giải

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn của số phức z_1, z_2 .

$$\Rightarrow z_2 - z_1 = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow |z_2 - z_1| = AB$$

Ta có

$$\frac{z_1 - z_2}{2 - i} = k \quad (k \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = k(2; -1) \Rightarrow$$

Đường thẳng AB có vectơ pháp tuyến là $(1; 2)$.

Trong mặt phẳng phức Oxy ta có:

$$\begin{cases} z_1 \in (C): (x-3)^2 + (y-4)^2 = 1 \\ z_2 \in (d): x + y = 0 \end{cases}$$

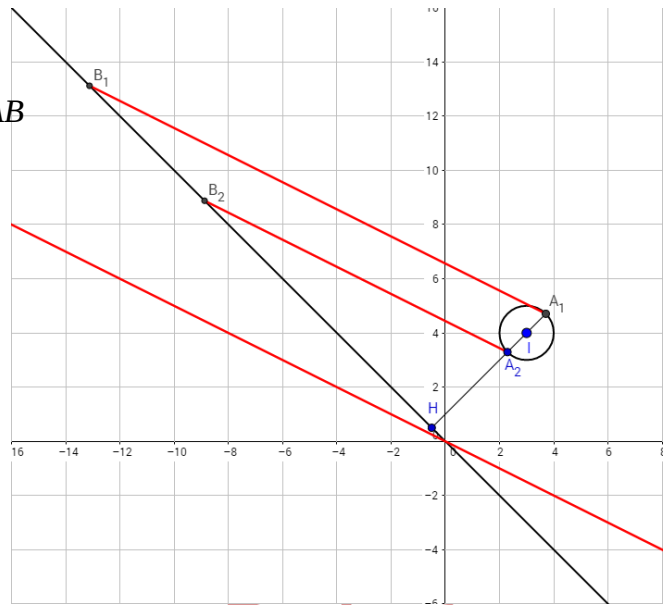
Ta có góc giữa AB và d là:

$$\cos(AB; d) = \frac{|\overrightarrow{n_{AB}} \cdot \overrightarrow{n_d}|}{|\overrightarrow{n_{AB}}| \cdot |\overrightarrow{n_d}|} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\Rightarrow \sin(AB; d) = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Ta có (C) không cắt $(d) \Rightarrow d[I; (d)] - R_{(C)} > 0$. Gọi H là hình chiếu của A trên (d) .

$$\Rightarrow AB = \frac{AO}{\sin(AB; d)} \Rightarrow \begin{cases} \max AB = \frac{\max AH}{\sin(AB; d)} = \frac{d[I; (d)] + R_{(C)}}{\sin(AB; d)} = 7\sqrt{5} + \sqrt{10} \\ \min AB = \frac{\min AH}{\sin(AB; d)} = \frac{d[I; (d)] - R_{(C)}}{\sin(AB; d)} = 7\sqrt{5} - \sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow P = 14\sqrt{5}.$$



Câu 50. Cho số phức z thỏa mãn z không phải là số thực và $w = \frac{z}{2+z^2}$ là thực. Giá trị lớn nhất của $P = |z+1-i|$ là:

Lời giải

$$\text{Do } z \in \mathbb{R} \Rightarrow z \neq 0. \text{ Ta có: } w = \frac{z}{2+z^2} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{1}{w} = \frac{2+z^2}{z} = \left(\frac{2}{z} + z\right) \in \mathbb{R}.$$

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$\Rightarrow \frac{2}{z} + z = \frac{2}{a+bi} + a+bi = \frac{2(a-bi)}{a^2+b^2} + a+bi = \left(\frac{2a}{a^2+b^2} + a\right) - b\left(\frac{2}{a^2+b^2} - 1\right)i.$$

$$\text{Do } \frac{1}{w} \in \mathbb{R} \Rightarrow b\left(\frac{2}{a^2+b^2} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \text{ (loại)} \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases}$$

Vậy tập hợp điểm của số phức z là đường tròn $(C): a^2 + b^2 = 2$ trong mặt phẳng phức.

Trong mặt phẳng phức xét điểm $A(-1; 1) \Rightarrow P = MA \Rightarrow \max P = OA + R_{(C)} = 2\sqrt{2}$.

Câu 51. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|iz_1 + \sqrt{2}| = \frac{1}{2}$ và $z_2 = iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 - z_2|$.

A. $2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

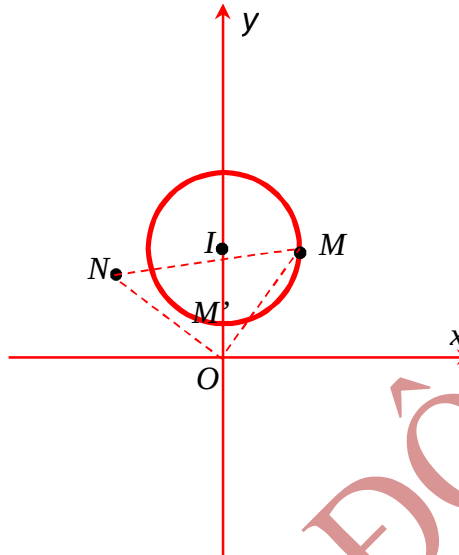
B. $2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$

C. $\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

D. $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

Lời giải

Bài toán này, thực chất là dựa trên kiến thức “Biểu diễn hình học số phức”. Ta thấy nếu đặt $z_1 = x_1 + y_1 i$ ($x_1; y_1 \in \mathbb{R}$). Khi đó điểm $M(x_1; y_1)$ là điểm biểu diễn số phức z_1 thỏa mãn:



$$|i(x_1 + y_1 i) + \sqrt{2}| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |ix_1 - y_1 + \sqrt{2}| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_1^2 + (y_1 - \sqrt{2})^2 = \frac{1}{4}. \text{ Suy ra tập hợp các điểm } M$$

biểu diễn z_1 là đường tròn (C) có tâm $I(0; \sqrt{2})$ và bán kính $R = \frac{1}{2}$.

Khi đó nếu N là điểm biểu diễn của số phức z_2 thì việc tìm GTNN của $|z_1 - z_2|$ là việc tìm GTNN của MN .

Theo đề thì $z_2 = iz_1 = -y_1 + x_1 i \Rightarrow N(-y_1; x_1)$ là điểm biểu diễn z_2 . Ta nhận thấy rõ ràng

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = -x_1 y_1 + x_1 y_1 = 0 \Rightarrow OM \perp ON. \text{ Dễ nhận thấy } OM = ON = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

Ta có hình vẽ sau:

Do OMN là tam giác vuông cân tại O nên $MN = OM\sqrt{2}$, do đó để MN nhỏ nhất thì OM nhỏ nhất. Dễ thấy, OM nhỏ nhất khi $M \equiv M'$ (M' là giao điểm của OI với đường tròn như hình vẽ)

$$\text{Tức là } M\left(0; \sqrt{2} - \frac{1}{2}\right). \text{ Khi đó } MN = OM\sqrt{2} = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 52. Xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M, M' . Số phức $w = z(4 + 3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn lần lượt là N, N' . Biết rằng M, M', N, N' là bốn đỉnh của hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z + 4i - 5|$.

A. $\frac{5}{\sqrt{34}}$

B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$

C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

D. $\frac{4}{\sqrt{13}}$

Lời giải

Gọi số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$\Rightarrow w = (a + bi)(4 + 3i) = (4a - 3b) + (3a + 4b)i \Rightarrow \bar{w} = (4a - 3b) - (3a + 4b)i$$

Ta có: M và M' đối xứng nhau qua trục Ox , N và N' đối xứng nhau qua trục Ox

$$\Rightarrow \begin{cases} MM' \perp Ox \\ NN' \perp Ox \end{cases}.$$

Ta có: M, M', N, N' là bốn đỉnh của hình chữ nhật $MM'N'N$ hoặc $MM'NN'$.

Trong mặt phẳng phức Oab , xét điểm $A(5; -4) \Rightarrow |z + 4i - 5| = MA$

Trường hợp 1: Với hình chữ nhật $MM'N'N$.

$$\Rightarrow MN \perp M'N' \Rightarrow MN // Ox \Rightarrow y_M = y_N \Rightarrow b = (3a + 4b) \Leftrightarrow a + b = 0$$

$$\Rightarrow M \in (d_1): a + b = 0. \text{ Vậy } MA_{\min} = d[A; (d_1)] = \frac{|5 + (-4)|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Trường hợp 2: Với hình chữ nhật $MM'NN'$.

$$\Rightarrow MN' \perp M'M' \Rightarrow MN' // Ox \Rightarrow y_M = y_{N'} \Rightarrow b = -(3a + 4b) \Leftrightarrow 3a + 5b = 0$$

$$\Rightarrow M \in (d_2): 3a + 5b = 0. \text{ Vậy } MA_{\min} = d[A; (d_2)] = \frac{|3 \cdot 5 + 5 \cdot (-4)|}{\sqrt{3^2 + 5^2}} = \frac{5}{\sqrt{34}}.$$

$$\text{Vì } d[A; (d_1)] < d[A; (d_2)] \Rightarrow MA_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 53. Cho số phức z_1 thỏa $|z_1 + 1 - i| = |z_1|$, số phức z_2 thỏa $\frac{5 - 35i}{5z_2 - 23 - 4i}$ là số thực và số phức w thỏa điều kiện $2|w - 1 + i| + 3|w - 2 + i| \leq 2$. Cho $P = |w - z_1| + |w - z_2| + |z_1 - z_2|$, gọi a là giá trị nhỏ nhất của biểu thức P (nếu có). Đáp án nào sau đây là đúng:

A. $a = \frac{16\sqrt{10}}{5}$.

B. $a = \frac{8\sqrt{10}}{5}$.

C. $a = \frac{6 + 4\sqrt{5}}{2}$.

D. $a = \frac{3 + 4\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Trong mặt phẳng phức Oxy gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của số phức w, z_1, z_2 .

Gọi

$$z_1 = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow |z_1 + 1 - i| = |z_1| \Leftrightarrow a - b + 1 = 0$$

$\Rightarrow z_1 \in (\Delta_1): x - y + 1 = 0$ trong mặt phẳng phức Oxy .

Ta

có:

$$\frac{5 - 35i}{5z_2 - 23 - 4i} = k \ (k \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \frac{1}{k}(1; -7)$$

với $D\left(\frac{23}{5}; \frac{4}{5}\right)$. Vậy z_2 thuộc đường thẳng có vectơ chỉ phương là $(1; -7)$ và đi qua điểm D

nhưng không lấy điểm $D \Rightarrow z_2 \in (\Delta_2): 7x + y - 33 = 0$ và $z_2 \neq \frac{23}{5} + \frac{4}{5}i$.

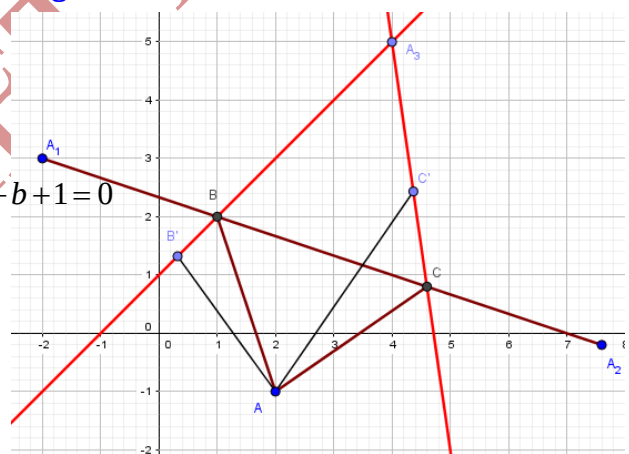
Ta có: $2|w - 1 + i| + 3|w - 2 + i| \leq 2 \Leftrightarrow 2AE + 3AF \leq 2$ với $E(1; -1)$ $F(2; -1)$.

Mà $2AE + 2AF \geq 2EF = 2$. vậy dấu "=" xảy ra khi $w = 2 - i$.

$\Rightarrow P = AB + BC + CA$. Ta có A thuộc góc nhọn được tạo bởi 2 đường thẳng $(\Delta_1), (\Delta_2)$.

Gọi A_1, A_2 lần lượt là điểm đối xứng của A qua $(\Delta_1), (\Delta_2) \Rightarrow \begin{cases} AB = A_1B \\ AC = A_2C \end{cases}$ và $\begin{cases} A_1(-2; 3) \\ A_2\left(\frac{38}{5}; -\frac{1}{5}\right) \end{cases}$

$$\Rightarrow P = AB + BC + CA = A_1B + BC + A_2C \geq A_1A_2 = \frac{16\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \text{Chọn A} \dots \text{ah mà thôi: v.}$$



Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} B = A_1 A_2 \cap (\Delta_1) \\ C = A_1 A_2 \cap (\Delta_2) \end{cases}$. Ta cần tìm tọa độ C để so sánh với điểm loại

đi trên $(\Delta_2) \Rightarrow C\left(\frac{23}{5}; \frac{4}{5}\right) \Rightarrow$ Không tồn tại điểm $C \Rightarrow$ Không tồn tại $P_{\min}$.

Câu 54. Cho số phức z_1, z_2 thỏa $|z+1-i|=|z|$ và $|z_1-z_2|=6\sqrt{2}$, số phức w_1, w_2 thỏa điều kiện $\frac{1+i}{w-4+2i}$ là số thực và $|w_1-w_2|=3\sqrt{2}$, số phức u thỏa $2|u+2-i|+3|u-1+2i| \leq 6\sqrt{2}$. Gọi giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau (nếu có) là $P=|u-z_1|+|u-z_2|+|u-w_1|+|u-w_2|$. Đáp án nào sau đây là đúng:

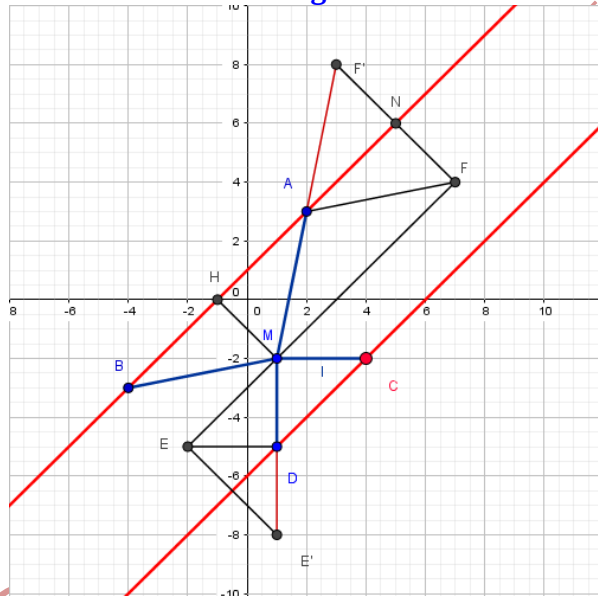
A. $3+\sqrt{26}$.

B. $9\sqrt{2}+6$.

C. $6+2\sqrt{26}$.

D. $3-\sqrt{26}$.

Lời giải



Trong mặt phẳng phức gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn số phức $z_1, z_2 \Rightarrow |z_1-z_2|=6\sqrt{2} \Leftrightarrow AB=6\sqrt{2}$.

Gọi $z=a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow |z+1-i|=|z| \Leftrightarrow a-b+1=0$.

Vậy $z_1, z_2 \in (\Delta): x-y+1=0$ trong mặt phẳng phức với $|z_1-z_2|=6\sqrt{2}$.

Trong mặt phẳng phức gọi X, C, D lần lượt là điểm biểu diễn số phức w, w_1, w_2
 $\Rightarrow |w_1-w_2|=3\sqrt{2} \Leftrightarrow CD=3\sqrt{2}$.

Ta có: $\frac{1+i}{w-4+2i}=k$ ($k \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \overrightarrow{XY}=k(1;1)$ với $Y(4;-2)$.

Vậy w thuộc đường thẳng có vectơ chỉ phương là $(1;1)$ và đi qua điểm $Y(4;-2)$ nhưng $w \neq 4-2i$.

$\Rightarrow w \in (\Delta_2): x-y-6=0$ loại đi điểm $Y(4;-2)$.

Trong mặt phẳng phức gọi M là điểm biểu diễn số phức u .

Ta có $E(-2;1), F(1;-2) \Rightarrow 2|u+2-i|+3|u-1+2i| \leq 6\sqrt{2} \Rightarrow 2ME+3MF \leq 6\sqrt{2}$.

Mà $2ME+2MF \geq 2EF=6\sqrt{2}$. Vậy dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $MF=0 \Leftrightarrow M(1;-2)$.

$\Rightarrow P=MA+MB+MC+MD$ với $AB=2CD=6\sqrt{2}$. Ta cần tìm $P_{\min}$.

Gọi E, F lần lượt là đỉnh thứ tư của hình bình hành $MCDE, MBAF$.

Gọi E' là điểm đối xứng của E qua (Δ_2) , F' là điểm đối xứng của F qua (Δ_1) .

Ta có: $\begin{cases} MC = DE = DE' \\ MB = AF = AF' \end{cases} \Rightarrow P = (E'D + DM) + (F'A + AM) \geq E'M + F'M.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} D = ME' \cap (\Delta_2) \\ A = MF' \cap (\Delta_1) \end{cases}.$

Gọi N là hình chiếu của M trên $(\Delta_1) \Rightarrow \Delta MHA = \Delta ANF' (g - c - g)$ với $N = FF' \cap (\Delta_1)$

$\Rightarrow MA = AF' = AF = MB \Rightarrow \Delta MAB$ cân tại M . Chứng minh tương tự ΔMCD cân tại M .

$\Rightarrow P_{\min} = MA + MB + MC + MD = 6 + 2\sqrt{26}.$

Kiểm tra lại tọa độ của C, D . Ta viết phương trình đường tròn tâm M bán kính $R = MC$.

$\Rightarrow C, D = (C) \cap (\Delta_2) \Rightarrow \begin{cases} C(4; -2) \\ D(1; -5) \end{cases}$ Không tồn tại $P_{\min}$ do $w \neq 4 - 2i$.

Câu 55. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 1 - 2i| = 2\sqrt{2}$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a|z - 1| + b|\bar{z} + 3 + 4i|$ với a, b là số thực dương.

A. $\sqrt{a^2 + b^2}$. **B.** $\sqrt{2a^2 + 2b^2}$. **C.** $4\sqrt{2a^2 + 2b^2}$. **D.** $a^2 + b^2$.

Lời giải

Ta gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng phức.

Trong mặt phẳng phức xét các điểm $A(1; 0)$, $B(-3; 4)$. Khi đó $AB = 4\sqrt{2}$.

Ta luôn có: $\begin{cases} MA^2 + MB^2 = AB^2 (py - ta - gq) \\ P = aMA + bMB \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{P - bMB}{a} \right)^2 + MB^2 - AB^2 = 0.$

$\Rightarrow \left(\frac{b^2}{a^2} + 1 \right) MB^2 - \frac{2.P.b}{a} MB + \left(\frac{P^2}{a^2} - AB^2 \right) = 0 (*)$.

Để phương trình (*) có nghiệm thì: $\Delta'_{(*)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{b^2}{a^2} P^2 - \left(\frac{b^2}{a^2} + 1 \right) \left(\frac{P^2}{a^2} - AB^2 \right) \geq 0$

$\Leftrightarrow -\frac{P^2}{a^2} + \left(\frac{b^2}{a^2} + 1 \right) AB^2 \geq 0 \Leftrightarrow P^2 \leq AB^2 (a^2 + b^2) \Rightarrow P \leq AB\sqrt{a^2 + b^2} = 4\sqrt{2a^2 + 2b^2}.$

Chọn C

Câu 56. Xét tập (A) gồm các số phức z thỏa mãn $\frac{z - 2i}{z - 2}$ là số thuần ảo và các giá trị thực m, n thỏa mãn chỉ có duy nhất một số phức $z \in (A)$ thỏa mãn $|z - m - ni| = \sqrt{2}$. Đặt $M = \max(m + n)$ và $N = \min(m + n)$. Tính $P = M + N$?

A. $P = -2$. **B.** $P = -4$. **C.** $P = 4$. **D.** $P = 2$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thì $|z - 2i| = |\bar{z} + 2 + 4i| \Leftrightarrow a = b - 4$ (1)

Ta có $\frac{z - 2i}{z - 2} = \frac{a + (b - 2)i}{(a - 2) + bi} = \frac{[a + (b - 2)i][(a - 2) - bi]}{(a - 2)^2 + b^2}$
 $= \frac{a(a - 2) + b(b - 2) + [(a - 2)(b - 2) - ab]i}{(a - 2)^2 + b^2}$

Vì $\frac{z-2i}{z-2}$ là số thuần ảo nên $a(a-2)+b(b-2)=0 \Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2=2$

Ta cũng có $(a-m)^2+(b-n)^2=2$

Vì chỉ có duy nhất một số phức thỏa mãn nên hai đường tròn (C_1) có $I_1(1;1)$, $R_1=\sqrt{2}$ và đường tròn (C_2) có $I_2(m;n)$, $R_2=\sqrt{2}$ tiếp xúc nhau.

$$\text{Vậy } \begin{cases} I_1I_2 = R_1 + R_2 = 2\sqrt{2} \\ I_1I_2 = |R_1 - R_2| = 0 \end{cases}$$

Trường hợp $I_1I_2=0$ (không thỏa mãn) vì lúc đó hai đường tròn trùng nhau nên có vô số $(a;b)$

thỏa mãn $(a-1)^2+(b-1)^2=2$. Vậy $I_1I_2=2\sqrt{2} \Leftrightarrow (m-1)^2+(n-1)^2=8$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có :

$$|m+n-2| = |(m-1)+(n-1)| \leq \sqrt{(1^2+1^2)((m-1)^2+(n-1)^2)} = 4$$

$$\Rightarrow -4 \leq m+n-2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq m+n \leq 6$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} M=6 \\ N=-2 \end{cases} \Rightarrow P=4.$$

Câu 57. Cho số phức z_1 thỏa mãn $|z_1-2|^2-|z_1+i|^2=1$ và số phức z_2 thỏa mãn $|z_2-4-i|=\sqrt{5}$. Hỏi giá trị nhỏ nhất $|z_1-z_2|$ là?

A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

B. $\sqrt{5}$.

C. $2\sqrt{5}$.

D. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $z_1=a+bi$; $a,b \in \mathbb{R}$ và $z_2=m+ni$; $m,n \in \mathbb{R}$.

Ta có: $|z_1-2|^2-|z_1+i|^2=1$

$$\Leftrightarrow [(a-2)^2+b^2] - [a^2+(b+1)^2] = 1 \Leftrightarrow 2a+b-2=0.$$

Tương tự ta có $|z_2-4-i|=\sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow (m-2)^2+(n-1)^2=5.$$

Khi đó xét các điểm $M(a;b)$, $N(m;n)$, ta có: $M \in d: 2x+y-2=0$

và $N \in (C)$ có $I(4;1)$, $R=\sqrt{5}$.

$$|z_1-z_2|=MN \geq IM-|IN| \geq d(I;d)-R = \frac{7}{\sqrt{5}} - \sqrt{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 58. Cho số phức $z_1=1+3i$, $z_2=-5-3i$. Tìm điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z_3 , biết rằng M nằm trên đường thẳng $x-2y+1=0$ và số phức $w=3z_3-z_2-2z_1$ có giá trị nhỏ nhất?

A. $M\left(-\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

B. $M\left(\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

C. $M\left(\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right)$.

D. $M\left(-\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn A

M nằm trên đường thẳng $x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow M(2y - 1; y) \Rightarrow z_3 = 2y - 1 + yi$

và $w = 3(2y - 1 + yi) - (-5 - 3i) - 2(1 + 3i) = 6y + (3y - 3)i$.

Do đó: $|w| = \sqrt{36y^2 + (3y - 3)^2} = 3\sqrt{5\left(y - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}} \geq \frac{6}{\sqrt{5}}$

Dấu "=" xảy ra khi $y = \frac{1}{5} \Rightarrow M\left(-\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

Câu 59. Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z^2 - 2z + 5| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)|$ và $w = z - 2 + 2i$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của $|w|$ là:

A. $\frac{3}{2}$.

B. 1.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $z = a + bi$; $a, b \in \mathbb{R}$ thì

Theo giả thuyết $|z^2 - 2z + 5| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)|$

$$\Leftrightarrow |(z - (1 + 2i))(z - (1 - 2i))| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z - (1 - 2i)| = 0 \\ |z - 1 - 2i| = |z - 1 + 3i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - 2i \\ (b - 2)^2 = (b + 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Khi đó} \begin{cases} w = (1 - 2i) - 2 + 2i = -1 \\ w = z - 2 + 2i = \left(a - \frac{1}{2}i\right) - 2 + 2i = (a - 2) + \frac{3}{2}i \end{cases}$$

Trường hợp sau ta có $|w| = \sqrt{(a - 2)^2 + \frac{9}{4}} \geq \frac{3}{2}$

Từ (1), (2) suy ra $|w| \geq 1$.

Câu 60. Cho ba số phức z, z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 6$ và $|z_1 - z_2| = 6\sqrt{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z| + |z - z_1| + |z - z_2|$.

A. $6\sqrt{2} + \sqrt{2}$.

B. $3\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

C. $6\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

D. $3\sqrt{2} + \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Xét tam giác OAB với A, B lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2 và M là điểm biểu diễn số phức z , ta có $OA = OB = 6$, $AB = 6\sqrt{2} \Rightarrow OAB$ vuông tại O .

Khi đó ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $P = MO + MA + MB$.

Dựng phía ngoài tam giác OAB tam giác đều ABC , đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt OC tại D , theo bất đẳng thức Ptoleme cho bốn điểm M, A, B, C ta có:

$MA \cdot CB + MB \cdot CA > MC \cdot AB \Rightarrow MA + MB \geq MC$ và $MA + MB + MO \geq MC + MO \geq OC = \text{const}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv D$. Ta đi tính độ dài đoạn OC , bằng định lý hàm số cosin ta có:

$OA = 6$, $AC = 6\sqrt{2}$, $\widehat{OAC} = \widehat{OAB} + \widehat{BAC} = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$.

Do đó $OC = \sqrt{OA^2 + AC^2 - 2 \cdot OA \cdot AC \cdot \cos 105^\circ} = \sqrt{6^2 + (6\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \cos 105^\circ} = 6\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P_{\min} = 6\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Câu 61. Cho số phức z . Kí hiệu A, B, C, D lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $z, \bar{z}, z(4+3i)$ và $\overline{z(4+3i)}$. Biết A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình chữ nhật. Hỏi giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z+4i-5|$ là?

A. $\frac{5}{\sqrt{34}}$.

B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

D. $\frac{4}{\sqrt{13}}$.

Lời giải

Chọn C

Với $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$.

Ta có: $A(a; b), B(a; -b), C(4a-3b; 3a+4b), D(4a-3b; -3a-4b)$.

Do đó A, B đối xứng qua trục hoành; C, D đối xứng qua trục hoành và $AB \parallel CD$.

Theo giả thiết A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình chữ nhật khi và chỉ khi có $a \neq 0$ và $b \neq 0$ và

$$\begin{cases} AB = CD \\ \overline{AB} \perp \overline{AC} \\ \overline{AB} \perp \overline{AD} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b \\ a = -b \\ -2b(3a+3b) = 0 \\ -2b(-3a-5b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b \\ a = -b \\ b = 0(l) \Leftrightarrow a = -b \\ a = -b \\ b = -\frac{3}{5}a \end{cases}$$

Với $z = a - ai$, ta có: $|z+4i-5| = \sqrt{(a-5)^2 + (4-a)^2} = \sqrt{2\left(a-\frac{9}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}$.

Câu 62. Cho số phức $z = \frac{i-m}{1-m(m-2i)}$, trong đó m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho $|z-i| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Hỏi trong S có tất cả bao nhiêu phần tử nguyên?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } |z-i| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} &\Leftrightarrow \left| \frac{i-m}{1-m(m-2i)} - i \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left| \frac{i-m-i+mi(m-2i)}{1-m^2+2mi} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{m+m^2i}{1-m^2+2mi} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{|m+m^2i|}{|1-m^2+2mi|} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{m^2+m^4}}{\sqrt{(1-m^2)^2+4m^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2m^2+2m^4} \leq \sqrt{m^4+2m^2+1} \Leftrightarrow m^4 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1 \Rightarrow S = [-1; 1]$$

Vậy có 3 số nguyên trong S .

Câu 63. Gọi z là số phức thỏa mãn $P = |z-1-i| + |z-1-4i| + |z-2+i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $|z|$.

A. $\sqrt{2}$.

B. 1.

C. 2.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $z = a + bi$, xét các điểm $M(a; b)$, $A(1; 1)$, $B(1; 4)$, $C(2; -1)$.

$$\text{Ta có } \cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = -\frac{2}{\sqrt{5}} < -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} > 120^\circ.$$

$$\text{Do đó } \left| \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right| < 1 \text{ và}$$

$$\begin{aligned} P &= MA + MB + MC = MA + \frac{MB \cdot AB}{AB} + \frac{MC \cdot AC}{AC} \\ &\geq MA + \frac{\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AC}}{AC} = MA + \overrightarrow{MA} \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right) + \frac{AB^2}{AB} + \frac{AC^2}{AC} \\ &= MA + \overrightarrow{MA} \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right) + AB + AC \geq MA - \left| \overrightarrow{MA} \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right) \right| + AB + AC \geq AB + AC \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv A \Rightarrow z = 1 + i \Rightarrow |z| = \sqrt{2}$.

Câu 64. (ĐH Vinh Lần 1) Giả sử z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $(z - 6)(8 + \overline{z}i)$ là số thực. Biết rằng $|z_1 - z_2| = 4$, giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + 3z_2|$ bằng

A. $5 - \sqrt{21}$.

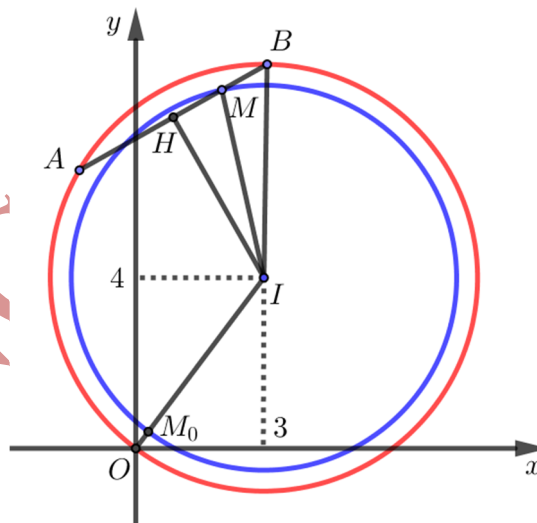
B. $20 - 4\sqrt{21}$.

C. $20 - 4\sqrt{22}$.

D. $5 - \sqrt{22}$.

Lời giải

Chọn C



Giả sử $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức z_1, z_2 . Suy ra $AB = |z_1 - z_2| = 4$.

$$\text{* Ta có } (z - 6)(8 + \overline{z}i) = [(x - 6) + yi] \cdot [(8 - y) - xi] = (8x + 6y - 48) - (x^2 + y^2 - 6x - 8y)i.$$

Theo giả thiết $(z - 6)(8 + \overline{z}i)$ là số thực nên ta suy ra $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$. Tức là các điểm A, B thuộc đường tròn (C) tâm $I(3; 4)$, bán kính $R = 5$.

* Xét điểm M thuộc đoạn AB thỏa $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} = 4\overrightarrow{OM}$. Gọi H là trung điểm AB . Ta tính được $HI^2 = R^2 - HB^2 = 21$; $IM = \sqrt{HI^2 + HM^2} = \sqrt{22}$, suy ra điểm M thuộc đường tròn (C') tâm $I(3; 4)$, bán kính $r = \sqrt{22}$.

* Ta có $|z_1 + 3z_2| = |\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}| = |4\overrightarrow{OM}| = 4OM$, do đó $|z_1 + 3z_2|$ nhỏ nhất khi OM nhỏ nhất.

Ta có $(OM)_{\min} = OM_0 = |OI - r| = 5 - \sqrt{22}$.

Vậy $|z_1 + 3z_2|_{\min} = 4OM_0 = 20 - 4\sqrt{22}$.

Phân tích : Kiến thức cần nắm vững :

- ☐ Quỹ tích điểm biểu diễn số phức.
- ☐ Modun số phức
- ☐ Bài toán liên quan tâm tỉ cự trong hình học.
- ☐ Sai sót dễ gặp, không để ý đường tròn C đi qua gốc tọa độ.

Câu 65. (ĐH Vinh Lần 1) Giả sử z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $(z+1)(\bar{z}-2i)$ là một số thuần ảo. Biết rằng $|z_1 - z_2| = 2$, giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + 5z_2|$ bằng

- A. $\sqrt{13} - \sqrt{5}$. B. $3\sqrt{5} - \sqrt{13}$. C. $3\sqrt{5} - 2\sqrt{13}$. D. $5 - \sqrt{22}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow (z+1)(\bar{z}-2i) = x^2 + y^2 + x + 2y - (2x + y + 2)i$.

Theo giả thiết $(z+1)(\bar{z}-2i)$ là số thuần ảo, suy ra

$$x^2 + y^2 + x + 2y = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 + 2y + 1 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{5}{4}.$$

$\Rightarrow$ tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn (C_1) tâm $I\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$, $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Giả sử $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức z_1, z_2 . Suy ra $|z_1 - z_2| = 2 \Leftrightarrow AB = 2$.

Gọi M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB} = 6\overrightarrow{OM}$.

Gọi H là trung điểm AB ta có
$$\begin{cases} IH^2 = IA^2 - HA^2 \\ IH^2 = IM^2 - HM^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IH^2 = \frac{1}{4} \\ IM^2 = \frac{13}{36} \end{cases}.$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn (C_2) tâm $I\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$, $r = \frac{\sqrt{13}}{6}$.

Ta có $|z_1 + 5z_2| = |\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB}| = 6|\overrightarrow{OM}| = 6OM$.

Do $(C_1), (C_2)$ là hai đường tròn đồng tâm và $O \in (C_1)$

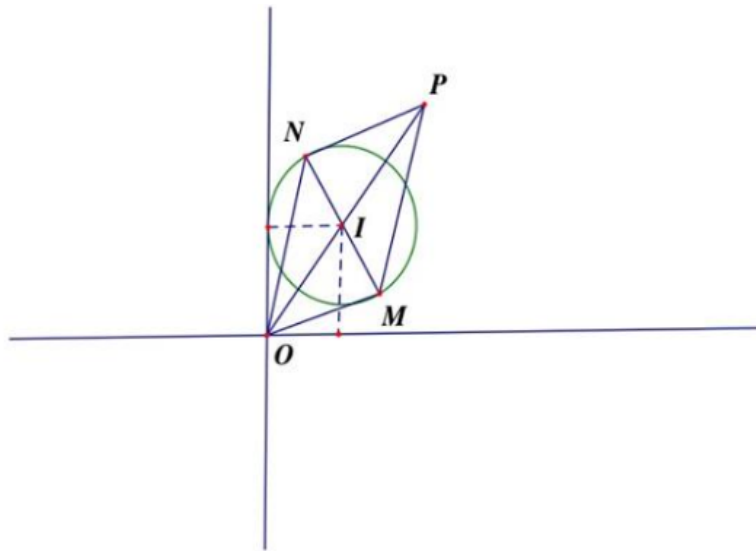
Từ đó suy ra $|z_1 + 5z_2|_{\min} = 6OM_{\min} = 6|R - r| = 6\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{13}}{6}\right) = 3\sqrt{5} - \sqrt{13}$

Câu 66. (ĐH Vinh Lần 1) Giả sử z_1, z_2 là hai trong số các số phức z thỏa mãn $|iz + \sqrt{2} - i| = 1$ và $|z_1 - z_2| = 2$ Giá trị lớn nhất của $|z_1| + |z_2|$ bằng

- A. 4. B. $2\sqrt{3}$. C. $3\sqrt{2}$. D. 3..

Lời giải

Chọn A



Ta có $|iz + \sqrt{2} - i| = 1 \Leftrightarrow |i||z - i\sqrt{2} - 1| = 1 \Leftrightarrow |z - 1 - i\sqrt{2}| = 1$.

Điểm biểu diễn z thuộc đường tròn tâm $I(1; \sqrt{2})$, $R = 1$.

Gọi M, N là điểm biểu diễn z_1, z_2 nên $MN = 2$ là đường kính. Dựng hình bình hành $OMPN$ ta có $|z_1 + z_2| = OP = 2\sqrt{3}$.

Ta có $(|z_1| + |z_2|)^2 \leq 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) = |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 16 \Rightarrow |z_1| + |z_2| \leq 4$. Dấu bằng xảy ra khi $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow MN \perp OI$ ($OMPN$ là hình thoi)

Câu 67. (Cầu Giấy Hà Nội 2019 Lần 1) Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $\left|z - \frac{\sqrt{3}}{3}i\right| = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z+1| + |z-1| + |z-\sqrt{3}i|$ bằng

A. $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

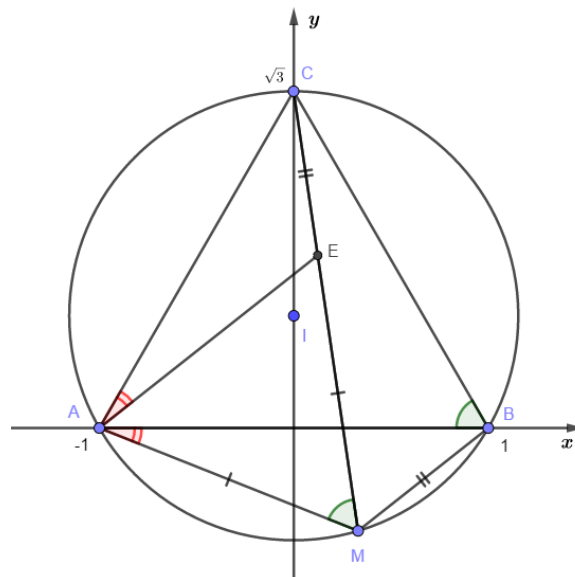
B. $\frac{8}{\sqrt{3}}$.

C. $\frac{16}{\sqrt{3}}$.

D. $\frac{32}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là điểm biểu diễn của z , $A(-1;0)$, $B(1;0)$, $C(0;\sqrt{3})$.

Khi đó $M \in (C): x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$ có tâm $I\left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, bán kính $R = \frac{2}{\sqrt{3}}$ và $A, B, C \in (C)$,

$\triangle ABC$ là tam giác đều.

Ta có: $P = |z+1| + |z-1| + |z-\sqrt{3}i| = MA + MB + MC$.

Giả sử M thuộc cung nhỏ $\widehat{AB}$. Lấy $E \in MC$ sao cho $ME = MA$.

Vì $\widehat{AMC} = \widehat{ABC} = 60^\circ$ nên $\triangle AME$ là tam giác đều.

$\Rightarrow AM = AE$ và $\widehat{MAE} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{CAE} = \widehat{BAM} \Rightarrow \triangle CAE = \triangle BAM$ (c.g.c) $\Rightarrow EC = MB$.

Do đó: $P = |z+1| + |z-1| + |z-\sqrt{3}i| = MA + MB + MC = ME + EC + MC = 2MC$.

$P_{\max} \Leftrightarrow MC$ có độ dài lớn nhất $\Leftrightarrow MC$ là đường kính của đường tròn (C) (hay M là điểm chính giữa cung nhỏ $\widehat{AB}$).

$\Rightarrow P_{\max} = 2MC = 2.2R = \frac{8}{\sqrt{3}}$.

Tương tự M thuộc cung nhỏ $\widehat{BC}$, $\widehat{AC}$ thì $P_{\max} = \frac{8}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow M$ lần lượt là điểm chính giữa cung nhỏ $\widehat{BC}$, $\widehat{AC}$.

Vậy $P_{\max} = \frac{8}{\sqrt{3}}$.

Câu 68. (Hàm Ròng) Cho số phức z, z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 4 - 5i| = |z_2 - 1| = 1$ và $|\bar{z} + 4i| = |z - 8 + 4i|$.
 Tính $|z_1 - z_2|$ khi $P = |z - z_1| + |z - z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $2\sqrt{5}$.

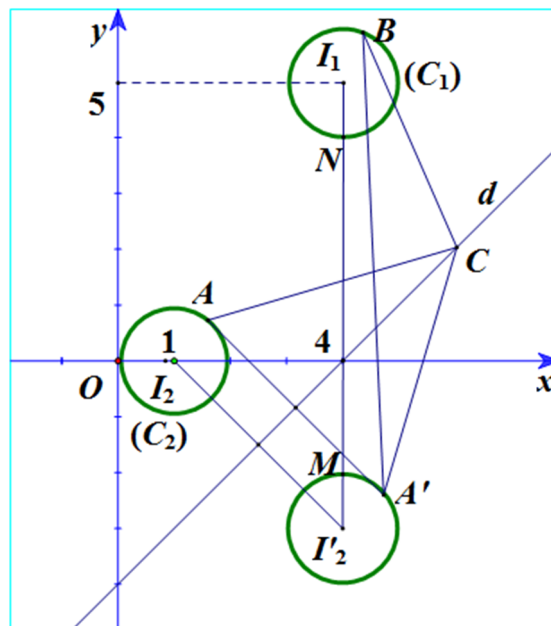
B. $\sqrt{41}$.

C. 8.

D. 6.

Lời giải

Chọn A



*) Gọi $z = a + bi, z_1 = a_1 + b_1i, z_2 = a_2 + b_2i$. Từ giả thiết, ta có:

+ $|z_1 - 4 - 5i| = 1 \Leftrightarrow (a_1 - 4)^2 + (b_1 - 5)^2 = 1 \Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z_1 là một đường tròn (C_1) tâm $I_1 = (4; 5)$, bán kính $R = 1$.

+ $|z_2 - 1| = 1 \Leftrightarrow (a_2 - 1)^2 + b_2^2 = 1 \Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z_2 là một đường tròn (C_2) tâm $I_2 = (1; 0)$, bán kính $R = 1$.

+ $|\bar{z} + 4i| = |z - 8 + 4i| \Leftrightarrow a^2 + (4 - b)^2 = (a - 8)^2 + (b + 4)^2 \Leftrightarrow a - b = 4 \Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường thẳng $(d): x - y = 4$.

*) Ta cần tìm z, z_1, z_2 để $P = |z - z_1| + |z - z_2|$ đạt GTLN tức là ta cần tìm $A \in (C_1), B \in (C_2)$ để $AM + BM$ nhỏ nhất với $M \in d$. Ta có:

+ Đường thẳng d' đi qua $I_2 = (1; 0)$ và vuông góc với $d \Rightarrow$ PT $d': x + y = 1$.

+ $d \cap d' = \{H\} \Rightarrow H\left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

+ Gọi $I_2, (C_2)$ lần lượt đối xứng với $I_1, (C_1)$ qua đường thẳng d . Ta có:

$I_2(4, -3)$ và $(C_2): (x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 1$.

$\Rightarrow I_1 I_2$ cắt (d) tại $M(4; 0) \Rightarrow z = 4$.

$\Rightarrow I_1 I_2$ cắt (C_1) tại hai điểm $A_1(4; 4); A_2(4, 6) \Rightarrow z_1 = 4 + 4i$ thỏa mãn bài toán.

MI_2 cắt (C_2) tại hai điểm $O(0; 0); B(2; 0) \Rightarrow z_2 = 2$ thỏa mãn bài toán.

Vậy: $|z_1 - z_2| = |2 + 4i| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$.

Câu 69. (THPT NINH BÌNH – BẠC LIÊU LẦN 4 NĂM 2019) Cho số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z|^2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z - 5 - 2i|$ bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$.

B. $\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$.

C. $\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$.

D. $\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$.

Lời giải

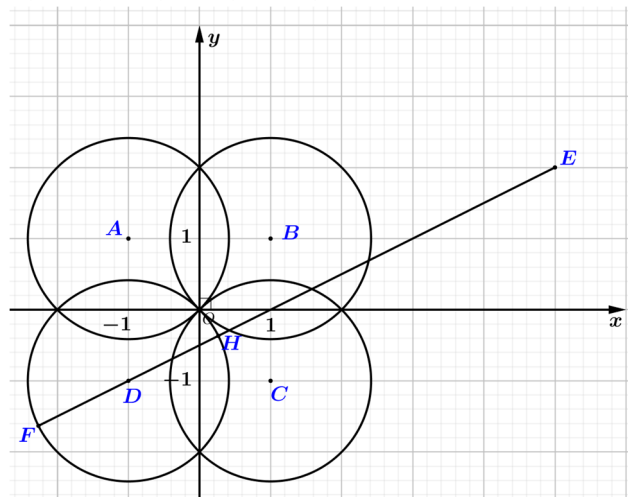
Chọn C

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$. Ta có:

$z + \bar{z} = 2x, z - \bar{z} = 2yi, z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$.

$|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z|^2 \Leftrightarrow 2|x| + 2|y| = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2|x| - 2|y| = 0$.

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức z là 4 cung tròn lớn thuộc 4 góc phần tư của 4 đường tròn tâm $A(-1; 1), B(1; 1), C(1; -1), D(-1; -1)$ bán kính $R = \sqrt{2}$.



Lại có $P = |z - 5 - 2i|$ nên z thuộc đường tròn tâm $E(5; 2)$ bán kính bằng P .

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện trên. Do đó P đạt giá trị lớn nhất khi đường tròn tâm $E(5; 2)$ bán kính bằng P cắt một trong bốn đường tròn tâm $A(-1; 1)$, $B(1; 1)$, $C(1; -1)$, $D(-1; -1)$ bán kính $R = \sqrt{2}$ ở trên tại điểm xa E nhất.

Kẻ đường thẳng ED cắt đường tròn tâm D tại F và H thì $P_{\max} = EF = ED + DF = 3\sqrt{5} + \sqrt{2}$.

Câu 70. (Chuyên KHTN lần 2) Cho số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z|^2$. Gọi m và M lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z + 4 - 2i|$. Khi đó $m + M$ bằng

A. $\sqrt{26} + \sqrt{2}$.

B. $\sqrt{26} + 3\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{10} + \sqrt{34}$.

D. $2\sqrt{26}$.

Lời giải

Chọn C

+ Gọi số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) có điểm biểu diễn là $M(x; y)$.

$$\Rightarrow \bar{z} = x - yi.$$

$$+ |z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z|^2$$

$$\Rightarrow |x + yi + x - yi| + |x + yi - x + yi| = |(x + yi)^2|$$

$$\Leftrightarrow |2x| + |2yi| = |x + yi|^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2} + \sqrt{4y^2} = x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow |2x| + |2y| = x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 & \text{khi } x \geq 0; y \geq 0 \quad (I_1) \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0 & \text{khi } x < 0; y > 0 \quad (I_2) \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0 & \text{khi } x < 0; y < 0 \quad (I_3) \\ x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 & \text{khi } x > 0; y < 0 \quad (I_4) \end{cases}$$

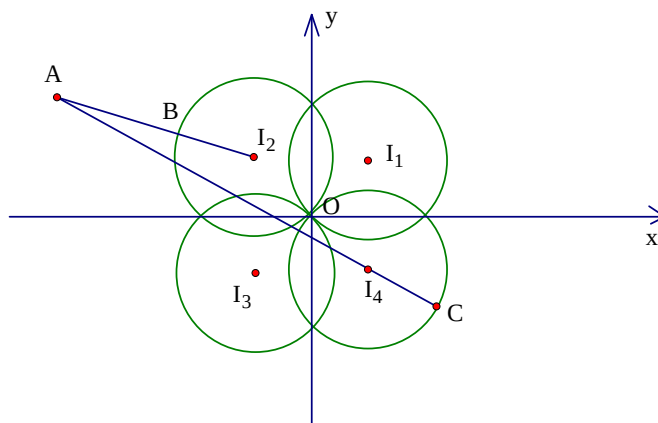
Phần đường tròn (I_1) có tâm $I_1(1; 1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$ (ứng với $x \geq 0; y \geq 0$).

Phần đường tròn (I_2) có tâm $I_2(-1; 1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$ (ứng với $x < 0; y > 0$).

Phần đường tròn (I_3) có tâm $I_3(-1; -1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$ (ứng với $x < 0; y < 0$).

Phần đường tròn (I_4) có tâm $I_4(1; -1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$ (ứng với $x > 0; y < 0$).

+ $P = |z + 4 - 2i| = MA$ với $A(-4; 2)$ và M chạy trên các phần của 4 đường tròn (ứng với các điều kiện x, y nêu trên) như hình vẽ dưới đây



Dựa vào hình vẽ trên ta thấy:

Giá trị lớn nhất của P là $m = AI_4 + R = \sqrt{34} + \sqrt{2}$.

Giá trị nhỏ nhất của P là $M = AI_2 - R = \sqrt{10} - \sqrt{2}$.

Vậy $m + M = \sqrt{34} + \sqrt{10}$, nên chọn đáp án **C**.

Câu 71. (THPT NÔNG CỐNG 2 LẦN 4 NĂM 2019) Cho số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z^2|$. Giả sử M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z - 3 - 2i|$. Tính $M + m$.

A. $\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$.

B. $5 + \sqrt{5}$.

C. $2\sqrt{3} + \sqrt{5}$.

D. $10 - \sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

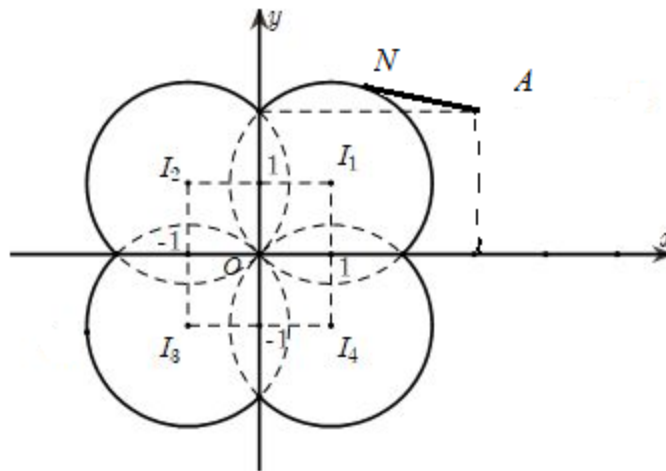
□ Đặt: $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó $\bar{z} = x - yi$.

□ Khi đó: $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z^2| \Leftrightarrow 2|x| + 2|y| = |z|^2 \Leftrightarrow 2|x| + 2|y| = x^2 + y^2$.

□ Nhận thấy đường cong có phương trình $2|x| + 2|y| = x^2 + y^2$ nhận các trục tọa độ làm trục đối xứng, và gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

□ Với $x \geq 0, y \geq 0$ ta có: $2|x| + 2|y| = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 2y = 0$. Đường cong là phần của đường tròn có tâm $I_1(1;1)$ với bán kính $R = \sqrt{2}$ nằm trong góc phần tư thứ nhất và gốc tọa độ.

□ Từ đó, đường cong có phương trình $2|x| + 2|y| = x^2 + y^2$ là phần (nét liền) của các đường tròn tâm lần lượt là $I_1(1;1)$, $I_2(-1;1)$, $I_3(-1;-1)$ và $I_4(1;-1)$ với bán kính bằng nhau là $R = \sqrt{2}$, cùng với gốc tọa độ như hình dưới đây:



Đặt $A = (3;2)$ và điểm biểu diễn cho số phức z là $N = (x;y)$ thì $P = |z - 3 - 2i| = NA$.

Do A nằm trong góc phần tư thứ nhất nên giá trị lớn nhất của P đạt được khi điểm N nằm trong góc phần tư thứ ba, giá trị đó bằng $M = AI_3 + R = \sqrt{4^2 + 3^2} + R = 5 + R$.

Giá trị nhỏ nhất của P đạt được khi điểm N nằm trong góc phần tư thứ nhất, giá trị đó bằng $m = AI_1 - R = \sqrt{2^2 + 1^2} - R = \sqrt{5} - R$.

□ Vậy $M + m = 5 + \sqrt{5}$.

Câu 72. (THPT ĐÔ LƯƠNG 3 LẦN 2) Cho số phức số z thỏa mãn $|z - 1 + 3i| + |\bar{z} + 5 + i| = 2\sqrt{65}$. Giá trị nhỏ nhất của $|z + 2 + i|$ đạt được khi $z = a + bi$ với a, b là các số thực dương. Giá trị của $2a^2 + b^2$ là

A. 17.

B. 33.

C. 24.

D. 36.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z = x + yi$; ($x, y \in \mathbb{R}$). Điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z .

Theo giả thiết $|z - 1 + 3i| + |z + 5 + i| = 2\sqrt{65}$

$$\Leftrightarrow |x + yi - 1 + 3i| + |x - yi + 5 + i| = 2\sqrt{65}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2} + \sqrt{(x+5)^2 + (y-1)^2} = 2\sqrt{65} \quad (1)$$

$\Rightarrow$ Tập hợp điểm M biểu diễn số phức z nằm trên đường elip (E) có tiêu điểm $F_1(1; -3)$ và $F_2(-5; 1)$.

Mà $|z + 2 + i| = \sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2} = MA$, với $A(-2; -1)$ là trung điểm của F_1F_2 .

Do đó $MA = |z + 2 + i|$ nhỏ nhất khi $M = \Delta \cap (E)$; với Δ đi qua A là $\Delta \perp F_1F_2$ và M có tọa độ dương. Ta có $\overrightarrow{F_1F_2} = (-6; 4) \Rightarrow \overrightarrow{n_\Delta} = (-3; 2)$.

Phương trình Δ là $-3x + 2y - 4 = 0 \Rightarrow y = \frac{4+3x}{2}$.

Thay vào (1) ta được $\sqrt{(x-1)^2 + \left(\frac{4+3x}{2} + 3\right)^2} + \sqrt{(x+5)^2 + \left(\frac{4+3x}{2} - 1\right)^2} = 2\sqrt{65}$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{13x^2 + 52x + 104} = 2\sqrt{65} \Leftrightarrow 13x^2 + 52x - 156 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -6 \end{cases}$$

+ Với $x = -6 \Rightarrow y = -7$ (loại)

+ Với $x = 2 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow M(2; 5) \Rightarrow a = 2; b = 5 \Rightarrow 2a^2 + b^2 = 33$.

Câu 73. (THẮNG LONG HN LẦN 2 NĂM 2019) Cho số thực a thay đổi và số phức z thỏa mãn

$$\frac{z}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{i-a}{1-a(a-2i)}$$

Trên mặt phẳng tọa độ, gọi M là điểm biểu diễn số phức z . Khoảng

cách nhỏ nhất giữa hai điểm M và $I(-3; 4)$ (khi a thay đổi) là

A. 6.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$\frac{z}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{i-a}{1-a(a-2i)} \Leftrightarrow \frac{z}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{a-i}{a^2-2ai+i^2} \Leftrightarrow \frac{z}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{a-i}{(a-i)^2}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{a^2+1}}{a-i} \Leftrightarrow z = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}i \Rightarrow M\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}; \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right)$$

$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$ bán kính $R=1$. Vì $I(-3; 4)$ nằm ngoài (C) nên để khoảng cách d giữa hai điểm M và $I(-3; 4)$ nhỏ nhất thì $d_{\min} = IO - R = 5 - 1 = 4$.

Câu 74. (THPT SỐ 1 TƯ NGHĨA LẦN 2 NĂM 2019) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 1 - 3i| = 1$

và $|z_2 + 1 - i| = |z_2 - 5 + i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_2 - 1 - i| + |z_2 - z_1|$ bằng

A. $2\sqrt{5} - 1$.

B. $\sqrt{10} + 1$.

C. $\sqrt{10} - 1$.

D. 3.

Lời giải

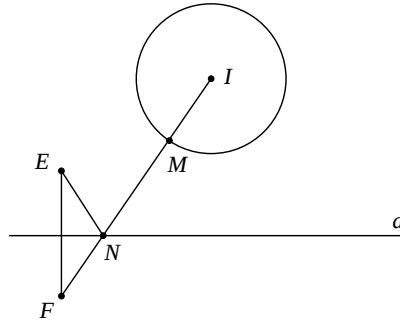
Chọn ?

Gọi $M(z_1)$, $N(z_2)$ lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1 và z_2 .

Từ điều kiện $|z_1 - 1 - 3i| = 1 \Rightarrow$ Tập hợp điểm M là đường tròn tâm $I(1; 3)$, bán kính $R = 1$.

Từ điều kiện $|z_2 + 1 - i| = |z_2 - 5 + i| \Rightarrow NA = NB$, với $A(-1;1), B(5;-1) \Rightarrow$ Tập hợp điểm N là đường trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình $(d): 3x - y - 6 = 0$.

Ta có $P = |z_2 - 1 - i| + |z_2 - z_1| = NE + MN$, với $E = (1;1)$.



Dễ thấy điểm E và đường tròn $(I; R)$ nằm hoàn toàn cùng phía so với đường thẳng d .

Gọi F là điểm đối xứng của E qua $d \Rightarrow F\left(\frac{17}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

Ta có $P = NE + MN \geq NF + NI - R \geq FI - R = \frac{2\sqrt{85}}{5} - 1$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi 4 điểm F, N, M, I thẳng hàng.

Vậy $\min P = \frac{2\sqrt{85}}{5} - 1$.

Câu 75. Biết số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $M = |z + 2|^2 - |z - i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính môđun của số phức $z + i$.

A. $|z + i| = 2\sqrt{41}$ **B.** $|z + i| = 3\sqrt{5}$ **C.** $|z + i| = 5\sqrt{2}$ **D.** $|z + i| = \sqrt{41}$.

Lời giải

Gọi $z = x + yi$; ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$). Ta có: $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (C): (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5$: tâm $I(3; 4)$ và $R = \sqrt{5}$.

Mặt khác:

$$M = |z + 2|^2 - |z - i|^2 = (x + 2)^2 + y^2 - [(x^2) + (y - 1)^2] = 4x + 2y + 3 \Leftrightarrow d: 4x + 2y + 3 - M = 0.$$

Do số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện nên d và (C) có điểm chung

$$\Leftrightarrow d(I; d) \leq R \Leftrightarrow \frac{|23 - M|}{2\sqrt{5}} \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow |23 - M| \leq 10 \Leftrightarrow 13 \leq M \leq 33$$

$$\Rightarrow M_{\max} = 33 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y - 30 = 0 \\ (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow z + i = 5 - 4i \Rightarrow |z + i| = \sqrt{41}.$$

Chọn D

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z - 2 - 4i|$ bằng 1.

Câu 76. (Đặng Thành Nam Đề 6) Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z thỏa mãn $|z - 1| = \sqrt{34}$ và $|z + 1 + mi| = |z + m + 2i|$. Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc (S) sao cho $|z_1 - z_2|$ nhỏ nhất, giá trị của $|z_1 + z_2|$ bằng

A. 2. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z = x + yi$ theo giả thiết có:
$$\begin{cases} |z-1| = \sqrt{34} \\ |z+1+mi| = |z+m+2i| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 34 \\ (x+1)^2 + (y+m)^2 = (x+m)^2 + (y+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 34 \\ (2m-2)x - (2m-4)y + 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Ta có (1) là đường tròn (C) có tâm $I(1;0)$, $R = \sqrt{34}$; (2) là đường thẳng Δ .

Vì vậy có tối đa 2 số phức z_1, z_2 thỏa mãn hệ phương trình đã cho, gọi $A(z_1), B(z_2)$ ta có

$$AB = 2\sqrt{R^2 - d^2(I, \Delta)} = 2\sqrt{34 - d^2(I, \Delta)} \Rightarrow AB_{\min} \Leftrightarrow d(I, \Delta)_{\max}.$$

$$\text{Ta có } d(I, \Delta) = \frac{|1(2m-2) + 3|}{\sqrt{(2m-2)^2 + (2m-4)^2}} \Rightarrow d(I, \Delta)_{\max} = \frac{\sqrt{34}}{2} \Leftrightarrow m = \frac{13}{8}.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 34, \\ \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow |z_1 + z_2| = 3\sqrt{2}.$$

Câu 77. (CHUYÊN HUỖNH MÃN ĐẠT 2019 lần 1) Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 2 + 2i| + |z_1 + 2 - 2i| = 10\sqrt{2}$, $|z_2 - 6 + 6i| = \sqrt{2}$.

Tìm giá trị lớn nhất của $|z_1 - z_2|$.

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $11\sqrt{2}$. **C.** $12\sqrt{2}$. **D.** $16\sqrt{2}$.

Lời giải

Gọi M , $A(2; -2)$ và $B(-2; 2)$ lần lượt là các điểm biểu diễn cho số phức z_1 , $z = 2 - 2i$ và $z' = -2 + 2i$.

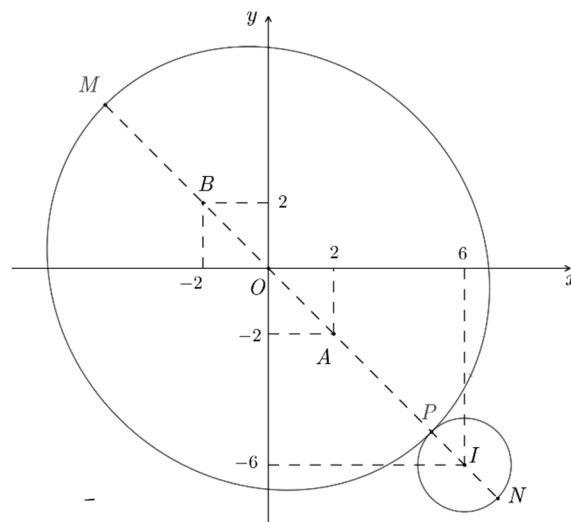
Khi đó theo đề bài ta có: $MA + MB = 10\sqrt{2}$ và $AB = 4\sqrt{2} < 10\sqrt{2}$. Vì A, B là các điểm cố định nên quỹ tích các điểm M thỏa mãn các điều kiện trên là elip(E) có độ dài trục lớn $2a = 10\sqrt{2}$, 2 tiêu điểm là A, B .

Mặt khác N là điểm biểu diễn cho số phức z_2 thỏa mãn $|z_2 - 6 - 6i| = \sqrt{2}$ là đường tròn (C) tâm $I(6; -6)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

Dễ thấy B, A, I nằm trên đường thẳng $y = -x$.

Xét điểm P nằm trong đoạn BI thỏa mãn $IP = \sqrt{2} \Rightarrow P(5; -5)$.

Khi đó $\begin{cases} P \in (C) \\ P \in (E) \end{cases} \Rightarrow (C) \text{ và } (E) \text{ tiếp xúc nhau tại } P.$



Do đó MN lớn nhất khi: $MN = 2a + 2R = MP + PN = 10\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$, lúc đó: M, P là các đỉnh trên trục lớn (E), N là điểm đối xứng của P qua I .

Câu 78. (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội) Cho các số phức z, z_1, z_2 thay đổi thỏa mãn các điều kiện sau: $|iz + 2i + 4| = 3$; phần thực của z_1 bằng 2; phần ảo của z_2 bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = |z - z_1|^2 + |z - z_2|^2$.

A. 9.

B. 2.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

$$|iz + 2i + 4| = 3 \Leftrightarrow \left| i \left(z + \frac{2i+4}{i} \right) \right| = 3 \Leftrightarrow |i| \cdot |z + 2 - 4i| = 3 \Leftrightarrow |z + 2 - 4i| = 3.$$

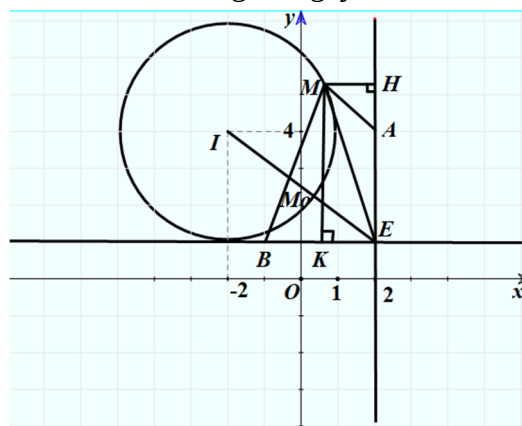
Gọi M là điểm biểu diễn số phức z và $I(-2; 4)$.

Ta có: $|z + 2 - 4i| = 3 \Leftrightarrow MI = 3 \Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn (C) tâm I , bán kính $R = 3$.

Gọi A, B là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 . Ta có: $T = |z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = MA^2 + MB^2$.

Vì phần thực của z_1 bằng 2 nên A thuộc đường thẳng $x = 2$.

Vì phần ảo của z_2 bằng 1 nên B thuộc đường thẳng $y = 1$.



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M trên đường thẳng $x = 2$ và $y = 1$.

Ta có: $T = MA^2 + MB^2 = MH^2 + HA^2 + MK^2 + KB^2 \geq MH^2 + MK^2$ (1)

Gọi $E(2; 1)$. Tứ giác $MHEK$ là hình chữ nhật $\Rightarrow MH^2 + MK^2 = ME^2$ (2)

Gọi M_0 là giao điểm của đường thẳng IE với đường tròn (C) (M_0 ở giữa I, E) (như hình vẽ).

Ta có: $ME \geq M_0E \quad \forall M \in (C)$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $T \geq M_0 E^2$.

Ta có: $M_0 E = IE - IM_0 = 5 - 3 = 2$. Suy ra $T \geq 4$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $H \equiv A$, $K \equiv B$ và $M \equiv M_0$ hay $M \equiv M_0$ và A, B lần lượt là hình chiếu của M trên đường thẳng $x = 2$ và $y = 1$.

Vậy T đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4.

Cách 2

$$|iz + 2i + 4| = 3 \Leftrightarrow \left| i \left(z + \frac{2i+4}{i} \right) \right| = 3 \Leftrightarrow |i| \cdot |z + 2 - 4i| = 3 \Leftrightarrow |z + 2 - 4i| = 3.$$

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$\text{Ta có: } (x+2)^2 + (y-4)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = -4x + 8y - 11 \quad (*)$$

Gọi $z_1 = 2 + ai$, $z_2 = b + i$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

$$T = |z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = (x-2)^2 + (y-a)^2 + (x-b)^2 + (y-1)^2 \geq (x-2)^2 + (y-1)^2 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } A = (x-2)^2 + (y-1)^2 = -8x + 6y - 6 \quad (\text{theo } (*))$$

$$= -8(x+2) + 6(y-4) + 34$$

$$\text{Ta có: } [-8(x+2) + 6(y-4)]^2 \leq (8^2 + 6^2) [(x+2)^2 + (y-4)^2]$$

$$\Leftrightarrow (A - 34)^2 \leq 100 \cdot 9 \quad (\text{theo } (*))$$

$$\Leftrightarrow 4 \leq A \leq 64$$

Suy ra $A \geq 4$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $T \geq 4$.

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} y = a \\ x = b \\ \frac{x+2}{-8} = \frac{y-4}{6} \\ A = -8x + 6y - 6 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = b = \frac{2}{5} \\ y = a = \frac{11}{5} \end{cases}$$

Vậy T đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4.

Câu 79. (Cổ Loa Hà Nội) Gọi z_1, z_2, z_3 là ba số phức thỏa mãn điều kiện $|z_1 + 1| + |z_1 - 3i| = \sqrt{10}$, $|z_2 - 3| + |z_2 - 3i| = 3\sqrt{2}$, $|z_3 + 1| + |z_3 - 3| = 4$. Đặt m là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_1|$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m \in (4; 5)$.

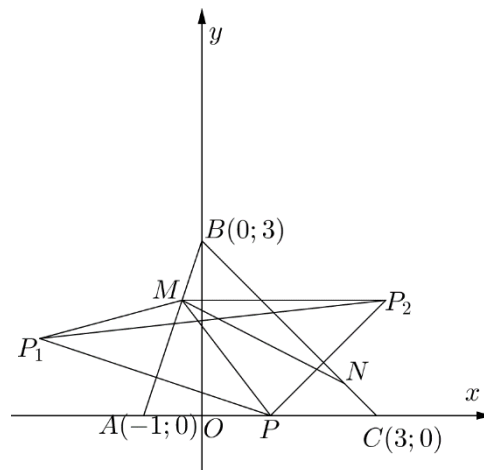
B. $m \in (5; 6)$.

C. $m \in (6; 7)$.

D. $m \in (7; 8)$.

Lời giải

Chọn B



Trong mặt phẳng Oxy , gọi $A(-1;0)$, $B(0;3)$, $C(3;0)$ và M , N , P lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1 , z_2 , z_3 .

Khi đó, $|z_1 + 1| + |z_1 - 3i| = \sqrt{10} \Leftrightarrow MA + MB = AB \Rightarrow$ Tập hợp điểm M biểu diễn số phức z_1 là đoạn AB .

Tương tự, $|z_2 - 3| + |z_2 - 3i| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow NC + NB = BC \Rightarrow$ Tập hợp điểm N biểu diễn số phức z_2 là đoạn BC .

$|z_3 + 1| + |z_3 - 3| = 4 \Leftrightarrow PA + PC = AC \Rightarrow$ Tập hợp điểm P biểu diễn số phức z_3 là đoạn AC .

Khi đó $|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_1| = MN + NP + PM$.

Gọi P_1 , P_2 lần lượt đối xứng với P qua AB , BC . Ta có $MP = MP_1$, $NP = NP_2$.

Khi đó $P = MN + NP + PM = P_1M + MN + NP_2 \geq P_1P_2$.

Mặt khác $\widehat{PBA} = \widehat{P_1AB}$, $\widehat{PBC} = \widehat{CBP_2}$

$\Rightarrow \widehat{P_1AB} + \widehat{ABC} + \widehat{CBP_2} = \widehat{PBA} + \widehat{ABC} + \widehat{PBC} = 2\widehat{ABC}$.

Gọi H là trung điểm của P_1P_2 , khi đó

$$P_1P_2 = 2P_2H = 2BP_2 \cdot \sin \widehat{P_2BH} = 2BP \cdot \sin \frac{\widehat{P_2BP_1}}{2} = 2BP \cdot \sin \widehat{BAC}.$$

Ta có $\sin \widehat{BAC} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ và $BP \geq BO = 3$. Khi đó $P_1P_2 = 2BP \sin \widehat{BAC} \geq \frac{9\sqrt{10}}{5}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_1|$ bằng $\frac{9\sqrt{10}}{5} \in (5;6)$.

Câu 80. (Chuyên Vinh Lần 3) Xét các số phức z , w thỏa mãn $|z| = 2$, $|iw - 2 + 5i| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z^2 - wz - 4|$ bằng

A. 4.

B. $2(\sqrt{29} - 3)$.

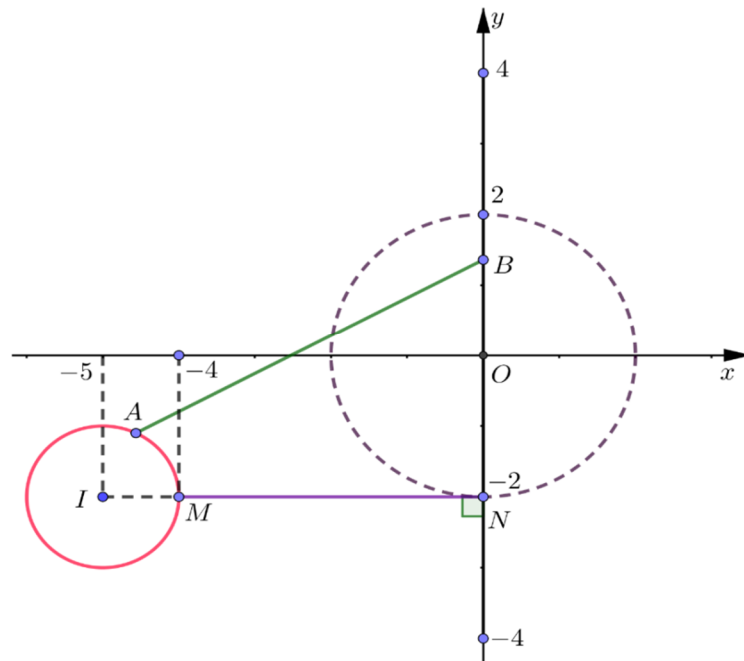
C. 8.

D. $2(\sqrt{29} - 5)$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:



Ta có: $|iw - 2 + 5i| = 1 \Leftrightarrow |i| \cdot \left| w + \frac{-2 + 5i}{i} \right| = 1 \Leftrightarrow |w + 5 + 2i| = 1$.

Ta có: $T = |z^2 - wz - 4| = |z^2 - wz - |z|^2| = |z^2 - wz - z \cdot \bar{z}| = |z| \cdot |z - \bar{z} - w| = 2|z - \bar{z} - w|$ (*)

Đặt $z = a + bi$. Suy ra: $z - \bar{z} = 2bi$. Vì $|z| = 2$ nên $-4 \leq 2b \leq 4$.

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn của w và $2bi$. Suy ra:

+ A thuộc đường tròn (C) có tâm $I(-5; -2)$, bán kính $R = 1$.

+ B thuộc trục Oy và $-4 \leq x_B \leq 4$.

Từ (*) suy ra: $T = 2AB \geq 2MN = 2 \cdot 4 = 8$ (xem hình)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $A \equiv M(-4; -2) \Rightarrow w = -4 - 2i$ và

$B \equiv N(0; -2) \Rightarrow 2bi = -2i \Rightarrow b = -1 \Rightarrow z = a - i \Rightarrow a^2 + 1 = 4 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3} \Rightarrow z = \pm\sqrt{3} - i$.

Vậy $|z^2 - wz - 4|$ có giá trị nhỏ nhất bằng 8.

Cách 2:

Đặt $z = a + bi$, $w = c + di$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$). Từ giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ (c+5)^2 + (d+2)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a, b \in [-2; 2] \\ c \in [-6; -4], d \in [-3; -1] \end{cases}$$

Ta có:

$$T = |z^2 - wz - 4| = |z^2 - wz - |z|^2| = |z^2 - wz - z \cdot \bar{z}| = |z| \cdot |z - \bar{z} - w| = 2|z - \bar{z} - w|$$

$$\Rightarrow T = 2|2bi - (c + di)| = 2\sqrt{(2b - d)^2 + c^2} \geq 2\sqrt{c^2} = 2|c| \geq 2 \cdot 4 = 8 \text{ (do } c \in [-6; -4]).$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} c = -4 \\ 2b - d = 0 \\ (c+5)^2 + (d+2)^2 = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra một nghiệm thỏa mãn là } \begin{cases} c = -4 \\ d = -2 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Vậy $|z^2 - wz - 4|$ có giá trị nhỏ nhất bằng 8.

Chú ý: Về một **Lời giải SAI**.

Sau khi có

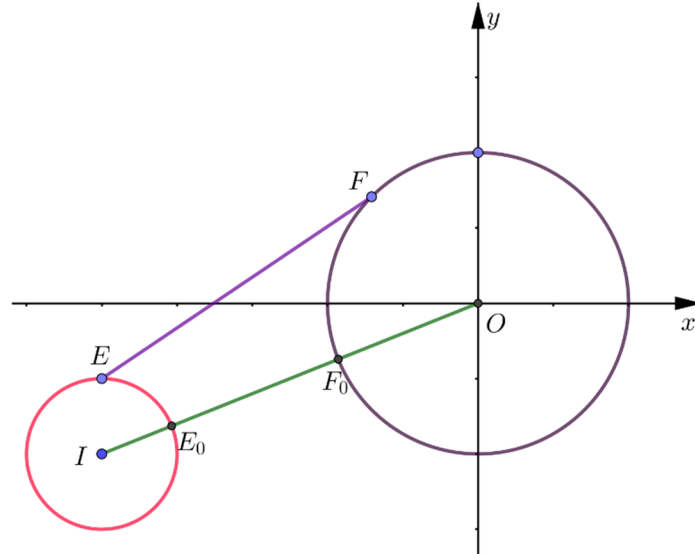
$$T = |z^2 - wz - 4| = 2|z - \bar{z} - w| \geq 2\|z - w\| - |\bar{z}| = 2|EF - 2| \geq 2|OI - 1 - 2 - 2| = 2(\sqrt{29} - 5).$$

Khi đó, đẳng thức không xảy ra, vì hệ $\begin{cases} z - w = k\bar{z}, k \geq 0 \\ |z - w| = \sqrt{29} - 3 \end{cases}$ vô nghiệm.

Hoặc:

$$T = |z^2 - wz - 4| = |z(z - w) - 4| \geq \|z(z - w)\| - 4 = |2|z - w| - 4| \geq |2(\sqrt{29} - 3) - 4| = 2(\sqrt{29} - 5),$$

cũng không có đẳng thức xảy ra. (Bạn đọc tự kiểm tra điều này).



Câu 81. (Kim Liên) Xét các số phức z thỏa mãn $|z + 3 - 2i| + |z - 3 + i| = 3\sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là hai giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 2| + |z - 1 - 3i|$. Tìm M, m .

A. $M = \sqrt{17} + \sqrt{5}, m = 3\sqrt{2}$.

B. $M = \sqrt{26} + 2\sqrt{5}, m = \sqrt{2}$.

C. $M = \sqrt{26} + 2\sqrt{5}, m = 3\sqrt{2}$.

D. $M = \sqrt{17} + \sqrt{5}, m = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) và điểm $M(x, y)$ là điểm biểu diễn của số phức z .

$$\text{Theo đề ra } |z + 3 - 2i| + |z - 3 + i| = 3\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow AM + BM = 3\sqrt{5} \text{ với } A(-3; 2), B(3; -1).$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (6; -3) \Rightarrow AB = 3\sqrt{5} \Rightarrow AM + BM = AB$$

$\Rightarrow A, M, B$ thẳng hàng và M nằm giữa A và B .

$$\text{Phương trình tham số của đường thẳng } AB: \begin{cases} x = -3 + 6t \\ y = 2 - 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Gọi $M(-3 + 6t; 2 - 3t)$, do M nằm giữa A và B nên $-3 \leq -3 + 6t \leq 3 \Rightarrow 0 \leq t \leq 1$.

$$\text{Biểu thức } P = |z + 2| + |z - 1 - 3i| = \sqrt{(x+2)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}$$

$$\Rightarrow P = \sqrt{(-3 + 6t + 2)^2 + (2 - 3t)^2} + \sqrt{(-3 + 6t - 1)^2 + (2 - 3t - 3)^2}$$

$$= \sqrt{45t^2 - 24t + 5} + \sqrt{45t^2 - 42t + 17}.$$

$$\text{Xét } P'(t) = \frac{90t-24}{2\sqrt{45t^2-24t+5}} + \frac{90t-42}{2\sqrt{45t^2-42t+17}} \text{ trên đoạn } [0;1].$$

$$P'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{90t-24}{2\sqrt{45t^2-24t+5}} + \frac{90t-42}{2\sqrt{45t^2-42t+17}} = 0.$$

$$\Leftrightarrow (90t-24)\sqrt{45t^2-42t+17} + (90t-42)\sqrt{45t^2-24t+5} = 0$$

$$\Leftrightarrow (15t-4)\sqrt{45t^2-42t+17} + (15t-7)\sqrt{45t^2-24t+5} = 0 \quad (*).$$

Nếu $0 < t \leq \frac{4}{15}$ hoặc $\frac{7}{12} \leq t < 1$ thì phương trình (*) vô nghiệm.

$$\text{Nếu } \frac{4}{15} < t < \frac{7}{12} \text{ thì } (*) \Leftrightarrow (15t-4)\sqrt{45t^2-42t+17} = (7-15t)\sqrt{45t^2-24t+5}$$

$$\Leftrightarrow (225t^2-120t+16)(45t^2-42t+17) = (225t^2-210t+49)(45t^2-24t+5)$$

$$\Leftrightarrow 1215t^2 - 486t + 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{15} \quad (l) \\ t = \frac{1}{3} \quad (tm) \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } P(0) = \sqrt{5} + \sqrt{17}; P\left(\frac{1}{3}\right) = 3\sqrt{2}; P(1) = 2\sqrt{5} + \sqrt{26}$$

$$\Rightarrow \underset{[0;1]}{\text{Max}} P(t) = P(1) = 2\sqrt{5} + \sqrt{26}; \underset{[0;1]}{\text{Min}} P(t) = P\left(\frac{1}{3}\right) = 3\sqrt{2}.$$

$$\text{Như vậy } M = 2\sqrt{5} + \sqrt{26}, m = 3\sqrt{2}.$$