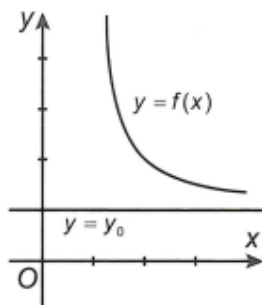


BÀI 4. TIỆM CẬN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là đường tiệm cận ngang (gọi tắt là tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số

$$y = f(x) \text{ nếu } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$$

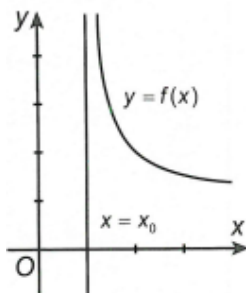


Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng (gọi tắt là tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số

$y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty.$$



B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định các đường tiệm cận dựa vào định nghĩa

1. Phương pháp giải

Tiệm cận ngang

Đường thẳng $y = y_0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ hoặc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$$

Tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$

2. Bài tập

Bài tập 1: Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng

A. 2 (đvdt)

B. 3 (đvdt)

C. 1 (đvdt)

D. 4 (đvdt)

Hướng dẫn giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 1$ và tiệm cận ngang là $y = 2$. Khi đó hình chữ nhật tạo bởi hai đường tiệm cận và hai trục tọa độ có các kích thước là 1 và 2 nên có diện tích $S = 1.2 = 2$ (đvdt)

Bài tập 2: Biết các đường tiệm cận của đường cong $(C): y = \frac{6x+1-\sqrt{x^2-2}}{x-5}$ và trục tung cắt nhau tạo thành một đa giác (H) . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (H) là một hình chữ nhật có diện tích bằng 8

B. (H) là một hình vuông có diện tích bằng 4

C. (H) là một hình vuông có diện tích bằng 25

D. (H) là một hình chữ nhật có diện tích bằng 10

Hướng dẫn giải

Chọn D

Tập xác định $(-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty) \setminus \{5\}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x+1-\sqrt{x^2-2}}{x-5} = 5 \Rightarrow y = 5$ là tiệm cận ngang của (C)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x+1-\sqrt{x^2-2}}{x-5} = 7 \Rightarrow y = 7$ là tiệm cận ngang của (C)

$\lim_{x \rightarrow 5^+} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow 5^-} y = -\infty \Rightarrow x = 5$ là tiệm cận đứng của (C)

Vậy đồ thị có ba đường tiệm cận là $y = 5; y = 7; x = 5$ cùng với trục tung tạo thành một hình chữ nhật có kích thước 2×5 nên có diện tích bằng 10.

Dạng 2: Tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

1. Phương pháp giải

Để tồn tại các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ thì $c \neq 0$ và $ad - bc \neq 0$

Khi đó phương trình các đường tiệm cận là

+ Tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$

+ Tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$

2. Bài tập

Bài tập 1: Giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{(2m-1)x+1}{x-m}$ có đường tiệm cận ngang $y = 3$ là

A. $m = 1$

B. $m = 0$

C. $m = 2$

D. $m = 3$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là

$$-m(2m-1)-1 \neq 0 \Leftrightarrow 2m^2 - m + 1 \neq 0 \Rightarrow \forall m \in \mathbb{R}$$

Phương trình đường tiệm cận ngang là $y = 2m - 1$ nên có $2m - 1 = 3 \Leftrightarrow m = 2$.

Bài tập 2: Tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{mx-1}$ có tiệm cận đứng là

A. $\mathbb{R}$

B. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

C. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

D. $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là $\begin{cases} m \neq 0 \\ -1+m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$

Bài tập 3. Tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{mx-1}$ không có tiệm cận đứng là

A. $\mathbb{R}$

B. $\left\{0; \frac{1}{3}\right\}$

C. $\left\{\frac{1}{3}\right\}$

D. $\{0\}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Điều kiện để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng là

$$\begin{cases} m = 0 \\ -1+3m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Bài tập 4: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+1}$. Biết đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $A(0; -1)$ và có đường tiệm cận ngang là $y = 1$. Giá trị $a + b$ bằng

A. 1

B. 0

C. 3

D. 2

Hướng dẫn giải

Chọn B

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là $a - b \neq 0$

Do đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0; -1)$ nên $b = -1$

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = a \Rightarrow a = 1$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $a + b = 0$

Bài tập 5: Biết rằng đồ thị của hàm số $y = \frac{(a-3)x + a + 2019}{x - (b+3)}$ nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung làm tiệm cận đứng. Khi đó giá trị của $a + b$ bằng

A. 3

B. -3

C. 6

D. 0

Hướng dẫn giải

Chọn D

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là $-(a-3)(b+3) - (a+2019) \neq 0$

Phương trình các đường tiệm cận là

$$\begin{cases} x = b+3 \\ y = a-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+3 = 0 \\ a-3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3 \\ a = 3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy $a + b = 0$

Bài tập 6: Giá trị thực của tham số m để đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{2x+m}$ đi qua điểm $A(1; 2)$ là

A. $m = 4$

B. $m = -2$

C. $m = -4$

D. $m = 2$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Điều kiện để đồ thị hàm số có đường tiệm cận là $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$

Đường tiệm cận đứng là $x = -\frac{m}{2} \Rightarrow -\frac{m}{2} = 1 \Leftrightarrow m = -2$ (thỏa mãn)

Bài tập 7: Cho hàm số $y = \frac{mx+1}{x-2m}$ với tham số $m \neq 0$. Giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số thuộc đường thẳng nào dưới đây?

A. $x + 2y = 0$

B. $2x + y = 0$

C. $x - 2y = 0$

D. $y = 2x$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Điều kiện để đồ thị hàm số có đường tiệm cận là $-2m^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow \forall m \in \mathbb{R}$.

Phương trình các đường tiệm cận là $x = 2m$; $y = m$ nên tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận là $I(2m; m)$ thuộc đường thẳng $x = 2y$

Bài tập 8: Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{4x-5}{x-m}$ có tiệm cận đứng nằm bên phải trục tung là

A. $m > 0$ và $m \neq \frac{5}{4}$

B. $m > 0$

C. $m > 0$ và $m \neq \frac{3}{4}$

D. $m < 0$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là $-4m + 5 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{5}{4}$

Phương trình đường tiệm cận đứng là $x = m$

Để tiệm cận đứng nằm bên phải trục tung thì $m > 0$

Vậy điều kiện cần tìm là
$$\begin{cases} m > 0 \\ m \neq \frac{5}{4} \end{cases}$$

Dạng 3: Tiệm cận của đồ thị hàm số phân thức hữu tỷ

1. Phương pháp giải

- Tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{A}{f(x)}$ với A là số thực khác 0 và $f(x)$ là đa thức bậc $n > 0$.

- Đồ thị hàm số $y = \frac{A}{f(x)}$ luôn có tiệm cận ngang $y = 0$.

- Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{A}{f(x)}$ khi và chỉ khi x_0 là nghiệm của $f(x)$ hay $f(x_0) = 0$

- Tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ với $f(x), g(x)$ là các đa thức bậc khác 0.

- Điều kiện để đồ thị hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ có tiệm cận ngang là bậc $f(x) \leq$ bậc $g(x)$.

- Điều kiện để đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ là x_0 là nghiệm của $g(x)$ nhưng không là nghiệm của $f(x)$ hoặc x_0 là nghiệm bội n của $g(x)$, đồng thời là nghiệm bội m của $f(x)$ và $m < n$

2. Bài tập

Bài tập 1: Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2 - 2x + 1}{2x + 1}$ có tiệm cận đứng là

A. $m = 8$

B. $m = 0$

C. $m \neq 4$

D. $m \neq -8$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. Đặt $g(x) = mx^2 - 2x + 1$

Để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng thì $x = -\frac{1}{2}$ không là nghiệm của $g(x)$

$$\Leftrightarrow g\left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{m}{4} + 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -8$$

Bài tập 2: Biết đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2-2mx+n+6}$ (m, n là tham số) nhận đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng, giá trị của $m+n$ bằng

A. 6

B. 10

C. -4

D. -7

Hướng dẫn giải

Chọn C

Điều kiện: $x^2 - 2mx + n + 6 \neq 0$. Đặt $g(x) = x^2 - 2mx + n + 6$

Do $x=1$ là nghiệm của $f(x) = x-1$ nên đồ thị hàm số đã cho nhận đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng thì $x=1$ phải là nghiệm kép của phương trình

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(1) = -2m + n + 7 = 0 \\ \Delta' = m^2 - n - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2m - 7 \\ m^2 - 2m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = -5 \end{cases}$$

Vậy $m+n = -4$.

Bài tập 3: Biết đồ thị hàm số $y = \frac{(2m-n)x^2 + mx + 1}{x^2 + mx + n - 6}$ nhận trục hoành và trục tung làm hai tiệm cận.

Giá trị $m+n$ bằng

A. 8

B. 9

C. 6

D. -6

Hướng dẫn giải

Chọn B

Điều kiện $x^2 + mx + n - 6 \neq 0$

Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 2m - n$

$$\Rightarrow 2m - n = 0 \quad (1)$$

Đặt $f(x) = (2m-n)x^2 + mx + 1$ và $g(x) = x^2 + mx + n - 6$

Nhận thấy $f(0) \neq 0$ với mọi m, n nên đồ thị nhận trục tung $x=0$ là tiệm cận đứng thì

$$g(0) = 0 \Leftrightarrow n - 6 = 0 \Leftrightarrow n = 6. \text{ Kết hợp với (1) suy ra } m = 3.$$

Vậy $m+n = 9$

Bài tập 4: Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + x - 1}{4x^2 + bx + 9}$ có đồ thị (C) (a, b là các số thực dương và $ab = 4$). Biết rằng

(C) có tiệm cận ngang $y = c$ và có đúng một tiệm cận đứng. Giá trị của tổng $T = 3a + b - 24c$ bằng

A. 8

B. 9

C. 6

D. 11

Hướng dẫn giải

Chọn D

Điều kiện $4x^2 + bx + 9 \neq 0$

Phương trình tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = \frac{a}{4} \Rightarrow \frac{a}{4} = c$

Đồ thị (C) có một tiệm cận đứng nên ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Phương trình $4x^2 + bx + 9 = 0$ có nghiệm kép $x = x_0$ và không là nghiệm của $ax^2 + bx + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow b^2 - 144 = 0 \Leftrightarrow b = \pm 12. \text{ Vì } b > 0 \text{ nên } b = 12 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \Rightarrow c = \frac{1}{12}$$

Thử lại ta có hàm số $y = \frac{\frac{1}{3}x^2 + x - 1}{4x^2 + 12x - 9}$ (thỏa mãn)

$$\text{Vậy } T = 3 \cdot \frac{1}{3} + 12 - 24 \cdot \frac{1}{12} = 11$$

Trường hợp 2: $4x^2 + bx + 9 = 0$ có hai nghiệm phân biệt và một trong hai nghiệm thỏa mãn $ax^2 + bx + 1 = 0$. Điều này không xảy ra vì $ab = 4$.

Chú ý: $a, b > 0$ nên mẫu số (nếu có) hai nghiệm đều âm, tử số hai nghiệm trái dấu.

Dạng 4 Tiệm cận của đồ thị hàm số vô tỷ

Cho hàm số vô tỷ $y = f(x)$

- Tìm tập xác định D của hàm số.

- Để tồn tại tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ thì trong tập xác định D của hàm số phải chứa ít nhất một trong hai kí hiệu $-\infty$ hoặc $+\infty$ và tồn tại ít nhất một trong hai giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ hữu hạn.

2. Bài tập

Bài tập 1: Biết đồ thị hàm số $y = 2x + \sqrt{ax^2 + bx + 4}$ có tiệm cận ngang $y = -1$

Giá trị $2a - b^3$ bằng

A. 56

B. -56

C. -72

D. 72

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Điều kiện $ax^2 + bx + 4 \geq 0$

Để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang thì $a > 0$

Khi đó, ta có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + \sqrt{ax^2 + bx + 4} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + \sqrt{ax^2 + bx + 4} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(a-4)x^2 + bx + 4}{\sqrt{ax^2 + bx + 4} - 2x} = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-4=0 \\ \frac{b}{-\sqrt{a-2}} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=4 \end{cases}. \text{ Vậy } 2a-b^3 = -56$$

Chú ý: Để $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -1$ thì bậc tử phải bằng bậc mẫu nên phải có $a-4=0$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{b}{-\sqrt{a-2}}$

Bài tập 2: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx + \sqrt{x^2 - 2x + 3}}{2x - 1}$ có một đường tiệm cận ngang là $y = 2$?

A. 0

B. Vô số

C. 1

D. 2

Hướng dẫn giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{m+1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{m-1}{2}$

Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là $y = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m+1}{2} = 2 \\ \frac{m-1}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = 5 \end{cases}$

Dạng 5: Biết đồ thị, bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, xác định tiệm cận của đồ thị hàm số

$y = \frac{A}{g(x)}$ với A là số thực khác 0, $g(x)$ xác định theo $f(x)$

1. Phương pháp giải

- Xác định tiệm cận đứng:

+ Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{A}{g(x)}$ là số nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

+ Dựa vào đồ thị, bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ để xác định số nghiệm của phương trình $g(x) = 0$ để suy ra số đường tiệm cận đứng.

- Xác định tiệm cận ngang: dựa vào nhánh vô tận của đồ thị, bảng biến thiên của hàm số để xác định.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	-	0	+
y	1	$\searrow$ -2	$\nearrow$ 3

Tổng số đường tiệm cận của hàm số $y = \frac{1}{f(x)+1}$ là

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị là số nghiệm của phương trình $f(x)+1=0 \Leftrightarrow f(x)=-1$.

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có hai nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)+1}$ có hai đường tiệm cận đứng.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)+1} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y = \frac{1}{4}$ và $y = \frac{1}{2}$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)+1}$ có bốn đường tiệm cận.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	3	0	$+\infty$	

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x^3+x)+3}$ là

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $t = x^3 + x$, ta có khi $x \rightarrow -\infty$ thì $t \rightarrow -\infty$ và khi $x \rightarrow +\infty$ thì $t \rightarrow +\infty$.

Mặt khác ta có $t' = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên với mọi $t \in \mathbb{R}$ phương trình $x^3 + x = t$ có duy nhất một nghiệm x .

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị là số nghiệm của phương trình

$$f(t) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(t) = -3.$$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có duy nhất một nghiệm nên đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x^3 + x) + 3}$

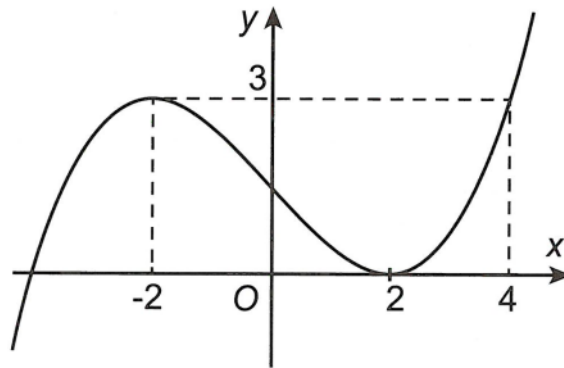
có một tiệm cận đứng.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x^3 + x) + 3} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(t) + 3} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x^3 + x) + 3} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(t) + 3} = 0$ nên đồ thị hàm số

$y = \frac{1}{f(x^3 + x) + 3}$ có một tiệm cận ngang là $y = 0$.

Vậy đồ thị có hai đường tiệm cận

Bài tập 3. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(4-x^2)-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $t = 4 - x^2$, ta có khi $x \rightarrow \pm\infty$ thì $t \rightarrow -\infty$.

Khi đó $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(t) - 3} = 0$ nên $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x)$.

$$\text{Mặt khác } f(4 - x^2) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(4 - x^2) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x^2 = -2 \\ 4 - x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{6} \\ x = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $g(x)$ có ba đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có bốn đường tiệm cận.

Dạng 6: Biết đồ thị, bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, xác định tiệm cận của đồ thị hàm số

$y = \frac{\varphi(x)}{g(x)}$ với $\varphi(x)$ là một biểu thức theo x , $g(x)$ là biểu thức theo $f(x)$

1. Phương pháp giải

- Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ tìm nghiệm của phương trình $g(x) = 0$ và xác định biểu thức $g(x)$.

- Rút gọn biểu thức $\frac{\varphi(x)}{g(x)}$ và tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang.

Chú ý:

- Điều kiện tồn tại của $\varphi(x)$.

- Sử dụng tính chất nếu đa thức $g(x)$ có nghiệm là $x = x_0$ thì $g(x) = (x - x_0) \cdot g_1(x)$, ở đó $g_1(x)$ là một đa thức.

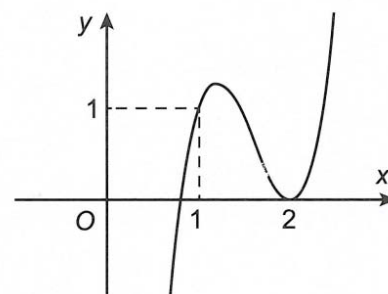
2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.

Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{x[f^2(x) - f(x)]}$ có bao nhiêu

đường tiệm cận đứng?

- A. 4. B. 6.
C. 3. D. 5.



Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 0 \\ f^2(x) - f(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ f(x) \neq 0 \\ f(x) \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{Xét phương trình } f^2(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 1 & (2) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta thấy

- Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x = x_1 < 1$ (loại) và $x = 2$ (nghiệm kép).

- Phương trình (2) có ba nghiệm phân biệt $x = 1$, $x = x_2 \in (1; 2)$, $x = x_3 > 2$.

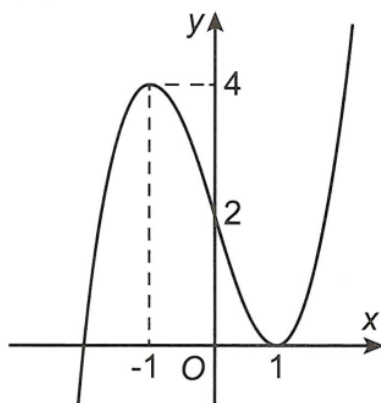
Khi đó

$$f^2(x) - f(x) = f(x)[f(x) - 1] = a^2(x - x_1)(x - 2)^2(x - 1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$\text{Suy ra } g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{a^2 x(x-x_1)(x-2)(x-x_2)(x-x_3)},$$

trong đó $x_1 < 1$, $x_2 \in (1; 2)$, $x_3 > 2$ nên đồ thị hàm số $y = g(x)$ có ba tiệm cận đứng là $x = 2$; $x = x_2$; $x = x_3$.

Bài tập 2. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đặt $g(x) = \frac{x^2 - x}{f^2(x) - 2f(x)}$. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 4.

B. 2.

C. 5.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Điều kiện xác định } f^2(x) - 2f(x) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \neq 0 \\ f(x) \neq 2 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } f^2(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}.$$

Dựa vào đồ thị ta có $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x = x_1 < 0$ và $x = 1$ (nghiệm kép).

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_2 \in (x_1; -1) \\ x = 0 \\ x = x_3 > 1 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy biểu thức } f^2(x) - 2f(x) = f(x)[f(x) - 2]$$

$$= a^2(x - x_1)(x - 1)^2 \cdot x(x - x_2)(x - x_3).$$

$$\text{Khi đó ta có } g(x) = \frac{x^2 - x}{f^2(x) - 2f(x)} = \frac{1}{a^2(x - 1)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}.$$

Vậy đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận đứng.

Bài tập 3. Cho $f(x)$ là hàm đa thức bậc 6 có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	$+\infty$				$+\infty$

Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x-3)(x^2-4x+3)}{f'(x)[f(x)-2]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện $\begin{cases} f'(x) \neq 0 \\ f(x) \neq 2 \end{cases}$.

Ta có $(x-3)(x^2-4x+3) = (x-3)^2(x-1)$; $f'(x) \cdot [f(x)-2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

$f'(x) = 0$ có nghiệm là $x = 1$; $x = 2$ (nghiệm kép); $x = 3$ (nghiệm kép)

$\Rightarrow f'(x) = a(x-1)(x-2)^2(x-3)^2$ với $a > 0$.

$f(x) = 2$ có hai nghiệm $\begin{cases} x = x_1 < 1 \\ x = x_2 \in (2; 3) \end{cases}$ nên $f(x) = (x-x_1)(x-x_2) \cdot p(x)$ với $p(x)$ là một đa thức

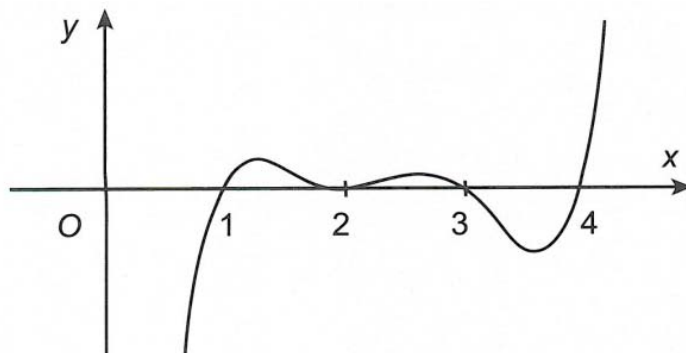
bậc 4 và $p(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Khi đó $g(x) = \frac{1}{a(x-2)^2(x-x_1)(x-x_2) \cdot p(x)}$.

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có ba đường tiệm cận đứng.

Chú ý: Do $f(x)$ là hàm đa thức bậc 6 nên $f'(x)$ là hàm đa thức bậc 5.

Bài tập 4. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 6 thỏa mãn $3f(1) - 2 < 0$ và $3f(a) - a^3 + 3a > 0, \forall a > 2$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x+1}{3f(x+2)-x^3+3x}$ là

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Hướng dẫn giải

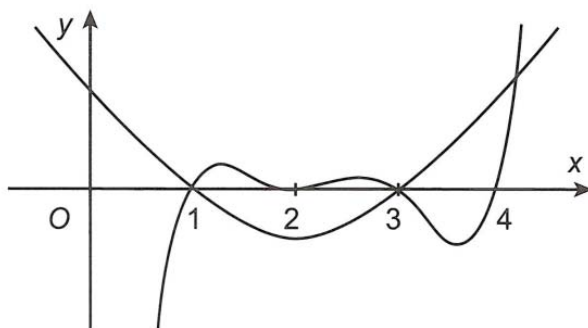
Chọn B.

Đặt $h(x) = 3f(x+2) - x^3 + 3x$. Điều kiện $h(x) \neq 0$.

Ta có $h'(x) = 3f'(x+2) - 3x^2 + 3$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x+2) = x^2 - 1$.

Đặt $t = x + 2$, ta được $f'(t) = t^2 - 4t + 3$. (*)

Vẽ đồ thị hàm số $y = t^2 - 4t + 3$ vào cùng hệ trục có đồ thị hàm số $y = f'(t)$ ta được hình vẽ sau



Dựa vào đồ thị ta thấy (*) có ba nghiệm là $t = 1$; $t = 3$; $t = a > 4$.

Suy ra phương trình $h'(x) = 0$ có nghiệm đơn $x = -1$; $x = 1$; $x = a - 2 = b > 2$.

Ta có bảng biến thiên của $h(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1			1	b		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$	$h(-1)$			$h(1)$	$h(b)$		$+\infty$

Vì $h(-1) = 3f(1) - 2 < 0$ và $h(b) = 3f(a) - (a-2)^3 + 3(a-2) = 3f(a) - a^3 + 3a + 6a^2 - 12a + 2 > 0$ với mọi $a > 4$ nên phương trình $h(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x = x_1 < -1$; $x = x_2 \in (-1; 1)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có hai tiệm cận đứng.

Dạng 7: Biện luận số đường tiệm cận của đồ thị hàm số phân thức $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, với $f(x)$ và $g(x)$ là các đa thức

1. Phương pháp giải

Điều kiện để đồ thị hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ có tiệm cận ngang khi và chỉ khi bậc $f(x) \leq$ bậc $g(x)$. Khi đó đồ

thị hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ có đúng một đường tiệm cận ngang.

Điều kiện để đồ thị hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ có tiệm cận đứng $x = x_0$

Trường hợp 1: $x = x_0$ là nghiệm của phương trình $g(x) = 0$ nhưng không là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Trường hợp 2: $x = x_0$ là nghiệm bội n của phương trình $g(x) = 0$, đồng thời là nghiệm bội m của phương trình $f(x) = 0$ thì $n > m$.

Ta có $f(x) = (x - x_0)^m \cdot f_1(x)$ với $f_1(x)$ không có nghiệm $x = x_0$ và $g(x) = (x - x_0)^n \cdot g_1(x)$ với $g_1(x)$ không có nghiệm $x = x_0$. Khi đó

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x - x_0)^m \cdot f_1(x)}{(x - x_0)^n \cdot g_1(x)} = \frac{f_1(x)}{(x - x_0)^{n-m} \cdot g_1(x)}$$

nên $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

2. Bài tập

Bài tập 1. Gọi S là tập các giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x^2+2x+m^2-3m}$ có ba tiệm cận. Tổng các giá trị của tập S bằng

A. 6.

B. 19.

C. 3.

D. 15.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện $x^2 + 2x + m^2 - 3m \neq 0$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số luôn có một tiệm cận ngang $y = 0$.

Số đường tiệm cận đứng của hàm số đã cho là số nghiệm khác -2 của phương trình $x^2 + 2x + m^2 - 3m = 0$ nên để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x^2 + 2x + m^2 - 3m}$ có ba tiệm cận thì phương trình $x^2 + 2x + m^2 - 3m = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác -2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m^2 + 3m > 0 \\ m^2 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{13}}{2} < m < \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \\ m \neq 0, m \neq 3 \end{cases}.$$

Do m nguyên dương nên $m \in \{1; 2\}$.

Vậy tổng các giá trị của tập S bằng 3.

Bài tập 2. Tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + m}{x^2 - 3x + 2}$ có đúng hai đường tiệm cận là

A. -5

B. 4

C. -1

D. 5

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện $x \neq 1; x \neq 2$.

Vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$ nên đồ thị luôn có một đường tiệm cận ngang $y = 1$ với mọi m .

$$\text{Ta có } x^2 - 3x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Xét $f(x) = x^2 + m$. Để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận thì $f(x)$ phải nhận $x = 1$ hoặc

$$x = 2 \text{ là nghiệm hay } \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 = 0 \\ m + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -4 \end{cases}.$$

• Với $m = -1$, ta có hàm số $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x+1}{x-2}$ nên đồ thị có hai đường tiệm cận là $x = 2; y = 1$ (thỏa mãn).

• Với $m = -4$, ta có hàm số $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x+2}{x-1}$ nên đồ thị có hai đường tiệm cận là $x = 1; y = 1$ (thỏa mãn).

Vậy $S = \{-1; -4\}$ nên tổng các giá trị m bằng -5.

Bài tập 3. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - mx - m + 5}$ không có đường tiệm cận đứng

A. -12.

B. 12.

C. 15.

D. -15.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện $x^2 - mx - m + 5 \neq 0$.

Đặt $f(x) = x^2 - 3x + 2, g(x) = x^2 - mx - m + 5$.

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$ là nghiệm đơn của tử thức.

Để đồ thị không có tiệm cận đứng, ta có các trường hợp sau

Trường hợp 1. Phương trình $g(x) = 0$ vô nghiệm $\Delta = m^2 + 4m - 20 < 0 \Leftrightarrow -2 - 2\sqrt{6} < m < -2 + 2\sqrt{6}$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-6; -5; \dots; 2\}$

Trường hợp 2. $f(x) = 0$ nhận đồng thời $x = 1$ và $x = 2$ làm nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m - m + 5 = 0 \\ 4 - 2m - m + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$.

Thử lại, ta có $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 3x + 2} = 1$, khi đó đồ thị hàm số $y = 1$ không có tiệm cận $\Rightarrow$ loại.

Vậy các giá trị nguyên của m để đồ thị không có tiệm cận đứng là $m \in \{-6; -5; \dots; 2; 3\}$ nên tổng bằng -15.

Bài tập 4. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{(mx^2-2x+1)(4x^2+4mx+1)}$ có

đúng một đường tiệm cận là

A. $\{-1; 0\}$

B. $\{0\}$

C. $(-\infty; -1) \cup \{0\}$

D. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Điều kiện $\begin{cases} mx^2 - 2x + 1 \neq 0 \\ 4x^2 + 4mx + 1 \neq 0 \end{cases}$.

- Với $m = 0$, hàm số có dạng $y = \frac{-1}{4x^2 + 1}$.

Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang $y = 0$.

Do đó $m = 0$ là một giá trị cần tìm.

- Với $m \neq 0$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y = 0$.

Để đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận thì

+ *Trường hợp 1.* Hai phương trình $f(x) = mx^2 - 2x + 1 = 0$ và $g(x) = 4x^2 + 4mx + 1 = 0$ cùng vô nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m < 0 \\ 4m^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -1 < m < 1 \end{cases} \Rightarrow$ vô nghiệm

+ Trường hợp 2. Phương trình $(mx^2 - 2x + 1)(4x^2 + 4mx + 1) = 0$ có nghiệm duy nhất là $x = \frac{1}{2}$. Khi đó

$x = \frac{1}{2}$ là nghiệm của một trong hai phương trình $f(x) = 0$ hoặc $g(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{4} = 0 \\ 1 + 2m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}.$$

Do $m \neq 0$ nên $m = -1$.

Thử lại, với $m = -1$ thì hàm số là

$$y = \frac{2x - 1}{(-x^2 - 2x + 1)(4x^2 - 4x + 1)} = \frac{1}{(-x^2 - 2x + 1)(2x - 1)}$$

Khi đó, đồ thị hàm số đã cho có các tiệm cận đứng là $x = -1 \pm \sqrt{2}$, $x = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -1$ không thỏa mãn.

Vậy tập hợp tham số m cần tìm là $m \in \{0\}$.

Dạng 8: Biện luận số đường tiệm cận của đồ thị hàm số chứa căn thức

1. Phương pháp giải

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2. Xác định các đường tiệm cận.

- Tiệm cận ngang

+ Điều kiện cần: Để đồ thị hàm số chứa căn thức có tiệm cận ngang thì trong tập xác định phải có các khoảng $(-\infty; a)$ hoặc $(b; +\infty)$.

+ Điều kiện đủ là: Tồn tại một trong các giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = a$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = b$ thì đường thẳng $y = a$ hoặc $y = b$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

* Tiệm cận đứng: Tồn tại giá trị x_0 để một trong các giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0^+} y = -\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^-} y = +\infty$ thì $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho

2. Bài tập mẫu

Bài tập 1. Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2 - 4}}{x - 3}$ có đúng ba tiệm cận là

A. $m \geq \frac{4}{9}$

B. $m > 0$

C. $0 < m < \frac{4}{9}$

D. $\forall m \in \mathbb{R}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} mx^2 - 4 \geq 0 \\ x \neq 3 \end{cases}.$$

Để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang thì $m > 0$.

Khi đó tập xác định của hàm số là $D = \left[-\infty; -\frac{2}{\sqrt{m}}\right) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{m}}; +\infty\right] \setminus \{3\}$. Nếu $m \leq 0$ thì $mx^2 - 4 < 0$

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{mx^2 - 4}}{x - 3} = \sqrt{m}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{mx^2 - 4}}{x - 3} = -\sqrt{m}$ nên đồ thị hàm số

có hai tiệm cận ngang là $y = \pm\sqrt{m}$

Để tồn tại tiệm cận đứng $x = 3$ thì $3 \geq \frac{2}{\sqrt{m}} \Leftrightarrow m \geq \frac{4}{9}$.

Kết hợp lại ta có $m \geq \frac{4}{9}$.

Bài tập 2. Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1-\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2}$ có đúng hai đường tiệm cận là

- A. $m \in \mathbb{R}$ B. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \\ m \neq -3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} m \leq -2 \\ m \neq -3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2 + 3x \geq 0 \\ x^2 + (m+1)x - m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3; x \geq 0 \\ x \neq 1; x \neq -m-2 \end{cases}.$$

$$\text{Tập xác định } D = (-\infty; -3] \cup [0; +\infty) \setminus \{1; -m-2\}$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0, \forall m \in D \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận thì phải có một đường tiệm cận đứng.

- Với $m = -3$ thì $D = (-\infty; -3] \cup [0; +\infty) \setminus \{1\}$.

$$\text{Khi đó, ta có hàm số } y = \frac{x+1-\sqrt{x^2+3x}}{x^2-2x+1} = \frac{-1}{(x-1)(x+1+\sqrt{x^2+3x})}.$$

Do đó $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$ nên $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $\Rightarrow m = -3$ thỏa mãn.

- Với $m \neq -3$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1-\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x+m+2)(x+1+\sqrt{x^2+3x})} = \frac{-1}{4(m+3)}$$

$\Rightarrow x=1$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\text{Để đường } x=-m-2 \text{ là tiệm cận đứng thì } \begin{cases} -m-2 \leq -3 \\ -m-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } \lim_{x \rightarrow (-m-2)^+} y = \pm\infty \text{ (tùy theo } m) \text{ nên } x=-m-2 \text{ là tiệm cận đứng khi } \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \\ m \neq -3 \end{cases}.$$

$$\text{Kết hợp cả hai trường hợp, ta có } \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{cases}.$$

Bài tập 3. Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x + \sqrt{mx^2 + 1}$ có tiệm cận ngang là

A. $m > 1$

B. $0 < m < 1$

C. $m = 1$

D. $m = -1$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Trường hợp 1. Với $m = 0$ thì hàm số là $y = x + 1$ nên đồ thị không có tiệm cận ngang. Do đó $m = 0$ không phải giá trị cần tìm.

Trường hợp 2. Với $m < 0$ thì hàm số có tập xác định là $D = \left[-\frac{1}{\sqrt{-m}}; \frac{1}{\sqrt{-m}}\right]$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$

và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y \Rightarrow$ đồ thị không có tiệm cận ngang.

Do đó $m < 0$ không phải giá trị cần tìm.

Trường hợp 3. Với $m > 0$ thì hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Xét } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{mx^2 + 1}) = +\infty.$$

$$\text{Xét } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{mx^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1-m)x^2 - 1}{x - \sqrt{mx^2 + 1}}.$$

$$\text{Để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang thì } 1-m=0 \Leftrightarrow m=1.$$

Bài tập 4. Tập tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{mx^2 - 3mx + 2}}$ có bốn

đường tiệm cận phân biệt là

A. $(0; +\infty)$

B. $\left(\frac{9}{8}; +\infty\right)$

C. $\left(\frac{8}{9}; +\infty\right)$

D. $\left(\frac{8}{9}; +\infty\right) \setminus \{1\}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Điều kiện } mx^2 - 3mx + 2 > 0. (*)$$

Trường hợp 1. Với $m = 0$, ta có $y = \frac{x-1}{\sqrt{2}}$ nên đồ thị không có đường tiệm cận.

Do đó $m = 0$ không phải giá trị cần tìm.

Trường hợp 2. Với $m < 0$.

Phương trình $mx^2 - 3mx + 2 = 0$ có $\Delta = 9m^2 - 8m > 0, \forall m < 0$ nên $mx^2 - 3mx + 2 > 0 \Leftrightarrow x \in [x_1; x_2]$ (với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $mx^2 - 3mx + 2 = 0$) nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang, chỉ có tối đa hai tiệm cận đứng

Nếu $\Delta \leq 0$ thì hàm số có tập xác định là $D = \emptyset$

Do đó $m < 0$ không phải giá trị cần tìm.

Trường hợp 3. Với $m > 0$.

Xét phương trình $mx^2 - 3mx + 2 = 0$.

- Nếu $\Delta = 9m^2 - 8m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{8}{9}$. Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $mx^2 - 3mx + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng mà chỉ có hai tiệm cận ngang là $y = \pm \frac{1}{\sqrt{m}}$ vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} = \frac{1}{\sqrt{m}}$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} = \frac{-1}{\sqrt{m}}$.

- Nếu $\Delta = 9m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{8}{9}$.

Khi đó, hàm số trở thành $y = \frac{3(x-2)}{\sqrt{8x^2 - 24x + 18}} = \frac{3(x-2)}{\sqrt{2}|2x-3|}$ nên đồ thị hàm số chỉ có một tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang.

- Nếu $\Delta = 9m^2 - 8m > 0 \Rightarrow m > \frac{8}{9}$.

Hàm số xác định trên các khoảng $(-\infty; x_1)$ và $(x_2; +\infty)$.

Khi đó đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y = \pm \frac{1}{\sqrt{m}}$.

Để đồ thị hàm số đã cho có bốn đường tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có hai đường tiệm cận đứng.

Vì $x = 1$ là nghiệm của tử $f(x) = x - 1$ nên để đồ thị có hai tiệm cận đứng thì $x = 1$ không phải là nghiệm của phương trình $mx^2 - 3mx + 2 = 0 \Leftrightarrow m - 3m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

Vậy giá trị của m cần tìm là $\begin{cases} m > \frac{8}{9} \\ m \neq 1 \end{cases}$.

Nếu $x = 1$ là nghiệm của phương trình $g(x) = 0$, do phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt nên phương trình $g(x) = 0$ có một nghiệm nữa $x = a \neq 1$ thì $g(x) = m(x-1).(x-a)$. Khi đó hàm số có dạng $y = \frac{x-1}{\sqrt{m(x-1).(x-a)}}$ nên chỉ có một tiệm cận

đúng là $x = a$.

Bài tập 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1 + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2 - (1-m)x + 2m}}$ có hai tiệm cận đứng?

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - (1-m)x + 2m > 0 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } f(x) = x^2 - (1-m)x + 2m$$

Để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng thì phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \geq -1$.

Trường hợp 1. $f(x)$ có nghiệm $x = -1 \Leftrightarrow f(-1) = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

Khi đó hàm số có dạng $y = \frac{1 + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}$ có tập xác định là $D = (4; +\infty)$ nên chỉ có một tiệm cận đứng.

$$\text{Trường hợp 2. } f(x) \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2 > -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0 \\ x_1 + x_2 > -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-m)^2 - 8m > 0 \\ 2m + 1 - m + 1 > 0 \\ 1 - m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 - 2\sqrt{6} \\ m > 5 + 2\sqrt{6} \\ m > -2 \\ m < 3 \end{cases} \Rightarrow -2 < m < 5 - 2\sqrt{6}$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = -1; m = 0$

Dạng 9: Biện luận số đường tiệm cận của đồ thị hàm ẩn

Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	1 3		$-\infty$ 2	-1

Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2020}{f(x) - m}$ có nhiều nhất bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện $f(x) \neq m$.

Để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2020}{f(x) - m}$ có đường tiệm cận đứng thì phương trình $f(x) = m$ phải có nghiệm.

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ suy ra phương trình $f'(x) = 0$ có đúng hai nghiệm là $\begin{cases} x = a \\ x = b \end{cases}$

với $-1 < a < 1 < b$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	a	1	b	$+\infty$
$f'(x)$	-		0	+	0	-
$f(x)$						

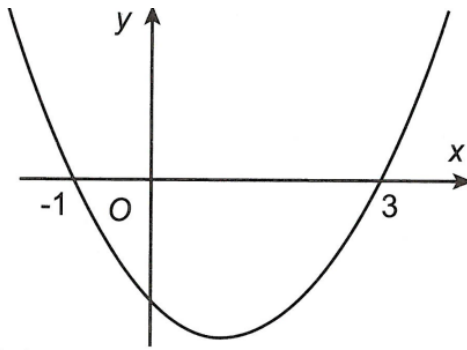
Suy ra phương trình $y = f(x)$ có nhiều nhất là ba nghiệm phân biệt.

Vậy đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2020}{f(x) - m}$ có nhiều nhất ba đường tiệm cận đứng.

Bài tập 2. Cho hàm số $g(x) = \frac{2020}{h(x) - m^2 - m}$ với $h(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx$. ($m, n, p, q \in \mathbb{R}, m \neq 0$),

$h(0) = 0$. Hàm số $y = h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

$$f(-1) < 20.$$



Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{f(x) - 20}{f(x) - m}$ (m là tham số thực) có bốn tiệm cận khi và chỉ khi

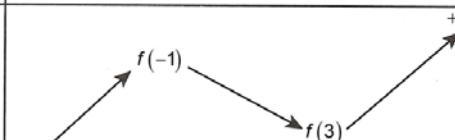
- A. $m < f(3)$ B. $f(3) < m < f(-1)$ C. $m > f(-1)$ D. $f(3) \leq m \leq f(-1)$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Điều kiện $f(x) \neq m$.

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$, ta có bảng biến thiên hàm số $f(x)$ là

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

- Nếu $m = 20$ thì đồ thị hàm số không có đủ bốn tiệm cận.

- Nếu $m \neq 20$ thì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x) - 20}{f(x) - m} = 1 \Rightarrow$ Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có phương trình $f(x) = 20$ có một nghiệm $x = a > 3$ vì $f(-1) < 20$.

Suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có bốn tiệm cận khi phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm phân biệt khác $a \Leftrightarrow f(3) < m < f(-1)$.

Bài tập 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Có bao nhiêu giá trị

nguyên của tham số m thuộc $[-2020; 2020]$ để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3x + x}}{\sqrt{2f(x) - f^2(x)} + m}$ có tiệm cận

ngang nằm bên dưới đường thẳng $y = -1$.

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \leq -3; x \geq 0 \\ 0 \leq f(x) \leq 2 \\ \sqrt{2f(x) - f^2(x)} + m \neq 0 \end{cases}$$

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên khi $x \rightarrow +\infty$ thì $2f(x) - f^2(x) \rightarrow -\infty$ vì vậy $\sqrt{2f(x) - f^2(x)}$ không có nghĩa khi x đủ lớn. Do đó không tồn tại $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

Xét $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ nên $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2f(x) - f^2(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} [2f(x) - f^2(x)]} = 1$;

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{-\left(\sqrt{1 - \frac{3}{x}} + 1 \right)} = -\frac{3}{2}$$

Từ đó $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{-3}{2m+2}$ với $m \neq -1$.

Khi đó đồ thị hàm số $g(x)$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{-3}{2m+2}$.

Để tiệm cận ngang tìm được ở trên nằm dưới đường thẳng $y = -1$ thì

$$\frac{-3}{2m+2} < -1 \Leftrightarrow -1 < m < \frac{1}{2}$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 0$.

Dạng 10: Bài toán liên quan đến đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

1. Phương pháp giải

Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đường tiệm cận khi và chỉ khi $ad - bc \neq 0, c \neq 0$.

Khi đó, phương trình đường tiệm cận đứng là $x = -\frac{d}{c}$.

Phương trình đường tiệm cận ngang là $y = \frac{a}{c}$.

- Tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận là điểm $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ và cũng là tâm đối xứng của đồ thị.

- Hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có các kích thước là $\left|-\frac{d}{c}\right|$ và $\left|\frac{a}{c}\right|$ nên có chu vi là

$$C = 2 \left(\left| \frac{d}{c} \right| + \left| \frac{a}{c} \right| \right) \text{ và diện tích là } S = \left| \frac{ad}{c^2} \right|$$

2. Bài tập mẫu

Bài tập 1. Giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx-1}{2x+m}$ có đường tiệm cận đứng đi qua điểm

$A(-1; \sqrt{2})$ là

A. $m = -2$.

B. $m = 2$.

C. $m = \sqrt{2}$.

D. $m = -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $ad - bc = m^2 + 2 \neq 0, \forall m$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\frac{m}{2}$.

Để tiệm cận đứng đi qua điểm $A(-1; \sqrt{2})$ thì $-\frac{m}{2} = -1 \Leftrightarrow m = 2$.

Bài tập 2. Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x-1}$ tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng

A. 3 (đvdt)

B. 6 (đvdt)

C. 1 (đvdt)

D. 2 (đvdt)

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình các đường tiệm cận là $x = 1; y = 2$.

Do đó hai đường tiệm cận và hai trục tọa độ tạo thành hình chữ nhật diện tích bằng $1.2 = 2$ (đvdt).

Bài tập 3. Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2mx+m}{x-1}$ có đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cùng hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8 là

A. $m \neq \pm 2$.

B. $m = 2$.

C. $m = \pm \frac{1}{2}$.

D. $m = \pm 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là $-2m - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó phương trình hai đường tiệm cận là $x = 1$ và $y = 2m$.

Theo công thức tính diện tích hình chữ nhật tạo bởi hai tiệm cận và hai trục tọa độ, ta có $S = |2m|$.

Theo giả thiết thì $|2m| = 8 \Leftrightarrow m = \pm 4$.

Bài tập 4. Cho đồ thị hai hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ và $g(x) = \frac{ax+1}{x+2}$ với $a \neq \frac{1}{2}$. Tất cả các giá trị thực dương của tham số a để các tiệm cận của hai đồ thị hàm số tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 4 là

- A. $a = 6$. B. $a = 4$. C. $a = 3$. D. $a = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ có hai đường tiệm cận là $x = -1$ và $y = 2$.

Điều kiện để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{ax+1}{x+2}$ có tiệm cận là $2a - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{1}{2}$.

Với điều kiện đó thì đồ thị hàm số $g(x)$ có hai đường tiệm cận là $x = -2$ và $y = a$.

Hình chữ nhật được tạo thành từ bốn đường tiệm cận của hai đồ thị trên có hai kích thước là 1 và $|a - 2|$.

Theo giả thiết, ta có $|a - 2| \cdot 1 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ a = -2 \end{cases}$.

Vì $a > 0$ nên $a = 6$.

Bài tập 5. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Hai đường tiệm cận của (C) cắt nhau tại I . Đường thẳng $d: y = 2x + b$ (b là tham số thực) cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B . Biết $b < 0$ và diện tích tam giác AIB bằng $\frac{15}{4}$. Giá trị của b bằng

- A. -1. B. -3. C. -2. D. -4

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có tọa độ điểm $I(1;1)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$\frac{x+1}{x-1} = 2x+b \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ f(x) = 2x^2 + (b-3)x - b - 1 = 0 (*) \end{cases}$$

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\text{khác 1} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = b^2 + 2b + 17 > 0 \\ f(1) = -2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall b \in \mathbb{R}.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $(*)$.

Khi đó $A(x_1; 2x_1 + b)$, $B(x_2; 2x_2 + b)$.

Ta có $\overrightarrow{IA} = (x_1 - 1; 2x_1 + b - 1)$; $\overrightarrow{IB} = (x_2 - 1; 2x_2 + b - 1)$.

$$\begin{aligned} \text{Diện tích tam giác } IAB \text{ là } S &= \frac{1}{2} |(x_1 - 1)(2x_2 + b - 1) - (x_2 - 1)(2x_1 + b - 1)| \\ &= \frac{1}{2} |(b+1)(x_1 - x_2)| = \frac{1}{2} |b+1| \cdot \frac{\sqrt{b^2 + 2b + 17}}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Theo giả thiết thì } \frac{|b+1|\sqrt{b^2 + 2b + 17}}{4} = \frac{15}{4}$$

$$\Leftrightarrow (b+1)^2 [(b+1)^2 + 16] = 225 \Leftrightarrow (b+1)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ b = -4 \end{cases}.$$

Do $b < 0$ nên $b = -4$.

Chú ý:

- Với tam giác ABC có

$$\overrightarrow{AB} = (a; b); \overrightarrow{AC} = (c; d)$$

$$\text{thì } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |ad - bc|.$$

- Nếu phương trình bậc

hai $ax^2 + bx + c = 0$ có

hai nghiệm phân biệt

$$x_1, x_2 \text{ thì } |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

Bài tập 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) lần lượt có phương trình

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1 \text{ và } (x+1)^2 + y^2 = 1. \text{ Biết đồ thị hàm số } y = \frac{ax+b}{x+c} \text{ đi qua tâm của } (C_1), \text{ đi qua}$$

tâm của (C_2) và có các đường tiệm cận tiếp xúc với cả (C_1) và (C_2) . Tổng $a+b+c$ là

A. 5.

B. 8.

C. 2.

D. -1.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1;2)$; $R_1 = 1$ và (C_2) có tâm $I_2(-1;0)$; $R_2 = 1$.

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là $ac - b \neq 0$.

$$\text{Gọi } (C) \text{ là đồ thị hàm số } y = \frac{ax+b}{x+c}.$$

Khi đó ta có các đường tiệm cận (C) là $x = -c$ và $y = a$.

$$\text{Ta có } I_1, I_2 \in (C) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{c+1} = 2 \\ \frac{-a+b}{c-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c \neq \pm 1 \\ a = b \\ a = c+1 \end{cases}.$$

$$\text{Đường thẳng } x = -c \text{ tiếp xúc với cả } (C_1) \text{ và } (C_2) \text{ nên } \begin{cases} |c+1| = 1 \\ |c-1| = 1 \end{cases} \Rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow a = b = 1$$

Khi đó tiệm cận ngang của (C) là $y = 1$ tiếp xúc với cả (C_1) , (C_2) thỏa mãn bài toán.

$$\text{Vậy } a = b = 1; c = 0 \Rightarrow a + b + c = 2.$$

Dạng 11: Bài toán về khoảng cách từ điểm trên đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đến các đường tiệm cận

1. Phương pháp giải

Giả sử đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có các đường tiệm cận là $\Delta_1 : x = -\frac{d}{c}$ và $\Delta_2 : y = \frac{a}{c}$.

Gọi $M\left(x_0; \frac{ax_0+b}{cx_0+d}\right)$ là điểm bất kì trên đồ thị.

Khi đó $d_1 = d(M; \Delta_1) = \left|x_0 + \frac{d}{c}\right| = \left|\frac{cx_0+d}{c}\right|$ và

$$d_2 = d(M; \Delta_2) = \left|\frac{ax_0+b}{cx_0+d} - \frac{a}{c}\right| = \left|\frac{ad-bc}{c(cx_0+d)}\right|.$$

Vậy ta luôn có $d_1.d_2 = \left|\frac{ad-bc}{c^2}\right| = K$ là một số không đổi.

Khi đó $d_1 + d_2 \geq 2\sqrt{d_1.d_2} = 2\sqrt{K}$ nên $\min(d_1 + d_2) = 2\sqrt{K}$ khi $d_1 = d_2$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{cx_0+d}{c}\right| = \left|\frac{ad-bc}{c(cx_0+d)}\right| \Leftrightarrow (cx_0+d)^2 = |ad-bc|.$$

2. Bài tập

Bài tập 1. Gọi M là giao điểm của đồ thị $y = \frac{2x-1}{2x+3}$ với trục hoành. Khi đó tích các khoảng cách từ điểm M đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho bằng

- A. 4. B. 2. C. 8. D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Áp dụng công thức, ta có $d_1.d_2 = \left|\frac{6+2}{4}\right| = 2$.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$ (C). Gọi M là điểm bất kỳ trên (C), d là tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của đồ thị. Giá trị nhỏ nhất của d bằng

- A. 10. B. 6. C. 2. D. 5.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Áp dụng công thức, ta có $d_1.d_2 = \left| \frac{-4+3}{1} \right| = 1$.

Khi đó $d = d_1 + d_2 \geq 2\sqrt{d_1.d_2} = 2$.

Vậy $d_{\min} = 2$.

Bài tập 3. Cho hàm số $y = \frac{1-3x}{3-x}$ có đồ thị (C) . Điểm M có hoành độ dương, nằm trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng gấp hai lần khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang của (C) . Khoảng cách từ M đến tâm đối xứng của (C) bằng

- A. 5. B. $3\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{5}$. D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Giả sử $M\left(x_0; \frac{3x_0-1}{x_0-3}\right) \in (C) \ (x_0 > 0; x_0 \neq 3)$.

Đồ thị (C) có tiệm cận đứng $\Delta_1 : x = 3$, tiệm cận ngang $\Delta_2 : y = 3$ và tâm đối xứng $I(3;3)$.

Khi đó $d_1 = d(M; \Delta_1) = |x_0 - 3|$ và $d_2 = d(M; \Delta_2) = \frac{8}{|x_0 - 3|}$.

Theo giả thiết $d_1 = 2d_2 \Leftrightarrow |x_0 - 3| = \frac{16}{|x_0 - 3|} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 7 \\ x_0 = -1 \end{cases} \Rightarrow x_0 = 7 \text{ (do } x_0 > 0 \text{)}.$

Vậy $M(7;5) \Rightarrow IM = 2\sqrt{5}$.

Bài tập 4. Cho hàm số $y = \frac{4x-5}{x+1}$ có đồ thị (H) . Gọi $M(x_0; y_0)$ với $x_0 < 0$ là một điểm thuộc đồ thị

(H) thỏa mãn tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của (H) bằng 6. Giá trị của biểu thức

$S = (x_0 + y_0)^2$ bằng

- A. 4. B. 0. C. 9. D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đồ thị (H) có tiệm cận đứng $\Delta_1 : x = -1$ và tiệm cận ngang $\Delta_2 : y = 4$.

Gọi $M\left(x_0; \frac{4x_0-5}{x_0+1}\right) \in (H), x_0 \neq -1, x_0 < 0$.

Khi đó $d_1 = d(M; \Delta_1) = |x_0 + 1|$ và $d_2 = d(M; \Delta_2) = \frac{9}{|x_0 + 1|} \Rightarrow d_1.d_2 = 9$.

Ta có $d_1 + d_2 \geq 2\sqrt{d_1 d_2} = 6$ nên $\min(d_1 + d_2) = 6$ khi

$$d_1 = d_2 \Leftrightarrow |x_0 + 1| = \frac{9}{|x_0 + 1|} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = -4 \end{cases}.$$

Do $x_0 < 0$ nên $M(-4; 7) \Rightarrow S = 9$.

Dạng 12: Bài toán liên quan giữa tiếp tuyến và tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

1. Phương pháp giải

Giả sử đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị (C) có

các đường tiệm cận là $\Delta_1 : x = -\frac{d}{c}$, $\Delta_2 : y = \frac{a}{c}$ và

$$I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right).$$

Gọi $M\left(x_0; \frac{ax_0+b}{cx_0+d}\right)$ là điểm bất kỳ trên đồ thị.

Khi đó tiếp tuyến của (C) tại M là

$$d : y = \frac{ad-bc}{(cx_0+d)^2}(x-x_0) + \frac{ax_0+b}{cx_0+d}.$$

Gọi $A = d \cap \Delta_1$

$$\Rightarrow A\left(-\frac{d}{c}; \frac{2bc-ad+acx_0}{c(cx_0+d)}\right) \Rightarrow IA = \left|\frac{2(ad-bc)}{c(cx_0+d)}\right|.$$

$B = d \cap \Delta_2$

$$\Rightarrow B\left(2x_0 + \frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right) \Rightarrow IB = \left|\frac{2(cx_0+d)}{c}\right|.$$

Do đó $IA \cdot IB = \frac{4|ad-bc|}{c^2} = K$ là một số không đổi.

Do ΔIAB vuông tại I nên

$S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB = \frac{2|ad-bc|}{c^2} = \frac{1}{2} K$ là một số không đổi.

Ngoài ra, ta có $\begin{cases} x_A + x_B = 2x_M \\ y_A + y_B = 2y_M \end{cases}$ nên M luôn là

trung điểm của AB .

Ta có các dạng câu hỏi thường gặp sau

Câu 1: Tính diện tích tam giác IAB .

$$S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB = \frac{2|ad-bc|}{c^2} = \frac{1}{2} K.$$

Câu 2: Tìm điểm $M \in (C)$ hoặc viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông có

a) Cạnh huyền nhỏ nhất.

$$AB = \sqrt{IA^2 + IB^2} \geq \sqrt{2IA \cdot IB} = \sqrt{2K}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $IA = IB$.

b) Chu vi nhỏ nhất

Ta có

$$IA + IB + AB \geq 2\sqrt{IA \cdot IB} + \sqrt{2IA \cdot IB} = 2\sqrt{K} + \sqrt{2K}$$

Dấu bằng xảy ra khi $IA = IB$.

c) Bán kính đường tròn ngoại tiếp nhỏ nhất.

$$\text{Ta có } R = \frac{1}{2} AB \geq \sqrt{\frac{K}{2}}$$

Dấu bằng xảy ra khi $IA = IB$.

d) Bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất.

$$\text{Ta có } r = \frac{S}{p} = \frac{K}{IA + IB + AB}$$

Vậy r lớn nhất khi $IA + IB + AB$ nhỏ nhất và bằng $2\sqrt{K} + \sqrt{2K}$.

Dấu bằng xảy ra khi $IA = IB$.

e) Khoảng cách từ I đến tiếp tuyến lớn nhất.

Gọi H là hình chiếu của I lên d , ta có

$$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IB^2} \geq \frac{2}{IA \cdot IB} = \frac{2}{K} \Rightarrow IH \leq \sqrt{\frac{K}{2}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $IA = IB$.

Nhận xét: Các câu hỏi trên thì đẳng thức đều xảy ra khi $IA = IB$ nên $\triangle IAB$ vuông cân tại I . Gọi α là góc giữa tiếp tuyến d và tiệm cận ngang Δ_2 thì $\alpha = (d; \Delta_2) = (d; Ox) = 45^\circ$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k = \pm \tan 45^\circ = \pm 1$.

Vậy các bài toán trong câu 2 ta quy về bài toán viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ khi biết hệ số góc } k = 1 \text{ hoặc } k = -1.$$

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 3 thuộc (C) cắt các đường tiệm cận của (C) tạo thành tam giác có diện tích bằng

- A. 4. B. $2 + \sqrt{2}$. C. $4 + 2\sqrt{2}$. D. 2

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Áp dụng công thức, ta có $S = \frac{2|-2+1|}{1} = 2$.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{2x-3}$ (C) . Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của đồ thị hàm số (C) .

Khoảng cách từ I đến tiếp tuyến bất kỳ của đồ thị (C) đạt giá trị lớn nhất bằng

- A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. B. 1. C. $\sqrt{2}$. D. $\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận là $I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Gọi A, B là giao điểm của tiếp tuyến d tại $M \in (C)$ bất kỳ với hai đường tiệm cận.

$$\text{Khi đó ta có } IA \cdot IB = \frac{4|ad - bc|}{c^2} = \frac{4|-3 + 2|}{4} = 1.$$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện $m - 2 \neq 2 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $\Delta : x = -2$ và tiệm cận ngang $\Delta' : y = 1$.

Ta có $y' = \frac{3}{(x+2)^2} \Rightarrow y'(m-2) = \frac{3}{m^2}$ và $y(m-2) = \frac{m-3}{m}$.

Phương trình đường thẳng d là $y = \frac{3}{m^2}(x - m + 2) + \frac{m-3}{m}$.

$$A = d \cap \Delta \Rightarrow A\left(-2; \frac{m-6}{m}\right); B = d \cap \Delta' \Rightarrow B(2m-2; 1)$$

$$\text{Do đó } x_2 + y_1 = -5 \Leftrightarrow 2m - 2 + \frac{m-6}{m} = -5 \Leftrightarrow 2m^2 + 4m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } S = (-3)^2 + 1^2 = 10.$$
