

CHƯƠNG 2: VECTƠ VÀ HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1: VECTO VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRONG KHÔNG GIAN	2
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM.....	2
B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA	5
C. CÁC DẠNG TOÁN	7
DẠNG 1: CHỨNG MINH MỘT ĐẲNG THỨC VECTO.....	7
DẠNG 2: PHÂN TÍCH MỘT VECTO THEO CÁC VECTO THÀNH PHẦN.....	8
DẠNG 3: GÓC GIỮA HAI VECTO. TÍCH VÔ HƯỚNG GIỮA HAI VECTO.....	8
DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG VECTO GIẢI TOÁN THỰC TIỄN.....	8
D. TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN	11
E. TRẢ LỜI ĐÚNG SAI	18
F. TRẢ LỜI NGẮN	22

CHƯƠNG II: VECTO VÀ HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN**BÀI 1: VECTO VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRONG KHÔNG GIAN****A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM****I. VECTO TRONG KHÔNG GIAN**

Vecto trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

Chú ý:

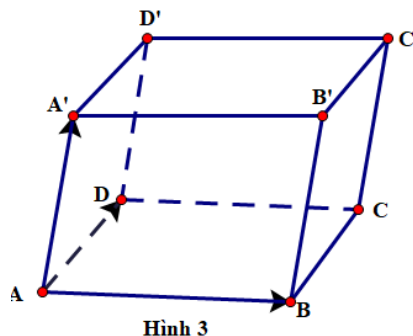
- Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ vectơ có điểm đầu A , điểm cuối B .
- Nếu không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối thì vectơ còn được kí hiệu là $\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$

Ví dụ 1. Cho hình tứ diện $ABCD$. Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu là B và điểm cuối là các đỉnh còn lại của hình tứ diện.

Chú ý: Trong không gian, cho điểm O và vectơ $\vec{a}$, tồn tại duy nhất điểm M để $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ (Hình 3).

- Giá của ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ có cùng nằm trong một mặt phẳng không?
- Tìm các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$.
- Tìm các vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AD}$.



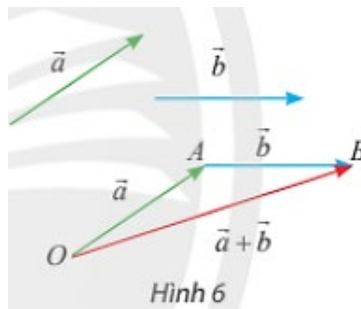
Hình 3

II. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTO**1. Tổng của hai vectơ**

Một cách tổng quát, ta có

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Lấy điểm O bất kì và hai điểm A, B sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Ta gọi $\overrightarrow{OB}$ là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} + \vec{b}$.

Phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là phép cộng vectơ.



Hình 6

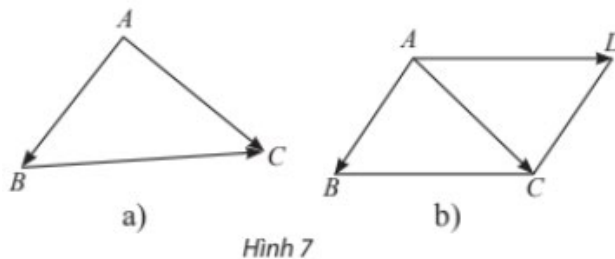
Nhận xét: Phép cộng vectơ trong không gian cũng có các tính chất như phép cộng vectơ trong mặt phẳng.

- Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- Tính chất kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
- Với mọi vectơ $\vec{a}$, ta luôn có: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Chú ý: Từ tính chất kết hợp, ta có thể xác định được tổng của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

Quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành vẫn đúng với các vectơ trong không gian.

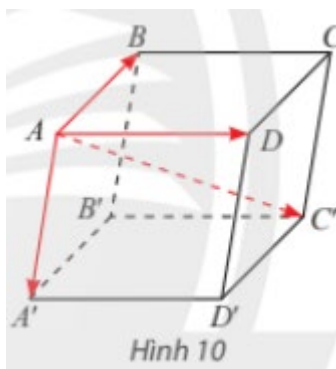
- Với ba điểm A, B, C ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.



Ví dụ 3. Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$. Tìm các vectơ tổng $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C'}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA'}$.

2. Quy tắc hình hộp

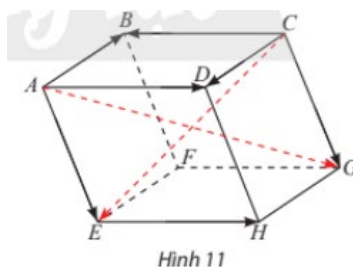
Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'CD'$. Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.



Ví dụ 4. Cho hình hộp $ABCD, EFGH$. Tìm các vectơ:

a) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EH}$.

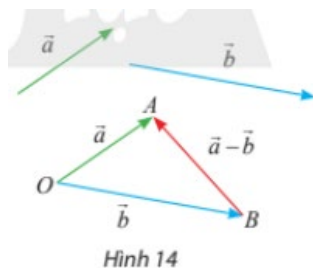


Ví dụ 5. Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc 100° và có độ lớn lần lượt là 25 N và 12 N. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 4 N. Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên.

3. Hiệu của 2 vectơ

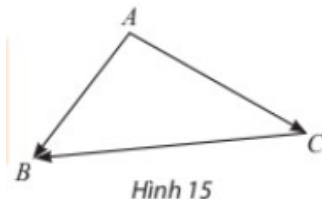
Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Ta gọi $\vec{a} + (-\vec{b})$ là hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$.

Phép lấy hiệu của hai vector được gọi là phép trừ vector.



Quy tắc hiệu

Trong không gian, với ba điểm A, B, C ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.



Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Tìm các vector hiệu $\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{BS} - \overrightarrow{AD}$.

III. TÍCH CỦA 1 SỐ VECTO

Trong không gian, cho số thực $k \neq 0$ và vector $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Tích của số k với vector $\vec{a}$ là một vector, kí hiệu $k\vec{a}$, cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

Phép lấy tích của một số với một vector được gọi là phép nhân một số với một vector.

Quy ước: $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ và $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

Nhận xét:

a) Với hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì, với mọi số h và k , ta có:

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$

$$(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$$

$$h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a};$$

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

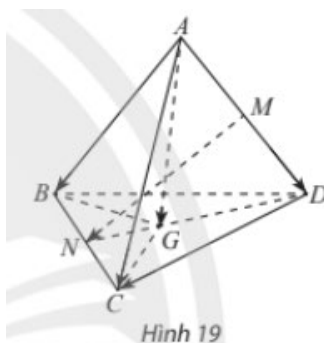
$$(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}.$$

b) $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ hoặc $k = 0$.

c) Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}$ khác $\vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

d) Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k khác 0 để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Ví dụ 7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC ; G là trọng tâm của tam giác BCD . Chứng minh rằng:



$$a) \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$$

$$b) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}.$$

Ví dụ 8. Theo định luật II Newton (Vật lí 10 - Chân trời sáng tạo, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2023, trang 60): Gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật: $\vec{F} = m\vec{a}$, trong đó $\vec{a}$ là vector gia tốc (m/s^2), $\vec{F}$ là vector lực (N) tác dụng lên vật, $m(kg)$ là khối lượng của vật. Muốn truyền cho quả bóng có khối lượng 0,5 kg một gia tốc $50 m/s^2$ thì cần một lực đá có độ lớn là bao nhiêu?

IV. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTOR

1. Góc giữa hai vector trong không gian

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vector khác $\vec{0}$. Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó, ta gọi $\widehat{BAC}$ là góc giữa hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$, kí hiệu $(\vec{u}, \vec{v})$.

Nhận xét:

$$0^\circ \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq 180^\circ;$$

Nếu $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$ thì ta nói $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Ví dụ 9. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Xác định góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'})$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'})$.

2. Tích vô hướng của hai vector

Ta gọi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ là tích vô hướng của hai vector $\vec{u}, \vec{v}$. Trong trường hợp tổng quát, ta có:

Trong không gian, cho hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$.

Tích vô hướng của hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu $\vec{u} \cdot \vec{v}$, được xác định bởi công thức

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

Chú ý:

a) Trong trường hợp $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$, ta quy ước $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

b) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$; $\vec{u}^2 \geq 0$, $\vec{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

c) Với hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$.

d) Với hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Nhận xét: Tương tự như trong mặt phẳng, tích vô hướng của hai vector trong không gian cũng có các tính chất sau:

Với ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ và số k , ta có:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b}).$$

Ví dụ 10. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD .

a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$.

b) Tính góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

1. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'}$; b) $\overrightarrow{DB'} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BB'}$; c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \vec{0}$.

2. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi S là một điểm không thuộc mặt phẳng chứa hình bình hành. Chứng minh rằng $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.

3. Ba lực có điểm đặt tại một đỉnh của hình lập phương, cùng phương với ba cạnh và cùng có cường độ là $5N$. Tính cường độ của hợp lực.

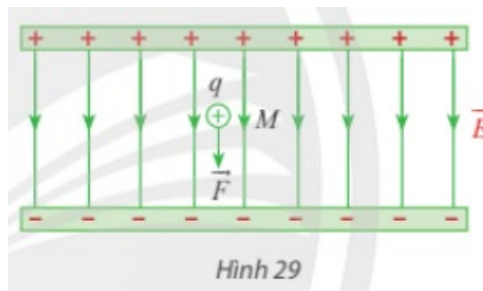
4. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I là trọng tâm của tam giác ABC và J là trọng tâm tam giác ADC . Chứng minh rằng $2\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 3(\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{SJ})$.

5. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{B'C} = \vec{c} - \vec{a} - \vec{b}$ và $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

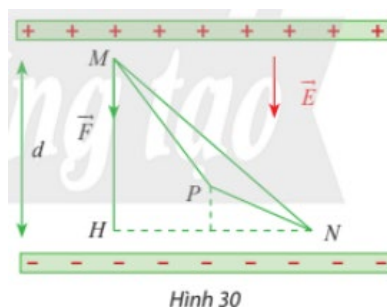
6. Nếu một vật có khối lượng $m(kg)$ thì lực hấp dẫn $\vec{P}$ của Trái Đất tác dụng lên vật được xác định theo công thức $\vec{P} = m\vec{g}$ trong đó $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9,8 m/s^2$ Tính độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên một quả táo có khối lượng 102 gam (Hình 28).



7. Trong điện trường đều, lực tĩnh điện $\vec{F}$ (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích q (đơn vị: C) được tính theo công thức $\vec{F} = q\vec{E}$, trong đó $\vec{E}$ là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi $q = 10^{-9} C$ và độ lớn điện trường $E = 10^5 N/C$ (Hình 29).



8. Một lực tĩnh điện $\vec{F}$ tác động lên điện tích M trong điện trường đều làm cho M dịch chuyển theo đường gấp khúc MPN (Hình 30). Biết $q = 2.10^{12} C$, vecto điện trường có độ lớn $E = 1,8.10^5 N/C$ và $d = MH = 5mm$. Tính công A sinh bởi lực tĩnh điện $\vec{F}$.



C. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1: CHỨNG MINH MỘT ĐẲNG THỨC VECTOR

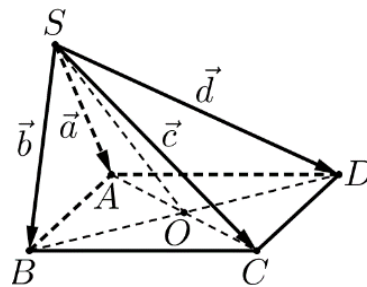
1. Phương pháp

Vận dụng các kiến thức sau.

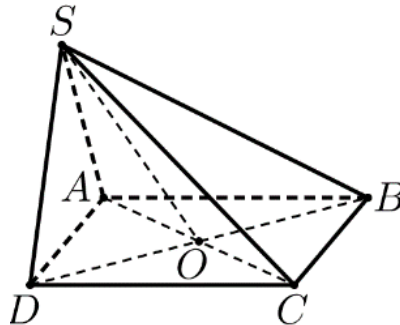
- ☐ Định nghĩa các khái niệm liên quan đến vector;
- ☐ Tính chất hình học của các đa giác đã học;
- ☐ Các quy tắc tính toán với vector;
- ☐ Một số hệ thức vector hay dùng;
- ☐ Các tính chất của các hình hình học cụ thể.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$. Chứng minh: $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$.

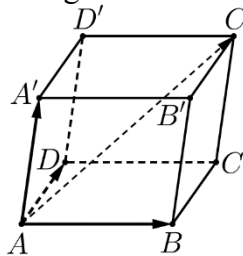


Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Chứng minh: $\overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG}$.



Ví dụ 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tứ diện, M là một điểm trong không gian. Chứng minh: $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})$

Ví dụ 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$.



Ví dụ 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O . Gọi I là tâm của hình bình hành $ABCD$. Chứng minh: $\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{8}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{BD'} + \overrightarrow{DB'})$.

Ví dụ 6: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trọng tâm của tam giác BCD chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$

Ví dụ 7: Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

DẠNG 2: PHÂN TÍCH MỘT VECTƠ THEO CÁC VECTƠ THÀNH PHẦN

1. Phương pháp: Để phân tích một véc tơ theo hệ các véc tơ thành phần thì phải kết hợp hình vẽ với các quy tắc véc tơ, đặc biệt là quy tắc 3 điểm.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J là trung điểm của AB và CD .

a) Hãy biểu diễn véc tơ $\overrightarrow{IJ}$ theo 3 véc tơ $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$.

b) Gọi G là trọng tâm tam giác BCD . Hãy biểu diễn véc tơ $\overrightarrow{AG}$ theo 3 véc tơ $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M và N lần lượt thuộc AD và BC sao cho

$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MD}$; $\overrightarrow{NB} = -3\overrightarrow{NC}$. Biết $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$.

a) Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

b) Gọi G là trung điểm của PQ , chứng minh rằng G là trọng tâm tứ diện $ABCD$.

Ví dụ 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$. Gọi M và N lần lượt là hai điểm nằm trên AC và DC' sao cho $MB \parallel BD'$. Tính tỷ số $\frac{MN}{BD'}$.

DẠNG 3: GÓC GIỮA HAI VECTƠ. TÍCH VÔ HƯỚNG GIỮA HAI VECTƠ

1. Phương pháp: Nắm được định nghĩa góc giữa hai vectơ, công thức tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$?

Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$?

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$, $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{SC}$?

Ví dụ 5. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

Ví dụ 6. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp AC$ và $AB \perp BD$. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD . Chứng minh rằng $AB \perp PQ$.

DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG VECTƠ GIẢI TOÁN THỰC TIỄN

Ví dụ 1: Trong Hình 2.2, lực căng dây (được tạo ra bởi sức nặng của kiện hàng) được thể hiện bởi các đoạn thẳng có mũi tên màu đỏ.



Hình 2.2

- Các đoạn thẳng này cho biết gì về hướng và độ lớn của các lực căng dây?
- Các đoạn thẳng này có cùng nằm trong một mặt phẳng không?

Ví dụ 2: Một tòa nhà có chiều cao của các tầng là như nhau. Một chiếc thang máy di chuyển từ tầng 15 lên tầng 22 của tòa nhà, sau đó di chuyển từ tầng 22 lên tầng 29. Các vectơ biểu diễn độ dịch chuyển của thang máy trong hai lần di chuyển đó có bằng nhau không? Giải thích vì sao.



Hình 2.9

Ví dụ 3: Hình 2.15 mô tả một lọ hoa được đặt trên bàn, trọng lượng của lọ hoa tạo nên một lực tác dụng lên mặt bàn và một phản lực từ mặt bàn lên lọ hoa. Có nhận xét về độ dài và hướng của các vectơ biểu diễn hai lực đó.



Hình 2.15

Ví dụ 4: Thang cuốn tại các trung tâm thương mại, siêu thị hay nhà ga, sân bay thường có hai làn, trong đó một làn lên và một làn xuống. Khi thang cuốn chuyển động, vector biểu diễn vận tốc của mỗi làn có là hai vector đối nhau không? Giải thích vì sao.

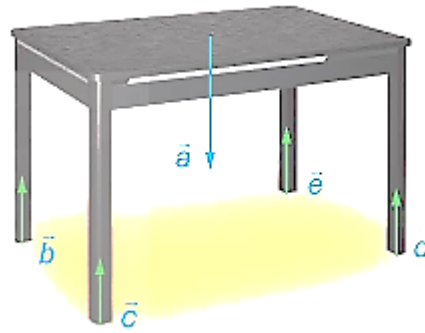


Ví dụ 5: Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của bốn lực chính: lực đẩy của động cơ, lực cản của không khí, trọng lực và lực nâng khí động học (H.2.20). Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và cỡ độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc máy bay tăng vận tốc từ 900 km/h lên 920 km/h, trong quá trình tăng tốc máy bay giữ nguyên hướng bay. Lực cản của không khí khi máy bay đạt vận tốc 900 km/h và 920 km/h lần lượt được biểu diễn bởi hai vector $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$. Hãy giải thích vì sao $\vec{F}_1 = k\vec{F}_2$ với k là một số thực dương nào đó. Tính giá trị của k (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



Hình 2.20

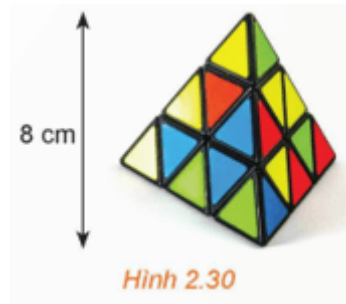
Ví dụ 6: Một chiếc bàn cân đối hình chữ nhật được đặt trên mặt sàn nằm ngang, mặt bàn song song với mặt sàn và bốn chân bàn vuông góc với mặt sàn như Hình 2.29. Trọng lực tác dụng lên bàn (biểu thị bởi vector $\vec{a}$) phân tán đều qua bốn chân bàn và gây nên các phản lực từ mặt sàn lên các chân bàn (biểu thị bởi các vector $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$).



Hình 2.29

- a) Hãy chỉ ra mối quan hệ về phương và hướng của các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ và $\vec{e}$.
- b) Giải thích vì sao các vectơ $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ đôi một bằng nhau.

Ví dụ 7. Ta đã biết trọng tâm của tứ diện $ABCD$ là một điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{IG}$, ở đó G là trọng tâm của tam giác BCD . Áp dụng tính chất trên để tính khoảng cách từ trọng tâm của một khối rubik (đồng chất) hình tứ diện đều đến một mặt của nó, biết rằng chiều cao của khối rubik là 8 cm (H.2.30).



Hình 2.30

Ví dụ 8: Ba sợi dây không giãn với khối lượng không đáng kể được buộc chung một đầu và được kéo căng về ba hướng khác nhau (H.2.31). Nếu các lực kéo làm cho ba sợi dây ở trạng thái đứng yên thì khi đó ba sợi dây nằm trên cùng một mặt phẳng. Hãy giải thích vì sao.



Hình 2.31

D. TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

D. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi M là trung điểm của đoạn BC . Đẳng thức nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}).$

B. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}).$

C. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}).$

D. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}).$

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} + \vec{b}).$

B. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{b} - \vec{c}).$

C. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} - \vec{d}).$

D. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b}).$

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_0 là giao điểm của GA và mặt phẳng (BCD) . Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{G_0G}.$

B. $\overrightarrow{GA} = 4\overrightarrow{G_0G}.$

C. $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{G_0G}.$

D. $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{G_0G}.$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}.$

B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}.$

C. $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}.$

D. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}.$

Câu 6: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Vectơ $\overrightarrow{AG'}$ bằng?

A. $\frac{1}{3}(\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}).$

B. $\frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$

C. $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c}).$

D. $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$

Câu 7: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy biểu diễn vector $\overrightarrow{B'C}$ theo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

A. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}.$

B. $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}.$

C. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$

D. $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.$

Câu 8: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của cạnh BB' . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}.$

B. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}.$

C. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}.$

D. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}.$

Câu 9: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O . Gọi I là tâm của hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CA'} = \vec{v}$, $\overrightarrow{BD'} = \vec{x}$, $\overrightarrow{DB'} = \vec{y}$. Khi đó:

A. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}).$

B. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}).$

C. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}).$

D. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}).$

Câu 10: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$. **B.** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. **C.** $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. **D.** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$.

Câu 11: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\vec{AO} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'})$. **B.** $\vec{AO} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'})$.
C. $\vec{AO} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'})$. **D.** $\vec{AO} = \frac{2}{3}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'})$.

Câu 12: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$, $\vec{AA'} = \vec{c}$. Phân tích vectơ $\vec{AC'}$ theo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

A. $\vec{AC'} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. **B.** $\vec{AC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.
C. $\vec{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. **D.** $\vec{AC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$. Điểm N xác định bởi đẳng thức sau $\vec{AN} = \vec{AB} + \vec{AC} - \vec{AD}$. Mệnh đề nào đúng?

A. N là trung điểm BD . **B.** N là đỉnh hình bình hành $BCDN$.
C. N là đỉnh hình bình hành $CDBN$. **D.** $N \equiv A$.

Câu 14: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm được xác định bởi đẳng thức sau $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} + \vec{MA'} + \vec{MB'} + \vec{MC'} + \vec{MD'} = \vec{0}$. Mệnh đề nào đúng?

A. M là tâm mặt đáy $ABCD$.
B. M là tâm mặt đáy $A'B'C'D'$.
C. M là trung điểm đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy.
D. tập hợp điểm M là đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy.

Câu 15: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Đặt $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$. Điểm M xác định bởi đẳng thức $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm BB' . **B.** M là tâm hình bình hành $BCC'B'$.
C. M là trung điểm CC' . **D.** M là tâm hình bình hành $ABB'A'$.

Câu 16: Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Điều kiện nào dưới đây khẳng định $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng?

A. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m + n + p = 0$ và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.
B. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m + n + p \neq 0$ và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.
C. Tồn tại ba số thực m, n, p sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.
D. Giá của $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng qui.

Câu 17: Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ và $\vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng. **B.** $\vec{x}, \vec{a}$ cùng phương.
C. $\vec{x}, \vec{b}$ cùng phương. **D.** $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đôi một cùng phương.

Câu 18: Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$ và $\vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 6\vec{c}$ và $\vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 6\vec{c}$ đồng phẳng.
B. $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$ và $\vec{y} = 3\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$ và $\vec{z} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 3\vec{c}$ đồng phẳng.

C. $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ và $\vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ và $\vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 3\vec{c}$ đồng phẳng.

D. $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ và $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ và $\vec{z} = -\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ đồng phẳng.

Câu 19: Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu một trong ba vector đó bằng $\vec{0}$.

B. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu có hai trong ba vector đó cùng phương.

C. Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ba vector $\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{DA'}$ đồng phẳng.

D. $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ luôn đồng phẳng với hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Câu 20: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và các điểm M, N, P xác định bởi $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB'}$ ($k \neq 0$), $\overrightarrow{NB} = x\overrightarrow{NC'}$, $\overrightarrow{PC} = y\overrightarrow{PD'}$. Hãy tính x, y theo k để ba điểm M, N, P thẳng hàng.

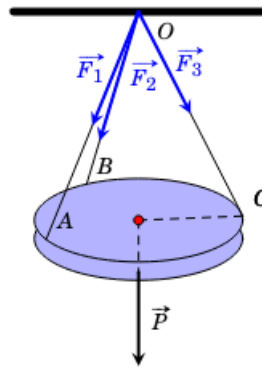
A. $x = \frac{2+k}{2-k}, y = -\frac{2}{k}$

B. $x = \frac{1+2k}{1-2k}, y = -\frac{1}{2k}$

C. $x = \frac{\frac{1}{2}+k}{2-k}, y = -\frac{1}{2k}$

D. $x = \frac{1+k}{1-k}, y = -\frac{1}{k}$

Câu 21: Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15$ (N). Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.



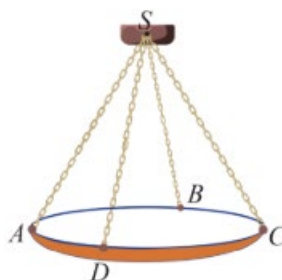
A. $14\sqrt{3}$ (N).

B. $15\sqrt{3}$ (N).

C. $17\sqrt{3}$ (N).

D. $16\sqrt{3}$ (N).

Câu 22: Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m = 5$ kg được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC} = 60^\circ$. Tìm độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích. Lấy $g = 10$ m/s².



A. $\frac{15\sqrt{3}}{3}N$. **B.** $\frac{20\sqrt{3}}{3}N$. **C.** $\frac{25\sqrt{3}}{3}N$. **D.** $\frac{30\sqrt{3}}{3}N$.

Câu 23: Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vector cùng hướng và đều khác vector $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. **B.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. **C.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$. **D.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Câu 24: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

A. $\alpha = 180^\circ$. **B.** $\alpha = 0^\circ$. **C.** $\alpha = 90^\circ$. **D.** $\alpha = 45^\circ$.

Câu 25: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$

A. $\alpha = 30^\circ$. **B.** $\alpha = 45^\circ$. **C.** $\alpha = 60^\circ$. **D.** $\alpha = 120^\circ$.

Câu 26: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và hai vector $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 90^\circ$. **B.** $\alpha = 180^\circ$. **C.** $\alpha = 60^\circ$. **D.** $\alpha = 45^\circ$.

Câu 27: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn điều kiện $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$. Độ dài vector $3\vec{a} + 5\vec{b}$:

A. $5\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{24}$. **C.** 8. **D.** 124.

Câu 28: Cho $\vec{a}$, $\vec{b}$ có $(\vec{a} + 2\vec{b})$ vuông góc với vector $(5\vec{a} - 4\vec{b})$ và $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Khi đó:

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$. **C.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$.

Câu 29: Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vector $\vec{a}, \vec{b}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos \alpha = \frac{3}{8}$. **B.** $\alpha = 30^\circ$. **C.** $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. **D.** $\alpha = 60^\circ$.

Câu 30: $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là 2 vector đều khác $\vec{0}$. Khi đó $|\vec{u} + 2\vec{v}|^2$ bằng

A. $\vec{u}^2 + 2\vec{v}^2 - 4\vec{u} \cdot \vec{v}$. **B.** $\vec{u}^2 + 4\vec{v}^2 + 4\vec{u} \cdot \vec{v}$. **C.** $\vec{u}^2 + 4\vec{v}^2$. **D.** $4\vec{u} \cdot \vec{v} (\vec{u} - \vec{v})$.

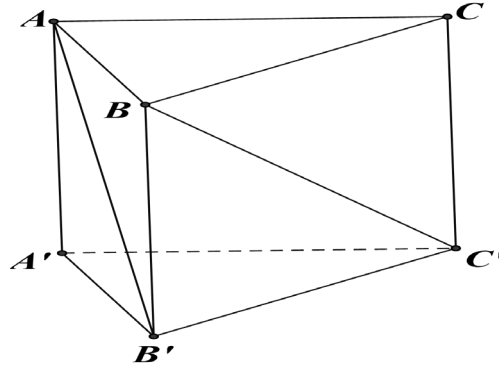
Câu 31: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$ và $|\vec{a} + \vec{b}| = 13$. Khi đó cosin của góc giữa hai vector $\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{a} + \vec{b}$ bằng

A. $\frac{12}{13}$. **B.** $\frac{5}{12}$. **C.** $-\frac{119}{169}$. **D.** $\frac{119}{169}$.

Câu 32: Cho $\vec{u} = \vec{a} + 3\vec{b}$ vuông góc với $\vec{v} = 7\vec{a} - 5\vec{b}$ và $\vec{x} = \vec{a} - 4\vec{b}$ vuông góc với $\vec{y} = 7\vec{a} - 2\vec{b}$. Khi đó góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. $(\vec{a}, \vec{b}) = 75^\circ$. **B.** $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. **C.** $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. **D.** $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$.

- Câu 33:** Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; \vec{a} \cdot \vec{b} = 10$. Xét hai vector $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b}$ $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}$,. Gọi α là góc giữa hai vector $\vec{x}, \vec{y}$. Chọn khẳng định đúng.
- A. $\cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{15}}$. B. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$. C. $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{15}}$. D. $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{15}}$.
- Câu 34:** Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 26; |\vec{b}| = 28; |\vec{a} + \vec{b}| = 48$. Độ dài vector $\vec{a} - \vec{b}$ bằng?
- A. 25. B. $\sqrt{616}$. C. 9. D. $\sqrt{618}$.
- Câu 35:** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$?
- A. 60° . B. 45° . C. 120° . D. 90° .
- Câu 36:** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$?
- A. 120° . B. 90° . C. 60° . D. 45° .
- Câu 37:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD . Số đo của góc (MN, SC) bằng:
- A. 45° B. 30° C. 90° D. 60°
- Câu 38:** Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD . Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu?
- A. 0° . B. 30° . C. 90° . D. 60° .
- Câu 39:** Cho tứ diện $ABCD$ với $AB \perp AC, AB \perp BD$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD . Góc giữa PQ và AB là?
- A. 90° . B. 60° . C. 30° . D. 45° .
- Câu 40:** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ, \widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?
- A. 120° . B. 90° . C. 60° . D. 45° .
- Câu 41:** Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.
- A. AB và CD chéo nhau B. AB và CD vuông góc với nhau
C. AB và CD đồng phẳng D. AB và CD cắt nhau
- Câu 42:** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = \sqrt{2}a$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng



- A. 60° . B. 45° . C. 90° . D. 30° .

Câu 43: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a . Gọi M là trung điểm AD . Giá trị $\overrightarrow{B_1M} \cdot \overrightarrow{BD_1}$ là:

- A. $\frac{1}{2}a^2$. B. a^2 . C. $\frac{3}{4}a^2$. D. $\frac{3}{2}a^2$.

Câu 44: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

- A. 90° B. 60° C. 45° D. 120°

Câu 45: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BB' . Cosin của góc hợp bởi MN và AC' bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 46: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , tam giác $A'BC$ đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) . M là trung điểm cạnh CC' . Tính cosin góc α giữa hai đường thẳng AA' và BM .

- A. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{22}}{11}$. B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{33}}{11}$. C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{11}}{11}$. D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{22}}{11}$.

Câu 47: Cho tam giác ABC , thì công thức tính diện tích nào sau đây là đúng nhất.

- A. $S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 AC^2 - BC^2}$ B. $S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 AC^2 + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$
C. $S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 AC^2 - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$ D. $S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$

Câu 48: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a . Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$ bằng?

- A. $a^2\sqrt{2}$. B. a^2 . C. $a^2\sqrt{3}$. D. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Câu 49: Cho tứ diện $ABCD$ với $AC = \frac{3}{2}AD, \widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^\circ, CD = AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD . Chọn khẳng định đúng?

- A. $\cos \varphi = \frac{3}{4}$. B. $\varphi = 60^\circ$. C. $\varphi = 30^\circ$. D. $\cos \varphi = \frac{1}{4}$.

Câu 50: Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM})$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

E. TRẢ LỜI ĐÚNG SAI

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G . Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?

A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

B. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$

C. $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}$

D. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm MN . Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?

A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$

C. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$

D. $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

Câu 3: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O . Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?

A. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'}$.

Câu 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?

A. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'A'}$.

B. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{DC}$.

C. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'}$.

D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BC}$.

Câu 5: Xét tính đúng- sai của các mệnh đề sau?

A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

B. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$.

C. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

D. Chóp $S.ABCD$ có $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Xét tính đúng- sai của các mệnh đề sau?

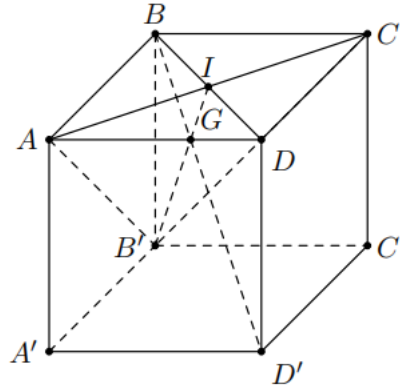
A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{SO}$

B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

C. $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$.

D. $\overrightarrow{GS} = 3\overrightarrow{OG}$.

Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$, gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'C$ (tham khảo hình vẽ). Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?



- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.
- B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.
- C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'C'}$.
- D. $\overrightarrow{BD'} = 2\overrightarrow{BG}$.

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, BC . Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?

- A. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.
- B. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.
- C. $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.
- D. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AD và BC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = 3MD$ và $BN = 3NC$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm AD và BC . Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?

- A. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$
- B. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$
- C. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BN}$
- D. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Câu 10: Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

Mệnh đề	Đúng	Sai
A: “ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ”.		
B: “ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ ”.		
C: “ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ với $ABCD$ là tứ giác ”.		
D: “ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ với $ABCD$ là hình bình hành ”.		

Câu 11: Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

Mệnh đề	Đúng	Sai
A: “ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ ”.		
B: “ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC}$ ”.		

$C: "k.\vec{a} = \vec{0} \leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}"$.		
$D: " \vec{AB} = k.\vec{AC} \leftrightarrow \text{Ba điểm phân biệt } A, B, C \text{ thẳng hàng } "$.		

Câu 12: Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

Mệnh đề	Đúng	Sai
$A: " \vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI} \text{ với } I \text{ là trung điểm đoạn } AB \text{ và điểm } M \text{ bất kỳ } "$.		
$B: " \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG} \text{ với } G \text{ là trọng tâm } \Delta ABC \text{ và điểm } M \text{ bất kỳ } "$.		
$C: " \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MG} \text{ với } G \text{ là trọng tâm tứ diện } ABCD \text{ và điểm } M \text{ bất kỳ } "$.		
$D: " \text{Nếu } \vec{SB} + \vec{SD} = \vec{SA} + \vec{SC} \text{ thì chóp } S.ABCD \text{ có } ABCD \text{ là hình bình hành } "$.		

Câu 13: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

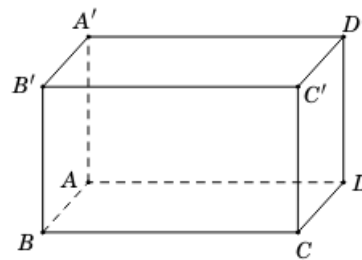
Mệnh đề	Đúng	Sai
$A: " \vec{AB} + \vec{CC'} = \vec{A'B'} + \vec{BB'} "$.		
$B: " \vec{AB} = \vec{CD} "$.		
$C: " \vec{AB} - \vec{BC'} = \vec{BD'} "$.		
$D: " \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'} = \vec{AC'} "$.		

Câu 14: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

Mệnh đề	Đúng	Sai
$A: " \vec{BA} + \vec{A'C'} = \vec{BC} "$.		
$B: " \text{Góc giữa } (\vec{BC}; \vec{AA'}) = (\vec{BC}; \vec{CC'}) = (\vec{BC}; \vec{BB'}) "$.		
$C: " \vec{AB} + \vec{AA'} + \vec{B'C'} = \vec{AC'} "$.		
$D: " \text{Góc giữa } (\vec{AB}; \vec{AA'}) = (\vec{BA}; \vec{AA'}) "$.		

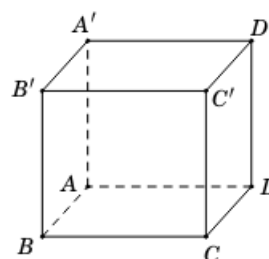
Câu 15: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = a; AD = a\sqrt{3}; AA' = 2a$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- $\vec{AB'} + \vec{CD'} = \vec{0}$.
- $\vec{A'D} + \vec{CB'} = \vec{0}$.
- $|\vec{AB} + \vec{AD}| = a\sqrt{5}$.
- $|\vec{AB} + \vec{A'D'} + \vec{CC'}| = 2\sqrt{2}a$.



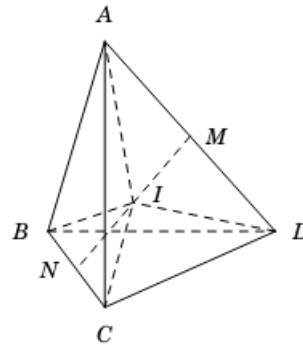
Câu 16: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- $\vec{B'B} - \vec{DB} = \vec{B'D}$.
- $\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB'} = \vec{BD}$.
- $|\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB'}| = a\sqrt{2}$.
- $|\vec{BC} - \vec{BA} + \vec{C'A}| = a$.



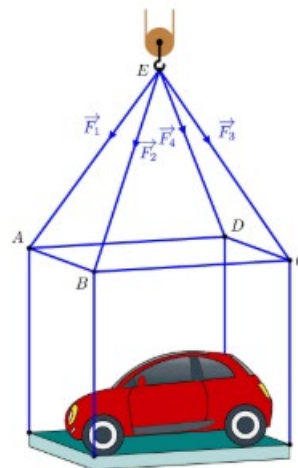
Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC, I là trung điểm MN . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$
- b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$
- c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN}$.
- d) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$



Câu 18: Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° . Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là 4700 N và trọng lượng của khung sắt là 3000 N.

- a) $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4}$.
- b) $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_4}$.
- c) $|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_3}| = 8141 \text{ N}$ (làm tròn đến hàng đơn vị).
- d) Trọng lượng của chiếc xe ô tô là 16282 N (làm tròn đến hàng đơn vị).



Câu 19: Trong không gian, cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng có độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai véc-tơ đó là 45° .

- a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- b) $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = -5 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- c) $|\vec{a} + \vec{b}| = 2 + \sqrt{2}$.
- d) $|\vec{a} - \sqrt{2}\vec{b}| = 0$.

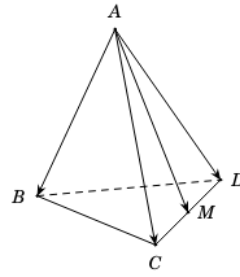
Câu 20: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD .

a) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$.

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

d) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{a^2}{2}$.



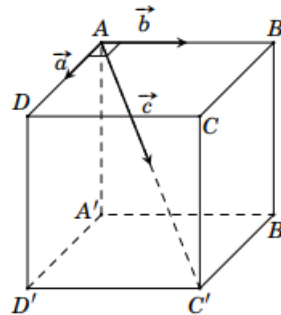
Câu 21: Một chất điểm ở vị trí đỉnh A của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chất điểm chịu tác động bởi ba lực $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lần lượt cùng hướng với $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC'}$ như hình vẽ. Độ lớn của các lực $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ tương ứng là 10N, 10N và 20N.

a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

b) $|\vec{a} + \vec{b}| = 20(\text{N})$.

c) $|\vec{a} + \vec{c}| = |\vec{b} + \vec{c}|$.

d) $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 32,59(\text{N})$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



F. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Có bao nhiêu vector bằng vector $\overrightarrow{BC}$.

Câu 2: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biết ΔABC có cạnh bằng 3. Tìm vector tổng $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{B'C'}|$

Câu 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'C'}$.

Câu 4: Cho tứ diện $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = 2, BC = 2\sqrt{2}$. Tính $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD . Cho $AB = 2a, CD = 2b, EF = 2c$. Với M là một điểm tùy ý, biết tổng $MA^2 + MB^2 = k.ME^2 + l.a^2$. Tính $k + l$.

Câu 6: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $\overrightarrow{MA} = k.\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{NC'} = l.\overrightarrow{ND}$. Khi MN song song với BD' thì $k + l$ có giá trị là bao nhiêu?

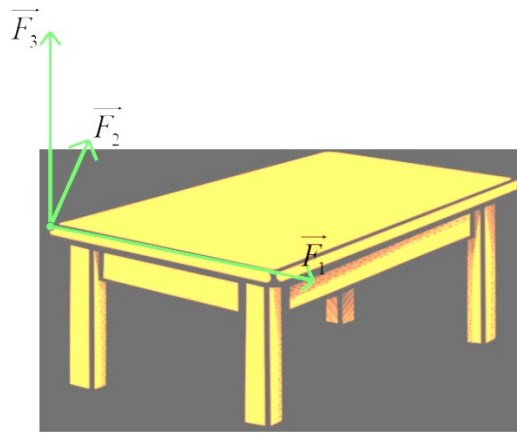
Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có $\overrightarrow{SA} = \vec{a}, \overrightarrow{SB} = \vec{b}, \overrightarrow{SC} = \vec{c}$ và các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, SC . Các điểm P, Q trên các đường thẳng SA, BN sao cho $PQ \parallel CM$. Hãy biểu diễn vector $\overrightarrow{PQ}$ theo ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. $PQ \parallel CM$. Khi biểu diễn vector $\overrightarrow{PQ}$ theo ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, ta được: $\overrightarrow{PQ} = -\frac{m}{n}\vec{a} - \frac{p}{q}\vec{b} + \frac{r}{z}\vec{c}$ (với $\frac{m}{n}, \frac{p}{q}, \frac{r}{z}$ là các phân số tối giản và

$m, n, p, q, r, z \in \mathbb{Z}$). Tính $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} + \frac{r}{z}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , M là điểm thay đổi trên SO . Tỉ số $\frac{SM}{SO}$ sao cho $P = MS^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ nhỏ nhất là bao nhiêu?

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ có các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, BD và AC sao cho $BC = 4BM, AC = 3AP, BD = 2BN$. Mặt phẳng (MNP) cắt đường thẳng AD tại điểm Q .
Tính tỉ số $\frac{AQ}{AD}$.

Câu 10: Có ba lực cùng tác động vào một cái bàn như hình vẽ. Trong đó hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ tạo với nhau một góc 110° và có độ lớn lần lượt là $9N$ và $4N$, lực $\vec{F}_3$ vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ và có độ lớn $7N$. Độ lớn hợp lực của ba lực trên là $a(N)$, tìm giá trị của a .



Câu 11: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vector $\vec{AC} + \vec{BA'} + k(\vec{DB} + \vec{C'D}) = \vec{0}$?

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BD . Gọi I là trung điểm đoạn MN và P là một điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vector $\vec{PI} = k(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD})$?

Câu 13: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm trên cạnh AC sao cho $AC = 3MC$. Lấy điểm N trên đoạn $C'D$ sao cho $C'N = x.C'D$. Với giá trị nào của x thì MN song song BD' ?

Câu 14: Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N được xác định bởi $\vec{AM} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC}$ và $\vec{DN} = \vec{DB} + x.\vec{DC}$. Tìm x để các đường thẳng AD, BC, MN cùng song song với một mặt phẳng.

Câu 15: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vector $\vec{AB} + \vec{B_1C_1} + \vec{DD_1} = k\vec{AC_1}$?

Câu 16: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BD . Gọi I là trung điểm đoạn MN . Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức $\vec{IA} + (2k-1)\vec{IB} + k\vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}$?

Câu 17: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và các số thực m, n thỏa mãn $\vec{MA'} = m\vec{MC}$ và $\vec{NC'} = n\vec{ND}$. Khi MN song song với BD' thì $m+n$ bằng bao nhiêu?

- Câu 18:** Trong không gian cho các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng thỏa mãn $(x-y)\vec{a} + (y-z)\vec{b} = (x+z-2)\vec{c}$. Tính $x+y+z$?
- Câu 19:** Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = DA = a, CA = DB = b, AB = DC = c$. Gọi S là diện tích toàn phần (tổng diện tích tất cả các mặt). Tính giá trị lớn nhất của $\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2}$.
- Câu 20:** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một đường thẳng Δ cắt các đường thẳng $AA', BC, C'D'$ lần lượt tại M, N, P sao cho $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP}$. Tính $\frac{MA}{MA'}$.
- Câu 21:** Cho hình chóp $S.ABC$. Lấy các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho $\frac{SA}{SA'} = a, \frac{SB}{SB'} = b, \frac{SC}{SC'} = c$, trong đó a, b, c là các số thay đổi. Để mặt phẳng $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm của tam giác ABC thì $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

CHƯƠNG II: VECTO VÀ HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1: VECTO VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. VECTO TRONG KHÔNG GIAN

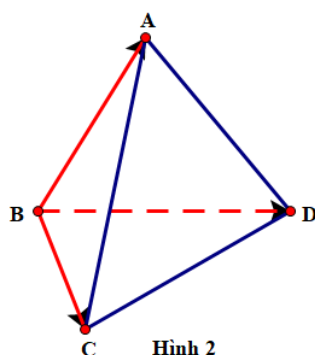
Vecto trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

Chú ý:

- Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ vectơ có điểm đầu A , điểm cuối B .
- Nếu không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối thì vectơ còn được kí hiệu là $\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$

Ví dụ 1. Cho hình tứ diện $ABCD$. Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu là B và điểm cuối là các đỉnh còn lại của hình tứ diện.

Lời giải



Hình 2

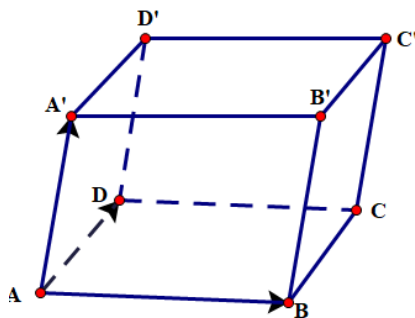
Ta có ba vectơ $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$ có điểm đầu là B và điểm cuối là các đỉnh còn lại của hình tứ diện.

Trong không gian, các khái niệm có liên quan đến vectơ như giá của vectơ; độ dài của vectơ; hai vectơ cùng phương, cùng hướng, ngược hướng, bằng nhau, đối nhau; vectơ-không được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng.

Chú ý: Trong không gian, cho điểm O và vectơ $\vec{a}$, tồn tại duy nhất điểm M để $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'CD'$ (Hình 3).

- Giá của ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ có cùng nằm trong một mặt phẳng không?
- Tìm các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$.
- Tìm các vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AD}$.



Hình 3

Lời giải

- a) Giá của ba vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ lần lượt là ba đường thẳng AB, AD, AA' . Chúng không cùng nằm trong một mặt phẳng vì bốn điểm A, B, D, A' không đồng phẳng.
- b) Do $ABCD \cdot A'B'C'D'$ là hình hộp nên $AA'B'B$ là hình bình hành, suy ra $AB \parallel A'B'$ và $AB = A'B'$. Ta có hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'B'}$ cùng hướng và có độ dài bằng nhau, suy ra $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. Tương tự, ta cũng có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D'C'}$.
- c) Hai vector $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DA}$ có độ dài bằng nhau và ngược hướng, suy ra $\overrightarrow{DA}$ là vector đối của $\overrightarrow{AD}$. Ta có $ABCD$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{AD}$ có cùng độ dài và ngược hướng với $\overrightarrow{CB}$, suy ra $\overrightarrow{CB}$ là vector đối của $\overrightarrow{AD}$. Tương tự, ta cũng có $\overrightarrow{D'A'}, \overrightarrow{C'B'}$ là vector đối của $\overrightarrow{AD}$.

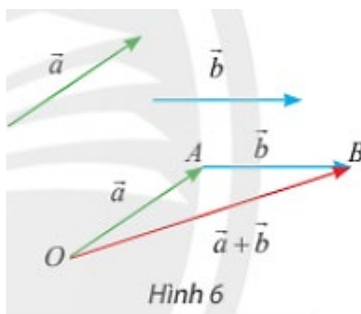
II. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTOR

1. Tổng của hai vector

Một cách tổng quát, ta có

Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$. Lấy điểm O bất kì và hai điểm A, B sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Ta gọi $\overrightarrow{OB}$ là tổng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} + \vec{b}$.

Phép lấy tổng của hai vector được gọi là phép cộng vector.



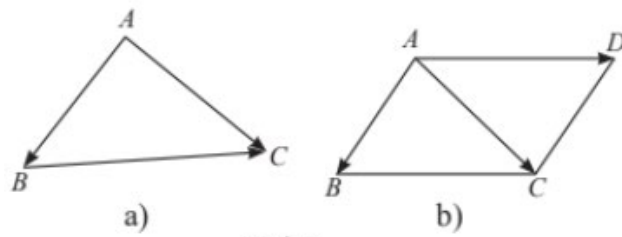
Nhận xét: Phép cộng vector trong không gian cũng có các tính chất như phép cộng vector trong mặt phẳng.

- Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- Tính chất kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
- Với mọi vector $\vec{a}$, ta luôn có: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Chú ý: Từ tính chất kết hợp, ta có thể xác định được tổng của ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

Quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành vẫn đúng với các vector trong không gian.

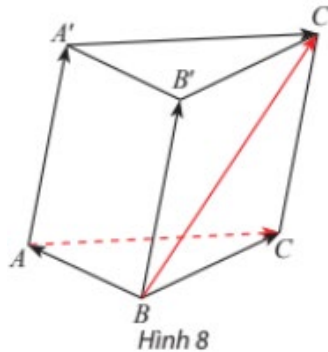
- Với ba điểm A, B, C ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.



Hình 7

Ví dụ 3. Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$. Tìm các vector tổng $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C'}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA'}$.

Lời giải



Hình 8

Ta có $ABC \cdot A'B'C'$ là hình lăng trụ nên $AA'C'C$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$.

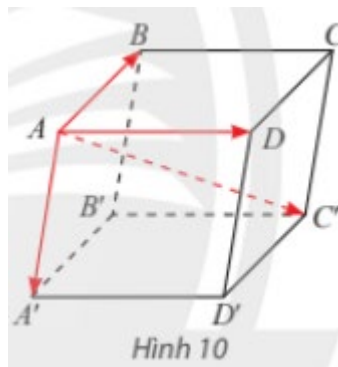
Do đó $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

Tương tự, ta cũng có $AA'B'B$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.

Do đó $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC'}$.

2. Quy tắc hình hộp

Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

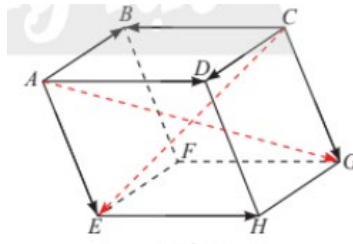


Hình 10

Ví dụ 4. Cho hình hộp $ABCD, EFGH$. Tìm các vector:

a) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EH}$.



Hình 11

Lời giải

a) Theo quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CE}$.

b) Ta có $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$. Suy ra: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$.

Theo quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG}$.

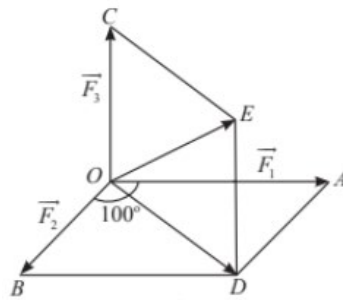
Vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AG}$.

Ví dụ 5. Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc 100° và có độ lớn lần lượt là 25 N và 12 N. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 4 N. Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên.

Lời giải

Gọi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ là ba lực tác động vào vật đặt tại điểm O lần lượt có độ lớn là 25 N, 12 N, 4 N.

Vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{F}_1, \overrightarrow{OB} = \vec{F}_2, \overrightarrow{OC} = \vec{F}_3$. Vẽ hình bình hành $OADB$ và hình bình hành $ODEC$.



Hình 12

Hợp lực tác động vào vật là $\vec{F} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE}$.

Áp dụng định lí côsin trong tam giác OBD , ta có :

$$OD^2 = BD^2 + OB^2 - 2 \cdot BD \cdot OB \cdot \cos \widehat{OBD} = OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 100^\circ.$$

Vì $OC \perp (OADB)$ nên $OC \perp OD$, suy ra $ODEC$ là hình chữ nhật.

Do đó tam giác ODE vuông tại D .

$$\text{Ta có } OE^2 = OC^2 + OD^2 = OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 100^\circ.$$

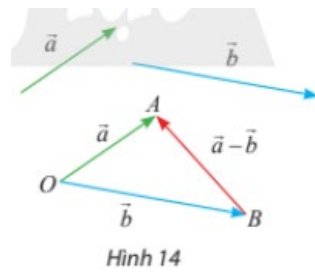
$$\text{Suy ra } OE = \sqrt{OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 100^\circ} = \sqrt{4^2 + 25^2 + 12^2 + 2 \cdot 25 \cdot 12 \cdot \cos 100^\circ} \approx 26.$$

Vậy độ lớn của hợp lực là $F \approx 26$ N.

3. Hiệu của 2 vector

Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$. Ta gọi $\vec{a} + (-\vec{b})$ là hiệu của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$.

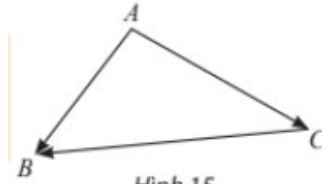
Phép lấy hiệu của hai vector được gọi là phép trừ vector.



Hình 14

Quy tắc hiệu

Trong không gian, với ba điểm A, B, C ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.



Hình 15

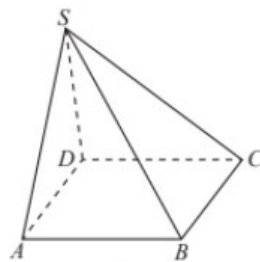
Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Tìm các vectơ hiệu $\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BS} - \overrightarrow{AD}$.

Lời giải

Theo quy tắc hiệu, ta có $\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{AD}$.

Do $ABCD$ là hình bình hành nên ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, suy ra $\overrightarrow{BS} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BS} - \overrightarrow{BC}$.

Theo quy tắc hiệu, ta có $\overrightarrow{BS} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CS}$. Vậy $\overrightarrow{BS} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CS}$.



Hình 16

III. TÍCH CỦA 1 SỐ VECTO

Trong không gian, cho số thực $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu $k\vec{a}$, cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

Phép lấy tích của một số với một vectơ được gọi là phép nhân một số với một vectơ.

Quy ước: $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ và $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

Nhận xét:

a) Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì, với mọi số h và k , ta có:

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$

$$(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$$

$$h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a};$$

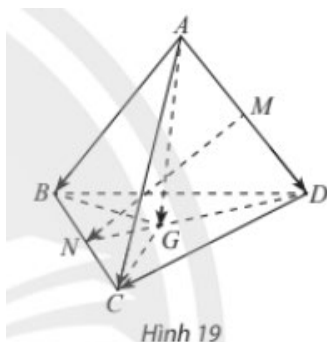
$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

$$(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}.$$

b) $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ hoặc $k = 0$.

- c) Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}$ khác $\vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.
- d) Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k khác 0 để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Ví dụ 7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC ; G là trọng tâm của tam giác BCD . Chứng minh rằng:



Hình 19

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$. Do đó

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN}.$$

Vì M là trung điểm của đoạn thẳng AD nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$.

Vì N là trung điểm của đoạn thẳng BC nên $\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$.

Do đó $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.

b) Ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD}$. Suy ra

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}.$$

Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Do đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

Ví dụ 8. Theo định luật II Newton (Vật lí 10 - Chân trời sáng tạo, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2023, trang 60): Gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật: $\vec{F} = m\vec{a}$, trong đó $\vec{a}$ là vectơ gia tốc (m/s^2), $\vec{F}$ là vectơ lực (N) tác dụng lên vật, $m(\text{kg})$ là khối lượng của vật. Muốn truyền cho quả bóng có khối lượng $0,5\text{kg}$ một gia tốc 50m/s^2 thì cần một lực đá có độ lớn là bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $\vec{F} = m\vec{a}$, suy ra $|\vec{F}| = m|\vec{a}| = 0,5 \cdot 50 = 25(\text{N})$.

Vậy muốn truyền cho quả bóng khối lượng $0,5\text{kg}$ một gia tốc 50m/s^2 thì cần một lực đá có độ lớn là 25N .

IV. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

1. Góc giữa hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó, ta gọi $\widehat{BAC}$ là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, kí hiệu $(\vec{u}, \vec{v})$.

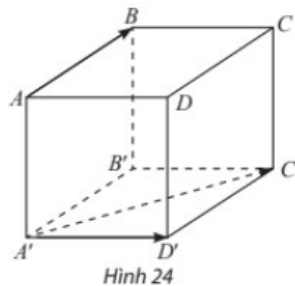
Nhận xét:

$$0^\circ \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq 180^\circ;$$

Nếu $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$ thì ta nói $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Ví dụ 9. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Xác định góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'})$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'})$.

Lời giải



Hình 24

Ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'}$, suy ra $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \widehat{DAB} = 90^\circ$.

Ta có $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$, suy ra $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{CAB} = 45^\circ$.

2. Tích vô hướng của hai vectơ

Ta gọi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ là tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$. Trong trường hợp tổng quát, ta có:

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$.

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu $\vec{u} \cdot \vec{v}$, được xác định bởi công thức $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

Chú ý:

a) Trong trường hợp $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$, ta quy ước $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

b) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$; $\vec{u}^2 \geq 0$, $\vec{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

c) Với hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$.

d) Với hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Nhận xét: Tương tự như trong mặt phẳng, tích vô hướng của hai vectơ trong không gian cũng có các tính chất sau:

Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ và số k , ta có:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

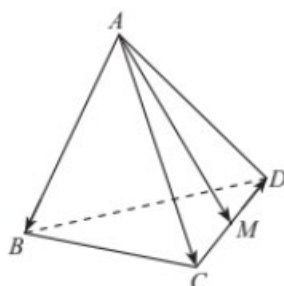
$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b}).$$

Ví dụ 10. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD .

a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$.

b) Tính góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

Lời giải



Hình 26

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$.

Tương tự ta cũng có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}$. Ta lại có $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$, suy ra:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\right) = \frac{a^2}{2}.$$

b) Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

Mà AM, BM là trung tuyến của các tam giác đều ACD, BCD nên $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{CD}$.

Suy ra $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

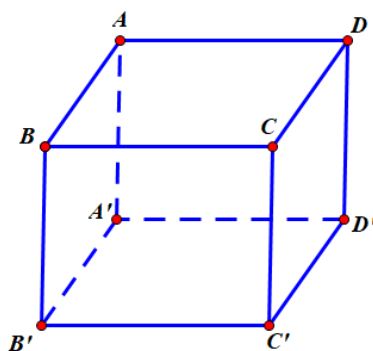
Từ các kết quả trên ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$. Suy ra $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 90^\circ$.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'}$; b) $\overrightarrow{DB'} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BB'}$; c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \vec{0}$.

Lời giải



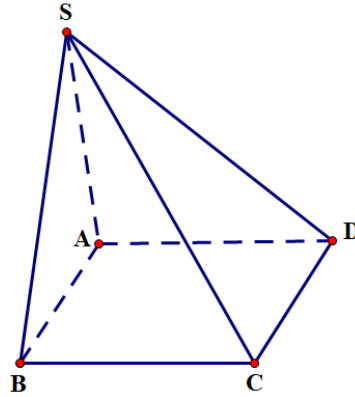
a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$

b) $\overrightarrow{DB'} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{D'B'} + \overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BB'}$

c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{DA'} + \overrightarrow{C'D} = \overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{DA'} = \vec{0}$

2. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi S là một điểm không thuộc mặt phẳng chứa hình bình hành. Chứng minh rằng $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.

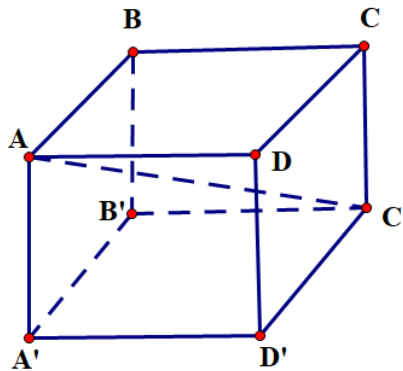
Lời giải



Do $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SD} \Leftrightarrow \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$

3. Ba lực có điểm đặt tại một đỉnh của hình lập phương, cùng phương với ba cạnh và cùng có cường độ là $5N$. Tính cường độ của hợp lực.

Lời giải



Giả sử 3 lực có điểm đặt là A và các lực là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$.

Theo quy tắc hình bình hành ta có hợp lực $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

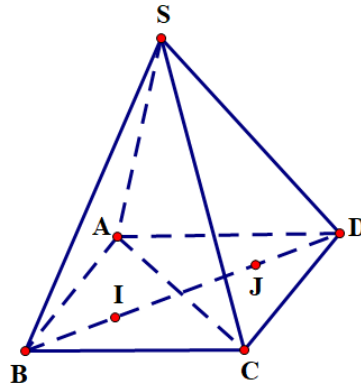
Theo đề bài ta có $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AA'}| = 5$.

Mà AC' là đường chéo của hình lập phương nên $AC' = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2} = 5\sqrt{3}$.

Vậy cường độ của hợp lực là $5\sqrt{3}N$.

4. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I là trọng tâm của tam giác ABC và J là trọng tâm tam giác ADC . Chứng minh rằng $2\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 3(\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{SJ})$.

Lời giải



Xét $S.ABC$ do I là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có:

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SI} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SI}.$$

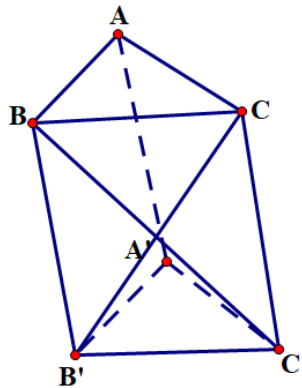
Xét $S.ACD$ ta có $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SJ} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{SJ} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{SJ} + \overrightarrow{JD} = 3\overrightarrow{SJ} + (\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{JC})$.

Vì J là trọng tâm tam giác ADC nên $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}$. Suy ra $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 3\overrightarrow{SJ}$.

Ta có $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 3\overrightarrow{SI} + 3\overrightarrow{SJ} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 3(\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{SJ})$

5. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{B'C} = \vec{c} - \vec{a} - \vec{b}$ và $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

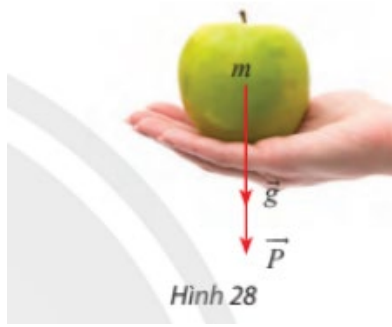
Lời giải



Ta có $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{c} - \vec{a} - \vec{b}$

$$\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = -\vec{b} + \vec{c} + \vec{a} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$

6. Nếu một vật có khối lượng $m(kg)$ thì lực hấp dẫn $\vec{P}$ của Trái Đất tác dụng lên vật được xác định theo công thức $\vec{P} = m\vec{g}$ trong đó $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9,8 m/s^2$ Tính độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên một quả táo có khối lượng 102 gam (Hình 28).

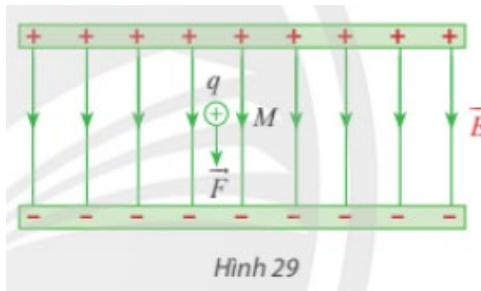


Lời giải

Đổi $102g = 0,102kg$.

Độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên một quả táo là $|\vec{P}| = m|\vec{g}| = 0,102 \cdot 9,8 = 0,9996 N$

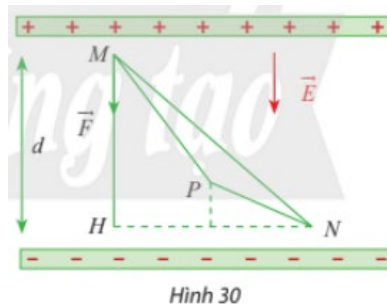
7. Trong điện trường đều, lực tĩnh điện $\vec{F}$ (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích q (đơn vị: C) được tính theo công thức $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$, trong đó $\vec{E}$ là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi $q = 10^{-9} C$ và độ lớn điện trường $E = 10^5 N / C$ (Hình 29).



Lời giải

Độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm là $|\vec{F}| = q \cdot |\vec{E}| = 10^{-9} \cdot 10^5 = 10^{-4} N$.

8. Một lực tĩnh điện $\vec{F}$ tác động lên điện tích M trong điện trường đều làm cho M dịch chuyển theo đường gấp khúc MPN (Hình 30). Biết $q = 2 \cdot 10^{12} C$, vectơ điện trường có độ lớn $E = 1,8 \cdot 10^5 N / C$ và $d = MH = 5mm$. Tính công A sinh bởi lực tĩnh điện $\vec{F}$.



Lời giải

Đổi $5mm = 5 \cdot 10^{-3} m$.

Gọi K là điểm thuộc MH sao cho $PK \perp MH$, L là điểm thuộc HN sao cho $PL \perp HN$

$$A_{MNP} = A_{MP} + A_{PN} = F_d \cdot MP \cos \alpha_1 + F_d \cdot PN \cos \alpha_2 \Leftrightarrow A_{MNP} = qE \cdot \frac{MK}{\cos \alpha_1} \cdot \cos \alpha_1 + qE \cdot \frac{PL}{\cos \alpha_2} \cdot \cos \alpha_2$$

$$\Leftrightarrow A_{MNP} = qE(MK + KL) = qE(MK + KH) = qE \cdot MH = 2 \cdot 10^{-12} \cdot 1,8 \cdot 10^5 \cdot 0,005 = 1,8 \cdot 10^{-9} J$$

C. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1: CHỨNG MINH MỘT ĐẲNG THỨC VECTO

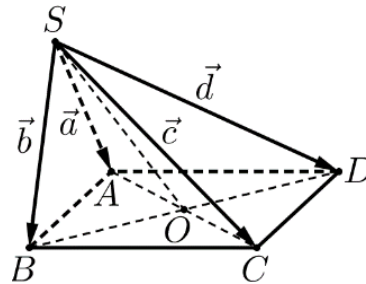
1. Phương pháp

Vận dụng các kiến thức sau.

- ☐ Định nghĩa các khái niệm liên quan đến vector;
- ☐ Tính chất hình học của các đa giác đã học;
- ☐ Các quy tắc tính toán với vector;
- ☐ Một số hệ thức vector hay dùng;
- ☐ Các tính chất của các hình hình học cụ thể.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$. Chứng minh: $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$.

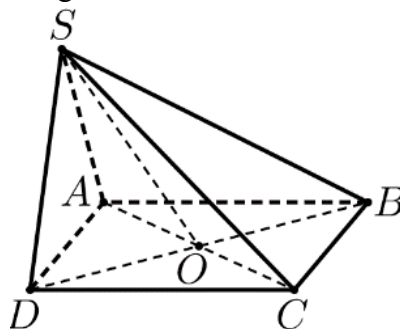


Lời giải

Vì O là trung điểm của AC và BD nên
$$\begin{cases} \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO} \\ \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO} \end{cases}$$

Suy ra $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$ hay $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Chứng minh: $\overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG}$.



Lời giải

Ta có $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GS} + 4\overrightarrow{GO} + \left(\underbrace{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}_{=\vec{0}} \right) = \vec{0} \text{ (do } O \text{ là tâm hình bình hành)}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GS} + 4\overrightarrow{GO} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG}.$$

Ví dụ 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tứ diện, M là một điểm trong không gian.

Chứng minh: $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})$

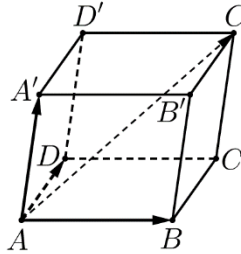
Lời giải

Do G là trọng tâm tứ diện nên ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MD}) = \vec{0}, \forall M$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}).$$

Ví dụ 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$.

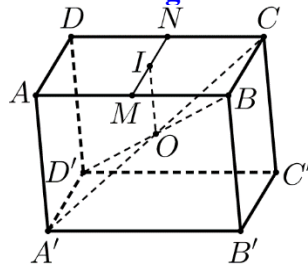


Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'}) + \overrightarrow{CD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$: luôn đúng

Ví dụ 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O . Gọi I là tâm của hình bình hành $ABCD$. Chứng minh: $\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{8}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{BD'} + \overrightarrow{DB'})$.

Lời giải



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD .

Suy ra I là trung điểm của MN nên $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OI}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{ON} \end{cases}$$

$$\text{Từ đó suy ra } \overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

$$= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} \overrightarrow{AC'} - \frac{1}{2} \overrightarrow{CA'} - \frac{1}{2} \overrightarrow{BD'} - \frac{1}{2} \overrightarrow{DB'} \right) = -\frac{1}{8} (\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{BD'} + \overrightarrow{DB'})$$

Ví dụ 6: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trọng tâm của tam giác BCD chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$

Lời giải

a) Ta có:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}((\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD})) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$$

b) Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD}$$

Cộng các đẳng thức theo vế ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = 3\overrightarrow{AG}$

Vì G là trọng tâm tam giác BCD nên $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

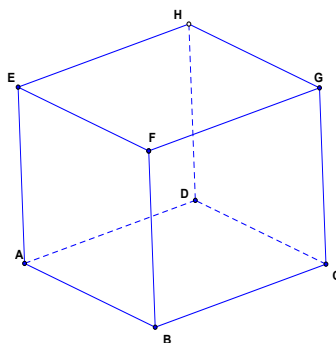
suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

Ví dụ 7: Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Lời giải



a) Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{FE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE}) + (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{GC}) = \vec{0} + (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}) = \overrightarrow{AD}$

b) Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GB} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GB}) = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

DẠNG 2: PHÂN TÍCH MỘT VECTO THEO CÁC VECTO THÀNH PHẦN

1. Phương pháp: Để phân tích một véc tơ theo hệ các véc tơ thành phần thì phải kết hợp hình vẽ với các quy tắc véc tơ, đặc biệt là quy tắc 3 điểm.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J là trung điểm của AB và CD .

a) Hãy biểu diễn vec tơ $\overrightarrow{IJ}$ theo 3 vectơ $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$.

b) Gọi G là trọng tâm tam giác BCD . Hãy biểu diễn vec tơ $\overrightarrow{AG}$ theo 3 vectơ $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$.

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{IJ} = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ})$, mặt khác $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

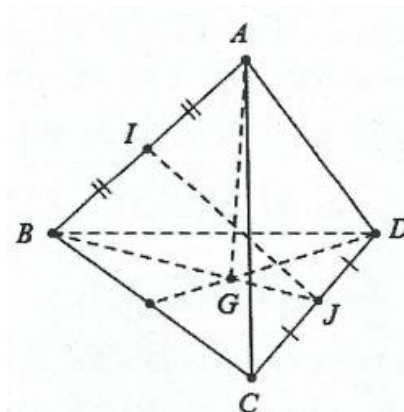
$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \text{ (tính chất trung điểm)}$$

$$\text{Do đó: } \overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

$$\text{b) Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC} \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD} \end{cases} \text{ cộng theo vế ta được:}$$

$$3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$$

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ (do } G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC). \text{ Do vậy } \overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}}{3}.$$



Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M và N lần lượt thuộc AD và BC sao cho

$$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MD}; \overrightarrow{NB} = -3\overrightarrow{NC}. \text{ Biết } \overrightarrow{AB} = \vec{a} \text{ và } \overrightarrow{CD} = \vec{b}.$$

a) Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

b) Gọi G là trung điểm của PQ , chứng minh rằng G là trọng tâm tứ diện $ABCD$.

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \quad (1).$$

$$\text{Lại có: } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \quad (2).$$

$$\text{Mặt khác: } \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MD} = \vec{0}; \overrightarrow{NB} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}.$$

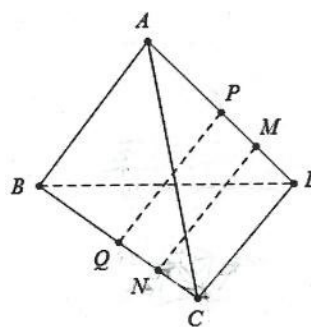
$$\text{Lấy } (2) + 3.(1) \text{ ta được } 4\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{DC}.$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}.$$

b) Theo tính chất trung điểm ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GP} \\ \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GQ} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2(\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ})$$

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Rightarrow G \text{ là trọng tâm tứ diện } ABCD.$$



Ví dụ 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$. Gọi M và N lần lượt là hai

điểm nằm trên AC và DC' sao cho $MB \parallel BD'$. Tính tỷ số $\frac{MN}{BD'}$.

Lời giải

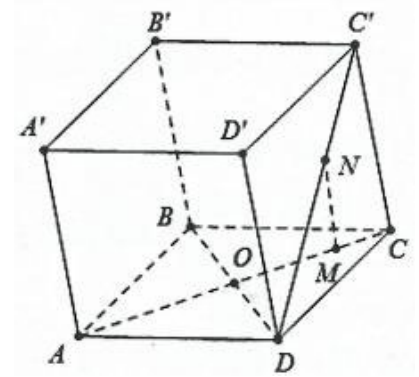
Giả sử: $\overrightarrow{MC} = n\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{C'N} = m\overrightarrow{C'D}$.

Ta có: $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Lại có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'N} = n\overrightarrow{AC} + \vec{b} + m\overrightarrow{C'D}$
 $= n(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) + \vec{b} + m(\overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{CD})$
 $= n(\vec{c} - \vec{a}) + \vec{b} + m(-\vec{b} + \vec{a}) = (m-n)\vec{a} + (1-m)\vec{b} + n\vec{c}$.

Khi đó $MN \parallel BD' \Rightarrow \overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BD'}$

$$\frac{m-n}{1} = \frac{1-m}{1} = \frac{n}{1} = k \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{MN}{B'D'} = k = \frac{1}{3}.$$



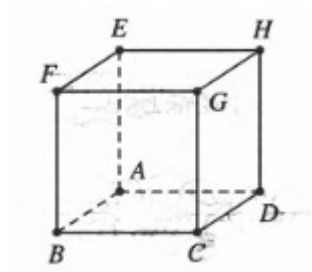
DẠNG 3: GÓC GIỮA HAI VECTƠ. TÍCH VÔ HƯỚNG GIỮA HAI VECTƠ

1. Phương pháp: Nắm được định nghĩa góc giữa hai vectơ, công thức tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$?

Lời giải

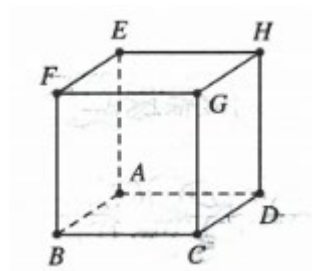


Vì $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$ ($ADHE$ là hình vuông)

Nên $\widehat{(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{DH})} = \widehat{(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AE})} = \widehat{BAE} = 90^\circ$ ($ABFE$ là hình vuông).

Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

Lời giải

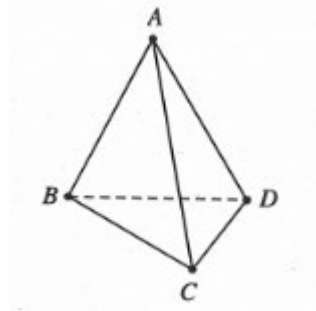


Vì $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ ($AEGC$ là hình vuông)

Nên $\widehat{(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{EG})} = \widehat{(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})} = \widehat{BAC} = 45^\circ$ ($ABCD$ là hình vuông).

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$?

Lời giải

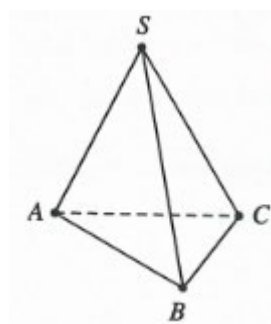


$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) - |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \\ &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cos 60^\circ - |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos 60^\circ. \end{aligned}$$

$$\text{Mà } AC = AD \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = 90^\circ.$$

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$, $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{SC}$?

Lời giải



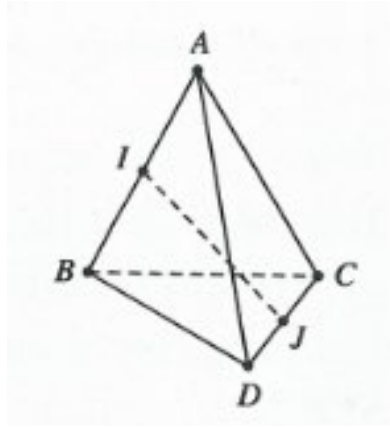
$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{SC} \cdot (\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}) = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SA} \\ &= |\overrightarrow{SC}| \cdot |\overrightarrow{SB}| \cos(\overrightarrow{SC}; \overrightarrow{SB}) - |\overrightarrow{SC}| \cdot |\overrightarrow{SA}| \cos(\overrightarrow{SC}; \overrightarrow{SA}) \\ &= SC \cdot SB \cdot \cos \widehat{BSC} - SC \cdot SA \cdot \cos \widehat{ASC}. \end{aligned}$$

$$\text{Mà } SA = SB = SC \text{ và } \widehat{BSC} = \widehat{ASC} \longrightarrow \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

Do đó $(\overrightarrow{SC}; \overrightarrow{AB}) = 90^\circ$.

Ví dụ 5. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

Lời giải



Xét tam giác ICD có J là trung điểm

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID})$$

Tam giác ABC có $\begin{cases} AB = AC \\ \widehat{BAC} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \text{ đều} \Rightarrow CI \perp AB$

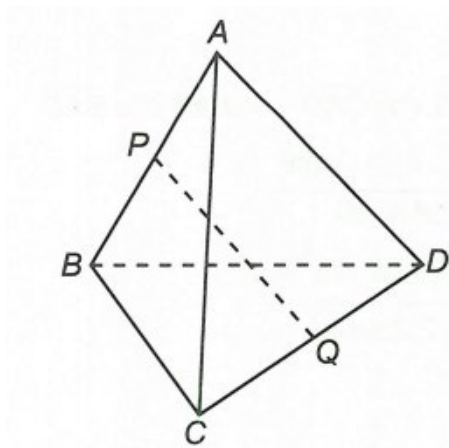
Tương tự ta có ΔABD đều nên $DI \perp AB$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{IJ}) = 90^\circ$$

Ví dụ 6. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp AC$ và $AB \perp BD$. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD . Chứng minh rằng $AB \perp PQ$.

Lời giải



Vì $AB \perp AC$ và $AB \perp BD$ nên $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$; $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Ta có $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ}$ và $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DQ}$

Do đó $2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} \Rightarrow 2\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

Hay $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Vậy $AB \perp PQ$.

DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG VECTƠ GIẢI TOÁN THỰC TIỄN

Ví dụ 1: Trong Hình 2.2, lực căng dây (được tạo ra bởi sức nặng của kiện hàng) được thể hiện bởi các đoạn thẳng có mũi tên màu đỏ.



Hình 2.2

- a) Các đoạn thẳng này cho biết gì về hướng và độ lớn của các lực căng dây?
- b) Các đoạn thẳng này có cùng nằm trong một mặt phẳng không?

Lời giải

- a) Các đoạn thẳng này có hướng lên trên (về phía móc cần cẩu) và độ dài của các đoạn thẳng thể hiện cho độ lớn của các lực căng dây và được lấy tỉ lệ với độ lớn của các lực căng dây.
- b) Các đoạn thẳng này không cùng nằm trên một mặt phẳng.

Ví dụ 2: Một tòa nhà có chiều cao của các tầng là như nhau. Một chiếc thang máy di chuyển từ tầng 15 lên tầng 22 của tòa nhà, sau đó di chuyển từ tầng 22 lên tầng 29. Các vectơ biểu diễn độ dịch chuyển của thang máy trong hai lần di chuyển đó có bằng nhau không? Giải thích vì sao.



Hình 2.9

Lời giải

Gọi vector biểu diễn độ dịch chuyển của thang máy từ tầng 15 lên tầng 22 của tòa nhà là $\vec{a}$. Gọi vector biểu diễn độ dịch chuyển của thang máy từ tầng 22 lên tầng 29 của tòa nhà là $\vec{b}$.

Vì hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều dịch chuyển từ tầng thấp lên tầng cao nên hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có cùng hướng (1).

Độ dài vector $\vec{a}$ là: $|\vec{a}| = 7$, độ dài vector $\vec{b}$ là: $|\vec{b}| = 7$ nên $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 7$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\vec{a} = \vec{b}$. Vậy các vector biểu diễn độ dịch chuyển của thang máy trong hai lần di chuyển đó có bằng nhau.

Ví dụ 3: Hình 2.15 mô tả một lọ hoa được đặt trên bàn, trọng lượng của lọ hoa tạo nên một lực tác dụng lên mặt bàn và một phản lực từ mặt bàn lên lọ hoa. Có nhận xét về độ dài và hướng của các vector biểu diễn hai lực đó.



Hình 2.15

Lời giải

Các vector biểu diễn hai lực đó có độ dài bằng nhau và hướng của chúng là ngược nhau.

Ví dụ 4: Thang cuốn tại các trung tâm thương mại, siêu thị hay nhà ga, sân bay thường có hai lần, trong đó một lần lên và một lần xuống. Khi thang cuốn chuyển động, vector biểu diễn vận tốc của mỗi lần có là hai vector đối nhau không? Giải thích vì sao.



Lời giải

Vector biểu diễn vận tốc của mỗi làn có cùng độ lớn và hướng ngược nhau nên chúng là hai vector đối nhau.

Ví dụ 5: Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của bốn lực chính: lực đẩy của động cơ, lực cản của không khí, trọng lực và lực nâng khí động học (H.2.20). Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc máy bay tăng vận tốc từ 900 km/h lên 920 km/h, trong quá trình tăng tốc máy bay giữ nguyên hướng bay. Lực cản của không khí khi máy bay đạt vận tốc 900 km/h và 920 km/h lần lượt được biểu diễn bởi hai vector $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$. Hãy giải thích vì sao $\vec{F}_1 = k\vec{F}_2$ với k là một số thực dương nào đó. Tính giá trị của k (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



Hình 2.20

Lời giải

Vì trong quá trình máy bay tăng vận tốc từ 900 km/h lên 920 km/h máy bay giữ nguyên hướng bay nên vector $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ có cùng hướng. Do đó, $\vec{F}_1 = k\vec{F}_2$ với k là một số thực dương nào đó (1).

Gọi v_1, v_2 lần lượt là vận tốc của của chiếc máy bay khi đạt 900 km/h và 920 km/h.

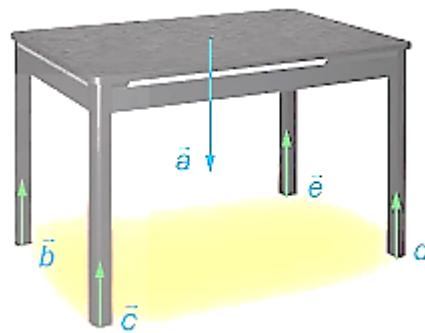
Suy ra $v_1 = 900$ (km/h), $v_2 = 920$ (km/h)

vì lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay nên

$$\frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}_2|} = \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{900^2}{920^2} = \frac{2025}{2116} \Rightarrow |\vec{F}_1| = \frac{2025}{2116} |\vec{F}_2|$$

Từ (1) và (2) ta có: $\vec{F}_1 = \frac{2025}{2116} \vec{F}_2 \Rightarrow k = \frac{2025}{2116} \approx 0,96$

Ví dụ 6: Một chiếc bàn cân đối hình chữ nhật được đặt trên mặt sàn nằm ngang, mặt bàn song song với mặt sàn và bốn chân bàn vuông góc với mặt sàn như Hình 2.29. Trọng lực tác dụng lên bàn (biểu thị bởi vector $\vec{a}$) phân tán đều qua bốn chân bàn và gây nên các phản lực từ mặt sàn lên các chân bàn (biểu thị bởi các vector $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$).



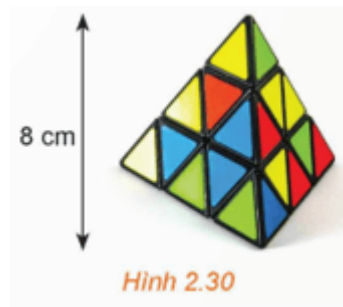
Hình 2.29

- Hãy chỉ ra mối quan hệ về phương và hướng của các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ và $\vec{e}$.
- Giải thích vì sao các vector $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ đôi một bằng nhau.

Lời giải

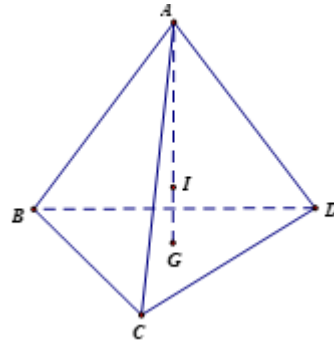
- Các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ và $\vec{e}$ có cùng phương; các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ cùng hướng với nhau và ngược hướng với vector $\vec{e}$.
- Vì trọng lực tác dụng lên bàn phân tán đều qua bốn chân bàn và gây nên các phản lực từ mặt sàn lên các chân bàn nên các vector $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ có độ lớn bằng nhau. Mà các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ cùng hướng với nhau. Do đó, các vector $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ đôi một bằng nhau.

Ví dụ 7. Ta đã biết trọng tâm của tứ diện $ABCD$ là một điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{IG}$, ở đó G là trọng tâm của tam giác BCD . Áp dụng tính chất trên để tính khoảng cách từ trọng tâm của một khối rubik (đồng chất) hình tứ diện đều đến một mặt của nó, biết rằng chiều cao của khối rubik là 8 cm (H.2.30).



Hình 2.30

Lời giải



Giả sử khối rubik (đồng chất) hình tứ diện đều được mô phỏng như hình vẽ.

G là trọng tâm DBCD, I là trọng tâm của tứ diện

Vì $ABCD$ là hình tứ diện đều nên $AG \perp (BCD)$ và $AG = 8 \text{ cm}$.

vi $\overline{AI} = 3\overline{IG}$ nên 3 điểm A, I, G thẳng hàng và $IG = \frac{1}{4}AG$.

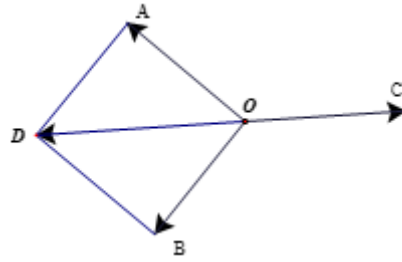
Do đó $IG \perp (BCD)$. Khi đó $d(I, (BCD)) = IG = \frac{1}{4}AG = 2 \text{ cm}$.

Ví dụ 8: Ba sợi dây không giãn với khối lượng không đáng kể được buộc chung một đầu và được kéo căng về ba hướng khác nhau (H.2.31). Nếu các lực kéo làm cho ba sợi dây ở trạng thái đứng yên thì khi đó ba sợi dây nằm trên cùng một mặt phẳng. Hãy giải thích vì sao.



Hình 2.31

Lời giải



Giả sử lực kéo trên mỗi sợi dây được biểu diễn bởi các vector $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ với là đầu chung của ba sợi dây. Khi ba sợi dây cân bằng thì $\overrightarrow{O} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$.

Vẽ hình bình hành OADB.

Theo quy tắc hình bình hành thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$.

Do đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OD}$.

D. TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

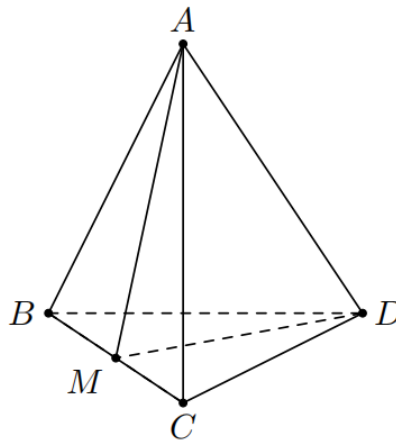
B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

D. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Lời giải

Chọn B



+ Gọi M là trung điểm của $CD \rightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BM}$.

$$+ \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$$

$$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$$

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi M là trung điểm của đoạn BC . Đẳng thức nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c})$.

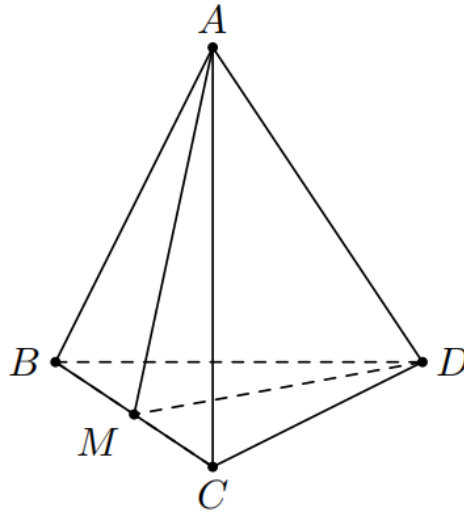
B. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c})$.

C. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c})$.

D. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c})$.

Lời giải

Chọn A



+ Vì M là trung điểm của $BC \rightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

$$\begin{aligned} + \overrightarrow{DM} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}) \end{aligned}$$

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} + \vec{b})$.

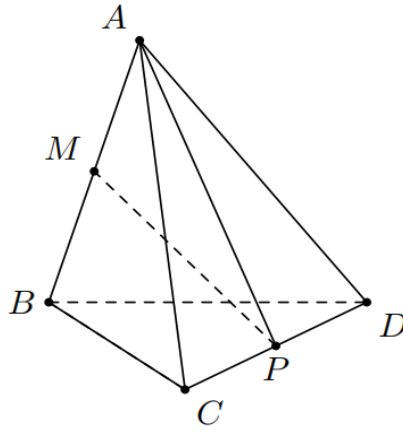
B. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{b} - \vec{c})$.

C. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} - \vec{d})$.

D. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b})$.

Lời giải

Chọn D



$$+ \text{ Vì } M, P \text{ lần lượt là trung điểm của } AB, CD \rightarrow \begin{cases} 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AP} \end{cases}$$

$$+ \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b})$$

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_o là giao điểm của GA và mặt phẳng (BCD) . Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{G_oG}$.

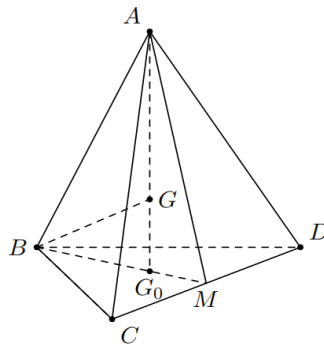
B. $\overrightarrow{GA} = 4\overrightarrow{G_oG}$.

C. $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{G_oG}$.

D. $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{G_oG}$.

Lời giải

Chọn C



+ Vì G_o là giao điểm của AG và mặt phẳng (BCD)

$\rightarrow G_o$ là trọng tâm tam giác BCD .

$$\rightarrow \overrightarrow{G_oB} + \overrightarrow{G_oC} + \overrightarrow{G_oD} = \vec{0}.$$

$$+ \text{ Mà } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GG_o} + \overrightarrow{G_oB} + \overrightarrow{G_oC} + \overrightarrow{G_oD} = \vec{0}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GG_o} = \vec{0} \rightarrow \overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{G_oG}.$$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$.

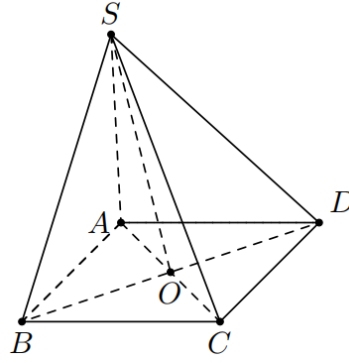
B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

C. $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$.

D. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$.

Lời giải

Chọn A



+ Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$

$$\rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO} = \vec{a} + \vec{c} \\ \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO} = \vec{b} + \vec{d} \end{cases}$$

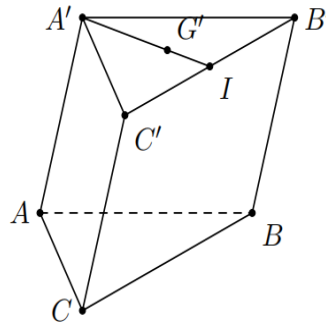
$$\rightarrow \vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$$

Câu 6: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Vectơ $\overrightarrow{AG'}$ bằng?

- A.** $\frac{1}{3}(\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c})$. **B.** $\frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. **C.** $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c})$. **D.** $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Lời giải

Chọn B



+ Gọi I là trung điểm $B'C'$.

+ Vì G' là trọng tâm tam giác $A'B'C' \rightarrow \overrightarrow{A'G'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A'I}$.

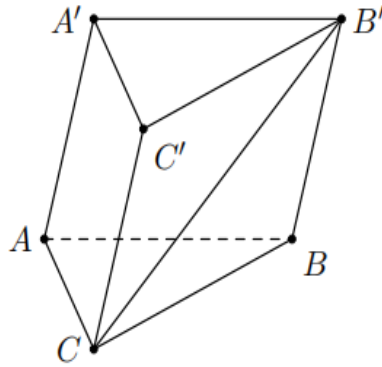
$$\begin{aligned} + \overrightarrow{AG'} &= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G'} = \overrightarrow{AA'} + \frac{2}{3}\overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C'}) \\ &= \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(3\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}). \end{aligned}$$

Câu 7: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{B'C}$ theo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

- A.** $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.
C. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Lời giải

Chọn D



+ Vì $BB'C'C$ là hình bình hành nên
 $\rightarrow \overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AA'}$
 $= -\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
 $= -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.$

Câu 8: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của cạnh BB' . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}.$

B. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}.$

C. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}.$

D. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}.$

Lời giải

Chọn C

+ Vì M là trung điểm $BB' \rightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}.$

$$+ \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = -\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

Câu 9: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O . Gọi I là tâm của hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CA'} = \vec{v}$, $\overrightarrow{BD'} = \vec{x}$, $\overrightarrow{DB'} = \vec{y}$. Khi đó:

A. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}).$

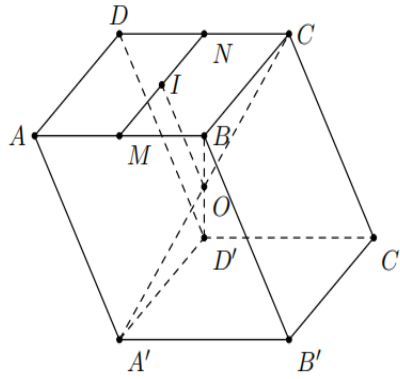
B. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}).$

C. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}).$

D. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}).$

Lời giải

Chọn A



+ Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CD

$$\rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{ON} \end{cases}.$$

+ Vì I là trung điểm $MN \rightarrow \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OI}$.

$$\begin{aligned} \rightarrow 2\overrightarrow{OI} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB'}\right) \\ &= -\frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}). \end{aligned}$$

Câu 10: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$. **B.** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. **C.** $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. **D.** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$.

Lời giải

Chọn C

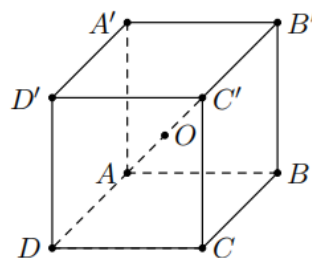
$$+ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \leftrightarrow \vec{d} = \vec{c} - \vec{b} \leftrightarrow \vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}.$$

Câu 11: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$. **B.** $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.
C. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$. **D.** $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.

Lời giải

Chọn B



$$+ \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$$

$$+ O \text{ là trung điểm } AC' \rightarrow \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC'} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$$

Câu 12: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AC'}$ theo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

A. $\overrightarrow{AC'} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

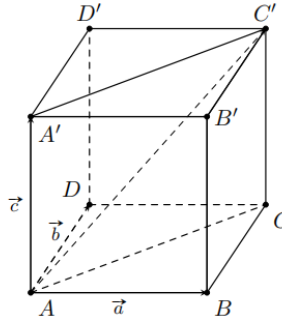
B. $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

C. $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

D. $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$. Điểm N xác định bởi đẳng thức sau $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào đúng?

A. N là trung điểm BD .

B. N là đỉnh hình bình hành $BCDN$.

C. N là đỉnh hình bình hành $CDBN$.

D. $N \equiv A$.

Lời giải

Chọn C

+ Ta có $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{DC}$.

$\rightarrow N$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CDBN$.

Câu 14: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm được xác định bởi đẳng thức sau $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MD'} = \vec{0}$. Mệnh đề nào đúng?

A. M là tâm mặt đáy $ABCD$.

B. M là tâm mặt đáy $A'B'C'D'$.

C. M là trung điểm đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy.

D. tập hợp điểm M là đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy.

Lời giải

Chọn C

+ Gọi $O = AC \cap BD$ và $O' = A'C' \cap B'D' \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \\ \overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{O'B'} + \overrightarrow{O'C'} + \overrightarrow{O'D'} = \vec{0} \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{MO} \\ \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MD'} = 4\overrightarrow{MO'} + \overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{O'B'} + \overrightarrow{O'C'} + \overrightarrow{O'D'} = 4\overrightarrow{MO'} \end{cases}$

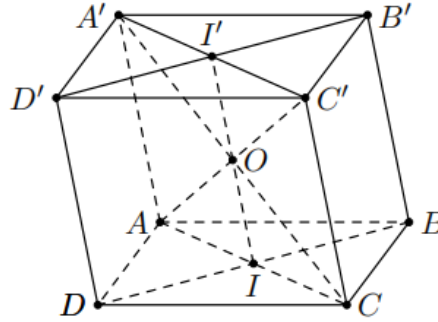
$\rightarrow 4\overrightarrow{MO} + 4\overrightarrow{MO'} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO'} = \vec{0} \rightarrow M$ là trung điểm của OO' .

Câu 15: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Điểm M xác định bởi đẳng thức $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. M là trung điểm BB' .
 B. M là tâm hình bình hành $BCC'B'$.
 C. M là trung điểm CC' .
 D. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$.

Lời giải

Chọn A



+ Gọi I, I' lần lượt là tâm các mặt đáy $ABCD, A'B'C'D'$.

→ O là trung điểm II' .

$$+ \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{MB}.$$

→ M là trung điểm BB' .

Câu 16: Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Điều kiện nào dưới đây khẳng định $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng?

- A. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m + n + p = 0$ và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.
 B. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m + n + p \neq 0$ và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.
 C. Tồn tại ba số thực m, n, p sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.
 D. Giá của $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng qui.

Lời giải

Chọn B

+ Xét $m = n = p = 0$ ta luôn có $m + n + p = 0$ và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ nhưng không thể suy ra được $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

+ Xét $m + n + p \neq 0$ thì chắc chắn có một trong ba số m, n, p khác 0.

$$\text{Giả sử } m \neq 0 \rightarrow m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0} \leftrightarrow \vec{a} = -\frac{n}{m}\vec{b} - \frac{p}{m}\vec{c} \rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ đồng phẳng.}$$

Câu 17: Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ và $\vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng.
 B. $\vec{x}, \vec{a}$ cùng phương.
 C. $\vec{x}, \vec{b}$ cùng phương.
 D. $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đôi một cùng phương.

Lời giải

Chọn A

+ Giả sử ba vector $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng khi đó $\rightarrow x = m\vec{y} + n\vec{z}$.

$$\Leftrightarrow 2\vec{a} + \vec{b} = m\vec{a} - (m+3n)\vec{b} - (m+2n)\vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m+3n = -1 \\ m+2n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = -1 \end{cases}.$$

Vậy $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng.

Câu 18: Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$ và $\vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 6\vec{c}$ và $\vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 6\vec{c}$ đồng phẳng.

B. $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$ và $\vec{y} = 3\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$ và $\vec{z} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 3\vec{c}$ đồng phẳng.

C. $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ và $\vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ và $\vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 3\vec{c}$ đồng phẳng.

D. $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ và $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ và $\vec{z} = -\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn A

+ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $\exists m, n : \vec{x} = m\vec{y} + n\vec{z}$.

$$\text{Với } \begin{cases} \vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c} \\ \vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 6\vec{c} \\ \vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 6\vec{c} \end{cases} \rightarrow \vec{x} = \frac{4}{3}\vec{y} + \frac{5}{3}\vec{z} \rightarrow \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \text{ đồng phẳng.}$$

Câu 19: Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu một trong ba vector đó bằng $\vec{0}$.

B. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu có hai trong ba vector đó cùng phương.

C. Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ba vector $\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{DA'}$ đồng phẳng.

D. $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ luôn đồng phẳng với hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải

Chọn D

+ Giả sử cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và gọi M là trung điểm $C'D'$ khi đó:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM} \rightarrow \overrightarrow{AM} \text{ không đồng phẳng với } \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}.$$

Câu 20: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và các điểm M, N, P xác định bởi $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB'} (k \neq 0), \overrightarrow{NB} = x\overrightarrow{NC'}, \overrightarrow{PC} = y\overrightarrow{PD'}$. Hãy tính x, y theo k để ba điểm M, N, P thẳng hàng.

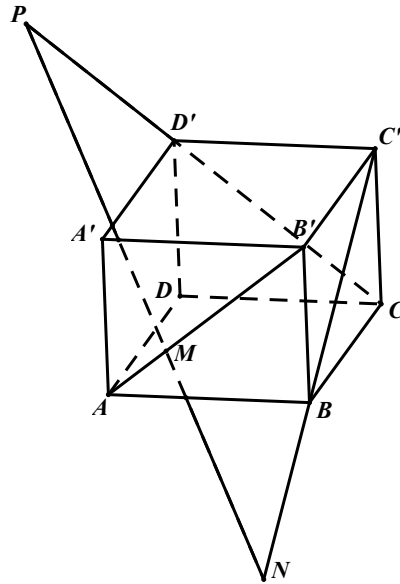
A. $x = \frac{2+k}{2-k}, y = -\frac{2}{k}$

B. $x = \frac{1+2k}{1-2k}, y = -\frac{1}{2k}$

C. $x = \frac{\frac{1}{2}+k}{2-k}, y = -\frac{1}{2k}$

D. $x = \frac{1+k}{1-k}, y = -\frac{1}{k}$

Lời giải



Chọn D

Đặt $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$.

Từ giả thiết ta có: $\overrightarrow{AM} = \frac{k}{k-1}(\vec{b} + \vec{c})$ (1), $\overrightarrow{AN} = \vec{b} + \frac{x}{x-1}(\vec{a} + \vec{c})$ (2)

, $\overrightarrow{AP} = \vec{a} + \vec{b} + \frac{y}{y-1}(\vec{c} - \vec{b})$ (3).

Từ đó ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{x}{x-1}\vec{a} - \frac{1}{k-1}\vec{b} + \left(\frac{x}{x-1} - \frac{k}{k-1}\right)\vec{c} + \left(\frac{x}{x-1} - \frac{y}{y-1}\right)\vec{c}$.

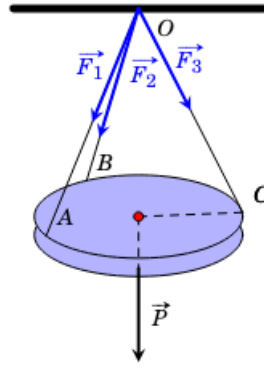
$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = \vec{a} - \left(\frac{y}{y-1} + \frac{1}{k-1}\right)\vec{b} + \left(\frac{y}{y-1} - \frac{k}{k-1}\right)\vec{c}$

Ba điểm M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại λ sao cho $\overrightarrow{MN} = \lambda \overrightarrow{MP}$ (*).

Thay các vec tơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}$ vào (*) và lưu ý $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng ta tính được

$$x = \frac{1+k}{1-k}, y = -\frac{1}{k}.$$

Câu 21: Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15$ (N). Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.



A. $14\sqrt{3}(\text{N})$.

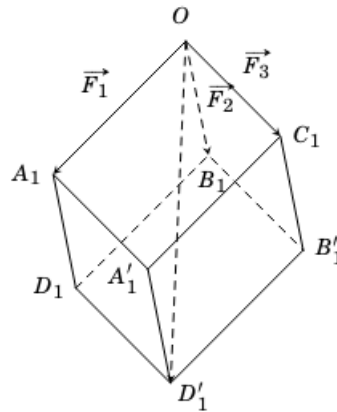
B. $15\sqrt{3}(\text{N})$.

C. $17\sqrt{3}(\text{N})$.

D. $16\sqrt{3}(\text{N})$.

Lời giải

Chọn B



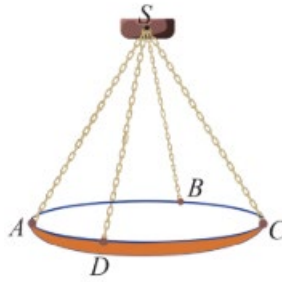
Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{OA_1} = \vec{F}_1, \overrightarrow{OB_1} = \vec{F}_2, \overrightarrow{OC_1} = \vec{F}_3$. Lấy các điểm D_1, A'_1, B'_1, D'_1 sao cho $OA_1D_1B_1 \cdot C_1A'_1D'_1B'_1$ là hình hộp (như hình bên). Khi đó, áp dụng quy tắc hình hộp ta có

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OD'_1}.$$

Mặt khác, do các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ đôi một vuông góc và $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15(\text{N})$ nên hình hộp $OA_1D_1B_1 \cdot C_1A'_1D'_1B'_1$ có ba cạnh OA_1, OB_1, OC_1 đôi một vuông góc và bằng nhau. Vì thế hình hộp đó là hình lập phương có độ dài cạnh bằng 15. Suy ra độ dài đường chéo OD'_1 của hình lập phương đó bằng $15\sqrt{3}$.

Do chiếc đèn ở vị trí cân bằng nên $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{P}$, σ đó $\vec{P}$ là trọng lực tác dụng lên chiếc đèn. Suy ra trọng lượng của chiếc đèn là $|\vec{P}| = |\overrightarrow{OD'_1}| = 15\sqrt{3}(\text{N})$

Câu 22: Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m = 5\text{ kg}$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC} = 60^\circ$. Tìm độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích. Lấy $g = 10\text{ m/s}^2$.



A. $\frac{15\sqrt{3}}{3} \text{ N.}$

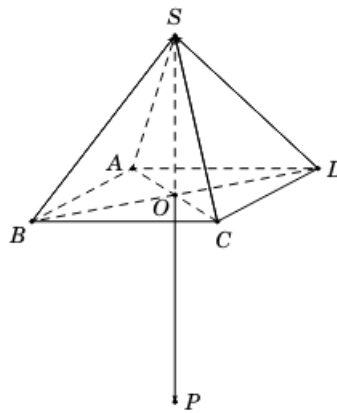
B. $\frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ N.}$

C. $\frac{25\sqrt{3}}{3} \text{ N.}$

D. $\frac{30\sqrt{3}}{3} \text{ N.}$

Lời giải

Chọn D



- Ta có $\vec{P} = m\vec{g}$ nên $|\vec{P}| = m \cdot |\vec{g}| = 5 \cdot 10 = 50 \text{ N.}$

Vậy độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm là 50 N.

- Gọi O là trọng tâm của chiếc đèn chùm cũng là chân đường cao hình chóp đều $S \cdot ABCD$.
Vẽ $\overrightarrow{OP}$ biểu diễn trọng lực tác động lên đèn chùm với

$OP \perp (ABCD).$

Khi đó lực căng mỗi sợi xích sẽ là $\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CS}, \overrightarrow{DS}$.

Chiếc đèn chùm đứng yên nên $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{DS} + \overrightarrow{OP} = \vec{0}$.

Câu 23: Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vector $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$.

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Lời giải

Chọn A

Do $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng nên $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \longrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$.

Vậy $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Câu 24: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

- A. $\alpha = 180^\circ$. B. $\alpha = 0^\circ$. C. $\alpha = 90^\circ$. D. $\alpha = 45^\circ$.

Lời giải

Chọn A

Mà theo giả thiết $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, suy ra $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$

Câu 25: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$

- A. $\alpha = 30^\circ$. B. $\alpha = 45^\circ$. C. $\alpha = 60^\circ$. D. $\alpha = 120^\circ$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \longrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3}{3 \cdot 2} = -\frac{1}{2} \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$

Câu 26: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và hai vector $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- A. $\alpha = 90^\circ$. B. $\alpha = 180^\circ$. C. $\alpha = 60^\circ$. D. $\alpha = 45^\circ$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \longrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}\right) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5}\vec{a}^2 - \frac{13}{5}\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b}^2 = 0$
 $\xrightarrow{|\vec{a}|=|\vec{b}|=1} \vec{a} \cdot \vec{b} = -1$

Suy ra $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = -1 \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$

Câu 27: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn điều kiện $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$. Độ dài vector $3\vec{a} + 5\vec{b}$:

- A. $5\sqrt{5}$. B. $\sqrt{24}$. C. 8. D. 124.

Lời giải

Chọn B

$(3\vec{a} + 5\vec{b})^2 = 9\vec{a}^2 + 30\vec{a} \cdot \vec{b} + 25\vec{b}^2 = 9 + 90 + 25 = 124.$

$\Rightarrow |3\vec{a} + 5\vec{b}| = \sqrt{124}$

Câu 28: Cho $\vec{a}$, $\vec{b}$ có $(\vec{a} + 2\vec{b})$ vuông góc với vector $(5\vec{a} - 4\vec{b})$ và $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Khi đó:

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$. **C.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

+Vi $(\vec{a} + 2\vec{b})$ vuông góc với vector $(5\vec{a} - 4\vec{b})$ nên:

$$(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow 5\vec{a}^2 - 8\vec{b}^2 + 6\vec{a}\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b} = \frac{-5\vec{a}^2 + 8\vec{b}^2}{6}.$$

Ta có $|\vec{a}| = |\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2$. Suy ra $\vec{a}\vec{b} = \frac{3\vec{a}^2}{6}$

$$+ \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\frac{3\vec{a}^2}{6}}{\vec{a}^2} = \frac{1}{2}.$$

Câu 29: Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vector $\vec{a}, \vec{b}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos \alpha = \frac{3}{8}$. **B.** $\alpha = 30^\circ$. **C.** $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. **D.** $\alpha = 60^\circ$.

Lời giải

Chọn A

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\vec{b} \Rightarrow \vec{a}\vec{b} = \frac{9}{2}.$$

Do đó: $\cos \alpha = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{3}{8}.$

Câu 30: $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là 2 vector đều khác $\vec{0}$. Khi đó $|\vec{u} + 2\vec{v}|^2$ bằng

A. $\vec{u}^2 + 2\vec{v}^2 - 4\vec{u}\vec{v}$. **B.** $\vec{u}^2 + 4\vec{v}^2 + 4\vec{u}\vec{v}$. **C.** $\vec{u}^2 + 4\vec{v}^2$. **D.** $4\vec{u}\vec{v}(\vec{u} - \vec{v})$.

Lời giải

Chọn C

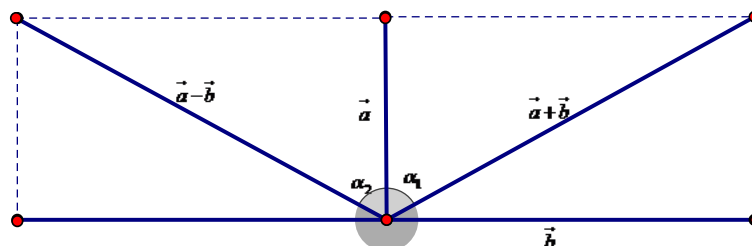
Ta có $|\vec{u} + 2\vec{v}|^2 = (\vec{u} + 2\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 4\vec{v}^2 + 4\vec{u}\vec{v}.$

Câu 31: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 12$ và $|\vec{a} + \vec{b}| = 13$. Khi đó cosin của góc giữa hai vector $\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{a} + \vec{b}$ bằng

A. $\frac{12}{13}$. **B.** $\frac{5}{12}$. **C.** $-\frac{119}{169}$. **D.** $\frac{119}{169}$.

Lời giải

Chọn C



Nhận thấy $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ suy ra $\vec{a} \perp \vec{b}$

$$\text{Mặt khác: } \cos(\alpha_2) = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a} + \vec{b}|} = \frac{5}{13} \Rightarrow \alpha_2 = \cos^{-1} \frac{5}{13}.$$

Do đó góc giữa hai vector $\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{a} + \vec{b}$ bằng $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha_2 = 2 \cdot \cos^{-1} \frac{5}{13}$

$$\text{Vậy } \cos(\widehat{\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}}) = \cos\left(2 \cdot \cos^{-1} \frac{5}{13}\right) = -\frac{119}{169}.$$

Câu 32: Cho $\vec{u} = \vec{a} + 3\vec{b}$ vuông góc với $\vec{v} = 7\vec{a} - 5\vec{b}$ và $\vec{x} = \vec{a} - 4\vec{b}$ vuông góc với $\vec{y} = 7\vec{a} - 2\vec{b}$. Khi đó góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

- A.** $(\vec{a}, \vec{b}) = 75^\circ$. **B.** $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. **C.** $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. **D.** $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \\ \vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (7\vec{a} - 5\vec{b}) = 0 \\ (\vec{a} - 4\vec{b}) \cdot (7\vec{a} - 2\vec{b}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7|\vec{a}|^2 - 15|\vec{b}|^2 = -16\vec{a} \cdot \vec{b} \\ 7|\vec{a}|^2 + 8|\vec{b}|^2 = 30\vec{a} \cdot \vec{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{b}|^2 = 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ |\vec{a}|^2 = 2\vec{a} \cdot \vec{b} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{b}|^2 = 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{cases}. \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó, ta có: } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$$

Câu 33: Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; \vec{a} \cdot \vec{b} = 10$. Xét hai vector $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b}$ $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}$,. Gọi α là góc giữa hai vector $\vec{x}, \vec{y}$. Chọn khẳng định đúng.

- A.** $\cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{15}}$. **B.** $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$. **C.** $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{15}}$. **D.** $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{15}}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \vec{x} \cdot \vec{y} = (\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = (\vec{a})^2 + 2(\vec{b})^2 - 3\vec{a} \cdot \vec{b} = 4.$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x})^2} = \sqrt{(\vec{a} - 2\vec{b})^2} = \sqrt{(\vec{a})^2 + 4(\vec{b})^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b}} = 2\sqrt{3}.$$

$$|\vec{y}| = \sqrt{(\vec{y})^2} = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})^2} = \sqrt{(\vec{a})^2 + (\vec{b})^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}} = \sqrt{5}.$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} = \frac{4}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{15}}$$

Câu 34: Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 26; |\vec{b}| = 28; |\vec{a} + \vec{b}| = 48$. Độ dài vector $\vec{a} - \vec{b}$ bằng?

A. 25.

B. $\sqrt{616}$.

C. 9.

D. $\sqrt{618}$.

Lời giải

Chọn B

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 2(\vec{a}^2 + \vec{b}^2) - (\vec{a} + \vec{b})^2$$

$$= 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) - |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 2(26^2 + 28^2) - 48^2 = 616$$

$$\Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{616}.$$

Câu 35: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$?

A. 60° .

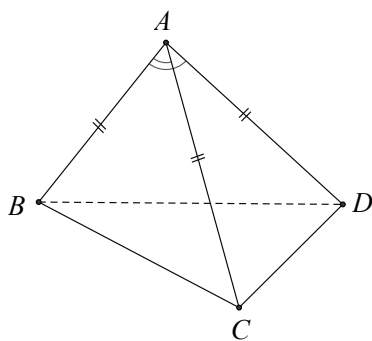
B. 45° .

C. 120° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn D



Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \\ &= AB.AD.\cos 60^\circ - AB.AC.\cos 60^\circ = 0 \\ \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) &= 90^\circ\end{aligned}$$

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$?

A. 120° .

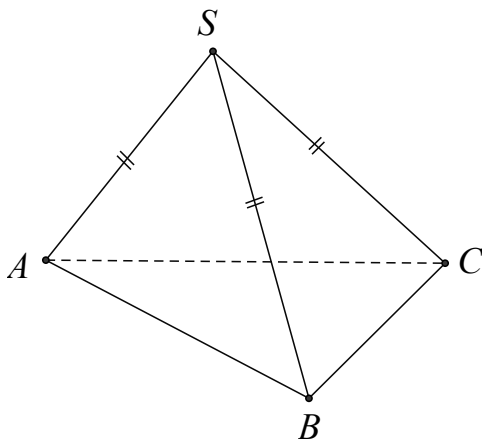
B. 90° .

C. 60° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn B



Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{SA}.(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}) = \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} \\ &= SA.SC.\cos \widehat{ASC} - SA.SB.\cos \widehat{ASB} = 0 \\ \Rightarrow (\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}) &= 90^\circ\end{aligned}$$

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD . Số đo của góc (MN, SC) bằng:

A. 45°

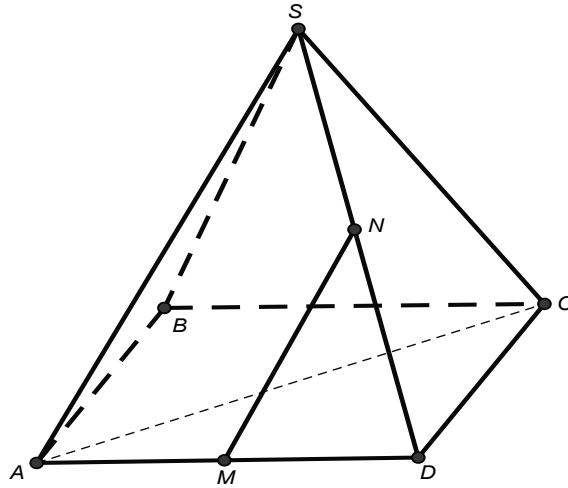
B. 30°

C. 90°

D. 60°

Lời giải

Chọn C



Ta có: $AC = a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow AC^2 = 2a^2 = SA^2 + SC^2$$

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S .

$$\text{Khi đó: } \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{SC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{SC}) = 90^\circ \Rightarrow (MN, SC) = 90^\circ$$

Câu 38: Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD . Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu?

A. 0° .

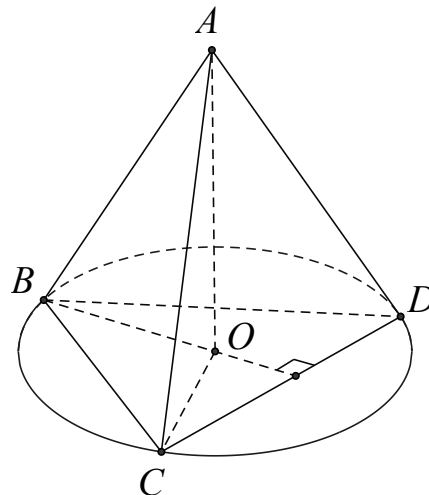
B. 30° .

C. 90° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn C



Ta có $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{CD}$

$$\begin{aligned}
&= \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = CO \cdot CD \cdot \cos 30^\circ - CA \cdot CD \cdot \cos 60^\circ \\
&= \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Suy ra $AO \perp CD$.

Câu 39: Cho tứ diện $ABCD$ với $AB \perp AC$, $AB \perp BD$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD . Góc giữa PQ và AB là?

- A.** 90° . **B.** 60° . **C.** 30° . **D.** 45° .

Lời giải

Chọn A

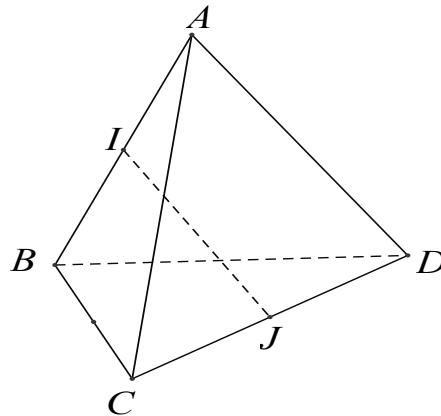
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ} \Rightarrow AB \perp PQ$$

Câu 40: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ, \widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

- A.** 120° . **B.** 90° . **C.** 60° . **D.** 45° .

Lời giải

Chọn B



Xét tam giác ICD có J là trung điểm đoạn CD .

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID})$$

Vì tam giác ABC có $AB = AC$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$

Nên tam giác ABC đều. Suy ra: $CI \perp AB$

Tương tự ta có tam giác ABD đều nên $DI \perp AB$.

$$\text{Xét } \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Suy ra $\overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{AB}$. Hay góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$ bằng 90° .

Câu 41: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. AB và CD chéo nhau

B. AB và CD vuông góc với nhau

C. AB và CD đồng phẳng

D. AB và CD cắt nhau

Lời giải

Chọn B

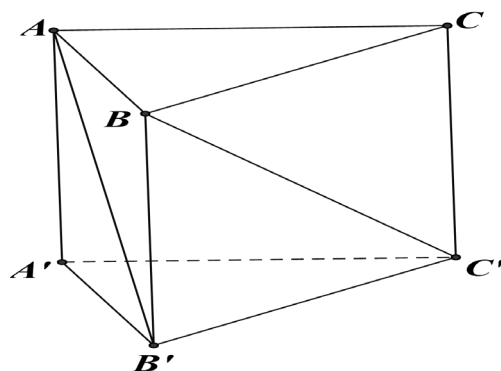
Đặt $AB = AD = AC = a$

Ta có $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB}$

$$= |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD}| \cos 60^\circ - |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos 60^\circ = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} - a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Vậy $AB \perp CD$.

Câu 42: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = \sqrt{2}a$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng



A. 60° .

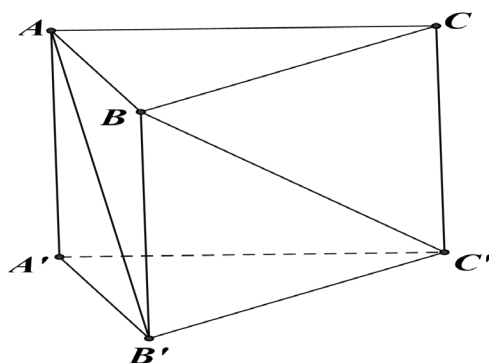
B. 45° .

C. 90° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn A



Ta có $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{CC'}$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{CC'} = -\frac{a^2}{2} + 0 + 0 + 2a^2 = \frac{3a^2}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}) = \frac{\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'}}{|\overrightarrow{AB'}| \cdot |\overrightarrow{BC'}|} = \frac{\frac{3a^2}{2}}{a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{(AB', BC')} = 60^\circ.$$

Câu 43: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a . Gọi M là trung điểm AD . Giá trị $\overrightarrow{B_1M} \cdot \overrightarrow{BD_1}$ là:

A. $\frac{1}{2}a^2$.

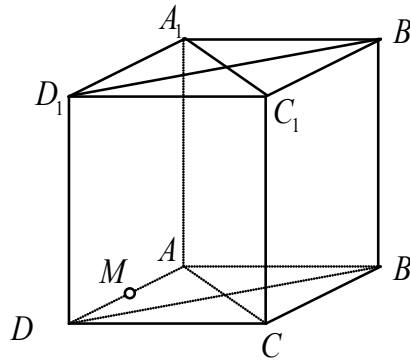
B. a^2 .

C. $\frac{3}{4}a^2$.

D. $\frac{3}{2}a^2$.

Lời giải

Chọn A



$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{B_1M} \cdot \overrightarrow{BD_1} &= (\overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1}) \\ &= \overrightarrow{B_1B} \cdot \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= -a^2 + a^2 + \frac{a^2}{2} \\ &= \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

Câu 44: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

A. 90°

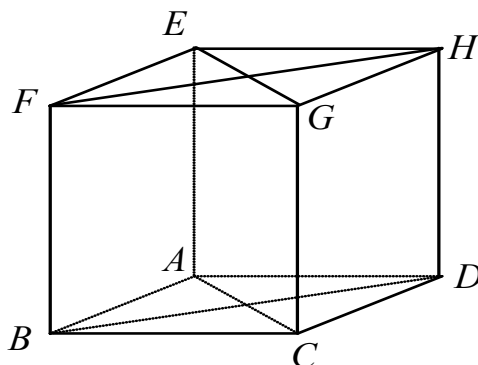
B. 60°

C. 45°

D. 120°

Lời giải

Chọn C



Ta có: $EG \parallel AC$ (do $ACGE$ là hình chữ nhật)

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 45^\circ$$

Câu 45: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BB' . Cosin của góc hợp bởi MN và AC' bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

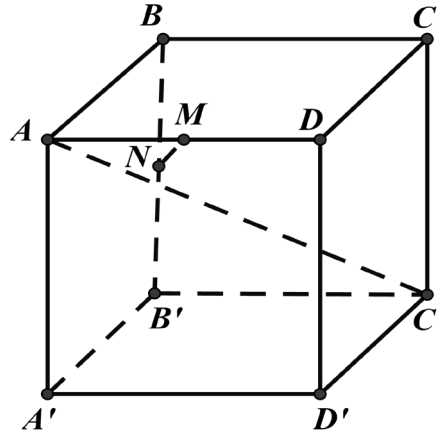
B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



* Xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a .

* Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AA'}$ $\Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$.

* Ta có:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{AM} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \Rightarrow |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \Rightarrow |\overrightarrow{AC'}| = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{MN} = a^2 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 = a^2$$

$$\cos(MN; AC') = \left| \cos(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{AC'}) \right| = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC'}|}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{AC'}|} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Câu 46: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , tam giác $A'BC$ đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) . M là trung điểm cạnh CC' . Tính cosin góc α giữa hai đường thẳng AA' và BM .

A. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{22}}{11}$.

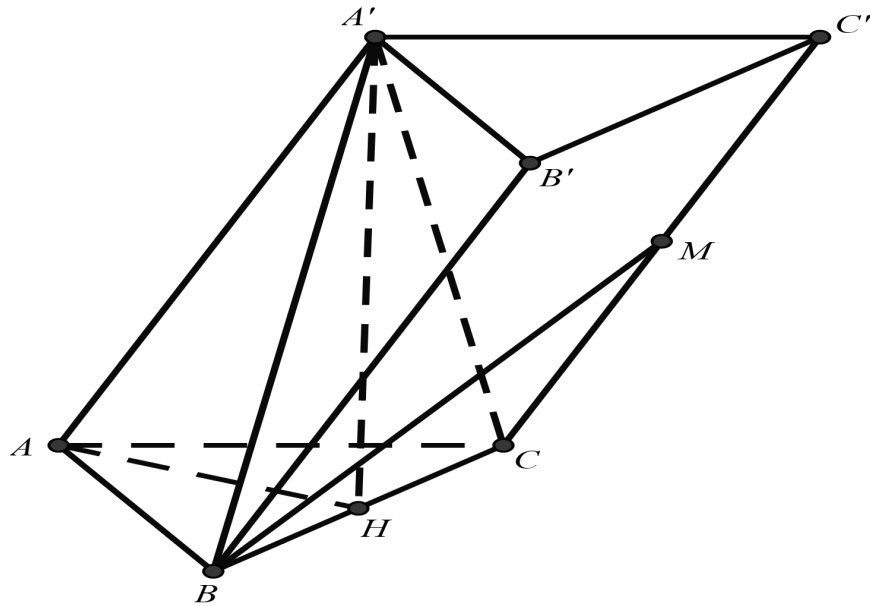
B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{33}}{11}$.

C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{11}}{11}$.

D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{22}}{11}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $AH = A'H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AH \perp BC, A'H \perp BC \Rightarrow BC \perp (AA'H) \Rightarrow BC \perp AA'$ hay

$BC \perp BB'$. Do đó: $BCC'B'$ là hình chữ nhật.

Khi đó: $CC' = AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow BM = \sqrt{a^2 + \frac{a^2 \cdot 6}{16}} = a \frac{\sqrt{22}}{4}$.

Xét: $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AA'} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}) = 0 + AA' \cdot CM = \frac{3a^2}{4}$.

Suy ra $\cos(AA', BM) = \frac{\left| \frac{3a^2}{4} \right|}{\frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{22}}{4}} = \frac{\sqrt{33}}{11}$.

Câu 47: Cho tam giác ABC , thì công thức tính diện tích nào sau đây là đúng nhất.

- | | | | |
|-----------|--|-----------|--|
| A. | $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - BC^2}$ | B. | $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 + \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$ |
| C. | $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$ | D. | $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$ |

Lời giải

Chọn D

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB AC \sin A = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 \sin^2 A} = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 (1 - \cos^2 A)}$$

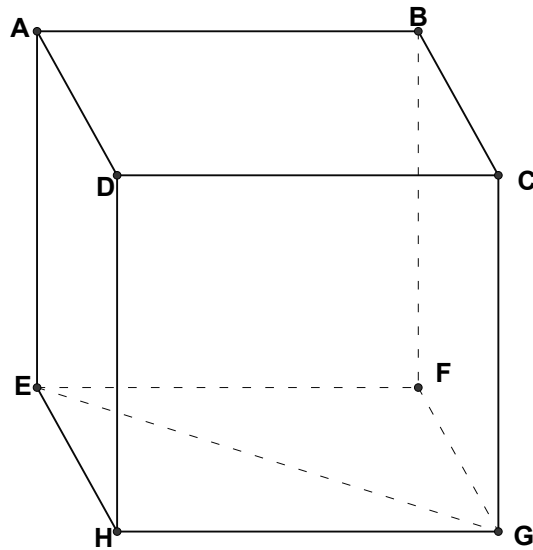
$$= \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$$

Câu 48: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a . Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$ bằng?

- A. $a^2 \sqrt{2}$. B. a^2 . C. $a^2 \sqrt{3}$. D. $\frac{a^2 \sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



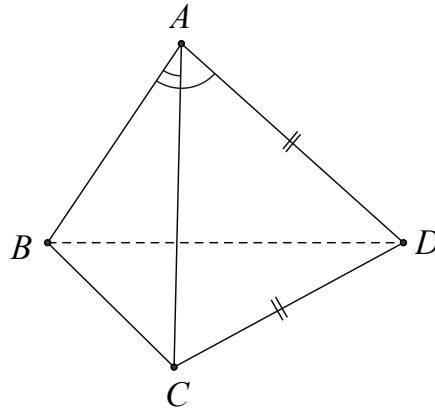
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \quad (\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}) = a^2 \quad (\text{Vì } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD})$$

Câu 49: Cho tứ diện $ABCD$ với $AC = \frac{3}{2} AD$, $\widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^\circ$, $CD = AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD . Chọn khẳng định đúng?

- A. $\cos \varphi = \frac{3}{4}$. B. $\varphi = 60^\circ$. C. $\varphi = 30^\circ$. D. $\cos \varphi = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{AB \cdot CD}$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ - AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ \\ &= AB \cdot AD \cdot \frac{1}{2} - AB \cdot \frac{3}{2} AD \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} AB \cdot AD = -\frac{1}{4} AB \cdot CD. \end{aligned}$$

Do có $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{-\frac{1}{4} AB \cdot CD}{AB \cdot CD} = -\frac{1}{4}$. Suy ra $\cos \varphi = \frac{1}{4}$.

Câu 50: Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM})$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

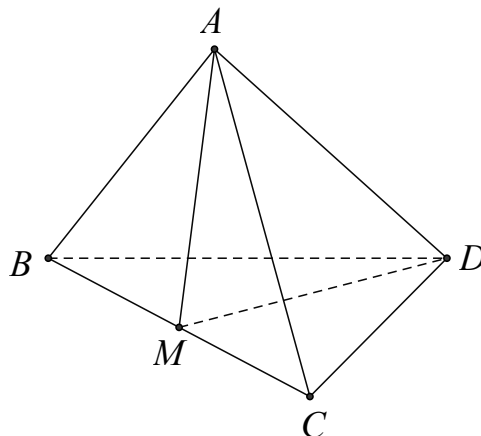
B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử cạnh của tứ diện là a .

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{DM}|} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM}}{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

Ta có

Mặt khác

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \cdot AM \cdot \cos 30^\circ - AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ \\ &= a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4}.\end{aligned}$$

$$\text{Do có } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}) = \frac{\sqrt{3}}{6}. \text{ Suy ra } \cos(AB, DM) = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

F. TRẢ LỜI ĐÚNG SAI

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G . Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?

A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

B. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$

C. $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}$

D. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. Đ	D. S
-------------	-------------	-------------	-------------

☐ Theo công thức vì G là trọng tâm tứ diện $ABCD \rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ nên A đúng

☐ Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OG}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DG}) \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \text{ nên B đúng}\end{aligned}$$

☐ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = -\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{BG}$ nên C đúng

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{AO} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{AO} + \frac{1}{4}(4\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \rightarrow D \text{ sai}\end{aligned}$$

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm MN . Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?

A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

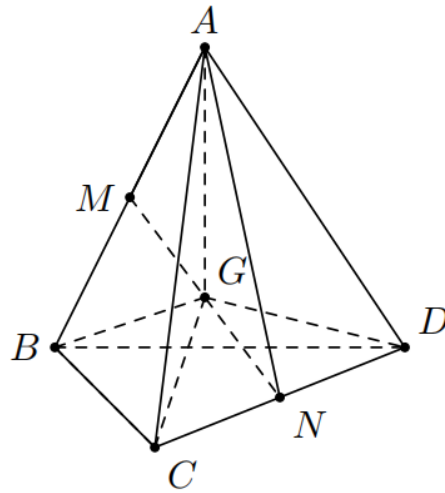
B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$

C. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$

D. $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. S	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------



- ☐ Vì M, N lần lượt là trung điểm $AB, CD \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM} \\ \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GN} \end{cases}$

G là trung điểm $MN \rightarrow \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0} \leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Vậy A đúng

- ☐ Khi đó $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = 4\overrightarrow{MG}$

Vậy B đúng

- ☐ Để chứng minh được $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ nên C sai

- ☐ Ta có:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}$$

Do đó: $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$. Vậy D đúng

Câu 3: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O . Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?

A. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'}$.

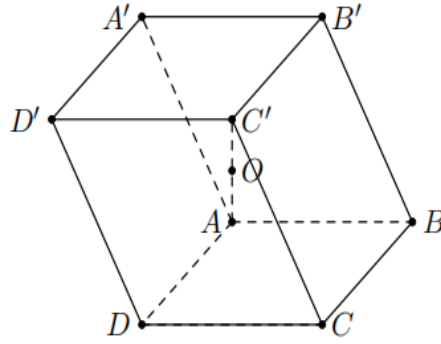
Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. S	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------

- ☐ Theo quy tắc hình hộp thì $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ đúng. Do đó A đúng

- ☐ Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$

Do đó: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$. Do đó B đúng



☐ Vì $\begin{cases} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB'} \\ \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AD'} \end{cases}$, mà $\overrightarrow{AB'} \neq \overrightarrow{AD'} \rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} \neq \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$. Vậy C sai

☐ Ta có

$$\oplus \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'}$$

$$\oplus \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{AC'}$$

Vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'}$. Do đó D đúng

Câu 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?

A. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'A'}$.

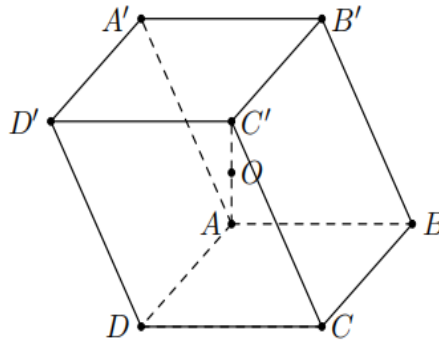
B. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{DC}$.

C. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'}$.

D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. Đ	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------



☐ Ta có

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{B'D'}$$

Mà $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{B'D'}$ nên A đúng

☐ Ta có

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'B'} = \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{D'B'} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{DC}$$

Vậy B đúng

☐ Ta có:

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'}$$

vậy C đúng

☐ Vì $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{BD'} \neq \overrightarrow{BC}$. Vậy D sai

Câu 5: Xét tính đúng- sai của các mệnh đề sau?

- A.** Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
B. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$.
C. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.
D. Chóp $S.ABCD$ có $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

A. S	B. Đ	C. S	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------

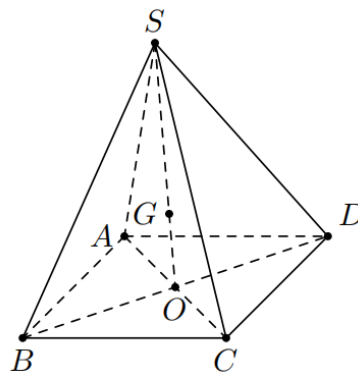
- ☐ Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ nên A sai
☐ Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$ nên B đúng
☐ Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ nên C sai
☐ $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} \leftrightarrow \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SD} \leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \rightarrow ABCD$ là hình bình hành nên D đúng

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Xét tính đúng- sai của các mệnh đề sau?

- A.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{SO}$
B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$
C. $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$.
D. $\overrightarrow{GS} = 3\overrightarrow{OG}$.

Lời giải

A. S	B. Đ	C. S	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------



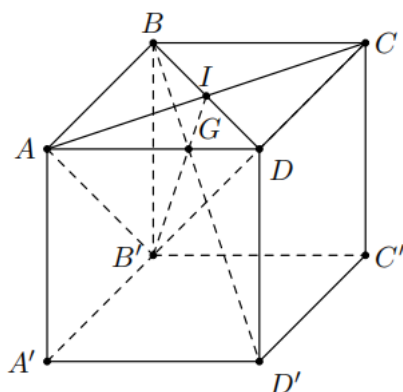
- ☐ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ nên A sai
☐ Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD \rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ nên B đúng
☐ Ta có

$$\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$$

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO}$$
 nên $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$. Do đó C đúng
☐ Ta có

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} &= \vec{0} \\
\Leftrightarrow \overrightarrow{GS} + 4\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} &= \vec{0} \\
\Leftrightarrow \overrightarrow{GS} + 4\overrightarrow{GO} &= \vec{0} \\
\Leftrightarrow \overrightarrow{GS} &= 4\overrightarrow{OG} \text{ nên D sai}
\end{aligned}$$

Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$, gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'C$ (tham khảo hình vẽ). Xét tính **đúng-sai** của các mệnh đề sau?



- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.
- B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.
- C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'C'}$.
- D. $\overrightarrow{BD'} = 2\overrightarrow{BG}$.

Lời giải

A. Đ	B. S	C. Đ	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------

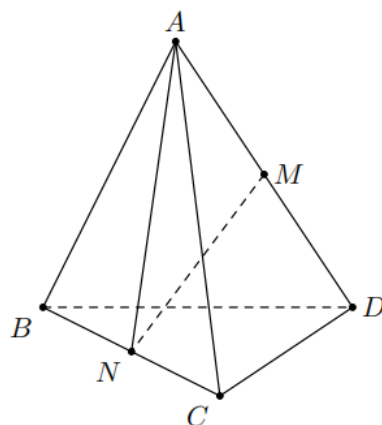
- ☐ Theo quy tắc hình hộp thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$ nên A đúng
- ☐ G là trọng tâm của tam giác $AB'C$ nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Do đó B sai
- ☐ Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$ nên C đúng
- ☐ Ta có $\triangle BIG \sim \triangle D'B'G \rightarrow \frac{BG}{D'G} = \frac{BI}{D'B'} = \frac{1}{2}$
 $\rightarrow \frac{BG}{BD'} = \frac{1}{3} \rightarrow \overrightarrow{BD'} = 3\overrightarrow{BG}$ nên D sai

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, BC . Xét tính **đúng-sai** của các mệnh đề sau?

- A. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.
- B. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.
- C. $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.
- D. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. S	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------



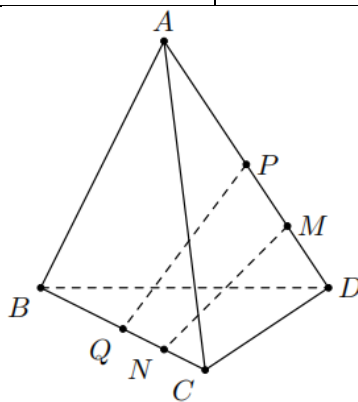
- $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) \rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng $\rightarrow A$ đúng.
- $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng vì MN không nằm trong $(ABC) \rightarrow B$ đúng.
- $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng sai vì AN không nằm trong (MNC)
- $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}) \rightarrow \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng $\rightarrow D$ đúng.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AD và BC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = 3MD$ và $BN = 3NC$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm AD và BC . Xét tính **đúng-sai** của các mệnh đề sau?

- A.** $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$
B. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$
C. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BN}$
D. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Lời giải

A. S	B. Đ	C. Đ	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------



- ☐ Để chứng minh được $2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$ nên A sai
☐ Theo giả thuyết ta có M, N là trung điểm của PD, QC

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BN} \end{cases} \text{ . Nên B và C đúng}$$

□ Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ 3\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MD} + 3\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{BN} \end{cases}$$

$\rightarrow 4\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \rightarrow \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng. Do đó D đúng

Câu 10: Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

Mệnh đề	Đúng	Sai
A: “ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ”.		
B: “ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ ”.		
C: “ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ với $ABCD$ là tứ giác ”.		
D: “ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ với $ABCD$ là hình bình hành ”.		

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. S	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------

- + Mệnh đề A đúng: Quy tắc ba điểm.
- + Mệnh đề B đúng: Quy tắc đa giác.
- + Mệnh đề C sai: Vì $ABCD$ là tứ giác.
- + Mệnh đề D đúng: Quy tắc hình bình hành.

Câu 11: Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

Mệnh đề	Đúng	Sai
A: “ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ ”.		
B: “ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC}$ ”.		
C: “ $k \cdot \vec{a} = \vec{0} \leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ ”.		
D: “ $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC} \leftrightarrow$ Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng ”.		

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. S	D. S
-------------	-------------	-------------	-------------

- + Mệnh đề A đúng: Quy tắc trừ vector.
- + Mệnh đề B đúng: Quy tắc trừ vector.
- + Mệnh đề C sai: Vì $\begin{cases} k = 0 \\ \vec{a} \neq \vec{0} \end{cases} \rightarrow k \cdot \vec{a} = \vec{0}$.
- + Mệnh đề D sai: Vì $k = 0 \leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{0} \leftrightarrow A \equiv B$.

Câu 12: Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

Mệnh đề	Đúng	Sai
$A: “ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} \text{ với } I \text{ là trung điểm đoạn } AB \text{ và điểm } M \text{ bất kỳ } ”.$		
$B: “ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \text{ với } G \text{ là trọng tâm } \Delta ABC \text{ và điểm } M \text{ bất kỳ } ”.$		
$C: “ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG} \text{ với } G \text{ là trọng tâm tứ diện } ABCD \text{ và điểm } M \text{ bất kỳ } ”.$		
$D: “\text{Nếu } \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} \text{ thì chóp } S.ABCD \text{ có } ABCD \text{ là hình bình hành } ”.$		

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. Đ	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------

+ Mệnh đề A đúng: Vì ta có

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MI} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}.$$

+ Mệnh đề B đúng: Vì ta có

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MG} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

+ Mệnh đề C đúng: Vì ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MG} = \vec{0}. \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}. \end{aligned}$$

+ Mệnh đề D đúng: Vì $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} \Leftrightarrow \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ nên

$ABCD$ là

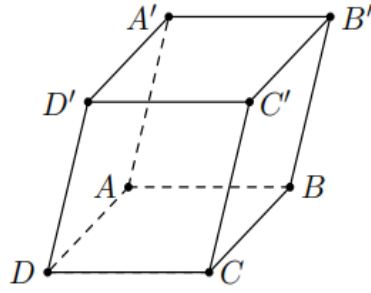
hình bình hành.

Câu 13: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

Mệnh đề	Đúng	Sai
$A: “ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{BB'} ”.$		
$B: “ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} ”.$		
$C: “ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BD'} ”.$		
$D: “ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'} ”.$		

Lời giải

A. Đ	B. S	C. S	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------



+ Mệnh đề A đúng: Vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ và $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BB'}$.

+ Mệnh đề B sai: Vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

+ Mệnh đề C sai: Vì $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AD'} \rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{D'B}$.

+ Mệnh đề D đúng: Vì

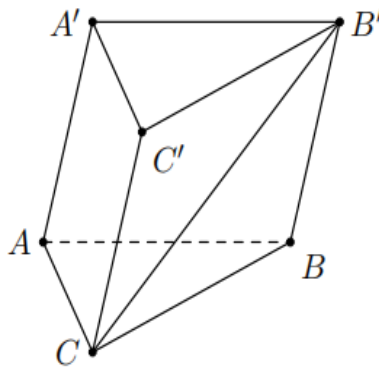
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'} \text{ (Quy tắc hình hộp).}$$

Câu 14: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

Mệnh đề	Đúng	Sai
A: “ $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{BC}$ ”.		
B: “ Góc giữa $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AA'}) = (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CC'}) = (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BB'})$ ”.		
C: “ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AC'}$ ”.		
D: “Góc giữa $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AA'}) = (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{AA'})$ ”.		

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. Đ	D. S
-------------	-------------	-------------	-------------



+ Mệnh đề A đúng: Vì $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC} \rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

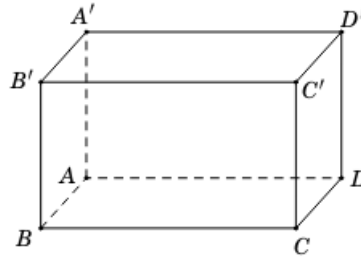
+ Mệnh đề B đúng: Vì $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$.

+ Mệnh đề C đúng: Vì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AC'}$.

+ Mệnh đề D sai: Vì nếu $\alpha = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AA'})$ thì $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{AA'}) = 180^\circ - \alpha$.

Câu 15: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh $AB = a; AD = a\sqrt{3}; AA' = 2a$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{CD'} = \vec{0}$.
b) $\overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{CB'} = \vec{0}$.
c) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = a\sqrt{5}$.
d) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'}| = 2\sqrt{2}a$.



Lời giải

A. S	B. Đ	C. S	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------

a) $\overrightarrow{AB'}$ và $\overrightarrow{CD'}$ không đối nhau nên $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{CD'} \neq \vec{0}$ nên A sai

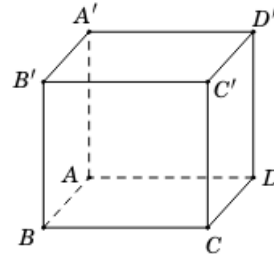
b) $\overrightarrow{A'D}$ và $\overrightarrow{CB'}$ đối nhau nên $\overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{CB'} = \vec{0}$ nên B đúng

c) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a$ nên C sai

d) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}| = AC' = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2} = 2\sqrt{2}a$ nên D đúng

Câu 16: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) $\overrightarrow{B'B} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{B'D}$.
b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD}$.
c) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}| = a\sqrt{2}$.
d) $|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A}| = a$.



Lời giải

A. Đ	B. S	C. S	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------

a) Ta có

$$\overrightarrow{B'B} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{B'B} + (-\overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{B'D}. \text{ nên A đúng}$$

b) Áp dụng quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'}$. Nên B sai

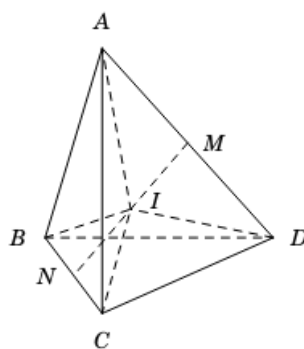
c) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}| = |\overrightarrow{BD'}| = BD' = a\sqrt{3}$ nên C sai

d) Ta có $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{C'C}$.

Do đó $|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A}| = C'C = a$ nên D đúng

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC , I là trung điểm MN . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN}$.
d) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$



Lời giải

A. S	B. Đ	C. Đ	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------

a) Sử dụng quy tắc ba điểm và quy tắc hiệu, ta có

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}.$$

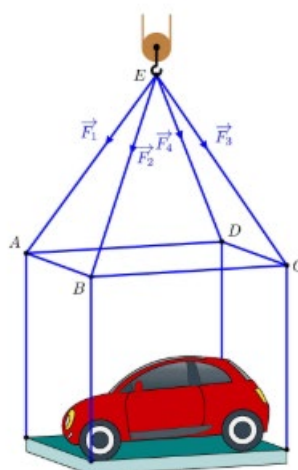
b) Theo quy tắc ba điểm, ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$. Do đó

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

c,d) Dễ chứng minh

Câu 18: Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° . Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là 4700 N và trọng lượng của khung sắt là 3000 N.

- a) $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4}$.
b) $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_4}$.
c) $|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_3}| = 8141 \text{ N}$ (làm tròn đến hàng đơn vị).
d) Trọng lượng của chiếc xe ô tô là 16282 N (làm tròn đến hàng đơn vị).



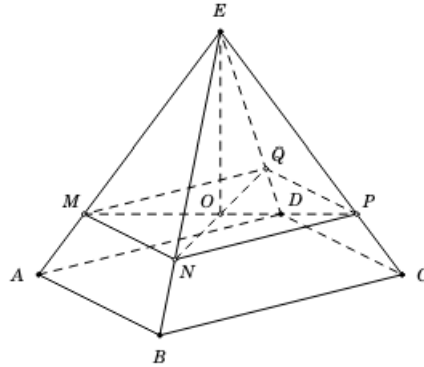
Lời giải

A. S	B. Đ	C. Đ	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------

Lấy các điểm M, N, P, Q lần lượt trên các tia EA, EB, EC, ED sao cho

$$\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{EN} = \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{EP} = \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{EQ} = \overrightarrow{F_4}.$$

Do các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là 4700 N nên $EM = EN = EP = EQ = 4700$.



a) Ta có

$$-\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EN} = 2\overrightarrow{EH}, \text{ với } H \text{ là trung điểm của } MN$$

$$\overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4} = \overrightarrow{EP} + \overrightarrow{EQ} = 2\overrightarrow{EK}, \text{ với } K \text{ là trung điểm của } PQ.$$

Suy ra $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} \neq \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4}$

b) Ta có

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EP} = 2\overrightarrow{EO}, \text{ với } O \text{ là trung điểm của } MP$$

$$\overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_4} = \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{EQ} = 2\overrightarrow{EO}, \text{ với } O \text{ là trung điểm của } NP.$$

Suy ra $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_4}$.

$$c) |\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_3}| = |2\overrightarrow{EO}| = 2EO.$$

Theo giả thiết, góc giữa EA với $(ABCD)$ bằng 60° , suy ra góc giữa EM với $(MNPQ)$ cũng bằng 60° hay $\widehat{SMO} = 60^\circ$.

Xét $\triangle EMO$ có $EM = 4700, \widehat{SMO} = 60^\circ$. Suy ra $EO = EM \sin 60^\circ = 2350\sqrt{3}$.

Từ đây, ta tính được $|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_3}| = 2EO = 8141\text{ N}$.

Câu 19: Trong không gian, cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng có độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai véc-tơ đó là 45° .

$$a) \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$b) (\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = -5 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$c) |\vec{a} + \vec{b}| = 2 + \sqrt{2}.$$

$$d) |\vec{a} - \sqrt{2}\vec{b}| = 0.$$

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. S	D. S
-------------	-------------	-------------	-------------

$$a) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$b) (\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - 6|\vec{b}|^2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 6 = -5 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$c) (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 2 + \sqrt{2}. \text{ Suy ra } |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

$$d) (\vec{a} - \sqrt{2}\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\sqrt{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b}^2 = 1 + 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 2. \text{ Suy ra } |\vec{a} - \sqrt{2}\vec{b}| = \sqrt{2}.$$

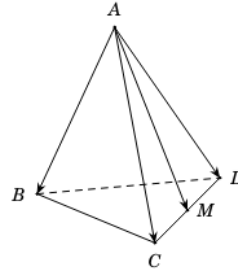
Câu 20: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD .

$$a) \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} = 0.$$

$$b) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}.$$

$$c) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

$$d) \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{a^2}{2}.$$



Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. Đ	D. S
-------------	-------------	-------------	-------------

a) Tam giác ACD đều, suy ra AM vuông góc với CD nên $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

$$b) \text{ Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

$$c) \text{ Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CD}.$$

Mà AM , BM là trung tuyến của các tam giác đều ACD , BCD nên $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{CD}$.

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0.$$

Từ các kết quả trên ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$. Suy ra $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 90^\circ$.

d) Ta có $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$, suy ra

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\right) = \frac{a^2}{2}$$

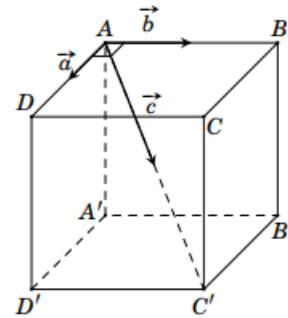
Câu 21: Một chất điểm ở vị trí đỉnh A của hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Chất điểm chịu tác động bởi ba lực $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lần lượt cùng hướng với $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC'}$ như hình vẽ. Độ lớn của các lực $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ tương ứng là 10N, 10N và 20N.

a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

b) $|\vec{a} + \vec{b}| = 20(\text{N})$.

c) $|\vec{a} + \vec{c}| = |\vec{b} + \vec{c}|$.

d) $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 32,59(\text{N})$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Lời giải

A. S	B. S	C. Đ	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------

Từ giả thiết, ta có $\vec{a} \perp \vec{b}$; $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \cos \widehat{DAC'} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\cos(\vec{b}, \vec{c}) = \cos \widehat{BAC'} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

a) Giả sử $\vec{a} + \vec{b} = \vec{d}$. Theo quy tắc hình bình hành thì $\vec{d}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AC}$. Suy ra $\vec{a} + \vec{b} \neq \vec{c}$

b) $|\vec{a} + \vec{b}| = 10\sqrt{2}$ (đường chéo hình vuông cạnh bằng 10).

c) Ta có

$$(\vec{a} + \vec{c})^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 20^2 = 500 + \frac{400\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Suy ra } |\vec{a} + \vec{c}| = \sqrt{500 + \frac{400\sqrt{3}}{3}}.$$

$$(\vec{b} + \vec{c})^2 = |\vec{b}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 20^2 = 500 + \frac{400\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Suy ra } |\vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{500 + \frac{400\sqrt{3}}{3}}.$$

Vậy $|\vec{a} + \vec{c}| = |\vec{b} + \vec{c}|$.

d) Giả sử lực tổng hợp là $\vec{m}$, tức là $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Do đó

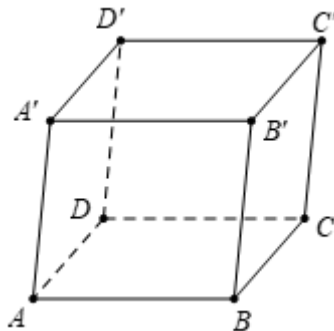
$$\begin{aligned}\vec{n} &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \Leftrightarrow |\vec{m}|^2 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 \\ \Leftrightarrow |\vec{m}|^2 &= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a} \\ \Leftrightarrow |\vec{m}|^2 &= 10^2 + 10^2 + 20^2 + 0 + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow |\vec{m}|^2 &= 10^2 + 10^2 + 20^2 + 0 + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow |\vec{m}| &\approx 32,59.\end{aligned}$$

F. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Có bao nhiêu vector bằng vector $\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Trả lời: 3

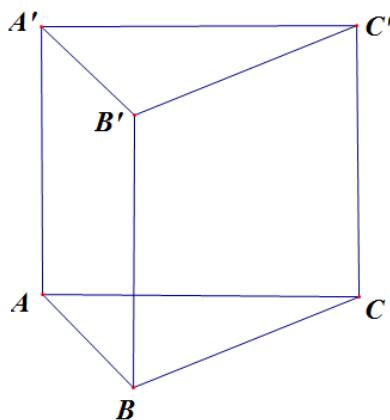


Các vector bằng vector $\overrightarrow{BC}$ là: $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A'D'}$, $\overrightarrow{B'C'}$. Vậy có 3 vector bằng vector $\overrightarrow{BC}$.

Câu 2: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biết $\triangle ABC$ có cạnh bằng 3. Tìm vector tổng $\left| \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{B'C'} \right|$

Lời giải

Trả lời: 3

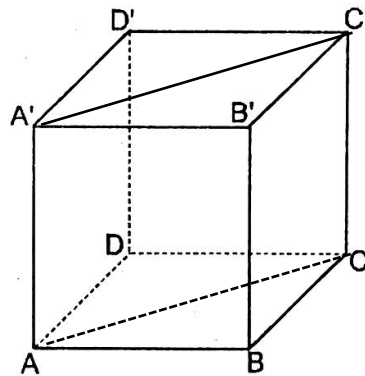


Ta có: $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow \left| \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{B'C'} \right| = \left| \overrightarrow{BA} \right| = 3.$

Câu 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'C'}$.

Lời giải

Trả lời: 45



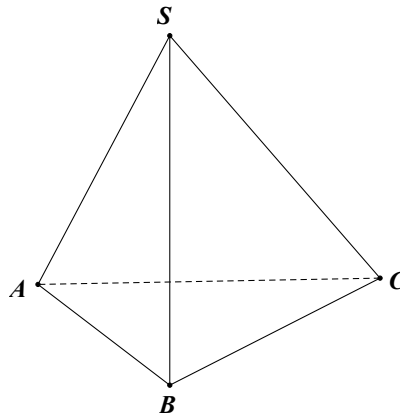
Ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.

Do đó: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 45^\circ$

Câu 4: Cho tứ diện $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = 2, BC = 2\sqrt{2}$. Tính $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Lời giải

Trả lời: -2



Có: $BC^2 = SB^2 + SC^2 (2.2^2 = 2^2 + 2^2) \Rightarrow \Delta SBC$ vuông cân tại S .

Lại có: $SA = AC = SC = 2 \Rightarrow \Delta SAC$ là tam giác đều.

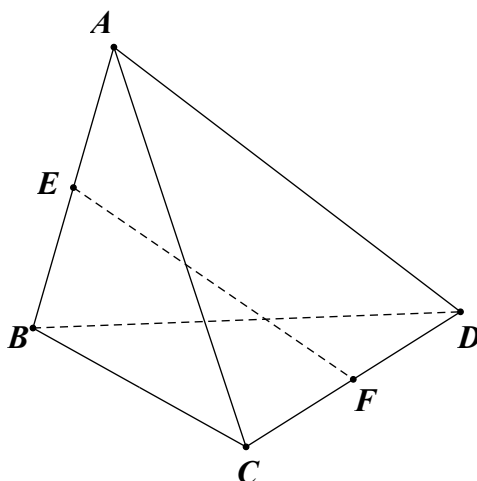
$$\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC} (\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}) = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SA} = 0 - SC \cdot SA \cdot \cos \widehat{ASC} = -2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = -\frac{2^2}{2} = -2$$

Vậy $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = -2$.

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD . Cho $AB = 2a, CD = 2b, EF = 2c$. Với M là một điểm tùy ý, biết tổng $MA^2 + MB^2 = k.ME^2 + l.a^2$. Tính $k + l$.

Lời giải

Trả lời: 4



Áp dụng công thức độ dài đường trung tuyến, ta có:

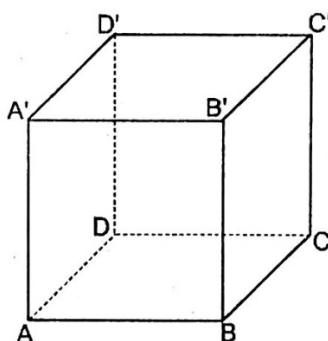
$$ME^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} \Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2ME^2 + \frac{AB^2}{2} = 2ME^2 + 2a^2.$$

Vậy $k + l = 2 + 2 = 4$.

Câu 6: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $\overrightarrow{MA} = k.\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC'} = l.\overrightarrow{ND}$. Khi MN song song với BD' thì $k + l$ có giá trị là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: -4



Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$.

$$\text{Có: } \overrightarrow{MA'} = k \cdot \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AM} = k(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{-k(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}}{1-k}.$$

$$\text{Có: } \overrightarrow{NC} = l \cdot \overrightarrow{ND} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - l\vec{b}}{1-l}.$$

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \left(-\frac{k}{1-k} - \frac{1}{1-l}\right)\vec{a} + \left(-\frac{k}{1-k} - 1\right)\vec{b} + \left(\frac{1}{1-k} - \frac{1}{1-l}\right)\vec{c}.$$

$$\text{Mà: } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD'} - \overrightarrow{AB} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

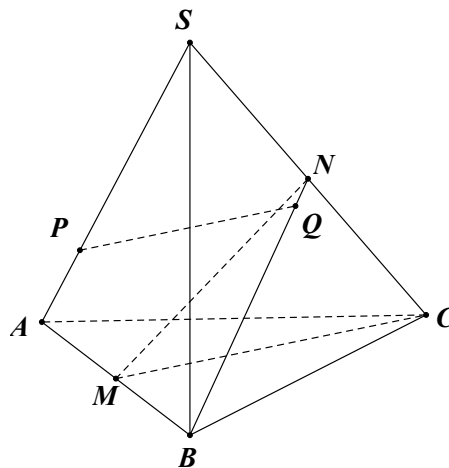
$$\text{Vì } MN \parallel BD' \text{ nên } \overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{BD'} \Leftrightarrow \frac{3k+1}{1-k} = -2 \Leftrightarrow k = -3 \Rightarrow l = -1.$$

$$\text{Vậy } k + l = -4.$$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$ và các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, SC . Các điểm P, Q trên các đường thẳng SA, BN sao cho $PQ \parallel CM$. Hãy biểu diễn vector $\overrightarrow{PQ}$ theo ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Khi biểu diễn vector $\overrightarrow{PQ}$ theo ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, ta được: $\overrightarrow{PQ} = -\frac{m}{n}\vec{a} - \frac{p}{q}\vec{b} + \frac{r}{z}\vec{c}$ (với $\frac{m}{n}, \frac{p}{q}, \frac{r}{z}$ là các phân số tối giản và $m, n, p, q, r, z \in \mathbb{Z}$). Tính $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} + \frac{r}{z}$.

Lời giải

Trả lời: $\frac{4}{3}$



$$\text{Đặt } \overrightarrow{PA} = x\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BQ} = y\overrightarrow{BN}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = x\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} + y\overrightarrow{BN} = (x-1)\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + y(\overrightarrow{SN} - \overrightarrow{SB}) \\ &= (x-1)\vec{a} + (1-y)\vec{b} + \frac{y}{2}\vec{c}.\end{aligned}$$

$$\text{Lại có: } \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{SM} - \overrightarrow{SC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}) - \overrightarrow{SC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$$

$$PQ // CM \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \frac{x-1}{0,5} = \frac{1-y}{0,5} = \frac{y}{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}.$$

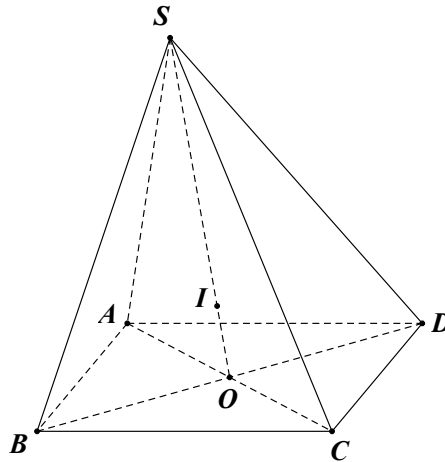
$$\text{Vậy } \overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , M là điểm thay đổi trên SO .

Tỉ số $\frac{SM}{SO}$ sao cho $P = MS^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ nhỏ nhất là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: $\frac{4}{5}$



Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{SI} = 4\overrightarrow{IO}$.

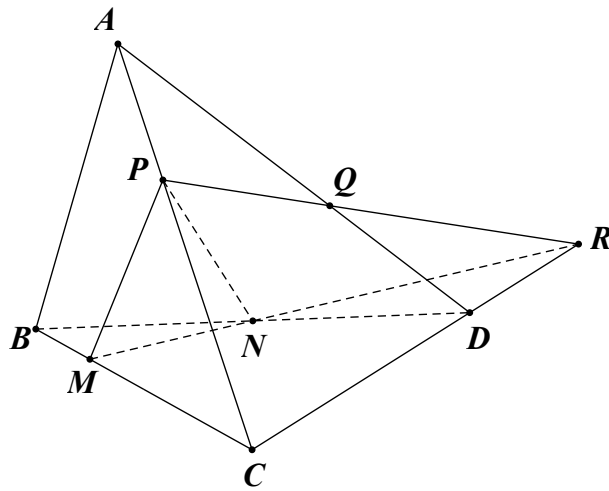
$$\begin{aligned}\text{Suy ra: } P &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IS})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID})^2 \\ &= 5MI^2 + IS^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IS} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) \\ &= 5MI^2 + IS^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IS} + 4\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \\ &= 5MI^2 + IS^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2\end{aligned}$$

Vậy $P_{\min}$ khi $M \equiv I \Rightarrow \frac{SM}{SO} = \frac{4}{5}$.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ có các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, BD và AC sao cho $BC = 4BM, AC = 3AP, BD = 2BN$. Mặt phẳng (MNP) cắt đường thẳng AD tại điểm Q . Tính tỉ số $\frac{AQ}{AD}$.

Lời giải

Trả lời: $\frac{3}{5}$



Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}, \overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AD} = k\vec{c}$

Theo đề bài, ta có: $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}, \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}), \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\vec{b}$.

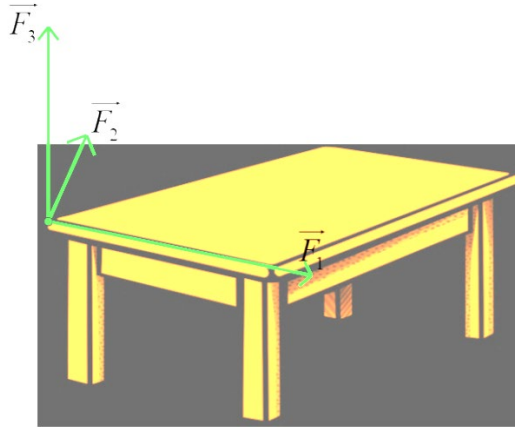
$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \\ \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = -\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{12}\vec{b} \\ \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AM} = -\frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} + k\vec{c} \end{cases}$$

Vì M, N, P, Q đồng phẳng nên

$$x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MQ} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,25x + 0,75y = 0,75 \\ 0,25x - \frac{1}{12}y = 0,25 \\ 0,5x = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{3}{5} \\ k = \frac{3}{5} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AQ} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AD} \Rightarrow \frac{AQ}{AD} = \frac{3}{5}.$$

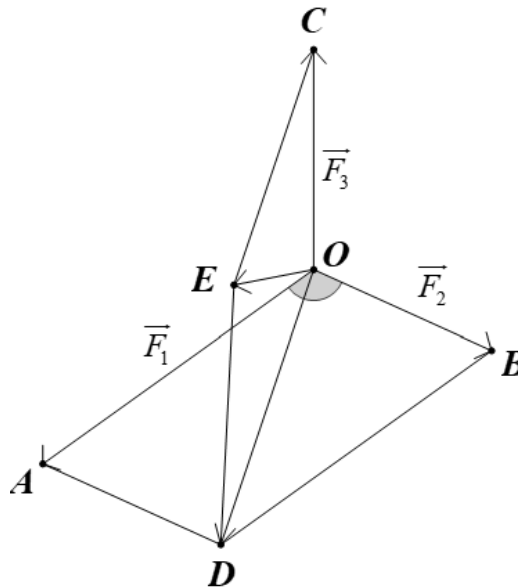
Câu 10: Có ba lực cùng tác động vào một cái bàn như hình vẽ. Trong đó hai lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ tạo với nhau một góc 110° và có độ lớn lần lượt là $9N$ và $4N$, lực $\overrightarrow{F_3}$ vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ và có độ lớn $7N$. Độ lớn hợp lực của ba lực trên là $a(N)$, tìm giá trị của a .



Lời giải

Trả lời: 10

Theo đề bài ta có hình vẽ sau:



Hợp lực tác động vào ba vật là $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE}$

Áp dụng định lý cosin trong $\triangle OAD$, ta có:

$$OD^2 = OA^2 + AD^2 - 2OA \cdot AD \cdot \cos \widehat{OAD} = 9^2 + 4^2 - 2 \cdot 9 \cdot 4 \cdot \cos 80^\circ = 97 - 72 \cos 80^\circ.$$

Vì $OC \perp (OBDA)$ nên $OC \perp OD \Rightarrow ODEC$ là hình chữ nhật.

Do đó $\triangle OCE$ vuông tại C nên:

$$OE^2 = OC^2 + EC^2 = 4^2 + 97 - 72\cos 80^\circ = 113 - 72\cos 80^\circ$$

$$\Rightarrow OE = \sqrt{113 - 72\cos 80^\circ} \approx 10$$

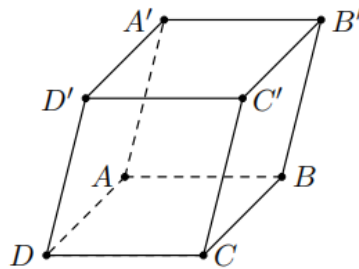
Suy ra độ lớn của hợp lực của ba lực trên khoảng $10N$.

Vậy $a=10$.

Câu 11: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vector $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + k(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D}) = \vec{0}$?

Lời giải

Trả lời: $k=1$



Ta có

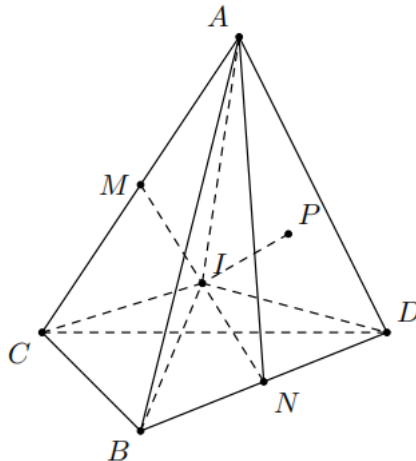
$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD'} = \overrightarrow{AD'} \\ \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC'} = \overrightarrow{C'B} = \overrightarrow{D'A} \end{cases}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{AD'} + k\overrightarrow{D'A} = \vec{0} \Leftrightarrow (k-1).\overrightarrow{D'A} = \vec{0} \Leftrightarrow k=1.$$

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BD . Gọi I là trung điểm đoạn MN và P là một điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vector $\overrightarrow{PI} = k(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD})$?

Lời giải

Trả lời: $k = \frac{1}{4}$



+ Vì M, N, I lần lượt là trung điểm của AC, BD, MN

$$\rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IM} \\ \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IN} \rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0} \\ \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0} \end{cases}$$

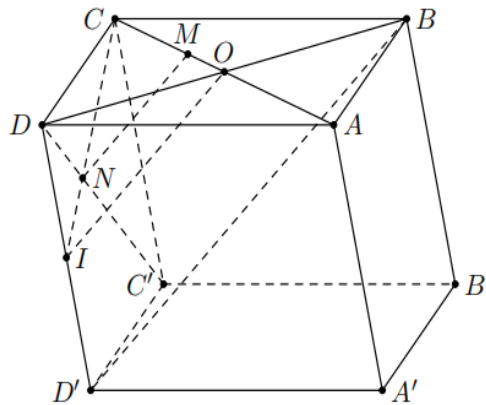
+ Khi đó $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 4\overrightarrow{PI}$.

+ Mà $\overrightarrow{PI} = k(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) \Leftrightarrow \overrightarrow{PI} = k.4.\overrightarrow{PI} \Leftrightarrow 1 = 4k \Leftrightarrow k = \frac{1}{4}$

Câu 13: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm trên cạnh AC sao cho $AC = 3MC$. Lấy điểm N trên đoạn $C'D$ sao cho $C'N = x.C'D$. Với giá trị nào của x thì MN song song BD' ?

Lời giải

Trả lời: $\frac{2}{3}$



+ Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$.

+ Gọi I là trung điểm DD' .

+ Nối $C'D$ cắt CI tại $N' \rightarrow N'$ là trọng tâm $\triangle CDD'$.

+ Ta có OI là đường trung bình của $\triangle BDD' \rightarrow OI \parallel BD'$.

+ Lại có $\frac{CN'}{CI} = \frac{CM}{CO} \rightarrow MN' \parallel OI \rightarrow MN' \parallel BD'$.

+ Theo bài ta có $MN \parallel BD' \Leftrightarrow N' \equiv N \rightarrow C'N = \frac{2}{3}C'D \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

Câu 14: Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N được xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DB} + x.\overrightarrow{DC}$. Tìm x để các đường thẳng AD, BC, MN cùng song song với một mặt phẳng.

Lời giải

Trả lời: -2

+ bài toán tương đương tìm x để $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ đồng phẳng.

$$+ \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = -\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}.$$

+

$$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DB} + x\overrightarrow{DC} \leftrightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + x(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \leftrightarrow \overrightarrow{AN} = (1+x)\overrightarrow{AB} - x\overrightarrow{AD} + x\overrightarrow{BC}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = (2+x)\overrightarrow{AB} - x\overrightarrow{AD} + (x+3)\overrightarrow{BC}.$$

$$+ \text{Để } \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC} \text{ đồng phẳng} \leftrightarrow 2+x=0 \leftrightarrow x=-2.$$

Câu 15: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vector $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} = k\overrightarrow{AC_1}$?

A. $k = 4$.

B. $k = 1$.

C. $k = 0$.

D. $k = 2$.

Lời giải

Trả lời: 1

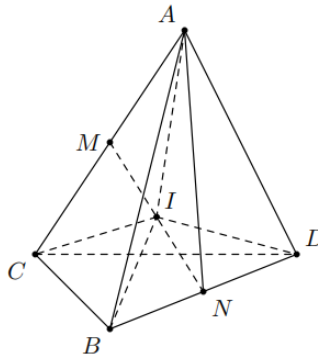
$$+ \text{Ta có } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC_1}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{AC_1} = k\overrightarrow{AC_1} \leftrightarrow k = 1.$$

Câu 16: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BD . Gọi I là trung điểm đoạn MN . Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{IA} + (2k-1)\overrightarrow{IB} + k\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$?

Lời giải

Trả lời: 1



+ Vì M, N, I lần lượt là trung điểm của AC, BD, MN

$$\rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IM} \\ \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IN} \\ \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0} \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}.$$

$$+ \text{Ta có } \overrightarrow{IA} + (2k-1)\overrightarrow{IB} + k\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}$$

$$= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} + (2k-2)\overrightarrow{IB} + (k-1)\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

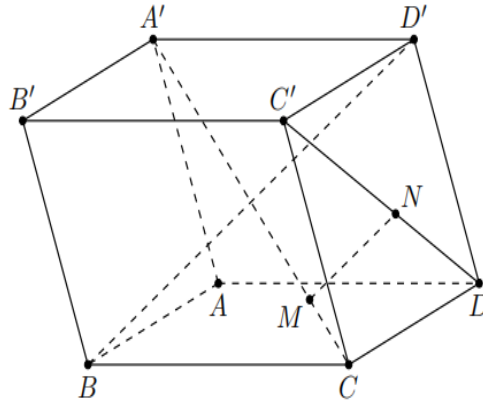
$$\rightarrow (k-1)(2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) = \vec{0}.$$

$$+ \text{Mà } 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} \neq \vec{0} \leftrightarrow k-1=0 \leftrightarrow k=1.$$

- Câu 17:** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và các số thực m, n thỏa mãn $\overrightarrow{MA'} = m\overrightarrow{MC}$ và $\overrightarrow{NC'} = n\overrightarrow{ND}$. Khi MN song song với BD' thì $m + n$ bằng bao nhiêu?
- A. $m - n = -\frac{3}{2}$. B. $m + n = -3$. C. D. $m + n = -2$.

Lời giải

Trả lời: -4



$$\begin{aligned}
 & + \text{Đặt } \vec{x} = \overrightarrow{BA}, \vec{y} = \overrightarrow{BC}, \vec{z} = \overrightarrow{BB'}. \\
 & + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN} = \frac{1}{m-1}(\vec{x} - \vec{y} + \vec{z}) + \vec{x} + \frac{1}{1-n}(-\vec{x} + \vec{z}) \\
 & = \left(1 + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{n-1}\right)\vec{x} - \frac{1}{m-1}\vec{y} + \left(\frac{1}{m-1} + \frac{1}{1-n}\right)\vec{z} \\
 & + \overrightarrow{BD'} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}. \\
 & + \text{Vì } MN \parallel BD' \rightarrow 1 + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{n-1} = -\frac{1}{m-1} = \frac{1}{m-1} + \frac{1}{1-n} \Leftrightarrow m = -3, n = -1.
 \end{aligned}$$

- Câu 18:** Trong không gian cho các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng thỏa mãn $(x - y)\vec{a} + (y - z)\vec{b} = (x + z - 2)\vec{c}$. Tính $x + y + z$?

Lời giải

Trả lời: 3

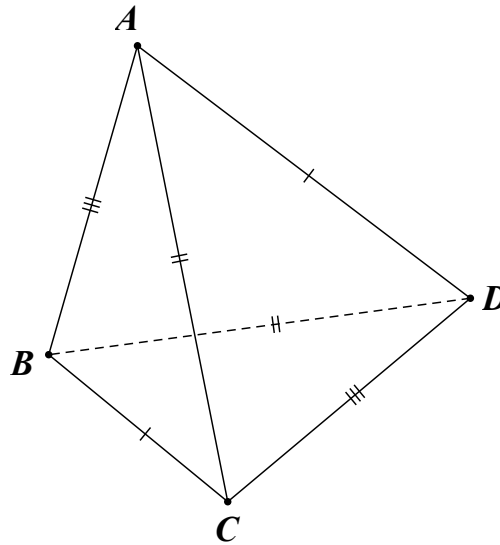
+ Có $(x - y)\vec{a} + (y - z)\vec{b} - (x + z - 2)\vec{c} = \vec{0}$. Do $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng nên mỗi vector được phân tích duy nhất qua ba vector nói trên.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1 \rightarrow x + y + z = 3.$$

- Câu 19:** Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = DA = a, CA = DB = b, AB = DC = c$. Gọi S là diện tích toàn phần (tổng diện tích tất cả các mặt). Tính giá trị lớn nhất của $\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2}$.

Lời giải

Trả lời: $\frac{9}{S^2}$



Do tứ diện $ABCD$ có $BC = DA = a, CA = DB = b, AB = DC = c$ nên $\triangle BCD = \triangle ADC = \triangle DAB = \triangle CBA$. Gọi S' là diện tích và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp mỗi mặt đó thì $S = 4S' = \frac{abc}{R}$, nên bất đẳng thức cần chứng minh

$$\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} \leq \frac{9}{S^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2.$$

Theo công thức Leibnitz: Với điểm M bất kì và G là trọng tâm của tam giác ABC thì

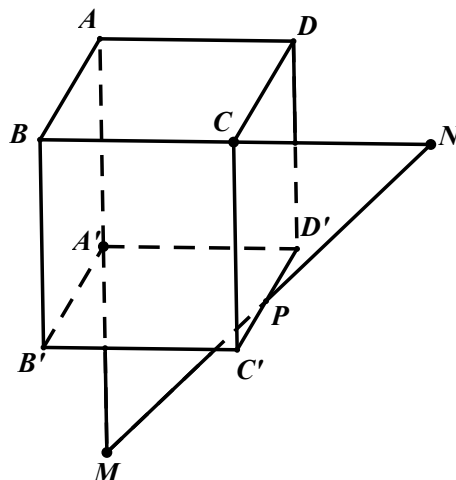
$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2 + 9MG^2)$$

Cho M trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta được $9R^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 9OG^2 \geq a^2 + b^2 + c^2$.

Câu 20: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một đường thẳng Δ cắt các đường thẳng $AA', BC, C'D'$ lần lượt tại M, N, P sao cho $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP}$. Tính $\frac{MA}{MA'}$.

Lời giải

Trả lời: 2



Đặt $\overrightarrow{AD} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$.

Vì $M \in AA'$ nên $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AA'} = k\vec{c}$

$N \in BC \Rightarrow \overrightarrow{BN} = l\overrightarrow{BC} = l\vec{a}, P \in C'D' \Rightarrow \overrightarrow{C'P} = m\vec{b}$

Ta có $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -l\vec{a} - \vec{b} + k\vec{c}$

$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'P} = (1-l)\vec{a} + m\vec{b} + \vec{c}$

Do $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP} \Rightarrow -l\vec{a} - \vec{b} + k\vec{c} = 2[(1-l)\vec{a} + m\vec{b} + \vec{c}]$

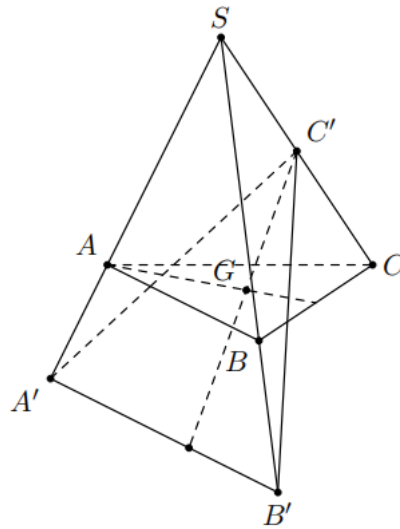
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -l = 2(1-l) \\ -1 = 2m \\ k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow k = 2, m = -\frac{1}{2}, l = 2.$$

Vậy $\frac{MA}{MA'} = 2$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$. Lấy các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho $\frac{SA}{SA'} = a, \frac{SB}{SB'} = b, \frac{SC}{SC'} = c$, trong đó a, b, c là các số thay đổi. Để mặt phẳng $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm của tam giác ABC thì $a + b + c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 3



+ Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC \rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

$\rightarrow 3\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \vec{0}$.

+ Mà $\begin{cases} \overrightarrow{SA} = a\overrightarrow{SA'} \\ \overrightarrow{SB} = b\overrightarrow{SB'} \\ \overrightarrow{SC} = c\overrightarrow{SC'} \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{SG} = \frac{a}{3}\overrightarrow{SA'} + \frac{b}{3}\overrightarrow{SB'} + \frac{c}{3}\overrightarrow{SC'}.$

+ Vì $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm ΔABC nên:

$\rightarrow \overrightarrow{GA'}, \overrightarrow{GB'}, \overrightarrow{GC'}$ đồng phẳng

$\rightarrow \exists l, m, n$ sao cho $l^2 + m^2 + n^2 \neq 0$ và $l\overrightarrow{GA'} + m\overrightarrow{GB'} + n\overrightarrow{GC'} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow l(\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{SA'}) + m(\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{SB'}) + n(\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{SB'}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (l+m+n)\overrightarrow{SG} = l\overrightarrow{SA'} + m\overrightarrow{SB'} + n\overrightarrow{SC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{SG} = \frac{l}{l+m+n}\overrightarrow{SA'} + \frac{m}{l+m+n}\overrightarrow{SB'} + \frac{n}{l+m+n}\overrightarrow{SC'}$$

.

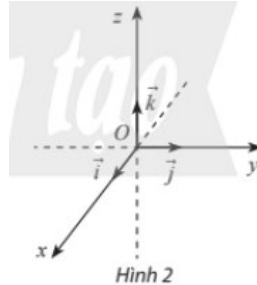
$$\rightarrow \frac{a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3} = \frac{l}{l+m+n} + \frac{m}{l+m+n} + \frac{n}{l+m+n} \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} = 1 \Leftrightarrow a+b+c = 3.$$

CHƯƠNG 2: VECTƠ VÀ HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 2: TỌA ĐỘ CỦA VECTO TRONG KHÔNG GIAN	2
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM.....	2
B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA	3
BÀI 3: BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTO	6
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM.....	6
B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA	7
C. CÁC DẠNG TOÁN	8
DẠNG 1: TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM VÀ VECTO	8
DẠNG 2: XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ CỦA VEC TƠ, VÀ ĐỘ DÀI CỦA ĐOẠN THẲNG.....	9
DẠNG 3: XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ ĐIỂM.....	9
DẠNG 4: XÁC ĐỊNH TÍCH VÔ HƯỚNG VÀ ỨNG DỤNG	10
DẠNG 5: ỨNG DỤNG GIẢI CÁC BÀI TOÁN THỰC TIỄN.....	11
D. TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN	14
E. TRẢ LỜI ĐÚNG SAI	18
F. TRẢ LỜI NGẮN	28

BÀI 2: TOẠ ĐỘ CỦA VECTO TRONG KHÔNG GIAN**A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM****I. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN**

Trong không gian, cho ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc. Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là ba vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz . Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$ trong không gian hay gọi đơn giản là hệ tọa độ $Oxyz$.

**Nhận xét:**

a) Điểm O được gọi là gốc tọa độ.

Các trục Ox, Oy, Oz được gọi là các trục tọa độ.

Các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$ đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng tọa độ.

Không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.

b) Vì $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là ba vectơ đơn vị đôi một vuông góc với nhau nên ta có

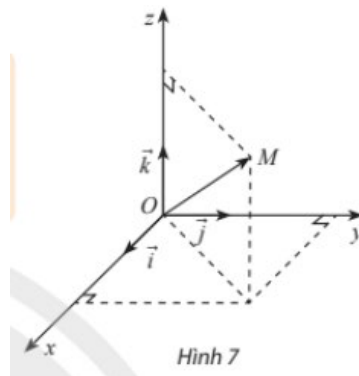
$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1 \text{ và } \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0.$$

Ví dụ 1. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và có độ dài bằng 1. Vẽ hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc là O , các điểm A, B, C lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz và chỉ ra các vectơ đơn vị trên các trục tọa độ.

II. TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM VÀ VECTO**1. Tọa độ của điểm**

Ta có định nghĩa sau:

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M . Nếu $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(x; y; z)$ là tọa độ của điểm M đối với hệ trục tọa độ $Oxyz$ và viết $M = (x; y; z)$ hoặc $M(x; y; z)$; x là hoành độ, y là tung độ, z là cao độ của điểm M .



Ví dụ 2. Cho hình hộp chữ nhật $OABC \cdot O'A'B'C'$ có cạnh $OA = 4, OC = 6, OO' = 3$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tọa độ O ; các điểm A, C, O' lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz . Xác định tọa độ các điểm A, B, B' .

2. Tọa độ của vector

Ta có định nghĩa sau:

Trong không gian $Oxyz$, cho vector $\vec{a}$. Nếu $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(a_1; a_2; a_3)$ là tọa độ của vector $\vec{a}$ đối với hệ tọa độ $Oxyz$ và viết $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ hoặc $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$.

Nhận xét: Trong không gian $Oxyz$, ta có:

Tọa độ của điểm M là tọa độ của vector $\overrightarrow{OM}$, tức là $M = (x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$.

Điều kiện để hai vector bằng nhau:

$$\text{Cho } \vec{a} = (x; y; z), \vec{b} = (x'; y'; z'). \text{ Khi đó: } \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O , các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và có $AB = 8, AD = 6, AA' = 4$. Tìm tọa độ các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm của cạnh $C'D'$.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

1. Trong không gian $Oxyz$, biết:

a) $\vec{a} = 5\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}, \vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{k}$. Tìm tọa độ các vecto $\vec{a}, \vec{b}$.

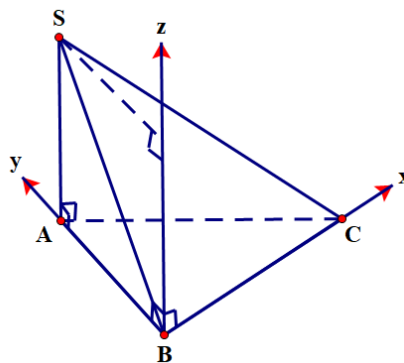
b) $\overrightarrow{OM} = 4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, \overrightarrow{ON} = 8\vec{i} - 5\vec{j}$. Tìm tọa độ các điểm M, N .

2. Trong không gian $Oxyz$, biết:

a) $\vec{a} = (-2; 5; -7), \vec{b} = (4; 0; 1)$. Tính $\vec{a}, \vec{b}$ theo các vecto $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

b) $A(7; -2; 1), B(0; 5; 0)$. Tính $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ theo các vecto $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

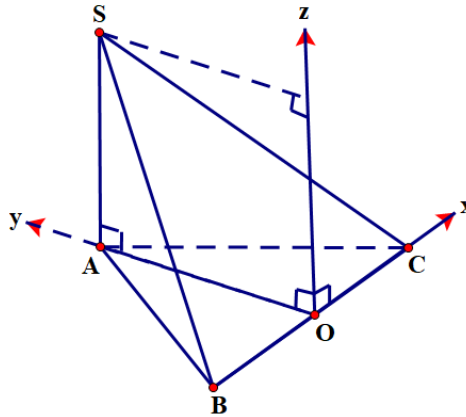
3. Cho tứ diện $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông tại $B, BC = 3, BA = 2, SA$ vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có độ dài bằng 2 (Hình 13).



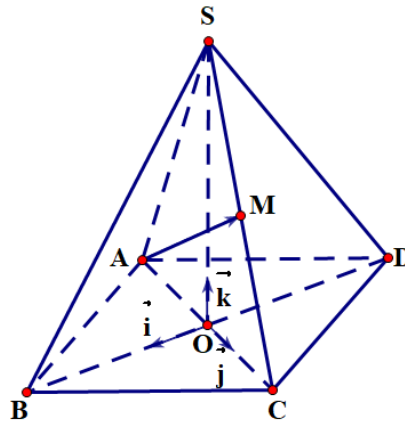
a) Xác định một hệ tọa độ dựa trên gợi ý của hình vẽ và chỉ ra các vector đơn vị trên các trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ các điểm A, B, C, S .

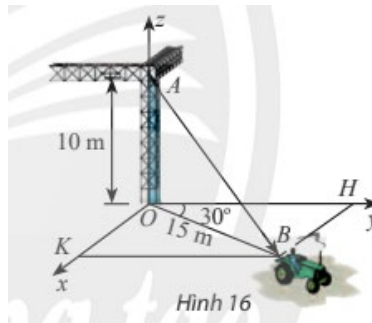
4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2, SA vuông góc với đáy và SA bằng 1 (Hình 14). Thiết lập hệ tọa độ như hình vẽ, hãy vẽ các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz và tìm tọa độ các điểm A, B, C, S .



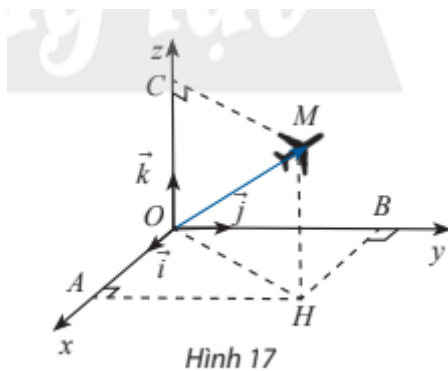
5. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng 5, giao điểm hai đường chéo AC và BD trùng với gốc O . Các vectơ $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và $OA = OS = 4$ (Hình 15). Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS}$ và $\overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm của cạnh SC .



6. Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$ như Hình 16 với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng 1 m. Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.



7. Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như Hình 17. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy) . Cho biết $OM = 50$; $(\vec{i}; \overrightarrow{OH}) = 64^\circ$; $(\overrightarrow{OH}; \overrightarrow{OM}) = 48^\circ$. Tìm tọa độ của điểm M .



BÀI 3: BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTO

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TỔNG, HIỆU HAI VECTO VÀ TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTO

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và số thực k .

Khi đó:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$$

$$k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3).$$

Nhận xét: Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, $\vec{b} \neq \vec{0}$. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương khi và

chỉ khi tồn tại số k sao cho
$$\begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases}$$

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{p} = (3; -2; 1)$, $\vec{q} = (6; -4; 2)$, $\vec{r} = (2; 1; -3)$.

a) Tìm tọa độ của vectơ $\vec{c} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$.

b) Tìm hai vectơ cùng phương trong các vectơ đã cho.

II. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ được xác định bởi công thức $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Nhận xét:

a) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$ ($\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$);

b) $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

c) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ ($\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$).

Ví dụ 2. Cho ba vectơ $\vec{a} = (3; 0; 1)$, $\vec{b} = (1; -1; -2)$, $\vec{c} = (2; 1; -1)$.

a) Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$.

b) Tính $|\vec{a}|, |\vec{b}|, \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

c) Cho $\vec{d} = (1; 7; -3)$. Chứng minh $\vec{d} \perp \vec{a}$.

III. Vận dụng

1. Xác định tọa độ của vectơ khi biết tọa độ điểm đầu và điểm cuối

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$.

Ta có: $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

Nhận xét: $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Ví dụ 3. Cho ba điểm $A(2;0;2), B(1;2;3), C(2;1;2)$.

a) Tìm tọa độ của các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$.

b) Tính các độ dài AB, BC, CA .

2. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng và trọng tâm của tam giác

Trong không gian $Oxyz$:

Cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$. Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right).$$

Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B), C(x_C; y_C; z_C)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác

$$ABC \text{ là: } G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có $A(1;-1;1), B(0;1;2), C(1;0;1)$. Tìm tọa độ:

a) Trung điểm M của AB ;

b) Trọng tâm G của tam giác ABC .

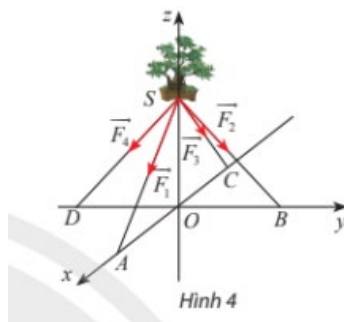
Ví dụ 5. Cho tam giác ABC có $A(7;3;3), B(1;2;4), C(2;3;5)$.

a) Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC .

b) Tìm độ dài cạnh AB và AC .

c) Tính góc A .

Ví dụ 6. Một chậu cây được đặt trên một giá đỡ có bốn chân với điểm đặt $S(0;0;20)$ và các điểm chạm mặt đất của bốn chân lần lượt là $A(20;0;0), B(0;20;0), C(-20;0;0), D(0;-20;0)$ (đơn vị cm). Cho biết trọng lực tác dụng lên chậu cây có độ lớn 40 N và được phân bố thành bốn lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ có độ lớn bằng nhau như Hình 4. Tìm tọa độ của các lực nói trên (mỗi centimet biểu diễn 1 N).



B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

1. Tính: a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ với $\vec{a} = (5; 2; -4), \vec{b} = (4; -2; 2)$.

b) $\vec{c} \cdot \vec{d}$ với $\vec{c} = (2; -3; 4), \vec{d} = (6; 5; -3)$.

2. Cho hai vectơ $\vec{a} = (0; 1; 3)$ và $\vec{b} = (-2; 3; 1)$. Tìm tọa độ của vectơ $2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{a}$.

3. Cho ba điểm $A(2;1;-1)$; $B(3;2;0)$ và $C(2;-1;3)$.

a) Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của tam giác. Tính chu vi tam giác ABC .

b) Tìm tọa độ trung điểm của các cạnh của tam giác ABC .

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

4. Cho điểm $M(1;2;3)$. Hãy tìm tọa độ của các điểm:

a) M_1, M_2, M_3 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các mặt phẳng tọa độ $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$.

b) M', M'', M''' lần lượt là các điểm thỏa mãn:

- O là trung điểm của MM' ;

- MM'' vuông góc và cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm H sao cho H là trung điểm của MM'' .

- MM''' vuông góc và cắt trục Oy tại điểm K sao cho K là trung điểm của MM''' .

5. Cho ba điểm $A(3;3;3)$; $B(1;1;2)$ và $C(5;3;1)$.

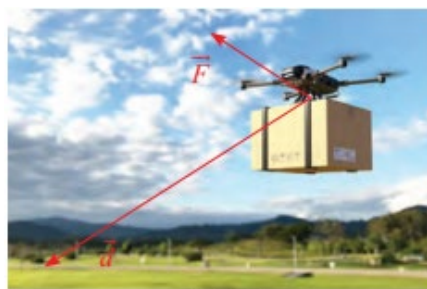
a) Tìm điểm M trên trục Oy cách đều hai điểm B, C .

b) Tìm điểm N trên mặt phẳng (Oxy) cách đều ba điểm A, B, C .

6. Cho các điểm $A(-1;-1;0)$, $B(0;3;-1)$, $C(-1;14;0)$, $D(-3;6;2)$. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình thang.

7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$; $B(2;1;2)$; $D(1;-1;1)$; $C'(4;5;-5)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

8. Tính công sinh bởi lực $\vec{F} = (20;30;-10)$ (đơn vị: N) tạo bởi một drone giao hàng (Hình 7) khi thực hiện một độ dịch chuyển $\vec{d} = (150;200;100)$ (đơn vị: m).



Hình 7

C. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1: TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM VÀ VECTOR

1. Phương pháp: Sử dụng khái niệm

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết:

a) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} - 2\vec{j}$. Tìm tọa độ các vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

b) $\vec{OM} = 5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{ON} = \vec{i} - 3\vec{k}$. Tìm tọa độ các điểm M, N .

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết:

a) $\vec{a} = (-3; 2; -1), \vec{b} = (3; 0; 12)$. Tính $\vec{a}, \vec{b}$ theo các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

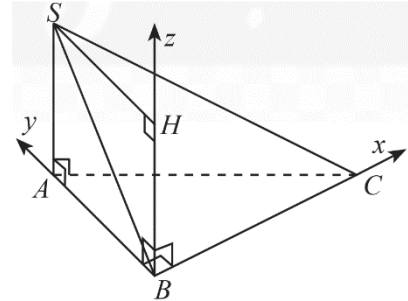
b) $A(-5; -2; 1), B(0; 4; -11)$. Tính $\vec{OA}, \vec{OB}$ theo các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Ví dụ 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O , các vectơ $\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và có $AB = 5, AD = 6, AA' = 9$. Tìm tọa độ các vectơ $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AC'}$ và $\vec{AM}$ với M là trung điểm của cạnh $C'D'$.

Ví dụ 4: Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B , $BC = 3, BA = 2, SA$ vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có độ dài bằng 2.

a) Xác định một hệ tọa độ dựa trên gợi ý của hình vẽ.

b) Tìm tọa độ các điểm A, B, C, S .



DẠNG 2: XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ CỦA VECTO, VÀ ĐỘ DÀI CỦA ĐOẠN THẲNG

1. Phương pháp: Áp dụng biểu thức tọa độ của các phép toán véc tơ.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ

$\vec{a} = (1; 2; 3); \vec{b} = (2; 2; -1); \vec{c} = (4; 0; -4)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -3; 3), \vec{b} = (0; 2; -1), \vec{c} = (3; -1; 5)$ Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.

Ví dụ 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; -1), B(1; 4; 3)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB

Ví dụ 4: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-2; 2; 0); \vec{b} = (2; 2; 0); \vec{c} = (2; 2; 2)$. Tính giá trị của $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$.

Ví dụ 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (3; m+1; 3), \vec{b} = (1; -3; 2n)$. Tìm m, n để các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

Ví dụ 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{m} = (4; 3; 1), \vec{n} = (0; 0; 1)$. Gọi $\vec{p}$ là vectơ cùng hướng với $[\vec{m}, \vec{n}]$ (tích có hướng của hai vectơ $\vec{m}$ và $\vec{n}$). Biết $|\vec{p}| = 15$, tìm tọa độ vectơ $\vec{p}$.

DẠNG 3: XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ ĐIỂM

1. Phương pháp:

Dùng công thức biểu thức tọa độ trung điểm, tọa độ trọng tâm của tam giác...

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -4; 3)$ và $B(2; 2; 7)$. Tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB .

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tam giác ABC biết $A(5; -2; 0), B(-2; 3; 0), C(0; 2; 3)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 3), B(2; 3; -4), C(-3; 1; 2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Ví dụ 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2; -5; 0)$, $B(-1; 1; 3)$, $C(3; 3; 0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD = BC$.

Ví dụ 5 Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết tọa độ các đỉnh $A'(-3; 2; 1)$, $C(4; 2; 0)$, $B'(-2; 1; 1)$, $D(3; 5; 4)$. Tìm tọa độ điểm A' của hình hộp.

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ biết $A(-2; 2; 6)$, $B(-3; 1; 8)$, $C(-1; 0; 7)$, $D(1; 2; 3)$. Gọi H là trung điểm của CD , $SH \perp (ABCD)$. Để khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $\frac{27}{2}$ (đvtt) thì có hai điểm S_1, S_2 thỏa mãn yêu cầu bài toán. Tìm tọa độ trung điểm I của S_1S_2

DẠNG 4: XÁC ĐỊNH TÍCH VÔ HƯỚNG VÀ ỨNG DỤNG

1. Phương pháp: Áp dụng biểu thức tọa độ của tích có hướng và công thức ứng dụng của tích có hướng.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u} = (3; 0; 1)$ và $\vec{v} = (2; 1; 0)$. Tính tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (2; 1; 2)$ và $\vec{b} = (1; 0; -2)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{u} = (2; 3; -1)$ và $\vec{v} = (5; -4; m)$. Tìm m để $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Ví dụ 4: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 3)$ và D nằm trên trục Oy và thể tích tứ diện $ABCD$ bằng 5. Tìm tọa độ của điểm D .

Ví dụ 5: Cho ba điểm $A(5; -1; 2)$, $B(1; -3; 7)$ và $M(x; y; 1)$. Với giá trị nào của x, y thì ba điểm A, B, M thẳng hàng?

Ví dụ 6: Cho $\vec{u} = (2; -1; 1)$, $\vec{v} = (m; 3; -1)$, $\vec{w} = (1; 2; 1)$. Tìm m để ba vector trên đồng phẳng.

Ví dụ 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $\triangle ABC$ có $A(4; 0; 2)$, $B(1; -4; -2)$ và $C(2; 1; 1)$. Tính diện tích S của tam giác ABC .

Ví dụ 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(2; 1; -3)$, $B(0; -2; 5)$ và $C(1; 1; 3)$. Tính diện tích hình bình hành $ABCD$.

Ví dụ 9: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2; 5; 1)$, $B(-2; -6; 2)$, $C(1; 2; -1)$ và điểm $M(m; m; m)$. Tìm giá trị m để $|\vec{MB} - 2\vec{AC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ 10: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2; 5; 1)$, $B(-2; -6; 2)$, $C(1; 2; -1)$ và điểm $M(m; m; m)$, Tìm giá trị m để $MA^2 - MB^2 - MC^2$ đạt giá trị lớn nhất.

DẠNG 5: ỨNG DỤNG GIẢI CÁC BÀI TOÁN THỰC TIỄN

Câu 1. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đã phát hiện một máy bay chiến đấu của Nga di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(500;200;8)$ đến điểm $N(800;300;10)$ trong 20 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo bằng bao nhiêu?



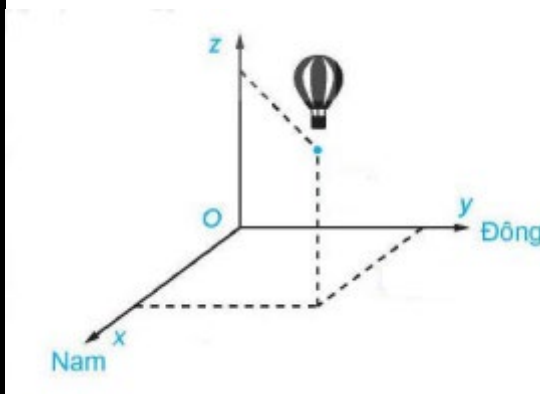
Câu 2. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đã phát hiện một máy bay chiến đấu của Mỹ di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(1000;600;14)$ đến điểm N trong 30 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo bằng $Q(1400;800;16)$. Xác định tọa độ vị trí điểm N .



Câu 3. Một chiếc khinh khí cầu bay lên tại điểm. Sau một thời gian bay, chiếc khinh khí cầu cách điểm xuất phát về phía Đông $10(km)$ và về phía Nam $5(km)$, đồng thời cách mặt đất $400(m)$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).

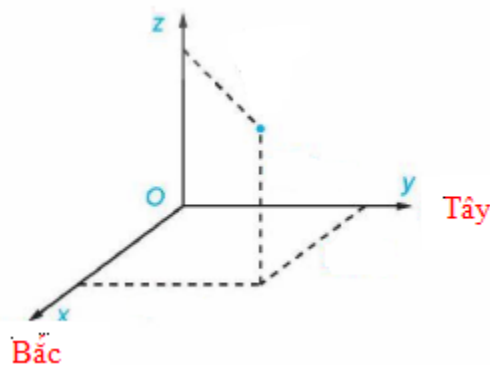
- Tìm tọa độ của chiếc khinh khí cầu đối với hệ trục tọa độ đã chọn.
- Xác định khoảng cách của chiếc khinh khí cầu với vị trí tại điểm xuất phát của nó.



Câu 4. Một chiếc máy bay không người lái bay lên tại điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay cách điểm xuất phát về phía Bắc $50(km)$ và về phía Tây $20(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).

- Tìm tọa độ của chiếc khinh khí cầu đối với hệ trục tọa độ đã chọn.
- Xác định khoảng cách của chiếc máy bay với vị trí tại điểm xuất phát của nó.



Câu 5. Hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Bắc $20(km)$ và về phía Tây $10(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,7(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Đông $30(km)$ và về phía Nam $25(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Xác định khoảng cách giữa hai chiếc máy bay.



Câu 6. Hai chiếc khinh khí cầu cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc khinh khí cầu thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông $100(km)$ và về phía Nam $80(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Chiếc khinh khí cầu thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc $70(km)$ và về phía Tây $60(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,8(km)$.



- a) Xác định khoảng cách của chiếc khinh khí cầu thứ nhất với vị trí tại điểm xuất phát của nó.
- b) Xác định khoảng cách giữa chiếc khinh khí cầu thứ nhất và chiếc khinh khí cầu thứ hai.

Câu 7. Ba chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông $60(km)$ và về phía Nam $40(km)$, đồng thời cách mặt đất $2(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc $80(km)$ và về phía Tây $50(km)$, đồng thời cách mặt đất $4(km)$. Chiếc máy bay thứ ba nằm chính giữa của chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời ba chiếc máy bay này thẳng hàng.



- a) Xác định khoảng cách giữa chiếc máy bay thứ nhất và chiếc máy bay thứ hai.
b) Xác định khoảng cách của chiếc máy bay thứ ba với vị trí tại điểm xuất phát của nó.

D. TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

- Câu 1:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vector $\vec{a}$ là
A. $(-1; 2; -3)$. **B.** $(2; -3; -1)$. **C.** $(2; -1; -3)$. **D.** $(-3; 2; -1)$.
- Câu 2:** Trong không gian $Oxyz$ với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz . Tính tọa độ của vector $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.
A. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1; -1; 1)$. **B.** $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1; 1; 1)$.
C. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; 1; -1)$. **D.** $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; -1; 1)$.
- Câu 3:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 3, $SA = 4$ và $SA \perp (ABCD)$. Chọn hệ trục $Oxyz$ có gốc tọa độ tại A; các điểm B, D, S lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz . Xác định tọa độ điểm C?
A. $(3; 0; 0)$ **B.** $(0; 0; 3)$ **C.** $(0; 3; 3)$ **D.** $(3; 3; 0)$
- Câu 4:** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2; AD = 3; AA' = 4$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với A, các điểm B; D; A' lần lượt thuộc $Ox; Oy; Oz$. Tọa độ của C' là:
A. $(2; 3; 0)$. **B.** $(2; 3; 4)$. **C.** $(0; 3; 4)$. **D.** $(2; 0; 4)$.
- Câu 5:** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 8; AD = 6; AA' = 4$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với A, các điểm B; D; A' lần lượt thuộc $Ox; Oy; Oz$. Gọi M là trung điểm $D'C'$. Tọa độ điểm M là:
A. $(4; 6; 0)$ **B.** $(0; 6; 4)$ **C.** $(4; 6; 4)$ **D.** $(4; 0; 4)$
- Câu 6:** Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ và $\vec{v} = (2; -1; 1)$. Tính $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$. **B.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$. **C.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$. **D.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5\sqrt{2}$.
- Câu 7:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -2)$ và $B(2; 2; 1)$. Vector $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là
A. $(-1; -1; -3)$ **B.** $(3; 1; 1)$ **C.** $(1; 1; 3)$ **D.** $(3; 3; -1)$
- Câu 8:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 2; 1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA .
A. $OA = \sqrt{5}$. **B.** $OA = 5$. **C.** $OA = 3$. **D.** $OA = 9$.

- Câu 9:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Tính tọa độ vectơ $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$.
A. $(0; -1; -5)$. **B.** $(2; -1; 1)$. **C.** $(2; 3; 1)$. **D.** $(0; -1; 1)$.
- Câu 10:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (1; 2; 3)$; $\vec{b} = (2; 2; -1)$; $\vec{c} = (4; 0; -4)$. Tọa độ của vectơ $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ là
A. $\vec{d} = (-7; 0; -4)$. **B.** $\vec{d} = (-7; 0; 4)$. **C.** $\vec{d} = (7; 0; -4)$. **D.** $\vec{d} = (7; 0; 4)$.
- Câu 11:** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 3; 2)$ và $\vec{b} = (1; 1; -1)$. Vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ có tọa độ là
A. $(3; 4; 1)$. **B.** $(-1; -2; 3)$. **C.** $(3; 5; 1)$. **D.** $(1; 2; 3)$.
- Câu 12:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (2; -3; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (3; -1; 5)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.
A. $(10; -2; 13)$. **B.** $(-2; 2; -7)$. **C.** $(-2; -2; 7)$. **D.** $(-2; 2; 7)$.
- Câu 13:** Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (-2; 1; 3)$. Vectơ cùng phương với vectơ $\vec{a}$ là
A. $\vec{b} = (-4; 1; 3)$. **B.** $\vec{c} = (2; -1; -3)$. **C.** $\vec{d} = (-4; 2; 3)$. **D.** $\vec{e} = (-4; -2; 3)$.
- Câu 14:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -2; 3)$, $B(-1; 2; 5)$, $C(0; 0; 1)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
A. $G(0; 0; 3)$. **B.** $G(0; 0; 9)$. **C.** $G(-1; 0; 3)$. **D.** $G(0; 0; 1)$.
- Câu 15:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -3; 1)$, $B(3; 0; -2)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB .
A. 26. **B.** 22. **C.** $\sqrt{26}$. **D.** $\sqrt{22}$.
- Câu 16:** Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (2; m-1; 3)$, $\vec{b} = (1; 3; -2n)$. Tìm m, n để các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.
A. $m = 7; n = -\frac{3}{4}$. **B.** $m = 4; n = -3$. **C.** $m = 1; n = 0$. **D.** $m = 7; n = -\frac{4}{3}$.
- Câu 17:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 5; 3)$ và $M(2; 1; -2)$. Tìm tọa độ của điểm B , biết M là trung điểm của AB .
A. $B(\frac{1}{2}; 3; \frac{1}{2})$. **B.** $B(-4; 9; 8)$. **C.** $B(5; 3; -7)$. **D.** $B(5; -3; -7)$.
- Câu 18:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 5)$, $B(5; -5; 7)$, $M(x; y; 1)$. Với giá trị nào của x, y thì A, B, M thẳng hàng.
A. $x = 4; y = 7$ **B.** $x = -4; y = -7$ **C.** $x = 4; y = -7$ **D.** $x = -4; y = 7$
- Câu 19:** Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = (m; 2; m+1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.
- Câu 20:** Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}(2; 0; -1)$. Tìm vectơ $\vec{v}$ biết $\vec{v}$ cùng phương với $\vec{u}$ và $\vec{u} \cdot \vec{v} = 20$
A. $(4; 0; -2)$ **B.** $(-8; 0; 4)$ **C.** $(8; 0; -4)$ **D.** $(8; 0; 4)$

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (2; 1; 0)$ và $\vec{b} = (-1; 0; -2)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

- A.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{25}$ **B.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{5}$ **C.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{25}$ **D.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{5}$

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$ và $P(1; m-1; 2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

- A.** $m = 2$ **B.** $m = -6$ **C.** $m = 0$ **D.** $m = -4$

Câu 23: Trong không gian Oxy , cho tam giác ABC biết $A(1; 3; 0)$, $B(-2; -2; 0)$, $C(3; 1; 0)$. Tính cosin góc A của tam giác.

- A.** $\cos A = \frac{2}{\sqrt{17}}$ **B.** $\cos A = \frac{1}{\sqrt{17}}$ **C.** $\cos A = -\frac{2}{\sqrt{17}}$ **D.** $\cos A = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai vector $\vec{i}$ và $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ là

- A.** 120° . **B.** 60° . **C.** 150° . **D.** 30° .

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-3; 4; 0)$, $\vec{b} = (5; 0; 12)$. Cosin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

- A.** $\frac{3}{13}$. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** $-\frac{5}{6}$. **D.** $-\frac{3}{13}$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(5; 1; 5)$, $B(4; 3; 2)$, $C(-3; -2; 1)$. Điểm $I(a; b; c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính $a + 2b + c$?

- A.** 1. **B.** 3. **C.** 6. **D.** -9.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; 1)$, $B(5; -1; 2)$, $C(3; 2; -4)$. Tọa độ điểm M thỏa mãn $\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC} = \vec{0}$ là

- A.** $M\left(4; -\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$. **B.** $M\left(4; -\frac{3}{2}; -\frac{9}{2}\right)$. **C.** $M\left(4; \frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$. **D.** $M\left(-4; -\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các vector $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = (m; 2; m+1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(a; 0; 0)$, $D(0; 2a; 0)$, $A'(0; 0; 2a)$ với $a \neq 0$. Độ dài đoạn thẳng AC' là

- A.** $|a|$. **B.** $2|a|$. **C.** $3|a|$. **D.** $\frac{3}{2}|a|$.

Câu 30: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 3; 1)$, $\vec{b} = (-1; 5; 2)$, $\vec{c} = (4; -1; 3)$ và $\vec{x} = (-3; 22; 5)$. Đẳng thức nào đúng trong các đẳng thức sau?

- A.** $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$. **B.** $\vec{x} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$.
C. $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$. **D.** $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

Câu 31: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (2; m-1; 3)$, $\vec{b} = (1; 3; -2n)$. Tìm m, n để các vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

A. $m = 7; n = -\frac{3}{4}$. **B.** $m = 7; n = -\frac{4}{3}$. **C.** $m = 4; n = -3$. **D.** $m = 1; n = 0$.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -2; 1)$, $B(0; 1; 2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng là

A. $M(4; -5; 0)$. **B.** $M(2; -3; 0)$. **C.** $M(0; 0; 1)$. **D.** $M(4; 5; 0)$.

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 3)$, $B(2; 3; -4)$, $C(-3; 1; 2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

A. $D(-4; -2; 9)$. **B.** $D(-4; 2; 9)$. **C.** $D(4; -2; 9)$. **D.** $D(4; 2; -9)$.

Câu 34: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $B(1; 2; -3)$, $C(7; 4; -2)$. Nếu điểm E thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$ thì tọa độ điểm E là:

A. $\left(3; \frac{8}{3}; -\frac{8}{3}\right)$ **B.** $\left(\frac{8}{3}; 3; -\frac{8}{3}\right)$. **C.** $\left(3; 3; -\frac{8}{3}\right)$ **D.** $\left(1; 2; \frac{1}{3}\right)$

Câu 35: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 1; -2)$ và $B(3; -1; 1)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$.

A. $M(9; -5; 7)$. **B.** $M(9; 5; 7)$. **C.** $M(-9; 5; -7)$. **D.** $M(9; -5; -5)$.

Câu 36: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -1)$, $\overrightarrow{AB} = (1; 3; 1)$ thì tọa độ của điểm B là:

A. $B(2; 5; 0)$. **B.** $B(0; -1; -2)$. **C.** $B(0; 1; 2)$. **D.** $B(-2; -5; 0)$

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A = (1; 0; 1)$, $B = (2; 1; 2)$ và $D = (1; -1; 1)$. Tọa độ điểm C là

A. $(2; 0; 2)$. **B.** $(2; 2; 2)$. **C.** $(2; -2; 2)$. **D.** $(0; -2; 0)$.

Câu 38: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(2; 4; 0)$, $B(4; 0; 0)$, $C(-1; 4; -7)$ và $D'(6; 8; 10)$. Tọa độ điểm B' là

A. $B'(8; 4; 10)$. **B.** $B'(6; 12; 0)$. **C.** $B'(10; 8; 6)$. **D.** $B'(13; 0; 17)$.

Câu 39: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $D(1; -1; 1)$, $C'(4; 5; -5)$. Tính tọa độ đỉnh A' của hình hộp.

A. $A'(4; 6; -5)$. **B.** $A'(2; 0; 2)$. **C.** $A'(3; 5; -6)$. **D.** $A'(3; 4; -6)$.

Câu 40: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là

A. $\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$. **B.** $\left(\frac{11}{3}; -2; 1\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; \frac{1}{3}\right)$. **D.** $(-2; 11; 1)$.

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(-3; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $D(0; 0; 1)$, $A'(1; 2; 3)$. Tìm tọa độ điểm C' .

- A.** $C'(10;4;4)$. **B.** $C'(-13;4;4)$. **C.** $C'(13;4;4)$. **D.** $C'(7;4;4)$.

Câu 42: Trong không gian $Oxyz$, cho véc tơ $\vec{u} = (1;1;-2)$, $\vec{v} = (1;0;m)$. Tìm tất cả giá trị của m để góc giữa $\vec{u}$, $\vec{v}$ bằng 45° .

- A.** $m = 2$. **B.** $m = 2 \pm \sqrt{6}$. **C.** $m = 2 - \sqrt{6}$. **D.** $m = 2 + \sqrt{6}$.

Câu 43: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0), B(2;0;-3)$. Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k = -\frac{1}{2}$ có tọa độ là:

- A.** $M\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; -1\right)$. **B.** $M\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -2\right)$. **C.** $M\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; 1\right)$. **D.** $M\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -2\right)$.

Câu 44: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u}(2;0;-1)$. Tìm vector $\vec{v}$ biết $\vec{v}$ cùng phương với $\vec{u}$ và $\vec{u} \cdot \vec{v} = 20$.

- A.** $(4;0;-2)$. **B.** $(-8;0;4)$. **C.** $(8;0;-4)$. **D.** $(8;0;4)$.

Câu 45: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (2;m-1;3), \vec{b} = (1;3;-2n)$. Tìm m, n để các vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

- A.** $m = 7; n = -\frac{3}{4}$. **B.** $m = 4; n = -3$. **C.** $m = 1; n = 0$. **D.** $m = 7; n = -\frac{4}{3}$.

Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;0;0), B(0;1;0), C(0;0;1), D(1;1;1)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Tọa độ điểm G là trung điểm MN là:

- A.** $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

Câu 47: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm O, A, B, C sao cho O, A, B không thẳng hàng. Tập hợp những điểm M sao cho $\overrightarrow{MC}(\overrightarrow{MO} - 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0$ là

- A.** một mặt phẳng. **B.** một điểm.
C. tập hợp rỗng. **D.** một đường thẳng.

Câu 48: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1), B(2;1;0), C(-3;-1;1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD} = 3S_{\triangle ABC}$

- A.** $D(8;7;-1)$. **B.** $\begin{bmatrix} D(-8;-7;1) \\ D(12;1;-3) \end{bmatrix}$. **C.** $\begin{bmatrix} D(8;7;-1) \\ D(-12;-1;3) \end{bmatrix}$. **D.** $D(-12;-1;3)$

E. TRẢ LỜI ĐÚNG SAI

Câu 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(1;0;1), B(2;1;2), C'(4;5;-5), D(1;-1;1)$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

- A.** $\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + 2\overrightarrow{C'C} = \vec{0}$
B. $C(2;0;4)$
C. $B'(4;6;-5)$
D. $D'(4;4;6)$

- Câu 2:** Trong không gian $Oxyz$, gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vector đơn vị, điểm $M(2;0;1), N(3;2;4)$. Các khẳng định sau đúng hay sai?
- A. $\overrightarrow{MN} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
 B. $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{k}$
 C. $\overrightarrow{ON} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$
 D. $|\overrightarrow{NO}| = \sqrt{27}$
- Câu 3:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ giả sử $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Các khẳng định sau **đúng** hay **sai**?
- A. $\vec{u} = (2;0;-1)$
 B. $\vec{a} = (-1;2;-3)$
 C. $\vec{u} + \vec{v} = (1;2;3)$
 D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$
- Câu 4:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 3, $SA = 4$ và $SA \perp (ABCD)$. Chọn hệ trục $Oxyz$ có gốc tọa độ tại A; các điểm B, D, S lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz. Các khẳng định sau **đúng** hay **sai**?
- A. $A(0;0;0)$
 B. $B(0;3;0)$
 C. $C(3;0;0)$
 D. $S(4;0;0)$
- Câu 5:** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2; AD = 3; AA' = 4$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với A, các điểm B; D; A' lần lượt thuộc Ox; Oy; Oz. Các khẳng định sau **đúng** hay **sai**?
- A. $\overrightarrow{AA'} = -4\vec{k}$
 B. $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}$
 C. $\overrightarrow{AD} = 3\vec{i}$
 D. $C'(2;3;4)$
- Câu 6:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh 3; SA vuông góc với đáy và $SA = 4$. Chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho gốc O trùng với A; các điểm B; D; S lần lượt thuộc Ox; Oy; Oz. Các khẳng định sau **đúng** hay **sai**?
- A. $\overrightarrow{AD} = 3\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$
 B. $\overrightarrow{AS} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k}$
 C. $\overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k}$
 D. $\overrightarrow{SC} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$
- Câu 7:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$; $D(0;2a;0)$, $A'(0;0;2a)$ với $a \neq 0$. Các khẳng định sau **đúng** hay **sai**?

- A. $\overrightarrow{AB} = (a; 0; 0)$
- B. $\overrightarrow{AA'} = (0; 0; a)$
- C. $\overrightarrow{AC'} = (a; 2a; 2a)$
- D. $\overrightarrow{AD} = (a; 2a; 0)$

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 2)$ và $B(-1; 3; 0)$.

- A. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng $(0; 1; 1)$.
- B. Tọa độ vector $\overrightarrow{AB} = (2; -4; 2)$.
- C. Tọa độ vector $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.
- D. Tọa độ vector $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (-2; 4; -2)$

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 3; 2)$ và $\vec{b} = (1; 1; -1)$.

- A. Tọa độ vector $\vec{a} - \vec{b} = (1; 2; 3)$.
- B. Tích vô hướng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 6.
- C. Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.
- D. Cosin góc giữa vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\frac{\sqrt{51}}{51}$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (-2; 1; -3)$, $\vec{b} = (-1; -3; 2)$ và điểm $A(4; 6; -3)$.

- A. Tọa độ vector $\vec{a} - 2\vec{b} = (0; 1; -1)$.
- B. Tọa độ điểm $B(2; 7; -6)$ thì $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.
- C. Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương hướng.
- D. Góc giữa vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 120° .

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$.

- A. Độ dài vector $\vec{a}$ bằng $\sqrt{2}$.
- B. Vector $\vec{b}$ vuông góc với $\vec{a}$.
- C. Vector $\vec{b}$ vuông góc với $\vec{c}$.
- D. Tọa độ vector $3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ bằng $(-2; 4; -1)$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau?

- A. $|\vec{a}| = \sqrt{2}$.
- B. $\vec{b} \perp \vec{a}$.
- C. $\vec{b} \perp \vec{c}$.
- D. $2|\vec{c}| = 6$.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(4; 2; 1)$, $B(2; 1; 3)$, $C(-1; 3; -2)$.

- A. Tọa độ trọng tâm tam giác ABC bằng $\left(\frac{5}{3}; 2; \frac{2}{3}\right)$.

B. Tọa độ trung điểm đoạn thẳng AB bằng $\left(3; \frac{3}{2}; 2\right)$

C. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ điểm $D = (1; 4; -4)$.

D. Ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 5; -1)$, $B(7; x; 1)$, $C(9; 2; y)$.

A. Ba điểm A, B, C thẳng hàng thì $x + y = 5$.

B. Điểm $G\left(\frac{19}{3}; \frac{8}{3}; 3\right)$ là trọng tâm tam giác ABC thì $x = 1; y = 3$.

C. Tam giác ABC vuông tại A thì $x = 13, y = -1$.

D. Tích vô hướng của $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3x + 2y + 41$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (1; 2; 3)$; $\vec{b} = (2; 2; -1)$, $\vec{c} = (4; 0; -4)$.

A. $3\vec{a} = (1; 6; 9)$.

B. $\vec{a} + \vec{b} = (3; 4; 2)$.

C. $\vec{a} - \vec{c} = (3; -2; -7)$.

D. $\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} = (7; 0; -4)$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$; $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$.

A. Tọa độ vector $\vec{a} = (-1; 3; 4)$.

B. Cosin góc giữa hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ bằng $\frac{1}{2}$.

C. Tích vô hướng của hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ bằng 14.

D. Hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ vuông góc với nhau.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (2; 1; -2)$, $\vec{b} = (1; 2; -4)$, $\vec{c} = (-1; -3; 3)$.

A. $\vec{a} = 2\vec{b}$.

B. $|\vec{a}| = 3|\vec{b}|$.

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$

D. $2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c} = (-4; -19; 23)$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn vector $\vec{a} = (2; 3; 1)$, $\vec{b} = (-1; 5; 2)$, $\vec{c} = (4; -1; 3)$ và $\vec{x} = (-3; 22; 5)$.

A. $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.

B. Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

C. Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{c}$ không cùng phương.

D. Hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ vuông góc với nhau.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(-1; 1; 2)$, $B(1; 0; 3)$, $C(0; 2; -2)$.

A. Tọa độ vector $\overrightarrow{BC} = (-1; 2; -5)$.

B. Tọa độ vector $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

C. Tọa độ điểm D là $D(-2; 3; -3)$.

D. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AD} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(2;1;0), C(0;3;0), C'(-1;2;1), D'(0;-2;0)$.

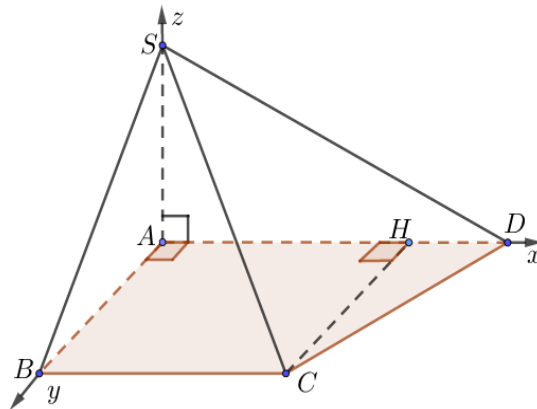
A. Tọa độ các điểm A', B' là $A'(1;0;-1), B'(0;4;2)$.

B. Tọa độ các điểm B, D là $B(1;5;1), D(1;-1;-1)$.

C. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$.

D. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{B'D} = \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2AB = 2BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$), $SA = 2a$. Gọi H là hình chiếu điểm C trên cạnh AD .



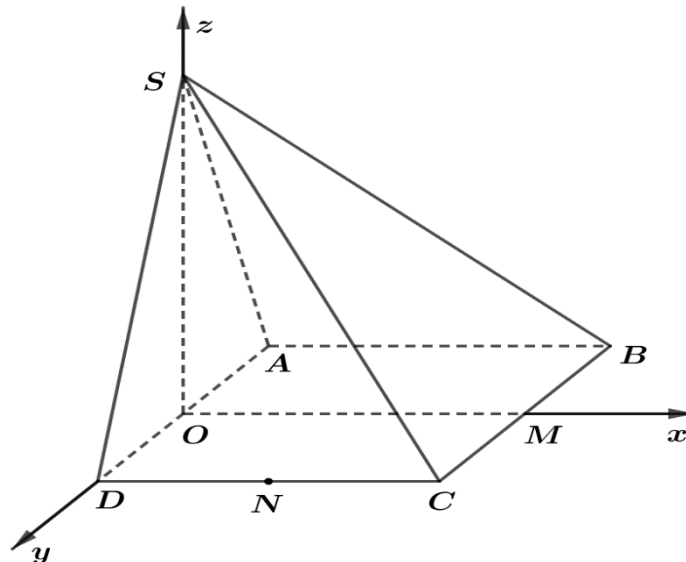
A. Tọa độ các điểm A, B là $A(0;0;0), B(a;a;0)$.

B. Tọa độ các điểm C, D là $C(a;a;0), D(2a;0;0)$.

C. Tọa độ điểm S là $S(0;0;2a)$.

D. Tọa độ điểm H là $H(a;0;0)$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có các cạnh bằng 1, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi O, M và N lần lượt là trung điểm của AD, BC và CD . Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



A. Tọa độ các điểm A, B là $A\left(0; -\frac{1}{2}; 0\right), B\left(1; -\frac{1}{2}; 0\right)$.

B. Tọa độ các điểm C, D là $C\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), D\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$.

C. Tọa độ điểm S là $S\left(0; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

D. Tọa độ các điểm M, N là $M(1; 0; 0), N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (2; -2; -4), \vec{b} = (1; -1; 1)$.

A. $\vec{a} + \vec{b} = (3; -3; -3)$

B. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương

C. $|\vec{b}| = \sqrt{3}$

D. $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$

Câu 24: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -5; 3), \vec{b} = (0; 2; -1), \vec{c} = (1; 7; 2)$.

A. $\vec{u} = 3\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c}$ với $\vec{u} = (11; 22; 18)$.

B. $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b} - 2\vec{c}$ với $\vec{x} = \left(-1; -\frac{115}{6}; -\frac{7}{6}\right)$.

C. $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ với $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

D. $\vec{y} = \vec{b} - \vec{c}$ với $\vec{y} = -\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{k} - 4\vec{j}$ và $\vec{b} = (m - n; 4m - 6n; n^2 - 3m + 2)$, với m, n là tham số.

a) Tọa độ $\vec{a} = (1; 3; -4)$.

b) Dựng điểm A thỏa $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ thì $A(1; -4; 3)$.

c) Tồn tại giá trị của m và n để $\vec{b} = \vec{0}$.

d) Nếu $\vec{a} = \vec{b}$ thì $m + n = 9$.

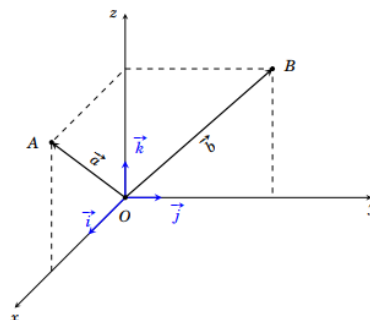
Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 2; 0), \vec{b} = 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Dựng $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

a) $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{k}$.

b) Tọa độ $\vec{b} = (0; 2; 2)$.

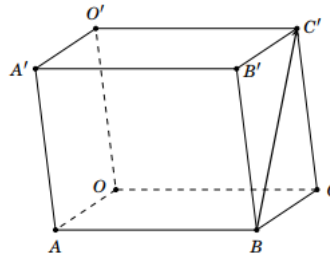
c) Tọa độ $\overrightarrow{AB} = (-2; 2; 0)$

d) Góc $\widehat{AOB} = 45^\circ$.



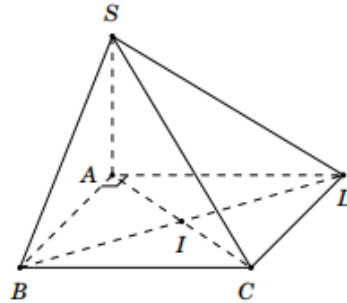
Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ có $A(1;1;-1), B(0;3;0), \overrightarrow{BC'} = (2;-6;6)$. Gọi H, K lần lượt là trọng tâm của tam giác $OA'O'$ và $CB'C'$.

- a) Tọa độ điểm C' là $(2;-3;6)$
- b) Tọa độ điểm O' là $(3;-5;5)$.
- c) Tọa độ véc tơ $\overrightarrow{AB'} = (-2;3;-6)$.
- d) Tọa độ véc tơ $\overrightarrow{HK} = (-1;2;-1)$.



Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 1, AD = 2, SA$ vuông góc với mặt đáy và $SA = 3$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như sau: Gốc tọa độ O trùng với điểm A , các véc tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{i}, \vec{j}$ và $\vec{k}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

- a) Tọa độ $D(0;2;0)$.
- b) Tọa độ $C(1;2;3)$.
- c) Tọa độ $S(2;0;0)$
- d) Tọa độ $I(1;1;0)$.

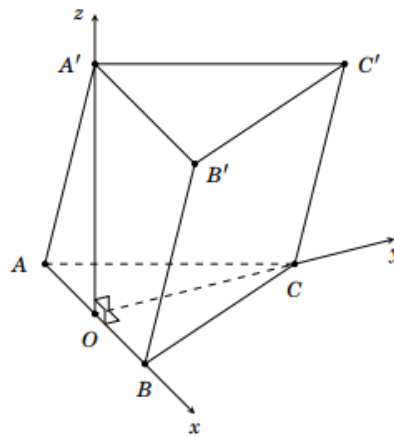


Câu 30: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tọa độ $A(-1;0;0)$.
- b) $\overrightarrow{AC'} = (2\sqrt{2};0;2)$.
- c) Tọa độ $D'(0;\sqrt{2};2)$.
- d) $\overrightarrow{BD'} = (0;0;2)$.

Câu 31: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2 như hình vẽ. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trung điểm cạnh AB , góc $\widehat{A'AO} = 60^\circ$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với trung điểm của đoạn BC), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tọa độ điểm $A(-1;0;0)$.
- b) Tọa độ điểm $C(0;\sqrt{3};0)$.
- c) Tọa độ điểm $A'(0;-1;\sqrt{3})$.
- d) Tọa độ điểm $C'(1;\sqrt{3};\sqrt{3})$.

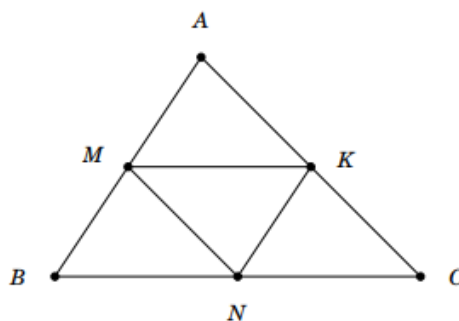


Câu 32: Cho các điểm $A(1;-2;3), B(-2;1;2), C(3;-1;2)$.

- a) $\overrightarrow{AB} = (-3;3;-1)$.
- b) $\overrightarrow{AC} = (-2;-1;1)$.
- c) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$.
- d) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

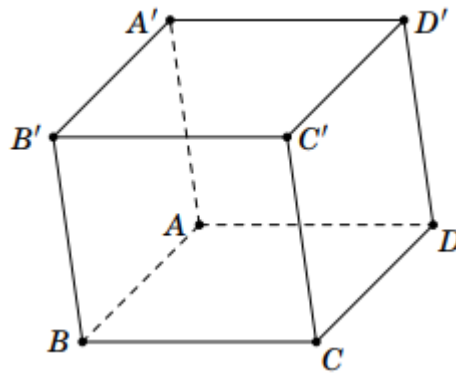
Câu 33: Cho ba điểm $A(3;3;-6), B(1;3;2)$ và $C(-1;-3;1)$. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của AB, BC và CA .

- a) Tọa độ $M(2;3;2)$.
- b) Với G là trọng tâm tam giác ABC thì $GC = 2\sqrt{5}$.
- c) Trọng tâm tam giác MNK là $E(1;1;-1)$.
- d) Với $D(-3;-3;9)$ thì tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.



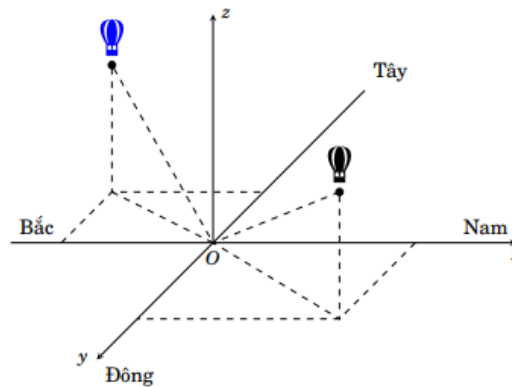
Câu 34: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$, biết điểm $A(0;0;0), B(1;0;0), C(1;2;0), D'(-1;3;5)$. Gọi M, N là tâm của các hình bình hành $ABB'A', ADD'A'$.

- a) Tọa độ $D(0;2;0)$. b) Tọa độ $A'(-1;1;5)$.
- c) Tọa độ $\overrightarrow{MN} = (-1;1;0)$. d) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'}| = \sqrt{29}$.



Câu 35: Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,5 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 1,5 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,8 km.

Chọn hệ trục $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (Hình bên dưới), đơn vị đo lấy theo kilomet.



- Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ nhất là $(2; 1; 0,5)$.
- Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ hai là $(-1, 1,5; -1; 0,8)$.
- Khoảng cách từ điểm xuất phát đến khinh khí cầu thứ nhất bằng $\sqrt{21}$ km.
- Khoảng cách hai chiếc khinh khí cầu là 3,92 km (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 36: Cho ba vec-tơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$ và $\vec{c} = (1; 1; 1)$.

- $|\vec{a}| = 2$.
- $|\vec{c}| = \sqrt{3}$.
- $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{2}{\sqrt{5}}$.
- $\vec{b} \perp \vec{c}$.

Câu 37: Cho hai vectơ $\vec{u} = (0; 2; 3)$ và $\vec{v} = (m-1; 2m; 3)$.

a) $|\vec{u}| = \sqrt{13}$.

b) $|\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow m = -\frac{3}{5}$.

c) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow m = 1$.

d) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$.

Câu 38: Cho tam giác ABC có $A(1; 2; 0), B(0; 1; 1), C(2; 1; 0)$.

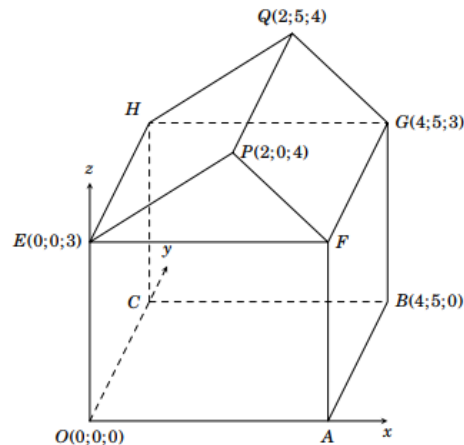
a) Tam giác ABC vuông tại A .

b) Chu vi tam giác là $\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

c) Diện tích tam giác ABC là $\sqrt{6}$.

d) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 39: Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



a) Tọa độ của các điểm $A(5; 0; 0)$.

b) Tọa độ của các điểm $H(0; 5; 3)$.

c) Góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG , hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ gọi là góc dốc của mái nhà. Số đo của góc dốc của mái nhà bằng $26,6^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).

d) Chiều cao của ngôi nhà là 4.

F. TRẢ LỜI NGẮN

- Câu 1:** Trong không gian Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (3; 2; 5)$ và $\vec{b} = (3m + 2; 3; 6 - n)$. Tính giá trị biểu thức $6m + 2n$ để hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ bằng nhau.
- Câu 2:** Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có ba đỉnh $A(1; 2; 3), B(-1; 2; 0), C(3; 2; -3)$ và $G(a; b; c)$ là trọng tâm của tam giác ABC . Tính giá trị biểu thức $P = a + b + c$.
- Câu 3:** Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 0; 0), B(0; 0; 1), C(2; 1; 1)$. Diện tích của tam giác ABC bằng:
- Câu 4:** Trong không gian Oxy , cho hai điểm $A(1; 2; 3)$ và $B(2; 1; 1)$. Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng. Tính giá trị biểu thức $x_0 + y_0 + z_0$.
- Câu 5:** Trong không gian Oxy , cho ba điểm $A(1; -1; 1), B(3; 1; 2)$ và $C(-1; 0; 3)$. Có bao nhiêu điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang có 2 cạnh đáy AB, CD và có góc tại D bằng 45° .
- Câu 6:** Trong không gian Oxy , cho tam giác ABC , biết $A(2; 0; 0), B(0; 3; 1), C(-3; 6; 4)$. Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MC = 2MB$. Tính độ dài AM .
- Câu 7:** Trong không gian Oxy , cho ba điểm $A(1; 2; -1), B(2; -1; 3), C(-2; 3; 3)$. Điểm $M(a; b; c)$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCM$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2 - c^2$.
- Câu 8:** Trong không gian Oxy , cho hai điểm trên trục hoành mà khoảng cách từ đó đến điểm $M(-3; 4; 8)$ bằng 12. Tính tổng hai hoành độ của chúng.
- Câu 9:** Trong không gian Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (2; 5; -3), \vec{b} = (0; -4; 0)$. Tính tích vô hướng của hai vector $\vec{a}, \vec{b}$.
- Câu 10:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $\vec{OA} = \vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k}, \vec{OB} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}, \vec{OC} = -3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$. Điểm $D(x; y; z)$ sao cho $ABCD$ là hình bình hành. Tính $P = 2x + y - z$.
- Câu 11:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{k}; \vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$. Tọa độ vector $\vec{a} = (x; 0; 3); \vec{b} = (3; y; 0)$. Tính $P = x^2 + y^2$.
- Câu 12:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{OM} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}; \vec{ON} = -\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$. Tọa độ điểm $M(2; -3; a); N(-1; b; -1)$. Tính $T = 2a - 3b$.
- Câu 13:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (3; -5; 2); \vec{b} = (2; 1; -1)$. Vector $\vec{a} = 3\vec{i} - y\vec{j} + 2\vec{k}; \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$. Tính $P = y^2 - z^2$.
- Câu 14:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, $M(1; 0; -2), N(5; 1; -6)$. Tính $\vec{OM} = \vec{i} + y\vec{j} - 2\vec{k}; \vec{ON} = x\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}$. Tính $P = x^3 + y^3$.
- Câu 15:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 5, $SA = 2$ và $SA \perp (ABCD)$. Chọn hệ trục $Oxyz$ có gốc tọa độ tại A; các điểm B, D, S lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz. Tọa độ điểm $C(x; y; z)$. Tính $P = x^3 + y^3 + z^3$.

- Câu 16:** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2; AD = 3; AA' = 4$. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với A, các điểm B; D; A' lần lượt thuộc Ox; Oy; Oz. Tìm tọa độ của $C'(x; 3; z)$. Tính $P = x - z$.
- Câu 17:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 3, $SA = 4$ và $SA \perp (ABCD)$. Chọn hệ trục Oxyz có gốc tọa độ tại A; các điểm B, D, S lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz. Gọi M là trung điểm SC. Tìm tọa độ điểm $M(x; y; z)$. Tính $T = x + y - \frac{3}{2}z$.
- Câu 18:** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tính $|\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + 2\overrightarrow{CC'}|$.
- Câu 19:** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 8; AD = 6; AA' = 4$. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với A, các điểm B; D; A' lần lượt thuộc Ox; Oy; Oz. Tọa độ điểm $C'(x; y; z)$. Tính $P = x - 2y + z$.
- Câu 20:** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-2; 3; 3)$. Điểm $M(a; b; c)$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCM$, khi đó $P = a^2 + b^2 - c^2$ có giá trị bằng
- Câu 21:** Trong không gian Oxyz, cho ba vector $\vec{a} = (-2; 2; 0)$; $\vec{b} = (2; 2; 0)$ và $\vec{c} = (2; 2; 2)$. Giá trị của $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ bằng
- Câu 22:** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC có $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$. Gọi $D(a; b; c)$ là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC. Giá trị của $a + b + 2c$ bằng
- Câu 23:** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(2; -3; 4)$, $B(1; y; -1)$, $C(x; 4; 3)$. Để ba điểm A, B, C thẳng hàng thì tổng giá trị $5x + y$ là:
- Câu 24:** Trong không gian Oxy, cho ba vector $\vec{a} = (1; m; 2)$, $\vec{b} = (m + 1; 2; 1)$, $\vec{c} = (0; m - 2; 2)$. Tổng các giá trị thực của tham số m để $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{c}|$.
- Câu 25:** Trong không gian Oxy, cho hai vector $\vec{a} = (1; -1; 0)$, $\vec{b} = (2; 2t - 1; 0)$. Xác định giá trị t để hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương.
- Câu 26:** Trong không gian Oxy, cho hai vector $\vec{a} = (1; 2; -2)$, $\vec{b} = (-1; -1; 0)$. Số đo độ của góc giữa hai vector $\vec{a}, \vec{b}$?
- Câu 27:** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(0; 2; -2)$, $B(2; 2; -4)$. Giả sử $I(a; b; c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB. Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.
- Câu 28:** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(-2; 3; 1)$, $B(2; 1; 0)$, $C(-3; -1; 1)$. Giả sử điểm $D(a; b; c)$ sao cho ABCD là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD} = 3S_{\Delta ABC}$. Tính $a + b + c$

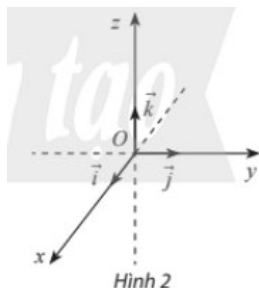
- Câu 29:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B . Ba đỉnh $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(6;1;0)$ Hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$. Tính $a+b+c$
- Câu 30:** Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;2;1)$, $B\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. Biết $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác OAB . Tính $S = a+b+c$.

BÀI 2: TOẠ ĐỘ CỦA VECTO TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Trong không gian, cho ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc. Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là ba vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz . Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$ trong không gian hay gọi đơn giản là hệ tọa độ $Oxyz$.



Nhận xét:

a) Điểm O được gọi là gốc tọa độ.

Các trục Ox, Oy, Oz được gọi là các trục tọa độ.

Các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$ đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng tọa độ.

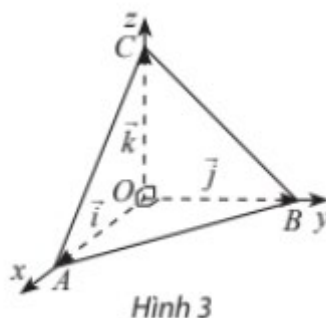
Không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.

b) Vì $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là ba vectơ đơn vị đôi một vuông góc với nhau nên ta có

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1 \text{ và } \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0.$$

Ví dụ 1. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và có độ dài bằng 1. Vẽ hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc là O , các điểm A, B, C lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz và chỉ ra các vectơ đơn vị trên các trục tọa độ.

Lời giải



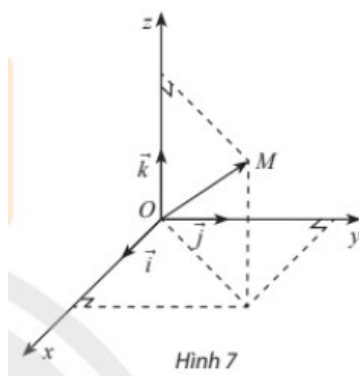
Với O là gốc tọa độ, ta vẽ được các trục Ox, Oy, Oz như Hình 3. Ba vectơ đơn vị trên ba trục lần lượt là $\vec{i} = \overrightarrow{OA}, \vec{j} = \overrightarrow{OB}, \vec{k} = \overrightarrow{OC}$.

II. TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM VÀ VECTO

1. Tọa độ của điểm

Ta có định nghĩa sau:

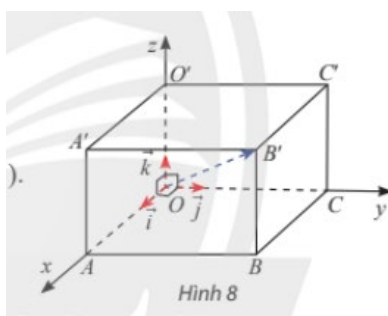
Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M . Nếu $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(x; y; z)$ là tọa độ của điểm M đối với hệ trục tọa độ $Oxyz$ và viết $M = (x; y; z)$ hoặc $M(x; y; z)$; x là hoành độ, y là tung độ, z là cao độ của điểm M .



Hình 7

Ví dụ 2. Cho hình hộp chữ nhật $OABC \cdot O'A'B'C'$ có cạnh $OA = 4, OC = 6, OO' = 3$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tọa độ O ; các điểm A, C, O' lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz . Xác định tọa độ các điểm A, B, B' .

Lời giải



Hình 8

Ta có: $\overrightarrow{OA} = 4\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$, suy ra $A(4; 0; 0)$;

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}$, suy ra $B(4; 6; 0)$; $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OO'} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}$, suy ra $B'(4; 6; 3)$

2. Tọa độ của vector

Ta có định nghĩa sau:

Trong không gian $Oxyz$, cho vector $\vec{a}$. Nếu $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(a_1; a_2; a_3)$ là tọa độ của vector $\vec{a}$ đối với hệ tọa độ $Oxyz$ và viết $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ hoặc $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$.

Nhận xét: Trong không gian $Oxyz$, ta có:

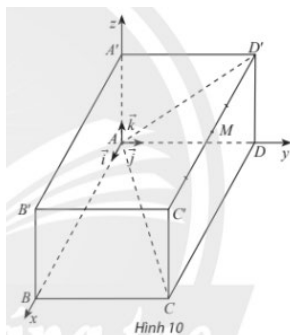
Tọa độ của điểm M là tọa độ của vector $\overrightarrow{OM}$, tức là $M = (x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$.

Điều kiện để hai vector bằng nhau:

Cho $\vec{a} = (x; y; z), \vec{b} = (x'; y'; z')$. Khi đó: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O , các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và có $AB=8, AD=6, AA'=4$. Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm của cạnh $C'D'$.

Lời giải



Để tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$, ta cần biểu diễn $\overrightarrow{AB}$ theo ba vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Do $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\vec{i}$ và $|\overrightarrow{AB}| = AB = 8 = 8|\vec{i}|$ nên $\overrightarrow{AB} = 8\vec{i}$ hay $\overrightarrow{AB} = 8\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$.

Tương tự, ta cũng có: $\overrightarrow{AD} = 0\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}, \overrightarrow{AA'} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k}$.

Trong hình bình hành $ABCD$, ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}$.

Trong hình bình hành $AA'C'C$, ta có: $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$ Suy ra

$$\overrightarrow{AB} = (8; 0; 0); \overrightarrow{AC} = (8; 6; 0); \overrightarrow{AC'} = (8; 6; 4).$$

$$\text{Vì } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) = \frac{1}{2}(8\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k} + 6\vec{j} + 4\vec{k}) = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k} \text{ nên } \overrightarrow{AM} = (4; 6; 4).$$

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

1. Trong không gian $Oxyz$, biết:

a) $\vec{a} = 5\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}, \vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{k}$. Tìm tọa độ các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$.

b) $\overrightarrow{OM} = 4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, \overrightarrow{ON} = 8\vec{i} - 5\vec{j}$. Tìm tọa độ các điểm M, N .

Lời giải

a) $\vec{a} = 5\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k} = (5; 7; -3), \vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{k} = (2; 0; 4)$

b) $\overrightarrow{OM} = 4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} = (4; -1; 3) \Rightarrow M(4; -1; 3); \overrightarrow{ON} = 8\vec{i} - 5\vec{j} = (8; 5; 0) \Rightarrow N(8; 5; 0)$

2. Trong không gian $Oxyz$, biết:

a) $\vec{a} = (-2; 5; -7), \vec{b} = (4; 0; 1)$. Tính $\vec{a}, \vec{b}$ theo các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

b) $A(7; -2; 1), B(0; 5; 0)$. Tính $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ theo các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Lời giải

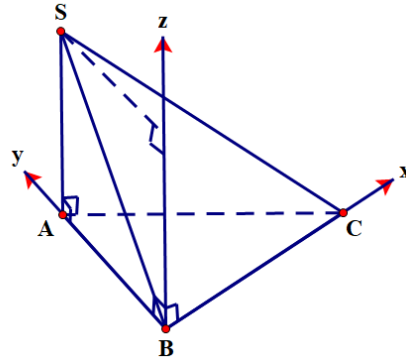
a) $\vec{a} = (-2; 5; -7) = -2\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}, \vec{b} = (4; 0; 1) = 4\vec{i} + \vec{k}$

b) $\overrightarrow{OA} = (7; -2; 1) = 7\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\overrightarrow{OA} = (0; 5; 0) = 5\vec{j}$

3. Cho tứ diện $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông tại B , $BC = 3$, $BA = 2$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có độ dài bằng 2 (Hình 13).

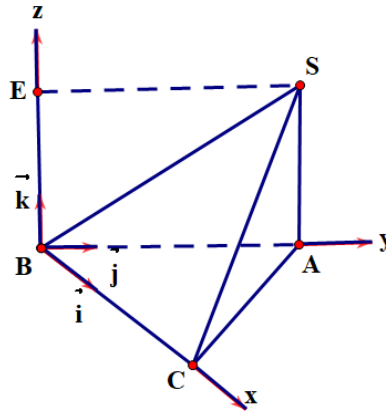
a) Xác định một hệ tọa độ dựa trên gợi ý của hình vẽ và chỉ ra các vectơ đơn vị trên các trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ các điểm A, B, C, S .



Lời giải

a)



Các vectơ đơn vị trên ba trục Ox, Oy, Oz lần lượt là $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$ với độ dài $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$ lần lượt bằng

$$\frac{1}{3}BC; \frac{1}{2}BA; \frac{1}{2}SA$$

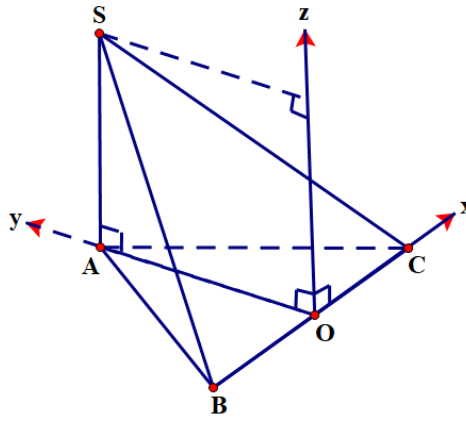
b) Vì B trùng với gốc tọa độ nên $B(0;0;0)$.

Vì $\vec{j}$ và $\overrightarrow{BA}$ cùng hướng và $BA = 2$ nên $\overrightarrow{BA} = 2\vec{j}$. Suy ra $A(0;2;0)$.

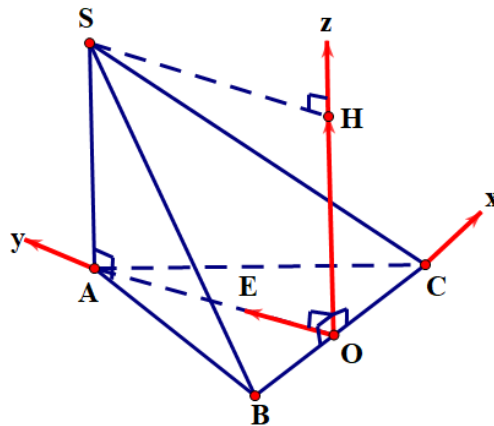
Vì $\vec{i}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng và $BC = 3$ nên $\overrightarrow{BC} = 3\vec{i}$. Suy ra $C(3;0;0)$.

Gọi E là hình chiếu của S lên trục Oz . Ta có $BE = AS = 2$. Vì $\vec{k}$ và $\overrightarrow{BE}$ cùng hướng và $BE = 2$ nên $\overrightarrow{BE} = 2\vec{k}$. Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE} = 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Suy ra $S(0;2;2)$.

4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2, SA vuông góc với đáy và SA bằng 1 (Hình 14). Thiết lập hệ tọa độ như hình vẽ, hãy vẽ các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz và tìm tọa độ các điểm A, B, C, S .



Lời giải



Các vectơ đơn vị trên ba trục Ox, Oy, Oz lần lượt là $\vec{i} = \overrightarrow{OC}$; $\vec{j} = \overrightarrow{OE}$; $\vec{k} = \overrightarrow{OH}$ với E là điểm thuộc tia Oy sao cho $OE = 1$ và H là điểm thuộc tia Oz sao cho $OH = 1$.

Vì $\triangle ABC$ đều và $AO \perp BC$ nên O là trung điểm của BC . Mà $BC = 2$ nên $OB = OC = 1$ và $OA = \sqrt{3}$.

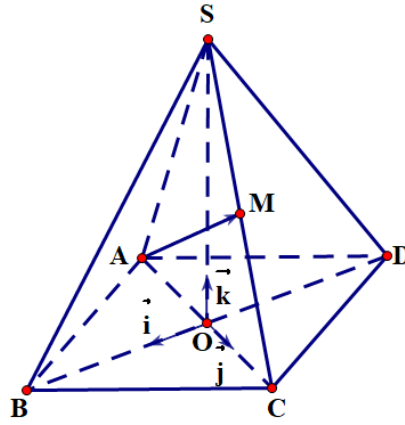
Vì $\vec{j}$ và $\overrightarrow{OA}$ cùng hướng và $OA = \sqrt{3}$ nên $\overrightarrow{OA} = \sqrt{3}\vec{j}$. Suy ra $A(0; \sqrt{3}; 0)$.

Vì $\vec{i}$ và $\overrightarrow{OC}$ cùng hướng và $OC = 1$ nên $\overrightarrow{OC} = \vec{i}$. Suy ra $C(1; 0; 0)$.

Vì $\vec{i}$ và $\overrightarrow{OB}$ ngược hướng và $OB = 1$ nên $\overrightarrow{OB} = -\vec{i}$. Suy ra $B(-1; 0; 0)$.

Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OH} = \sqrt{3}\vec{j} + \vec{k}$. Suy ra $S(0; \sqrt{3}; 1)$.

5. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng 5, giao điểm hai đường chéo AC và BD trùng với gốc O . Các vectơ $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và $OA = OS = 4$ (Hình 15). Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS}$ và $\overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm của cạnh SC .



Lời giải

Vì $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng 5, O là giao điểm của AC và BD nên O là trung điểm của AC và BD .

Xét $\triangle OAB$ vuông tại O , có $OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$

Vì $\overrightarrow{OA}$ và $\vec{i}$ cùng hướng và $OB = 3$ nên $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i}$. Vì $\overrightarrow{OA}$ và $\vec{j}$ cùng hướng và $OA = 4$ nên $\overrightarrow{OA} = -4\vec{j}$.

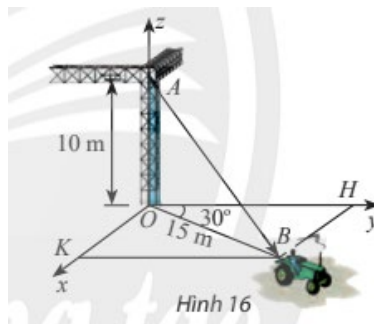
Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. Do đó $\overrightarrow{AB} = (3; 4; 0)$.

Có $AC = 2OA = 8$ và $\overrightarrow{AC}$ và $\vec{j}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{AC} = 8\vec{j}$. Do đó $\overrightarrow{AC} = (0; 8; 0)$.

Có $\overrightarrow{OS}$ và $\vec{k}$ cùng hướng và $OS = 4$ nên $\overrightarrow{OS} = 4\vec{k}$. Có $\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OS} = 3\vec{i} - 4\vec{k}$. Do đó $\overrightarrow{SB} = (3; 0; -4)$

Lại có $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS} = (3\vec{i} + 4\vec{j}) - (3\vec{i} - 4\vec{k}) = 4\vec{j} + 4\vec{k}$. Do đó $\overrightarrow{AS} = (0; 4; 4)$. Vì M là trung điểm của SC nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(4\vec{j} + 4\vec{k} + 8\vec{j}) = 6\vec{j} + 2\vec{k}$. Do đó $\overrightarrow{AM} = (0; 6; 2)$.

6. Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ toạ độ $Oxyz$ như Hình 16 với độ dài đơn vị trên các trục toạ độ bằng 1 m. Tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.



Lời giải

Vì $\overrightarrow{OA}$ và $\vec{k}$ cùng hướng và $OA = 10$ nên $\overrightarrow{OA} = 10\vec{k}$.

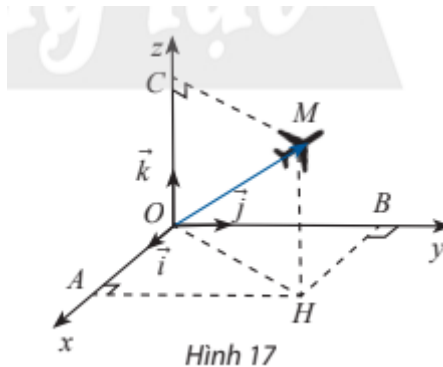
Xét $\triangle OBH$ vuông tại H có $BH = OB \cdot \sin 30^\circ = 7,5m$; $OH = OB \cdot \cos 30^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{2}m$.

Vì $\overrightarrow{OH}$ và $\vec{j}$ cùng hướng và $OH = \frac{15\sqrt{3}}{2}$ nên $\overrightarrow{OH} = \frac{15\sqrt{3}}{2}\vec{j}$. Có $BH = OK = 7,5$.

Vì $\overrightarrow{OK}$ và $\vec{i}$ cùng hướng và $OK = 7,5$ nên $\overrightarrow{OK} = 7,5\vec{i}$.

Vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OA} = 7,5\vec{i} + \frac{15\sqrt{3}}{2}\vec{j} - 10\vec{k}$. Vậy $\overrightarrow{AB} = \left(7,5; \frac{15\sqrt{3}}{2}; -10\right)$.

7. Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như Hình 17. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy) . Cho biết $OM = 50$; $(\vec{i}; \overrightarrow{OH}) = 64^\circ$; $(\overrightarrow{OH}; \overrightarrow{OM}) = 48^\circ$. Tìm tọa độ của điểm M .



Lời giải

Giả sử $M(x; y; z)$. $H \in (Oxy) \Rightarrow H(x; y; 0)$. Vì $OBHA$ là hình bình hành nên $BH = OA$. Vì $OCMH$ là hình bình hành nên $OC = MH$.

Xét $\triangle MHO$ vuông tại H có $OH = OM \cdot \cos 48^\circ = 50 \cdot \cos 48^\circ \approx 33,46$;
 $MH = OM \cdot \sin 48^\circ = 50 \cdot \sin 48^\circ \approx 37,16$.

Xét $\triangle OAH$ vuông tại A có $BH = OA = OH \cdot \cos 64^\circ = 33,46 \cdot \cos 64^\circ \approx 14,67$

Xét $\triangle OBH$ vuông tại B có $OB = \sqrt{OH^2 - BH^2} = \sqrt{33,46^2 - 14,67^2} \approx 30,07$

Vì $\overrightarrow{OA}$ và $\vec{i}$ cùng hướng và $OA = 14,67$ nên $\overrightarrow{OA} = 14,67\vec{i}$.

Vì $\overrightarrow{OB}$ và $\vec{j}$ cùng hướng và $OB = 30,07$ nên $\overrightarrow{OB} = 30,07\vec{j}$.

Vì $\overrightarrow{OC}$ và $\vec{k}$ cùng hướng và $OC = 37,16$ nên $\overrightarrow{OC} = 37,16\vec{k}$.

Áp dụng quy tắc hình bình hành ta có: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 14,67\vec{i} + 30,07\vec{j} + 37,16\vec{k}$

Vậy $M(14,67; 30,07; 37,16)$.

BÀI 3: BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTO

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TỔNG, HIỆU HAI VECTO VÀ TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTO

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và số thực k .

Khi đó:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$$

$$k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3).$$

Nhận xét: Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, $\vec{b} \neq \vec{0}$. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương

khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho
$$\begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases}$$

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{p} = (3; -2; 1)$, $\vec{q} = (6; -4; 2)$, $\vec{r} = (2; 1; -3)$.

a) Tìm tọa độ của vectơ $\vec{c} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$.

b) Tìm hai vectơ cùng phương trong các vectơ đã cho.

Lời giải

a) Ta có: $2\vec{p} = (6; -4; 2)$, $-3\vec{q} = (-18; 12; -6)$, $\vec{r} = (2; 1; -3)$. Suy ra $\vec{c} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r} = (-10; 9; -7)$.

b) Ta có $2\vec{p} = (6; -4; 2) = \vec{q}$, suy ra hai vectơ $\vec{p}, \vec{q}$ cùng phương.

Do $\frac{3}{2} \neq \frac{-2}{1}$ nên $\vec{p}, \vec{r}$ không cùng phương. Tương tự, hai vectơ $\vec{q}, \vec{r}$ không cùng phương.

Chú ý: Từ nay trở đi, các bài tập liên quan đến tọa độ đều được xét trong không gian $Oxyz$.

II. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ được xác định bởi công thức $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Nhận xét:

a) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$ ($\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$);

b) $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

c) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ ($\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$).

Ví dụ 2. Cho ba vectơ $\vec{a} = (3; 0; 1)$, $\vec{b} = (1; -1; -2)$, $\vec{c} = (2; 1; -1)$.

a) Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{b} \cdot \vec{c}$.

b) Tính $|\vec{a}|, |\vec{b}|, \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

c) Cho $\vec{d} = (1; 7; -3)$. Chứng minh $\vec{d} \perp \vec{a}$.

Lời giải

a) Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) = 1$; $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) = 3$.

b) Ta có: $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{10}; |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}.$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{15}}{30}.$$

c) Ta có $\vec{d} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 3 + 7 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 = 0$, suy ra $\vec{d} \perp \vec{a}.$

III. Vận dụng

1. Xác định tọa độ của vector khi biết tọa độ điểm đầu và điểm cuối

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B).$

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$

Nhận xét: $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$

Ví dụ 3. Cho ba điểm $A(2; 0; 2), B(1; 2; 3), C(2; 1; 2).$

a) Tìm tọa độ của các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}.$

b) Tính các độ dài $AB, BC, CA.$

Lời giải

a) Ta có

$$\overrightarrow{AB} = (1 - 2; 2 - 0; 3 - 2) = (-1; 2; 1); \overrightarrow{BC} = (2 - 1; 1 - 2; 2 - 3) = (1; -1; -1); \overrightarrow{CA} = (2 - 2; 0 - 1; 2 - 2) = (0; -1; 0)$$

b) Ta có:

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}; BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}; CA = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 0^2} = 1$$

2. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng và trọng tâm của tam giác

Trong không gian $Oxyz$:

Cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B).$ Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right).$$

Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B), C(x_C; y_C; z_C).$ Tọa độ trọng tâm G của tam

giác ABC là: $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có $A(1; -1; 1), B(0; 1; 2), C(1; 0; 1).$ Tìm tọa độ:

a) Trung điểm M của AB ;

b) Trọng tâm G của tam giác $ABC.$

Lời giải

a) Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là $M\left(\frac{1+0}{2}; \frac{-1+1}{2}; \frac{1+2}{2}\right)$ hay $M\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{3}{2}\right).$

b) Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là $G\left(\frac{1+0+1}{3}; \frac{-1+1+0}{3}; \frac{1+2+1}{3}\right)$ hay $G\left(\frac{2}{3}; 0; \frac{4}{3}\right)$.

Ta có thể vận dụng các biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ trong giải toán hình học hoặc trong một số vấn đề thực tế.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC có $A(7;3;3), B(1;2;4), C(2;3;5)$.

- Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC .
- Tìm độ dài cạnh AB và AC .
- Tính góc A .

Lời giải



Hình 4

a) Ta có $\overrightarrow{BC} = (1;1;1)$. Vì H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC nên $H \in BC$ và $AH \perp BC$.

Gọi $(x; y; z)$ là tọa độ của H , ta có $\overrightarrow{BH} = (x-1; y-2; z-4)$.

Vì $\overrightarrow{BH}$ cùng phương với $\overrightarrow{BC}$ nên tồn tại $t \in \mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC}$; do đó $x-1=t$; $y-2=t$; $z-4=t$, suy ra $H(1+t; 2+t; 4+t)$.

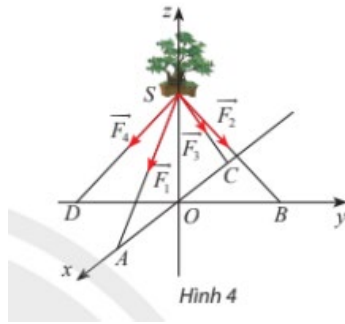
Ta có $\overrightarrow{AH} = (t-6; t-1; t+1)$. $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow t-6+t-1+t+1=0 \Leftrightarrow 3t=6 \Leftrightarrow t=2$. Suy ra $H(3;4;6)$.

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-6; -1; 1)$; $\overrightarrow{AC} = (-5; 0; 2)$, suy ra

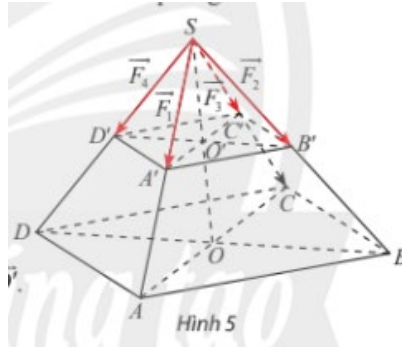
$$AB = \sqrt{(-6)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{38}; AC = \sqrt{(-5)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

$$c) \cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{30+0+2}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{29}} = \frac{32}{\sqrt{38 \cdot 29}}, \text{ suy ra } \hat{A} \approx 15,43^\circ.$$

Ví dụ 6. Một chậu cây được đặt trên một giá đỡ có bốn chân với điểm đặt $S(0;0;20)$ và các điểm chạm mặt đất của bốn chân lần lượt là $A(20;0;0), B(0;20;0), C(-20;0;0), D(0;-20;0)$ (đơn vị cm). Cho biết trọng lực tác dụng lên chậu cây có độ lớn 40 N và được phân bố thành bốn lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ có độ lớn bằng nhau như Hình 4. Tìm tọa độ của các lực nói trên (mỗi centimet biểu diễn 1 N).



Lời giải



Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình vuông.

Ta có $\overrightarrow{SA} = (20; 0; -20)$, $\overrightarrow{SB} = (0; 20; -20)$, $\overrightarrow{SC} = (-20; 0; -20)$, $\overrightarrow{SD} = (0; -20; -20)$, suy ra $SA = SB = SC = SD = 20\sqrt{2}$. Do đó $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều.

Các vector $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ có điểm đầu tại S và điểm cuối lần lượt là A', B', C', D' .

Ta có $SA' = SB' = SC' = SD'$ nên $S.A'B'C'D'$ cũng là hình chóp tứ giác đều.

Gọi $\vec{F}$ là trọng lực tác dụng lên chậu cây và O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$.

Ta có: $\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4} = \overrightarrow{SA'} + \overrightarrow{SB'} + \overrightarrow{SC'} + \overrightarrow{SD'} = 4\overrightarrow{SO'}$.

Ta có $|\vec{F}| = 40$, suy ra $|\overrightarrow{SO'}| = SO' = 10 = \frac{1}{2}SO$.

Do đó O' là trung điểm của SO . Suy ra A' là trung điểm của SA . Suy ra

$$\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{SA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} = (10; 0; -10).$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có:

$$\overrightarrow{F_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SB} = (0; 10; -10), \overrightarrow{F_3} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SC} = (-10; 0; -10), \overrightarrow{F_4} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SD} = (0; -10; -10).$$

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

1. Tính: a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ với $\vec{a} = (5; 2; -4)$, $\vec{b} = (4; -2; 2)$.

b) $\vec{c} \cdot \vec{d}$ với $\vec{c} = (2; -3; 4)$, $\vec{d} = (6; 5; -3)$.

Lời giải

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5.4 + 2.(-2) + 2.(-4) = 8$; b) $\vec{c} \cdot \vec{d} = 2.6 + (-3).5 + 4.(-3) = -15$

2. Cho hai vecto $\vec{a} = (0; 1; 3)$ và $\vec{b} = (-2; 3; 1)$. Tìm tọa độ của vecto $2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{a}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{3}{2}\vec{a} = \left(0; \frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$; $2\vec{b} = (-4; 6; 2)$.

Tọa độ của vecto $2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{a} = \left(-4 - 0; 6 - \frac{3}{2}; 2 - \frac{9}{2}\right) = \left(-4; \frac{9}{2}; -\frac{5}{2}\right)$

3. Cho ba điểm $A(2; 1; -1)$; $B(3; 2; 0)$ và $C(2; -1; 3)$.

a) Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của tam giác. Tính chu vi tam giác ABC .

b) Tìm tọa độ trung điểm của các cạnh của tam giác ABC .

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1)$; $\overrightarrow{AC} = (0; -2; 4)$; $\overrightarrow{BC} = (-1; -3; 3)$. Vì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên A, B, C không thẳng hàng. Do đó A, B, C là ba đỉnh của tam giác.

Ta có chu vi tam giác là:

$$AB + AC + BC = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} + \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 4^2} + \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{3} + 2\sqrt{5} + \sqrt{19}$$

b) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của cạnh AB, BC, CA .

Tọa độ điểm M là $M\left(\frac{2+3}{2}; \frac{1+2}{2}; \frac{-1+0}{2}\right)$ hay $M\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Tọa độ điểm N là $N\left(\frac{2+3}{2}; \frac{2-1}{2}; \frac{0+3}{2}\right)$ hay $N\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Tọa độ điểm P là $P\left(\frac{2+2}{2}; \frac{1-1}{2}; \frac{-1+3}{2}\right)$ hay $P(2; 0; 1)$.

c) Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là $G\left(\frac{2+3+2}{3}; \frac{1+2-1}{3}; \frac{-1+0+3}{3}\right)$ hay $G\left(\frac{7}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

4. Cho điểm $M(1; 2; 3)$. Hãy tìm tọa độ của các điểm:

a) M_1, M_2, M_3 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các mặt phẳng tọa độ $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$.

b) M', M'', M''' lần lượt là các điểm thoả mãn:

- O là trung điểm của MM' ;
- MM'' vuông góc và cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm H sao cho H là trung điểm của MM'' .
- MM''' vuông góc và cắt trục Oy tại điểm K sao cho K là trung điểm của MM''' .

Lời giải

a) Ta có $M_1(1;2;0)$; $M_2(0;2;3)$; $M_3(1;0;3)$.

b) Vì O là trung điểm của MM' nên
$$\begin{cases} x_{M'} = 2x_O - x_M \\ y_{M'} = 2y_O - y_M \\ z_{M'} = 2z_O - z_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = 2.0 - 1 \\ y_{M'} = 2.0 - 2 \\ z_{M'} = 2.0 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = -1 \\ y_{M'} = -2 \\ z_{M'} = -3 \end{cases}.$$

Vậy $M'(-1;-2;-3)$.

Vì $H \in (Oxy)$ nên $H(x; y; 0)$. Ta có $\overrightarrow{MH} = (x-1; y-2; -3)$.

Vì $MH \perp (Oxy) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MH} \cdot \vec{i} = 0 \\ \overrightarrow{MH} \cdot \vec{j} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}.$

Do đó $H(1;2;0)$.

Vì H là trung điểm của MM'' nên
$$\begin{cases} x_{M''} = 2x_H - x_M \\ y_{M''} = 2y_H - y_M \\ z_{M''} = 2z_H - z_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M''} = 2.1 - 1 \\ y_{M''} = 2.2 - 2 \\ z_{M''} = 2.0 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M''} = 1 \\ y_{M''} = 2 \\ z_{M''} = -3 \end{cases}.$$

Vậy $M''(1;2;-3)$.

Vì $K \in Oy$ nên $K(0; y; 0) \Rightarrow \overrightarrow{MK} = (-1; y-2; -3)$.

Vì $MK \perp Oy$ nên $\overrightarrow{MK} \cdot \vec{j} = 0 \Leftrightarrow y-2=0 \Leftrightarrow y=2$.

Do đó $K(0;2;0)$. Vì K là trung điểm của MM''' nên

$$\begin{cases} x_{M'''} = 2x_K - x_M \\ y_{M'''} = 2y_K - y_M \\ z_{M'''} = 2z_K - z_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'''} = 2.0 - 1 \\ y_{M'''} = 2.2 - 2 \\ z_{M'''} = 2.0 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'''} = -1 \\ y_{M'''} = 2 \\ z_{M'''} = -3 \end{cases}.$$

Vậy $M'''(-1;2;-3)$.

5. Cho ba điểm $A(3;3;3)$; $B(1;1;2)$ và $C(5;3;1)$.

a) Tìm điểm M trên trục Oy cách đều hai điểm B, C .

b) Tìm điểm N trên mặt phẳng (Oxy) cách đều ba điểm A, B, C .

Lời giải

a) Vì $M \in Oy$ nên $M(0; y; 0)$.

Vì M cách đều hai điểm B, C nên $MB = MC$ hay

$$MB^2 = MC^2 \Leftrightarrow 1^2 + (1-y)^2 + 2^2 = 5^2 + (3-y)^2 + 1^2 \Leftrightarrow 4y = 29 \Leftrightarrow y = \frac{29}{4}. \text{ Vậy } M\left(0; \frac{29}{4}; 0\right).$$

b) Vì $N \in (Oxy)$ nên $N(x; y; 0)$. Vì N cách đều ba điểm A, B, C nên $NA = NB = NC$ hay

$$NA^2 = NB^2 = NC^2 \Leftrightarrow \begin{cases} (3-x)^2 + (3-y)^2 + 3^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2 + 2^2 \\ (3-x)^2 + (3-y)^2 + 3^2 = (5-x)^2 + (3-y)^2 + 1^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 4y = 21 \\ 4x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{13}{4} \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy $N\left(2; \frac{13}{4}; 0\right)$.

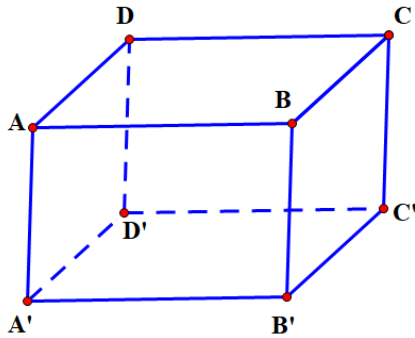
6. Cho các điểm $A(-1; -1; 0)$, $B(0; 3; -1)$, $C(-1; 14; 0)$, $D(-3; 6; 2)$. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình thang.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 4; -1)$; $\overrightarrow{AC} = (0; 15; 0)$; $\overrightarrow{DC} = (2; 8; -2)$. Vì $\overrightarrow{DC} = (2; 8; -2) = 2(1; 4; -1) = 2\overrightarrow{AB}$ nên $\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương. Mặt khác $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên $CD \parallel AB$. Do đó $ABCD$ là hình thang.

7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1; 0; 1)$; $B(2; 1; 2)$; $D(1; -1; 1)$; $C'(4; 5; -5)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

Lời giải



Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên các mặt là hình bình hành.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-1 = x_C - 2 \\ -1-0 = y_C - 1 \\ 1-1 = z_C - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 0 \\ z_C = 2 \end{cases}. \text{ Vậy } C(2; 0; 2).$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{D'C'} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-1 = 4 - x_{D'} \\ 1 = 5 - y_{D'} \\ 2-1 = -5 - x_{D'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{D'} = 3 \\ y_{D'} = 4 \\ z_{D'} = -6 \end{cases}. \text{ Vậy } D'(3; 4; -6).$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-1 = 3 - x_{A'} \\ -1-0 = 4 - y_{A'} \\ 1-1 = -6 - z_{A'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = 3 \\ y_{A'} = 5 \\ z_{A'} = -6 \end{cases}. \text{ Vậy } A'(3; 5; -6).$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{B'C'} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-3 = 4 - x_{B'} \\ 4-5 = 5 - y_{B'} \\ -6+6 = -5 - z_{B'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{B'} = 4 \\ y_{B'} = 6 \\ z_{B'} = -5 \end{cases}. \text{ Vậy } B'(4; 6; -5).$$

8. Tính công sinh bởi lực $\vec{F} = (20; 30; -10)$ (đơn vị: N) tạo bởi một drone giao hàng (Hình 7) khi thực hiện một độ dịch chuyển $\vec{d} = (150; 200; 100)$ (đơn vị: m).



Hình 7

Lời giải

Công sinh bởi lực $\vec{F}$ là $\vec{A} = \vec{F} \cdot \vec{d} = 20 \cdot 150 + 30 \cdot 200 + (-10) \cdot 100 = 8000J$.

C. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1: TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM VÀ VECTO

1. Phương pháp: Sử dụng khái niệm

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết:

a) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} - 2\vec{j}$. Tìm tọa độ các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

b) $\vec{OM} = 5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{ON} = \vec{i} - 3\vec{k}$. Tìm tọa độ các điểm M , N .

Lời giải

a) $\vec{a} = (2; 3; -5)$, $\vec{b} = (0; -3; 4)$, $\vec{c} = (-1; -2; 0)$.

b) $M(5; -1; 2)$, $N(1; 0; -3)$

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết:

a) $\vec{a} = (-3; 2; -1)$, $\vec{b} = (3; 0; 12)$. Tính $\vec{a}$, $\vec{b}$ theo các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

b) $A(-5; -2; 1)$, $B(0; 4; -11)$. Tính $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ theo các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Lời giải

a) $\vec{a} = (-3; 2; -1) \Leftrightarrow \vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 1\vec{k}$

$\vec{b} = (3; 0; 12) \Leftrightarrow \vec{b} = 3\vec{i} + 12\vec{k}$.

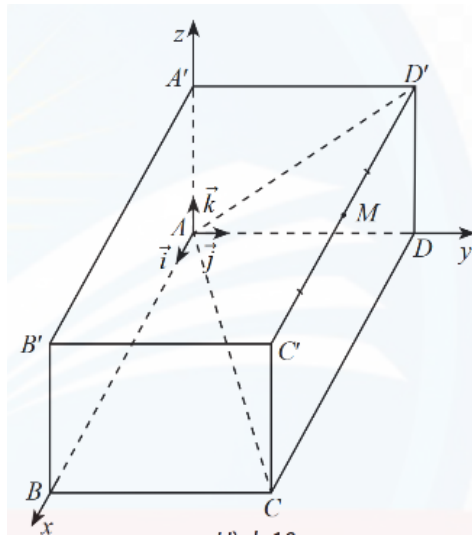
b) $\vec{OA} = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 1\vec{k}$

$\vec{OB} = 4\vec{j} - 11\vec{k}$.

Ví dụ 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O , các vectơ $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ và có $AB = 5$, $AD = 6$, $AA' = 9$.

Tìm tọa độ các vectơ $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AC'}$ và $\vec{AM}$ với M là trung điểm của cạnh $C'D'$.

Lời giải



Để tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$, ta cần biểu diễn $\overrightarrow{AB}$ theo ba vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Do $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\vec{i}$ và $|\overrightarrow{AB}| = AB = 5 = 5|\vec{i}|$ nên $\overrightarrow{AB} = 5\vec{i}$ hay $\overrightarrow{AB} = 5\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$.

Tương tự, ta cũng có: $\overrightarrow{AD} = 0\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}, \overrightarrow{AA'} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 9\vec{k}$.

Trong hình bình hành $ABCD$, ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 5\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}$.

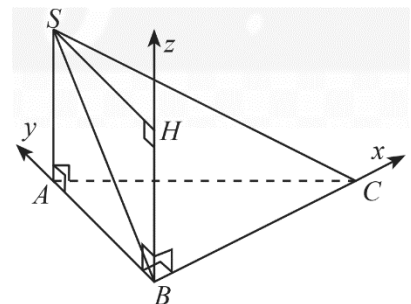
Trong hình bình hành $AA'C'C$, ta có: $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = 5\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (5; 0; 0); \overrightarrow{AC} = (5; 6; 0); \overrightarrow{AC'} = (5; 6; 9)$.

$$\begin{aligned} \text{Vì } \overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) \\ &= \frac{1}{2}(5\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k} + 6\vec{j} + 9\vec{k}) = \frac{5}{2}\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k} \\ \Rightarrow \overrightarrow{AM} &= \left(\frac{5}{2}; 6; 9\right). \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B , $BC = 3, BA = 2, SA$ vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có độ dài bằng 2.

- Xác định một hệ tọa độ dựa trên gợi ý của hình vẽ.
- Tìm tọa độ các điểm A, B, C, S .



Lời giải

a) Quan sát hình ảnh xét đây là hệ trục tọa độ $Oxyz$ với điểm $B \equiv O$.

b) Vì $B \equiv O \Rightarrow B(0; 0; 0)$

Do $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng với $\vec{i}$ và $|\overrightarrow{BC}| = BC = 3 = 3|\vec{i}|$ nên $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i}$ hay $\overrightarrow{BC} = 3\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = 3\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} \Leftrightarrow C(3; 0; 0)$.

Tương tự, ta cũng có:

$$\overrightarrow{BA} = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k} \Leftrightarrow A(0; 2; 0)$$

$$\overrightarrow{BH'} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k} \Leftrightarrow \overrightarrow{OH} = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k} \Leftrightarrow H(0; 2; 0)$$

Trong hình bình hành $BASH$, ta có:

$$\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH} = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \Leftrightarrow \overrightarrow{OS} = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \Leftrightarrow S(0; 2; 2).$$

Vậy $A(0; 2; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $C(3; 0; 0)$, $S(0; 2; 2)$.

DẠNG 2: XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ CỦA VEC TƠ, VÀ ĐỘ DÀI CỦA ĐOẠN THẲNG

1. Phương pháp: Áp dụng biểu thức tọa độ của các phép toán véc tơ.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ

$$\vec{a} = (1; 2; 3); \vec{b} = (2; 2; -1); \vec{c} = (4; 0; -4). \text{ Tìm tọa độ của vectơ } \vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$$

Lời giải

$$\text{Ta có : } \vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} = (1; 2; 3) - (2; 2; -1) + 2 \cdot (4; 0; -4) = (1 - 2 + 8; 2 - 2 + 0; 3 + 1 - 8) = (7; 0; -4)$$

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -3; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (3; -1; 5)$

Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2\vec{a} = (4; -6; 6); 3\vec{b} = (0; 6; -3); -2\vec{c} = (-6; 2; -10).$$

$$\text{Khi đó: } \vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c} = (-2; 2; -7).$$

Ví dụ 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; -1)$, $B(1; 4; 3)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB .

Lời giải

$$\text{Ta có } AB = \sqrt{(1-1)^2 + (4+2)^2 + (3+1)^2} = 2\sqrt{13}.$$

Ví dụ 4: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-2; 2; 0)$; $\vec{b} = (2; 2; 0)$; $\vec{c} = (2; 2; 2)$. Tính giá trị của $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (-2; 2; 0) + (2; 2; 0) + (2; 2; 2) = (2; 6; 2).$$

$$\text{Vậy } |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 2^2} = 2\sqrt{11}$$

Ví dụ 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (3; m+1; 3)$, $\vec{b} = (1; -3; 2n)$. Tìm m, n để các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

Lời giải

$$\vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ cùng hướng} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \ (k > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = k \\ m+1 = -3k \\ 3 = k \cdot 2n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ m = -10 \\ n = \frac{1}{2} \end{cases}. \text{ Vậy } m = -10; n = \frac{1}{2}$$

Ví dụ 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{m} = (4; 3; 1)$, $\vec{n} = (0; 0; 1)$. Gọi $\vec{p}$ là vector cùng hướng với $[\vec{m}, \vec{n}]$ (tích có hướng của hai vector $\vec{m}$ và $\vec{n}$). Biết $|\vec{p}| = 15$, tìm tọa độ vector $\vec{p}$.

Lời giải

$$\text{Ta có : } [\vec{m}; \vec{n}] = (3; -4; 0)$$

Do $\vec{p}$ là vector cùng hướng với $[\vec{m}; \vec{n}]$ nên $\vec{p} = k[\vec{m}; \vec{n}]$, $k > 0$

$$\text{Mặt khác: } |\vec{p}| = 15 \Leftrightarrow k \cdot |[\vec{m}, \vec{n}]| = 15 \Leftrightarrow k \cdot 5 = 15 \Leftrightarrow k = 3. \text{ Vậy } \vec{p} = (9; -12; 0).$$

DẠNG 3: XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ ĐIỂM

1. Phương pháp:

Dùng công thức biểu thức tọa độ trung điểm, tọa độ trọng tâm của tam giác...

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -4; 3)$ và $B(2; 2; 7)$. Tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB .

Lời giải

$$\text{Gọi } I \text{ là trung điểm của } AB, \text{ ta có tọa độ điểm } I \text{ là } \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 2 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = -1 \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = 5 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } I(2; -1; 5).$$

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tam giác ABC biết $A(5; -2; 0)$, $B(-2; 3; 0)$, $C(0; 2; 3)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

Lời giải

$$\text{Gọi } G(x, y, z).$$

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên

$$\begin{cases} x = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 + (-2) + 0}{3} = 1 \\ y = \frac{-2 + 3 + 2}{3} = 1 \\ z = \frac{0 + 0 + 3}{3} = 1 \end{cases} \text{ . Vậy } G(1;1;1).$$

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;3)$, $B(2;3;-4)$, $C(-3;1;2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

Gọi $D(x; y; z)$. Để $ABCD$ là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow (1; 3; -7) = (-3 - x; 1 - y; 2 - z) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \\ z = 9 \end{cases}.$$

Vậy $D(-4; -2; 9)$.

Ví dụ 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2; -5; 0)$, $B(-1; 1; 3)$, $C(3; 3; 0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD = BC$.

Lời giải

Vì $D \in Ox$ nên $D(x; 0; 0)$

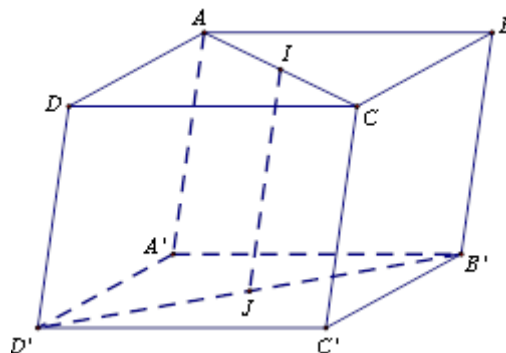
$$\text{Ta có : } AD = BC \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + 25} = \sqrt{(3+1)^2 + (3-1)^2 + (0-3)^2}.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + 25} = \sqrt{29} \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy $D(0; 0; 0)$, $D(4; 0; 0)$

Ví dụ 5 Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết tọa độ các đỉnh $A'(-3; 2; 1)$, $C(4; 2; 0)$, $B'(-2; 1; 1)$, $D(3; 5; 4)$. Tìm tọa độ điểm A' của hình hộp.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của $AC \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}; 2; \frac{1}{2}\right)$.

Gọi J là trung điểm của $B'D' \Rightarrow J\left(\frac{1}{2}; 3; \frac{5}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{IJ} = (0; 1; 2)$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} + 3 = 0 \\ y_{A'} - 2 = 1 \\ z_{A'} - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = -3 \\ y_{A'} = 3 \\ z_{A'} = 3 \end{cases}.$$

Vậy $A'(-3; 3; 3)$.

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ biết $A(-2; 2; 6), B(-3; 1; 8), C(-1; 0; 7), D(1; 2; 3)$. Gọi H là trung điểm của CD , $SH \perp (ABCD)$. Để khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $\frac{27}{2}$ (đvtt) thì có hai điểm S_1, S_2 thỏa mãn yêu cầu bài toán. Tìm tọa độ trung điểm I của S_1S_2

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (-1; -1; 2), \overrightarrow{AC} = (1; -2; 1) \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\overrightarrow{DC} = (-2; -2; 4), \overrightarrow{AB} = (-1; -1; 2) \Rightarrow \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow ABCD \text{ là hình thang và}$$

$$S_{ABCD} = 3S_{ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vì } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} \Rightarrow SH = 3\sqrt{3}$$

$$\text{Lại có } H \text{ là trung điểm của } CD \Rightarrow H(0; 1; 5)$$

$$\text{Gọi } S(a; b; c) \Rightarrow \overrightarrow{SH} = (-a; 1-b; 5-c) \Rightarrow \overrightarrow{SH} = k[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = k(3; 3; 3) = (3k; 3k; 3k)$$

$$\text{Suy ra } 3\sqrt{3} = \sqrt{9k^2 + 9k^2 + 9k^2} \Rightarrow k = \pm 1$$

$$+) \text{ Với } k = 1 \Rightarrow \overrightarrow{SH} = (3; 3; 3) \Rightarrow S(-3; -2; 2)$$

$$+) \text{ Với } k = -1 \Rightarrow \overrightarrow{SH} = (-3; -3; -3) \Rightarrow S(3; 4; 8)$$

$$\text{Suy ra } I(0; 1; 3)$$

DẠNG 4: XÁC ĐỊNH TÍCH VÔ HƯỚNG VÀ ỨNG DỤNG

1. Phương pháp: Áp dụng biểu thức tọa độ của tích có hướng và công thức ứng dụng của tích có hướng.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u} = (3; 0; 1)$ và $\vec{v} = (2; 1; 0)$. Tính tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 6.$$

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (2; 1; 2)$ và $\vec{b} = (1; 0; -2)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + (-2)^2}} = -\frac{2\sqrt{5}}{15}.$$

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u} = (2; 3; -1)$ và $\vec{v} = (5; -4; m)$. Tìm m để $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 10 - 12 - m = 0 \Leftrightarrow -2 - m = 0 \Leftrightarrow m = -2.$$

Ví dụ 4: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 3)$ và D nằm trên trục Oy và thể tích tứ diện $ABCD$ bằng 5. Tìm tọa độ của điểm D .

Lời giải

Vì $D \in Oy$ nên $D(0; y; 0)$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = (1; -1; 2), \overrightarrow{AC} = (0; -2; 4) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (0; -4; -2), \overrightarrow{AD} = (-2; y-1; 1)$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} |2 - 4y|. \text{ Vậy } V_{ABCD} = 5 \Leftrightarrow |2 - 4y| = 30 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -7 \\ y = 8 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } D(0; -7; 0); D(0; 8; 0)$$

Ví dụ 5: Cho ba điểm $A(5; -1; 2)$, $B(1; -3; 7)$ và $M(x; y; 1)$. Với giá trị nào của x, y thì ba điểm A, B, M thẳng hàng?

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (-4; -2; 5), \overrightarrow{AM} = (x-5; y+1; -1).$$

$$\text{Để ba điểm } A, B, M \text{ thẳng hàng thì } \frac{x-5}{-4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{-1}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{29}{5} \\ y = \frac{-3}{5} \end{cases}.$$

Ví dụ 6: Cho $\vec{u} = (2; -1; 1)$, $\vec{v} = (m; 3; -1)$, $\vec{w} = (1; 2; 1)$. Tìm m để ba vector trên đồng phẳng.

Lời giải

$$\text{Ta có: } [\vec{u}, \vec{v}] = (-2; m+2; m+6), \quad [\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{w} = 3m+8$$

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{w} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{8}{3}$$

Ví dụ 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ΔABC có $A(4;0;2)$, $B(1;-4;-2)$ và $C(2;1;1)$.
Tính diện tích S của tam giác ABC .

Lời giải

Cách 1: Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; -4; -4)$;

$$\overrightarrow{AC} = (-2; 1; -1); \overrightarrow{BC} = (1; 5; 3).$$

Vì $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 + 5 - 3 = 0$ nên tam giác ABC vuông tại C .

$$\text{Vậy diện tích tam giác } ABC \text{ là } S = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \sqrt{6} \cdot \sqrt{35} = \frac{\sqrt{210}}{2}.$$

Cách 2: Ta có $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] = (8; 5; -11)$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \right| = \frac{1}{2} \sqrt{8^2 + 5^2 + (-11)^2} = \frac{\sqrt{210}}{2}.$$

Ví dụ 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(2;1;-3)$, $B(0;-2;5)$ và $C(1;1;3)$. Tính diện tích hình bình hành $ABCD$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2; -3; 8)$ và $\overrightarrow{AC} = (-1; 0; 6) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-18; 4; -3)$.

$$\text{Vậy diện tích hình bình hành là } S_{ABCD} = \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right| = \sqrt{(-18)^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{349}.$$

Ví dụ 9: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;5;1)$, $B(-2;-6;2)$, $C(1;2;-1)$ và điểm $M(m;m;m)$. Tìm giá trị m để $|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{AC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

$$\overrightarrow{AC} = (-1; -3; -2), \overrightarrow{MB} = (-2-m; -6-m; 2-m)$$

$$|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{AC}| = \sqrt{m^2 + m^2 + (m-6)^2} = \sqrt{3m^2 - 12m + 36} = \sqrt{3(m-2)^2 + 24} \geq \sqrt{24}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m-2=0$

Vậy $m=2$ thì $|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{AC}|$ nhỏ nhất.

Ví dụ 10: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;5;1)$, $B(-2;-6;2)$, $C(1;2;-1)$ và điểm $M(m;m;m)$, Tìm giá trị m để $MA^2 - MB^2 - MC^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Ta có:

$$\overrightarrow{MA} = (2 - m; 5 - m; 1 - m), \overrightarrow{MB} = (-2 - m; -6 - m; 2 - m), \overrightarrow{MC} = (1 - m; 2 - m; -1 - m)$$

$$MA^2 - MB^2 - MC^2 = -3m^2 - 24m - 20 = 28 - 3(m - 4)^2 \leq 28$$

Vậy $m = 4$ thì $MA^2 - MB^2 - MC^2$ đạt giá trị lớn nhất.

DẠNG 5: ỨNG DỤNG GIẢI CÁC BÀI TOÁN THỰC TIỄN

Câu 1. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đã phát hiện một máy bay chiến đấu của Nga di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(500; 200; 8)$ đến điểm $N(800; 300; 10)$ trong 20 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo bằng bao nhiêu?



Lời giải

Gọi $Q(x; y; z)$ là tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo.

$$\overrightarrow{MN} = (300; 100; 2)$$

$$\overrightarrow{NQ} = (x - 800; y - 300; z - 10)$$

Vì máy bay giữ nguyên hướng bay nên $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{NQ}$ cùng hướng.

Do máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và thời gian bay từ $M \rightarrow N$ gấp 4 lần thời gian bay từ $N \rightarrow Q$ nên $MN = 4NQ$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{NQ} \Leftrightarrow \begin{cases} 300 = 4(x - 800) \\ 100 = 4(y - 300) \\ 2 = 4(z - 10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 875 \\ y = 325 \\ z = 10,5 \end{cases} \Rightarrow Q(875; 325; 10,5)$$

Tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $(875; 325; 10,5)$

Câu 2. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đã phát hiện một máy bay chiến đấu của Mỹ di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(1000; 600; 14)$ đến điểm N trong 30 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo bằng $Q(1400; 800; 16)$. Xác định tọa độ vị trí điểm N .



Lời giải

Gọi $N(x; y; z)$ là tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo.

$$\overrightarrow{MQ} = (400; 200; 2)$$

$$\overrightarrow{NQ} = (1400 - x; 800 - y; 16 - z)$$

Vì máy bay giữ nguyên hướng bay nên $\overrightarrow{MQ}$ và $\overrightarrow{NQ}$ cùng hướng.

Do máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và thời gian bay từ $M \rightarrow Q$ gấp 4 lần thời gian bay từ $N \rightarrow Q$ nên $\overrightarrow{MQ} = 4\overrightarrow{NQ}$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MQ} = 4\overrightarrow{NQ} \Leftrightarrow \begin{cases} 400 = 4(1400 - x) \\ 200 = 4(800 - y) \\ 2 = 4(16 - z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1300 \\ y = 750 \\ z = 15,5 \end{cases} \Rightarrow N(1300; 750; 15,5)$$

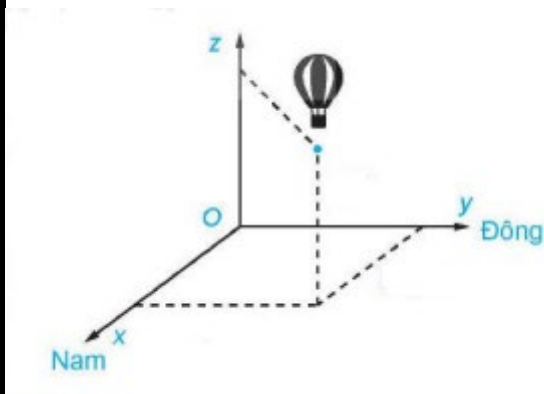
Tọa độ vị trí điểm N là $(1300; 750; 15,5)$

Câu 3. Một chiếc khinh khí cầu bay lên tại điểm. Sau một thời gian bay, chiếc khinh khí cầu cách điểm xuất phát về phía Đông $10(km)$ và về phía Nam $5(km)$, đồng thời cách mặt đất $400(m)$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).

a) Tìm tọa độ của chiếc khinh khí cầu đối với hệ trục tọa độ đã chọn.

b) Xác định khoảng cách của chiếc khinh khí cầu với vị trí tại điểm xuất phát của nó.



Lời giải

a) Chiếc khinh khí cầu có tọa độ $(5; 10; 4)$.

b) Khoảng cách của chiếc khinh khí cầu với vị trí tại điểm xuất phát là:

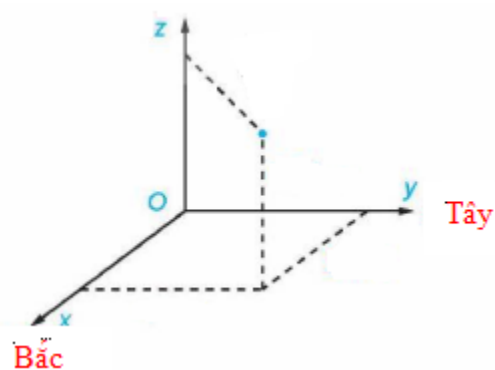
$$\sqrt{5^2 + 10^2 + (0,4)^2} \approx 11,2(km)$$

Câu 4. Một chiếc máy bay không người lái bay lên tại điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay cách điểm xuất phát về phía Bắc $50(km)$ và về phía Tây $20(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).

a) Tìm tọa độ của chiếc khinh khí cầu đối với hệ trục tọa độ đã chọn.

b) Xác định khoảng cách của chiếc máy bay với vị trí tại điểm xuất phát của nó.



Lời giải

a) Chiếc máy bay có tọa độ $(50; 20; 1)$.

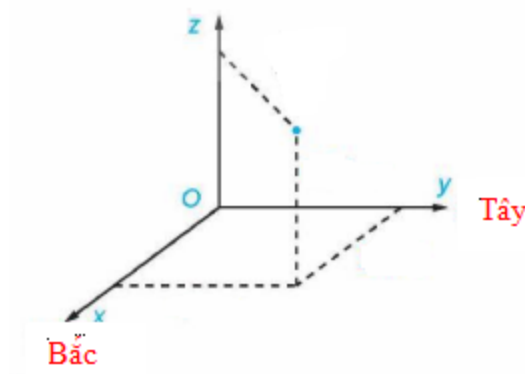
b) Khoảng cách của chiếc máy bay với vị trí tại điểm xuất phát là: $\sqrt{50^2 + 20^2 + 1^2} \approx 53,9(km)$

Câu 5. Hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Bắc $20(km)$ và về phía Tây $10(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,7(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Đông $30(km)$ và về phía Nam $25(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Xác định khoảng cách giữa hai chiếc máy bay.



Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



Chiếc máy bay thứ nhất có tọa độ $(20; 10; 0,7)$.

Chiếc máy bay thứ hai có tọa độ $(-30; -25; 1)$.

Do đó khoảng cách giữa hai chiếc máy bay là: $\sqrt{(20+30)^2 + (10+25)^2 + (0,7-1)^2} \approx 61(km)$

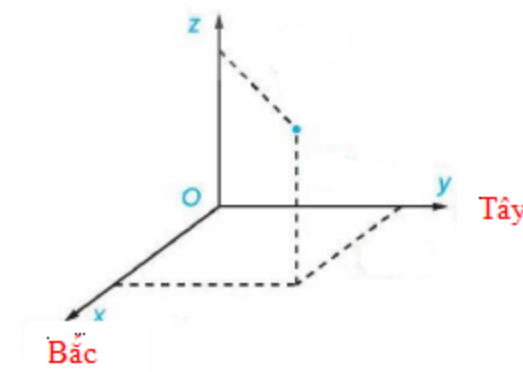
Câu 6. Hai chiếc khinh khí cầu cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc khinh khí cầu thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông $100(km)$ và về phía Nam $80(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Chiếc khinh khí cầu thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc $70(km)$ và về phía Tây $60(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,8(km)$.



- Xác định khoảng cách của chiếc khinh khí cầu thứ nhất với vị trí tại điểm xuất phát của nó.
- Xác định khoảng cách giữa chiếc khinh khí cầu thứ nhất và chiếc khinh khí cầu thứ hai.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



Chiếc khinh khí cầu thứ nhất có tọa độ $(-100; -80; 1)$.

Chiếc khinh khí cầu thứ hai có tọa độ $(70; 60; 0,8)$.

a) khoảng cách của chiếc khinh khí cầu thứ nhất với vị trí tại điểm xuất phát của nó là:

$$\sqrt{(-100)^2 + (-80)^2 + 1^2} \approx 128(km)$$

b) khoảng cách giữa chiếc khinh khí cầu thứ nhất và chiếc khinh khí cầu thứ hai là:

$$\sqrt{(-100 - 70)^2 + (-80 - 60)^2 + (1 - 0,8)^2} \approx 220(km)$$

Câu 7. Ba chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông $60(km)$ và về phía Nam $40(km)$, đồng thời cách mặt đất $2(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc $80(km)$ và về phía Tây $50(km)$, đồng thời cách mặt đất $4(km)$. Chiếc máy bay thứ ba nằm chính giữa của chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời ba chiếc máy bay này thẳng hàng.

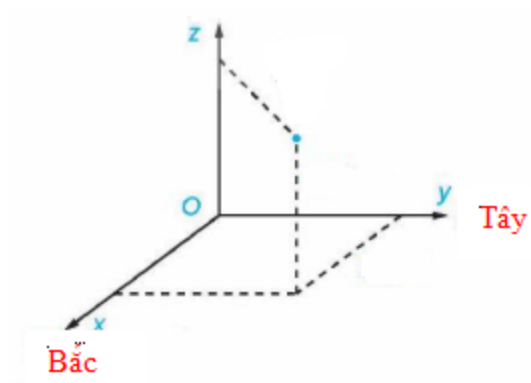


a) Xác định khoảng cách giữa chiếc máy bay thứ nhất và chiếc máy bay thứ hai.

b) Xác định khoảng cách của chiếc máy bay thứ ba với vị trí tại điểm xuất phát của nó.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



Chiếc máy bay thứ nhất có tọa độ $(-60; -40; 2)$.

Chiếc máy bay thứ hai có tọa độ $(80; 50; 4)$.

Do chiếc máy bay thứ ba nằm chính giữa của chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời ba chiếc máy bay này thẳng hàng nên ở vị trí trung điểm, suy ra chiếc máy bay thứ ba có tọa độ $\left(\frac{-60+80}{2}; \frac{-40+50}{2}; \frac{2+4}{2}\right) = (10; 5; 3)$.

a) khoảng cách giữa chiếc máy bay thứ nhất và chiếc máy bay thứ hai:

$$\sqrt{(-60-80)^2 + (-40-50)^2 + (2-4)^2} \approx 166,4(km)$$

b) khoảng cách của chiếc máy bay thứ ba với vị trí tại điểm xuất phát của nó là:

$$\sqrt{10^2 + 5^2 + 3^2} \approx 11,6(km)$$

D. TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vector $\vec{a}$ là

- A.** $(-1; 2; -3)$. **B.** $(2; -3; -1)$. **C.** $(2; -1; -3)$. **D.** $(-3; 2; -1)$.

Lời giải

Chọn A

$$\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k} \Rightarrow \vec{a} = (-1; 2; -3).$$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$ với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz . Tính tọa độ của vector $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

- A.** $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1; -1; 1)$. **B.** $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1; 1; 1)$.
C. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; 1; -1)$. **D.** $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; -1; 1)$.

Lời giải

Chọn C

$$\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \Rightarrow \vec{u} = (1; 1; -1).$$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 3, $SA = 4$ và $SA \perp (ABCD)$. Chọn hệ trục Oxyz có gốc toạ độ tại A; các điểm B, D, S lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz. Xác định toạ độ điểm C?

A. $(3; 0; 0)$

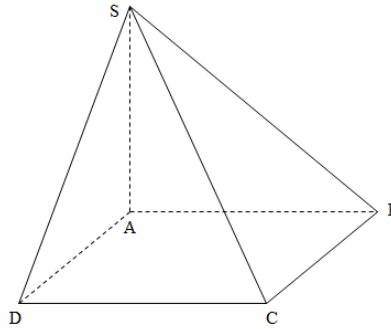
B. $(0; 0; 3)$

C. $(0; 3; 3)$

D. $(3; 3; 0)$

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k}$. Suy ra: $C(3; 3; 0)$

Câu 4: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2$; $AD = 3$; $AA' = 4$. Chọn hệ trục toạ độ Oxyz có gốc O trùng với A, các điểm B; D; A' lần lượt thuộc Ox; Oy; Oz. Toạ độ của C' là:

A. $(2; 3; 0)$.

B. $(2; 3; 4)$.

C. $(0; 3; 4)$.

D. $(2; 0; 4)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}; \quad \overrightarrow{AD} = 0\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k}; \quad \overrightarrow{AA'} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}; \text{ suy ra } C'(2; 3; 4)$$

Câu 5: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 8$; $AD = 6$; $AA' = 4$. Chọn hệ trục toạ độ Oxyz có gốc O trùng với A, các điểm B; D; A' lần lượt thuộc Ox; Oy; Oz. Gọi M là trung điểm $D'C'$. Toạ độ điểm M là:

A. $(4; 6; 0)$

B. $(0; 6; 4)$

C. $(4; 6; 4)$

D. $(4; 0; 4)$

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = 8\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}; \quad \overrightarrow{AD} = 0\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}; \quad \overrightarrow{AA'} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\text{Trong hình bình hành } ABCD: \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\text{Trong hình bình hành } ACC'A': \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$$

Vì M là trung điểm của D'C' nên:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$$

Vậy $M(4; 6; 4)$.

Câu 6: Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ và $\vec{v} = (2; -1; 1)$. Tính $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

- A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$. B. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$. C. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$. D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Từ $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow \vec{u} = (1; 3; -2)$.

Do đó, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1.2 + 3.(-1) + (-2).1 = -3$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -2)$ và $B(2; 2; 1)$. Vector $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

- A. $(-1; -1; -3)$ B. $(3; 1; 1)$ C. $(1; 1; 3)$ D. $(3; 3; -1)$

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{AB} = (2 - 1; 2 - 1; 1 - (-2))$ hay $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 3)$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 2; 1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA .

- A. $OA = \sqrt{5}$. B. $OA = 5$. C. $OA = 3$. D. $OA = 9$.

Lời giải

Chọn C

$OA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Tính tọa độ vector $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$.

- A. $(0; -1; -5)$. B. $(2; -1; 1)$. C. $(2; 3; 1)$. D. $(0; -1; 1)$.

Lời giải

Chọn C

$\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (1; 1; -2)$.

$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} = (2; 3; 1)$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vecto $\vec{a} = (1; 2; 3)$; $\vec{b} = (2; 2; -1)$; $\vec{c} = (4; 0; -4)$. Tọa độ của vecto $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ là

- A. $\vec{d} = (-7; 0; -4)$. B. $\vec{d} = (-7; 0; 4)$. C. $\vec{d} = (7; 0; -4)$. D. $\vec{d} = (7; 0; 4)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} = (1 - 2 + 2.4; 2 - 2 + 2.0; 3 + 1 + 2.(-4)) = (7; 0; -4)$.

- Câu 11:** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 3; 2)$ và $\vec{b} = (1; 1; -1)$. Vector $\vec{a} - \vec{b}$ có tọa độ là
- A. $(3; 4; 1)$. B. $(-1; -2; 3)$. C. $(3; 5; 1)$. D. $(1; 2; 3)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\vec{a} - \vec{b} = (2 - 1; 3 - 1; 2 + 1) = (1; 2; 3)$.

- Câu 12:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (2; -3; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (3; -1; 5)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.
- A. $(10; -2; 13)$. B. $(-2; 2; -7)$. C. $(-2; -2; 7)$. D. $(-2; 2; 7)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2\vec{a} = (4; -6; 6)$, $3\vec{b} = (0; 6; -3)$, $-2\vec{c} = (-6; 2; -10)$

$\Rightarrow \vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c} = (-2; 2; -7)$.

- Câu 13:** Trong không gian $Oxyz$, cho vector $\vec{a} = (-2; 1; 3)$. Vector cùng phương với vector $\vec{a}$ là
- A. $\vec{b} = (-4; 1; 3)$. B. $\vec{c} = (2; -1; -3)$.
C. $\vec{d} = (-4; 2; 3)$. D. $\vec{e} = (-4; -2; 3)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\vec{c} = (2; -1; -3) = -\vec{a} \Rightarrow \vec{a}, \vec{c}$ cùng phương.

- Câu 14:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -2; 3)$, $B(-1; 2; 5)$, $C(0; 0; 1)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
- A. $G(0; 0; 3)$. B. $G(0; 0; 9)$. C. $G(-1; 0; 3)$. D. $G(0; 0; 1)$.

Lời giải

Chọn A

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC bằng

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1 - 1 + 0}{3} = 0 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{-2 + 2 + 0}{3} = 0 \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{3 + 5 + 1}{3} = 3 \end{cases} \Rightarrow G(0; 0; 3)$$

- Câu 15:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -3; 1)$, $B(3; 0; -2)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB .
- A. 26. B. 22. C. $\sqrt{26}$. D. $\sqrt{22}$.

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{AB} = (2; 3; -3) \Rightarrow AB = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{22}.$$

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (2; m-1; 3)$, $\vec{b} = (1; 3; -2n)$. Tìm m, n để các vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

A. $m = 7; n = -\frac{3}{4}$. **B.** $m = 4; n = -3$. **C.** $m = 1; n = 0$. **D.** $m = 7; n = -\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$\vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ cùng hướng} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \ (k > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m-1 = 3k \\ 3 = k(-2n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ m = 7 \\ n = -\frac{3}{4} \end{cases}. \text{ Vậy } m = 7; n = -\frac{3}{4}$$

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 5; 3)$ và $M(2; 1; -2)$. Tìm tọa độ của điểm B , biết M là trung điểm của AB .

A. $B\left(\frac{1}{2}; 3; \frac{1}{2}\right)$. **B.** $B(-4; 9; 8)$. **C.** $B(5; 3; -7)$. **D.** $B(5; -3; -7)$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $B(x_B; y_B; z_B)$.

Vì M là trung điểm của AB nên ta có:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \frac{-1 + x_B}{2} \\ 1 = \frac{5 + y_B}{2} \\ -2 = \frac{3 + z_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 5 \\ y_B = -3 \\ z_B = -7 \end{cases}. \text{ Vậy } B(5; -3; -7).$$

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 5)$, $B(5; -5; 7)$, $M(x; y; 1)$. Với giá trị nào của x, y thì A, B, M thẳng hàng.

A. $x = 4; y = 7$ **B.** $x = -4; y = -7$ **C.** $x = 4; y = -7$ **D.** $x = -4; y = 7$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; -4; 2)$, $\overrightarrow{AM} = (x-2; y+1; -4)$

$$A, B, M \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{-4}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 7 \end{cases}.$$

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho các véc tơ $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = (m; 2; m+1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\vec{u} = (2; -2; 1)$

Khi đó $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$ và $|\vec{v}| = \sqrt{m^2 + 2^2 + (m+1)^2} = \sqrt{2m^2 + 2m + 5}$

Do đó $|\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow 9 = 2m^2 + 2m + 5 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho vector $\vec{u}(2; 0; -1)$. Tìm vector $\vec{v}$ biết $\vec{v}$ cùng phương với $\vec{u}$ và $\vec{u} \cdot \vec{v} = 20$

A. $(4; 0; -2)$

B. $(-8; 0; 4)$

C. $(8; 0; -4)$

D. $(8; 0; 4)$

Lời giải

Chọn C

Vì $\vec{v}$ cùng phương với $\vec{u}$ nên $\vec{v} = k\vec{u} = (2k; 0; -k)$, với $k > 0$.

Ta có $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4k + k = 5k = 20 \Leftrightarrow k = 4$

Vậy $\vec{v} = (8; 0; -4)$

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (2; 1; 0)$ và $\vec{b} = (-1; 0; -2)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{25}$

B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{5}$

C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{25}$

D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{5}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = -\frac{2}{5}$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$ và $P(1; m-1; 2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

A. $m = 2$

B. $m = -6$

C. $m = 0$

D. $m = -4$

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{MN}(-3; -2; 2); \overrightarrow{NP}(2; m-2; 1)$.

Tam giác MNP vuông tại

$N \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} = 0 \Leftrightarrow -6 - 2(m-2) + 2 = 0 \Leftrightarrow m - 2 = -2 \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 23: Trong không gian Oxy , cho tam giác ABC biết $A(1;3;0)$, $B(-2;-2;0)$, $C(3;1;0)$. Tính cosin góc A của tam giác.

- A. $\cos A = \frac{2}{\sqrt{17}}$ B. $\cos A = \frac{1}{\sqrt{17}}$ C. $\cos A = -\frac{2}{\sqrt{17}}$ D. $\cos A = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3; -5; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (2; -2; 0)$.

$$\text{Khi đó: } \cos A = \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-3 \cdot 2 + 5 \cdot 2}{\sqrt{34} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{17}}.$$

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai vector $\vec{i}$ và $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ là

- A. 120° . B. 60° . C. 150° . D. 30° .

Lời giải

Chọn C

Ta có $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

$$\text{Vậy: } \cos(\vec{i}, \vec{u}) = \frac{\vec{i} \cdot \vec{u}}{|\vec{i}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{1 \cdot (-\sqrt{3}) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{1 \cdot \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (\vec{i}, \vec{u}) = 150^\circ.$$

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-3; 4; 0)$, $\vec{b} = (5; 0; 12)$. Cosin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

- A. $\frac{3}{13}$. B. $\frac{5}{6}$. C. $-\frac{5}{6}$. D. $-\frac{3}{13}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3 \cdot 5 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 12}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 0^2} \cdot \sqrt{5^2 + 0^2 + 12^2}} = \frac{-3}{13}.$$

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(5;1;5)$; $B(4;3;2)$; $C(-3;-2;1)$. Điểm $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính $a + 2b + c$?

- A. 1. B. 3. C. 6. D. -9.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-1; 2; -3) \\ \overrightarrow{BC} = (-7; -5; -1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \text{tam giác } ABC \text{ vuông tại } B.$$

$\Rightarrow$ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là trung điểm của cạnh huyền AC .

$$\Rightarrow I\left(1; -\frac{1}{2}; 3\right). \text{ Vậy } a+2b+c=3.$$

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(5;-1;2), C(3;2;-4)$. Tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ là

- A.** $M\left(4; -\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$. **B.** $M\left(4; -\frac{3}{2}; -\frac{9}{2}\right)$.
C. $M\left(4; \frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$. **D.** $M\left(-4; -\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x; y; z)$, ta có :

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5-x = \frac{1}{2}(3-1) \\ -1-y = \frac{1}{2}(2-1) \\ 2-z = \frac{1}{2}(-4-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-\frac{3}{2} \\ z=\frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow M\left(4; -\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$$

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các véc tơ $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = (m; 2; m+1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\vec{u} = (2; -2; 1)$

$$\text{Khi đó } |\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3 \text{ và } |\vec{v}| = \sqrt{m^2 + 2^2 + (m+1)^2} = \sqrt{2m^2 + 2m + 5}$$

$$\text{Do đó } |\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow 9 = 2m^2 + 2m + 5 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-2 \end{cases}$$

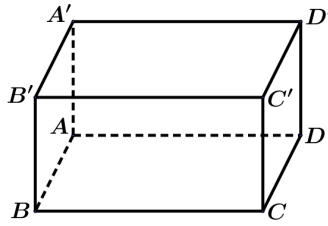
Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;2a;0)$, $A'(0;0;2a)$ với $a \neq 0$. Độ dài đoạn thẳng AC' là

- A.** $|a|$. **B.** $2|a|$. **C.** $3|a|$. **D.** $\frac{3}{2}|a|$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\overrightarrow{AB} = (a; 0; 0)$; $\overrightarrow{AD} = (0; 2a; 0)$; $\overrightarrow{AA'} = (0; 0; 2a)$.

Theo quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC'} = (a; 2a; 2a)$.

Suy ra $AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{a^2 + (2a)^2 + (2a)^2} = 3|a|$.

Vậy độ dài đoạn thẳng $AC' = 3|a|$.

Câu 30: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{a} = (2; 3; 1)$, $\overrightarrow{b} = (-1; 5; 2)$, $\overrightarrow{c} = (4; -1; 3)$ và $\overrightarrow{x} = (-3; 22; 5)$. Đẳng thức nào đúng trong các đẳng thức sau?

A. $\overrightarrow{x} = 2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$. **B.** $\overrightarrow{x} = -2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$.

C. $\overrightarrow{x} = 2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$. **D.** $\overrightarrow{x} = 2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt: $\overrightarrow{x} = m.\overrightarrow{a} + n.\overrightarrow{b} + p.\overrightarrow{c}$, $m, n, p \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow (-3; 22; 5) = m.(2; 3; 1) + n.(-1; 5; 2) + p.(4; -1; 3) \Rightarrow \begin{cases} 2m - n + 4p = -3 \\ 3m + 5n - p = 22 \\ m + 2n + 3p = 5 \end{cases} (I).$$

$$\text{Giải hệ phương trình (I) ta được: } \begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \\ p = -1 \end{cases}.$$

Vậy $\overrightarrow{x} = 2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$.

Câu 31: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (2; m-1; 3)$, $\vec{b} = (1; 3; -2n)$. Tìm m, n để các vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

A. $m = 7; n = -\frac{3}{4}$. **B.** $m = 7; n = -\frac{4}{3}$. **C.** $m = 4; n = -3$. **D.** $m = 1; n = 0$.

Lời giải

Chọn A

Các vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng khi và chỉ khi tồn tại số thực dương k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m-1 = 3k \\ 3 = k(-2n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m-1 = 6 \\ 3 = 2(-2n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m = 7 \\ n = -\frac{3}{4} \end{cases}.$$

- Câu 32:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -2; 1)$, $B(0; 1; 2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng là
- A.** $M(4; -5; 0)$. **B.** $M(2; -3; 0)$. **C.** $M(0; 0; 1)$. **D.** $M(4; 5; 0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $M \in (Oxy) \Rightarrow M(x; y; 0)$; $\overrightarrow{AB} = (-2; 3; 1)$; $\overrightarrow{AM} = (x-2; y+2; -1)$.

Để A, B, M thẳng hàng thì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương, khi đó: $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+2}{3} = \frac{-1}{1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases}.$$

Vậy $M(4; -5; 0)$.

- Câu 33:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 3)$, $B(2; 3; -4)$, $C(-3; 1; 2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.
- A.** $D(-4; -2; 9)$. **B.** $D(-4; 2; 9)$. **C.** $D(4; -2; 9)$. **D.** $D(4; 2; -9)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $D(x; y; z)$. Để $ABCD$ là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow (1; 3; -7) = (-3-x; 1-y; 2-z) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \\ z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow D(-4; -2; 9).$$

- Câu 34:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $B(1; 2; -3)$, $C(7; 4; -2)$. Nếu điểm E thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$ thì tọa độ điểm E là:
- A.** $\left(3; \frac{8}{3}; -\frac{8}{3}\right)$ **B.** $\left(\frac{8}{3}; 3; -\frac{8}{3}\right)$. **C.** $\left(3; 3; -\frac{8}{3}\right)$ **D.** $\left(1; 2; \frac{1}{3}\right)$

Lời giải

Chọn A

Gọi $E(x; y; z)$

Ta có: $\overrightarrow{CE} = (x-7; y-4; z+2)$; $2\overrightarrow{EB} = (2-2x; 4-2y; -6-2z)$

$$\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB} \Leftrightarrow \begin{cases} x-7 = 2-2x \\ y-4 = 4-2y \\ z+2 = -6-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{8}{3} \\ z = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

- Câu 35:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 1; -2)$ và $B(3; -1; 1)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$.

- A.** $M(9; -5; 7)$. **B.** $M(9; 5; 7)$. **C.** $M(-9; 5; -7)$. **D.** $M(9; -5; -5)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x; y; z)$. Ta có: $\overrightarrow{AM} = (x; y-1; z+2)$; $\overrightarrow{AB} = (3; -2; 3)$.

$$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y-1 = -6 \\ z+2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -5 \\ z = 7 \end{cases}. \text{ Vậy } M(9; -5; 7).$$

Câu 36: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -1)$, $\overrightarrow{AB} = (1; 3; 1)$ thì tọa độ của điểm B là:

- A.** $B(2; 5; 0)$. **B.** $B(0; -1; -2)$. **C.** $B(0; 1; 2)$. **D.** $B(-2; -5; 0)$

Lời giải

Chọn A

Gọi $B(x; y; z)$, ta có $\overrightarrow{AB} = (x-1; y-2; z+1)$

$$\text{mà } \overrightarrow{AB} = (1; 3; 1) \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 1 \\ y-2 = 3 \\ z+1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow B(2; 5; 0)$$

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$ và $D(1; -1; 1)$. Tọa độ điểm C là

- A.** $(2; 0; 2)$. **B.** $(2; 2; 2)$. **C.** $(2; -2; 2)$. **D.** $(0; -2; 0)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi tọa độ điểm C là $(x; y; z)$

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

Ta có $\overrightarrow{DC} = (x-1; y+1; z-1)$ và $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1)$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x-1 = 1 \\ y+1 = 1 \\ z-1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

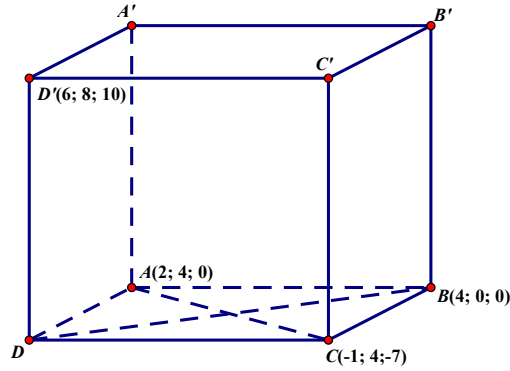
Vậy tọa độ điểm C là $(2; 0; 2)$.

Câu 38: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(2; 4; 0)$, $B(4; 0; 0)$, $C(-1; 4; -7)$ và $D'(6; 8; 10)$. Tọa độ điểm B' là

- A.** $B'(8; 4; 10)$. **B.** $B'(6; 12; 0)$. **C.** $B'(10; 8; 6)$. **D.** $B'(13; 0; 17)$.

Lời giải

Chọn D



Giả sử $D(a; b; c)$, $B'(a'; b'; c')$

$$\text{Gọi } O = AC \cap BD \Rightarrow O\left(\frac{1}{2}; 4; \frac{-7}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 8 \\ c = -7 \end{cases}.$$

Vậy $\overrightarrow{DD'} = (9; 0; 17)$, $\overrightarrow{BB'} = (a' - 4; b'; c')$. Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên

$$\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{BB'} \Rightarrow \begin{cases} a' = 13 \\ b' = 0 \\ c' = 17 \end{cases}. \text{ Vậy } B'(13; 0; 17).$$

Câu 39: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $D(1; -1; 1)$, $C'(4; 5; -5)$. Tính tọa độ đỉnh A' của hình hộp.

- A.** $A'(4; 6; -5)$. **B.** $A'(2; 0; 2)$. **C.** $A'(3; 5; -6)$. **D.** $A'(3; 4; -6)$.

Lời giải

Chọn C

Theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

Suy ra $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

Lại có: $\overrightarrow{AC'} = (3; 5; -6)$, $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1)$, $\overrightarrow{AD} = (0; -1; 0)$.

Do đó: $\overrightarrow{AA'} = (2; 5; -7)$.

Suy ra $A'(3; 5; -6)$.

Câu 40: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$.

Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là

- A.** $\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$. **B.** $\left(\frac{11}{3}; -2; 1\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; \frac{1}{3}\right)$. **D.** $(-2; 11; 1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{BA} = (-1; -3; 4) \Rightarrow |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{26}$; $\overrightarrow{BC} = (-6; 8; 2) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{26}$.

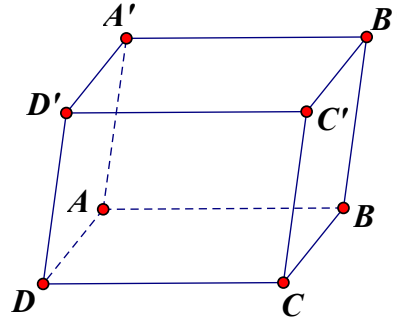
Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ B lên AC của tam giác ABC

$$\text{Suy ra : } \frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DA} \Rightarrow D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right).$$

- Câu 41:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(-3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $D(0;0;1)$, $A'(1;2;3)$. Tìm tọa độ điểm C' .
- A.** $C'(10;4;4)$. **B.** $C'(-13;4;4)$. **C.** $C'(13;4;4)$. **D.** $C'(7;4;4)$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $C'(x; y; z)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; 2; 0)$; $\overrightarrow{AD} = (3; 0; 1)$; $\overrightarrow{AA'} = (4; 2; 3)$.

$$\text{Mà } \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{AC'} = (10; 4; 4) \Rightarrow \begin{cases} x = 10 + 3 \\ y = 4 - 0 \\ z = 4 - 0 \end{cases} \Rightarrow C'(13; 4; 4).$$

- Câu 42:** Trong không gian $Oxyz$, cho véc tơ $\vec{u} = (1; 1; -2)$, $\vec{v} = (1; 0; m)$. Tìm tất cả giá trị của m để góc giữa $\vec{u}$, $\vec{v}$ bằng 45° .
- A.** $m = 2$. **B.** $m = 2 \pm \sqrt{6}$. **C.** $m = 2 - \sqrt{6}$. **D.** $m = 2 + \sqrt{6}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} + (\vec{u}, \vec{v}) = 45^\circ &\Leftrightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{1 - 2m}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1 + m^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{3(m^2 + 1)} = 1 - 2m \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2m \geq 0 \\ 3m^2 + 3 = 1 - 4m + 4m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m^2 - 4m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 - \sqrt{6}. \end{aligned}$$

- Câu 43:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0)$, $B(2;0;-3)$. Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k = -\frac{1}{2}$ có tọa độ là:

- A.** $M\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; -1\right)$. **B.** $M\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -2\right)$.
C. $M\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; 1\right)$. **D.** $M\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -2\right)$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $M(x; y; z)$ là điểm cần tìm.

Vì M chia đoạn AB theo tỉ số $k = -\frac{1}{2}$ nên ta có: $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-x = -\frac{1}{2}(2-x) \\ 1-y = -\frac{1}{2}(0-y) \\ -z = -\frac{1}{2}(-3-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = -1 \end{cases}.$$

Vậy $M\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; -1\right)$.

Câu 44: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u}(2;0;-1)$. Tìm vector $\vec{v}$ biết $\vec{v}$ cùng phương với $\vec{u}$ và $\vec{u} \cdot \vec{v} = 20$.

- A.** $(4;0;-2)$. **B.** $(-8;0;4)$. **C.** $(8;0;-4)$. **D.** $(8;0;4)$.

Lời giải

Chọn C

Vì $\vec{v}$ cùng phương với $\vec{u}$ nên $\vec{v} = k\vec{u} = (2k;0;-k)$, với $k > 0$.

Ta có $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4k + k = 5k = 20 \Leftrightarrow k = 4$.

Vậy $\vec{v} = (8;0;-4)$.

Câu 45: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (2; m-1; 3)$, $\vec{b} = (1; 3; -2n)$. Tìm m, n để các vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

- A.** $m = 7; n = -\frac{3}{4}$. **B.** $m = 4; n = -3$. **C.** $m = 1; n = 0$. **D.** $m = 7; n = -\frac{4}{3}$.

.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$\vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ cùng hướng} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \ (k > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m-1 = 3k \\ 3 = k(-2n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ m = 7 \\ n = -\frac{3}{4} \end{cases}. \text{ Vậy } m = 7; n = -\frac{3}{4}.$$

Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$, $D(1;1;1)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Tọa độ điểm G là trung điểm MN là:

- A.** $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Vì M là trung điểm của AB nên $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.

N là trung điểm của CD nên $N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$. Do đó $G\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 47: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm O, A, B, C sao cho O, A, B không thẳng hàng. Tập hợp những điểm M sao cho $\overrightarrow{MC}(\overrightarrow{MO} - 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0$ là

- A.** một mặt phẳng. **B.** một điểm.
C. tập hợp rỗng. **D.** một đường thẳng.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của OB

Ta có:

$$\overrightarrow{MC}(\overrightarrow{MO} - 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MC}(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MC}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AI} = 0 \Leftrightarrow MC \perp AI.$$

Vậy tập hợp những điểm M là mặt phẳng qua C và vuông góc với AI .

Câu 48: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 3; 1)$, $B(2; 1; 0)$, $C(-3; -1; 1)$.
Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD} = 3S_{\triangle ABC}$

- A.** $D(8; 7; -1)$. **B.** $\begin{bmatrix} D(-8; -7; 1) \\ D(12; 1; -3) \end{bmatrix}$. **C.** $\begin{bmatrix} D(8; 7; -1) \\ D(-12; -1; 3) \end{bmatrix}$. **D.** $D(-12; -1; 3)$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot d(A, BC) \Leftrightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC}$.

$$\Leftrightarrow 3S_{\triangle ABC} = \frac{(AD + BC) \cdot S_{\triangle ABC}}{BC} \Leftrightarrow 3BC = AD + BC \Leftrightarrow AD = 2BC.$$

Mà $ABCD$ là hình thang có đáy AD nên $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$ (1).

$$\overrightarrow{BC} = (-5; -2; 1), \overrightarrow{AD} = (x_D + 2; y_D - 3; z_D - 1).$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 2 = -10 \\ y_D - 3 = -4 \\ z_D - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -12 \\ y_D = -1 \\ z_D = 3 \end{cases}. \text{ Vậy } D(-12; -1; 3).$$

E. TRẢ LỜI ĐÚNG SAI

Câu 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(1;0;1), B(2;1;2), C'(4;5;-5), D(1;-1;1)$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

A. $\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + 2\overrightarrow{C'C} = \vec{0}$

B. $C(2;0;4)$

C. $B'(4;6;-5)$

D. $D'(4;4;6)$

Lời giải

A. Đúng

Ta có: $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'}$; $\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'A}$ và $\overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{CA}$

Suy ra: $\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + 2\overrightarrow{C'C} = 2\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{C'C} = \vec{0}$ (đpcm)

B. Sai

$C(2;0;2)$

C. Đúng

D. Sai

$D'(3;4;-6)$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị, điểm $M(2;0;1), N(3;2;4)$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

A. $\overrightarrow{MN} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

B. $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{k}$

C. $\overrightarrow{ON} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$

D. $|\overrightarrow{NO}| = \sqrt{27}$

Lời giải

A. $\overrightarrow{MN} = 1\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ nên A Sai

B. Đúng

C. Đúng

D. $|\overrightarrow{NO}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$ nên D Sai

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ giả sử $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

A. $\vec{u} = (2;0;-1)$

B. $\vec{a} = (-1;2;-3)$

C. $\vec{u} + \vec{v} = (1;2;3)$

D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$

Lời giải

A. Đúng

B. Đúng

C. $\vec{u} + \vec{v} = (1; 5; -4)$ **nên C sai**

D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-3) = 1$ **nên D Sai**

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 3, $SA = 4$ và $SA \perp (ABCD)$. Chọn hệ trục Oxyz có gốc tọa độ tại A; các điểm B, D, S lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz. Các khẳng định sau **đúng** hay **sai**?

A. $A(0; 0; 0)$

B. $B(0; 3; 0)$

C. $C(3; 0; 0)$

D. $S(4; 0; 0)$

Lời giải

A. Đúng

B. Đúng

C. Sai

Ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k}$. Suy ra: $C(3; 3; 0)$

D. Sai

$S(0; 0; 4)$

Câu 5: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB = 2$; $AD = 3$; $AA' = 4$. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với A, các điểm B; D; A' lần lượt thuộc Ox; Oy; Oz. Các khẳng định sau **đúng** hay **sai**?

A. $\overrightarrow{AA'} = -4\vec{k}$

B. $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}$

C. $\overrightarrow{AD} = 3\vec{i}$

D. $C'(2; 3; 4)$

Lời giải

A. Sai

$\overrightarrow{AA'} = 4\vec{k}$

B. Đúng

C. Sai

$\overrightarrow{AD} = 3\vec{j}$

D. Đúng

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}; \overrightarrow{AD} = 0\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k}; \overrightarrow{AA'} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}; \text{ suy ra } C'(2;3;4)$$

Câu 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 3; SA vuông góc với đáy và $SA = 4$. Chọn hệ trục Oxyz sao cho gốc O trùng với A; các điểm B; D; S lần lượt thuộc Ox; Oy; Oz. Các khẳng định sau **đúng** hay **sai**?

A. $\overrightarrow{AD} = 3\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$

B. $\overrightarrow{AS} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k}$

C. $\overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k}$

D. $\overrightarrow{SC} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$

Lời giải

A. Sai

$$\overrightarrow{AD} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k}$$

B. Đúng

C. Đúng

D. Sai

$$\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AS} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$$

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$; $D(0;2a;0)$, $A'(0;0;2a)$ với $a \neq 0$. Các khẳng định sau **đúng** hay **sai**?

A. $\overrightarrow{AB} = (a;0;0)$

B. $\overrightarrow{AA'} = (0;0;a)$

C. $\overrightarrow{AC'} = (a;2a;2a)$

D. $\overrightarrow{AD} = (a;2a;0)$

Lời giải

A. Đúng

B. Sai

$$\overrightarrow{AA'} = (0;0;2a)$$

C. Đúng

D. Sai

$$\overrightarrow{AD} = (0;2a;0)$$

Câu 8: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1;-1;2)$ và $B(-1;3;0)$.

A. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng $(0;1;1)$.

B. Tọa độ vector $\overrightarrow{AB} = (2;-4;2)$.

C. Tọa độ vector $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

D. Tọa độ vector $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (-2; 4; -2)$

Lời giải

A. Đúng. Vì
$$\begin{cases} x_0 = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1-1}{2} = 0 \\ y_0 = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ z_0 = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2+0}{2} = 1 \end{cases}$$
 Vậy tọa độ trung điểm là $(0; 1; 1)$.

B. Sai. Vì $\overrightarrow{AB} = (-2; 4; -2)$.

C. Sai. Vì $\overrightarrow{OA} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

D. Đúng. Vì
$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} = (1; -1; 2) \\ \overrightarrow{OB} = (-1; 3; 0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (-2; 4; -2)$$

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 3; 2)$ và $\vec{b} = (1; 1; -1)$.

A. Tọa độ vector $\vec{a} - \vec{b} = (1; 2; 3)$.

B. Tích vô hướng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 6.

C. Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.

D. Cosin góc giữa vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\frac{\sqrt{51}}{51}$

Lời giải

A. Đúng. Vì $\vec{a} - \vec{b} = (2-1; 3-1; 2-(-1)) = (1; 2; 3)$.

B. Sai. Vì $\vec{a}\vec{b} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 3$

C. Đúng. Vì $\frac{2}{1} \neq \frac{3}{1} \neq \frac{2}{-1}$.

D. Sai. Vì $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{51}}$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (-2; 1; -3)$, $\vec{b} = (-1; -3; 2)$ và điểm $A(4; 6; -3)$.

A. Tọa độ vector $\vec{a} - 2\vec{b} = (0; 1; -1)$.

B. Tọa độ điểm $B(2; 7; -6)$ thì $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

C. Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương hướng.

D. Góc giữa vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 120° .

Lời giải

A. Sai. Vì $\vec{a} - 2\vec{b} = (0; 7; -7)$.

B. Đúng. Vì $\vec{a} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = x_B - 4 \\ 1 = y_B - 6 \\ -3 = z_B + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 2 \\ y_B = 7 \\ z_B = -6 \end{cases} \Rightarrow B(2; 7; -6)$.

C. Sai. Vì $\frac{-2}{-1} \neq \frac{1}{-3} \neq \frac{-3}{2}$.

D. Đúng. Vì $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{-2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 1 + (-3) \cdot 2}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$.

A. Độ dài vector $\vec{a}$ bằng $\sqrt{2}$.

B. Vector $\vec{b}$ vuông góc với $\vec{a}$.

C. Vector $\vec{b}$ vuông góc với $\vec{c}$.

D. Tọa độ vector $3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ bằng $(-2; 4; -1)$.

Lời giải

A. Đúng. Vì $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0} = \sqrt{2}$.

B. Đúng. Vì $\vec{a}\vec{b} = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 = 0$

C. Sai. Vì $\vec{b}\vec{c} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 2$.

D. Sai. Vì $3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = (-2; 4; -1)$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau?

A. $|\vec{a}| = \sqrt{2}$.

B. $\vec{b} \perp \vec{a}$.

C. $\vec{b} \perp \vec{c}$.

D. $2|\vec{c}| = 6$.

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. S	D. S
-------------	-------------	-------------	-------------

☐ Ta có: $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$ nên A đúng

☐ $\vec{b}\vec{a} = 0$ nên $\vec{b} \perp \vec{a}$. Suy ra B đúng

☐ $\vec{b}\vec{c} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 2 \Rightarrow \vec{b}$ không vuông góc với $\vec{c}$.

☐ $2|\vec{c}| = 2\sqrt{3}$ nên D sai

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(4; 2; 1)$, $B(2; 1; 3)$, $C(-1; 3; -2)$.

A. Tọa độ trọng tâm tam giác ABC bằng $\left(\frac{5}{3}; 2; \frac{2}{3}\right)$.

B. Tọa độ trung điểm đoạn thẳng AB bằng $\left(3; \frac{3}{2}; 2\right)$

C. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ điểm $D = (1; 4; -4)$.

D. Ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Lời giải

A. Đúng. Tọa độ trọng tâm tam giác ABC $\left(\frac{4+2-1}{3}; \frac{2+1+3}{3}; \frac{1+3-2}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}; 2; \frac{2}{3}\right)$.

B. Đúng. Tọa độ trung điểm đoạn thẳng AB $\left(\frac{4+2}{2}; \frac{2+1}{2}; \frac{1+3}{2}\right) = \left(3; \frac{3}{2}; 2\right)$.

C. Đúng. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-4 = -1-x_D \\ 1-2 = 3-y_D \\ 3-1 = -2-z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = 4 \\ z_D = -4 \end{cases} \Rightarrow D(1; 4; -4).$$

D. Sai. Vì $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2; -1; 2) \\ \overrightarrow{AC} = (-5; 1; -3) \end{cases}$. Ta có: $\frac{-2}{-5} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{2}{-3} \Rightarrow A, B, C$ không thẳng hàng.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 5; -1)$, $B(7; x; 1)$, $C(9; 2; y)$.

A. Ba điểm A, B, C thẳng hàng thì $x + y = 5$.

B. Điểm $G\left(\frac{19}{3}; \frac{8}{3}; 3\right)$ là trọng tâm tam giác ABC thì $x = 1; y = 3$.

C. Tam giác ABC vuông tại A thì $x = 13, y = -1$.

D. Tích vô hướng của $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3x + 2y + 41$.

Lời giải

A. Đúng.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (4; x-5; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (6; -3; y+1)$

$$\text{Đề ba điểm } A, B, C \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = k \cdot 6 \\ x-5 = k(-3) \\ 2 = k(y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy $x + y = 5$.

$$\text{B. Đúng. Ta có: } \begin{cases} \frac{3+7+9}{3} = \frac{19}{3} \\ \frac{5+x+2}{3} = \frac{8}{3} \\ \frac{-1+1+y}{3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

C. Đúng.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (4; x-5; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (6; -3; y+1)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24 + (x-5)(-3) + 2(y+1)$$

$$\text{Với } \begin{cases} x = 13 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

D. Đúng. Vì $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24 + (x-5)(-3) + 2(y+1) = -3x + 2y + 41$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (1; 2; 3)$; $\vec{b} = (2; 2; -1)$, $\vec{c} = (4; 0; -4)$.

- A. $3\vec{a} = (1; 6; 9)$.
- B. $\vec{a} + \vec{b} = (3; 4; 2)$.
- C. $\vec{a} - \vec{c} = (3; -2; -7)$.
- D. $\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} = (7; 0; -4)$.

Lời giải

- A. Sai. Vì $3\vec{a} = 3(1; 2; 3) = (3; 6; 9)$
- B. Đúng. Vì $\vec{a} + \vec{b} = (1 + 2; 2 + 2; 3 - 1) = (3; 4; 2)$.
- C. Sai. Vì $\vec{a} - \vec{c} = (1 - 4; 2 - 0; 3 + 4) = (-3; 2; 7)$.
- D. Đúng. Vì $\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} = (1 - 2 + 2.4; 2 - 2 + 2.0; 3 - (-1) + 2.(-4)) = (7; 0; -4)$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$; $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$.

- A. Tọa độ vector $\vec{a} = (-1; 3; 4)$.
- B. Cosin góc giữa hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ bằng $\frac{1}{2}$.
- C. Tích vô hướng của hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ bằng 14.
- D. Hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ vuông góc với nhau.

Lời giải

- A. Đúng. Dựa theo định nghĩa suy ra $\vec{a} = (-1; 3; 4)$.
- B. Sai. Vì $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{-1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{2^2 + 4^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{546}}{39}$.
- C. Đúng. Vì $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 14$.
- D. Sai. Vì tích vô hướng của hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ khác 0.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (2; 1; -2)$, $\vec{b} = (1; 2; -4)$, $\vec{c} = (-1; -3; 3)$.

- A. $\vec{a} = 2\vec{b}$.
- B. $|\vec{a}| = 3|\vec{b}|$.
- C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$
- D. $2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c} = (-4; -19; 23)$.

Lời giải

- A. Sai. Vì $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng hướng.
- B. Sai. Vì $\begin{cases} |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3 \\ |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{21} \end{cases} \Rightarrow |\vec{a}| = \frac{3\sqrt{21}}{21} |\vec{b}|$
- C. Đúng. Vì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-4) = 12$.
- D. Đúng.
Ta có $2\vec{a} = (4; 2; -4)$, $-3\vec{b} = (-3; -6; 12)$, $5\vec{c} = (-5; -15; 15)$
Vậy $2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c} = (-4; -19; 23)$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn vector $\vec{a} = (2; 3; 1), \vec{b} = (-1; 5; 2), \vec{c} = (4; -1; 3)$ và $\vec{x} = (-3; 22; 5)$.

- A. $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.
 B. Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.
 C. Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{c}$ không cùng phương.
 D. Hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ vuông góc với nhau.

Lời giải

A. Đúng.

$$\text{Đặt } \vec{x} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b} + p \cdot \vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - n + 4p = -3 \\ 3m + 5n - p = 22 \\ m + 2n + 3p = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \\ p = -1 \end{cases}.$$

Vậy $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.

B. Sai. Vì $\frac{2}{-1} = \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$.

C. Sai. Vì $\frac{2}{-1} = \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$.

D. Sai. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 2 = 15$

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(-1; 1; 2), B(1; 0; 3), C(0; 2; -2)$.

- A. Tọa độ vector $\overrightarrow{BC} = (-1; 2; -5)$.
 B. Tọa độ vector $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.
 C. Tọa độ điểm D là $D(-2; 3; -3)$.
 D. Tọa độ vector $\overrightarrow{AD} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. Đ	D. S
-------------	-------------	-------------	-------------

☐ $\overrightarrow{BC} = (-1; 2; -5)$ nên A đúng

☐ $\overrightarrow{AB} = (2; -1; 1)$ nên B đúng

☐ Gọi tọa độ điểm D là $(x; y; z)$

$$\overrightarrow{AB} = (2; -1; 1)$$

$$\overrightarrow{DC} = (-x; 2 - y; -2 - z)$$

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} -x = 2 \\ 2 - y = -1 \\ -2 - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \\ z = -3 \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm D là $D(-2; 3; -3)$ vậy C đúng

☐ $\overrightarrow{AD} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ nên D sai

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(2; 1; 0), C(0; 3; 0), C'(-1; 2; 1), D'(0; -2; 0)$.

A. Tọa độ các điểm A', B' là $A'(1; 0; -1), B'(0; 4; 2)$.

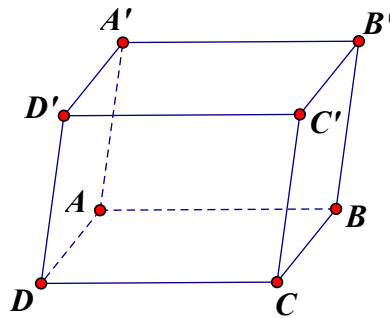
B. Tọa độ các điểm B, D là $B(1; 5; 1), D(1; -1; -1)$.

C. Tọa độ vector $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$.

D. Tọa độ vector $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{B'D} = \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Lời giải

A. S	B. Đ	C. Đ	D. Đ
------	------	------	------



☐ Gọi tọa độ điểm A' là $(x; y; z)$

$$\overrightarrow{A'C'} = (-1 - x; 2 - y; 1 - z)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-2; 2; 0)$$

Vì $A'C'CA$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} -1 - x = -2 \\ 2 - y = 2 \\ 1 - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow A'(1; 0; 1) \text{ nên A sai}$$

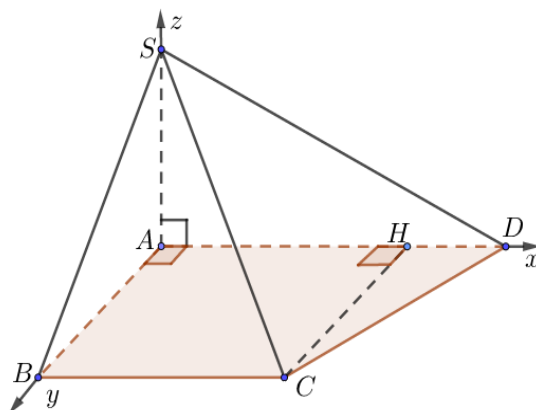
Làm tương tự ta có: $B'(0; 4; 2)$

☐ $B(1; 5; 1); D(1; -1; -1)$ nên B đúng

☐ $\overrightarrow{AB} = (1; 4; 1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ nên C đúng

☐ $\overrightarrow{B'D} = (1; -5; -3) \Rightarrow \overrightarrow{B'D} = \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$ nên D đúng

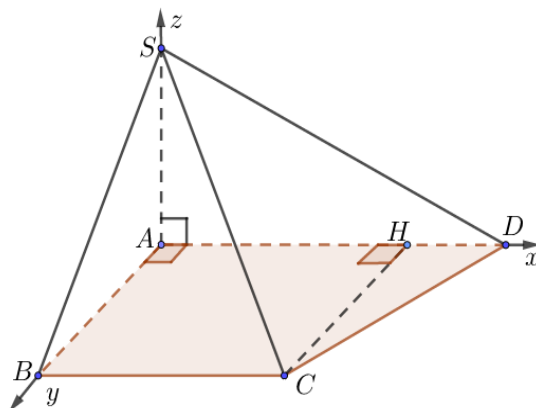
Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2AB = 2BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, $SA = 2a$. Gọi H là hình chiếu điểm C trên cạnh AD .



- A. Tọa độ các điểm A, B là $A(0;0;0), B(a;a;0)$.
- B. Tọa độ các điểm C, D là $C(a;a;0), D(2a;0;0)$.
- C. Tọa độ điểm S là $S(0;0;2a)$.
- D. Tọa độ điểm H là $H(a;0;0)$.

Lời giải

A. S	B. Đ	C. Đ	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------

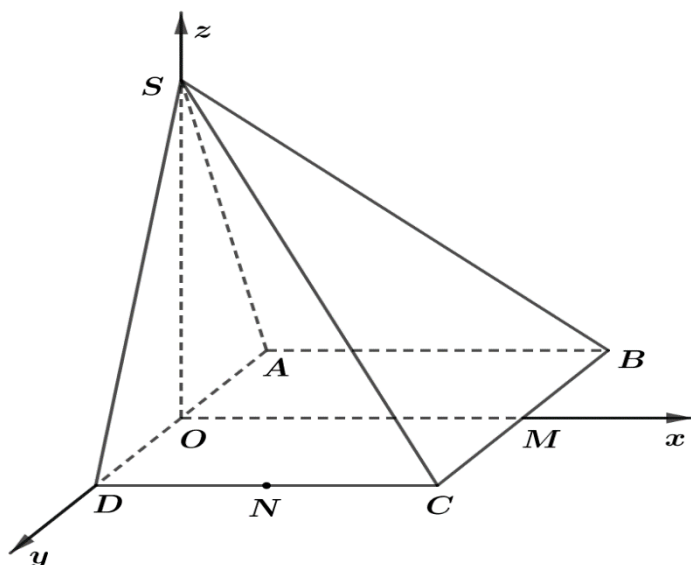


Để tính được $AB = BC = AH = a$

Gắn hình chóp vào hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $O \equiv A$, $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$, $\overrightarrow{AH} = \vec{j}$, $\overrightarrow{AS} = 2\vec{k}$

Khi đó ta có $A(0;0;0), B(a;a;0), C(a;a;0), D(2a;0;0), S(0;0;2a), H(a;0;0)$

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có các cạnh bằng 1, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi O, M và N lần lượt là trung điểm của AD, BC và CD . Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



A. Tọa độ các điểm A, B là $A\left(0; -\frac{1}{2}; 0\right), B\left(1; -\frac{1}{2}; 0\right)$.

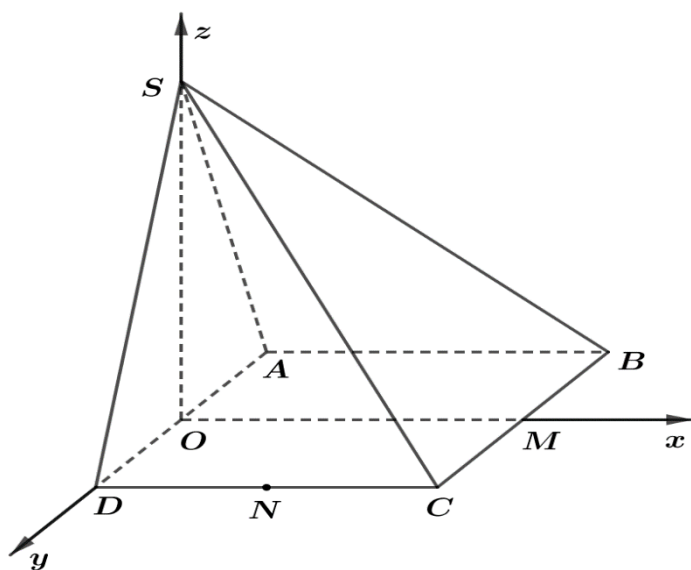
B. Tọa độ các điểm C, D là $C\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), D\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$.

C. Tọa độ điểm S là $S\left(0; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

D. Tọa độ các điểm M, N là $M(1; 0; 0), N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. Đ	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------



Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

SAD là tam giác đều có cạnh bằng 1 nên $SO = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$A\left(0; -\frac{1}{2}; 0\right), B\left(1; -\frac{1}{2}; 0\right), C\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), D\left(0; \frac{1}{2}; 0\right), S\left(0; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), M(1; 0; 0), N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$$

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho vector $\vec{a} = (2; -2; -4)$, $\vec{b} = (1; -1; 1)$.

A. $\vec{a} + \vec{b} = (3; -3; -3)$

B. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương

C. $|\vec{b}| = \sqrt{3}$

D. $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$

Lời giải

A. Đ	B. S	C. Đ	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------

• Xét đáp án A: $\vec{a} + \vec{b} = (3; -3; -3)$ đúng.

• Xét đáp án B: $\vec{a} = 2(1; -1; -2) \neq \vec{b} = (1; -1; 1)$. Suy ra $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Đáp án B sai.

• $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ đúng.

• $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$ đúng.

Câu 24: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7; 2)$.

A. $\vec{u} = 3\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c}$ với $\vec{u} = (11; 22; 18)$.

B. $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b} - 2\vec{c}$ với $\vec{x} = \left(-1; -\frac{115}{6}; -\frac{7}{6}\right)$.

C. $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ với $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

D. $\vec{y} = \vec{b} - \vec{c}$ với $\vec{y} = -\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. Đ	D. S
-------------	-------------	-------------	-------------

A. $\vec{u} = 3\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c}$ với $\vec{u} = (11; 22; 18)$. **ĐÚNG**

+ Ta có:
$$\left\{ \begin{array}{l} 3\vec{a} = (6; -15; 9) \\ \vec{b} = (0; -2; 1) \\ 5\vec{c} = (5; 35; 10) \end{array} \right\} \Rightarrow 3\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c} = (11; 22; 18) = \vec{u}$$

B. $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b} - 2\vec{c}$ với $\vec{x} = \left(-1; -\frac{115}{6}; -\frac{7}{6}\right)$. **ĐÚNG**

+ Ta có: $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\vec{a} = \left(1; -\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right) \\ \frac{4}{3}\vec{b} = \left(0; \frac{8}{3}; -\frac{4}{3}\right) \\ 2\vec{c} = (2; 14; 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b} - 2\vec{c} = \left(-1; -\frac{115}{6}; -\frac{7}{6}\right) = \vec{x}$

C. $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ với $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$. **ĐÚNG**

$\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \vec{v} = (2; -3; 2) \Rightarrow \vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$

D. $\vec{y} = \vec{b} - \vec{c}$ với $\vec{y} = -\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$. **SAI**

$\vec{y} = \vec{b} - \vec{c} \Rightarrow \vec{y} = (-1; -5; -3) \Rightarrow \vec{y} = -\vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{k} - 4\vec{j}$ và $\vec{b} = (m - n; 4m - 6n; n^2 - 3m + 2)$, với m, n là tham số.

a) Tọa độ $\vec{a} = (1; 3; -4)$.

b) Dựng điểm A thỏa $\vec{OA} = \vec{a}$ thì $A(1; -4; 3)$.

c) Tồn tại giá trị của m và n để $\vec{b} = \vec{0}$.

d) Nếu $\vec{a} = \vec{b}$ thì $m + n = 9$.

Lời giải

Đáp án: a sai; b đúng; c sai; d đúng

a) Tọa độ $\vec{a} = (1; -4; 3)$.

b) Khi $\vec{OA} = \vec{a}$ thì tọa độ $\vec{a}$ cũng là tọa độ điểm A . Suy ra $A(1; -4; 3)$.

c) $\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} m - n = 0 \\ 4m - 6n = 0 \\ n^2 - 3m + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = 0 \\ n^2 - 3m + 2 = 0 \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}.$

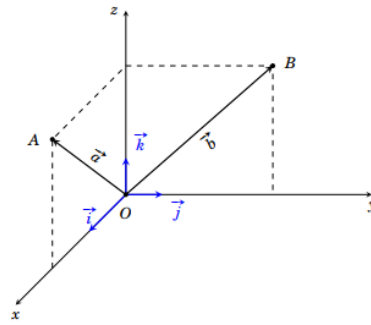
Vậy, không tồn tại m, n để $\vec{b} = \vec{0}$.

d) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} m - n = 1 \\ 4m - 6n = -4 \\ n^2 - 3m + 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ n = 4 \end{cases}.$

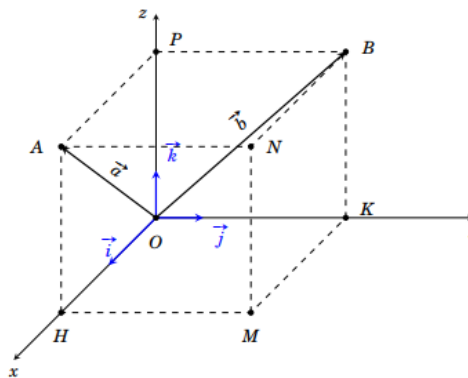
Suy ra $m + n = 9$.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 2; 0)$, $\vec{b} = 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Đặt $\vec{OA} = \vec{a}$ và $\vec{OB} = \vec{b}$.

- a) $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{k}$.
b) Toạ độ $\vec{b} = (0; 2; 2)$.
c) Toạ độ $\vec{AB} = (-2; 2; 0)$
d) Góc $\widehat{AOB} = 45^\circ$.



Lời giải



Đáp án: a sai, b đúng, c đúng, d sai

a) Ta có $\vec{a} = (2; 0; 2) \Rightarrow \vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{k}$.

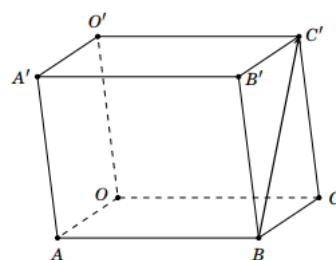
b) Ta có $\vec{b} = 2\vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow \vec{b} = (0; 2; 2)$.

c) Ta có $\vec{OA} = \vec{a}$ thì toạ độ véc tơ $\vec{a}$ cũng chính là toạ độ A . Suy ra $A(2; 0; 2)$. Tương tự $B(0; 2; 2)$. Từ đây, ta tính được $\vec{AB} = (-2; 2; 0)$

d) Nhận xét $OHMK$. $PANB$ là hình lập phương. Suy ra $\triangle OAB$ đều. Vậy $\widehat{AOB} = 60^\circ$.

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ có $A(1; 1; -1)$, $B(0; 3; 0)$, $\vec{BC'} = (2; -6; 6)$. Gọi H, K lần lượt là trọng tâm của tam giác $OA'O'$ và $CB'C'$.

- a) Toạ độ điểm C' là $(2; -3; 6)$
b) Toạ độ điểm O' là $(3; -5; 5)$.
c) Toạ độ véc tơ $\vec{AB'} = (-2; 3; -6)$.
d) Toạ độ véc tơ $\vec{HK} = (-1; 2; -1)$.



Lời giải

Đáp án: a đúng; b đúng; c sai; d sai

a) Gọi $C'(x; y; z)$. Ta có $\overrightarrow{BC'} = (2; -6; 6) \Rightarrow \begin{cases} x-0=2 \\ y-3=-6 \\ z-0=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \\ z=6 \end{cases}$

Vậy $C(2; -3; 6)$.

b) Gọi $O'(x; y; z)$. Theo hình vẽ thì $\overrightarrow{AO'} = \overrightarrow{BC'} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2 \\ y-1=-6 \\ z+1=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-5 \\ z=5 \end{cases}$

Vậy $O'(3; -5; 5)$.

c) Theo hình vẽ thì $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{OC'} = (2; -3; 6)$.

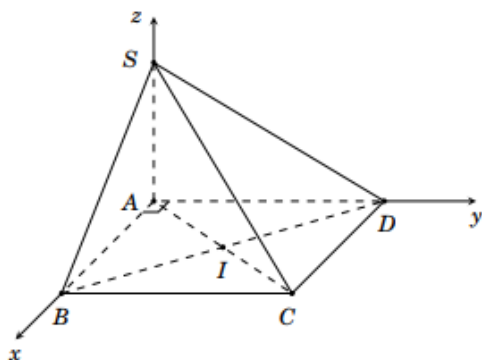
d) Ta có $\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{AB} = (-1; 2; 1)$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=1, AD=2, SA$ vuông góc với mặt đáy và $SA=3$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như sau: Gốc tọa độ O trùng với điểm A , các véc tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{i}, \vec{j}$ và $\vec{k}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

a) Tọa độ $D(0; 2; 0)$. b) Tọa độ $C(1; 2; 3)$. c) Tọa độ $S(2; 0; 0)$ d) Tọa độ $I(1; 1; 0)$.	
--	--

Lời giải

Đáp án: a đúng; b sai; c đúng; d sai



Với hệ trục đã chọn như hình vẽ thì

- a) Điểm $D \in Oy$ và $AD = 2$ nên $D(0; 2; 0)$.
- b) Điểm $C \in (Oxy)$ và có hình chiếu lên Ox, Oy lần lượt là điểm B và D . Do $AB = 1$ và $AD = 2$ nên $C(2; 2; 0)$.
- c) Điểm $S \in Oz$ và $AS = 3$ nên $S(0; 0; 3)$.
- d) Điểm $I \in (Oxy)$ và có hình chiếu lên Ox, Oy lần lượt là trung điểm của AB và AD nên $I(0, 5; 1; 0)$.

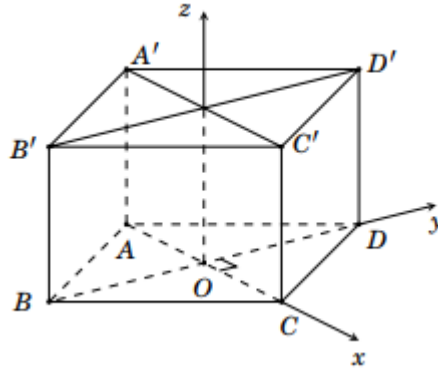
Câu 30: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tọa độ $A(-1; 0; 0)$.
- b) $\overrightarrow{AC'} = (2\sqrt{2}; 0; 2)$.
- c) Tọa độ $D'(0; \sqrt{2}; 2)$.
- d) $\overrightarrow{BD'} = (0; 0; 2)$.

Lời giải

Đáp án: a sai; b đúng; c đúng; d sai

Độ dài $AC = 2\sqrt{2}$. Với hệ trục $Oxyz$ đã chọn như hình vẽ thì



a) Điểm $A \in Ox$, nằm ngược chiều dương và $OA = \sqrt{2}$ nên $A(-\sqrt{2}; 0; 0)$.

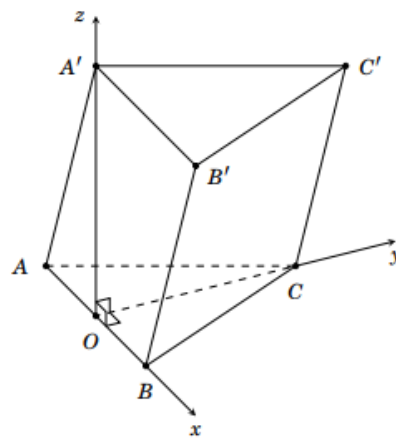
b) Tọa độ $C'(\sqrt{2}; 0; 2)$. Suy ra $\overline{AC'} = (2\sqrt{2}; 0; 2)$.

c) Điểm D' có hình chiếu vuông góc xuống (Oxy) là điểm $D(0; \sqrt{2}; 0)$ và $DD' = 2$ nên $D'(0; \sqrt{2}; 2)$.

d) Tọa độ $B(0; -\sqrt{2}; 0), D'(0; \sqrt{2}; 2)$. Suy ra $\overline{BD'} = (0; 2\sqrt{2}; 2)$.

Câu 31: Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2 như hình vẽ. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trung điểm cạnh AB , góc $\widehat{A'AO} = 60^\circ$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với trung điểm của đoạn BC), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tọa độ điểm $A(-1; 0; 0)$.
- b) Tọa độ điểm $C(0; \sqrt{3}; 0)$.
- c) Tọa độ điểm $A'(0; -1; \sqrt{3})$.
- d) Tọa độ điểm $C'(1; \sqrt{3}; \sqrt{3})$.



Lời giải

Đáp án: a **đúng** | b **đúng** | c **sai** | d **đúng**

Độ dài $OC = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot OA' = OA \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}$. Với hệ trục $Oxyz$ đã chọn như hình vẽ trên thì

a) Điểm $A \in Ox$, nằm ngược chiều dương và $OA = 1$ nên $A(-1; 0; 0)$.

b) Điểm $A' \in Oy$, nằm cùng chiều dương và $OC = \sqrt{3}$ nên $C(0; \sqrt{3}; 0)$.

c) $A' \in Oz$, nằm cùng chiều dương và $OA' = \sqrt{3}$ nên $A'(0; 0; \sqrt{3})$.

d) Gọi $C'(x; y; z)$. Ta có $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 0 = 1 \\ y - 0 = \sqrt{3} \\ z - \sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{3} \\ z = \sqrt{3} \end{cases}$.

Câu 32: Cho các điểm $A(1; -2; 3), B(-2; 1; 2), C(3; -1; 2)$.

a) $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; -1)$.

b) $\overrightarrow{AC} = (-2; -1; 1)$.

c) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$.

d) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Lời giải

Đáp án: a đúng; b sai; c sai ; d đúng

a) $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (-3; 3; -1)$.

b) $\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A) = (2; 1; -1)$

c) $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; -1), \overrightarrow{AC} = (2; 1; -1)$. Hai vec tơ này không cùng phương nên không tồn tại số thực k để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

d) Hai vec tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

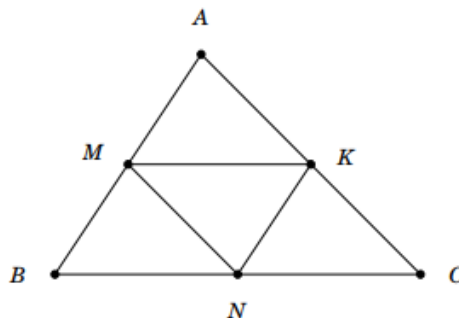
Câu 33: Cho ba điểm $A(3; 3; -6), B(1; 3; 2)$ và $C(-1; -3; 1)$. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của AB, BC và CA .

a) Tọa độ $M(2; 3; 2)$.

b) Với G là trọng tâm tam giác ABC thì $GC = 2\sqrt{5}$.

c) Trọng tâm tam giác MNK là $E(1; 1; -1)$.

d) Với $D(-3; -3; 9)$ thì tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.



Lời giải

Đáp án: a sai; b sai; c đúng; d đúng

a) M là trung điểm của AB , suy ra $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$ hay $M(2; 3; -2)$.

b) Ta có $G(1; 1; -1)$. Suy ra $GC = \sqrt{(-1-1)^2 + (-3-1)^2 + (1+1)^2} = 2\sqrt{6}$.

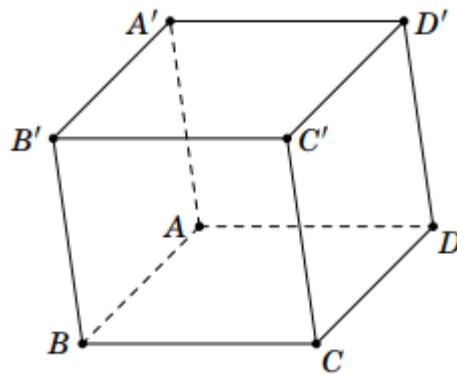
c) Hai tam giác ABC và MNK có cùng trọng tâm. Suy ra E trùng với $G(1; 1; -1)$.

d) Ta có $\overrightarrow{AC} = (-4; -6; 7)$, $\overrightarrow{BD} = (-4; -6; 7)$, suy ra $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Vậy $ABDC$ là hình bình hành.

Câu 34: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$, biết điểm $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 2; 0)$, $D'(-1; 3; 5)$. Gọi M, N là tâm của các hình bình hành $ABB'A'$, $ADD'A'$.

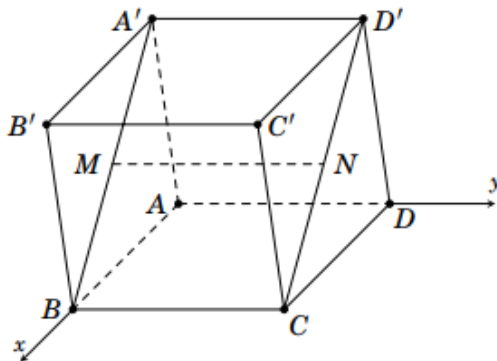
a) Tọa độ $D(0; 2; 0)$. b) Tọa độ $A'(-1; 1; 5)$.

c) Tọa độ $\overrightarrow{MN} = (-1; 1; 0)$. d) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'}| = \sqrt{29}$.



Lời giải

Đáp án: a đúng; b đúng; c sai; d sai



a) Theo qui tắc hình bình hành, ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (0; 2; 0) \Rightarrow D(0; 2; 0)$.

b) Ta có $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{DD'} \Rightarrow A'(-1; 1; 5)$.

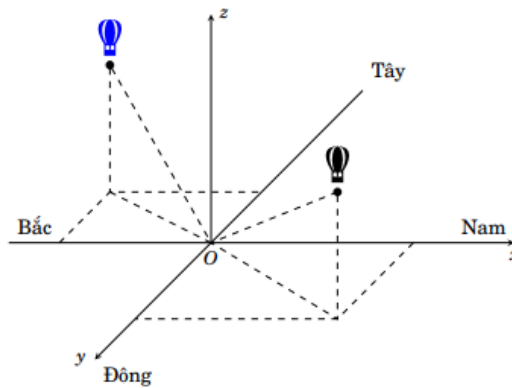
c) Theo hình vẽ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} = (0; 2; 0)$.

d) Ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = (0; 3; 5)$. Xét

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}| = |\overrightarrow{AC'}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$$

Câu 35: Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,5 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 1,5 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,8 km.

Chọn hệ trục $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (Hình bên dưới), đơn vị đo lấy theo kilomet.



a) Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ nhất là $(2; 1; 0,5)$.

b) Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ hai là $(-1; 1,5; 0,8)$.

c) Khoảng cách từ điểm xuất phát đến khinh khí cầu thứ nhất bằng $\sqrt{21}$ km.

d) Khoảng cách hai chiếc khinh khí cầu là 3,92 km (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng

a) Chiếc khinh khí cầu thứ nhất có tọa độ là $(2; 1; 0,5)$.

b) Chiếc khinh khí cầu thứ hai có tọa độ là $(-1; -1,5; 0,8)$.

c) Khoảng cách từ điểm xuất phát đến khinh khí cầu thứ nhất bằng

$$\sqrt{2^2 + 1^2 + 0,5^2} = \frac{\sqrt{21}}{2} \text{ (km)}$$

d) Khoảng cách hai chiếc khinh khí cầu là

$$\sqrt{(-1-2)^2 + (1,5-1)^2 + (0,8-0,5)^2} = \sqrt{15,34} \approx 3,92 \text{ (km)}.$$

Câu 36: Cho ba vec-tơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$ và $\vec{c} = (1; 1; 1)$.

a) $|\vec{a}| = 2$.

b) $|\vec{c}| = \sqrt{3}$.

c) $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

d) $\vec{b} \perp \vec{c}$.

Lời giải

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d sai

a) $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. b) $|\vec{c}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

c) $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| |\vec{c}|} = 0$ d) $\vec{b} \cdot \vec{c} = 2$, suy ra $\vec{b}$ không vuông $\vec{c}$.

Câu 37: Cho hai vectơ $\vec{u} = (0; 2; 3)$ và $\vec{v} = (m-1; 2m; 3)$.

a) $|\vec{u}| = \sqrt{13}$.

b) $|\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow m = -\frac{3}{5}$.

c) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow m = 1$.

d) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$.

Lời giải

Đáp án: a đúng | b. sai | c đúng | d sai

a) $|\vec{u}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

b) $|\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{13} = \sqrt{(m-1)^2 + 4m^2 + 9} \Leftrightarrow 5m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ hoặc } m = -\frac{3}{5}$.

c) khi $m = 1$ thì $\vec{v} = (0; 2; 3)$. Suy ra $\vec{u} = \vec{v}$.

d) $\vec{u} \perp \vec{u} \Leftrightarrow 4m + 9 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{4}$.

Câu 38: Cho tam giác ABC có $A(1;2;0), B(0;1;1), C(2;1;0)$.

a) Tam giác ABC vuông tại A .

b) Chu vi tam giác là $\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

c) Diện tích tam giác ABC là $\sqrt{6}$.

d) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I\left(1;1;\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; -1; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{3}, \overrightarrow{AC} = (1; -1; 0) \Rightarrow AC = \sqrt{2},$
 $\overrightarrow{BC} = (2; 0; -1) \Rightarrow BC = \sqrt{5}.$

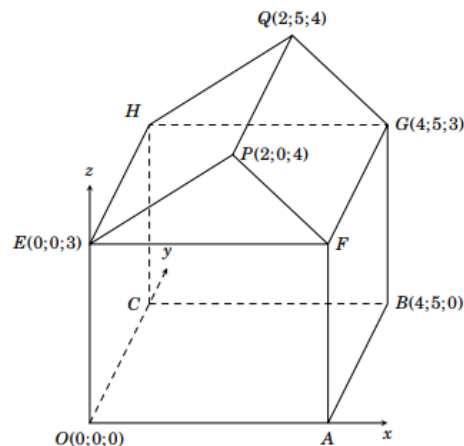
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ do đó $AB \perp AC$, tam giác ABC vuông tại A .

b) Chu vi của tam giác là $AB + AC + BC = \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5}.$

c) Diện tích là $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{\sqrt{6}}{2}$

d) Tâm đường tròn ngoại tiếp là trung điểm của BC có tọa độ $I\left(1;1;\frac{1}{2}\right).$

Câu 39: Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



a) Tọa độ của các điểm $A(5;0;0)$.

b) Tọa độ của các điểm $H(0;5;3)$.

c) Góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG , hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ gọi là góc dốc của mái nhà. Số đo của góc dốc của mái nhà bằng $26,6^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).

d) Chiều cao của ngôi nhà là 4.

Lời giải

Đáp án: a sai ; b sai ; c sai ; d sai

a) Vì nền nhà là hình chữ nhật nên tứ giác $OABC$ là hình chữ nhật, suy ra $x_A = x_B = 4, y_C = y_B = 5$. Do A nằm trên trục Ox nên tọa độ điểm A là $(4;0;0)$.

b) Tường nhà là hình chữ nhật, suy ra $y_H = y_C = 5, z_H = z_E = 3$. Do H nằm trên mặt phẳng (Oyz) nên tọa độ điểm H là $(0;5;3)$.

c) Để tính góc dốc của mái nhà, ta đi tính số đo góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG , hai mặt phẳng lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$. Do mặt phẳng (Ozx) vuông góc với hai mặt phẳng $(FGQP)$ và $(FGHE)$ nên góc PFE là góc phẳng nhị diện ứng với góc nhị diện đó.

Ta có $\overrightarrow{FP} = (-2;0;1), \overrightarrow{FE} = (-4;0;0)$.

$$\text{Suy ra } \cos \widehat{PFE} = \cos(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FE}) = \frac{\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FE}}{|\overrightarrow{FP}| \cdot |\overrightarrow{FE}|} = \frac{(-2) \cdot (-4) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Do đó, $\widehat{PFE} \approx 26,6^\circ$. Vậy góc dốc của mái nhà khoảng $26,6^\circ$.

d) Chiều cao bằng cao độ của điểm P . Suy ra $h = 4$.

F. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Trong không gian Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (3;2;5)$ và $\vec{b} = (3m+2;3;6-n)$. Tính giá trị biểu thức $6m+2n$ để hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ bằng nhau.

Lời giải

Trả lời: 2

$$\text{Ta có } \vec{a}, \vec{b} \Leftrightarrow \frac{3m+2}{3} = \frac{3}{2} = \frac{6-n}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{5}{6} \\ n = \frac{-3}{2} \end{cases} \Rightarrow 6m + 2n = 2.$$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có ba đỉnh $A(1; 2; 3)$, $B(-1; 2; 0)$, $C(3; 2; -3)$ và $G(a; b; c)$ là trọng tâm của tam giác ABC . Tính giá trị biểu thức $P = a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: 3

Do G là trọng tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases} a = \frac{1 + (-1) + 3}{3} = 1 \\ b = \frac{2 + 2 + 2}{3} = 2 \\ c = \frac{3 + 0 + (-3)}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow G(1; 2; 0)$$

Vậy $P = a + b + c = 1 + 2 + 0 = 3$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 0; 0)$, $B(0; 0; 1)$, $C(2; 1; 1)$. Diện tích của tam giác ABC bằng:

Lời giải

Trả lời: $\frac{\sqrt{6}}{2}$

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; 0; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (1; 1; 1) \Rightarrow (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow AB \perp AC$.

Nên diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 4: Trong không gian Oxy , cho hai điểm $A(1; 2; 3)$ và $B(2; 1; 1)$. Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng. Tính giá trị biểu thức $x_0 + y_0 + z_0$.

Lời giải

Trả lời: 8

Điểm $M \in (Oyz) \Rightarrow M(0; y; z)$

Ta có: $\overrightarrow{AM} = (-1; y-2; z-3)$, $\overrightarrow{AB} = (1; -1; -2)$

Để A, B, M thẳng hàng thì $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ z = 5 \end{cases} \Rightarrow M(0; 3; 5)$$

Suy ra $x_0 + y_0 + z_0 = 8$.

Câu 5: Trong không gian Oxy , cho ba điểm $A(1;-1;1), B(3;1;2)$ và $C(-1;0;3)$. Có bao nhiêu điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang có 2 cạnh đáy AB, CD và có góc tại D bằng 45° .

Lời giải

Trả lời: 2

Gọi $D(x; y; z)$

$$\overrightarrow{AB} = (2; 2; 1), \overrightarrow{DC} = (-1 - x; -y; 3 - z)$$

Tứ giác $ABCD$ là hình thang có 2 cạnh đáy AB, CD nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ cùng phương.

$$\Rightarrow \frac{-1-x}{2} = \frac{-y}{2} = \frac{3-z}{1} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z - 7 \\ y = 2z - 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD} = (x-1; y+1; z-1) \\ \overrightarrow{CD} = (x+1; y; z-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AD} = (2z-8; 2z-5; z-1) \\ \overrightarrow{CD} = (2z-6; 2z-6; z-3) \end{cases}$$

$$\cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CD}) = \frac{9(z-3)^2}{\sqrt{9(z^2-6z+10)} \cdot \sqrt{9(z-3)^2}} = \frac{z-3}{\sqrt{z^2-6z+10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\Rightarrow 2(z^2 - 6z + 9) = z^2 - 6z + 10 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1; y = 2 \\ x = -3; y = -2 \end{cases}$$

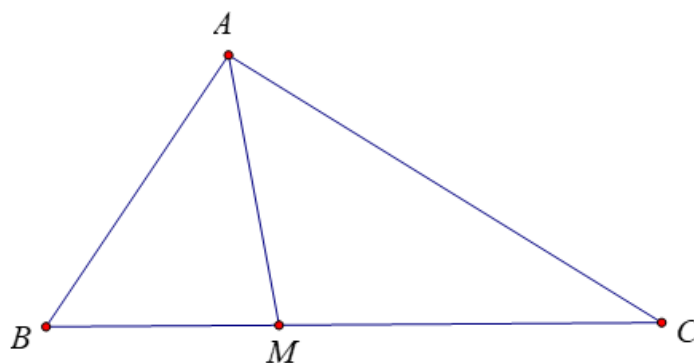
Vậy $D(1; 2; 4)$ hoặc $D(-3; -2; 2)$.

Có 2 điểm D thỏa điều kiện.

Câu 6: Trong không gian Oxy , cho tam giác ABC , biết $A(2;0;0), B(0;3;1), C(-3;6;4)$. Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MC = 2MB$. Tính độ dài AM .

Lời giải

Trả lời: 5,39



Gọi $M(x; y; z)$

$$\overrightarrow{CM} = (-3 - x; 6 - y; 4 - x)$$

$$\overrightarrow{MB} = (x; y - 3; z - 1)$$

$$\text{Theo đề ta có, } \overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - x = 2x \\ 6 - y = 2(y - 3) \\ 4 - z = 2(z - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow M(-1; 4; 2)$$

$$AM = \sqrt{(-1-2)^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{29} \approx 5,39$$

Câu 7: Trong không gian Oxy , cho ba điểm $A(1;2;-1), B(2;-1;3), C(-2;3;3)$. Điểm $M(a;b;c)$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCM$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2 - c^2$.

Lời giải

Trả lời: 44

$$\overrightarrow{MC} = (-2 - a; 3 - b; 3 - c)$$

$$\overrightarrow{AB} = (1; -3; 4)$$

Tứ giác $ABCM$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 - a = 1 \\ 3 - b = -3 \\ 3 - c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 6 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow P = 44.$$

Câu 8: Trong không gian Oxy , cho hai điểm trên trục hoành mà khoảng cách từ đó đến điểm $M(-3;4;8)$ bằng 12. Tính tổng hai hoành độ của chúng.

Lời giải

Trả lời: -6

$$N(x;0;0)$$

$$MN = 12 \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2 + 4^2 + 8^2} = 12 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 64 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -11 \end{cases}$$

Tổng hoành độ của chúng bằng -6

Câu 9: Trong không gian Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (2;5;-3), \vec{b} = (0;-4;0)$. Tính tích vô hướng của hai vector $\vec{a}, \vec{b}$.

Lời giải

Trả lời: -20

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 0 + 5 \cdot (-4) + (-3) \cdot 0 = -20$$

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\overrightarrow{OC} = -3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$. Điểm $D(x;y;z)$ sao cho $ABCD$ là hình bình hành. Tính $P = 2x + y - z$.

Lời giải

Trả lời: -19

Gọi D để $ABCD$ là hình bình hành.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} - (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k} \Leftrightarrow \overrightarrow{OD} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + 9\vec{k} \Leftrightarrow D(-4; -2; 9)$$

$$P = 2x + y - z = 2 \cdot (-4) - 2 - 9 = -19$$

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$; $\vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$. Tọa độ vec to $\vec{a} = (x;0;3)$; $\vec{b} = (3;y;0)$. Tính $P = x^2 + y^2$.

Lời giải

Trả lời: 13

$$\vec{a} = (2; 0; 3); \vec{b} = (3; 3; 0). P = x^2 + y^2 = 2^2 + 3^2 = 13$$

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$; $\overrightarrow{ON} = -\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$. Tọa độ điểm $M(2; -3; a); N(-1; b; -1)$. Tính $T = 2a - 3b$.

Lời giải

Trả lời: -1

$$M(2; -3; 4), N(-1; 3; -1). T = 2a - 3b = 2.4 - 3.3 = -1$$

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (3; -5; 2)$; $\vec{b} = (2; 1; -1)$. Vector $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Tính $P = y^2 - z^2$

Lời giải

Trả lời: 26

$$\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}; \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}. P = y^2 - z^2 = (-5)^2 + (-1)^2 = 26$$

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, $M(1; 0; -2), N(5; 1; -6)$. Tính $\overrightarrow{OM} = \vec{i} + y\vec{j} - 2\vec{k}; \overrightarrow{ON} = x\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}$. Tính $P = x^3 + y^3$.

Lời giải

Trả lời: 125

$$\overrightarrow{OM} = \vec{i} - 2\vec{k}; \overrightarrow{ON} = 5\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}. P = x^3 + y^3 = 0^3 + 5^3 = 125$$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 5, $SA = 2$ và $SA \perp (ABCD)$. Chọn hệ trục $Oxyz$ có gốc tọa độ tại A; các điểm B, D, S lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz. Tọa độ điểm $C(x; y; z)$. Tính $P = x^3 + y^3 + z^3$.

Lời giải

Trả lời: 250

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 5\vec{i} + 5\vec{j} + 0\vec{k}. \text{ Suy ra: } C(5; 5; 0).$$

$$P = x^3 + y^3 + z^3 = 5^3 + 5^3 + 0^3 = 250$$

Câu 16: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2; AD = 3; AA' = 4$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với A, các điểm B; D; A' lần lượt thuộc Ox; Oy; Oz. Tìm tọa độ của $C'(x; 3; z)$. Tính $P = x - z$.

Lời giải

Trả lời: -2

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}; \overrightarrow{AD} = 0\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k}; \overrightarrow{AA'} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}; \text{ suy ra } C'(2;3;4). P = x - z = 2 - 4 = -2.$$

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 3, $SA = 4$ và $SA \perp (ABCD)$. Chọn hệ trục Oxyz có gốc tọa độ tại A; các điểm B, D, S lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz. Gọi M là trung điểm SC. Tìm tọa độ điểm $M(x; y; z)$. Tính $T = x + y - \frac{3}{2}z$.

Lời giải

Trả lời: 0

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k}.$$

Vì M là trung điểm SC nên:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(0\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k} + 3\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k}) = \frac{3}{2}\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 2\right). T = x + y - \frac{3}{2}z = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot 2 = 0$$

Câu 18: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tính $|\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + 2\overrightarrow{CC'}|$.

Lời giải

Trả lời: 0

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'}; \overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'A} \text{ và } \overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{CA}$$

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + 2\overrightarrow{C'C} = 2\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{C'C} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + 2\overrightarrow{CC'}| = 0$$

Câu 19: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB = 8; AD = 6; AA' = 4$. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với A, các điểm B; D; A' lần lượt thuộc Ox; Oy; Oz. Tọa độ điểm $C'(x; y; z)$. Tính $P = x - 2y + z$.

Lời giải

Trả lời: 0

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = 8\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}; \overrightarrow{AD} = 0\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}; \overrightarrow{AA'} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\text{Trong hình bình hành ABCD: } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\text{Trong hình bình hành ACC'A': } \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\Rightarrow C'(8; 6; 4). P = x - 2y + z = 8 - 2 \cdot 6 + 4 = 0$$

Câu 20: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-2; 3; 3)$. Điểm $M(a; b; c)$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành ABCM, khi đó $P = a^2 + b^2 - c^2$ có giá trị bằng

Lời giải

Trả lời: 44

$M(x; y; z)$, $ABCM$ là hình bình hành thì

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = -2-2 \\ y-2 = 3+1 \\ z+1 = 3-3 \end{cases} \Rightarrow M(-3; 6; -1) \Rightarrow P = 44.$$

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (-2; 2; 0)$; $\vec{b} = (2; 2; 0)$ và $\vec{c} = (2; 2; 2)$. Giá trị của $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ bằng

Lời giải

Trả lời: $2\sqrt{11}$

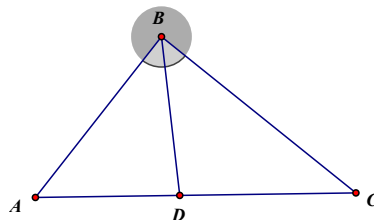
Ta có: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (2; 6; 2)$.

Vậy $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 2\sqrt{11}$.

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$. Gọi $D(a; b; c)$ là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC . Giá trị của $a + b + 2c$ bằng

Lời giải

Trả lời: 5



Ta có $AB = \sqrt{26}$, $BC = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$.

Gọi $D(x; y; z)$, theo tính chất phân giác ta có $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{1}{2}$. Suy ra $\overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} (*)$.

Ta có $\overrightarrow{DA} = (1-x; 2-y; -1-z)$ và $\overrightarrow{DC} = (-4-x; 7-y; 5-z)$.

$$\text{Do đó } (*) \Rightarrow \begin{cases} 1-x = -\frac{1}{2}(-4-x) \\ 2-y = -\frac{1}{2}(7-y) \\ -1-z = -\frac{1}{2}(5-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{11}{3} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right) \Rightarrow a + b + 2c = 5.$$

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -3; 4)$, $B(1; y; -1)$, $C(x; 4; 3)$. Để ba điểm A, B, C thẳng hàng thì tổng giá trị $5x + y$ là:

Lời giải

Trả lời: 41

Có $\overrightarrow{AB} = (-1; y+3; -5); \overrightarrow{AC} = (x-2; 7; -1)$.

Để ba điểm A, B, C thẳng hàng thì $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \frac{-1}{x-2} = \frac{y+3}{7} = \frac{-5}{-1}$.

$$\Rightarrow x = \frac{9}{5}; y = 32$$

$$\Rightarrow 5x + y = 41$$

Vậy $5x + y = 41$.

Câu 24: Trong không gian Oxy , cho ba vector $\vec{a} = (1; m; 2), \vec{b} = (m+1; 2; 1), \vec{c} = (0; m-2; 2)$. Tổng các giá trị thực của tham số m để $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{c}|$.

Lời giải

Trả lời: -12

$$\vec{a} + \vec{b} = (m+2; m+2; 3)$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{c}| \Leftrightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$$

$$\Leftrightarrow (m+2)^2 + (m+2)^2 + 9 = (m-2)^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 12m + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -6 \pm \sqrt{3}.$$

Tổng các giá trị của m bằng -12.

Câu 25: Trong không gian Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (1; -1; 0), \vec{b} = (2; 2t-1; 0)$. Xác định giá trị t để hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương.

Lời giải

Trả lời: -0,5

Hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương thì

$$\vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2k \\ -1 = (2t-1)k \\ 0 = 0k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2k \\ -1 = (2t-1)k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ -1 = (2t-1)k \end{cases}$$

$$\text{Với } t = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ -1 = 0 \end{cases} \text{ (vô nghiệm.)}$$

$$\text{Với } t \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ k = \frac{-1}{2t-1} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1}{2t-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $t = -0,5$.

Câu 26: Trong không gian Oxy , cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 2; -2)$, $\vec{b} = (-1; -1; 0)$. Số đo độ của góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$?

Lời giải

Trả lời: 130

$$\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\Rightarrow (\vec{a}; \vec{b}) = 135^\circ$$

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 2; -2)$, $B(2; 2; -4)$. Giả sử $I(a; b; c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB . Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.

Lời giải

Trả lời : 8

Ta có $\vec{OA} = (0; 2; -2)$, $\vec{OB} = (2; 2; -4)$. (OAB) có phương trình: $x + y + z = 0$

$I \in (OAB) \Rightarrow a + b + c = 0$.

$\vec{AI} = (a; b - 2; c + 2)$, $\vec{BI} = (a - 2; b - 2; c + 4)$, $\vec{OI} = (a; b; c)$.

Ta có hệ $\begin{cases} AI = BI \\ AI = OI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + (c + 2)^2 = (a - 2)^2 + (c + 4)^2 \\ (b - 2)^2 + (c + 2)^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 4 \\ -b + c = -2 \end{cases}$

Ta có hệ $\begin{cases} a - c = 4 \\ -b + c = -2 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 4 \\ -b + c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = -2 \end{cases}$.

Vậy $I(2; 0; -2) \Rightarrow T = a^2 + b^2 + c^2 = 8$

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 3; 1)$, $B(2; 1; 0)$, $C(-3; -1; 1)$. Giả sử điểm $D(a; b; c)$ sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD} = 3S_{\triangle ABC}$. Tính $a + b + c$

Lời giải

Trả lời: -10

Ta có: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot d(A, BC) \Leftrightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC}$.

$$\Leftrightarrow 3S_{\triangle ABC} = \frac{(AD + BC) \cdot S_{\triangle ABC}}{BC} \Leftrightarrow 3BC = AD + BC \Leftrightarrow AD = 2BC.$$

Mà $ABCD$ là hình thang có đáy AD nên $\vec{AD} = 2\vec{BC}$ (1).

$\vec{BC} = (-5; -2; 1)$, $\vec{AD} = (x_D + 2; y_D - 3; z_D - 1)$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 2 = -10 \\ y_D - 3 = -4 \\ z_D - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -12 \\ y_D = -1 \\ z_D = 3 \end{cases}.$$

Vậy $D(-12; -1; 3)$.

Câu 29: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B . Ba đỉnh $A(1; 2; 1)$, $B(2; 0; -1)$, $C(6; 1; 0)$ Hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a; b; c)$. Tính $a + b + c$

Lời giải

Trả lời: 6

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -2; -2) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 3$; $\overrightarrow{BC} = (4; 1; 1) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = 3\sqrt{2}$.

Theo giả thiết $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B và có diện tích bằng $6\sqrt{2}$ nên $\frac{1}{2}AB(AD + BC) = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (AD + 3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} \Rightarrow AD = \sqrt{2} \Rightarrow AD = \frac{1}{3}BC$.

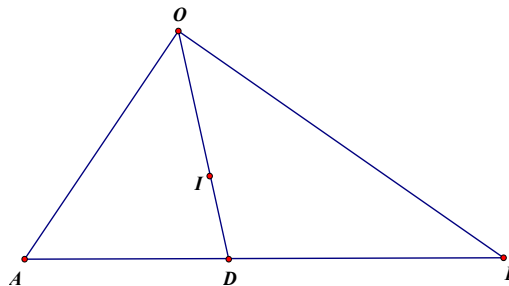
Do $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B nên $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

$$\text{Giả sử } D(a; b; c) \text{ khi đó ta có } \begin{cases} a - 1 = \frac{4}{3} \\ b - 2 = \frac{1}{3} \\ c - 1 = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{3} \\ b = \frac{7}{3} \\ c = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 6.$$

Câu 30: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(2; 2; 1)$, $B\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Biết $I(a; b; c)$ là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác OAB . Tính $S = a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: 2



Ta có: $\overrightarrow{OA} = (2; 2; 1)$, $\overrightarrow{OB} = \left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\frac{16}{3} + \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$.

Lại có: $OA = 3$, $OB = 4 \Rightarrow AB = 5$.

Gọi D là chân đường phân giác trong góc $\widehat{AOB} \Rightarrow D$ thuộc đoạn AB .

Theo tính chất của phân giác trong ta có:

$$\frac{DA}{DB} = \frac{OA}{OB} = \frac{3}{4} \Rightarrow \overrightarrow{DA} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{DB} \Rightarrow D = \left(0; \frac{12}{7}; \frac{12}{7}\right).$$

Tam giác OAB có diện tích $S = \frac{1}{2}.OA.OB = 6$, nửa chu vi $p = \frac{OA+OB+AB}{2} = 6$

$$\Rightarrow r = \frac{S}{p} = 1 \text{ là bán kính đường tròn nội tiếp; chiều cao } OH = \frac{OA.OB}{AB} = \frac{12}{5}.$$

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $OAB \Rightarrow I$ thuộc đoạn OD .

$$\text{Ta có: } \frac{DI}{DO} = \frac{r}{OH} = \frac{5}{12} \Rightarrow \overrightarrow{DI} = \frac{5}{12}\overrightarrow{DO} \Rightarrow I = (0; 1; 1) \text{ hay } \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}.$$

Vậy $S = a + b + c = 2$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 2

PHẦN 1. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Chọn phương án đúng

1. Cho điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Toạ độ của điểm M là:

- A. $M(0; 2; 1)$. B. $M(1; 2; 0)$. C. $M(2; 0; 1)$. D. $M(2; 1; 0)$.

2. Cho hai điểm $A(-1; 2; -3)$ và $B(2; -1; 0)$. Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

- A. $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 1)$. B. $\overrightarrow{AB} = (3; 3; -3)$. C. $\overrightarrow{AB} = (1; 1; -3)$. D. $\overrightarrow{AB} = (3; -3; 3)$.

3. Cho hai điểm $A(3; -2; 3)$ và $B(-1; 2; 5)$. Toạ độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

- A. $I(-2; 2; 1)$. B. $I(1; 0; 4)$. C. $I(2; 0; 8)$. D. $I(2; -2; -1)$.

4. Cho ba điểm $A(1; 3; 5)$; $B(2; 0; 1)$; $C(0; 9; 0)$. Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là:

- A. $G(3; 12; 6)$. B. $G(1; 5; 2)$. C. $G(1; 0; 5)$. D. $G(1; 4; 2)$.

5. Cho $A(1; 2; -1)$; $B(2; 1; -3)$; $C(-3; 5; 1)$. Điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành có toạ độ là

- A. $D(-4; 6; 3)$. B. $D(-2; 2; 5)$. C. $D(-2; 8; -3)$. D. $D(-4; 6; -5)$.

6. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{u} = (0; -1; 0)$ và $\vec{v} = (\sqrt{3}; 1; 0)$. Giá trị của α là

- A. $\alpha = \frac{\pi}{6}$. B. $\alpha = \frac{\pi}{3}$. C. $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. D. $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

7. Cho $A(2; -1; 1)$; $B(-1; 3; -1)$; $C(5; -3; -4)$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ có giá trị là

- A. 48. B. -48. C. 52. D. -52

8. Cho hai điểm $A(-1; 2; 3)$, $B(1; 0; 2)$. Toạ độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MA}$ là

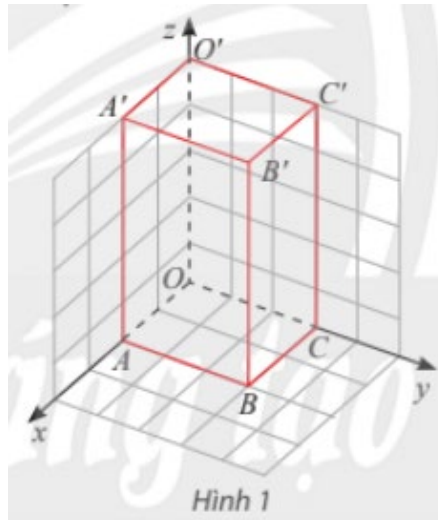
- A. $M\left(-2; 3; \frac{7}{2}\right)$. B. $M\left(-2; -3; \frac{7}{2}\right)$. C. $M(-2; 3; 7)$. D. $M(-4; 6; 7)$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

9. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$ như Hình 1, biết $B'(2; 3; 5)$.

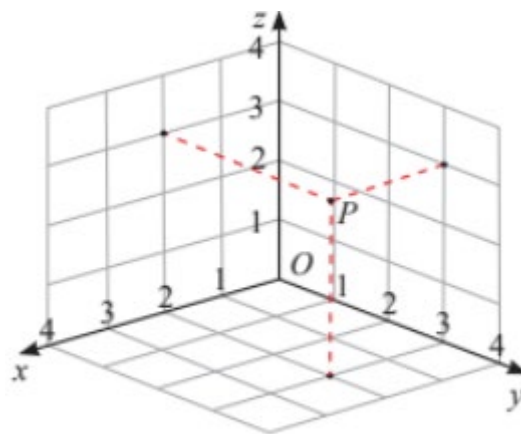
a) Tìm toạ độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

b) Tính độ dài đường chéo OB' của hình hộp chữ nhật đó.



Hình 1

10. Tìm tọa độ của điểm P được biểu diễn trong Hình 2 và tính khoảng cách OP .



Hình 2

11. Cho $\vec{u} = (2; -5; 3)$; $\vec{v} = (0; 2; -1)$; $\vec{w} = (1; 7; 2)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{a} = \vec{u} - 4\vec{v} - 2\vec{w}$.

12. Cho ba điểm $A(0; 1; 2)$; $B(1; 2; 3)$; $C(1; -2; -5)$. Gọi M là điểm nằm trên đoạn thẳng BC sao cho $MB = 3MC$. Tính độ dài đoạn thẳng AM .

13. Cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau góc 60° . Biết rằng $|\vec{u}| = 2$ và $|\vec{v}| = 4$. Tính $|\vec{u} + \vec{v}|$.

14. Cho hai điểm $A(1; 2; -1)$; $B(0; -2; 3)$.

a) Tính độ dài đường cao AH hạ từ đỉnh A của tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

b) Tính diện tích tam giác OAB .

15. Cho biết máy bay A đang bay với vector vận tốc $\vec{a} = (300; 200; 400)$ (đơn vị: km/h). Máy bay B bay cùng hướng và có tốc độ gấp ba lần tốc độ của máy bay A .

a) Tìm tọa độ vector vận tốc $\vec{b}$ của máy bay B .

b) Tính tốc độ của máy bay B .

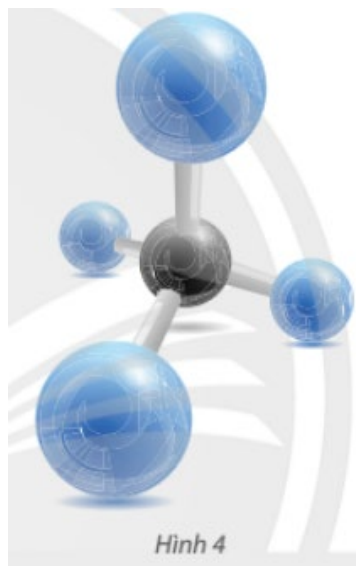


Hình 3

16. Cho biết bốn đoạn thẳng nối từ một đỉnh của tứ diện đến trọng tâm mặt đối diện luôn cắt nhau tại một điểm gọi là trọng tâm của tứ diện đó.

Một phân tử metan CH_4 được cấu tạo bởi bốn nguyên tử hydrogen ở các đỉnh của một tứ diện đều và một nguyên tử carbon ở trọng tâm của tứ diện.

Góc liên kết là góc tạo bởi liên kết $H-C-H$ là góc giữa các đường nối nguyên tử carbon với hai trong số các nguyên tử hydrogen. Chứng minh rằng góc liên kết này gần bằng $109,5^\circ$.



Hình 4

PHẦN 2. ĐỀ KIỂM TRA KẾT THÚC CHƯƠNG

ĐỀ KIỂM TRA KẾT THÚC CHƯƠNG 2

PHẦN 1. TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

- Câu 1:** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u} = (-1; 3; 2)$, $\vec{v} = (-3; -1; 2)$ khi đó $\vec{u} \cdot \vec{v}$ bằng
A. 10. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 2:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?
A. $\vec{b} \perp \vec{c}$. B. $|\vec{c}| = \sqrt{3}$. C. $|\vec{a}| = \sqrt{2}$. D. $\vec{b} \perp \vec{a}$.
- Câu 3:** Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}$ biểu diễn của các vectơ đơn vị là $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{k} - 3\vec{j}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là
A. $(1; 2; -3)$. B. $(2; -3; 1)$. C. $(2; 1; -3)$. D. $(1; -3; 2)$.
- Câu 4:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$. Tìm tọa độ điểm A_1 là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oyz) .
A. $A_1(1; 0; 0)$. B. $A_1(0; 2; 3)$. C. $A_1(1; 0; 3)$. D. $A_1(1; 2; 0)$.
- Câu 5:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; -1)$ và $B(1; 4; 3)$. Độ dài đoạn AB là:
A. $2\sqrt{13}$. B. $2\sqrt{3}$. C. $\sqrt{6}$. D. 3.
- Câu 6:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; 0; 2)$, $B(1; 1; 4)$, $C(1; -4; 0)$. Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ là
A. $(1; -1; 2)$. B. $(-1; -1; 2)$. C. $(1; 1; 2)$. D. $(1; -1; -2)$.
- Câu 7:** Cho hình bình hành $ABCD$ với $A(-2; 3; 1)$, $B(3; 0; -1)$, $C(6; 5; 0)$. Tọa độ đỉnh D là
A. $D(1; 8; -2)$. B. $D(11; 2; 2)$. C. $D(1; 8; 2)$. D. $D(11; 2; -2)$.
- Câu 8:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0; -2; -1)$ và $A(1; -1; 2)$. Tọa độ điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA = 2MB$ là
A. $M\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}; 1\right)$. B. $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
C. $M(2; 0; 5)$. D. $M(-1; -3; -4)$.
- Câu 9:** Tìm tọa độ điểm M trên trục Ox cách đều hai điểm $A(1; 2; -1)$ và điểm $B(2; 1; 2)$.
A. $M\left(\frac{1}{3}; 0; 0\right)$. B. $M\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$. C. $M\left(\frac{3}{2}; 0; 0\right)$. D. $M\left(\frac{2}{3}; 0; 0\right)$.
- Câu 10:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (0; 3; 1)$, $\vec{b} = (3; 0; -1)$. Tính

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

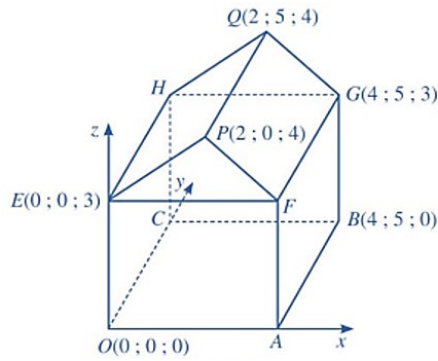
A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{100}$. **B.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{100}$. **C.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{10}$. **D.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{10}$.

- Câu 11:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(3; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $D'(0; 3; -3)$. Tọa độ trọng tâm tam giác $A'B'C'$ là
- A.** $(1; 1; -2)$. **B.** $(2; 1; -2)$. **C.** $(1; 2; -1)$. **D.** $(2; 1; -1)$.

- Câu 12:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là
- A.** $\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$. **B.** $\left(\frac{11}{3}; -2; 1\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; \frac{1}{3}\right)$. **D.** $(-2; 11; 1)$.

PHẦN 2 : TRẮC NGHIỆM ĐÚNG - SAI

- Câu 1:** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh đều bằng a .
- Tứ giác $ABCD$ là hình vuông
 - Tam giác SBD vuông cân tại S .
 - $(\vec{SB}, \vec{BD}) = 45^\circ$.
 - $\vec{SB} \cdot \vec{BD} = -a^2$.
- Câu 2:** Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1; -2; 3)$, $B(-2; 1; 2)$, $C(3; -1; 2)$.
- $\vec{AB} = (-3; 3; -1)$.
 - $\vec{AC} = (-2; -1; 1)$.
 - $\vec{AB} = 3\vec{AC}$.
 - Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.
- Câu 3:** Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(2; -1; -2)$, $B(3; 1; 2)$, $C(1; -1; 1)$ và $D(x_D; y_D; z_D)$.
- $\vec{AB} = (1; 2; 4)$.
 - $\vec{DC} = (1 - x_D; -1 - y_D; 1 - z_D)$.
 - $\vec{DC} = \vec{AB}$.
 - Tọa độ điểm D là $(0; 3; 3)$.
- Câu 4:** Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Tọa độ điểm F là $(4; 0; 3)$.

b) Tọa độ $\overrightarrow{AH} = (4; 5; 3)$

c) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AF} = 3$

d) Góc dốc của mái nhà, tức là số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG , hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ bằng $26,6^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ)

PHẦN 3. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'D'$ và $C'D'$. Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{A'B}$. Số đo của góc φ bằng bao nhiêu độ?

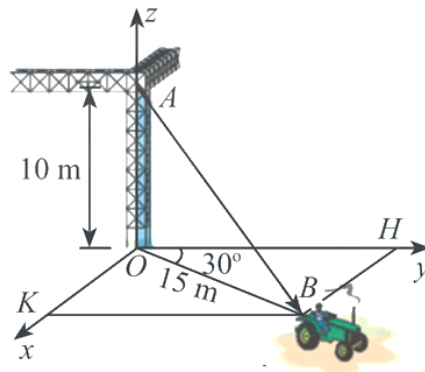
Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'D'$ và $C'D'$. Tích vô hướng $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{C'B} = na^2$ (n là số thập phân). Giá trị của n bằng bao nhiêu?

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 3; 5), B(1; 1; 3), C(4; -2; 3)$. Số đo của góc $\widehat{ABC}$ bằng bao nhiêu độ?

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(3; 2; 8), N(0; 1; 3)$ và $P(2; m; 4)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

Câu 5: Một người đứng ở mặt đất điều khiển hai flycam để phục vụ trong một chương trình của đài truyền hình. Flycam I ở vị trí A cách vị trí điều khiển 150m về phía nam và 200m về phía đông, đồng thời cách mặt đất 50m. Flycam II ở vị trí B cách vị trí điều khiển 180m về phía bắc và 240m về phía tây, đồng thời cách mặt đất 60m. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O là vị trí người điều khiển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox có hướng trùng với hướng nam, trục Oy có hướng trùng với hướng đông, trục Oz vuông góc với mặt đất hướng lên bầu trời, đơn vị trên mỗi trục tính theo mét. Khoảng cách giữa hai flycam đó bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Câu 6: Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$ như Hình với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng $1m$. Tìm được tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB} = (a; b; c)$, khi đó $a + c = ?$



BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 2

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Chọn phương án đúng

1. Cho điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Toạ độ của điểm M là:

- A. $M(0; 2; 1)$. B. $M(1; 2; 0)$. C. $M(2; 0; 1)$. D. $M(2; 1; 0)$.

Lời giải

Chọn D

2. Cho hai điểm $A(-1; 2; -3)$ và $B(2; -1; 0)$. Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

- A. $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 1)$. B. $\overrightarrow{AB} = (3; 3; -3)$. C. $\overrightarrow{AB} = (1; 1; -3)$. D. $\overrightarrow{AB} = (3; -3; 3)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2 + 1; -1 - 2; 0 + 3) = (3; -3; 3)$.

3. Cho hai điểm $A(3; -2; 3)$ và $B(-1; 2; 5)$. Toạ độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

- A. $I(-2; 2; 1)$. B. $I(1; 0; 4)$. C. $I(2; 0; 8)$. D. $I(2; -2; -1)$.

Lời giải

Chọn B

Toạ độ trung điểm I là $I\left(\frac{3-1}{2}; \frac{-2+2}{2}; \frac{3+5}{2}\right)$ hay $I(1; 0; 4)$.

4. Cho ba điểm $A(1; 3; 5)$; $B(2; 0; 1)$; $C(0; 9; 0)$. Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là:

- A. $G(3; 12; 6)$. B. $G(1; 5; 2)$. C. $G(1; 0; 5)$. D. $G(1; 4; 2)$.

Lời giải

Chọn D

Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là $G\left(\frac{1+2+0}{3}; \frac{3+0+9}{3}; \frac{5+1+0}{3}\right)$ hay $G(1; 4; 2)$.

5. Cho $A(1; 2; -1)$; $B(2; 1; -3)$; $C(-3; 5; 1)$. Điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành có toạ độ là

- A. $D(-4; 6; 3)$. B. $D(-2; 2; 5)$. C. $D(-2; 8; -3)$. D. $D(-4; 6; -5)$.

Lời giải

Chọn A

$$ABCD \text{ là hình bình hành } \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-1 = -3-x_D \\ 1-2 = 5-y_D \\ -3+1 = 1-z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -4 \\ y_D = 6 \\ z_D = 3 \end{cases}. \text{ Vậy } D(-4; 6; 3).$$

6. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{u} = (0; -1; 0)$ và $\vec{v} = (\sqrt{3}; 1; 0)$. Giá trị của α là

- A. $\alpha = \frac{\pi}{6}$. B. $\alpha = \frac{\pi}{3}$. C. $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. D. $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{0 \cdot \sqrt{3} + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0}{\sqrt{(-1)^2} \cdot \sqrt{3+1}} = -\frac{1}{2}.$$

7. Cho $A(2; -1; 1); B(-1; 3; -1); C(5; -3; -4)$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ có giá trị là

- A. 48. B. -48. C. 52. D. -52

Lời giải

Chọn D

$$\text{Có } \overrightarrow{AB} = (-3; 4; -2); \overrightarrow{BC} = (6; -6; 5). \text{ Có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (-3) \cdot 6 + 4 \cdot (-6) + (-2) \cdot 5 = -52$$

8. Cho hai điểm $A(-1; 2; 3), B(1; 0; 2)$. Toạ độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MA}$ là

- A. $M\left(-2; 3; \frac{7}{2}\right)$. B. $M\left(-2; -3; \frac{7}{2}\right)$. C. $M(-2; 3; 7)$. D. $M(-4; 6; 7)$.

Lời giải

Chọn A

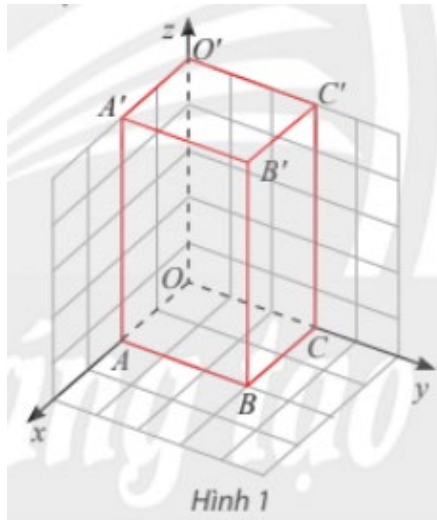
$$\text{Giả sử } M(x; y; z). \text{ Ta có } \overrightarrow{AB} = (2; -2; -1) \text{ và } \overrightarrow{MA} = (-1-x; 2-y; 3-z).$$

$$\text{Vì } \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MA} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2 \cdot (-1-x) \\ -2 = 2(2-y) \\ -1 = 2(3-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \\ z = \frac{7}{2} \end{cases}. \text{ Vậy } M\left(-2; 3; \frac{7}{2}\right).$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

9. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$ như Hình 1, biết $B'(2; 3; 5)$.

- Tìm toạ độ các đỉnh còn lại của hình hộp.
- Tính độ dài đường chéo OB' của hình hộp chữ nhật đó.



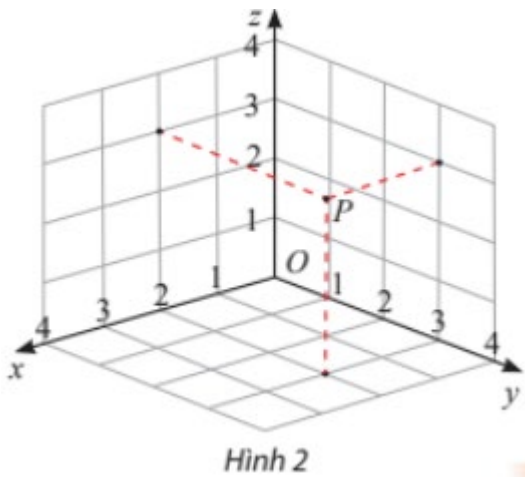
Lời giải

a) Dựa vào Hình 1 ta có:

$$O(0;0;0); A(2;0;0); B(2;3;0); C(0;3;0); O'(0;0;5); A'(2;0;5); B'(2;3;5); C'(0;3;5)$$

b) Ta có $OB' = \sqrt{2^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{38}$.

10. Tìm tọa độ của điểm P được biểu diễn trong Hình 2 và tính khoảng cách OP .



Lời giải

Ta có $P(2;3;3)$. Khi đó $OP = \sqrt{2^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{22}$.

11. Cho $\vec{u} = (2; -5; 3)$; $\vec{v} = (0; 2; -1)$; $\vec{w} = (1; 7; 2)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{a} = \vec{u} - 4\vec{v} - 2\vec{w}$.

Lời giải

Ta có $4\vec{v} = (0; 8; -4)$; $2\vec{w} = (2; 14; 4)$.

Ta có $\vec{a} = \vec{u} - 4\vec{v} - 2\vec{w} = (2 - 0 - 2; -5 - 8 - 14; 3 + 4 - 4) = (0; -27; 3)$.

12. Cho ba điểm $A(0;1;2)$; $B(1;2;3)$; $C(1;-2;-5)$. Gọi M là điểm nằm trên đoạn thẳng BC sao cho $MB = 3MC$. Tính độ dài đoạn thẳng AM .

Lời giải

Vì M nằm trên đoạn thẳng BC nên $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ ngược hướng. Mà $MB = 3MC$ nên $\overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MC}$.

Gọi $M(x; y; z)$. Có $\overrightarrow{MB} = (1-x; 2-y; 3-z)$ và $\overrightarrow{MC} = (1-x; -2-y; -5-z)$.

$$\text{Vì } \overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x = -3(1-x) \\ 2-y = -3(-2-y) \\ 3-z = -3(-5-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = -3 \end{cases}$$

Vậy $M(1; -1; -3)$. Khi đó ta có $AM = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-1)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{30}$.

13. Cho hai vecto $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau góc 60° . Biết rằng $|\vec{u}| = 2$ và $|\vec{v}| = 4$. Tính $|\vec{u} + \vec{v}|$.

Lời giải

$$\text{Ta có } |\vec{u} + \vec{v}|^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = 2^2 + 2 \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(60^\circ) + 4^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} + 4^2 = 28.$$

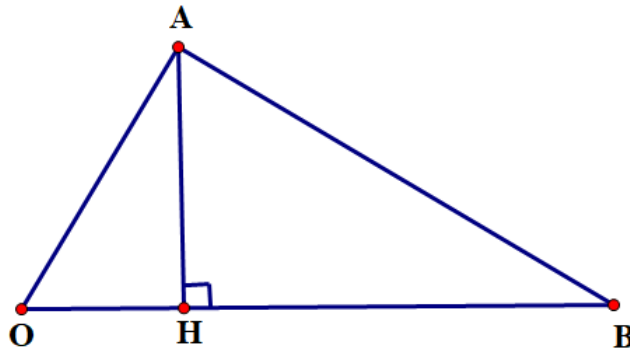
$$\text{Do đó } |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}.$$

14. Cho hai điểm $A(1; 2; -1); B(0; -2; 3)$.

a) Tính độ dài đường cao AH hạ từ đỉnh A của tam giác OAB với O là gốc toạ độ.

b) Tính diện tích tam giác OAB .

Lời giải



a) Gọi $H(x; y; z)$ là chân đường cao hạ từ A xuống OB . Ta có $\overrightarrow{BH} = (x; y+2; z-3); \overrightarrow{BO} = (0; 2; -3)$.

$$\text{Vì } H \in OB \text{ và } \overrightarrow{BH} \text{ và } \overrightarrow{BO} \text{ cùng phương nên } \overrightarrow{BH} = k\overrightarrow{BO} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2k - 2 \\ z = -3k + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2k - 2 \\ z = -3k + 3 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } H(0; 2k-2; -3k+3). \text{ Suy ra } \overrightarrow{AH} = (-1; 2k-2-2; -3k+3+1) = (-1; 2k-4; -3k+4).$$

$$\text{Vì } \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BO} \text{ nên } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BO} = 0 \Leftrightarrow (-1) \cdot 0 + (2k-4) \cdot 2 + (-3k+4) \cdot (-3) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{20}{13}.$$

Suy ra $H\left(0; \frac{14}{13}; -\frac{21}{13}\right)$; $\overrightarrow{AH} = \left(-1; -\frac{12}{13}; -\frac{8}{13}\right)$.

Độ dài đường cao AH là $|\overrightarrow{AH}| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{12}{13}\right)^2 + \left(-\frac{8}{13}\right)^2} = \frac{\sqrt{377}}{13}$.

b) Ta có $|\overrightarrow{BO}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$. Do đó $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13} \cdot \frac{\sqrt{377}}{13} = \frac{\sqrt{29}}{2}$.

15. Cho biết máy bay A đang bay với vector vận tốc $\vec{a} = (300; 200; 400)$ (đơn vị: km/h). Máy bay B bay cùng hướng và có tốc độ gấp ba lần tốc độ của máy bay A .

a) Tìm tọa độ vector vận tốc $\vec{b}$ của máy bay B .

b) Tính tốc độ của máy bay B .



Lời giải

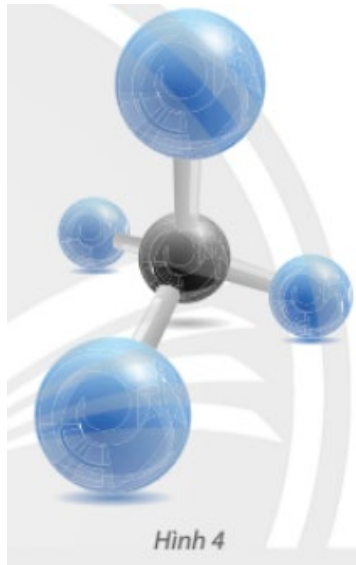
a) Có $\vec{b} = 3\vec{a} = (900; 600; 1200)$.

b) Tốc độ của máy bay B là $|\vec{b}| = \sqrt{900^2 + 600^2 + 1200^2} \approx 1615,55 \text{ km/h}$

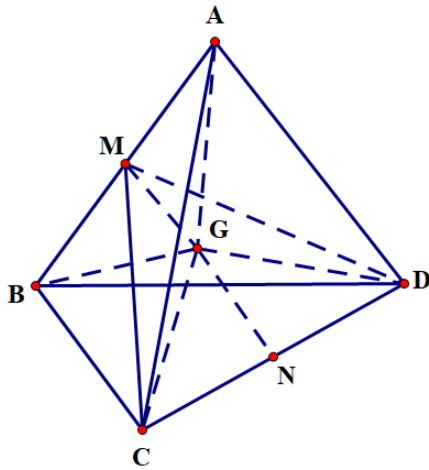
16. Cho biết bốn đoạn thẳng nối từ một đỉnh của tứ diện đến trọng tâm mặt đối diện luôn cắt nhau tại một điểm gọi là trọng tâm của tứ diện đó.

Một phân tử metan CH_4 được cấu tạo bởi bốn nguyên tử hydrogen ở các đỉnh của một tứ diện đều và một nguyên tử carbon ở trọng tâm của tứ diện.

Góc liên kết là góc tạo bởi liên kết $H-C-H$ là góc giữa các đường nối nguyên tử carbon với hai trong số các nguyên tử hydrogen. Chứng minh rằng góc liên kết này gần bằng $109,5^\circ$.



Lời giải



Gọi G là trọng tâm của tứ diện đều $ABCD$. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{GA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{GB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{GC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{GD}$.

Ta có $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}|$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{d}$.

Ta có $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + \vec{d}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{d} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{d} + 2\vec{c} \cdot \vec{d} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\vec{a}^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a}^2} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) \approx 109,5^\circ$$

Vậy góc liên kết gần bằng $109,5^\circ$.