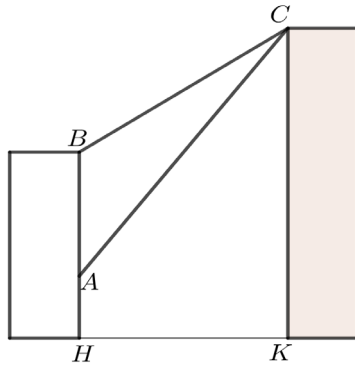


Câu 1 (2,0 điểm). Có hai chung cư cao tầng xây cạnh nhau với khoảng cách giữa chúng là $HK = 25\text{ m}$. Để đảm bảo an ninh, trên nóc chung cư thứ hai người ta lắp camera ở vị trí C . Gọi A, B lần lượt là vị trí thấp nhất và cao nhất trên chung cư thứ nhất mà camera có thể quan sát được (tham khảo hình vẽ). Hãy tính số đo góc $\widehat{ACB}$ (phạm vi camera có thể quan sát được ở chung cư thứ nhất) biết rằng chiều cao của chung cư thứ hai là $CK = 37\text{ m}$, $AH = 4\text{ m}$, $BH = 26\text{ m}$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).



Câu 2 (2,0 điểm). Phòng chăm sóc khách hàng của công ty A làm việc từ 8h00 sáng đến 20h00 mỗi ngày. Nhân viên trực tổng đài làm việc theo 2 ca, mỗi ca 8 tiếng, ca I từ 8h00 đến 16h00 và ca II từ 12h00 đến 20h00. Tiền lương của nhân viên được tính theo giờ (bảng dưới đây):

Khoảng thời gian làm việc	Tiền lương/giờ
8h00 – 16h00	32 000 đồng
12h00 – 20h00	30 000 đồng

Để chăm sóc khách hàng tốt nhất thì cần tối thiểu 2 nhân viên trong khoảng từ 12h00 – 20h00, tối thiểu 10 nhân viên trong giờ cao điểm từ 12h00 – 16h00 và không quá 9 nhân viên trong khoảng từ 8h00 – 16h00. Do lượng khách hàng trong khoảng 8h00 – 16h00 thường đông hơn nên phòng chăm sóc khách hàng cần số nhân viên ca I ít nhất phải gấp 1,5 lần số nhân viên của ca II. Em hãy giúp công ty A chỉ ra cách huy động số lượng nhân viên cho mỗi ca sao cho chi phí tiền lương mỗi ngày là ít nhất.

Câu 3 (2,0 điểm). Giải phương trình lượng giác: $\cos 2x + 2\cos x + 2\cos\left(\frac{2023\pi}{2} - x\right) = 0$.

Câu 4 (2,0 điểm).

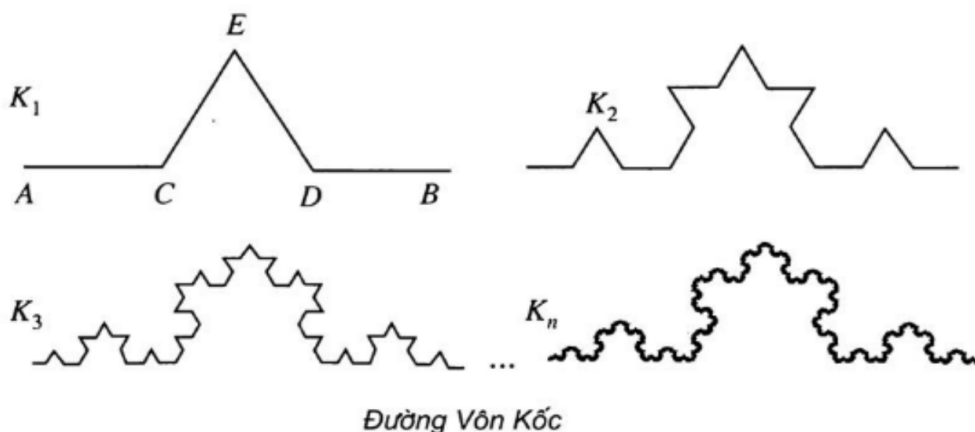
a) Cho $S_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n}{n}$. Tính $\lim\left(2S_n - \sqrt{n^2 + n + 1}\right)$.

b) Cho hàm số bậc hai $y = f(x)$ có đồ thị là một parabol đỉnh $I\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$ và đi qua điểm $A(0; 1)$.

$$\text{Tính } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{f(x)+1} - 2x^2 - 2x - 1}{(x+1)^2}.$$

Câu 5 (2,0 điểm). Đường **Vôn Kốc** là một hình có tính chất: toàn bộ hình “đồng dạng” với từng bộ phận của nó. Nó được xây dựng bằng phương pháp lặp như sau: Từ đoạn thẳng AB ban đầu ta chia đoạn thẳng đó thành ba phần bằng nhau $AC = CD = DB$, dựng tam giác đều CED rồi bỏ đi khoảng CD ta được đường gấp khúc $ACEDB$ kí hiệu là K_1 . Lặp lại quy tắc đó cho các đoạn AC, CE, ED, DB ta được đường gấp khúc K_2 (hình vẽ). Tiếp tục lặp lại quy tắc đó cho từng đoạn của K_2 ta được đường gấp khúc $K_3, \dots$. Lặp lại mãi quá trình đó ta

nhận được dãy các đường $K_1, K_2, K_3, \dots, K_n, \dots$. Gọi u_n là độ dài đường gấp khúc K_n . Giả sử đoạn thẳng AB có độ dài là 1 mét.



a) Tính độ dài đường gấp khúc K_8 .

b) Tính $\frac{1}{u_1 - u_3} + \frac{1}{u_2 - u_4} + \dots + \frac{1}{u_{17} - u_{19}} + \frac{1}{u_{18} - u_{20}}$.

Câu 6 (4,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có $SA = 2a$, $BC = a\sqrt{2}$. Gọi E là điểm thuộc cạnh SB sao cho $SE = 3EB$, F là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AF = \frac{1}{3}FD$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng EF song song với mặt phẳng (SCD) .

b) Gọi M là điểm di động trên cạnh SB sao cho M khác S và B . Mặt phẳng (α) qua M , song song với SA và BC . Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của AB, AC, SC với mặt phẳng (α) . Tìm giá trị nhỏ nhất của $MP^2 + NQ^2$ theo a .

Câu 7 (2,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B , $SA \perp (ABC)$. Gọi D là điểm đối xứng với S qua A , K là trực tâm của tam giác SCD . Trong mặt phẳng (ABC) , kẻ đường thẳng Δ vuông góc với AC tại K và cắt AB tại H .

a) Chứng minh rằng đường thẳng CD vuông góc với mặt phẳng (SHK) .

b) Giả sử $SA = a\sqrt{3}$, $AC = 3a$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (SHK) . Tính $\sin \varphi$?

Câu 8 (2,0 điểm). Một hộp có 25 chiếc thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 25. Hai bạn An và Bình chơi trò chơi rút thẻ trong hộp như sau: hai bạn lần lượt rút thẻ, mỗi lượt rút ngẫu nhiên một thẻ rồi ghi lại số trên thẻ vừa rút sau đó trả lại thẻ vào hộp. An sẽ thắng nếu rút được thẻ ghi số chia hết cho 6, Bình sẽ thắng nếu rút được thẻ ghi số chia hết cho 5. Giả sử An chơi trước, tính xác suất để Bình thắng?

Câu 9 (2,0 điểm). Cho x, y là hai số thực không âm và không đồng thời bằng không thỏa mãn:

$$\log \left(\frac{x^2 + y^2 + 25}{x + y} \right)^{x^2 + y^2 + 10} = \frac{10x + 10y - 25}{x^2 + y^2} + x^2 + y^2 + 9$$

Tính tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{4x + 5y - 10}{x + y}$.

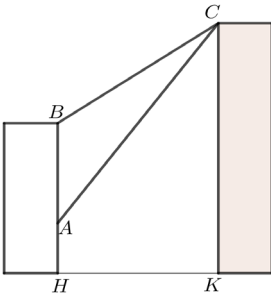
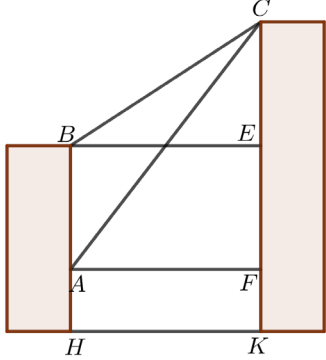
-----Hết-----

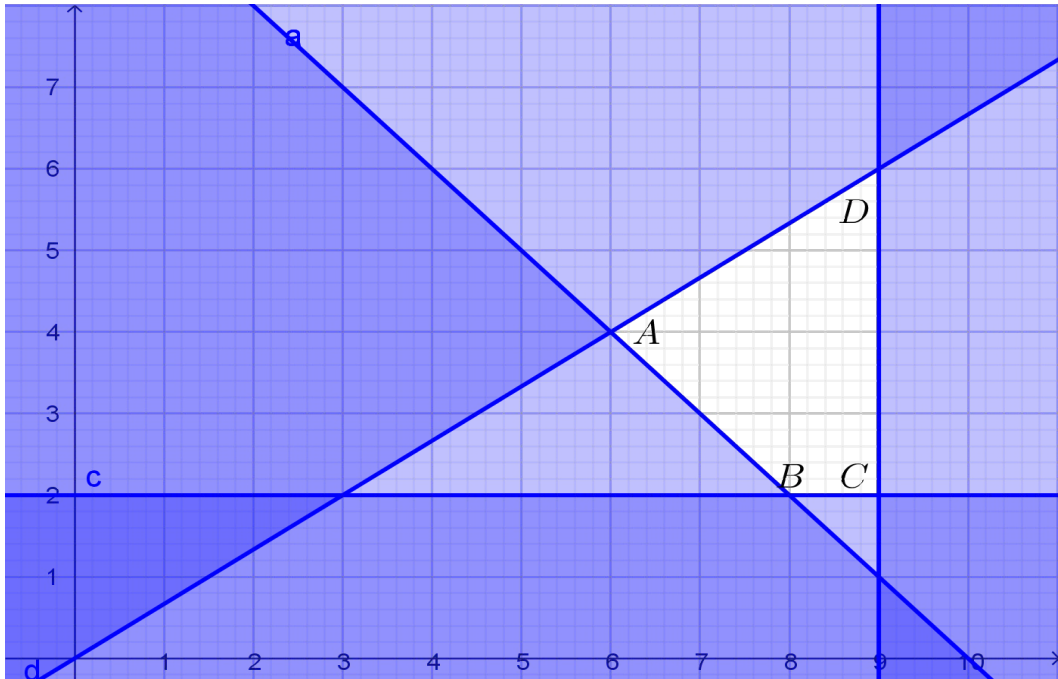
Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Họ, tên và chữ ký của GT 1:.....Họ, tên và chữ ký của GT 2:.....

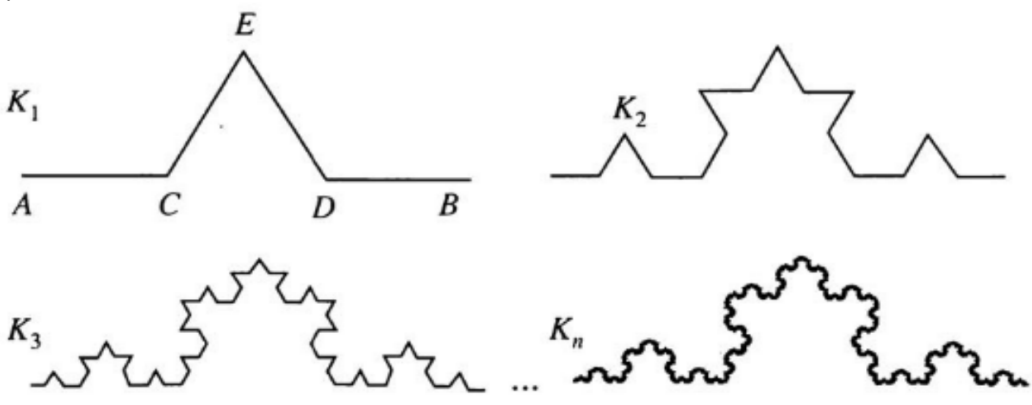
**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NAM ĐỊNH**

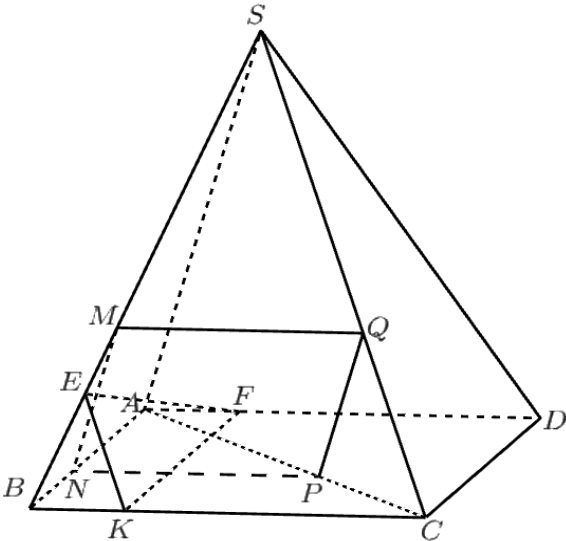
**ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2023 – 2024
Môn: Toán – Lớp: 11 THPT.**

Câu	Đáp án	Điểm
1 (2,0 điểm)	Có hai chung cư cao tầng xây cạnh nhau với khoảng cách giữa chúng là $HK = 25\text{ m}$. Để đảm bảo an ninh, trên nóc chung cư thứ hai người ta lắp camera ở vị trí C. Gọi A, B lần lượt là vị trí thấp nhất và cao nhất trên chung cư thứ nhất mà camera có thể quan sát được (tham khảo hình vẽ). Hãy tính số đo góc $\widehat{ACB}$ (phạm vi camera có thể quan sát được ở chung cư thứ nhất) biết rằng chiều cao của chung cư thứ hai là $CK = 37\text{ m}$, $AH = 4\text{ m}$, $BH = 26\text{ m}$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ). 	
		
	Ta có: $CE = 11$, $CF = 33$, $BE = AF = 25$	0,25
	Do đó: $\tan \widehat{BCE} = \frac{BE}{CE} = \frac{25}{11}$	0,25
	$\tan \widehat{ACF} = \frac{AF}{CF} = \frac{25}{33}$.	0,25
	Ta có: $\tan \widehat{ACB} = \tan \left(\widehat{BCE} - \widehat{ACE} \right) = \frac{\frac{25}{11} - \frac{25}{33}}{1 + \frac{25}{11} \cdot \frac{25}{33}}$	0,5

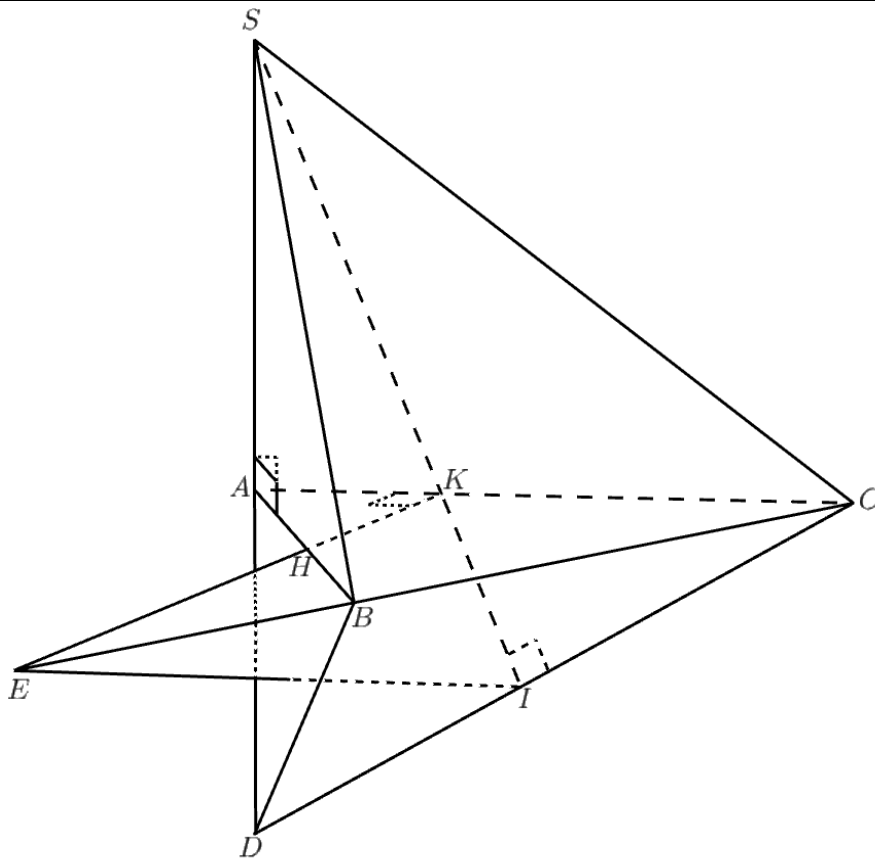
	$= \frac{275}{494}$	0,25						
	$\Rightarrow \widehat{ACB} = 29^0.$	0,5						
2 (2,0 điểm)	Phòng chăm sóc khách hàng của công ty A làm việc từ 8h00 sáng đến 20h00 mỗi ngày. Nhân viên trực tổng đài làm việc theo 2 ca, mỗi ca 8 tiếng, ca I từ 8h00 đến 16h00 và ca II từ 12h00 đến 20h00. Tiền lương của nhân viên được tính theo giờ (bảng dưới đây): <table><tr><th>Khoảng thời gian làm việc</th><th>Tiền lương/giờ</th></tr><tr><td>8h00 – 16h00</td><td>32 000 đồng</td></tr><tr><td>12h00 – 20h00</td><td>30 000 đồng</td></tr></table> Để chăm sóc khách hàng tốt nhất thì cần tối thiểu 2 nhân viên trong khoảng từ 12h00 – 20h00, tối thiểu 10 nhân viên trong giờ cao điểm từ 12h00 – 16h00 và không quá 9 nhân viên trong khoảng từ 8h00 – 16h00. Do lượng khách hàng trong khoảng 8h00 – 16h00 thường đông hơn nên phòng chăm sóc khách hàng cần số nhân viên ca I ít nhất phải gấp 1,5 lần số nhân viên của ca II. Em hãy giúp công ty A chỉ ra cách huy động số lượng nhân viên cho mỗi ca sao cho chi phí tiền lương mỗi ngày là ít nhất.	Khoảng thời gian làm việc	Tiền lương/giờ	8h00 – 16h00	32 000 đồng	12h00 – 20h00	30 000 đồng	
Khoảng thời gian làm việc	Tiền lương/giờ							
8h00 – 16h00	32 000 đồng							
12h00 – 20h00	30 000 đồng							
	Gọi x là số nhân viên cần huy động làm ca I và y là số nhân viên cần huy động làm ca II ($x, y \in \mathbb{N}^*$). Theo giả thiết ta có hệ bất phương trình sau: $\begin{cases} 0 < x \leq 9 \\ y \geq 2 \\ x + y \geq 10 \\ x \geq 1,5y \end{cases}$	0,5						
	Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình ta được: 	0,5						
	Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền tứ giác ABCD trong đó $A(6;4), B(8;2), C(9;2), D(9;6).$	0,25						

	Ta có chi phí tiền lương mỗi ngày $T(x; y) = 256x + 240y$ (nghìn đồng). Khi đó giá trị nhỏ nhất của $T(x; y)$ sẽ đạt tại một trong các đỉnh của tứ giác $ABCD$.	0,25
	Ta có: $T(9; 2) = 2784$, $T(6; 4) = 2496$, $T(8; 2) = 2528$, $T(9; 6) = 3744$. Do đó chi phí tiền lương mỗi ngày ít nhất khi huy động 6 nhân viên ca I và 4 nhân viên ca II.	0,5
3 (2,0 điểm)	Giải phương trình lượng giác: $\cos 2x + 2 \cos x + 2 \cos\left(\frac{2023\pi}{2} - x\right) = 0$.	
	$\cos 2x + 2 \cos x + 2 \cos\left(\frac{2023\pi}{2} - x\right) = 0$ $\Leftrightarrow \cos 2x + 2 \cos x - 2 \sin x = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x + 2) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x = 0 \\ \cos x + \sin x + 2 = 0 \end{cases}$	0,25
	Vì $\sin x \geq -1$, $\cos x \geq -1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $\cos x + \sin x + 2 \geq 0$. Dấu bằng xảy ra khi $\sin x = \cos x = -1$ (vô lí) $\Rightarrow \cos x + \sin x + 2 = 0$ vô nghiệm.	0,25
	Do đó: $\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.	0,5
4 (2,0 điểm)	a) Cho $S_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n}{n}$. Tính $\lim(2S_n - \sqrt{n^2 + n + 1})$. b) Cho hàm số bậc hai $y = f(x)$ có đồ thị là một parabol đỉnh $I\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$ và đi qua điểm $A(0; 1)$. Tính $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{f(x)+1} - 2x^2 - 2x - 1}{(x+1)^2}$.	
4a (1,0 điểm)	$S_n = \frac{1+2+\dots+n}{n} = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$	0,25
	$\lim(2S_n - \sqrt{n^2 + n + 1}) = \lim(n+1 - \sqrt{n^2 + n + 1}) = \lim \frac{n}{n+1 + \sqrt{n^2 + n + 1}}$	0,25
	$= \lim \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}$	0,25
	$= \frac{1}{2}$	0,25
4b (1,0 điểm)	Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Parabol đi qua điểm $A(0; 1) \Rightarrow c = 1$ Parabol có đỉnh $I\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right) \Rightarrow a = 5, b = 6$ $\Rightarrow f(x) = 5x^2 + 6x + 1$.	0,25
	Ta có: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{f(x)+1} - 2x^2 - 2x - 1}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5x^2 + 6x + 2} + 2x + 1 - 2x^2 - 4x - 2}{(x+1)^2}$	0,25

	$= \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{\sqrt{5x^2 + 6x + 2} + 2x + 1}{(x+1)^2} - 2 \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2 (\sqrt{5x^2 + 6x + 2} - 2x - 1)} - 2 \right]$	0,25
	$= \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{\sqrt{5x^2 + 6x + 2} - 2x - 1} - 2 \right) = -\frac{3}{2}.$	0,25
5 (2,0 điểm)	Đường Von Kốc là một hình có tính chất: toàn bộ hình “đồng dạng” với từng bộ phận của nó. Nó được xây dựng bằng phương pháp lặp như sau: Từ đoạn thẳng AB ban đầu ta chia đoạn thẳng đó thành ba phần bằng nhau $AC = CD = DB$, dựng tam giác đều CED rồi bỏ đi khoảng CD ta được đường gấp khúc $ACEDB$ kí hiệu là K_1. Lặp lại quy tắc đó cho các đoạn AC, CE, ED, DB ta được đường gấp khúc K_2 (hình vẽ). Tiếp tục lặp lại quy tắc đó cho từng đoạn của K_2 ta được đường gấp khúc $K_3, \dots$. Lặp lại mãi quá trình đó ta nhận được dãy các đường $K_1, K_2, K_3, \dots, K_n, \dots$. Gọi u_n là độ dài đường gấp khúc K_n. Giả sử đoạn thẳng AB có độ dài là 1 mét.  Đường Von Kốc a) Tính độ dài đường gấp khúc K_8. b) Tính $\frac{1}{u_1 - u_3} + \frac{1}{u_2 - u_4} + \dots + \frac{1}{u_{17} - u_{19}} + \frac{1}{u_{18} - u_{20}}$.	
5a. (1,0 điểm)	Ta có: $u_1 = \frac{4}{3}, u_2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \dots$	0,25
	Do đó (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = \frac{4}{3}$, công bội $q = \frac{4}{3}$	0,25
	$\Rightarrow u_8 = \left(\frac{4}{3}\right)^8 = \frac{65536}{6561}.$	0,5
5b. (1,0 điểm)	$\frac{1}{u_1 - u_3} + \frac{1}{u_2 - u_4} + \dots + \frac{1}{u_{17} - u_{19}} + \frac{1}{u_{18} - u_{20}}$ $= \frac{1}{1 - q^2} \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_{17}} + \frac{1}{u_{18}} \right)$	0,5
	$= \frac{1}{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^2} \left[\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{17} + \left(\frac{3}{4}\right)^{18} \right] = -\frac{9}{7} \cdot \frac{\frac{3}{4} \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{18} \right]}{1 - \frac{3}{4}}$	0,25

	$= \frac{27}{7} \left[\left(\frac{3}{4} \right)^{18} - 1 \right].$	0,25
6 (4,0 điểm)	Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có $SA = 2a$, $BC = a\sqrt{2}$. Gọi E là điểm thuộc cạnh SB sao cho $SE = 3EB$, F là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AF = \frac{1}{3}FD$. a) Chứng minh rằng đường thẳng EF song song với mặt phẳng (SCD). b) Gọi M là điểm di động trên cạnh SB sao cho M khác S và B. Mặt phẳng (α) qua M, song song với SA và BC. Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của AB, AC, SC với mặt phẳng (α). Tìm giá trị nhỏ nhất của $MP^2 + NQ^2$ theo a.	
6a. (2,0 điểm)		
	Trong mặt phẳng $(ABCD)$ dựng FK song song với $CD, K \in BC \Rightarrow \frac{BK}{BC} = \frac{AF}{AD} = \frac{1}{4}$.	0,25
	Xét ΔSBC có: $\frac{BK}{BC} = \frac{BE}{BS} = \frac{1}{4} \Rightarrow EK // SC$.	0,25
	Ta có: $\begin{cases} FK // CD \\ FK \not\subset (SCD) \Rightarrow FK // (SCD). \\ CD \subset (SCD) \end{cases}$	0,5
	$\begin{cases} EK // SC \\ EK \not\subset (SCD) \Rightarrow EK // (SCD). \\ SC \subset (SCD) \end{cases}$	0,5
	Mà EK, FK cắt nhau và cùng nằm trong mặt phẳng (EFK) nên $(EFK) // (SCD)$.	0,25
	Có $EF \subset (EFK) \Rightarrow EF // (SCD)$.	0,25

6b. (2,0 điểm)	Ta có: $\begin{cases} SA // (\alpha) \\ SA \subset (SAB) \\ (SAB) \cap (\alpha) = MN \end{cases} \Rightarrow MN // SA.$ Tương tự: $NP // BC, MQ // BC, PQ // SA \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.	0,25
	Ta có: $MP^2 + NQ^2$ $= \overrightarrow{MP}^2 + \overrightarrow{NQ}^2$ $= (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ})^2 + (\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP})^2$ $= MN^2 + 2\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MQ} + MQ^2 + NM^2 + 2\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} + NP^2$ $= 2(MN^2 + MQ^2) + 2\overrightarrow{MQ}(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM})$ $= 2(MN^2 + MQ^2).$	0,5
	Đặt $\frac{SM}{SB} = x \ (0 < x < 1) \Rightarrow \frac{MB}{SB} = 1 - x.$ Ta có: $\frac{SM}{SB} = \frac{MQ}{BC} = x \Rightarrow MQ = xBC = ax\sqrt{2}.$	0,25
	$\frac{MB}{SB} = \frac{MN}{SA} = 1 - x \Rightarrow MN = (1 - x)SA = 2a(1 - x).$	0,25
	Do đó: $MQ^2 + MN^2 = 2a^2x^2 + 4a^2(1 - x)^2 = 2a^2(3x^2 - 4x + 2) = 6a^2 \left[\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{9} \right].$	0,25
	Ta thấy: $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{9} \geq \frac{2}{9} \Rightarrow 6a^2 \left[\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{9} \right] \geq \frac{4a^2}{3}$ hay $MP^2 + NQ^2 \geq \frac{8a^2}{3}.$	0,25
	Do đó $MP^2 + NQ^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{8a^2}{3}$ khi $x = \frac{2}{3}$ hay $SM = \frac{2}{3}SB.$	0,25
7 (2,0 điểm)	Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B, $SA \perp (ABC)$. Gọi D là điểm đối xứng với S qua A, K là trực tâm của tam giác SCD. Trong mặt phẳng (ABC), kẻ đường thẳng Δ vuông góc với AC tại K và cắt AB tại H. a) Chứng minh: $CD \perp (SHK).$ b) Giả sử $SA = a\sqrt{3}$, $AC = 3a$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (SHK). Tính $\sin \varphi$?	



7a <i>(1,0 điểm)</i>	Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp HK$. Vậy $\begin{cases} SA \perp HK \\ HK \perp AC \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SAC)$. $AC \cap SA = A$	0,5
	$\Rightarrow CD \perp HK(1)$. Lại có: $CD \perp SK(2)$, $SK \cap HK = K(3)$. Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow CD \perp (SHK)$.	0,5
7b <i>(1,0 điểm)</i>	Ta có: $SC = \sqrt{AC^2 + SA^2} = 2\sqrt{3}a$, $SD = 2SA = 2\sqrt{3}a$. Mà ΔSCD cân tại $C \Rightarrow \Delta SCD$ đều.	0,25
	Trong mặt phẳng (ABC) , gọi $E = HK \cap BC$. Gọi I là trung điểm $CD \Rightarrow CI \perp (SHK)$. Suy ra EI là hình chiếu vuông góc của CE trên mặt phẳng (SHK) . $(\widehat{BC}, (\widehat{SHK})) = (\widehat{EC}, (\widehat{SHK})) = (\widehat{EC}, EI) = \widehat{CEI}$ (vì $\widehat{CEI} < 90^\circ$) .	0,25
	ΔSCD đều nên K là trọng tâm ΔSCD . $CK = \frac{2}{3} AC = 2a$, $CI = \frac{1}{2} CD = \sqrt{3}a$. ΔECK vuông cân tại $K \Rightarrow EK = CK = 2a \Rightarrow EC = 2\sqrt{2}a$.	0,25
	$\Rightarrow \sin \varphi = \sin \widehat{CEI} = \frac{CI}{CE} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.	0,25
8 <i>(2,0 điểm)</i>	Một hộp có 25 chiếc thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 25. Hai bạn An và Bình chơi trò chơi rút thẻ trong hộp như sau: hai bạn lần lượt rút thẻ, mỗi lượt rút ngẫu nhiên một thẻ rồi ghi lại số trên thẻ vừa rút sau đó trả lại thẻ vào hộp. An sẽ thắng nếu rút được thẻ ghi số chia hết cho 6, Bình sẽ thắng nếu rút được thẻ ghi số chia hết cho 5. Giả sử An chơi trước, tính xác suất để Bình thắng?	

	Từ 1 đến 25 có 4 số chia hết cho 6 và 5 số chia hết cho 5. Gọi A là biến cố rút được thẻ ghi số chia hết cho 6, B là biến cố rút được thẻ ghi số chia hết cho 5. $\Rightarrow P(A) = \frac{4}{25}, P(\bar{A}) = \frac{21}{25}, P(B) = \frac{1}{5}, P(\bar{B}) = \frac{4}{5}.$	0,5
	Giả sử Bình thắng ở lần rút thứ n, suy ra An đã rút n lần và đều rút được thẻ không chia hết cho 6. Từ lần 1 đến lần $n-1$ Bình đều rút được thẻ không chia hết cho 5. Vì các lần rút là độc lập với nhau nên xác suất để Bình thắng ở lần rút thứ n là: $P_n = \left(\frac{21}{25}\right)^n \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{84}{125}\right)^n.$	0,5
	Do đó xác suất để Bình thắng là: $P = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{84}{125}\right) + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{84}{125}\right)^2 + \dots + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{84}{125}\right)^n + \dots = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{84}{125}\right) + \left(\frac{84}{125}\right)^2 + \dots + \left(\frac{84}{125}\right)^n + \dots \right]$	0,5
	Vì $\frac{84}{125}, \left(\frac{84}{125}\right)^2, \left(\frac{84}{125}\right)^3, \dots, \left(\frac{84}{125}\right)^n, \dots$ lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $\frac{84}{125}$, công bội $\frac{84}{125}$ nên	0,25
	$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{84}{125}}{1 - \frac{84}{125}} = \frac{21}{41}.$	0,25
9 (2,0 điểm)	Cho x, y là hai số thực không âm và không đồng thời bằng không thỏa mãn: $\log\left(\frac{x^2 + y^2 + 25}{x + y}\right)^{x^2 + y^2 + 10} = \frac{10x + 10y - 25}{x^2 + y^2} + x^2 + y^2 + 9$ Tính tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{4x + 5y - 10}{x + y}$.	
	Ta có: $\log\left(\frac{x^2 + y^2 + 25}{x + y}\right)^{x^2 + y^2 + 10} = \frac{10x + 10y - 25}{x^2 + y^2} + x^2 + y^2 + 9$ $\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 10) \log\left(\frac{x^2 + y^2 + 25}{x + y}\right) = \frac{10x + 10y - 25}{x^2 + y^2} + x^2 + y^2 + 10 - 1$ $\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 10)[\log(x^2 + y^2 + 25) - \log(x + y) - 1] = \frac{10x + 10y - 25}{x^2 + y^2} - 1$	0,25
	$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 10)[\log(x^2 + y^2 + 25) - \log(10x + 10y)] = \frac{10x + 10y - (x^2 + y^2 + 25)}{x^2 + y^2}$	0,25
	Ta thấy với điều kiện của x, y đã cho thì $x^2 + y^2 > 0, x^2 + y^2 + 10 > 0$ + Nếu $x^2 + y^2 + 25 > 10x + 10y$ thì	0,25

$\begin{cases} \frac{10x+10y-(x^2+y^2+25)}{x^2+y^2} < 0 \\ (x^2+y^2+10)[\log(x^2+y^2+25)-\log(10x+10y)] > 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ vô lí.	
+ Nếu $x^2+y^2+25 < 10x+10y$ thì $\begin{cases} \frac{10x+10y-(x^2+y^2+25)}{x^2+y^2} > 0 \\ (x^2+y^2+10)[\log(x^2+y^2+25)-\log(10x+10y)] < 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ vô lí Do đó $x^2+y^2+25 = 10x+10y \Leftrightarrow (x-5)^2+(y-5)^2 = 25$.	0,25
$Q = \frac{4x+5y-10}{x+y} \Leftrightarrow (4-Q)x + (5-Q)y - 10 = 0.$ Đường tròn $(C): (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ có tâm $I(5;5)$, bán kính $R = 5$. Tồn tại cặp $(x; y)$ khi và chỉ khi đường tròn $(C): (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ và đường thẳng $\Delta: (4-Q)x + (5-Q)y - 10 = 0$ có giao điểm.	0,25
$\Leftrightarrow d_{(I,\Delta)} \leq R \Leftrightarrow \frac{ 5(4-Q) + 5(5-Q) - 10 }{\sqrt{(4-Q)^2 + (5-Q)^2}} \leq 5.$	0,25
$\Leftrightarrow 1 \leq Q \leq 4.$	0,25
+ Với $Q = 1$ thì $(x; y)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25 \\ 3x + 4y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$ + Với $Q = 4$ thì $(x; y)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25 \\ y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 10 \end{cases}.$ Vậy tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của Q bằng 5.	0,25