

Chương 1

ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Bài 1: TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa :

Giả sử K là một khoảng , một đoạn hoặc một nửa khoảng . Hàm số f xác định trên K được gọi là

- Đồng biến trên K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
- Nghịch biến trên K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

2. Điều kiện cần để hàm số đơn điệu :

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I

- Nếu hàm số f đồng biến trên khoảng I thì $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in I$;
- Nếu hàm số f nghịch biến trên khoảng I thì $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in I$.

3. Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu :

Giả sử I là một khoảng hoặc nửa khoảng hoặc một đoạn , f là hàm số liên tục trên I và có đạo hàm tại mọi điểm trong của I (tức là điểm thuộc I nhưng không phải đầu mút của I) . Khi đó :

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f đồng biến trên khoảng I ;
- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f nghịch biến trên khoảng I ;
- Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f không đổi trên khoảng I .

Chú ý :

- Nếu hàm số f liên tục trên $[a; b]$ và có đạo hàm $f'(x) > 0$ trên khoảng $(a; b)$ thì hàm số f đồng biến trên $[a; b]$.
- Nếu hàm số f liên tục trên $[a; b]$ và có đạo hàm $f'(x) < 0$ trên khoảng $(a; b)$ thì hàm số f nghịch biến trên $[a; b]$.
- Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a; b]$.

* Nếu hàm số f đồng biến trên khoảng $(a; b)$ thì nó đồng biến trên đoạn $[a; b]$.

- * Nếu hàm số f nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ thì nó nghịch biến trên đoạn $[a;b]$.
- * Nếu hàm số f không đổi trên khoảng $(a;b)$ thì không đổi trên đoạn $[a;b]$.

4. Định lý mở rộng

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I .

- Nếu $f'(x) \geq 0$ với $\forall x \in I$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc I thì hàm số f đồng biến trên khoảng I ;
- Nếu $f'(x) \leq 0$ với $\forall x \in I$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc I thì hàm số f nghịch biến trên khoảng I .

1.2 DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 : Xét chiều biến thiên của hàm số .

Xét chiều biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta thực hiện các bước sau:

- Tìm tập xác định D của hàm số .
- Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.
- Tìm các giá trị của x thuộc D để $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định (ta gọi đó là điểm tới hạn hàm số).
- Xét dấu $y' = f'(x)$ trên từng khoảng x thuộc D .
- Dựa vào bảng xét dấu và điều kiện đủ suy ra khoảng đơn điệu của hàm số.

Ví dụ 1: Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

$$1. y = \frac{x+2}{x-1} \qquad 2. y = \frac{-x^2+2x-1}{x+2}$$

Giải:

$$1. y = \frac{x+2}{x-1}$$

- * Hàm số đã cho xác định trên khoảng $(-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

$$* \text{ Ta có: } y' = -\frac{3}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$$

- * Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$-$		$-$
y	1		$+\infty$
	$\searrow$		$\searrow$
	$-\infty$		1

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

$$2. y = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x + 2}$$

* Hàm số đã cho xác định trên khoảng $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.

* Ta có: $y' = \frac{-x^2 - 4x + 5}{(x + 2)^2}, \forall x \neq -2$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 1 \end{cases}$$

* Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-5	-2	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
y	$+\infty$			$+\infty$		$-\infty$	$-\infty$

Vậy, hàm số đồng biến trên các khoảng $(-5; -2)$ và $(-2; 1)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -5)$ và $(1; +\infty)$.

Nhận xét:

* Đối với hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($a, c \neq 0$) luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

* Đối với hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$ luôn có ít nhất hai khoảng đơn điệu.

* Cả hai dạng hàm số trên không thể luôn đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Bài tập tương tự :

Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

$$1. y = \frac{2x - 1}{x + 1}$$

$$4. y = \frac{3x}{x^2 + 1}$$

$$2. y = \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 2}$$

$$5. y = \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 2x - 4}$$

$$3. y = \frac{x + 1}{3\sqrt{x}}$$

$$6. y = \frac{x^2 + 2x + 2}{2x^2 + x + 1}$$

Ví dụ 2: Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

$$1. y = -x^3 - 3x^2 + 24x + 26 \quad 2. y = x^4 - 6x^2 + 8x + 1$$

Giải:

1. $y = -x^3 - 3x^2 + 24x + 26$

* Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

* Ta có : $y' = -3x^2 - 6x + 24$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 - 6x + 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 2 \end{cases}$$

* Bảng xét dấu của y' :

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$

+ Trên khoảng $(-4; 2)$: $y' > 0 \Rightarrow y$ đồng biến trên khoảng $(-4; 2)$,

+ Trên mỗi khoảng $(-\infty; -4)$, $(2; +\infty)$: $y' < 0 \Rightarrow y$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -4)$, $(2; +\infty)$.

Hoặc ta có thể trình bày :

* Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

* Ta có : $y' = -3x^2 - 6x + 24$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 - 6x + 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 2 \end{cases}$$

* Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$					$-\infty$

Vậy, hàm số đồng biến trên khoảng $(-4; 2)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -4)$ và $(2; +\infty)$.

2. $y = x^4 - 6x^2 + 8x + 1$

* Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

* Ta có: $y' = 4x^3 - 12x + 8 = 4(x - 1)^2(x + 2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4(x - 1)^2(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

* Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$

Vậy, hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Nhận xét:

* Ta thấy tại $x = 1$ thì $y = 0$, nhưng qua đó y' không đổi dấu.

* Đối với hàm bậc bốn $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ luôn có ít nhất một khoảng đồng biến và một khoảng nghịch biến. Do vậy với hàm bậc bốn không thể đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Bài tập tương tự :

Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

1. $y = x^3 - 3x^2 + 2$

2. $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

3. $y = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 1$

4. $y = x^4 + 2x^2 - 3$

5. $y = -\frac{4}{5}x^5 + x^3 + 8$

6. $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}2x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 2x$

7. $y = 9x^7 - 7x^6 + \frac{7}{5}x^5 + 12$

Ví dụ 3 : Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

1. $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

3. $y = x\sqrt{1 - x^2}$

2. $y = \sqrt{3x^2 - x^3}$

4. $y = x + 1 - 2\sqrt{x^2 + 3x + 3}$

Giải:

1. $y = \sqrt{x^2 - 2x}$.

* Hàm số đã cho xác định trên mỗi nửa khoảng $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.

* Ta có: $y' = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}, \forall x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

Hàm số không có đạo hàm tại các điểm $x = 0, x = 2$.

Cách 1 :

+ Trên khoảng $(-\infty; 0): y' < 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$,

+ Trên khoảng $(2; +\infty): y' > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Cách 2 :

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	-			+
y				

Vậy, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$

2. $y = \sqrt{3x^2 - x^3}$

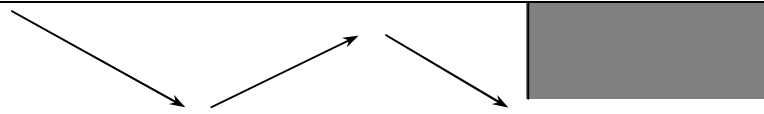
* Hàm số đã cho xác định trên nửa khoảng $(-\infty; 3]$.

* Ta có: $y' = \frac{3(2x - x^2)}{2\sqrt{3x^2 - x^3}}, \forall x \in (-\infty; 0) \cup (0; 3)$.

Hàm số không có đạo hàm tại các điểm $x = 0, x = 3$.

Suy ra, trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; 3)$: $y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$	
y'	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$	$\parallel$
y						

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; 3)$.

3. $y = x\sqrt{1 - x^2}$

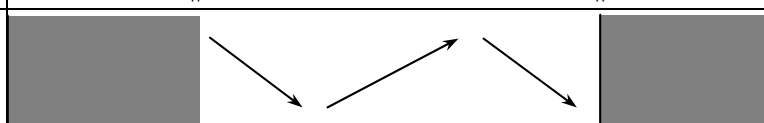
* Hàm số đã cho xác định trên đoạn $[-1; 1]$.

* Ta có: $y' = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}, \forall x \in (-1; 1)$

Hàm số không có đạo hàm tại các điểm $x = -1, x = 1$.

Trên khoảng $(-1; 1)$: $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$+\infty$		
y'		$\parallel$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\parallel$
y								

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, nghịch biến trên mỗi khoảng

$\left(-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$.

4. $y = x + 1 - 2\sqrt{x^2 + 3x + 3}$

* Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

* Ta có: $y' = 1 - \frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 3x + 3}}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3x + 3} = 2x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ x^2 + 3x + 3 = (2x + 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$
y			

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$, nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Bài tập tương tự :

Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

1. $y = \sqrt{2x - x^2}$

2. $y = x + 1 - \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

3. $y = \sqrt[3]{3x - 5}$

4. $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$

5. $y = (4 - 3x)\sqrt{6x^2 + 1}$

6. $y = \frac{\sqrt{2x^2 - x + 3}}{3x + 2}$

7. $y = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 - x + 3}}$

Ví dụ 4 : Xét chiều biến thiên của các hàm số sau: $y = |x^2 - 2x - 3|$

Giải:

$$y = |x^2 - 2x - 3| = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & \text{khi } x \leq -1 \vee x \geq 3 \\ -x^2 + 2x + 3 & \text{khi } -1 < x < 3 \end{cases}$$

* Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

* Ta có: $y' = \begin{cases} 2x - 2 & \text{khi } x < -1 \vee x > 3 \\ -2x + 2 & \text{khi } -1 < x < 3 \end{cases}$

Hàm số không có đạo hàm tại $x = -1$ và $x = 3$.

+ Trên khoảng $(-1; 3)$: $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$;

+ Trên khoảng $(-\infty; -1)$: $y' < 0$;

+ Trên khoảng $(3; +\infty)$: $y' > 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$	
y'		$-$	$ $	$+$	0	$-$	$ $	$+$
y								

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$.

Bài tập tương tự :

Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

- $y = |x^2 - 5x + 4|$
- $y = -x + 1 - |2x^2 + 5x - 7|$
- $y = -3x + 7 + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$
- $y = x^2 + |x^2 - 7x + 10|$

Ví dụ 5 :

Xét chiều biến thiên của hàm số sau: $y = 2\sin x + \cos 2x$ trên đoạn $[0; \pi]$.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định trên đoạn $[0; \pi]$

* Ta có: $y' = 2\cos x(1 - 2\sin x), x \in [0; \pi]$.

$$\text{Trên đoạn } [0; \pi]: y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0; \pi] \\ \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}.$$

Bảng biến thiên:

x		0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	$-$
y							

Dựa vào bảng biến thiên suy ra : hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$ và

$\left(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right)$, nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(\frac{5\pi}{6}; \pi\right)$.

Bài tập tương tự :

Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

1. $y = \sin 3x$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$.

2. $y = \frac{\cot x}{x}$ trên khoảng $(0; \pi)$.

3. $y = \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cos 2x$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

4. $y = 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ trên đoạn $[0; \pi]$.

Ví dụ 6: Chứng minh rằng hàm số $y = \sin^2 x + \cos x$ đồng biến trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ và nghịch biến trên đoạn $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định trên đoạn $[0; \pi]$

* Ta có: $y' = \sin x (2 \cos x - 1), x \in (0; \pi)$

Vì $x \in (0; \pi) \Rightarrow \sin x > 0$ nên trên $(0; \pi)$: $y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$.

+ Trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$: $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$;

+ Trên khoảng $\left(\frac{\pi}{3}; \pi\right)$: $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên đoạn $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.

Bài tập tương tự :

1. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = (x - \sin x)(\pi - x - \sin x)$ đồng biến trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Chứng minh rằng hàm số $y = \cos 2x - 2x + 3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

3. Chứng minh rằng hàm số $y = \tan \frac{x}{2}$ đồng biến trên các khoảng $(0; \pi)$ và $(\pi; 2\pi)$.

4. Chứng minh rằng hàm số $y = \cos 3x + \frac{3x}{2}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{18}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{18}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Dạng 2 : Tùy theo tham số m khảo sát tính đơn điệu của hàm số .

Ví dụ : Tùy theo m khảo sát tính đơn điệu của hàm số:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}m(m+1)x^2 + m^3x + m^2 + 1$$

Giải:

* Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

* Ta có $y' = x^2 - m(m+1)x + m^3$ và $\Delta = m^2(m-1)^2$

+ $m = 0$ thì $y' = x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $y' = 0$ chỉ tại điểm $x = 0$. Hàm số đồng biến trên mỗi nửa khoảng $(-\infty; 0]$ và $[0; +\infty)$. Do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+ $m = 1$ thì $y' = (x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $y' = 0$ chỉ tại điểm $x = 1$. Hàm số đồng biến trên mỗi nửa khoảng $(-\infty; 1]$ và $[1; +\infty)$. Do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+ $m \neq 0, m \neq 1$ khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m^2 \end{cases}$.

· Nếu $m < 0$ hoặc $m > 1$ thì $m < m^2$

Bảng xét dấu y' :

x	$-\infty$	m	m^2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; m)$ và $(m^2; +\infty)$, giảm trên khoảng $(m; m^2)$.

· Nếu $0 < m < 1$ thì $m > m^2$

Bảng xét dấu y' :

x	$-\infty$	m^2	m	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; m^2)$ và $(m; +\infty)$, giảm trên khoảng $(m^2; m)$.

Bài tập tự luyện:

Tùy theo m khảo sát tính đơn điệu của hàm số:

1. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + m^3x + m - 3$

2. $y = \frac{1}{3}(m-1)x^3 - \frac{1}{2}(m-1)x^2 + x + 2m + 3$

Dạng 3 : Hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Sử dụng định lý về điều kiện cần

- Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$ thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu giảm trên $\mathbb{R}$ thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 1 : Tìm m để các hàm số sau luôn nghịch biến trên mỗi khoảng xác định .

$$1. y = \frac{mx + 3 - 2m}{x + m}$$

$$2. y = \frac{-2x^2 + (m + 2)x - 3m + 1}{x - 1}$$

Giải :

$$1. y = \frac{mx + 3 - 2m}{x + m}$$

* Hàm số đã cho xác định trên khoảng $(-\infty; -m) \cup (-m; +\infty)$

$$* \text{ Ta có : } y' = \frac{m^2 + 2m - 3}{(x + m)^2}, x \neq -m .$$

Cách 1 :

* Bảng xét dấu y'

m	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy

Nếu $-3 < m < 1$ thì $y' < 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -m)$, $(-m; +\infty)$.

Cách 2 :

Hàm số nghịch biến trên tập xác định khi :

$$y' < 0, \forall x \in (-\infty; -m) \cup (-m; +\infty) \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 1$$

$$2. y = \frac{-2x^2 + (m + 2)x - 3m + 1}{x - 1} = -2x + m + \frac{1 - 2m}{x - 1}$$

* Hàm số đã cho xác định trên khoảng $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

$$* \text{ Ta có : } y' = -2 + \frac{2m - 1}{(x - 1)^2}, x \neq 1$$

+ $m \leq \frac{1}{2} \Rightarrow y' < 0, x \neq 1$, do đó hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$.

+ $m > \frac{1}{2}$ khi đó phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm $x_1 < 1 < x_2 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(x_1; 1)$ và $(1; x_2)$, trường hợp này không thỏa.

Vậy $m \leq \frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Bài tập tương tự :

Tìm m để các hàm số sau luôn nghịch biến trên mỗi khoảng xác định .

$$\begin{array}{ll} 1. y = \frac{x - m^2 + 7m - 11}{x - 1} & 3. y = \frac{(m - 1)x^2 + 2x + 1}{x + 1} \\ 2. y = \frac{(m - 1)x + m^2 + 2m - 3}{x + 3m} & 4. y = \frac{x^2 - 2(m + 2)x + m - 1}{x - 3} \end{array}$$

Ví dụ 2 : Tìm m để các hàm số sau luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{l} 1. y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + (2m + 1)x - 3m + 2 \\ 2. y = (m + 2)\frac{x^3}{3} - (m + 2)x^2 + (m - 8)x + m^2 - 1 \end{array}$$

Giải:

$$1. y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + (2m + 1)x - 3m + 2$$

* Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

* Ta có : $y' = -x^2 + 4x + 2m + 1$ và có $\Delta' = 2m + 5$

* Bảng xét dấu Δ'

m	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	$+\infty$
Δ'	$-$	0	$+$

+ $m = -\frac{5}{2}$ thì $y' = -(x - 2)^2 \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $y' = 0$ chỉ tại điểm $x = 2$

Do đó hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

+ $m < -\frac{5}{2}$ thì $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

+ $m > -\frac{5}{2}$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 ($x_1 < x_2$). Hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$. Trường hợp này không thỏa mãn.

$$2. y = (m + 2)\frac{x^3}{3} - (m + 2)x^2 + (m - 8)x + m^2 - 1$$

* Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

* Ta có $y' = (m+2)x^2 - 2(m+2)x + m - 8$.

+ $m = -2$, khi đó $y' = -10 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

+ $m \neq -2$ tam thức $y' = (m+2)x^2 - 2(m+2)x + m - 8$ có $\Delta' = 10(m+2)$

* Bảng xét dấu Δ'

m	$-\infty$	-2	$+\infty$
Δ'	$-$	0	$+$

+ $m < -2$ thì $y' < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

+ $m > -2$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 ($x_1 < x_2$). Hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$. Trường hợp này không thỏa mãn.

Vậy $m \leq -2$ là những giá trị cần tìm.

Bài tập tương tự :

Tìm m để các hàm số sau luôn nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

1. $y = x + 2 + \frac{m}{x-1}$

3. $y = \frac{1}{3}x^3 - m^2x + 1$

2. $y = (m-1)x - 3 - \frac{m+4}{x+2}$

4. $y = \frac{1}{4}mx^4 - m^2x^2 + m - 1$

Ví dụ 3 : Tìm a để các hàm số sau luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

1. $y = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + 4x + 3$

2. $y = \frac{1}{3}(a^2 - 1)x^3 + (a+1)x^2 + 3x + 5$

Giải :

1. $y = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + 4x + 3$

* Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

* Ta có $y' = x^2 + 2ax + 4$ và có $\Delta' = a^2 - 4$

* Bảng xét dấu Δ'

a	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
Δ'	$+$	0	$-$	0	$+$

+ Nếu $-2 < a < 2$ thì $y' > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số y đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+ Nếu $a = 2$ thì $y' = (x+2)^2$, ta có : $y' = 0 \Leftrightarrow x = -2, y' > 0, x \neq -2$. Hàm số y đồng biến trên mỗi nửa khoảng $(-\infty; -2]$ và $[-2; +\infty)$ nên hàm số y đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+ Tương tự nếu $a = -2$. Hàm số y đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+ Nếu $a < -2$ hoặc $a > 2$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Giả sử $x_1 < x_2$. Khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(x_1; x_2)$, đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; x_1)$ và $(x_2; +\infty)$. Do đó $a < -2$ hoặc $a > 2$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy hàm số y đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $-2 \leq a \leq 2$.

$$2. y = \frac{1}{3}(a^2 - 1)x^3 + (a + 1)x^2 + 3x + 5$$

* Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

$$* \text{ Ta có : } y' = (a^2 - 1)x^2 + 2(a + 1)x + 3 \text{ và có } \Delta' = 2(-a^2 + a + 2)$$

Hàm số y đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$

$$+ \text{ Xét } a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$$

$$\bullet a = 1 \Rightarrow y' = 4x + 3 \Rightarrow y' \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{4} \Rightarrow a = 1 \text{ không thỏa yêu cầu bài}$$

toán.

$$\bullet a = -1 \Rightarrow y' = 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow a = -1 \text{ thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$$

$$+ \text{ Xét } a^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm 1$$

* Bảng xét dấu Δ'

a	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
Δ'	$-$	0	$+$	0	$-$

+ Nếu $a < -1 \vee a > 2$ thì $y' > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số y đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+ Nếu $a = 2$ thì $y' = 3(x + 1)^2$, ta có : $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1, y' > 0, x \neq -1$. Hàm số y đồng biến trên mỗi nửa khoảng $(-\infty; -1]$ và $[-1; +\infty)$ nên hàm số y đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+ Nếu $-1 < a < 2, a \neq 1$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Giả sử $x_1 < x_2$. Khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(x_1; x_2)$, đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; x_1)$ và $(x_2; +\infty)$. Do đó $-1 < a < 2, a \neq 1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do đó hàm số y đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a < -1 \vee a \geq 2$.

Vậy với $1 \leq a \leq 2$ thì hàm số y đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bài tập tương tự :

Tìm m để các hàm số sau luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

$$1. y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + (m^2 - 3)x - 1$$

$$2. y = \frac{x^3}{3} - mx^2 + (m + 2)x + 3$$

$$3. y = (m+2)\frac{x^3}{3} - (m-1)x^2 + 4x - 1$$

$$4. y = (m-2)\frac{x^3}{3} - (2m-3)x^2 + (5m-6)x + 2$$

Chú ý :

Phương pháp:

* Hàm số $y = f(x, m)$ tăng trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \min_{x \in \mathbb{R}} y' \geq 0$.

* Hàm số $y = f(x, m)$ giảm trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \max_{x \in \mathbb{R}} y' \leq 0$.

Chú ý:

1) Nếu $y' = ax^2 + bx + c$ thì

$$* y' \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ c \geq 0 \\ a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

$$* y' \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ c \leq 0 \\ a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

2) Hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì nó phải xác định trên $\mathbb{R}$.

Dạng 4 : Hàm số đơn điệu trên tập con của $\mathbb{R}$.

Phương pháp:

* Hàm số $y = f(x, m)$ tăng $\forall x \in I \Leftrightarrow y' \geq 0 \quad \forall x \in I \Leftrightarrow \min_{x \in I} y' \geq 0$.

* Hàm số $y = f(x, m)$ giảm $\forall x \in I \Leftrightarrow y' \leq 0 \quad \forall x \in I \Leftrightarrow \max_{x \in I} y' \leq 0$.

Ví dụ 1 : Tìm m để các hàm số sau

1. $y = \frac{mx+4}{x+m}$ luôn nghịch biến khoảng $(-\infty; 1)$.

2. $y = x^3 + 3x^2 + (m+1)x + 4m$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Giải :

1. $y = \frac{mx+4}{x+m}$ luôn nghịch biến khoảng $(-\infty; 1)$.

* Hàm số đã cho xác định trên khoảng $(-\infty; 1)$.

* Ta có $y' = \frac{m^2 - 4}{(x + m)^2}, x \neq -m$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} y' < 0, \forall x \in (-\infty; 1) \\ -m \notin (-\infty; 1) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ -m \notin (-\infty; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ -m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq -1$$

Vậy : với $-2 < m \leq -1$ thì thỏa yêu cầu bài toán .

2. $y = x^3 + 3x^2 + (m + 1)x + 4m$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

* Hàm số đã cho xác định trên khoảng $(-1; 1)$.

* Ta có : $y' = 3x^2 + 6x + m + 1$

Cách 1 :

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$ khi và chỉ khi

$y' \leq 0, \forall x \in (-1; 1)$ hay.

Xét hàm số $g(x) = -(3x^2 + 6x + 1), \forall x \in (-1; 1)$

$\Rightarrow g'(x) = -6x - 6 < 0, \forall x \in (-1; 1) \Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$

và $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -2, \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -10$

* Bảng biến thiên.

x	-1	1
$g'(x)$		-
$g(x)$	-2	-10

Vậy $m \leq -10$ thỏa yêu cầu bài toán .

Cách 2 :

$f''(x) = 6x + 6$

Nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$ là $x = -1 < 1$. Do đó, hàm số đã

cho nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$ khi và chỉ khi $m \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -10$.

Vậy $m \leq -10$ thỏa yêu cầu bài toán .

Bài tập tự luyện:

Tìm m để các hàm số sau:

1. $y = \frac{mx-1}{x-m}$ luôn nghịch biến khoảng $(2; +\infty)$.

2. $y = \frac{x-2m}{(2m+3)x-m}$ luôn nghịch biến khoảng $(1; 2)$.

3. $y = \frac{x^2-2m}{x-m}$ luôn nghịch biến khoảng $(-\infty; 0)$.

4. $y = \frac{(m-1)x^2+m}{x+3m}$ luôn nghịch biến khoảng $(0; 1)$.

Ví dụ 2 : Tìm m để các hàm số sau

1. $y = 2x^3 - 2x^2 + mx - 1$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

2. $y = mx^3 - x^2 + 3x + m - 2$ đồng biến trên khoảng $(-3; 0)$.

3. $y = \frac{1}{3}mx^3 + 2(m-1)x^2 + (m-1)x + m$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Giải :

1. $y = 2x^3 - 2x^2 + mx - 1$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

* Hàm số đã cho xác định trên khoảng $(1; +\infty)$.

* Ta có : $y' = 6x^2 - 4x + m$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$y' \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow g(x) = 6x^2 - 4x \geq -m, x > 1$$

Xét hàm số $g(x) = 6x^2 - 4x$ liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$, ta có

$$g'(x) = 12x - 4 > 0, \forall x > 1 \Leftrightarrow g(x) \text{ đồng biến trên khoảng } (1; +\infty)$$

$$\text{và } \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (6x^2 - 4x) = 2, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

* Bảng biến thiên.

x		-1		$+\infty$
$g'(x)$			+	
$g(x)$				$+\infty$
		-2		

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $2 \geq -m \Leftrightarrow m \geq -2$

2. $y = mx^3 - x^2 + 3x + m - 2$ đồng biến trên khoảng $(-3; 0)$.

* Hàm số đã cho xác định trên khoảng $(-3; 0)$.

* Ta có : $y' = 3mx^2 - 2x + 3$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-3; 0)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0$,

$\forall x \in (-3; 0)$.

Hay $3mx^2 - 2x + 3 \geq 0, \forall x \in (-3; 0) \Leftrightarrow m \geq \frac{2x - 3}{3x^2}, \forall x \in (-3; 0)$

Xét hàm số $g(x) = \frac{2x - 3}{3x^2}$ liên tục trên khoảng $(-3; 0)$, ta có

$g'(x) = \frac{-6x^2 + 18x}{9x^4} < 0, \forall x \in (-3; 0) \Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3; 0)$

và $\lim_{x \rightarrow -3^+} g(x) = -\frac{4}{27}, \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$

* Bảng biến thiên.

x		-3		0
$g'(x)$			$-$	
$g(x)$		$-\frac{4}{27}$	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m \geq -\frac{4}{27}$

3. $y = \frac{1}{3}mx^3 + 2(m - 1)x^2 + (m - 1)x + m$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

* Hàm số đã cho xác định trên khoảng $(2; +\infty)$.

* Ta có : $y' = mx^2 + 4(m - 1)x + m - 1$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ khi và chỉ khi

$y' \geq 0, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow mx^2 + 4(m - 1)x + m - 1 \geq 0, \forall x \in (2; +\infty)$

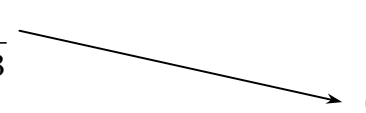
$\Leftrightarrow (x^2 + 4x + 1)m \geq 4x + 1, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow m \geq \frac{4x + 1}{x^2 + 4x + 1}, \forall x \in (2; +\infty)$

Xét hàm số $g(x) = \frac{4x + 1}{x^2 + 4x + 1}, x \in (2; +\infty)$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{-2x(2x+1)}{(x^2+4x+1)^2} < 0, \forall x \in (2; +\infty) \Rightarrow g(x) \text{ nghịch biến trên khoảng}$$

$$(2; +\infty) \text{ và } \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \frac{9}{13}, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

Bảng biến thiên.

x		2		$+\infty$
$g'(x)$			-	
$g(x)$		$\frac{9}{13}$		

Vậy $m \geq \frac{9}{13}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài tập tự luyện:

Tìm m để các hàm số sau:

1. $y = \frac{mx^2 + (m+1)x - 1}{2x - m}$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

2. $y = x^3 - mx^2 - (2m^2 - 7m + 7)x + 2(m-1)(2m-3)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

3. $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Ví dụ 3 : Tìm m để các hàm số sau :

1. $y = \frac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$ nghịch biến trên nửa khoảng $[2; +\infty)$.

2. $y = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + m(2m-1)$ đồng biến trên nửa khoảng $[1; +\infty)$.

Giải :

1. $y = \frac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$ nghịch biến trên nửa khoảng $[2; +\infty)$.

* Hàm số đã cho xác định trên nửa khoảng $[2; +\infty)$

* Ta có $y' = \frac{mx^2 + 4mx + 14}{(x+2)^2}$

Hàm nghịch biến trên nửa khoảng $[1; +\infty) \Leftrightarrow f(x) = mx^2 + 4mx + 14 \leq 0$,
 $\forall x \in [1; +\infty)$ (*).

Cách 1: Dùng tam thức bậc hai

- Nếu $m = 0$ khi đó (*) không thỏa mãn.
- Nếu $m \neq 0$. Khi đó $f(x)$ có $\Delta = 4m^2 - 14m$

Bảng xét dấu Δ

m	$-\infty$	0	$\frac{7}{2}$	$+\infty$	
Δ'	+	0	-	0	+

- Nếu $0 < m < \frac{7}{2}$ thì $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, nếu $f(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (x_1; x_2)$ nên (*) không thỏa mãn.

- Nếu $m < 0$ hoặc $m > \frac{7}{2}$. Khi đó $f(x) = 0$ có hai nghiệm

$$x_1 = \frac{-2m + \sqrt{4m^2 - 14m}}{m}; x_2 = \frac{-2m - \sqrt{4m^2 - 14m}}{m}$$

$$\text{Vì } m < 0 \text{ hoặc } m > \frac{7}{2} \Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq x_1 \\ x \geq x_2 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } f(x) \leq 0 \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow x_2 \leq 1 \Leftrightarrow -3m \geq \sqrt{4m^2 - 14m}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 5m^2 + 14m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -\frac{14}{5}.$$

$$\textbf{Cách 2:} (*) \Leftrightarrow m \leq \frac{-14}{x^2 + 4x} = g(x) \quad \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow m \leq \min_{x \geq 1} g(x)$$

$$\text{Ta có } \min_{x \geq 1} g(x) = g(1) = -\frac{14}{5} \Rightarrow m \leq -\frac{14}{5}.$$

2. $y = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + m(2m-1)$ đồng biến trên nửa khoảng $[1; +\infty)$.

* Hàm số đã cho xác định trên nửa khoảng $[1; +\infty)$

* Ta có $y' = 3x^2 - 2(m+1)x - (2m^2 - 3m + 2)$

Hàm đồng biến trên nửa khoảng $[2; +\infty)$. $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in [2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow f(x) = 3x^2 - 2(m+1)x - (2m^2 - 3m + 2) \geq 0, \quad \forall x \in [2; +\infty)$$

Vì tam thức $f(x)$ có $\Delta' = 7m^2 - 7m + 7 > 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}$ nên $f(x)$ có hai nghiệm

$$x_1 = \frac{m+1 - \sqrt{\Delta'}}{3}; x_2 = \frac{m+1 + \sqrt{\Delta'}}{3}.$$

$$\text{Vì } x_1 < x_2 \text{ nên } f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq x_1 \\ x \geq x_2 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [2; +\infty) \Leftrightarrow x_2 \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta'} \leq 5 - m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 5 \\ \Delta' \leq (5-m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 5 \\ 2m^2 + m - 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq \frac{3}{2}$$

Bài tập tự luyện :

Tìm m để các hàm số sau :

1. $y = \frac{x^2 + (m-2)x - 2}{x+m}$ đồng biến trên nửa khoảng $(-\infty; 1]$.

2. $y = \frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 - (m-1)x + 1$ nghịch biến trên nửa khoảng $(-\infty; -2]$.

3. $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{2}{3}$ đồng biến trên nửa khoảng $[2; +\infty)$.

4. $y = \frac{2x^2 + (1-m)x + 1+m}{x-m}$ đồng biến trên nửa khoảng $[1; +\infty)$.

Ví dụ 4 : Tìm tất cả các tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1?

Giải :

* Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

* Ta có : $y' = 3x^2 + 6x + m$ có $\Delta' = 9 - 3m$

• Nếu $m \geq 3$ thì $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó $m \geq 3$ không thỏa yêu cầu bài toán.

• Nếu $m < 3$, khi đó $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) và hàm số nghịch biến trong đoạn $[x_1; x_2]$ với độ dài $l = |x_2 - x_1|$

Theo Vi-ét, ta có : $x_1 + x_2 = -2, x_1 x_2 = \frac{m}{3}$

Hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1 $\Leftrightarrow l = 1$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow 4 - \frac{4}{3}m = 1 \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}.$$

Bài tập tương tự :

1. Tìm tất cả các tham số m để hàm số $y = x^3 - 3m^2x^2 + x + m - 1$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1 ?.
2. Tìm tất cả các tham số m để hàm số $y = -x^3 + m^2x^2 + mx + 3m + 5$ đồng biến trên đoạn có độ dài bằng 3 ?.

Ví dụ 5: Tìm m để hàm số $y = x + m \cos x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Giải:

- * Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.
- * Ta có $y' = 1 - m \sin x$.

Cách 1: Hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1 - m \sin x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

* $m = 0$ thì (1) luôn đúng

$$* m > 0 \text{ thì } (1) \Leftrightarrow \sin x \leq \frac{1}{m} \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{1}{m} \Leftrightarrow 0 < m \leq 1.$$

$$* m < 0 \text{ thì } (1) \Leftrightarrow \sin x \geq \frac{1}{m} \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -1 \geq \frac{1}{m} \Leftrightarrow -1 \leq m < 0.$$

Vậy $-1 \leq m \leq 1$ là những giá trị cần tìm.

Cách 2: Hàm đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \min y' = \min \{1 - m; 1 + m\} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m \geq 0 \\ 1 + m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1.$$

Bài tập tự luyện:

1. Tìm m để hàm số $y = x(m - 1) + m \cos x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
2. Tìm m để hàm số $y = x \cdot \sin x + m \cos x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Dạng 5 : Sử dụng tính đơn điệu của hàm số CM bất đẳng thức.

- Đưa bất đẳng thức về dạng $f(x) \geq M, x \in (a; b)$.
- Xét hàm số $y = f(x), x \in (a; b)$.
- Lập bảng biến thiên của hàm số trên khoảng $(a; b)$.
- Dựa vào bảng biến thiên và kết luận.

Ví dụ 1 : Với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng :

1. $\sin x + \tan x > 2x$

2. $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1$

Giải :

1. $\sin x + \tan x > 2x$

* Xét hàm số $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$ liên tục trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

* Ta có : $f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 > \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm số đồng biến trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ và $f(x) > f(0), \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

hay $\sin x + \tan x > 2x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ (đpcm).

⊕ Từ bài toán trên ta có bài toán sau : Chứng minh rằng tam giác ABC có ba góc nhọn thì $\sin A + \sin B + \sin C + \tan A + \tan B + \tan C > 2\pi$

2. $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1$

* Với $x > 0$ thì $\frac{\sin x}{x} < 1$ (xem ví dụ 2)

* Xét hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ liên tục trên nửa khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$.

* Ta có $f'(x) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

* Xét hàm số $g(x) = x \cdot \cos x - \sin x$ liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ và có

$g'(x) = -x \cdot \sin x < 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow g(x)$ liên tục và nghịch biến trên đoạn

$\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ và ta có $g(x) < g(0) = 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$

* Từ đó suy ra $f'(x) = \frac{g'(x)}{x^2} < 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(x)$ liên tục và nghịch

biến trên nửa khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$, ta có $f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Bài tập tương tự :

Chứng minh rằng với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ta luôn có:

1. $\tan x > x$
2. $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$
3. $2 \sin x + \tan x > 3x$
4. $\frac{3}{\frac{2}{\sin x} + \cot x} < x$

Ví dụ 2 : Chứng minh rằng :

1. $\sin x \leq x, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
2. $\sin x > x - \frac{x^3}{3!}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$
3. $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$
4. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Giải :

1. $\sin x \leq x, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

* Xét hàm số $f(x) = \sin x - x$ liên tục trên đoạn $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

* Ta có: $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow f(x)$ là hàm nghịch biến trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Suy ra $f(x) \leq f(0) = 0 \Leftrightarrow \sin x \leq x \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (đpcm).

2. $\sin x > x - \frac{x^3}{3!}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

* Xét hàm số $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ liên tục trên nửa khoảng $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

* Ta có: $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \Rightarrow f''(x) = -\sin x + x \geq 0 \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (theo câu 1)

$\Rightarrow f'(x) \geq f'(0) = 0 \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0 \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\Rightarrow \sin x > x - \frac{x^3}{3!}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ (đpcm)}.$$

$$3. \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$* \text{ Xét hàm số } g(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \text{ liên tục trên nửa khoảng } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$* \text{ Ta có: } g'(x) = -\sin x + x - \frac{x^3}{6} \leq 0 \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ (theo câu}$$

$$2) \Rightarrow g(x) \leq g(0) = 0 \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ (Đpcm)}.$$

$$4. \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{Theo kết quả câu 2, ta có: } \sin x > x - \frac{x^3}{6}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{x} > 1 - \frac{x^2}{6} \Rightarrow \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^3 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{216}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{24} \left(1 - \frac{x^2}{9}\right)$$

$$\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 1 - \frac{x^2}{9} > 0 \Rightarrow \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$\text{Mặt khác, theo câu 3: } 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} > \cos x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Suy ra } \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ (đpcm)}.$$

$$\text{Nhận xét: Ta có } 0 < \sin x < x \Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ nên}$$

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^\alpha \geq \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \quad \forall \alpha \leq 3. \text{ Do đó, ta có kết quả sau}$$

Chúng minh rằng: với $\forall \alpha \leq 3$, ta luôn có: $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^\alpha \geq \cos x \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Bài tập tương tự :

Chúng minh rằng :

$$1. \quad 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \quad \forall x \neq 0 \quad 2. \quad x \sin \frac{1}{x} > 1 - \frac{1}{6x^2}, \quad \forall x > 0$$

Ví dụ 3 : Chúng minh rằng $\frac{1}{\sin^2 x} < \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{4}{\pi^2}, \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Giải :

* Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$ liên tục trên nửa khoảng $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$.

* Ta có: $f'(x) = -\frac{2 \cos x}{\sin^3 x} + \frac{2}{x^3} = \frac{2(-x^3 \cos x + \sin^3 x)}{x^3 \sin^3 x}$.

Theo kết quả câu 4 - ví dụ 2, ta có: $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x, \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow -x^3 \cos x + \sin^3 x > 0, \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f'(x) > 0, \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{4}{\pi^2}, \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$$

Do vậy: $\frac{1}{\sin^2 x} < \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{4}{\pi^2}, \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ (đpcm).

Bài tập tương tự :

1. Chứng minh rằng : $\sin^2 x < \frac{4x}{\pi^2}(\pi - x)$ với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Chứng minh rằng : $\sin x > \frac{2}{\pi}x + \frac{x}{12\pi}(\pi - 4x^2)$ với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ví dụ 4 : Với $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng $2^{2 \cdot \sin x} + 2^{\tan x} > 2^{\frac{3}{2}x+1}$

Giải :

* Ta có: $2^{2 \cdot \sin x} + 2^{\tan x} \geq 2 \cdot \sqrt{2^{2 \sin x} \cdot 2^{\tan x}} = 2 \cdot 2^{\sin x + \frac{1}{2} \tan x}$

Ta chứng minh: $2^{\sin x + \frac{1}{2} \tan x} \geq 2^{\frac{3x}{2}} \Leftrightarrow \sin x + \frac{1}{2} \tan x \geq \frac{3}{2} x \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

* Xét hàm số $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \tan x - \frac{3x}{2}$ liên tục trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

* Ta có: $f'(x) = \cos x + \frac{1}{2 \cos^2 x} - \frac{3}{2} = \frac{2 \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 1}{2 \cos^2 x}$
 $= \frac{(\cos x - 1)^2 (2 \cos x + 1)}{2 \cos^2 x} \geq 0, \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên

$\left[0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0 \Rightarrow \sin x + \frac{1}{2} \tan x \geq \frac{3}{2} x, \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ (đpcm).

Ví dụ 5 : Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi số tự nhiên $n > 1$

$$\sqrt[n]{1 + \frac{\sqrt[n]{n}}{n}} + \sqrt[n]{1 - \frac{\sqrt[n]{n}}{n}} < 2$$

Giải :

* Đặt $x = \frac{\sqrt[n]{n}}{n} \in (0; 1), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

* Bất đẳng thức cần chứng minh là: $\sqrt[n]{1+x} + \sqrt[n]{1-x} < 2, \forall x \in (0; 1)$

* Xét hàm $f(x) = \sqrt[n]{1+x} + \sqrt[n]{1-x}, x \in [0; 1)$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}} - \frac{1}{\sqrt[n]{(1-x)^{n-1}}} \right) < 0, \forall x \in (0; 1)$

Vậy $f(x)$ giảm trên $(0; 1)$ nên $f(x) < f(0) = 2, \forall x \in (0; 1)$.

Ví dụ 6:

1. Cho $x \geq y \geq z \geq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$

2. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng:

$$x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x + y + z) \geq xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + zx(z^2 + x^2)$$

Giải :

1 Cho $x \geq y \geq z \geq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$

$$x \geq y \geq z \geq 0$$

$$* \text{ Xét hàm số: } f(x) = \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right).$$

$$* \text{ Ta có: } f'(x) = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{y} \right) - \left(\frac{y}{x^2} - \frac{z}{x^2} \right) = (y - z) \left(\frac{1}{yz} - \frac{1}{x^2} \right) \geq 0, \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ là hàm số đồng biến } \forall x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(y) = 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

2. Cho $x, y, z > 0$ Chứng minh rằng:

$$x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x + y + z) \geq xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + zx(z^2 + x^2).$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử: $x \geq y \geq z > 0$.

* Xét hàm số

$$f(x) = x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x + y + z) - xy(x^2 + y^2) - yz(y^2 + z^2) - zx(z^2 + x^2)$$

$$* \text{ Ta có } f'(x) = 4x^3 - 3x^2(y + z) + xyz + yz(x + y + z) - (y^3 + z^3)$$

$$\Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 6x(y + z) + 2yz$$

$$\Rightarrow f''(x) > 0 \text{ (do } x \geq y \geq z) \Rightarrow f'(x) \geq f'(y) = z^2y - z^3 = z^2(y - z) \geq 0 \text{ nên}$$

$f(x)$ là hàm số đồng

$$\text{biến.} \Rightarrow f(x) \geq f(y) = z^4 - 2z^3y + y^2z^2 = z^2(z - y)^2 \geq 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Ví dụ 7:

1. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geq \frac{3}{2}$.

2. Cho $0 < a \leq b \leq c$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} \leq 3 + \frac{(c-a)^2}{a(c+a)}.$$

Giải :

1. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geq \frac{3}{2}$

* Đặt $x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{b}, z = \frac{a}{c} \Rightarrow xyz = 1$ và bất đẳng thức đã cho

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq \frac{3}{2}.$$

* Giả sử $z \leq 1 \Rightarrow xy \geq 1$ nên có: $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \geq \frac{2}{1+\sqrt{xy}} = \frac{2\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}$

$\Rightarrow \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq \frac{2\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}} + \frac{1}{1+z} = \frac{2t}{1+t} + \frac{1}{1+t^2} = f(t)$ với

$t = \sqrt{z} \leq 1$

* Ta có: $f'(t) = \frac{2}{(1+t)^2} - \frac{2t}{(1+t^2)^2} \leq \frac{2(1-t)}{(1+t^2)^2} \leq 0$

$\Rightarrow f(t) \geq f(1) = \frac{3}{2}, \forall t \leq 1 \Rightarrow \text{đpcm.}$

2. Cho $0 < a \leq b \leq c$. Chứng minh rằng: $\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} \leq 3 + \frac{(c-a)^2}{a(c+a)}$

* Đặt $\frac{b}{a} = \alpha, \frac{c}{a} = x, 1 \leq \alpha \leq x$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở

thành $\frac{2}{\alpha+x} + \frac{2\alpha}{1+x} + \frac{2x}{1+\alpha} \leq \frac{x^2+x+4}{x+1}$

$\Leftrightarrow x^2+x+1 \geq \left(2\frac{x+1}{\alpha+x} + 2\alpha + \frac{2x(x+1)}{1+\alpha}\right)$

* Xét hàm số $f(x) = x^2+x+1 - \left(2\frac{x+1}{\alpha+x} + 2\alpha + \frac{2x(x+1)}{1+\alpha}\right), 1 \leq \alpha \leq x$

* Ta có: $f'(x) = 2x+1 - \frac{2(2x+1)}{\alpha+1} - 2\frac{\alpha-1}{(x+\alpha)^2}$

$f'(x) = (\alpha-1) \left[\frac{2x+1}{\alpha+1} - \frac{2}{(x+\alpha)^2} \right] \geq 0, 1 \leq \alpha \leq x$

Như vậy hàm $f(x)$ là đồng biến do đó $f(x) \geq f(\alpha) = \alpha^2 - 3\alpha + 3 - \frac{1}{\alpha}$

Nhưng $f'(\alpha) = 2\alpha - 3 + \frac{1}{\alpha^2} = \alpha + \alpha + \frac{1}{\alpha^2} - 3 \geq 3\sqrt[3]{\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{\alpha^2}} - 3 = 0$

$\Rightarrow f(x) \geq f(\alpha) \geq f(1) = 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$

Bài tập tự luyện:

1.

Cho hàm số $f(x) = 2 \sin x + \tan x - 3x$

- a) Chứng minh rằng hàm số đồng biến trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.
- b) Chứng minh rằng $2 \sin x + \tan x > 3x$ với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

2.

- a) Chứng minh rằng $\tan x > x$ với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
- b) Chứng minh rằng $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$ với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

3.

Cho hàm số $f(x) = \frac{4}{\pi}x - \tan x$ với mọi $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

- a) Xét chiều biến thiên của hàm số trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.
- b) Từ đó suy ra rằng $\frac{4}{\pi}x \geq \tan x$ với mọi $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

4.

Chứng minh rằng các bất đẳng thức sau :

- a) $\sin x < x$ với mọi $x > 0$
- b) $\sin x > x$ với mọi $x < 0$
- c) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ với mọi $x \neq 0$
- d) $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ với mọi $x > 0$
- e) $\sin x < x - \frac{x^3}{6}$ với mọi $x < 0$
- f) $\sin x + \tan x > 2x$ với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Dạng 6 : Dùng đơn điệu hàm số để giải và biện luận phương trình và bất phương trình .

Chú ý 1 :

Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn đơn điệu nghiêm cách trên D (hoặc luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên D) thì số nghiệm của phương trình : $f(x) = k$ sẽ không nhiều hơn một và $f(x) = f(y)$ khi và chỉ khi $x = y$.

Chú ý 2:

• Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn đơn điệu nghiêm cách trên D (hoặc luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên D) và hàm số $y = g(x)$ luôn đơn điệu nghiêm ngặt (hoặc luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến) trên D , thì số nghiệm trên D của phương trình $f(x) = g(x)$ không nhiều hơn một.

• Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp n trên D và phương trình

$f^{(k)}(x) = 0$ có m nghiệm, khi đó phương trình $f^{(k-1)}(x) = 0$ có nhiều nhất là $m + 1$ nghiệm.

Chú ý 3:

Nếu hàm số $y = f(x)$ xác định trên D và có $f''(x) > 0$ hoặc $f''(x) < 0$ trên I thì $f'(x)$ đồng biến hoặc luôn luôn nghịch biến trên I nên $f'(x) = 0$ nhiều nhất 1 nghiệm trên I suy ra $f(x)$ nhiều nhất 2 nghiệm trên I .

Ví dụ : Giải phương trình : $\sqrt{x} + \sqrt{3x+1} = x^2 + x + 1$.

Giải :

Điều kiện : $x \geq 0$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{3x+1} - (x^2 + x + 1)$ trên nửa khoảng $[0; +\infty)$.

Ta có : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} - 2x - 1$

Và $f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} - \frac{9}{4\sqrt{(3x+1)^3}} - 2 < 0, \forall x > 0$, suy ra phương trình

$f(x) = 0$ nhiều nhất 2 nghiệm và $f(0) = f(1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$ là 2 nghiệm của phương trình.

Ví dụ 1 : Giải các phương trình

1. $3x(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) + (4x + 2)(\sqrt{1 + x + x^2} + 1) = 0$

2. $x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}$

Giải :

1. $3x(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) + (4x + 2)(\sqrt{1 + x + x^2} + 1) = 0$ (1)

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (-3x)(2 + \sqrt{(-3x)^2 + 3}) = (2x + 1)(2 + \sqrt{(2x + 1)^2 + 3})$ (2)

Đặt $u = -3x, v = 2x + 1, u, v > 0$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow u(2 + \sqrt{u^2 + 3}) = v(2 + \sqrt{v^2 + 3}) \quad (3)$$

* Xét hàm số $f(t) = 2t + \sqrt{t^4 + 3t^2}$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$

* Ta có $f'(t) = 2 + \frac{2t^3 + 3t}{\sqrt{t^4 + 3t^2}} > 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Khi đó phương trình (3) $\Leftrightarrow f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow -3x = 2x + 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$

Vậy $x = -\frac{1}{5}$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

$$2. x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}.$$

Đặt $y = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}$. Khi đó phương trình cho

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = y \\ 7x^2 + 9x - 4 = y^3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = y \\ y^3 + y = x^3 + 3x^2 + 4x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = y \\ y^3 + y = (x+1)^3 + x + 1 \end{cases} \quad (I) \end{aligned}$$

(*) có dạng $f(y) = f(x+1) \quad (a)$

* Xét hàm $f(t) = t^3 + t, t \in \mathbb{R}$

* Vì $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên tập số thực $\mathbb{R}$.

Khi đó (a) $\Leftrightarrow y = x + 1$

$$\text{Hệ (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = y \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 - 6x + 5 = 0 \quad (**) \\ y = x + 1 \end{cases}$$

Giải phương trình (**) ta có tập nghiệm : $S = \left\{ 5, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right\}$.

Ví dụ 2 : Chứng minh rằng phương trình: $2x^2\sqrt{x-2} = 11$ có nghiệm duy nhất

Giải :

Cách 1 :

Xét hàm số $y = 2x^2\sqrt{x-2}$ liên tục trên nửa khoảng $[2; +\infty)$.

Ta có: $y' = \frac{x(5x-8)}{\sqrt{x-2}} > 0, \forall x \in (2; +\infty)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2\sqrt{x-2}) = +\infty$

Bảng biến thiên :

x		2		$+\infty$
y'			+	
y				$+\infty$

0

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị của hàm số $y = 2x^2\sqrt{x-2}$ luôn cắt đường thẳng $y = 11$ tại duy nhất một điểm. Do đó phương trình

$2x^2\sqrt{x-2} = 11$ có nghiệm duy nhất .

Cách 2:

Xét hàm số $y = f(x) = 2x^2\sqrt{x-2} - 11$ liên tục trên nửa khoảng $[2; +\infty)$.

Ta có $f(2) = -11, f(3) = 7$. Vì $f(2).f(3) = -77 < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(2; 3)$.

$f'(x) = \frac{x(5x-8)}{\sqrt{x-2}} > 0, \forall x \in (2; +\infty) \Rightarrow f(x)$ liên tục và đồng biến trên khoảng $(2; 3)$.

Vậy phương trình cho có nghiệm duy nhất thuộc khoảng $(2; 3)$.

Ví dụ 3 : Giải bất phương trình sau : $\sqrt{5x-1} + \sqrt{x+3} \geq 4$

Giải :

Điều kiện : $x \geq \frac{1}{5}$

* Xét hàm số $f(x) = \sqrt{5x-1} + \sqrt{x+3}$ liên tục trên nửa khoảng $\left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$

* Ta có : $f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x-1}} + \frac{1}{2\sqrt{x+3}} > 0, \forall x > \frac{1}{5} \Rightarrow f(x)$

là hàm số đồng biến trên nửa khoảng $\left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$ và $f(1) = 4$, khi đó bất phương

trình cho $\Leftrightarrow f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow x \geq 1$.

Vậy bất phương trình cho có nghiệm là $x \geq 1$.

Ví dụ 4 : Giải bất phương trình sau $3\sqrt{3-2x} + \frac{5}{\sqrt{2x-1}} - 2x \leq 6$

Giải :

Điều kiện: $\frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2}$

* Bất phương trình cho $\Leftrightarrow 3\sqrt{3-2x} + \frac{5}{\sqrt{2x-1}} \leq 2x + 6 \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) (*)$

* Xét hàm số $f(x) = 3\sqrt{3-2x} + \frac{5}{\sqrt{2x-1}}$ liên tục trên nửa khoảng $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$

* Ta có : $f'(x) = \frac{-3}{\sqrt{3-2x}} - \frac{5}{(\sqrt{2x-1})^3} < 0, \forall x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow f(x)$ là hàm

nghịch biến trên nửa đoạn $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

Hàm số $g(x) = 2x + 6$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = g(1) = 8$

- Nếu $x > 1 \Rightarrow f(x) < f(1) = 8 = g(1) < g(x) \Rightarrow (*)$ đúng
- Nếu $x < 1 \Rightarrow f(x) > f(1) = 8 = g(1) > g(x) \Rightarrow (*)$ vô nghiệm.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$.

Ví dụ 5 : Giải bất phương trình sau

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} \leq 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}$$

Giải :

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$.

Bất phương trình cho $\Leftrightarrow (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6})(\sqrt{2x-1} - 3) \leq 4 (*)$

- Nếu $\sqrt{2x-1} - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 5 \Rightarrow (*)$ luôn đúng.
- Nếu $x > 5$

* Xét hàm số $f(x) = (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6})(\sqrt{2x-1} - 3)$ liên tục trên khoảng $(5; +\infty)$

* Ta có:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x+2}} + \frac{1}{2\sqrt{x+6}}\right)(\sqrt{2x-1} - 3) + \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6}}{\sqrt{2x-1}} > 0, \forall x > 5$$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$ và $f(7) = 4$, do đó

$$(*) \Leftrightarrow f(x) \leq f(7) \Leftrightarrow x \leq 7.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $\frac{1}{2} \leq x \leq 7$.

Ví dụ 6 : Giải bất phương trình sau $\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} < 2\sqrt{3} + \sqrt{4 - x}$
Giải :

Điều kiện:
$$\begin{cases} 2x^3 + 3x^2 + 6x + 16 \geq 0 \\ 4 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4.$$

Bất phương trình cho

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4 - x} < 2\sqrt{3} \Leftrightarrow f(x) < 2\sqrt{3} \quad (*)$$

* Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4 - x}$ liên tục trên đoạn $[-2; 4]$.

* Ta có: $f'(x) = \frac{3(x^2 + x + 1)}{\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16}} + \frac{1}{2\sqrt{4 - x}} > 0, \forall x \in (-2; 4) \Rightarrow f(x)$

đồng biến trên nửa khoảng $(-2; 4)$ và $f(1) = 2\sqrt{3}$, do đó

$$(*) \Leftrightarrow f(x) < f(1) \Leftrightarrow x < 1.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $-2 \leq x < 1$.

Ví dụ 7 : Chứng minh rằng $x^4 - x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
Giải :

* Xét hàm số $f(x) = x^4 - x + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có $f'(x) = 4x^3 - 1$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

* Vì $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$, do đó

$$\min f(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) = \frac{1}{4\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + 1 > 0$$

Vậy $f(x) > 0, \forall x$.

Ví dụ 8 : Chứng minh rằng phương trình: $x^5 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}} - 2009 = 0$ có đúng hai nghiệm dương phân biệt.

Giai :

* Điều kiện: $x > \sqrt{2}$ (do $x > 0$).

* Xét hàm số : $f(x) = x^5 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}} - 2009$ với $x > \sqrt{2}$.

* Ta có $f'(x) = 5x^4 - \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2)^3}}$

$\Rightarrow f''(x) = 20x^3 + \frac{3x}{\sqrt{(x^2 - 2)^5}} > 0, \forall x > \sqrt{2}$

$\Rightarrow f'(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm $\Rightarrow f(x) = 0$ có nhiều nhất là hai nghiệm.

Mà: $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} f(x) = +\infty, f(\sqrt{3}) < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow f(x) = 0$ có hai nghiệm

$x_1 \in (\sqrt{2}; \sqrt{3})$ và $x_2 > \sqrt{3}$.

Ví dụ 9 : Giải hệ phương trình

$$\begin{aligned} 1. \begin{cases} \sqrt{2x+3} + \sqrt{4-y} = 4 & (1) \\ \sqrt{2y+3} + \sqrt{4-x} = 4 & (2) \end{cases} & \quad 3. \begin{cases} x^3 - 3x = y^3 - 3y & (1) \\ x^6 + y^6 = 1 & (2) \end{cases} \\ 2. \begin{cases} x^3 + 2x = y & (1) \\ y^3 + 2y = x & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Giải :

$$1. \begin{cases} \sqrt{2x+3} + \sqrt{4-y} = 4 & (1) \\ \sqrt{2y+3} + \sqrt{4-x} = 4 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $\begin{cases} -\frac{3}{2} \leq x \leq 4 \\ -\frac{3}{2} \leq y \leq 4 \end{cases}$.

Cách 1:

Trừ (1) và (2) ta được:

$$\sqrt{2x+3} - \sqrt{4-x} = \sqrt{2y+3} - \sqrt{4-y} \quad (3)$$

* Xét hàm số $f(t) = \sqrt{2t+3} - \sqrt{4-t}$ liên tục trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; 4\right]$.

* Ta có:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}} > 0, \forall x \in \left(-\frac{3}{2}; 4\right)$$

$$\Rightarrow (3) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$$

Thay $x = y$ vào (1), ta được:

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{4-x} = 4 \Leftrightarrow x+7+2\sqrt{(2x+3)(4-x)} = 16$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{-2x^2+5x+12} = 9-x \Leftrightarrow \begin{cases} 9-x \geq 0 \\ 9x^2-38x+33=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=\frac{11}{9} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}, \begin{cases} x=\frac{11}{9} \\ y=\frac{11}{9} \end{cases}.$

Cách 2:

Trừ (1) và (2) ta được:

$$(\sqrt{2x+3} - \sqrt{2y+3}) + (\sqrt{4-y} - \sqrt{4-x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x+3)-(2y+3)}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{2y+3}} + \frac{(4-y)-(4-x)}{\sqrt{4-y} + \sqrt{4-x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \left(\frac{2}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{2y+3}} + \frac{1}{\sqrt{4-y} + \sqrt{4-x}} \right) = 0 (*).$$

Vì $\frac{2}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{2y+3}} + \frac{1}{\sqrt{4-y} + \sqrt{4-x}} > 0$ nên $(*) \Leftrightarrow x = y$

Thay $x = y$ vào (1), ta được:

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{4-x} = 4 \Leftrightarrow x+7+2\sqrt{(2x+3)(4-x)} = 16$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{-2x^2+5x+12} = 9-x \Leftrightarrow \begin{cases} 9-x \geq 0 \\ 9x^2-38x+33=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=\frac{11}{9} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}, \begin{cases} x=\frac{11}{9} \\ y=\frac{11}{9} \end{cases}.$

$$2. \begin{cases} x^3 + 2x = y & (1) \\ y^3 + 2y = x & (2) \end{cases}$$

Cách 1 :

* Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

* Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} f(x) = y & (1) \\ f(y) = x & (2) \end{cases}$.

+ Nếu $x > y \Rightarrow f(x) > f(y) \Rightarrow y > x$ (do (1) và (2) dẫn đến mâu thuẫn).

+ Nếu $x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \Rightarrow y < x$ (mâu thuẫn).

Suy ra $x = y$, thế vào hệ ta được

$$x^3 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ vì } x^2 + 1 > 0.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Cách 2:

Trừ (1) và (2) ta được:

$$x^3 - y^3 + 3x - 3y = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + y^2 + xy + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y) \left[\left(x + \frac{y}{2} \right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 3 \right] = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Thế $x = y$ vào (1) và (2) ta được: $x^3 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

$$3. \begin{cases} x^3 - 3x = y^3 - 3y & (1) \\ x^6 + y^6 = 1 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra $-1 \leq x, y \leq 1$

$$(1) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \quad (*)$$

* Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ liên tục trên đoạn $[-1; 1]$, ta có

$$f'(t) = 3(t^2 - 1) \leq 0 \quad \forall t \in [-1; 1] \Rightarrow f(t) \text{ nghịch biến trên đoạn } [-1; 1]$$

* Do đó: $(*) \Leftrightarrow x = y$ thay vào (2) ta được nghiệm của hệ là:

$$x = y = \pm \frac{1}{\sqrt[6]{2}}.$$

Ví dụ 10 : Giải hệ phương trình

$$1. \begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} & (1) \\ 2x^2 - xy - 1 = 0 & (2) \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} & (1) \\ 2y = x^3 + 1 & (2) \end{cases}$$

Giải :

$$1. \begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} & (1) \\ 2x^2 - xy - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $x \neq 0, y \neq 0$. Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow (x - y) \left(1 + \frac{1}{xy} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

• $y = x$ phương trình (2) $\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

• $y = -\frac{1}{x}$ phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$.

Bình luận:

$$\text{Cách giải sau đây sai: } \begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} & (1) \\ 2x^2 - xy - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $x \neq 0, y \neq 0$.

* Xét hàm số

$$f(t) = t - \frac{1}{t}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow f'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Suy ra (1) $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$!

Sai do hàm số $f(t)$ đơn điệu trên 2 khoảng rời nhau (cụ thể

$$f(-1) = f(1) = 0).$$

$$2. \begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} & (1) \\ 2y = x^3 + 1 & (2) \end{cases}$$

Cách 1:

Điều kiện: $x \neq 0, y \neq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow x - y + \frac{x - y}{xy} = 0 \Leftrightarrow (x - y) \left(1 + \frac{1}{xy} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\bullet \quad x = y \text{ phương trình (2) } \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

- $y = -\frac{1}{x}$ phương trình (2) $\Leftrightarrow x^4 + x + 2 = 0$.

Xét hàm số $f(x) = x^4 + x + 2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{\sqrt[3]{4}}$.

$$f\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{4}}\right) = 2 - \frac{3}{4\sqrt[3]{4}} > 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$$

$\Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^4 + x + 2 = 0$ vô nghiệm.

Cách 2:

Điều kiện: $x \neq 0, y \neq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow x - y + \frac{x - y}{xy} = 0 \Leftrightarrow (x - y)\left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\bullet x = y \text{ phương trình (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

- $y = -\frac{1}{x}$ phương trình (2) $\Leftrightarrow x^4 + x + 2 = 0$.

• Với $|x| < 1 \Rightarrow x + 2 > 0 \Rightarrow x^4 + x + 2 > 0$.

• Với $|x| \geq 1 \Rightarrow x^4 \geq |x| \geq -x \Rightarrow x^4 + x + 2 > 0$.

Suy ra phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm phân biệt

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Bài tập tự luyện:

1. Giải phương trình:

$$a. \sqrt{3x+1} + \sqrt{x} + \sqrt{7x+2} = 4$$

$$b. \sqrt{5x^3-1} + \sqrt[3]{2x-1} + x = 4$$

2. Giải phương trình: $81 \sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{81}{256} (*)$

3. Giải bất phương trình:

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} \leq 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}$$

Dạng 7 : Dùng đơn điệu hàm số để giải và biện luận phương trình và bất phương trình chứa tham số.

Cho hàm số $f(x; m) = 0$ xác định với mọi $x \in I (*)$

- Biến đổi (*) về dạng $f(x) = f(m)$
- Xét hàm số $y = f(x)$ liên tục trên I
- Dùng tính chất đơn điệu của hàm số và kết luận.

Ví dụ 1: Tìm tham số thực m để phương trình $x + \sqrt{3x^2 + 1} = m$ có nghiệm thực.

Giải :

* Xét hàm số $f(x) = x + \sqrt{3x^2 + 1}$ và $y = m$

* Hàm số $f(x) = x + \sqrt{3x^2 + 1}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có : $f'(x) = 1 + \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{3x^2 + 1} + 3x}{\sqrt{3x^2 + 1}}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3x^2 + 1} = -3x \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 3x^2 + 1 = 9x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x = \frac{\pm 1}{\sqrt{6}} = \frac{\pm \sqrt{6}}{6} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{6}}{6}, f\left(\frac{-\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Bảng biến thiên : suy ra $f(x) \geq \frac{\sqrt{6}}{3}$ mà $f(x) = m$ do đó $m \geq \frac{\sqrt{6}}{3}$ thì phương trình cho có nghiệm thực.

Ví dụ 2 : Tìm tham số thực m để phương trình : $\sqrt[4]{x^2 + 1} - \sqrt{x} = m(1)$ có nghiệm thực.

Giải :

* Xét hàm số $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 1} - \sqrt{x}$ liên tục trên nửa khoảng $[0; +\infty)$.

* Ta có : $f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sqrt[4]{(x^2 + 1)^3}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) < 0$

Vì $\frac{x}{\sqrt[4]{(x^2 + 1)^3}} < \frac{x}{\sqrt[4]{x^6}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt[4]{(x^2 + 1)^3}} - \frac{1}{\sqrt{x}} < 0$ nên

$f'(x) < 0, \forall x > 0 \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ và

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, nên $0 < f(x) \leq 1, \forall x \in [0; +\infty)$.

Vậy, phương trình (1) có nghiệm thực trên nửa khoảng $[0; +\infty) \Leftrightarrow 0 < m \leq 1$

Ví dụ 3: Tìm tham số thực m để phương trình :

$$(4m - 3)\sqrt{x + 3} + (3m - 4)\sqrt{1 - x} + m - 1 = 0, (2) \text{ có nghiệm thực.}$$

Giải :

Điều kiện: $-3 \leq x \leq 1$.

$$* \text{ Phương trình (2)} \Leftrightarrow m = \frac{3\sqrt{x + 3} + 4\sqrt{1 - x} + 1}{4\sqrt{x + 3} + 3\sqrt{1 - x} + 1}$$

* Nhận thấy rằng:

$$\left(\sqrt{x + 3}\right)^2 + \left(\sqrt{1 - x}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{x + 3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{1 - x}}{2}\right)^2 = 1$$

* Nên tồn tại góc $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], t = \tan \frac{\varphi}{2}; t \in [0; 1]$ sao cho:

$$\sqrt{x + 3} = 2 \sin \varphi = 2 \frac{2t}{1 + t^2} \text{ và } \sqrt{1 - x} = 2 \cos \varphi = 2 \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$m = \frac{3\sqrt{x + 3} + 4\sqrt{1 - x} + 1}{4\sqrt{x + 3} + 3\sqrt{1 - x} + 1} \Leftrightarrow m = \frac{-7t^2 + 12t + 9}{-5t^2 + 16t + 7} = f(t), (3)$$

* Xét hàm số: $f(t) = \frac{-7t^2 + 12t + 9}{-5t^2 + 16t + 7}$ liên tục trên đoạn $t \in [0; 1]$. Ta có

$$f'(t) = \frac{-52t^2 - 8t - 60}{(-5t^2 + 16t + 7)^2} < 0, \forall t \in [0; 1] \Rightarrow f(t) \text{ nghịch biến trên đoạn } [0; 1]$$

$$\text{và } f(0) = \frac{9}{7}; f(1) = \frac{7}{9}$$

* Suy ra phương trình (2) có nghiệm khi phương trình (3) có nghiệm trên đoạn $t \in [0; 1]$ khi và chỉ khi: $\frac{7}{9} \leq m \leq \frac{9}{7}$.

Ví dụ 4: Tìm tham số thực m để bất phương trình

$$\sqrt{x^2 - 2x + 24} \leq x^2 - 2x + m \text{ có nghiệm thực trong đoạn } [-4; 6].$$

Giải :

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 - 2x + 24}, \forall x \in [-4; 6] \Rightarrow t \in [0; 5]$$

Bài toán trở thành tìm tham số thực m để bất phương trình $t^2 + t - 24 \leq m$ có nghiệm thực $t \in [0; 5]$

* Xét hàm số $f(t) = t^2 + t - 24$ liên tục trên đoạn $[0; 5]$.

* Ta có : $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in [0; 5] \Rightarrow f(t)$ liên tục và đồng biến trên đoạn $[0; 5]$

* Vậy bất phương trình cho có nghiệm thực trên đoạn $[0; 5]$ khi

$$\max_{t \in [0; 5]} f(t) \leq m \Leftrightarrow f(5) \leq m \Leftrightarrow 6 \leq m \Leftrightarrow m \geq 6$$

Bài tập tự luyện:

1. Tìm tham số thực m để phương trình : $mx + \sqrt{(m-1)x+2} = 1$ có nghiệm thực trên đoạn $[0; 1]$.

2. Tìm tham số thực m để bất phương trình: $\sqrt{x^2 - 4x + 5} \geq x^2 - 4x + m$ có nghiệm thực trên đoạn $[2; 3]$.

Dạng 8 : Dùng đơn điệu hàm số để chứng minh hệ thức lượng giác

Ví dụ : Chứng minh rằng : nếu tam giác ABC thỏa mãn hệ thức

$$\cos A + \cos B + \cos C + \frac{1}{\cos A + \cos B + \cos C} = \frac{13}{6} \text{ thì tam giác } ABC \text{ đều.}$$

Giải :

* Đặt : $t = \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \Rightarrow 1 < t \leq \frac{3}{2}$.

* Xét hàm số $f(t) = t + \frac{1}{t}$ hàm số liên tục trên nửa khoảng $\left(0; \frac{3}{2}\right]$.

* Ta có : $f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} > 0, \forall t \in \left(0; \frac{3}{2}\right] \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên nửa khoảng $\left(0; \frac{3}{2}\right]$, suy ra : $2 < f(t) \leq \frac{13}{6}$.

Đẳng thức $f(t) = \frac{13}{6}$ xảy ra khi $t = \cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}$ hay tam giác ABC đều.

Bài đọc thêm : HỆ HOÁN VỊ VÒNG QUANH

Định nghĩa: Là hệ có dạng:
$$\begin{cases} f(x_1) = g(x_2) \\ f(x_2) = g(x_3) \\ \dots\dots\dots \\ f(x_n) = g(x_1) \end{cases} \quad (\text{I})$$

Định lí 1: Nếu f, g là các hàm cùng tăng hoặc cùng giảm trên A và $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là nghiệm của hệ trên A thì $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

Định lí 2: Nếu f, g khác tính đơn điệu trên A và $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là nghiệm của hệ trên A thì $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ nếu n lẻ và $\begin{cases} x_1 = x_3 = \dots = x_{n-1} & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ x_2 = x_4 = \dots = x_n \end{cases}$

Ví dụ 1: Giải các hệ phương trình

$$\begin{aligned} 1. \begin{cases} y = \frac{2x}{1-x^2} \\ z = \frac{2y}{1-y^2} \\ x = \frac{2z}{1-z^2} \end{cases} & \quad 2. \begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0 \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0 \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Giải :

$$1. \begin{cases} y = \frac{2x}{1-x^2} \\ z = \frac{2y}{1-y^2} \\ x = \frac{2z}{1-z^2} \end{cases}$$

Giả sử $x > y > z$

Xét hàm số : $f(t) = \frac{2t}{1-t^2}$, xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Ta có

$$f(t) = \frac{2(t^2 + 1)}{(1-t^2)^2} > 0, \forall x \in D \Rightarrow f(t) \text{ luôn đồng biến trên } D.$$

Do đó : $x > y > z \Rightarrow f(x) > f(y) > f(z) \Rightarrow y > z > x$. Mâu thuẫn, do đó điều giả sử sai.

Tương tự $x < y < z$ không thỏa.

Vậy $x = y = z$

Hệ cho có nghiệm : $(x; y; z) = (0; 0; 0)$

$$2. \begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0 \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0 \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0 \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0 \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 = 9x^2 + 27x - 27 \\ z^3 = 9y^2 + 27y - 27 \\ x^3 = 9z^2 + 27z - 27 \end{cases}$$

Xét hàm số đặc trưng : $f(t) = 9t^2 - 27t + 27 \Rightarrow f'(t) = 18t - 27$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 18t - 27 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} f'(t) > 0, \forall t > \frac{3}{2} \\ f'(t) < 0, \forall t < \frac{3}{2} \end{cases}$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ và nghịch biến trên khoảng

$$\left(-\infty; \frac{3}{2}\right). \text{Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại } t = \frac{3}{2} \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{4}$$

$$\text{Và } f(t) \geq \frac{27}{4} \Leftrightarrow 9x^2 - 27x + 27 \geq \frac{27}{4}$$

$$\Rightarrow y^3 \geq \frac{27}{4} \Rightarrow y \geq \frac{3}{\sqrt[3]{4}} > \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{\sqrt[3]{4}} > \frac{3}{2} \\ z \geq \frac{3}{\sqrt[3]{4}} > \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x, y, z \text{ thuộc miền đồng biến, suy ra hệ phương trình } \begin{cases} f(x) = y \\ f(y) = z \\ f(z) = x \end{cases} \text{ là hệ hoán}$$

vi vòng quanh.

Không mất tính tổng quát giả sử

$$x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \Rightarrow y^3 \geq z^3 \Rightarrow y \geq z$$

$$\Rightarrow f(y) \geq f(z) \Rightarrow z^3 \geq x^3 \Rightarrow z \geq x$$

$$\Rightarrow x \geq y \geq z \geq x \Rightarrow x = y = z$$

Thay vào hệ ta có: $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0 \Rightarrow x = 3.$

Suy ra: $x = y = z = 3$

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình :

$$1. \begin{cases} \sin x - \sin y = 3x - 3y & (1) \\ x + y = \frac{\pi}{5} & (2) \\ x, y > 0 & (3) \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \log_2(1 + 3 \cos x) = \log_3(\sin y) + 2 \\ \log_2(1 + 3 \sin y) = \log_3(\cos x) + 2 \end{cases}$$

Giải :

$$1. \begin{cases} \sin x - \sin y = 3x - 3y & (1) \\ x + y = \frac{\pi}{5} & (2) \\ x, y > 0 & (3) \end{cases}$$

$$\text{Từ (2), (3)} \Rightarrow x, y \in \left(0; \frac{\pi}{5}\right)$$

$$(1) \Leftrightarrow \sin x - 3x = \sin y - 3y \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \sin t - 3t, t \in \left(0; \frac{\pi}{5}\right)$ ta có

$$f'(t) = \cos t - 3 < 0, t \in \left(0; \frac{\pi}{5}\right) \Rightarrow f(t) \text{ là hàm nghịch biến trên khoảng}$$

$$t \in \left(0; \frac{\pi}{5}\right) \text{ nên } (*) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$$

Với $x = y$ thay vào (2) ta tìm được $x = y = \frac{\pi}{10}$

Vậy $(x; y) = \left(\frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{10}\right)$ là nghiệm của hệ.

$$2. \begin{cases} \log_2(1 + 3 \cos x) = \log_3(\sin y) + 2 \\ \log_2(1 + 3 \sin y) = \log_3(\cos x) + 2 \end{cases}$$

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} \cos x > 0 \\ \sin y > 0 \end{cases}$$

Đặt $u = \cos x; v = \sin y$, ta có hệ:
$$\begin{cases} \log_2(1+3u) = \log_3(v) + 2(1) \\ \log_2(1+3v) = \log_3(u) + 2(2) \end{cases}$$

trừ vế theo vế ta được

$$\log_3(1+3u) + \log_3 u = \log_3(1+3v) + \log_3 v \Leftrightarrow f(u) = f(v) \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3(1+3t) + \log_3 t$, dễ thấy $f(t)$ là hàm đồng biến nên $(*) \Leftrightarrow u = v$.

Thay vào (1) ta được : $\log_3(1+3u) - \log_3 u = 2 \Leftrightarrow \frac{1+3u}{u} = 9 \Leftrightarrow u = \frac{1}{6}$

Vậy hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin y = \frac{1}{6} \\ \cos x = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \alpha + k2\pi \\ y = \pi - \alpha + k2\pi, \text{ trong đó} \\ x = \pm\beta + m2\pi \end{cases}$

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{1}{6}.$$

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} e^{y^2-x^2} = \frac{x^2+1}{y^2+1} \\ 3\log_3(x+2y+6) = 2\log_2(x+y+2) + 1 \end{cases}$$

Giải :

$$\begin{cases} e^{y^2-x^2} = \frac{x^2+1}{y^2+1} \\ 3\log_3(x+2y+6) = 2\log_2(x+y+2) + 1 \end{cases}$$

Điều kiện : $\begin{cases} x+2y+6 > 0 \\ x+y+2 > 0 \end{cases}$

Lấy $\ln 2$ vế của phương trình : $e^{y^2-x^2} = \frac{x^2+1}{y^2+1}$, ta được

$$\begin{aligned} y^2 - x^2 &= \ln \frac{x^2+1}{y^2+1} = \ln(x^2+1) - \ln(y^2+1) \\ \Leftrightarrow x^2 + 1 + \ln(x^2+1) &= y^2 + 1 + \ln(y^2+1) (*) \end{aligned}$$

Phương trình (*) có dạng $f(x^2 + 1) = f(y^2 + 1)(**)$

Xét hàm số : $f(t) = \ln t + t$ liên tục trên nửa khoảng $[1; +\infty)$, ta có

$$f'(t) = \frac{1}{t} + 1 > 0, \forall t \geq 1 \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên nửa khoảng } [1; +\infty).$$

$$\text{Do đó } (**) \Leftrightarrow x^2 + 1 = y^2 + 1 \Leftrightarrow x = \pm y.$$

• Với $x = -y$ thay vào phương trình $3 \log_3(x + 2y + 6) = 2 \log_2(x + y + 2) + 1$, ta được

$$\log_3(6 - x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 6 \\ 6 - x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = -3 \text{ thoả mãn bài toán.}$$

• Với $x = y$ thay vào phương trình $3 \log_3(x + 2y + 6) = 2 \log_2(x + y + 2) + 1$, ta được

$$3 \log_3(x + 2) = 2 \log_2(x + 1), x > -1.$$

$$\text{Đặt } 3 \log_3(x + 2) = 2 \log_2(x + 1) = 6u \Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 3^{2u} \\ x + 1 = 2^{3u} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 + 2^{3u} = 3^{2u} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^u + \left(\frac{8}{9}\right)^u = 1$$

Xét hàm số $g(u) = \left(\frac{1}{9}\right)^u + \left(\frac{8}{9}\right)^u$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $g(1) = 1$ nên

$$u = 1 \text{ là nghiệm duy nhất của phương trình } \left(\frac{1}{9}\right)^u + \left(\frac{8}{9}\right)^u = 1.$$

Với $u = 1 \Rightarrow (x; y) = (7; 7)$ thoả mãn hệ phương trình.

Ví dụ 4: Hãy xác định tất cả các nghiệm của hệ phương trình (ẩn $(x; y)$) sau:

$$\begin{cases} x^2 + y^3 = 29 & (1) \\ \log_3 x \cdot \log_2 y = 1 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^3 = 29 & (1) \\ \log_3 x \cdot \log_2 y = 1 & (2) \end{cases} \text{ . Học sinh giỏi Quốc Gia năm 2008.}$$

Dễ thấy, nếu $(x; y)$ là các nghiệm của hệ cho thì $x > 1, y > 1$ (3)

Đặt $\log_3 x = t, t > 0$ (do (3)). Khi đó, $x = 3^t$ và từ phương trình (2) có $y = 2^{\frac{1}{t}}$.

Khi đó phương trình (1) $\Leftrightarrow 9^t + 8^{\frac{1}{t}} = 29$ (4).

Số nghiệm của hệ bằng số nghiệm dương của phương trình (4)

Xét hàm số $f(t) = 9^t + 8^{\frac{1}{t}-29}$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$. Ta có

$$f'(t) = 9^t \cdot \ln 9 - \frac{8^{\frac{1}{t}} \cdot \ln 8}{t^2}.$$

Trên khoảng $(0; +\infty)$, $y = 8^{\frac{1}{t}} \cdot \ln 8$ và $y = \frac{1}{t^2}$ là các hàm nghịch biến và chỉ nhận giá trị dương.

Do đó trên khoảng $(0; +\infty)$, $y = \frac{8^{\frac{1}{t}} \cdot \ln 8}{t^2}$ là hàm đồng biến. Suy ra, $f'(t)$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

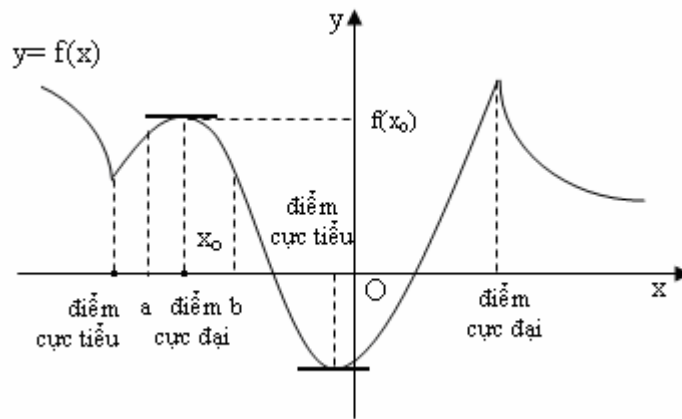
Vì $f'\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f'(1) = 18(\ln 9 - \ln 2^{256})(\ln 27 - \ln 16) < 0$ nên $\exists t_0 \in (0; 1)$ sao cho $f'(t_0) = 0$.

Do đó, ta có bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

t	0	t_0	1	$+\infty$
$f'(t)$	-	0		+
$f(t)$	$+\infty$	$f(t_0)$	-12	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình (4) có đúng hai nghiệm dương. Vì vậy, hệ phương trình cho có tất cả hai nghiệm.

Bài 2: CỰC TRỊ HÀM SỐ



2.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm cực trị hàm số :

Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp D ($D \subset \mathbb{R}$) và $x_0 \in D$

a) x_0 được gọi là một **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$

chứa điểm x_0 sao cho: $\begin{cases} (a; b) \subset D \\ f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (a; b) \setminus \{x_0\} \end{cases}$. Khi đó $f(x_0)$ được

gọi là **giá trị cực đại** của hàm số f .

b) x_0 được gọi là một **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$

chứa điểm x_0 sao cho: $\begin{cases} (a; b) \subset D \\ f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (a; b) \setminus \{x_0\} \end{cases}$. Khi đó $f(x_0)$ được

gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số f .

Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **cực trị**

Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì người ta nói rằng hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 .

Như vậy : Điểm cực trị phải là một điểm trong của tập hợp D ($D \subset \mathbb{R}$)

Nhấn mạnh : $x_0 \in (a; b) \subset D$ nghĩa là x_0 là một điểm trong của D :

Ví dụ : Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ xác định trên $[0; +\infty)$. Ta có $f(x) > f(0)$

với mọi $x > 0$ nhưng $x = 0$ không phải là điểm cực tiểu vì tập hợp $[0; +\infty)$

không chứa bất kì một lân cận nào của điểm 0.

Chú ý :

- Giá trị cực đại (cực tiểu) $f(x_0)$ nói chung không phải là GTLN (GTNN) của f trên tập hợp D .
- Hàm số có thể đạt cực đại hoặc cực tiểu tại nhiều điểm trên tập hợp D . Hàm số cũng có thể không có điểm cực trị.
- x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì điểm $(x_0, f(x_0))$ được gọi là **điểm cực trị của đồ thị** hàm số f .

2. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị:

Định lý 1: Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 . Khi đó, nếu f có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$

Chú ý :

- Đạo hàm f' **có thể** bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số f không đạt cực trị tại điểm x_0 .
- Hàm số **có thể** đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm.
- Hàm số chỉ **có thể** đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0, hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm.
- Hàm số đạt cực trị tại x_0 và nếu đồ thị hàm số có tiếp tuyến tại điểm $(x_0, f(x_0))$ thì tiếp tuyến đó song song với trục hoành.

Ví dụ : Hàm số $y = |x|$ và hàm số $y = x^3$

3. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị:

Định lý 2: Giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó :

- a) Nếu $\begin{cases} f'(x) < 0, x \in (a; x_0) \\ f'(x) > 0, x \in (x_0; b) \end{cases}$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0 . Nói một cách khác, nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua điểm x_0 thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

x	a	x_0	b
$f'(x)$		–	+
$f(x)$	$f(a)$	$f(x_0)$	$f(b)$

b) Nếu $\begin{cases} f'(x_0) > 0, x \in (a; x_0) \\ f'(x_0) < 0, x \in (x_0; b) \end{cases}$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0 . Nói một cách khác, nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm x_0 thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0 .

x	a	x_0	b
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$f(a)$	$f(x_0)$	$f(b)$

Định lý 3: Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 , $f'(x_0) = 0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0 .

- a) Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0 .
- b) Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

Chú ý:

Không cần xét hàm số f có hay không có đạo hàm tại điểm $x = x_0$ nhưng không thể bỏ qua điều kiện "hàm số liên tục tại điểm x_0 "

Ví dụ : Hàm số $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{khi } x \leq 0 \\ x & \text{khi } x > 0 \end{cases}$ không đạt cực trị tại $x = 0$. Vì

hàm số không liên tục tại $x = 0$.

2.1 DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.

Dạng 1 : Tìm các điểm cực trị của hàm số .

Quy tắc 1: Áp dụng định lý 2

- Tìm $f'(x)$
- Tìm các điểm $x_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.
- Xét dấu của $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì hàm số có cực trị tại điểm x_0 .

Quy tắc 2: Áp dụng định lý 3

- Tìm $f'(x)$
- Tìm các nghiệm $x_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ của phương trình $f'(x) = 0$.
- Với mỗi x_i tính $f''(x_i)$.
 - Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i .
 - Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i .

Ví dụ 1 : Tìm cực trị của các hàm số :

1. $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$

2. $y = -x^4 + 6x^2 - 8x + 1$

Giải :

1. $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có: $y' = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2 \geq 0 \forall x \Rightarrow$ Hàm số không có cực trị.

Chú ý:

* Nếu y' không đổi dấu thì hàm số không có cực trị.

* Đối với hàm bậc ba thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt là điều cần và đủ để hàm có cực trị.

2. $y = -x^4 + 6x^2 - 8x + 1$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có: $y' = -4x^3 + 12x - 8 = -4(x-1)^2(x+2)$

$y' = 0 \Leftrightarrow -4(x-1)^2(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$

* Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	25			$-\infty$

Vậy, hàm đạt cực đại tại $x = -2$ với giá trị cực đại của hàm số là $y(-2) = 25$, hàm số không có cực tiểu.

Bài tập tự luyện:

Tìm cực trị của các hàm số :

1. $y = \frac{4x^2 - 3x}{x - 1}$

2. $y = \frac{4x^2 + 4x - 1}{2x^2 + 4x + 3}$

Ví dụ 2 : Tìm cực trị của các hàm số :

1. $y = x\sqrt{4 - x^2}$

4. $y = 2x + 1 - \sqrt{2x^2 - 8}$

2. $y = 2x - \sqrt{x^2 - 3}$	5. $y = \frac{1}{2} \left(x - \sqrt{12 - 3x^2} \right)$
3. $y = \sqrt{-x^3 + 3x^2}$	

Giải :

$$1. y = f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-2; 2]$

$$* \text{ Ta có } y' = \frac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}}, x \in (-2; 2)$$

Hàm số không có đạo hàm tại các điểm $x = -2, x = 2$.

Suy ra, trên khoảng $(-2; 2): y' = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$

Bảng xét dấu y'

x	-2	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$

y' đổi dấu từ âm sang dương khi x qua điểm $-\sqrt{2}$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -\sqrt{2}, y(-\sqrt{2}) = -2$;

y' đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm $\sqrt{2}$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \sqrt{2}, y(\sqrt{2}) = 2$.

$$2. y = 2x - \sqrt{x^2 - 3}$$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty)$.

$$* \text{ Ta có: } y' = 2 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}} = \frac{2\sqrt{x^2 - 3} - x}{\sqrt{x^2 - 3}}, x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty).$$

Hàm số không có đạo hàm tại các điểm $x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$.

Suy ra, trên mỗi khoảng $(-\infty; -\sqrt{3}), (\sqrt{3}; +\infty): y' = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty) \\ 2\sqrt{x^2 - 3} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < \sqrt{3} \\ 4(x^2 - 3) = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Tương tự trên suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 2, y(2) = 3$, hàm số không có cực đại.

$$3. y = \sqrt{-x^3 + 3x^2}$$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên nửa khoảng $(-\infty; 3]$.

* Ta có: $y' = \frac{-3(x^2 - 2x)}{2\sqrt{-x^3 + 3x^2}}, x < 3, x \neq 0$

Hàm số không có đạo hàm tại các điểm $x = 0, x = 3$.

Suy ra, trên mỗi khoảng $(-\infty; 3): y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	3
y'	$-$	$\parallel$	$+$	$0 \quad - \quad \parallel$
y	$+\infty$	0	2	0

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2, y(2) = 2$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = 0, y(0) = 0$.

Chú ý:

* Ở bài 2 ví dụ 2 mặc dù $x = \pm\sqrt{3}$ là điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm tuy nhiên hàm số lại không xác định trên bất kì khoảng $(a; b)$ nào của hai điểm này nên hai điểm này không phải là điểm cực trị của hàm số.

* Tương tự vậy thì $x = 3$ của hàm số ở câu 3 cũng không phải là điểm cực trị nhưng $x = 0$ lại là điểm cực trị của hàm số.

4. $y = 2x + 1 - \sqrt{2x^2 - 8}$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên nửa khoảng $(-\infty; -2], [2; +\infty)$.

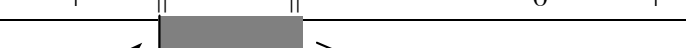
* Ta có: $y' = 2 - \frac{2x}{\sqrt{2x^2 - 8}}, x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Hàm số không có đạo hàm tại các điểm $x = -2, x = 2$.

Suy ra, trên các khoảng $(-\infty; -2), (2; +\infty): y' = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \\ \sqrt{2x^2 - 8} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 2 \\ x^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}.$$

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	2	$2\sqrt{2}$	$+\infty$	
y'	$+$	$\parallel$	$\parallel$	$-$	0	$+$
y						

Trên khoảng $(2; 2\sqrt{2}) : y' < 0$, trên khoảng $(2\sqrt{2}; +\infty) : y' > 0$ điểm cực tiểu là $(2\sqrt{2}; 3\sqrt{2} + 1)$.

$$5. y = \frac{1}{2} \left(x - \sqrt{12 - 3x^2} \right)$$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-2; 2]$.

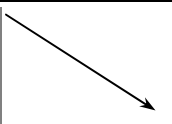
$$* \text{ Ta có: } y' = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{12 - 3x^2} + 3x}{\sqrt{12 - 3x^2}} \right), \forall x \in (-2; 2)$$

Hàm số không có đạo hàm tại các điểm $x = -2, x = 2$.

Suy ra, trên khoảng $(-2; 2) : y' = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-2; 2) \\ \sqrt{12 - 3x^2} = -3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x \leq 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$$

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1	2	$+\infty$	
y'		$\parallel$	$-$	0	$+$	$\parallel$
y						

Trên khoảng $(-2; -1) : y' < 0$, trên khoảng $(-1; 2) : y' > 0$ suy ra điểm cực tiểu là $(-1; -2)$.

Bài tập tương tự :

Tìm cực trị của các hàm số :

$$1. y = x + 1 + \sqrt{2x^2 - 8}$$

$$3. y = x + 2\sqrt{x^2 + x + 1}$$

$$2. y = \frac{x}{2} + \sqrt{x^2 + 3}$$

$$4. y = x\sqrt{16 - x^2} + (x - 1)\sqrt{x}$$

Ví dụ 3 : Tìm cực trị của các hàm số :

$$1. y = f(x) = |x|$$

$$2. y = f(x) = |x|(x + 2)$$

$$3. y = f(x) = \sqrt{|x|}(x - 3)$$

Giải :

$$1. y = f(x) = |x|$$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$y = \begin{cases} x & \text{ khi } x \geq 0 \\ -x & \text{ khi } x < 0 \end{cases}.$$

* Ta có $y' = \begin{cases} 1 & \text{ khi } x > 0 \\ -1 & \text{ khi } x < 0 \end{cases}$

Trên khoảng $(-\infty; 0)$: $y' < 0$, trên khoảng $(0; +\infty)$: $y' > 0$.

* Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	$\parallel$	$+$	
y	$+\infty$				$+\infty$

Hàm số đạt điểm cực tiểu tại điểm $x = 0, f(0) = 0$.

$$2. y = f(x) = |x|(x + 2) = \begin{cases} x(x + 2) & \text{ khi } x \geq 0 \\ -x(x + 2) & \text{ khi } x < 0 \end{cases}$$

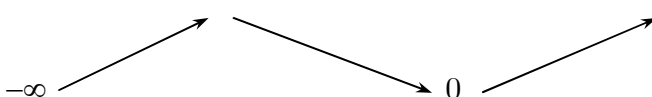
* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có $y' = \begin{cases} 2x + 2 > 0 & \text{ khi } x > 0 \\ -2x - 2 & \text{ khi } x < 0 \end{cases}$

Hàm số liên tục tại $x = 0$, không có đạo hàm tại $x = 0$.

Trên khoảng $(-\infty; 0)$: $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$, trên khoảng $(0; +\infty)$: $y' > 0$.

* Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$
y	$-\infty$					$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1, f(-1) = 1$, hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0, f(0) = 0$.

$$3. y = f(x) = \sqrt{|x|}(x - 3)$$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}(x - 3) & \text{ khi } x \geq 0 \\ \sqrt{-x}(x - 3) & \text{ khi } x < 0 \end{cases}.$$

* Ta có $y' = \begin{cases} \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}} & \text{ khi } x > 0 \\ \frac{3-x}{2\sqrt{-x}} + \sqrt{-x} & \text{ khi } x < 0 \end{cases}$

Trên khoảng $(-\infty; 0): y' > 0$, trên khoảng $(0; +\infty): y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

* Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$
y		0		$+\infty$	
	$-\infty$		-2		

Hàm số đạt điểm cực đại tại điểm $x = 0, f(0) = 0$, hàm số đạt điểm cực tiểu tại điểm $x = 1, f(1) = -2$.

Bài tập tương tự :

Tìm cực trị của các hàm số :

- $y = |x+1| + x$
- $y = x^2 + x - |x^2 - 4|$
- $y = |x| + 2\sqrt{4-x^2}$
- $y = |2x-4| + \sqrt{2x^2-8}$
- $y = |x+3| + \sqrt{9x+x^2}$
- $y = 2|-x+1| + x - 2 + \sqrt{x-x^2}$

Ví dụ 4 : Tìm cực trị của các hàm số sau

- $y = 2 \sin 2x - 3$
- $y = 3 - 2 \cos x - \cos 2x$

Giải :

1. $y = 2 \sin 2x - 3$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có $y' = 4 \cos 2x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z},$$

$$y'' = -8 \sin 2x$$

$$y''\left(\frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}\right) = -8 \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \begin{cases} -8 & \text{ khi } k = 2n \\ 8 & \text{ khi } k = 2n + 1 \end{cases}$$

Vậy hàm số đạt cực đại tại các điểm $x = \frac{\pi}{4} + n\pi; y\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) = -1$ và đạt cực

đại tại $x = \frac{\pi}{4} + (2n+1)\frac{\pi}{2}; y\left(\frac{\pi}{4} + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = -5$

2. $y = 3 - 2 \cos x - \cos 2x$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có $y' = 2 \sin x + 2 \sin 2x = 2 \sin x (1 + 2 \cos x)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$y'' = 2 \cos x + 4 \cos 2x$$

$$y''\left(\pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi\right) = 6 \cos \frac{2\pi}{3} = -3 < 0. \text{ Hàm số đạt cực đại tại } x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi,$$

$$y\left(\pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi\right) = 4\frac{1}{2}$$

$$y''(k\pi) = 2 \cos k\pi + 4 > 0, \forall k \in \mathbb{Z}. \text{ Hàm số đạt cực tiểu tại}$$

$$x = k\pi, y(k\pi) = 2(1 - \cos k\pi)$$

Bài tập tương tự:

Tìm cực trị của các hàm số :

1. $y = x - 2 \sin^2 x.$

5. $y = x - 2 \sin^2 x.$

2. $y = x \tan x.$

6. $y = x \tan x.$

3. $y = \cos^2 x.$

7. $y = \cos^2 x.$

4. $y = 3 \cos x + \sqrt{3} \sin x.$

8. $y = 3 \cos x + \sqrt{3} \sin x.$

Ví dụ 5: Tìm cực trị của hàm số : $y = \cos x \sqrt{\sin x}$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Giải:

* Hàm số đã cho xác định và liên tục đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

* Ta có : $y' = -\sin x \sqrt{\sin x} + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x = \frac{1 - 3 \sin^2 x}{2\sqrt{\sin x}}.$

$$\text{Trên khoảng } \left(0; \frac{\pi}{2}\right): y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin^2 x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (*)$$

Tồn tại góc β sao cho $\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, khi đó $(*) \Leftrightarrow x = \beta.$

Với $\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ thì $\cos \beta = \frac{\sqrt{6}}{3}$ và $y(\beta) = \cos \beta \sqrt{\sin \beta} = \frac{\sqrt[4]{12}}{3}$

Bảng xét dấu y' :

x	0	β	$\frac{\pi}{2}$
y'	+	0	-

Hàm số đạt cực đại tại $x = \beta, y(\beta) = \frac{\sqrt[4]{12}}{3}$ với $\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài tập tương tự:

Tìm cực trị của các hàm số :

1. $y = (\cos 2x + 1) \sin 2x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

2. $y = 2 \cos \frac{x}{2} + 3 \cos \frac{x}{3}$ trên khoảng $(0; 20\pi)$.

3. $y = \cot x + 4x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

4. $y = \frac{\cos x + 2 \sin x + 3}{2 \cos x - \sin x + 4}$ trên khoảng $(-\pi; \pi)$.

Ví dụ 6: Tìm cực trị của hàm số : $y = |\cos^3 x + \sin^3 x| + 3 \sin 2x$.

Giải:

$$y = |\cos^3 x + \sin^3 x| + 3 \sin 2x = |(\cos x + \sin x)(1 - \cos x \sin x)| + 3 \sin 2x$$

$$\text{Vì } 1 - \cos x \sin x = \frac{1}{2}(2 - 2 \cos x \sin x) = \frac{1}{2}(2 - \sin 2x) > 0$$

$$\text{Nên } y = |\cos x + \sin x|(1 - \cos x \sin x) + 3 \sin 2x$$

$$\text{Đặt } t = |\cos x + \sin x| \Rightarrow \cos x \sin x = \frac{t^2 - 1}{2}, 0 \leq t \leq \sqrt{2}$$

$$\text{Khi đó } y = f(t) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}, 0 \leq t \leq \sqrt{2}$$

Ta có : $y' = \frac{3}{2}(-t^2 + 2t + 1) = \frac{3}{2}[2 - (t - 1)^2] > 0, \forall t \in [0; \sqrt{2}]$, suy ra hàm số không có cực trị.

Ví dụ 7: Tính đạo hàm của hàm số tại điểm $x = 0$ và chứng minh rằng hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, biết rằng hàm số $f(x)$ xác định bởi :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{1+x\sin^2 x} - 1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}.$$

Giải :

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x\sin^2 x} - 1}{x^2}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin^2 x}{x^2 \left[\sqrt[3]{(1+x\sin^2 x)^2} + \sqrt[3]{1+x\sin^2 x} + 1 \right]}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x\sin^2 x)^2} + \sqrt[3]{1+x\sin^2 x} + 1} = 0$$

Mặt khác $x \neq 0$, ta có :

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{(1+x\sin^2 x)^2} + \sqrt[3]{1+x\sin^2 x} + 1} \Rightarrow f(x) \geq 0 = f(0).$$

Vì hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Ví dụ 8 : Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$. Chứng minh rằng $f'(0) = 0$ nhưng hàm số $f(x)$ không đạt cực trị tại điểm 0.

Giải :

Ta có $\frac{f(x) - f(0)}{x} = x \sin \frac{1}{x}$ với mọi $x \neq 0$.

Với mọi $x \neq 0$: $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$ và $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ nên $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$. Do đó hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 0$ và $f'(0) = 0$.

Lấy một dãy $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, khi đó $f(x_n) = \frac{1}{(2n\pi)^2} \sin 2n\pi = 0, \forall n$.

Giả sử $(a; b)$ là một khoảng bất kỳ chứa điểm 0.

Vì $\lim_{x \rightarrow 0} x_n = 0$ nên với n đủ lớn $x_n \in (a; b)$ và do $f(x_n) = 0 = f(0), \forall n$, theo định nghĩa cực trị của hàm số, $x = 0$ không phải là một điểm cực trị của $f(x)$.

Dạng 2 : Tìm điều kiện để hàm số có cực trị.

Phương pháp: Sử dụng định lí 2 và định lí 3

Chú ý:

* Hàm số f (xác định trên D) có cực trị $\Leftrightarrow \exists x_0 \in D$ thỏa mãn hai điều kiện sau:

i) Tại đạo hàm của hàm số tại x_0 phải triệt tiêu hoặc hàm số không có đạo hàm tại x_0

ii) $f'(x)$ phải đổi dấu qua điểm x_0 hoặc $f''(x_0) \neq 0$.

* Nếu $f'(x)$ là một tam thức bậc hai hoặc triệt tiêu và cùng dấu với một tam thức bậc hai thì hàm có cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $f'(x)$ có hai nghiệm phân biệt thuộc tập xác định.

Ví dụ 1 : Tìm m để $y = mx^3 + 3x^2 + 12x + 2$ đạt cực đại tại điểm $x = 2$.

Giải :

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có : $y' = 3mx^2 + 6x + 12 \Rightarrow y'' = 6mx + 6$

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 12m + 24 = 0 \\ 12m + 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$ là giá trị cần tìm.

Chú ý : Ta có thể giải bài toán trên theo cách khác như sau

Để hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2$ thì $y'(2) = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

Với $m = -2$ ta có $y' = 3(-2x^2 + 2x + 4)$ ta thấy hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2$.

Bài tập tương tự :

1. Xác định giá trị tham số m để hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại $x = 2$.

2. Xác định giá trị tham số m để hàm số $y = f(x) = x^3 + (m + 3)x^2 + 1 - m$ đạt cực đại tại $x = -1$.

Ví dụ 2 : Với giá trị nào của m , hàm số

$y = 2(m^2 - 3)\sin x - 2m \sin 2x + 3m - 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = \frac{\pi}{3}$?

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có : $y' = 2(m^2 - 3)\cos x - 4m \cos 2x$,

$$y'' = -2(m^2 - 3)\sin x + 8m \sin 2x.$$

Điều kiện cần để hàm số y đạt cực tiểu tại điểm $x = \frac{\pi}{3}$ là $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = -3 \vee m = 1.$$

Điều kiện đủ để hàm số y đạt cực tiểu tại điểm $x = \frac{\pi}{3}$ là $y''\left(\frac{\pi}{3}\right) > 0$.

$$\text{Thật vậy, } y''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}(m^2 - 4m - 3)$$

$$+ m = -3, \text{ ta có } y''\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0. \text{ Do đó hàm số đạt cực đại tại điểm } x = \frac{\pi}{3}.$$

$$+ m = 1, \text{ ta có } y''\left(\frac{\pi}{3}\right) > 0. \text{ Do đó hàm số đạt cực tiểu tại điểm } x = \frac{\pi}{3}.$$

Vậy hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = \frac{\pi}{3}$ khi và chỉ khi $m = 1$.

Bài tập tương tự :

Ví dụ 3: Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 2}{mx - 1}$ có cực trị .

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{m}\right\}$

+ Nếu $m = 0$ thì $y = x^2 - 2 \Rightarrow$ hàm số có một cực trị

+ Nếu $m \neq 0$ hàm số xác định $\forall x \neq \frac{1}{m}$

* Ta có $y' = \frac{mx^2 - 2x + m}{(mx - 1)^2}$. Hàm số có cực trị khi phương trình

$$mx^2 - 2x + m = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } \frac{1}{m}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m^2 > 0 \\ m - \frac{1}{m} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 1.$$

Vậy $-1 < m < 1$ là những giá trị cần tìm.

Bài tập tương tự :

Tìm m để đồ thị của hàm số sau có cực trị :

$$1. y = x^3 - 3mx^2 + (m + 2)x + 3m + 4 \quad 3. y = x^4 - 2(m - 4)x^2 + 2m - 5$$

2. $y = \frac{x^2 - (m+1)x - m + 2}{x-1}$

4. $y = \frac{mx^2 - (m-2)x - 1}{x+2}$

Ví dụ 4: Chứng minh rằng với mọi giá trị của $m \in \mathbb{R}$, hàm số

$y = \frac{x^2 - m(m+1)x + m^3 + 1}{x-m}$ luôn có cực đại và cực tiểu.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

* Ta có:

$$y' = \frac{x^2 - 2mx + m^2 - 1}{(x-m)^2} = \frac{g(x)}{(x-m)^2}, \quad x \neq m, \quad g(x) = x^2 - 2mx + m^2 - 1$$

Dấu của $g(x)$ cũng là dấu của y' và $\Delta'_g = m^2 - (m^2 - 1) = 1 > 0, \forall m$.

Do đó $\forall m$ thì $g(x) = 0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = m-1, x_2 = m+1$ thuộc tập xác định.

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$m-1$	m	$m+1$	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

y' đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm $x_1 = m-1$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm $x_1 = m-1$

y' đổi dấu từ âm sang dương khi x qua điểm $x_2 = m+1$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x_2 = m+1$

Bài tập tương tự :

Ví dụ 5: Tìm m để hàm số $y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx + m$ có cực đại, cực tiểu.

Giải:

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có $y' = 3(m+2)x^2 + 6x + m$

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\text{hay } \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 \neq 0 \\ \Delta' = 9 - 3m(m+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ 3(-m^2 - 2m + 3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ -3 < m < 1 \end{cases}$$

Vậy giá trị m cần tìm là $-3 < m < 1, m \neq -2$.

Bài tập tương tự :

Tìm m để đồ thị của hàm số sau có một cực đại và cực tiểu :

$$1. y = \frac{(m-1)x^2 - (m-1)x + m}{x-1} \quad 2. y = \frac{1}{3}(m+1)x^3 + (m+1)x^2 + 2m+1$$

Ví dụ 6 : Tìm m để điểm $M(2;0)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số

$$y = -x^3 + mx^2 - 4.$$

Giải:

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có $y' = -3x^2 + 2mx$, $y'' = -6x + 2m$.

Điểm $M(2;0)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) < 0 \\ y(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12 + 4m = 0 \\ -12 + 2m < 0 \\ -8 + 4m - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m < 6 \\ m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$$

Bài tập tương tự :

1. Tìm m để hàm số $y = x^4 + (m+1)x^2 + m - 1$ có điểm cực tiểu $(-1;1)$.

2. Tìm m để hàm số $y = \frac{x^2 + (m-1)x + m - 2}{x+1}$ có điểm cực đại $(2;-2)$.

Ví dụ 7 : Xác định các giá trị của tham số k để đồ thị của hàm số

$$y = kx^4 + (k-1)x^2 + 1 - 2k \text{ chỉ có một điểm cực trị.}$$

Giải:

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có $y' = 4kx^3 - 2(k-1)x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2kx^2 + k - 1 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Hàm số chỉ có một cực trị khi phương trình $y' = 0$ có một nghiệm duy nhất và y' đổi dấu khi x đi qua nghiệm đó. Khi đó phương trình $2kx^2 + k - 1 = 0 \quad (*)$

vô nghiệm hay có nghiệm kép $x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k \neq 0 \\ \Delta' = -2k(k-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k < 0 \vee k \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \leq 0 \\ k \geq 1 \end{cases}$$

Vậy $k \leq 0 \vee k \geq 1$ là giá trị cần tìm .

Bài tập tương tự :

Ví dụ 8 : Cho hàm số $y = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 1$. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để :

1. Hàm số có ba cực trị.
2. Hàm số có cực tiểu mà không có cực đại.

Giải:

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có $y' = 4x^3 + 12mx^2 + 6(m+1)x = 2x(2x^2 + 6mx + 3(m+1))$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = 2x^2 + 6mx + 3m + 3 = 0 \end{cases}$$

Nhận xét:

* Nếu y có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq 0$, khi đó y' sẽ đổi dấu khi đi qua ba điểm $0, x_1, x_2$ khi đó hàm có hai cực tiểu và 1 cực đại.

* Nếu y có 1 nghiệm $x = 0$, khi đó y' chỉ đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi đi qua một điểm duy nhất nên hàm chỉ có một cực tiểu.

* Nếu y có nghiệm kép hoặc vô nghiệm thì y' chỉ đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi đi qua $x = 0$ nên hàm đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Từ trên ta thấy hàm số luôn có ít nhất một cực trị.

1. Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi y có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 3(3m^2 - 2m - 2) > 0 \\ y(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1-\sqrt{7}}{3} \cup m > \frac{1+\sqrt{7}}{3} \\ m \neq -1 \end{cases}.$$

2. Theo nhận xét trên ta thấy hàm chỉ có cực tiểu mà không có cực đại

$$\Leftrightarrow \text{hàm số không có ba cực trị} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{7}}{3} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{3}.$$

Chú ý:

1) Đối với hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

$$\text{Ta có } y' = 4ax^3 + 2bx = x(4ax^2 + b) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4ax^2 + b = 0 \end{cases} \quad (1)$$

* Hàm có ba cực trị $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} b \neq 0 \\ ab < 0 \end{cases}$.

Khi đó hàm có hai cực tiểu, một cực đại khi $a > 0$; hàm có hai cực đại, 1 cực tiểu khi $a < 0$.

* Hàm có một cực trị khi và chỉ khi (1) có nghiệm kép hoặc vô nghiệm hoặc có

1 nghiệm $x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab > 0 \\ b = 0 \end{cases}$. Khi đó hàm chỉ có cực tiểu khi $a > 0$

và chỉ có cực đại khi $a < 0$.

2) Đối với hàm số bậc bốn $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + d$,

Ta có: $y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4ax^2 + 3bx + 2c = 0 \end{cases} (2)$

* Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9b^2 - 32ac > 0 \\ c \neq 0 \end{cases}$. Khi đó hàm có hai cực tiểu, một cực đại khi $a > 0$; hàm có

hai cực đại, 1 cực tiểu khi $a < 0$.

* Hàm có một cực trị khi và chỉ khi (2) có nghiệm kép hoặc vô nghiệm hoặc có

1 nghiệm $x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9b^2 - 32ac < 0 \\ c = 0 \end{cases}$. Khi đó hàm chỉ có cực tiểu

khi $a > 0$ và chỉ có cực đại khi $a < 0$.

Bài tập tương tự :

Ví dụ 9 : Xác định m để đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - mx^2 + \frac{3}{2}$ có cực tiểu mà không có cực đại.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có $y' = 2x^3 - 2mx$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases} (*)$$

Hàm số có cực tiểu mà không có cực đại khi phương trình $y' = 0$ có một nghiệm duy nhất và y' đổi dấu khi x đi qua nghiệm đó. Khi đó phương trình

$x^2 = m (*)$ vô nghiệm hay có nghiệm kép $x = 0 \Leftrightarrow m \leq 0$

Vậy $m \leq 0$ là giá trị cần tìm.

Bài tập tương tự :

1. Xác định m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - mx^2 + 3$ có cực tiểu mà không có cực đại.

Ví dụ 10 : Tìm m để hàm số $y = mx^3 + 3mx^2 - (m - 1)x - 1$ không có cực trị.

Giải :

- * Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.
- * Ta có : $y' = 3mx^2 + 6mx - m + 1$ (*)
- * $m = 0$ khi đó (*) trở thành $y' = 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra hàm không có cực trị.
- * $m \neq 0$ khi đó để hàm không có cực trị thì $y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 3m(4m - 1) \leq 0 \Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{1}{4}$.

Vậy $0 \leq m \leq \frac{1}{4}$ thì hàm số không có cực trị.

Bài tập tương tự :

1. Tìm m để hàm số $y = \frac{mx^2 + x + m}{x + m}$ không có cực đại , cực tiểu .
2. Tìm m để hàm số $y = mx^3 + 3mx^2 - (m - 1)x - 1$ không có cực trị.

Ví dụ 11 : Tìm m để hàm số $y = -2x + 2 + m\sqrt{x^2 - 4x + 5}$ có cực đại.

Giải :

- * Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.
- * Ta có $y' = -2 + m \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}; \quad y'' = \frac{m}{\sqrt{(x^2 - 4x + 5)^3}}$.

Cách 1:

- + Nếu $m = 0$ thì $y = -2 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số không có cực trị.
- + $m \neq 0$ vì dấu của y'' chỉ phụ thuộc vào m nên để hàm có cực đại thì trước hết $y'' < 0 \Leftrightarrow m < 0$. Khi đó hàm số có cực đại $\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ có nghiệm (1).

Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{(x - 2)^2 + 1} = m(x - 2)$ (2) .

Đặt $t = x - 2$ thì (2) trở thành :

$$mt = 2\sqrt{t^2 + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 0 \\ (m^2 - 4)t^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 0 \\ t^2 = \frac{1}{m^2 - 4} \end{cases} \Rightarrow (1) \text{ có nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m < -2 \quad (\text{Do } m < 0).$$

Vậy $m < -2$ thì hàm số có cực đại.

Cách 2:

Hàm số đạt cực đại tại $x = x_0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a(x_0 - 2)}{\sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 5}} = 2 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 5}}{x_0 - 2} = \frac{a}{2} \\ m < 0 \end{cases} \quad (1)$$

Với $m < 0$ thì (1) $\Rightarrow x_0 < 2$.

Xét hàm số : $f(x_0) = \frac{\sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 5}}{x_0 - 2}, x_0 < 2$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x_0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 5}}{x_0 - 2} = -1, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x_0) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 5}}{x_0 - 2} = -\infty$$

Ta có $f'(x_0) = \frac{-2}{(x_0 - 2)^2 \sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 5}} < 0, \forall x_0 \in (-\infty; 2)$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		2
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$-\infty$

Phương trình (1) có nghiệm $x_0 < 2 \Leftrightarrow \frac{m}{2} < -1 \Leftrightarrow m < -2$

Ví dụ 12 :

- Tìm các hệ số a, b, c sao cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực trị bằng 0 tại điểm $x = -2$ và đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(1; 0)$.
- Tìm các hệ số a, b sao cho hàm số $f(x) = \frac{ax^2 + bx + ab}{ax + b}$ đạt cực trị tại điểm $x = 0$ và $x = 4$.

Giải :

- Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.
 - Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

Ví dụ 13: Tìm các hệ số a, b, c, d sao cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0, f(0) = 0$ và đạt cực đại tại điểm $x = 1, f(1) = 1$.

Giải :

- * Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.
- * Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$

- Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f''(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 2b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b > 0 \end{cases} \quad (1).$$

- Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f''(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 6a + 2b < 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a + b + c + d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \quad (3).$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $a = -2, b = 3, c = 0, d = 0$.

Ta kiểm tra lại $f(x) = -2x^3 + 3x^2$

Ta có $f'(x) = -6x^2 + 6x$, $f''(x) = -12x + 6$

$f''(0) = 6 > 0$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$

$f''(1) = -6 < 0$. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$

Vậy : $a = -2, b = 3, c = 0, d = 0$.

Bài tập tự luyện:

Dạng 3 : Tìm điều kiện để các điểm cực trị của hàm số thỏa mãn điều kiện cho trước.

Phương pháp:

- Trước hết ta tìm điều kiện để hàm số có cực trị,
- Biểu diễn điều kiện của bài toán thông qua tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số từ đó ta tìm được điều kiện của tham số.

Chú ý:

- * Nếu ta gặp biểu thức đối xứng của hoành độ các điểm cực trị và hoành độ các điểm cực trị là nghiệm của một tam thức bậc hai thì ta sử dụng định lý Viét.
- * Khi tính giá trị cực trị của hàm số qua điểm cực trị ta thường dùng các kết quả sau:

Định lý 1: Cho hàm đa thức $y = P(x)$, giả sử $y = (ax + b)P'(x) + h(x)$ khi đó nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số thì giá trị cực trị của hàm số là:

$y(x_0) = h(x_0)$ và $y = h(x)$ gọi là phương trình quỹ tích của các điểm cực trị.

Chứng minh: Giả sử x_0 là điểm cực trị của hàm số, vì $P(x)$ là hàm đa thức nên $P'(x_0) = 0 \Rightarrow y(x_0) = (ax_0 + b)P'(x_0) + h(x_0) = h(x_0)$ (đpcm).

Định lý 2: Cho hàm phân thức hữu tỉ $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ khi đó nếu x_0 là điểm cực

trị của hàm số thì giá trị cực trị của hàm số: $y(x_0) = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$.

Và $y = \frac{u'(x)}{v'(x)}$ là phương trình quỹ tích của các điểm cực trị.

Chứng minh: Ta có $y' = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$

$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow u'(x)v(x) - v'(x)u(x) = 0$ (*). Giả sử x_0 là điểm cực trị của

hàm số thì x_0 là nghiệm của phương trình (*) $\Rightarrow \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)} = \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = y(x_0)$.

Ví dụ 1 : Tìm m để đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m - 1)x + 2$ có 2 điểm cực trị dương.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có $y' = x^2 - 2mx + 2m - 1$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$ (*)

* Hàm số có hai điểm cực trị dương $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 2m + 1 > 0 \\ S = 2m > 0 \\ P = 2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m \neq 1 \end{cases}.$$

Vậy $\begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m \neq 1 \end{cases}$ là những giá trị cần tìm.

Bài tập tương tự :

1. Tìm m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - mx^2 + (m+6)x + 5$ có 2 điểm cực trị dương.

2. Tìm m để đồ thị của hàm số $y = \frac{2x^2 - mx + m - 2}{mx + 1}$ có 2 điểm cực trị âm.

Ví dụ 2 : Tìm m để đồ thị của hàm số $y = \frac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x - 1}$ có cực đại, cực tiểu và 2 điểm đó nằm về hai phía với trục Ox .

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

* Ta có $y' = \frac{mx^2 - 2mx - 5m - 1}{(x - 1)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow mx^2 - 2mx - 5m - 1 = 0 \quad (x \neq 1) \quad (*)$

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m(6m + 1) > 0 \\ -6m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{1}{6} \\ m > 0 \end{cases}.$$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm về hai phía trục Ox

$$\Leftrightarrow y(x_1) \cdot y(x_2) < 0.$$

Áp dụng kết quả định lí 2 ta có: $y(x_1) = 2m(x_1 - 1), y(x_2) = 2m(x_2 - 1)$

$$\Rightarrow y(x_1) \cdot y(x_2) = 4m^2 [x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1] = 4m(-2m - 1).$$

$$y(x_1) \cdot y(x_2) < 0 \Leftrightarrow 4m(-2m - 1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{1}{2} \\ m > 0 \end{cases}.$$

Vậy $\begin{cases} m < -\frac{1}{2} \\ m > 0 \end{cases}$ là những giá trị cần tìm.

Bài tập tương tự :

1. Tìm m để đồ thị của hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + (m-1)x + 3$ có cực đại, cực tiểu và 2 điểm đó nằm về hai phía với trục Ox .

2. Tìm m để đồ thị của hàm số $y = -\frac{(m+1)}{3}x^3 - mx^2 + 3m - 1$ có cực đại, cực tiểu và 2 điểm đó nằm về hai phía với trục Oy .

3. Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x - 1}, m \neq \frac{1}{6}$. Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu và hai điểm cực trị đó nằm về hai phía của trục hoành.

Ví dụ 3 : Tìm m để đồ thị của hàm số $(C_m) : y = 2x^3 + mx^2 - 12x - 13$ có điểm cực đại, cực tiểu và các điểm này cách đều trục Oy .

Giải:

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$

* Ta có $y' = 2(3x^2 + mx - 6) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + mx - 6 = 0$ (2)

Vì (2) luôn có hai nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số luôn có hai cực trị. Gọi x_1, x_2 là hoành độ hai cực trị, hai điểm cực trị cách đều trục tung

$$\Leftrightarrow |x_1| = |x_2| \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \text{ (vì } x_1 \neq x_2 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{-b}{a} = \frac{-m}{3} = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

Bài tập tương tự :

1. Tìm m để đồ thị của hàm số $(C_m) : y = -\frac{1}{3}x^3 + (2m-3)x^2 - (2m-3)x$ có điểm cực đại, cực tiểu và các điểm này cách đều trục Oy .

2. Tìm m để đồ thị của hàm số $(C_m) : y = \frac{x^2 - (m-1)x + m + 1}{x - 1}$ có điểm cực đại, cực tiểu và các điểm này cách đều trục Ox .

Ví dụ 4 : Tìm m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m^2 - 3m + 2)x + 4$ có hai điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía trục tung.

Giải :

* Hàm số cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$

* Ta có : $y' = 3x^2 - 2(2m+1)x + m^2 - 3m + 2$

Hàm số có hai điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía trục tung khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $x_1 < 0 < x_2$

$$\Leftrightarrow 3.y'(0) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$$

Vậy giá trị cần tìm là $1 < m < 2$.

Bài tập tương tự :

1. Tìm m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m^2 + 7m - 9)x - 1$ có hai điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía trục tung.
2. Tìm m để đồ thị của hàm số $y = -x^3 + (4m - 3)x^2 + (m^2 + 7m + 10)x + 3$ có hai điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía trục hoành.

Ví dụ 5 : Xác định giá trị tham số m để hàm số

$y = x^3 - 6x^2 + 3(m + 2)x - m - 6$ đạt cực đại và cực tiểu đồng thời hai giá trị cực trị cùng dấu.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$

* Ta có : $y' = 3x^2 - 12x + 3(m + 2)$.

Hàm số có cực đại , cực tiểu khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 36 - 9(m + 2) > 0 \Leftrightarrow 2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2$$

$$y = \frac{1}{3}(x - 2) \cdot [3x^2 - 12x + 3(m + 2)] + 2(m - 2)x + m - 2$$

$$y = \frac{1}{3}(x - 2) \cdot y' + 2(m - 2)x + m - 2$$

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số thì x_1, x_2

là nghiệm của phương trình $g(x) = 3x^2 - 12x + 3(m + 2) = 0$.

Trong đó :

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{3}(x_1 - 2) \cdot y'(x_1) + 2(m - 2)x_1 + m - 2 \\ y'(x_1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_1 = 2(m - 2)x_1 + m - 2$$

$$\begin{cases} y_2 = \frac{1}{3}(x_2 - 2) \cdot y'(x_2) + 2(m - 2)x_2 + m - 2 \\ y'(x_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_2 = 2(m - 2)x_2 + m - 2$$

Theo định lý Vi-ét , ta có : $x_1 + x_2 = 4, x_1x_2 = m + 2$

Theo bài toán : $y_1 \cdot y_2 > 0 \Leftrightarrow [2(m - 2)x_1 + m - 2][2(m - 2)x_2 + m - 2] > 0$

$$\Leftrightarrow (m - 2)^2 (2x_1 + 1)(2x_2 + 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow (m-2)^2 [4x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 1] > 0$$

$$\Leftrightarrow (m-2)^2 [4x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 1] > 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 (4m+17) > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{17}{4} \\ m \neq 2 \end{cases}$$

So với điều kiện bài toán, vậy $-\frac{17}{4} < m < 2$ là giá trị cần tìm.

Bài tập tương tự :

Ví dụ 6 : Xác định giá trị tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 - (m+1)x + 3m+2}{x-1}$ có hai điểm cực đại và cực tiểu cùng dấu.

Giải :

- * Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- * Ta có đạo hàm $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 2m - 1}{(x-1)^2}, x \neq 1$

Cách 1:

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$x \neq 1$ hay phương trình $g(x) = x^2 - 2x - 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm

phân biệt $x \neq 1$, khi đó $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+2 > 0 \\ -2m-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1 \quad (1)$

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số thì x_1, x_2 là nghiệm của $g(x) = 0$

$$\text{Khi đó: } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \sqrt{2m+2} \Rightarrow y_1 = 1 - m - 2\sqrt{2m+2} \\ x_2 = 1 + \sqrt{2m+2} \Rightarrow y_2 = 1 - m + 2\sqrt{2m+2} \end{cases}$$

Hai giá trị cực trị cùng dấu khi

$$y_1 \cdot y_2 > 0 \Leftrightarrow (1 - m - 2\sqrt{2m+2})(1 - m + 2\sqrt{2m+2}) > 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - m)^2 - 4(2m+2) > 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 10m - 7 > 0 \Leftrightarrow m < 5 - 4\sqrt{2} \vee m > 5 + 4\sqrt{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $-1 < m < 5 - 4\sqrt{2} \vee m > 5 + 4\sqrt{2}$

Cách 2 :

Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có đạo hàm

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 2m - 1}{(x-1)^2}, x \neq 1$$

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$x \neq 1$ hay phương trình $g(x) = x^2 - 2x - 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm

$$\text{phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 2 > 0 \\ -2m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1$$

Hai giá trị cực trị cùng dấu khi đồ thị của hàm số $y = 0$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt $x \neq 1$ hay phương trình

$$x^2 - (m+1)x + 3m + 2 = 0 \quad (x \neq 1) \text{ có hai nghiệm phân biệt } x \neq 1.$$

$$\text{Tức là} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m+1)^2 - 4(3m+2) > 0 \\ 1 - (m+1) + 3m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 10m - 7 > 0 \\ 2m + 2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 - 4\sqrt{2} \\ m > 5 + 4\sqrt{2} \\ m \neq -1 \end{cases}$$

So với điều kiện suy ra $\begin{cases} -1 < m < 5 - 4\sqrt{2} \\ m > 5 + 4\sqrt{2} \end{cases}$ là giá trị cần tìm.

Bài tập tương tự :

Ví dụ 7 : Tìm tham số $m > 0$ để hàm số $y = \frac{x^2 + m^2x + 2m^2 - 5m + 3}{x}$ đạt cực tiểu tại $x \in (0; 2m)$.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên khoảng $(0; 2m)$

* Ta có : $y' = \frac{x^2 - 2m^2 + 5m - 3}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}, x \neq 0, g(x) = x^2 - 2m^2 + 5m - 3$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x \in (0; 2m) \Leftrightarrow g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$x_1, x_2 (x_1 < x_2) \text{ thỏa } x_1 < 0 < x_2 < 2m \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 1.g(0) < 0 \\ 1.g(2m) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -2m^2 + 5m - 3 < 0 \\ 2m^2 + 5m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 1 \\ m > \frac{3}{2} \\ m < -3 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < m < 1 \\ m > \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Vậy giá trị m cần tìm là $\frac{1}{2} < m < 1 \vee m > \frac{3}{2}$.

Bài tập tương tự :

1. Tìm tham số m để hàm số $y = x^3 - m^2x^2 - 2x + 3$ đạt cực tiểu tại $x \in (m; 2m)$.

2. Tìm tham số m để hàm số $y = x^4 - (m-1)x^2 - 1$ đạt cực đại tại $x \in (1; m+1)$.

Ví dụ 8 : Tìm tham số thực m để đồ thị của hàm số :

$$y = \frac{1}{3}mx^3 + 3mx^2 + (3m+1)x - 2 \text{ có cực đại tại } x \in (-3; 0).$$

Giải :

- * Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.
- * Ta có $y' = mx^2 + 6mx + 3m + 1$
- + Nếu $m = 0$ thì $y' = 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số luôn tăng $\forall x \in \mathbb{R}$, do đó hàm số không có cực trị.

+ Nếu $m \neq 0$, ta có $\Delta' = m(6m-1)$.

* Bảng xét dấu

m	$-\infty$		0		$\frac{1}{6}$		$+\infty$
Δ'		+	0	-	0	+	

- Nếu $0 < m < \frac{1}{6}$ thì $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số luôn tăng $\forall x \in \mathbb{R}$, do đó hàm số không có cực trị.
- Nếu $m = \frac{1}{6}$ thì $y' = \frac{1}{6}x^2 + x + \frac{3}{2} = \frac{1}{6}(x+3)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số luôn tăng $\forall x \in \mathbb{R}$, do đó hàm số không có cực trị.
- Với $m < 0$ hoặc $m > \frac{1}{6}$, khi đó tam thức y' có hai nghiệm phân biệt

$$x_{1,2} = -3 \pm \frac{\sqrt{\Delta'}}{m} \quad (x_1 < x_2).$$

+ $m < 0$. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
y'			$-$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, suy ra x_2 là hoành độ cực đại của hàm số.

$$\text{Theo bài toán, ta có } -3 < x_2 < 0 \Leftrightarrow -3 < -3 - \frac{\sqrt{\Delta'}}{m} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta'} < -3m$$

$$\Leftrightarrow m(6m-1) < 9m^2 \Leftrightarrow 3m^2 + m > 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{3} \text{ (do } m < 0)$$

+ $m > \frac{1}{6}$, tương tự.

Bài tập tự luyện:

1. Tìm tham số thực m để đồ thị của hàm số : $y = \frac{mx^2 + x}{-x + 1}$ có cực đại tại $x \in (0;1)$ và có cực tiểu x ở ngoài khoảng đó.
2. Tìm tham số thực m để đồ thị của hàm số : $y = \frac{x^2 + m(x+1)}{x+2}$ có cực đại tại $x \in [0;1]$ và có cực tiểu x ở ngoài đoạn đó.
3. Tìm tham số thực m để đồ thị của hàm số : $y = (m+1)x^3 + mx^2 - x$ có một cực trị tại $x \in (-1;1)$.

Ví dụ 9 : Cho hàm số $y = \frac{x^2 + m(x+1)}{x+2}$, hãy tìm tham số m để hàm số đạt cực đại, cực tiểu tại các điểm có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức :

$$x_1^2 + x_2^2 = -6 \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right).$$

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.

* Ta có $y' = \frac{x^2 + 4x + m}{(x + 2)^2}, x \neq -2$

* Để hàm số đạt cực đại, cực tiểu tại các điểm có hoành độ x_1, x_2 thì phương trình $g(x) = x^2 + 4x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -2 khi đó

$$\begin{cases} \Delta = 4 - m > 0 \\ g(-2) = (-2)^2 + 4(-2) + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 4.$$

Theo định lý Vi-ét, ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1 \cdot x_2 = m \end{cases}$.

$$x_1^2 + x_2^2 = -6 \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = -6 \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 2m = \frac{24}{m} \\ 0 \neq m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m + 12 = 0 \\ 0 \neq m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 6 \\ 0 \neq m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Bài tập tương tự :

1. Tìm m để đồ thị của hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(3m - 1)x^2 + 2(m - 1)mx$ có cực đại, cực tiểu đồng thời hoành độ cực đại, cực tiểu x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức :

$$x_1 = x_2^2 + 3.$$

2. Tìm m để đồ thị của hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x - \frac{m}{3}$ có cực đại, cực tiểu đồng thời hoành độ cực đại, cực tiểu x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức :

$$x_1^2 = x_1 \cdot (x_2 - 5) + 12.$$

3. Tìm m để đồ thị của hàm số: $y = x + m + 1 + \frac{(m - 1)^2}{x - 1}; m \neq 1$ có cực đại, cực tiểu đồng thời hoành độ cực đại, cực tiểu x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức :

$$x_1 - x_2 = mx_1^2 - 1.$$

4. Tìm $m < 5, m \in \mathbb{Z}$ để đồ thị của hàm số:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3} \text{ có cực đại, cực tiểu đồng thời hoành độ}$$

$$\text{cực đại, cực tiểu } x_1, x_2 \text{ thỏa mãn hệ thức : } 2 \leq |x_1 - x_2| < 2\sqrt{7}.$$

5. Tìm $m \in \mathbb{Z}^+$ để đồ thị của hàm số:

$$y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + (m+1)^2 \text{ có cực đại } A(x_1, y_1), \text{ cực tiểu } B(x_2, y_2) \text{ thỏa mãn hệ thức : } (y_1 - y_2)(6 - 5m) > m^2(x_2 - x_1).$$

Ví dụ 10 : Tìm tham số m để hàm số $y = (x-m)(x^2 - 3x - m - 1)$ có cực đại và cực tiểu thỏa $|x_{CĐ} \cdot x_{CT}| = 1$.

Giải:

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có $y' = 3x^2 - 2(m+3)x + 2m - 1$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2(m+3)x + 2m - 1 = 0 \quad (1)$$

Hàm số có hai điểm cực trị thỏa mãn $|x_{CĐ} \cdot x_{CT}| = 1 \Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm x_1, x_2

$$\text{thỏa mãn: } |x_1 \cdot x_2| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 + 7 > 0 \\ |P| = \left| \frac{c}{a} \right| = \left| \frac{2m-1}{3} \right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases}.$$

Vậy $m = 2$ hoặc $m = -1$ là giá trị cần tìm.

Bài tập tương tự :

1. Tìm tham số m để hàm số $y = 3x^4 - mx^2 - 2$ có cực đại $A(0; -2)$ và cực

$$\text{tiểu } B, C \text{ sao cho } |x_C \cdot x_B| < \frac{m^2 + 4m - 4}{6}.$$

2. Tìm tham số m để hàm số $y = x^4 - 4mx^2 + 1$ có cực đại $A(0; 1)$ và cực tiểu

$$B, C \text{ sao cho } |x_C \cdot x_B| > 2(m^2 + 8m + 10).$$

Ví dụ 11 : Tìm tham số m để hàm số

$$y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3} \text{ có cực đại, cực tiểu đồng thời}$$

$$\text{hoành độ cực đại cực tiểu } x_1, x_2 \text{ thỏa } x_1 + 2x_2 = 1.$$

Giải:

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi y' đổi dấu hai lần qua nghiệm x , tức là phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - 3m(m-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2m^2 + 4m + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \frac{2-\sqrt{6}}{2} < m < \frac{2+\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

Theo định lý Vi – ét và yêu cầu bài toán, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 & (gt) \\ x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{3(m-2)}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3m-4}{m} \\ x_2 = \frac{2-m}{m} \\ \left(\frac{3m-4}{m}\right)\left(\frac{2-m}{m}\right) = \frac{3(m-2)}{m} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - 8m + 4 = 0 \ (m \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ m = 2 \end{cases}$$

So với điều kiện bài toán, vậy $m = \frac{2}{3} \vee m = 2$ là giá trị cần tìm.

Bài tập tương tự :

1. Tìm tham số m để hàm số $y = 3x^4 - mx^2 - 2$ có cực đại $A(0; -2)$ và cực

tiểu B, C sao cho $|x_C - x_B| < \sqrt{6(m^2 - m)}$.

2. Tìm tham số m để hàm số $y = x^4 - 4mx^2 + 1$ có cực đại $A(0; 1)$ và cực tiểu

B, C sao cho $|x_C - x_B| > \sqrt{2(2m - m^2)}$.

Ví dụ 12: Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{2x^2 + 3x + m - 2}{x + 2}$ có điểm cực đại và cực tiểu tại các điểm có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|y(x_2) - y(x_1)| = 8$

Giải :

$$y = \frac{2x^2 + 3x + m - 2}{x + 2} = 2x - 1 + \frac{m}{x + 2}$$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

* Với $x \neq -2, m \neq 0$, ta có

$$y' = 2 - \frac{m}{(x+2)^2} = \frac{2(x+2)^2 - m}{(x+2)^2} = \frac{g(x)}{(x+2)^2}, g(x) = 2(x+2)^2 - m$$

Đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu khi $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x qua các nghiệm đó, khi đó phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm

$$\text{phân biệt khác } -2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+2)^2 = m > 0 \\ 2(-2+2)^2 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$$

Khi đó ta có

$$\begin{cases} y(x_1) = 4x_1 + 3 \\ y(x_2) = 4x_2 + 3 \end{cases} \Rightarrow |y(x_2) - y(x_1)| = |(4x_2 + 3) - (4x_1 + 3)| = 4|x_2 - x_1|$$

$$|y(x_2) - y(x_1)| = 8 \Leftrightarrow 4|x_2 - x_1| = 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4 \quad (1)$$

$$\text{Mà } \begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1x_2 = \frac{8-m}{2} \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } (-4)^2 - 4\left(\frac{8-m}{2}\right) - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2$$

Bài tập tương tự :

1. Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m-2)x^2 - 2$ có điểm cực đại và cực tiểu tại các điểm có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|y(x_2) - y(x_1)| < 2$.

2. Tìm tham số m để hàm số $y = (m+1)x^4 - 2(m-1)x^2$ có 2 điểm cực tiểu khác $O(0;0)$ và hoành độ x_1, x_2 của cực tiểu thỏa mãn $|y(x_2) + y(x_1)| > 1$.

3. Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$ có điểm cực đại và cực tiểu tại các điểm có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|y(x_2) - y(x_1)| > 8$.

4.

Ví dụ 13: Tìm tất cả các giá trị của tham số m thì hàm số

$$y = \frac{x^2 + (m+2)x + 3m+2}{x+1} \text{ có giá trị cực trị, đồng thời } y_{CD}^2 + y_{CT}^2 > \frac{1}{2}.$$

Giải :

* Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

* Ta có : $y' = \frac{x^2 + 2x - 2m}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}, x \neq -1 \quad g(x) = x^2 + 2x - 2m$

Hàm số có cực đại , cực tiểu khi phương trình $g(x) = 0, x \neq -1$ có hai

nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 > 0 \\ -2m-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$

Gọi $A(x_1; y_1 = 2x_1 + m + 2), B(x_2; y_2 = 2x_2 + m + 2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số thì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $g(x) = 0, x \neq -1$

Theo định lý Vi-ét $x_1 + x_2 = -2, x_1 \cdot x_2 = -2m$

Theo bài toán : $y_{CN}^2 + y_{CT}^2 = y_1^2 + y_2^2 = (2x_1 + m + 2)^2 + (2x_2 + m + 2)^2$

$$y_1^2 + y_2^2 = 4(x_1^2 + x_2^2) + 4(m+2)(x_1 + x_2) + 2(m+2)^2$$

$$y_1^2 + y_2^2 = 4\left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right] + 4(m+2)(x_1 + x_2) + 2(m+2)^2$$

$$y_1^2 + y_2^2 = 4(4 + 4m) - 8(m+2) + 2(m+2)^2 = 2m^2 + 16m + 8$$

Xét $f(m) = 2m^2 + 16m + 8, m > -\frac{1}{2}, f'(m) = 4m + 16 > 0, \forall m > -\frac{1}{2}$

Do đó hàm số $f(m)$ đồng biến trên khoảng $m \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ và

$$f(m) > f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, m \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

Vậy $y_{CN}^2 + y_{CT}^2 > \frac{1}{2}, m \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Ví dụ 14 : Cho hàm số $y = \frac{x^2 + (m+1)x + m+1}{x+1}$. Gọi A, B là hai điểm cực trị , định m để diện tích tam giác OAB bằng 2. Với giá trị m vừa tìm được , tính khoảng cách từ O đến đường thẳng AB .

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

* Ta có $y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}, x \neq -1$

- Với $\forall m \in \mathbb{R}$ hàm số đã cho có điểm cực đại $A(-2; m-3)$ và điểm cực tiểu $B(0; m+1)$.

• Ta có :

$$\overrightarrow{OA}(-2; m-3) \Rightarrow OA = \sqrt{m^2 - 6m + 13}, \overrightarrow{OB}(0; m+1) \Rightarrow OB = |m+1| \text{ và}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -2 \cdot 0 + (m-3)(m+1) = (m-3)(m+1). \cos \widehat{AOB} = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{OA \cdot OB}$$

$$\Rightarrow \sin \widehat{AOB} = \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{AOB}} = \frac{\sqrt{(OA \cdot OB)^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2}}{OA \cdot OB}$$

• Diện tích $dt_{(\Delta OAB)} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \widehat{AOB} = \frac{1}{2} \sqrt{(OA \cdot OB)^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2}$

$$dt_{(\Delta OAB)} = \dots = |m+1| \Rightarrow dt_{(\Delta OAB)} = 2 \Leftrightarrow |m+1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = 1 \end{cases}$$

- Gọi d là khoảng cách từ O đến đường thẳng AB khi đó $AB = 2\sqrt{5}$ và

$$dt_{(\Delta OAB)} = \frac{1}{2} d \cdot AB \Rightarrow d = \frac{|m+1|}{\sqrt{5}}.$$

$$+ m = -3 \Rightarrow d = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$+ m = 1 \Rightarrow d = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Bài tập tự luyện:

1. Định m để đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{3}mx^3 + (3m-1)x^2 - 4x - 2$ có cực trị

A, B sao cho tam giác MAB diện tích bằng 1, biết $M(0;1)$.

2. Định m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có cực trị A, B, C sao cho tam giác ABC diện tích bằng 4.

Ví dụ 15 : Tìm tham số m để hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị là 3 đỉnh của một tam giác vuông cân.

Giải:

* Hàm số đã cho xác định và liên tục $\mathbb{R}$.

* Ta có $y' = 4x^3 - 4m^2x = 4x(x^2 - m^2)$.

Với $m \neq 0$ hàm số có ba cực trị .Khi đó tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0;1)$, $B(m;1-m^4)$, $C(-m;1-m^4)$.

Dễ thấy $AB = AC$ nên tam giác ABC vuông cân $\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$

$$\Leftrightarrow 2(m^2 + m^8) = 4m^2 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

Vậy $m = \pm 1$ là những giá trị cần tìm.

Bài tập tự luyện:

1. Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + (m-1)x + m$ có 2 điểm cực trị A, B sao cho ABO một tam giác vuông cân , với O là gốc tọa độ.

2. Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}(m-1)x^2 + m - 2$ có 3 điểm cực trị là 3 đỉnh của một tam giác vuông.

Ví dụ 16: Tìm m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có cực đại , cực tiểu đồng thời các điểm cực trị lập thành tam giác đều.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục $\mathbb{R}$.

* Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases} \quad (*)$$

Đồ thị hàm số có cực đại , cực tiểu khi $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x qua các nghiệm đó , khi đó phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow m > 0$

$$\text{Khi đó : } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow A(0; m^4 + 2m) \\ x = \pm\sqrt{m} \Rightarrow \begin{cases} B(-\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m) \\ C(\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m) \end{cases} \end{cases}$$

Hàm số có 3 cực trị A, B, C lập thành tam giác đều

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ AB = BC \end{cases} \Leftrightarrow AB^2 = BC^2 \Leftrightarrow m + m^4 = 4m$$

$$\Leftrightarrow m(m^3 - 3) = 0 \Leftrightarrow m = \sqrt[3]{3} (m > 0)$$

Vậy $m = \sqrt[3]{3}$ là giá trị cần tìm .

Bài tập tự luyện:

1. Tìm m để đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}(m-1)x^2 + m - m^2$ có cực đại , cực tiểu đồng thời các điểm cực trị lập thành tam giác đều.

2. Tìm m để đồ thị của hàm số $y = -x^3 + \frac{3}{2}m^2x^2$ có cực đại A , cực tiểu B đồng thời các điểm ABC cực trị lập thành tam giác đều, biết $C(-2; 3)$.

Ví dụ 17: Tìm a để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (C) có điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị (C) ở về hai phía khác nhau của đường tròn (phía trong và phía ngoài): $(C_a): x^2 + y^2 - 2ax - 4ay + 5a^2 - 1 = 0$.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục $\mathbb{R}$.

* Ta có : $y' = 3x^2 - 6x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x = 2 \Rightarrow y = -2 \end{cases}$$

Cách 1:

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $A(0; 2), B(2; -2)$. Hai điểm

$A(0; 2), B(2; -2)$ ở về hai phía của hai đường tròn (C_a) khi

$$\Leftrightarrow P_{A/(C_a)} \cdot P_{B/(C_a)} < 0 \Leftrightarrow (5a^2 - 8a + 3)(5a^2 + 4a + 7) < 0$$

$$\Leftrightarrow 5a^2 - 8a + 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{5} < a < 1$$

Cách 2 :

$$(C_a): (x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 1 \text{ có tâm } I(a; 2a) \text{ và bán kính } R = 1$$

$$\text{Ta có : } IB = \sqrt{(a - 2)^2 + (2a + 2)^2} = \sqrt{5a^2 + 4a + 8}$$

$$IB = \sqrt{5\left(a + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{36}{5}} \geq \frac{6}{\sqrt{5}} > 1 = R \Rightarrow \text{điểm } B \text{ nằm ngoài } (C_a),$$

do đó điểm A nằm trong đường tròn

$$(C_a) \Leftrightarrow IA < 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + (2 - 2a)^2} < 1 \Leftrightarrow 5a^2 - 8a + 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{5} < a < 1$$

Bài tập tự luyện:

1. Tìm m để đồ thị của hàm số $y = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$ (C) có điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị (C) ở về một phía khác nhau của đường tròn (phía trong hoặc phía ngoài): $(C_m): x^2 + y^2 + mx + 2my + m^2 - 2 = 0$.

2. Tìm m để đồ thị của hàm số $y = x^3 + mx^2 + 2m - 1$ (C_m) có điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị (C_m) ở về hai phía khác nhau của đường tròn (phía trong và phía ngoài): (C): $x^2 + y^2 = 4$.

Ví dụ 18 : Tìm m để đồ thị của hàm số: $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba cực trị. Đồng thời các điểm cực trị A, B, C của đồ thị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có : $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$$

Với $m > 0$: $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x đi qua các nghiệm đó.

* Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0; m - 1)$,

$$B(-\sqrt{m}; -m^2 + m - 1), C(\sqrt{m}; -m^2 + m - 1).$$

$$AB = AC = \sqrt{m^4 + m}, BC = 2\sqrt{m} \text{ và } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|y_B - y_A| \cdot |x_C - x_B| = m^2\sqrt{m}$$

$$R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S_{\triangle ABC}} = 1 \Leftrightarrow \frac{(m^4 + m)2\sqrt{m}}{4m^2\sqrt{m}} = 1 \Leftrightarrow m^3 - 2m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \end{cases}$$

Bài tập tương tự :

Tìm m để đồ thị của hàm số: $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}mx^2 + m + 1$ có ba cực trị A, B, C sao cho tam giác nội tiếp được trong đường tròn có bán kính $R = 1$.

Ví dụ 19: Tìm m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m^2x + m$ có cực đại, cực tiểu và các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Cách 1 :

* Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m^2 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m^2 = 0$ (1).

hàm số có cực trị $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \Delta' = 3(3 - m^2) > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < m < \sqrt{3}.$$

phương trình đường thẳng d' đi qua các điểm cực trị là :

$$y = \left(\frac{2}{3}m^2 - 2\right)x + \frac{1}{3}m^2 + m \Rightarrow \text{các điểm cực trị là :}$$

$$A(x_1; (\frac{2}{3}m^2 - 2)x_1 + \frac{1}{3}m^2 + 3m), B(x_2; (\frac{2}{3}m^2 - 2)x_2 + \frac{1}{3}m^2 + 3m).$$

Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng d và d'

$$\Rightarrow I\left(\frac{2m^2 + 6m + 15}{15 - 4m^2}; \frac{11m^2 + 3m - 30}{15 - 4m^2}\right).$$

A và B đối xứng qua d thì trước hết $d \perp d' \Leftrightarrow \frac{2}{3}m^2 - 2 = -2 \Leftrightarrow m = 0$ khi

đó $I(1; -2)$ và $A(x_1; -2x_1); B(x_2; -2x_2) \Rightarrow I$ là trung điểm của $AB \Rightarrow A$ và B đối xứng nhau qua d .

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

Cách 2 :

* Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = 3x^2 - 6x + m^2$.

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm

phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' = 9 - 3m^2 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$.

Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = 2$, $x_1 x_2 = \frac{m^2}{3}$.

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số và I là trung điểm của đoạn AB .

Đường thẳng AB có hệ số góc

$$k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^3 - x_1^3 - 3(x_2^2 - x_1^2) + m^2(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$k_{AB} = (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) + m^2$$

$$k_{AB} = 4 - \frac{m^2}{3} - 6 + m^2 = \frac{2m^2 - 6}{3}$$

Đường thẳng $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}(\Delta)$ có hệ số góc $k = \frac{1}{2}$

Hai điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ đối xứng nhau qua đường thẳng (Δ)

khi và chỉ khi $\begin{cases} AB \perp \Delta \\ I \in \Delta \end{cases}$

$$\bullet AB \perp \Delta \Leftrightarrow k_{AB} \cdot k = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2m^2 - 6}{3} \right) = -1 \Leftrightarrow m = 0$$

$$\bullet m = 0 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \Rightarrow A(0; 0) \\ x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = -4 \Rightarrow B(2; -4) \end{cases} \Rightarrow I(1; -2)$$

Dễ thấy $I(1; -2) \in \Delta$

Vậy $m = 0$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập tương tự :

Tìm m để đồ thị của hàm số $y = x^3 + (m - 4)x^2 - 4(m - 1)x + 4m + 1$ có cực đại, cực tiểu và các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y = x$.

Ví dụ 20: Tìm m để đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 + mx}{1 - x}$ có cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng 10.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\bullet \text{ Ta có } y' = \frac{-x^2 + 2x + m}{(1 - x)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m = 0 \quad (1) \quad (x \neq 1)$$

$$\text{Đồ thị hàm số có cực trị} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 + m > 0 \\ 1 - 2 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1.$$

Đường thẳng đi qua các điểm cực trị có phương trình $y = -2x - m \Rightarrow$ các điểm cực trị là: $A(x_1; -2x_1 - m), B(x_2; -2x_2 - m)$

$$\Rightarrow AB^2 = 5(x_1 - x_2)^2 = 100 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 + 4m - 20 = 0 \Leftrightarrow m = 4.$$

Vậy $m = 4$ là giá trị cần tìm.

Bài tập tương tự :

1. Tìm m để đồ thị của hàm số $y = \frac{mx^2 + x - m + 1}{x - 1}$ có cực trị và khoảng cách

giữa hai điểm cực trị bằng $\sqrt{3}$.

2. Tìm m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - mx^2 + x - 5m + 1$ có cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực trị bé hơn $\sqrt{2}$.

Ví dụ 21: Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 2mx + 2}{x + 1}$ có điểm cực đại, điểm cực tiểu và khoảng cách từ hai điểm đó đến đường thẳng $\Delta : x + y + 2 = 0$ bằng nhau.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

* Ta có $y' = \frac{x^2 + 2x + 2m - 2}{(x + 1)^2}, x \neq -1$

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $f'(x)$ đổi dấu hai lần qua nghiệm x hay phương trình $g(x) = x^2 + 2x + 2m - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2m > 0 \\ 2m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$$

Gọi $A(x_1; y_1 = 2x_1 + 2m), B(x_2; y_2 = 2x_2 + 2m)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số thì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $g(x) = 0, x \neq -1$. Theo định lý Vi ét $x_1 + x_2 = -2, x_1 \cdot x_2 = -2m$

$$\text{Theo yêu cầu bài toán } d(A, \Delta) = d(B, \Delta) \Leftrightarrow \frac{|x_1 + y_1 + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|x_2 + y_2 + 2|}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow |3x_1 + 2m + 2| = |3x_2 + 2m + 2| \Leftrightarrow (3x_1 + 2m + 2)^2 = (3x_2 + 2m + 2)^2$$

$$\Leftrightarrow (3x_1 + 2m + 2)^2 - (3x_2 + 2m + 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)[3(x_1 + x_2) + 4m + 4] = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x_1 + x_2) + 4m + 4 = 0 \quad (x_1 \neq x_2) \Leftrightarrow 3(-2) + 4m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

So với điều kiện, vậy $m = \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Bài tập tương tự :

1. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2mx - 3m + 1}{x - 2}$ có điểm cực đại, điểm cực tiểu và khoảng cách từ hai điểm đó đến đường thẳng $\Delta : 2x - y = 0$ bằng nhau.

2. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^3 - (3m + 1)x^2 - 2m + 3$ có điểm cực đại, điểm cực tiểu và khoảng cách từ cực đại đến đường thẳng $(d): 2x - 3y = 0$ nhỏ hơn $\sqrt{11}$.

Ví dụ 22: Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 2}{x - 1}$ có điểm cực tiểu nằm trên Parabol $(P): y = x^2 + x - 4$

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

* Ta có $y' = \frac{x^2 - 2x - m - 2}{(x - 1)^2}, x \neq 1$. Đặt $g(x) = x^2 - 2x - m - 2$.

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm

phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - (-m - 2) > 0 \\ g(1) = -m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 3 > 0 \\ m \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m > -3$

Khi đó : $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \sqrt{m + 3} \Rightarrow y_1 = m + 2 - 2\sqrt{m + 3} \\ x_2 = 1 + \sqrt{m + 3} \Rightarrow y_2 = m + 2 + 2\sqrt{m + 3} \end{cases}$

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$	x_1			1	x_2			$+\infty$
y'		+	0	-		-	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu suy ra $A(1 + \sqrt{m + 3}; m + 2 + 2\sqrt{m + 3})$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

$$A \in (P) \Leftrightarrow m + 2 + 2\sqrt{m + 3} = (1 + \sqrt{m + 3})^2 + 1 + \sqrt{m + 3} - 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m + 3} = 1 \Leftrightarrow m = -2$$

So với điều kiện bài toán, ta có $m = -2$ là giá trị cần tìm.

Bài tập tương tự :

1. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + 2(m - 2)x$ có điểm cực tiểu nằm trên đường thẳng $(d): y = \frac{5}{6}x$.

2. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m - 2$ có điểm cực tiểu nằm trên Parabol $(P): y = x^2$.

Ví dụ 23: Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3(m+1)x^2 - (3m^2 + 7m - 1)x + m^2 - 1$ có điểm cực tiểu tại một điểm có hoành độ nhỏ hơn 1.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có $y' = -3x^2 + 6(m+1)x - (3m^2 + 7m - 1)$.

Hàm số đạt cực tiểu tại một điểm có hoành độ nhỏ hơn 1

$\Leftrightarrow y' = -3x^2 + 6(m+1)x - (3m^2 + 7m - 1) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện :

$$\left[\begin{array}{ll} x_1 < 1 < x_2 & (1) \\ x_1 < x_2 \leq 1 & (2) \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (1) \Leftrightarrow -3.y'(1) < 0 \\ (2) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ -3.y'(1) \geq 0 \\ \frac{S}{2} < 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3(3m^2 + m - 4) < 0 \\ 9(m+1)^2 - 3(3m^2 + 7m - 1) > 0 \\ 3(3m^2 + m - 4) \geq 0 \\ m+1 < 1 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{4}{3} < m < 1 \\ -3m + 12 > 0 \\ 3m^2 + m - 4 \geq 0 \\ m < 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{4}{3} < m < 1 \\ m < 4 \\ m \leq -\frac{4}{3} \vee m \geq 1 \\ m < 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{4}{3} < m < 1 \\ m \leq -\frac{4}{3} \end{array} \right] \Leftrightarrow m < 1$$

Bài tập tương tự :

1. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + (m+1)x - 4$ có điểm cực tiểu tại một điểm có hoành độ âm.

2. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}(m-1)x^3 - \frac{1}{2}(m-1)x^2 + 2m + 3$ có điểm cực tiểu tại một điểm có hoành độ lớn hơn 2.

Ví dụ 24: Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số

$y = \frac{x^2 - (m+1)x - m^2 + 4m - 2}{x-1}$. có cực trị đồng thời tích các giá trị cực đại và cực tiểu đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

* Ta có $y' = \frac{x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3}{(x-1)^2} = \frac{g(x)}{(x-1)^2}, x \neq 1$

$$g(x) = x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3$$

Hàm số có cực đại , cực tiểu khi phương trình $g(x) = 0, x \neq 1$

có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 3m - 2 > 0 \\ m^2 - 3m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 2$$

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số thì x_1, x_2

là nghiệm của phương trình $g(x) = 0, x \neq 1$.

$$\text{Khi đó } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \sqrt{-m^2 + 3m - 2} \Rightarrow y_1 = 1 - m + 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2} \\ x_2 = 1 + \sqrt{-m^2 + 3m - 2} \Rightarrow y_2 = 1 - m - 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2} \end{cases}$$

$$y_1 \cdot y_2 = (1 - m + 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2})(1 - m - 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2})$$

$$y_1 \cdot y_2 = (1 - m)^2 - 4(-m^2 + 3m - 2)$$

$$y_1 \cdot y_2 = 5m^2 - 14m + 9 = 5\left(m - \frac{7}{5}\right)^2 - \frac{4}{5} \geq -\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \min y_1 \cdot y_2 = -\frac{4}{5} \text{ khi } m = \frac{7}{5}$$

So với điều kiện , vậy $m = \frac{7}{5}$ là giá trị cần tìm .

Bài tập tương tự :

1. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m^2 + 4m - 2$ có cực trị đồng thời tích các giá trị cực đại và cực tiểu đạt giá trị nhỏ nhất.

2. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + m^2 - m + 1$ có cực trị đồng thời tích các giá trị cực đại và cực tiểu đạt giá trị lớn nhất.

Ví dụ 25: Với giá trị nào của m thì đồ thị của hàm số

$y = \frac{mx^2 + (m^2 + 1)x + 4m^3 + m}{x + m}$ tương ứng có một điểm cực trị thuộc góc phần tư thứ (II) và một điểm cực trị thuộc góc phần tư thứ (IV) của mặt phẳng tọa độ.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$

* Ta có : $y' = \frac{mx^2 + 2m^2x - 3m^3}{(x + m)^2}, x \neq -m$

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số thì

$x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ là nghiệm của phương trình

$$g(x) = mx^2 + 2m^2x - 3m^3 = 0, x \neq -m$$

Đồ thị của hàm số có một điểm cực trị thuộc góc phần tư thứ (II) và một điểm cực trị thuộc góc phần tư thứ (IV) của mặt phẳng tọa độ khi

$$(1) \Leftrightarrow m.g(0) < 0 \Leftrightarrow -3m^4 < 0 \Leftrightarrow m \neq 0 \quad (a)$$

(2) $\Leftrightarrow$ Đồ thị của hàm số không cắt trục

$$Ox \Leftrightarrow mx^2 + (m^2 + 1)x + 4m^3 + m = 0 \quad (x \neq -m) \text{ vô nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = (m^2 + 1)^2 - 4m(4m^3 + m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -15m^4 - 2m^2 + 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 > \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ m > \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \quad (b)$$

$$(3) \Leftrightarrow m < 0 \quad (c)$$

Từ (a) (b) (c) suy ra $m < -\frac{1}{\sqrt{5}}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 25: Chứng tỏ rằng chỉ có một điểm A duy nhất trên mặt phẳng tọa độ sao

cho nó là điểm cực đại của đồ thị $f(x) = \frac{x^2 - m(m+1)x + m^3 + 1}{x - m}$ ứng với

một giá trị thích hợp của m và cũng là điểm cực tiểu của đồ thị ứng với một giá trị thích hợp khác. Tìm tọa độ của A .

Giải :

* Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

* Ta có $y' = \frac{x^2 - 2mx + m^2 - 1}{(x - m)^2}, x \neq m$

Tam thức $g(x) = x^2 - 2mx + m^2 - 1$ có $\Delta = 1 > 0, \forall m$.

Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m - 1 \\ x_2 = m + 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y(x_1) = -m^2 + m - 2 \Rightarrow M(m - 1; -m^2 + m - 2) \\ y(x_2) = -m^2 + m + 2 \Rightarrow N(m + 1; -m^2 + m + 2) \end{cases}$

Đặt $A(x_0; y_0)$. Giả sử ứng với giá trị $m = m_1$ thì A là điểm cực đại và ứng với giá trị $m = m_2$ thì A là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số

Ta có: $\begin{cases} x_0 = m_1 - 1 \\ y_0 = -m_1^2 + m_1 - 2 \end{cases}; \begin{cases} x_0 = m_2 + 1 \\ y_0 = -m_2^2 + m_2 + 2 \end{cases}$

Theo bài toán, ta có: $\begin{cases} m_1 - 1 = m_2 + 1 \\ -m_1^2 + m_1 - 2 = -m_2^2 + m_2 + 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 - m_2 = 2 \\ (m_1 - m_2)(m_1 + m_2 - 1) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 - m_2 = 2 \\ m_1 + m_2 = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{1}{2} \\ m_2 = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{1}{2} \\ y_0 = -\frac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{1}{2}; -\frac{7}{4}\right)$.

Vậy $A\left(-\frac{1}{2}; -\frac{7}{4}\right)$ là điểm duy nhất cần tìm thỏa yêu cầu bài toán.

Dạng 4 : Ứng dụng cực trị của hàm số trong bài toán đại số .

Ví dụ : Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình sau có một số lẻ nghiệm thực: $(3x^2 - 14x + 14)^2 - 4(3x - 7)(x - 1)(x - 2)(x - 4) = m$.

Giải :

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-4) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$$

$$g(x) = (3x^2 - 14x + 14)^2 - 4(3x-7)f(x)$$

$g(x)$ là đa thức bậc 4 với hệ số của x^4 là -3 .

$$f'(x) = 3x^2 - 14x + 14$$

$$g'(x) = 2(3x^2 - 14x + 14)(6x - 14) - 12f(x) - 4(3x-7)f'(x) = -12f(x)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = 2; x = 4.$$

$$g(1) = 9; g(2) = 4; g(4) = 36.$$

Bảng biến thiên của $g(x)$.

x	$-\infty$	1	2	4	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	0	-
$g(x)$	$-\infty$	9	4	36	$-\infty$

Từ bảng biến thiên cho thấy phương trình $g(x) = m$ có một số lẻ nghiệm khi và chỉ khi: $m = 4; m = 9; m = 36$.

Bài 4 : GIÁ TRỊ LỚN NHẤT GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ.

4.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa: Cho hàm số xác định trên D

- Số M gọi là giá trị lớn nhất (GTLN) của hàm số $y = f(x)$ trên D

$$\text{nếu } \begin{cases} f(x) \leq M \quad \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases}, \text{ ta kí hiệu } M = \max_{x \in D} f(x).$$

Chú ý: Nếu $f(x) \leq M \quad \forall x \in D$ thì ta chưa thể suy ra $M = \max_{x \in D} f(x)$

- Số m gọi là giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số $y = f(x)$ trên D

$$\text{nếu } \begin{cases} f(x) \geq m \quad \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases}, \text{ ta kí hiệu } m = \min_{x \in D} f(x).$$

Chú ý: Nếu $f(x) \geq m \quad \forall x \in D$ thì ta chưa thể suy ra $m = \min_{x \in D} f(x)$.

2. Phương pháp tìm GTLN, GTNN của hàm số

Phương pháp chung: Để tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên D ta tính y' , tìm các điểm mà tại đó đạo hàm triệt tiêu hoặc không tồn tại và lập bảng biến thiên. Từ bảng biến thiên ta suy ra GTLN, GTNN.

Chú ý:

- Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn tăng hoặc luôn giảm trên $[a; b]$ thì $\max_{x \in [a; b]} f(x) = \max\{f(a), f(b)\}$; $\min_{x \in [a; b]} f(x) = \min\{f(a), f(b)\}$.
 - Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì luôn có GTLN, GTNN trên đoạn đó và để tìm GTLN, GTNN ta làm như sau
 - * Tính y' và tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ mà tại đó y' triệt tiêu hoặc hàm số không có đạo hàm.
 - * Tính các giá trị $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)$. Khi đó

$$+ \max_{x \in [a; b]} f(x) = \max_{x \in [a; b]} \{f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)\}$$

$$+ \min_{x \in [a; b]} f(x) = \min_{x \in [a; b]} \{f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)\}$$
 - Nếu hàm số $y = f(x)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ T thì để tìm GTLN, GTNN của nó trên D ta chỉ cần tìm GTLN, GTNN trên một đoạn thuộc D có độ dài bằng T .
 - * Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D . Khi đặt ẩn phụ $t = u(x)$, ta tìm được $t \in E$ với $\forall x \in D$, ta có $y = g(t)$ thì Max, Min của hàm f trên D chính là Max, Min của hàm g trên E .
 - * Khi bài toán yêu cầu tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất mà không nói trên tập nào thì ta hiểu là tìm GTLN, GTNN trên tập xác định của hàm số.
 - * Ngoài phương pháp khảo sát để tìm Max, Min ta còn dùng phương pháp miền giá trị hay Bất đẳng thức để tìm Max, Min.
 - * Ta cần phân biệt hai khái niệm cơ bản :
 - + Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D với cực đại của hàm số.
 - + Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D với cực tiểu của hàm số.
- Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D mang tính toàn cục, còn giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số chỉ mang tính địa phương.

4.2 DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D ta có thể sử dụng đạo hàm và kết hợp với việc so sánh giá trị cực đại, cực tiểu với giá trị đặc biệt (ta gọi đó là các giá trị tới hạn). Giá trị tới hạn này thường là các giá trị

tại các đầu mút của các đoạn hoặc là giá trị của hàm số tại các điểm mà không tồn tại đạo hàm.

Ví dụ 1 : Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

1. $y = \frac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0; 2]$.

2. $y = (x-6)\sqrt{x^2+4}$ trên đoạn $[0; 3]$.

3. $y = x^6 + 4(1-x^2)^3$ trên đoạn $[-1; 1]$.

4. $y = \sqrt{-x^2 + 5x + 6}$ trên đoạn $[-1; 6]$.

Giải :

1. $y = \frac{3x-1}{x-3}$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[0; 2]$.

* Ta có $y' = \frac{-8}{(x-3)^2} < 0, \forall x \in [0; 2]$

* Bảng biến thiên

x	0	2
y'		–
y	$\frac{1}{3}$	–5

Từ bảng biến thiên suy ra :

$\max_{[0; 2]} f(x) = \frac{1}{3}$ khi $x = 0$ $\min_{[0; 2]} f(x) = -5$ khi $x = 2$

2. $y = (x-6)\sqrt{x^2+4}$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[0; 3]$.

* Ta có : $y' = \frac{2x^2 - 6x + 4}{\sqrt{x^2 + 4}}, x \in [0; 3]$

$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

$$\left. \begin{array}{l} y(1) = -5\sqrt{5} \\ y(0) = -12 \\ y(2) = -8\sqrt{2} \\ y(3) = -3\sqrt{13} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \max_{x \in [0;3]} y = -3\sqrt{13} \\ \min_{x \in [0;3]} y = -12 \end{cases}$$

Vậy $\max_{x \in [0;3]} y = -3\sqrt{13}$ khi $x = 3$, $\min_{x \in [0;3]} y = -12$ khi $x = 0$.

3. $y = x^6 + 4(1 - x^2)^3$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-1; 1]$.

Đặt $t = x^2, x \in [-1; 1] \Rightarrow t \in [0; 1]$

Hàm số đã cho viết lại $f(t) = t^3 + 4(1 - t)^3, t \in [0; 1]$

* Ta có $f'(t) = 3t^2 - 12(1 - t)^2 = 3(-3t^2 + 8t - 4)$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} \\ t = 2 \end{cases}$$

$f(0) = 4, f(1) = 1$

* Bảng biến thiên

t	0	$\frac{2}{3}$	1
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	4	$\frac{4}{9}$	1

Từ bảng biến thiên suy ra :

$$\max_{[-1;1]} f(x) = 4 \text{ khi } x = 0 \quad \min_{[-1;1]} f(x) = \frac{4}{9} \text{ khi } x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

4. $y = \sqrt{-x^2 + 5x + 6}$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-1; 6]$.

* Ta có $y' = \frac{-2x + 5}{2\sqrt{-x^2 + 5x + 6}}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \in [-1; 6]$$

$$y(-1) = y(6) = 0, \quad y\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{7}{2}.$$

Vậy : $\min_{x \in [-1; 6]} y = 0$ khi $x = -1, x = 6$ và $\max_{x \in [-1; 6]} y = \frac{7}{2}$ khi $x = \frac{5}{2}$.

Tương tự:

1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[-3; 2]$

b. $f(x) = \frac{3x^2 + 10x + 20}{x^2 + 2x + 3}$

2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ trên đoạn $[-2; 3]$.

b. $f(x) = x^6 - 3x^4 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{4}$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Ví dụ 2 : Tìm giá trị lớn nhất của các hàm số: $y = \frac{x + \sqrt{1 + 9x^2}}{8x^2 + 1}, x > 0$.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$

$$y = \frac{x + \sqrt{9x^2 + 1}}{8x^2 + 1} = \frac{9x^2 + 1 - x^2}{(8x^2 + 1)(\sqrt{9x^2 + 1} - x)} = \frac{1}{\sqrt{9x^2 + 1} - x}$$

Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(0; +\infty)$ khi hàm số

$f(x) = \sqrt{9x^2 + 1} - x$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{9x}{\sqrt{9x^2 + 1}} - 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{9x^2 + 1} = 9x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 72x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{6\sqrt{2}}$$

$$\min_{x > 0} f(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ khi } x = \frac{1}{6\sqrt{2}} \Rightarrow \max_{x > 0} y = \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \text{ khi } x = \frac{1}{6\sqrt{2}}.$$

Ví dụ 3: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

1. $y = x + \sqrt{4 - x^2}$ trên đoạn $[-2; 2]$.

$$2. y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \text{ trên đoạn } x \in [-1;2].$$

Giải :

$$1. y = x + \sqrt{4-x^2}$$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-2;2]$.

$$* \text{ Ta có } y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2} - x}{\sqrt{4-x^2}}, x \in (-2;2)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4-x^2} - x = 0 \\ x \in (-2;2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4-x^2} = x \\ x \in (-2;2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ 4-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

Bảng biến thiên

x	-2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
y'	$\parallel$ -	0	+ $\parallel$
y	-2		2
		$2\sqrt{2}$	

Từ bảng biến thiên, ta được

$$\max_{x \in [-2;2]} f(x) = 2\sqrt{2} \text{ khi } x = \sqrt{2} \quad \min_{x \in [-2;2]} f(x) = -2 \text{ khi } x = -2$$

$$2. y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \text{ trên đoạn } x \in [-1;2].$$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-1;2]$.

$$* \text{ Ta có } y' = \frac{-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

* Bảng biến thiên.

x	-1	1	2
y'	+	0	-
y	0	$\sqrt{2}$	$\frac{3\sqrt{5}}{5}$

Từ bảng biến thiên , ta được

$$\max_{x \in [-1;2]} y = \sqrt{2} \text{ khi } x = 1 \quad \min_{x \in [-1;2]} y = 0 \text{ khi } x = -1$$

Ví dụ 4 : Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = |x^3 - 3x^2 + 1| \text{ trên đoạn } [-2;1].$$

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-2;1]$.

$$\text{Đặt } g(x) = x^3 - 3x^2 + 1, x \in [-2;1]$$

$$g'(x) = 3x^2 - 6x.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \notin [-2;1] \end{cases}$$

$$g(-2) = -19, g(0) = 1, g(1) = -1, \text{ suy ra } \max_{[-2;1]} g(x) = 1, \min_{[-2;1]} g(x) = -19.$$

$$x \in [-2;1] \Rightarrow g(x) \in [-19;1] \Rightarrow f(x) = |g(x)| \in [0;19].$$

$$g(0).g(1) < 0 \Rightarrow \exists x_1 \in (0;1) \text{ sao cho } g(x_1) = 0.$$

$$\text{Vậy } \max_{[-2;1]} f(x) = 19, \min_{[-2;1]} f(x) = 0.$$

Tương tự:

1. Tìm giá trị lớn nhất của các hàm số: $f(x) = |x^3 + 3x^2 - 72x + 90|$ trên đoạn $[-5;5]$.

2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - 3x + 2|$ trên đoạn $[-3; 2]$.

Ví dụ 5:

1. Tìm a để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 + 2x + a - 4|$ trên đoạn $[-2;1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2. Tìm giá trị p, q để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 + px + q|$ trên đoạn $[-1;1]$ là bé nhất.

Giải :

1.

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-2;1]$.

$$y = |x^2 + 2x + a - 4| = |(x+1)^2 + a - 5|$$

$$\text{Đặt } t = (x+1)^2, x \in [-2;1] \Rightarrow t \in [0;4]$$

$$\text{Ta có } f(t) = |t + a - 5|, t \in [0;4]$$

$$\max_{x \in [-2;1]} y \Leftrightarrow \max_{t \in [0;4]} f(t) = \max_{t \in [0;4]} \{f(0), f(4)\} = \max_{t \in [0;4]} \{|a-5|, |a-1|\}$$

$$\bullet |a-5| \geq |a-1| \Leftrightarrow a \leq 3 \Rightarrow \max_{t \in [0;4]} f(t) = |a-5| = 5-a$$

$$\bullet |a-5| \leq |a-1| \Leftrightarrow a \geq 3 \Rightarrow \max_{t \in [0;4]} f(t) = |a-1| = a-1$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} 5-a \geq 5-3=2, \forall a \leq 3 \\ a-1 \geq 3-1=2, \forall a \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \max_{t \in [0;4]} f(t) \geq 2, \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } \max_{t \in [0;4]} f(t) = 2 \text{ khi } a = 3$$

$$2. \text{ Xét hàm số } f(x) = x^2 + px + q$$

$$* \text{ Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn } [-1;1] \Rightarrow y = |f(x)|$$

$$f(-1) = 1 - p + q, f(0) = q, f(1) = 1 + p + q$$

$$\text{Giả sử } \max y = f(\alpha)$$

$$\Rightarrow |f(1)| + |f(0)| \geq |f(1) - f(0)| = |1+p|, |f(-1)| + |f(0)| \geq |f(-1) - f(0)| = |1-p|$$

$$\bullet p > 0 \Rightarrow |1+p| > 1 \Rightarrow \begin{cases} |f(1)| > \frac{1}{2} \\ |f(0)| > \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f(\alpha) > \frac{1}{2}$$

$$\bullet p < 0 \Rightarrow |1-p| > 1 \Rightarrow \begin{cases} f(-1) > \frac{1}{2} \\ f(0) > \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f(\alpha) > \frac{1}{2}$$

$$\max_{x \in [-1;1]} y = \max \left\{ \left| f\left(-\frac{p}{2}\right) \right|; |f(-1)|; |f(1)| \right\}$$

$$\bullet p = 0 \Rightarrow f(x) = x^2 + q, f(0) = f\left(-\frac{p}{2}\right) = q, f(-1) = f(1) = 1+q$$

$$\text{Giá trị lớn nhất của } y \text{ là một trong hai giá trị } |q|; |1+q|$$

$$\bullet q > -\frac{1}{2} \Rightarrow |1+q| > \frac{1}{2} \Rightarrow |f(\pm 1)| > \frac{1}{2} \Rightarrow f(\alpha) > \frac{1}{2}$$

$$\bullet q < -\frac{1}{2} \Rightarrow |q| > \frac{1}{2} \Rightarrow |f(0)| > \frac{1}{2} \Rightarrow f(\alpha) > \frac{1}{2}$$

$$\bullet q = -\frac{1}{2} \Rightarrow |f(x)| = \left| x^2 - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \max f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0; x = \pm 1$$

cũng là giá trị nhỏ nhất của $f(\alpha)$.

Vậy $p = 0, q = -\frac{1}{2}$ thoả mãn bài toán.

Ví dụ 6 : Tìm các giá trị a, b sao cho hàm số $y = \frac{ax + b}{x^2 + 1}$ có giá trị lớn nhất bằng 4 và có giá trị nhỏ nhất bằng -1.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

• Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 4 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{ax + b}{x^2 + 1} \leq 4, \forall x \in \mathbb{R} \\ \exists x_0 \in \mathbb{R} : \frac{ax_0 + b}{x_0^2 + 1} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - ax + 4 - b \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ 4x_0^2 - ax_0 + 4 - b = 0 : \text{có nghiệm } x_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = a^2 - 16(4 - b) \leq 0 \\ \Delta = a^2 - 16(4 - b) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 + 16b - 64 = 0 \quad (*)$$

• Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 1 khi và chỉ khi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{ax + b}{x^2 + 1} \geq -1, \forall x \in \mathbb{R} \\ \exists x_0 \in \mathbb{R} : \frac{ax_0 + b}{x_0^2 + 1} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax + b + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ x_0^2 + ax_0 + b + 1 = 0 : \text{có nghiệm } x_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = a^2 - 4(b + 1) \leq 0 \\ \Delta = a^2 - 4(b + 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 - 4b - 4 = 0 \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta có hệ

$$\begin{cases} a^2 + 16b - 64 = 0 \quad (*) \\ a^2 - 4b - 4 = 0 \quad (**) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy giá trị } a, b \text{ cần tìm là : } \begin{cases} a = -4 \\ b = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$$

Ví dụ 7 : Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

1. $y = \sin^4 x + \cos^2 x + 2$
2. $y = x - \sin 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$
3. $y = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$
4. $y = \frac{\sin^6 x |\cos x| + \cos^6 x |\sin x|}{|\sin x| + |\cos x|}$

Giải :

$$1. y = \sin^4 x + \cos^2 x + 2$$

$$y = \sin^4 x + \cos^2 x + 2 = \sin^4 x - \sin^2 x + 3$$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Đặt } t = \sin^2 x, 0 \leq t \leq 1$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - t + 3$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$

$$\text{Ta có } f'(t) = 2t - 1, t \in [0; 1]$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = f(1) = 3, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{4}$$

$$\min y = \min_{t \in [0; 1]} f(t) = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4} \quad \max y = \max_{t \in [0; 1]} f(t) = 3$$

$$2. y = x - \sin 2x \text{ trên đoạn } \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

$$\text{Ta có : } f'(x) = 1 - 2 \cos 2x, -\frac{\pi}{2} < x < \pi$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}; f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}; f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}; f(\pi) = \pi$$

Vậy:

$$\max_{x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]} y = \frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ khi } x = \frac{5\pi}{6}$$

$$\min_{x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]} y = -\frac{\pi}{2} \text{ khi } x = -\frac{\pi}{2}$$

$$3. y = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$$

$$\text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow f(t) = \frac{t+1}{t^2+t+1}, t \in [-1; 1]$$

$$f(t) = \frac{t+1}{t^2+t+1} \text{ liên tục trên đoạn } [-1; 1]$$

$$f'(t) = \frac{-t^2-2t}{(t^2+t+1)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \in [-1; 1]$$

$$f(-1) = 0, f(0) = 1, f(1) = \frac{2}{3}.$$

Vậy:

$$\min f(x) = \min_{t \in [-1; 1]} f(t) = 0 \text{ khi } \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\max f(x) = \max_{t \in [-1; 1]} f(t) = 1 \text{ khi } \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$4. y = \frac{\sin^6 x |\cos x| + \cos^6 x |\sin x|}{|\sin x| + |\cos x|}$$

$$\forall x \quad |\sin x| + |\cos x| \geq \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x$$

$$\text{Nên } y = \frac{\sin^6 x |\cos x| + \cos^6 x |\sin x|}{|\sin x| + |\cos x|} = \frac{|\sin x \cos x| \left(|\sin x|^5 + |\cos x|^5 \right)}{|\sin x| + |\cos x|}$$

$$y = |\sin x \cos x| \left(1 - |\sin x \cos x| - \sin^2 x \cos^2 x \right)$$

$$y = \frac{-1}{8} |\sin^3 x| - \frac{1}{4} |\sin 2x|^2 + \frac{1}{2} |\sin 2x|$$

$$\text{Đặt } t = |\sin 2x|; 0 \leq t \leq 1$$

Xét hàm số : $f(t) = \frac{-1}{8}t^3 - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t$ liên tục trên đoạn $[0;1]$.

Ta có : $f'(t) = \frac{-3}{8}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}, \forall t \in [0;1]$ và $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$

$$f(0) = 0; f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{27}; f(1) = \frac{1}{8}$$

Vậy : $\min_{t \in [0;1]} y = \min_{t \in [0;1]} f(t) = f(0) = 0$ khi $|\sin 2x| = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$

$$\max_{t \in [0;1]} y = \max_{t \in [0;1]} f(t) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{27} \text{ khi}$$

$$|\sin 2x| = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \cos 4x = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{4} \arccos \frac{1}{9} + \frac{k\pi}{2}$$

Bài tập tương tự:

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

1. $y = \sin^3 x + \cos^3 x$
2. $y = -2\sin^3 x + 3\cos 2x - 6\sin x$

Ví dụ 8 : Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

1. $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}$
2. $y = \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 + \cos x}$

Giải :

$$1. y = \frac{1}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}$$

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$ liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\text{Ta có : } g'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} - \frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} = \frac{\cos x \sqrt{\cos x} - \sin x \sqrt{\sin x}}{2\sqrt{\sin x \cdot \cos x}}, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$g'(x) = 0, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \sin x \\ x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$g(0) = 1; g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{8}; g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow 1 \leq g(x) \leq \sqrt[4]{8} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \leq y \leq 1$$

$$\text{Vậy } \min y = \frac{1}{\sqrt[4]{8}}, \max y = 1$$

$$2. y = \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 + \cos x}$$

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases} 1 + \sin x \geq 0 \\ 1 + \cos x \geq 0 \end{cases}$

$$y > 0 \Rightarrow y^2 = \sin x + \cos x + 2 + 2\sqrt{\sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1} \quad (*)$$

$$\text{Đặt } t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

$$\text{Khi đó } (*) \text{ viết lại } f(t) = t + 2 + 2\sqrt{\frac{1}{2}(t^2 + 2t + 1)} = t + 2 + \sqrt{2}|t + 1|$$

$$f(t) = \begin{cases} (1 - \sqrt{2})t + 2 - \sqrt{2}, & \text{neá } -\sqrt{2} \leq t \leq -1 \\ (1 + \sqrt{2})t + 2 + \sqrt{2}, & \text{neá } -1 \leq t \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

$$f'(t) = \begin{cases} 1 - \sqrt{2} < 0, & \text{neá } -\sqrt{2} \leq t < -1 \\ 1 + \sqrt{2} > 0, & \text{neá } -1 < t \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

Hàm số $f(t)$ không có đạo hàm tại điểm $t = -1$

$$\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \quad \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1$$

Ví dụ 9: $g(x) = f(\sin^2 x)f(\cos^2 x)$ trong đó hàm f thỏa mãn:

$f(\cot x) = \sin 2x + \cos 2x \quad \forall x \in [0; \pi]$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $g(x)$.

Giải :

$$\text{Đặt } t = \cot x$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2 \cot x}{1 + \cot^2 x} = \frac{2t}{1 + t^2}; \quad \cos 2x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{t^2 + 2t - 1}{t^2 + 1}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{(\sin^4 x + 2 \sin^2 x - 1)(\cos^4 x + 2 \cos^2 x - 1)}{(\sin^4 x + 1)(\cos^4 x + 1)}$$

$$g(x) = \frac{\sin^4 x \cos^4 x + 8 \sin^2 x \cos^2 x - 2}{\sin^4 x \cos^4 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x + 2} = \frac{u^2 + 8u - 2}{u^2 - 2u + 2} = h(u).$$

trong đó $u = \sin^2 x \cos^2 x; \quad 0 \leq u \leq \frac{1}{4}$.

$$\Rightarrow h'(u) = 2 \frac{-5u^2 + 4u + 6}{(u^2 - 2u + 2)^2} > 0 \quad \forall u \in \left[0; \frac{1}{4}\right].$$

$$\Rightarrow \text{hàm số } h(u) \text{ luôn tăng trên } \left[0; \frac{1}{4}\right] \text{ nên } \max_{u \in \left[0; \frac{1}{4}\right]} h(u) = h\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{25}$$

$$\min_{u \in \left[0; \frac{1}{4}\right]} h(t) = h(0) = -1.$$

$$\text{Vậy } \max g(x) = \frac{1}{25}; \quad \min g(x) = -1$$

Ví dụ 10: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số trên : $[-1; 2]$, biết

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f^2(x) \cdot f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 \end{cases}$$

Giải :

$$f^2(x) \cdot f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 \Leftrightarrow \frac{[f(x)]^3}{3} = x + x^2 + x^3 + c, c : \text{hằng số.}$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{3}$$

$$\text{Do đó } f(x) = \sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$$

$$\text{Xét hàm số : } g(x) = 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \text{ liên tục trên đoạn } x \in [-1; 2].$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 9x^2 + 6x + 3$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$g(-1) = -2, g(2) = 40, g\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9} \Rightarrow \max_{x \in [-1; 2]} g(x) = 40, \min_{x \in [-1; 2]} g(x) = -2$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} \max_{x \in [-1; 2]} f(x) = \sqrt[3]{40} \text{ khi } x = 2 \\ \min_{x \in [-1; 2]} f(x) = \sqrt[3]{-2} \text{ khi } x = -1 \end{cases}$$

Ví dụ: Cho x, y là các số không âm thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và

nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}$.

Giải :

$$P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} = \frac{x^2 + x + y^2 + y}{xy + x + y + 1} = \frac{(x+y)^2 - 2xy + x + y}{xy + x + y + 1} = \frac{2 - 2xy}{2 + xy}$$

(vì $x + y = 1$). Đặt $t = xy \Rightarrow 0 \leq t \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{2-2t}{2+t}, t \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$. Ta có $f'(t) = \frac{-6}{(2+t)^2} < 0, \forall t \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$

Bảng biến thiên.

t	0	$\frac{1}{4}$
$f'(t)$	-	
$f(t)$	1	$\frac{2}{3}$

Vậy $\min_{0 \leq t \leq \frac{1}{4}} f(t) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3}, \max_{0 \leq t \leq \frac{1}{4}} f(t) = f(0) = 1$

$\min P = \frac{2}{3}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$ và $\max P = 1$ khi $x = 0, y = 1$ hoặc $x = 1, y = 0$

Ví dụ 11 : Cho a, b là các số dương thỏa mãn $ab + a + b = 3$. Tìm GTLN của biểu thức: $P = \frac{3a}{b+1} + \frac{3b}{a+1} + \frac{ab}{a+b} - a^2 - b^2$ (**Dự bị Đại học- 2005**).

Giải :

Từ $ab + a + b = 3 \Rightarrow 3 - (a+b) = ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \Leftrightarrow a+b \geq 2$.

Ta có: $P = \frac{3a(a+1) + 3b(b+1)}{(b+1)(1+a)} + \frac{ab}{a+b} - (a+b)^2 + 2ab$

$$P = 3 \frac{(a+b)^2 - 2ab + (a+b)}{ab + a + b + 1} + \frac{ab}{a+b} - (a+b)^2 + 2ab$$

$$P = \frac{3}{4} \left[(a+b)^2 + 3(a+b) - 6 \right] + \frac{3 - (a+b)}{a+b} - (a+b)^2 + 6 - 2(a+b)$$

$$P = \frac{1}{4} \left[-(a+b)^2 + (a+b) + \frac{12}{a+b} + 2 \right].$$

Đặt $t = a + b \geq 2$. Xét hàm số $g(t) = -t^2 + t + \frac{12}{t} + 2$ với $t \geq 2$

Ta có: $g'(t) = -2t + 1 - \frac{12}{t^2} < 0 \quad \forall t \geq 2 \Rightarrow \max_{t \geq 2} g(t) = g(2) = \frac{3}{2}$.

Vậy $\max P = \frac{3}{2}$ đạt được khi $a = b = 1$.

Ví dụ : Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z \leq \frac{3}{2}$. Tìm giá trị

nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

Giải :

Ta có : $(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x + y + z}$.

$$P = x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq x + y + z + \frac{9}{x + y + z}$$

Đặt $t = x + y + z \Rightarrow 0 < t \leq \frac{3}{2}$. Khi đó $P \geq t + \frac{9}{t}, 0 < t \leq \frac{3}{2}$

Xét $f(t) = t + \frac{9}{t}, t \in \left(0; \frac{3}{2} \right]$. Ta có $f'(t) = 1 - \frac{9}{t^2} < 0, \forall t \in \left(0; \frac{3}{2} \right]$

Bảng biến thiên.

t	0	$\frac{3}{2}$
$f'(t)$	-	
$f(t)$	$+\infty$	$\frac{15}{2}$

Vậy $\min_{0 < t \leq \frac{3}{2}} f(t) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{2} \Rightarrow P \geq \frac{15}{2} \Rightarrow \min P = \frac{15}{2}$ khi $x = y = z = \frac{1}{2}$

Ví dụ 12: Cho x, y, z là số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

Giải :

Từ các đẳng thức $x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = (x + y + z)^2$

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ và điều kiện ta

có: $P = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$$= (x + y + z) \left[2 - \frac{(x + y + z)^2 - 2}{2} \right]$$

Đặt $t = x + y + z \Rightarrow -\sqrt{6} \leq t \leq \sqrt{6}$

Ta có: $P = t(2 - \frac{t^2 - 2}{2}) = -\frac{t^3}{2} + 3t = f(t)$

Xét hàm số $f(t)$ với $-\sqrt{6} \leq t \leq \sqrt{6}$.

Ta có: $f'(t) = \frac{3}{2}(-t^2 + 2) \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \left[\max_{[-\sqrt{6}; \sqrt{6}]} f(t) = f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}; \left[\min_{[-\sqrt{6}; \sqrt{6}]} f(t) = f(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} \right]$$

Vậy $\max P = 2\sqrt{2}$ đạt được khi $x = \sqrt{2}; y = z = 0$

$\min P = -2\sqrt{2}$ đạt được khi $x = -\sqrt{2}; y = z = 0$.

Ví dụ:

Ví dụ 13: Cho hai số $x, y \neq 0$ thay đổi thỏa mãn $(x + y)xy = x^2 + y^2 - xy$

Tìm GTLN của biểu thức : $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$ (Đại học Khối A – 2006).

Giải:

Cách 1 :

Đặt: $u = x + y, v = xy \Rightarrow (x + y)xy = x^2 + y^2 - xy \Leftrightarrow uv = u^2 - 3v$

$$\Leftrightarrow (u + 3)v = u^2 \Leftrightarrow v = \frac{u^2}{u + 3} \text{ (do } u \neq -3 \text{)}.$$

$$\text{Vậy } A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = \frac{x^3 + y^3}{(xy)^3} = \frac{u^3 - 3uv}{v^3} = \frac{u(u^2 - 3v)}{v^3} = \frac{u^2}{v^2} = \left(\frac{u + 3}{u} \right)^2$$

$$\text{Vì } u^2 \geq 4v \Rightarrow u^2 \geq \frac{4u^2}{u+3} \Leftrightarrow \frac{4}{u+3} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{u-1}{u+3} \geq 0 \quad (\text{ở đây ta lưu ý } u \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow u \geq 1 \vee u < -3 \Rightarrow \frac{u+3}{u} > 0. \text{ Xét hàm } f(u) = \frac{u+3}{u} \Rightarrow f'(u) = \frac{-3}{u^2} < 0$$

Lập bảng biến thiên, ta thấy $f(u) \leq f(1) = 4 \Rightarrow A \leq 16$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$. Vậy GTLN của $A = 16$.

Cách 2 :

Đặt $a = \frac{1}{x}; b = \frac{1}{y}$. Khi đó giả thiết của bài toán trở thành

$$a + b = a^2 + b^2 - ab \geq \frac{1}{4}(a+b)^2 \Leftrightarrow 0 \leq a+b \leq 4$$

$$\text{Và } A = a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) = (a+b)^2 \leq 16$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a = b = 2 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

Tương tự :

Ví dụ 14 : Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn hệ thức $x^2 + y^2 = 1$.

$$\text{Tìm GTLN, GTNN của biểu thức: } P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}$$

(Đại học Khối B – 2008).

Giải:

Cách 1 :

$$\text{Ta có: } P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2} = \frac{2(x^2 + 6xy)}{x^2 + 2xy + 3y^2}$$

* Nếu $y = 0 \Rightarrow P = 1$.

$$\text{Nếu } y \neq 0 \text{ thì đặt : } x = ty \Rightarrow P = \frac{2(t^2y^2 + 6ty^2)}{t^2y^2 + 2ty^2 + 3y^2} = \frac{2(t^2 + 6t)}{t^2 + 2t + 3} = 2f(t)$$

Xét hàm số $f(t)$, ta có :

$$f'(t) = \frac{-4t^2 + 6t + 18}{(t^2 + 2t + 3)^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t_1 = 3, t_2 = -\frac{3}{2}, \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 1$$

Lập bảng biến thiên ta được: GTLN $P = 3$ và GTNN $P = -6$.

Cách 2 :

$$P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2} = \frac{2x^2 + 12xy}{x^2 + 2xy + 3y^2}$$

$$\Rightarrow P - 3 = \frac{2x^2 + 12xy}{x^2 + 2xy + 3y^2} - 3 = \frac{-(x - 3y)^2}{x^2 + 2xy + 3y^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow P \leq 3. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{3}{2} \\ y = \pm \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$P + 6 = \frac{2x^2 + 12xy}{x^2 + 2xy + 3y^2} + 6 = \frac{2(2x + 3y)^2}{x^2 + 2xy + 3y^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow P \geq -6. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2}y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mp \frac{3}{\sqrt{13}} \\ y = \pm \frac{2}{\sqrt{13}} \end{cases}.$$

Vậy $\max P = 3$; $\min P = -6$.

Tuy nhiên cách làm cái khó là chúng ta làm sao biết cách đánh giá $P - 3$ và $P + 6$?

Tương tự :

Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn hệ thức $x^2 + y^2 = 1$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức:

$$A = \frac{2xy + y^2}{2x^2 + 2xy + 1}$$

$$B = \frac{x^2 - xy + y^2}{2x^2 + xy + y^2 - 1}$$

Ví dụ 15: Cho bốn số nguyên a, b, c, d thay đổi thỏa: $1 \leq a < b < c < d \leq 50$

Tìm GTNN của biểu thức $P = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ (**Dự bị Đại học - 2002**).

Giải:

Vì $1 \leq a < b < c < d \leq 50$ và a, b, c, d là các số nguyên nên $c \geq b + 1$

$$\text{Suy ra : } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \geq \frac{1}{b} + \frac{b+1}{50} = f(b).$$

Dễ thấy $2 \leq b \leq 48$ nên ta xét hàm số : $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x+1}{50}, x \in [2; 48]$

$$\text{Ta có } f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{50} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2}.$$

$$\text{Lập bảng biến thiên ta được } \min_{[2;48]} f(x) = f(5\sqrt{2})$$

Do 7 và 8 là hai số nguyên gần $5\sqrt{2}$ nhất vì vậy:

$$\min_{[2;48]} f(b) = \min \{f(7); f(8)\} = \min \left\{ \frac{53}{175}; \frac{61}{200} \right\} = \frac{53}{175}.$$

$$\text{Vậy GTNN } P = \frac{53}{175}.$$

Ví dụ 16: Cho a, b, c là 3 số thực dương và thỏa mãn

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1. \text{ Chứng minh rằng: } \frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{a^2 + c^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Giải :

Để không mất tính tổng quát, giả sử $0 < a \leq b \leq c$ và thỏa mãn hệ thức

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1. \text{ Do đó } 0 < a \leq b \leq c \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{a^2 + c^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} &= \frac{a}{1 - a^2} + \frac{b}{1 - b^2} + \frac{c}{1 - c^2} \\ &= \frac{a^2}{a(1 - a^2)} + \frac{b^2}{b(1 - b^2)} + \frac{c^2}{c(1 - c^2)} \end{aligned}$$

Xét hàm số : $f(x) = x(1 - x^2)$ liên tục trên nửa khoảng $\left[0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Ta có : $f'(x) = -3x^2 + 1 > 0, x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow f(x)$ liên tục và đồng biến trên

nửa khoảng $\left[0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

$$\text{Và } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x(1 - x^2) = 0, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow 0 < f(x) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ hay}$$

$$0 < x(1 - x^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

$$\text{Hay } \frac{1}{x(1 - x^2)} \geq \frac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{x}{1 - x^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} x^2, \forall x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right].$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{a}{1-a^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 \\ \frac{b}{1-b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} b^2 \\ \frac{c}{1-c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} c^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} (a^2 + b^2 + c^2).$$

$$\text{Vậy } \frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{a^2+c^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}. \text{ Xảy ra khi } a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Chú ý : Để không mất tính tổng quát , giả sử $0 < a \leq b \leq c$ và thỏa mãn hệ thức $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Ta có thể suy ra $0 < a \leq b \leq c < 1$.

Khi đó xét hàm số : $f(x) = x(1-x^2)$ liên tục trên khoảng $(0;1)$.

$$f'(x) = -3x^2 + 1, x \in (0;1) \text{ và } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\bullet f'(x) > 0, x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow f(x) \text{ liên tục và đồng biến trên khoảng } \left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\bullet f'(x) < 0, x \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right) \Rightarrow f(x) \text{ liên tục và nghịch biến trên khoảng}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right).$$

$$\text{Và } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow 0 < f(x) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}. \text{ Phần còn lại}$$

tương tự như trên.

Ví dụ 17: Xét các số thực không âm thay đổi x, y, z thỏa điều kiện:

$x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của:

$$S = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} + \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}.$$

Giải :

Tìm MinS :

Không mất tính tổng quát giả sử: $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$.

$$\text{Với } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x, y, z \in [0;1].$$

Vì $(1-x)(1+x) = 1-x^2 \leq 1$ nên: $\frac{1-x}{1+x} \geq (1-x)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \geq 1-x$.

Dấu đẳng thức xảy ra trong trường hợp $x = 0$ hoặc $x = 1$.

Khi đó $S = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} + \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} \geq 1-x+1-y+1-z$ hay $S \geq 2$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = 0, z = 1$ thì $S = 2$.

Vậy: $\min S = 2$.

Tìm MaxS:

Không mất tính tổng quát giả sử: $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$.

Lúc đó: $z \geq \frac{1}{3}; x+y \leq \frac{2}{3} < \frac{4}{5}$.

$$S = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} + \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} \leq$$

$$1 + \sqrt{\frac{1-(x+y)}{1+x+y}} + \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} = 1 + \sqrt{\frac{z}{2-z}} + \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}$$

Đặt $h(z) = \sqrt{\frac{z}{2-z}} + \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}$. Bài toán trở thành giá trị lớn nhất của

$h(z)$ trên đoạn $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$.

$$h'(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}. \quad \text{Max}h(z) = \text{Max} \left\{ h\left(\frac{1}{3}\right); h(1); h\left(\frac{1}{2}\right) \right\} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Do đó: } S = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} + \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 0, y = z = \frac{1}{2}$ thì $S = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Vậy: $\max S = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$

Ví dụ 18: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn: $abc + a + c = b$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{2}{a^2+1} - \frac{2}{b^2+1} + \frac{3}{c^2+1}$

Giải :

Ta có : $a + c = b(1 - ac) > 0$. Dễ thấy $ac \neq 1 \Rightarrow 0 < a < \frac{1}{c}$

$$\text{nên } b = \frac{a+c}{1-ac} \Rightarrow P = \frac{2}{a^2+1} - \frac{2(1-ac)^2}{(a+c)^2 + (1-ac)^2} + \frac{3}{c^2+1}$$

$$P = \frac{2}{a^2+1} + \frac{2(a+c)^2}{(a^2+1)(c^2+1)} - 2 + \frac{3}{c^2+1}$$

$$\text{Xét } f(x) = \frac{2}{x^2+1} + \frac{2(x+c)^2}{(x^2+1)(c^2+1)} + \frac{3}{c^2+1} - 2$$

$$f(x) = \frac{2(x^2+2cx+2c^2+1)}{(x^2+1)(c^2+1)} + \frac{3}{c^2+1} - 2, 0 < x < \frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-4c(x^2+2cx-1)}{(x^2+1)^2(c^2+1)}, 0 < x < \frac{1}{c}$$

$$\text{Trên khoảng } \left(0; \frac{1}{c}\right): f'(x) = 0 \text{ có nghiệm } x_0 = -c + \sqrt{c^2+1} \text{ và } f'(x)$$

đổi dấu từ dương sang âm khi x qua x_0 , suy ra $f(x)$ đạt cực đại tại $x = x_0$

$$\Rightarrow \forall x \in \left(0; \frac{1}{c}\right): f(x) \leq \frac{2}{c^2+1 - c\sqrt{c^2+1}} + \frac{3}{c^2+1} - 2 = \frac{2c}{\sqrt{c^2+1}} + \frac{3}{c^2+1}$$

$$\text{Xét } g(c) = \frac{2c}{\sqrt{c^2+1}} + \frac{3}{c^2+1}, c > 0$$

$$g'(c) = \frac{2(1-8c^2)}{(c^2+1)^2(\sqrt{c^2+1}+3c)}$$

$$g'(c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c > 0 \\ 1-8c^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \forall c > 0: g(c) \leq g\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{3} + \frac{24}{9} = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{10}{3}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ b = \sqrt{2} \\ c = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{10}{3}$.

Ví dụ 19 : Cho tam giác ABC không tù. Tìm GTLN của biểu thức:

$$P = \cos 2A + 2\sqrt{2}(\cos B + \cos C) \quad (\text{Đại học Khối A – 2004}).$$

Giải:

$$\text{Ta có } A \leq 90^\circ \Rightarrow \cos 2A = 2\cos^2 A - 1 \leq 2\cos A - 1 = 1 - 4\sin^2 \frac{A}{2}$$

$$\text{Đẳng thức có } \Leftrightarrow \cos^2 A = \cos A \quad (1).$$

$$\cos B + \cos C = 2\sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2} \leq 2\sin \frac{C}{2}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \cos \frac{B-C}{2} = 1 \quad (2).$$

$$\text{Đặt } t = \sin \frac{A}{2} \Rightarrow 0 < t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Ta có: } P \leq -4t^2 + 4\sqrt{2}t + 1 = f(t)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t), \quad t \in \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right], \text{ có } f'(t) = -8t + 4\sqrt{2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Lập bảng biến thiên ta có: } f(t) \leq f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3 \Rightarrow P \leq 3.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} \cos A = \cos^2 A \\ \cos \frac{B-C}{2} = 1 \\ \sin \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 90^\circ \\ B = C = 45^\circ \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \max P = 3.$$

Ví dụ 20: Cho tam giác ABC có $A > B > C$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức : } M = \sqrt{\frac{x - \sin A}{x - \sin C}} + \sqrt{\frac{x - \sin B}{x - \sin C}} - 1.$$

Giải :

$$\text{Biểu thức xác định khi } D = (-\infty; \sin C) \cup [\sin A; +\infty).$$

$$M' = \sqrt{\frac{x - \sin C}{x - \sin A}} \cdot \frac{\sin A - \sin C}{(x - \sin C)^2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x - \sin C}{x - \sin B}} \cdot \frac{\sin B - \sin C}{(x - \sin C)^2} > 0, \forall x \in D \Rightarrow M \text{ liên}$$

$$\text{tục và đồng biến trên mỗi khoảng } (-\infty; \sin C), [\sin A; +\infty)$$

$$\text{Do đó } \min M = M(\sin A) = \sqrt{\frac{\sin A - \sin B}{\sin A - \sin C}} - 1$$

Ví dụ 21: Cho một tam giác đều ABC cạnh a . Người ta dựng một hình chữ nhật $MNPQ$ có cạnh MN nằm trên cạnh BC , hai đỉnh P và Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AC và AB của tam giác. Xác định vị trí điểm M sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất đó.

Giải :

$$\text{Đặt } BM = x, 0 < x < \frac{a}{2} \Rightarrow NM = BC - 2BM = a - 2x$$

Trong tam giác vuông BMQ có

$$\tan \widehat{QBM} = \frac{QM}{BM} \Rightarrow QM = BM \cdot \tan \widehat{QBM} = x\sqrt{3}$$

$$\text{Diện tích hình chữ nhật } MNPQ \text{ là } S(x) = MN \cdot QM = (a - 2x)x\sqrt{3}$$

Bài toán quy về : Tìm giá trị lớn nhất của $S(x) = (a - 2x)x\sqrt{3}, x \in \left(0; \frac{a}{2}\right)$

$$S'(x) = -4\sqrt{3}x + a\sqrt{3}, x \in \left(0; \frac{a}{2}\right) \quad S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{4}$$

Bảng biến thiên của $S(x)$ trên khoảng $\left(0; \frac{a}{2}\right)$

x	0	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{2}$	
$S'(x)$		+	0	-
$S(x)$			$\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$	

Vậy diện tích hình chữ nhật lớn nhất là $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ khi $x = \frac{a}{4}$

Bài 3 : TIỆM CẬN HÀM SỐ

3.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang:

• Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là **đường tiệm cận ngang** (gọi tắt là tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$.

• Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là **đường tiệm cận đứng** (gọi tắt là tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$.

2. Đường tiệm cận xiên:

Đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) được gọi là **đường tiệm cận xiên** (gọi tắt là tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Trong đó $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$ hoặc

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax].$$

Chú ý : Nếu $a = 0$ thì tiệm cận xiên trở thành tiệm cận đứng.

3.2 DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Ví dụ 1 : Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số :

$$1. y = \frac{2x-1}{x+2}$$

$$3. y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

$$2. y = \frac{x^2-x+1}{x-1}$$

$$4. y = 1 + \sqrt{1-x^2}$$

Giải :

$$1. y = \frac{2x-1}{x+2}$$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

$$* \text{ Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 2 \text{ và}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 2 \Rightarrow y = 2 \text{ là tiệm cận ngang của đồ thị khi}$$

$x \rightarrow -\infty$ và $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{2x-1}{x+2} = -\infty \text{ và}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{2x-1}{x+2} = +\infty \Rightarrow x = -2 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị khi}$$

$$x \rightarrow (-2)^- \text{ và } x \rightarrow (-2)^+; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x(x+2)} = 0 \Rightarrow \text{hàm số } f \text{ không}$$

có tiệm cận xiên khi $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{x+2} = 0 \Rightarrow \text{hàm số } y \text{ không có tiệm cận}$$

xiên khi $x \rightarrow +\infty$.

$$2. y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$* \text{ Ta có: } y = x + \frac{1}{x-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x + \frac{1}{x-1} \right) = +\infty \text{ và}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(x + \frac{1}{x-1} \right) = -\infty \Rightarrow x = 1 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số}$$

$$\text{khi } x \rightarrow 1^+ \text{ và } x \rightarrow 1^-; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x-1} \right) = +\infty \text{ và}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{x-1} \right) = -\infty \Rightarrow \text{hàm số không có tiệm cận ngang}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} = 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

$\Rightarrow y = x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow +\infty$ và $x \rightarrow -\infty$.

$$3. y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = -1, \Rightarrow y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1, \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = +\infty \Rightarrow x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow 0^-$ và $x \rightarrow 0^+$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x^2} = 0 \Rightarrow$ hàm số y không có tiệm cận xiên khi $x \rightarrow -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x^2} = 0 \Rightarrow$ hàm số y không có tiệm cận xiên khi $x \rightarrow +\infty$

4. $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$

$$y = 1 + \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ y \geq 1 \\ x^2 + (y - 1)^2 = 1 \end{cases}$$

Do đó đồ thị hàm số là nửa đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R = 1$.

Vậy đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Chú ý :

Cho hàm phân thức $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$.

a) Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là số nghiệm của hệ $\begin{cases} v(x) = 0 \\ u(x) \neq 0 \end{cases}$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $\Leftrightarrow \deg u(x) \leq \deg v(x)$, trong đó $\deg$ là bậc của đa thức.

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $\Leftrightarrow \deg u(x) = \deg v(x) + 1$. Khi đó để tìm

tiệm cận xiên ta chia $u(x)$ cho $v(x)$, ta được: $y = ax + b + \frac{u_1(x)}{v(x)}$, trong đó

$$\deg u_1(x) < \deg v(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u_1(x)}{v(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{u_1(x)}{v(x)} = 0 \Rightarrow y = ax + b \text{ là TCX của đồ thị hàm số.}$$

* Nếu đồ thị hàm số có tiệm cận ngang thì không có tiệm cận xiên và ngược lại.

Bài tập tự luyện:

Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số :

$$1. y = \frac{3x-2}{3x+4}$$

$$3. y = x + \sqrt{x^2 + 4x + 5}$$

$$2. y = \frac{2x^2 + 3x - 4}{5x - 2}$$

$$2. y = \frac{\sqrt{x^2 + 5x + 1}}{x + 2}$$

Ví dụ 2: Tìm tiệm cận của các đồ thị hàm số sau:

$$1. y = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$$

$$2. y = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

Giải :

$$1. y = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$* \text{ Ta có: } a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x + 2} - x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x + 2}{\sqrt{x^2 - 2x + 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1} = -1$$

$\Rightarrow y = x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow +\infty$.

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}{x} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} = -1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x + 2} + x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + 2}{\sqrt{x^2 - 2x + 2} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2 + \frac{2}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - 1} = 1$$

$\Rightarrow y = -x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow -\infty$.

2. $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) = 2$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 0$$

$\Rightarrow y = 2x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow +\infty$.

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 1} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} - x} = 0$$

$\Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow -\infty$.

Nhận xét:

1) Xét hàm số $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ ($a \neq 0$).

* Nếu $a < 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận.

* Nếu $a > 0$ đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y = \sqrt{a}(x + \frac{b}{2a})$ khi $x \rightarrow +\infty$ và

$$y = -\sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right) \text{ khi } x \rightarrow -\infty.$$

2) Đồ thị hàm số $y = mx + n + p\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ($a > 0$) có tiệm cận là đường

$$\text{thẳng: } y = mx + n + p\sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|.$$

Bài tập tự luyện:

Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số:

1. $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+4}} - x$

3. $y = \sqrt{x - \sqrt{x^2 + 2x + 3}}$

Ví dụ 3: Tùy theo giá trị của tham số m . Hãy tìm tiệm cận của đồ thị hàm số sau: $y = \frac{x-1}{mx^3-1}$.

Giải :

* $m = 0 \Rightarrow y = -x + 1 \Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận.

* $m = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x-1}{x^3-1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow +\infty$ và $x \rightarrow -\infty$.

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{3} \Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng

* $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Rightarrow$ hàm số xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{m}} \right\}$

Đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Đường thẳng $x = \frac{1}{\sqrt[3]{m}}$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Bài tập tự luyện:

Tùy theo giá trị của tham số m . Hãy tìm tiệm cận của đồ thị hàm số sau:

$$y = \frac{(m-1)x^2 + m + 2}{mx^4 + 4}.$$

Ví dụ 4: Tìm m để hàm số $y = mx + \frac{1}{x}$ có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu của hàm số đã cho đến đường tiệm cận xiên của nó bằng $\frac{2}{\sqrt{17}}$.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

* Ta có : $y' = m - \frac{1}{x^2}, x \neq 0$.

Để hàm số đã cho có cực trị thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

Với $m > 0$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow m - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{\sqrt{m}} < x_2 = \frac{1}{\sqrt{m}}$ và điểm cực

tiểu của hàm số là $A\left(\frac{1}{\sqrt{m}}; 2\sqrt{m}\right)$.

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ nên $(d): y = mx$ là đường cận xiên.

$$\text{Theo bài toán } d_{(A, (d))} = \frac{2}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow \frac{\left| m \frac{1}{\sqrt{m}} - 2\sqrt{m} \right|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{17}}$$

$$\sqrt{17} \cdot m = 2\sqrt{m^2 + 1} \Leftrightarrow 4m^2 - 17m + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Bài toán tương tự :

Tìm m để hàm số $y = \frac{mx^2 - mx + m - 1}{x - 1}$ có cực trị và khoảng cách từ điểm

cực tiểu của hàm số đã cho đến đường tiệm cận xiên của nó bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ví dụ 5 : Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + (m^2 + m + 2)x + m^2 + 3}{x + 1}$. Tìm m để khoảng cách từ gốc O đến tiệm cận xiên hoặc ngang là nhỏ nhất.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

$$y = \frac{mx^2 + (m^2 + m + 2)x + m^2 + 3}{x + 1} = mx + m^2 + 2 + \frac{1}{x + 1}, x \neq -1$$

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + 1} = 0$ nên $(d): y = mx + m^2 + 2$

$\Leftrightarrow (d): mx - y + m^2 + 2 = 0$ là đường cận xiên hoặc ngang của hàm số.

$$\text{Ta có : } d(O; d) = \frac{\left| m^2 + 2 \right|}{\sqrt{\left| m^2 + 1 \right|}} = \sqrt{m^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}} \geq 2$$

Vậy $d(O; d)$ nhỏ nhất bằng 2 khi $\sqrt{m^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}} \Leftrightarrow m = 0$.

Khi đó hàm số có tiệm cận ngang là $y = 2$.

Bài toán tương tự :

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + (m + 2)x + m^2 - 4m + 3}{mx + 1}$. Tìm m để khoảng cách từ gốc O đến tiệm cận xiên hoặc ngang là nhỏ nhất.

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + (3m^2 - 2)x - 2}{x + 3m} \quad (C_m)$, với $m \in \mathbb{R}$.

1. Tìm m để góc giữa hai tiệm cận của đồ thị (C_m) bằng 45° .
2. Tìm m để đồ thị (C_m) có tiệm cận xiên tạo cắt hai trục tọa độ tại A, B sao cho tam giác ΔAOB có diện tích bằng 4.

Giải :

Ta có: $y = mx - 2 + \frac{6m - 2}{x + 3m}$

Đồ thị hàm số có hai tiệm cận $\Leftrightarrow 6m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{3}$.

Phương trình hai đường tiệm cận là: $\Delta_1 : x = -3m \Leftrightarrow x + 3m = 0$

Và $\Delta_2 : y = mx - 2 \Leftrightarrow mx - y - 2 = 0$.

Véc tơ pháp tuyến của Δ_1 và Δ_2 lần lượt là : $\vec{n}_1 = (1; 0)$, $\vec{n}_2 = (m; -1)$

1. Góc giữa Δ_1 và Δ_2 bằng 45° khi và chỉ khi

$$\cos 45^\circ = \cos \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2m^2 = m^2 + 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

Vậy $m = \pm 1$ là những giá trị cần tìm.

2. Hàm số có tiệm cận xiên $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq \frac{1}{3} \end{cases}$. Khi đó: $A(0; -2)$, $B\left(\frac{2}{m}; 0\right)$

Ta có: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot |-2| \cdot \left|\frac{2}{m}\right| = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$

Vậy $m = \pm 2$ là những giá trị cần tìm.

Bài toán tương tự :

Cho hàm số $y = \frac{(m - 1)x^2 + (m + 1)x - 2m + 3}{x - 2m} \quad (C_m)$, với $m \in \mathbb{R}$.

1. Tìm m để góc giữa hai tiệm cận của đồ thị (C_m) bằng 45° .
2. Tìm m để đồ thị (C_m) có tiệm cận xiên tạo cắt hai trục tọa độ tại A, B sao cho tam giác ΔAOB có diện tích bằng 4.

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$ có đồ thị là (C) . Chứng minh rằng:

1. Tích khoảng cách từ một điểm bất kì trên (C) đến hai tiệm cận không đổi
2. Không có tiếp tuyến nào của (C) đi qua giao điểm của hai tiệm cận.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1. Ta có: $y = x + 2 + \frac{3}{x - 1} \Rightarrow$ hai tiệm cận của đồ thị hàm số là $\Delta_1 : x - 1 = 0$

và $\Delta_2 : x - y + 2 = 0$

Gọi $M \in (C) \Rightarrow M\left(x_0; x_0 + 2 + \frac{3}{x_0 - 1}\right) \Rightarrow d_1 = d(M, \Delta_1) = |x_0 - 1|$

$$d_2 = d(M, \Delta_2) = \frac{\left|x_0 - x_0 - 2 - \frac{3}{x_0 - 1} + 2\right|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}|x_0 - 1|}$$

$$\Rightarrow d_1 \cdot d_2 = |x_0 - 1| \cdot \frac{3}{\sqrt{2}|x_0 - 1|} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ đpcm.}$$

2. Gọi $I = \Delta_1 \cap \Delta_2 \Rightarrow I(1; 3)$

Giả sử Δ là tiếp tuyến bất kì của đồ thị $(C) \Rightarrow$ phương trình của Δ có dạng

$$\Delta : y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 = \left(1 - \frac{3}{(x_0 - 1)^2}\right)(x - x_0) + x_0 + 2 + \frac{3}{x_0 - 1}$$

$$\Rightarrow I \in \Delta \Leftrightarrow \left(1 - \frac{3}{(x_0 - 1)^2}\right)(1 - x_0) + x_0 + 2 + \frac{3}{x_0 - 1} = 3$$

$$\Leftrightarrow 1 - x_0 + \frac{3}{x_0 - 1} + x_0 + 2 + \frac{3}{x_0 - 1} - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{6}{x_0 - 1} = 0 \text{ ta thấy phương trình}$$

này vô nghiệm. Vậy không có tiếp tuyến nào của đồ thị (C) đi qua I .

Bài 5 : PHÉP TÍNH TIẾN VÀ TÂM ĐỐI XỨNG

5.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Điểm uốn của đồ thị :

Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm cấp hai trên khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Nếu f'' đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì $I(x_0; f(x_0))$ là một điểm uốn của đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

Nếu hàm số f có đạo hàm cấp hai tại điểm x_0 thì $I(x_0; f(x_0))$ là một điểm uốn của đồ thị hàm số thì $f''(x_0) = 0$

2. Phép tịnh tiến hệ tọa độ :

Công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{OI}$ là
$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases},$$

$$I(x_0; f(x_0)).$$

5.2 DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 : Chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{OI}$.

Ví dụ 1: Tìm tham số thực m để điểm I thuộc đồ thị $(C): y = x^3 + 3mx^2 + (m+2)x + 1$ nằm trên trục hoành, biết rằng hoành độ của điểm I nghiệm đúng phương trình $f''(x) = 0$.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có : $y' = 3x^2 + 6mx + m + 2$

$$y'' = 6x + 6m \text{ và } y'' = 0 \Leftrightarrow x = -m.$$

Để thấy y'' đổi dấu khi x qua điểm $x_0 = -m$. Suy ra

$I(-m; 2m^3 - m^2 - 2m + 1)$ là điểm uốn của đồ thị đã cho.

$$\text{Vì } I \in Ox \Leftrightarrow 2m^3 - m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m-1)(2m^2 + m - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 1 \text{ hoặc } m = -1 \text{ hoặc } m = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$

1. Giải phương trình $f'(\sin x) = 0$

2. Giải phương trình $f''(\cos x) = 0$

3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành

độ là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$1. f'(x) = x^2 - x - 4 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Cả hai nghiệm x đều nằm ngoài đoạn $[-1; 1]$. Do đó phương trình $f'(\sin x) = 0$ vô nghiệm.

$$2. f''(x) = 2x - 1 \Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}. \text{ Do đó phương trình}$$

$$f''(\cos x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$3. f''(x) = 2x - 1 \Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{47}{12}, f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{17}{4}$$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là :

$$y = -\frac{17}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{47}{12} \quad \text{hay} \quad y = -\frac{17}{4}x + \frac{145}{24}$$

Ví dụ 3 : Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C)

1. Xác định điểm I thuộc đồ thị (C) của hàm số đã cho, biết rằng hoành độ của điểm I nghiệm đúng phương trình $f''(x) = 0$.

2. Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tuyến theo vector $\overrightarrow{OI}$ và viết phương trình đường cong (C) đối với hệ IXY . Từ đó suy ra rằng I là tâm đối xứng của đường cong (C) .

3. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm I đối với hệ tọa độ Oxy . Chứng minh rằng trên khoảng $(-\infty; 1)$ đường cong (C) nằm phía dưới tiếp tuyến tại điểm I của (C) và trên khoảng $(1; +\infty)$ đường cong (C) nằm phía trên tiếp tuyến đó.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$1. \text{ Ta có } f'(x) = 3x^2 - 6x, f''(x) = 6x - 6 \quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Hoành độ điểm I thuộc (C) là $x = 1, f(1) = -1$. Vậy $I(1; -1) \in (C)$.

2. Công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tuyến theo vector $\overrightarrow{OI}$ là

$$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - 1 \end{cases}$$

Phương trình của (C) đối với hệ tọa độ IXY là :

$$Y - 1 = (X + 1)^3 - 3(X + 1)^2 + 1 \Leftrightarrow Y = X^3 - 3X.$$

Vì đây là một hàm số lẻ nên đồ thị (C) của nó nhận gốc tọa độ I làm tâm đối xứng.

3. $f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f'(1) = -3$. Phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm I đối với hệ tọa độ Oxy :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = -3(x - 1) - 1 \Leftrightarrow y = g(x) = -3x + 2.$$

Xét hàm $h(x) = f(x) - g(x) = (x^3 - 3x^2 + 1) - (-3x + 2) = (x - 1)^3$ trên $\mathbb{R}$

Dễ thấy $\begin{cases} h(x) < 0, x < 1 \\ h(x) > 0, x > 1 \end{cases}$. Điều này chứng tỏ trên khoảng $(-\infty; 1)$ đường cong

(C) nằm phía dưới tiếp tuyến tại điểm I của (C) và trên khoảng $(1; +\infty)$ đường cong (C) nằm phía trên tiếp tuyến đó.

Ví dụ 4 : Cho hàm số $y = x^3 - (m + 3)x^2 + (2 + 3m)x - 2m$ có đồ thị là (C_m) , m là tham số thực. Gọi I là điểm có hoành độ là nghiệm đúng phương trình $f''(x) = 0$. Tìm tham số m để đồ thị của hàm số có cực trị và điểm I nằm trên trục Ox .

Giải:

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có : $y' = 3x^2 - 2(m + 3)x + 2 + 3m$ và $y'' = 6x - 2(m + 3)$

Đồ thị của hàm số có cực trị và điểm I nằm trên trục Ox

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_y > 0 \\ y_{(x_u)} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (m + 3)^2 - 3(2 + 3m) > 0 \\ \left(\frac{m + 3}{3}\right)^3 - (m + 3) \cdot \left(\frac{m + 3}{3}\right)^2 + (2 + 3m) \cdot \left(\frac{m + 3}{3}\right) - 2m = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 3 > 0 \\ 2m^3 - 9m^2 + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0 \vee m = 3 \vee m = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Dạng 2 : Tâm đối xứng của đồ thị.

Ví dụ 1 : Cho hàm số $y = x^4 - mx^3 + 4x + m + 2$. Tìm tất cả tham số thực m để hàm số đã cho có 3 cực trị A, B, C và trọng tâm G của tam giác ABC trùng với tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = \frac{4x}{4x - m}$.

Giải :

Đồ thị của hàm số $y = \frac{4x}{4x - m}$ có tâm đối xứng là $I(\frac{m}{4}; 1)$

Hàm số : $y = x^4 - mx^3 + 4x + m + 2$, liên tục trên R .

Ta có : $y' = 4x^3 - 3mx^2 + 4$

Hàm số đã cho có 3 cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt, nghĩa là phương trình $4x^3 - 3mx^2 + 4 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $g(x) = 4x^3 - 3mx^2 + 4$ liên tục trên R và

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

$$\text{Ta có : } g'(x) = 12x^2 - 6mx \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, g(0) = 4 > 0 \\ x = \frac{m}{2}, g(\frac{m}{2}) = \frac{16 - m^3}{4} \end{cases}$$

$g'(x)$ đổi dấu 2 lần qua nghiệm, và $g(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khi

$$\begin{cases} \frac{m}{2} > 0 \\ \frac{16 - m^3}{4} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2\sqrt[3]{2}$$

Giả sử $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$ là tọa độ 3 cực trị thỏa mãn đề bài, khi đó

$$y = y'(\frac{x}{4} - \frac{m}{16}) + (-\frac{3m^2x^2}{16} + 3x + \frac{5m}{4} + 2)$$

$$\Rightarrow y_i = -\frac{3m^2x_i^2}{16} + 3x_i + \frac{5m}{4} + 2, y_i' = 0 \quad (i = 1, 2, 3) .$$

Vì G là trọng tâm tam giác ABC , nên $G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; -\frac{m^2}{16}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (x_1 + x_2 + x_3) + \frac{5m}{4} + 2\right)$$

Do x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình $4x^3 - 3mx^2 + 4 = 0$, theo định lý Vi-

$$\text{et ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \frac{3m}{4} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{m}{4} \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = \frac{9m^2}{16} \end{cases}$$

Khi đó $G\left(\frac{m}{4}; -\frac{9m^4}{16^2} + \frac{5m}{4} + 2\right)$ và trọng tâm G của tam giác ABC trùng với

tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = \frac{4x}{4x - m}$ khi và chỉ khi

$$G\left(\frac{m}{4}; -\frac{9m^4}{16^2} + \frac{5m}{4} + 2\right) \equiv I\left(\frac{m}{4}; 1\right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{9m^4}{16^2} + \frac{5m}{4} + 2 = 1 \Leftrightarrow (m - 4)(9m^3 + 36m^2 + 144m + 64) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 4$$

Vậy $m = 4$ thỏa mãn đề bài.

Chú ý : Ngoài cách giải trên ta có thể trình bày :

Hàm số đã cho có 3 cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt, nghĩa là phương trình $4x^3 - 3mx^2 + 4 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Khi đó phương trình $\frac{4x^3 + 4}{x^2} = 3m$ có 3 nghiệm phân biệt khác 0. Nói khác

hơn đường thẳng $y = 3m$ cắt đồ thị của hàm số $h(x) = \frac{4x^3 + 4}{x^2}$, tại 3 giao điểm. Đến đây đã dễ dàng.

Ví dụ 2 : Cho hàm số : $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có đồ thị là (C) . Gọi (C') là đồ thị đối xứng với (C) qua điểm $A(3; 4)$. Tìm phương trình đồ thị (C') .

Giải :

Gọi $M(x, y) \in (C)$ và $M'(x', y') \in (C')$ đối xứng qua đồ thị (C) qua điểm $A(3; 4)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{x+x'}{2} = 3 \\ \frac{y+y'}{2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - x' \\ y = 4 - y' \end{cases}$$

$$\text{Thay vào đồ thị } (C): 8 - y' = \frac{(6 - x')^2 - (6 - x') + 1}{6 - x' - 1} = \frac{x'^2 - 11x' + 31}{5 - x'}$$

$$\text{Hay } y' = 8 - \frac{x'^2 - 11x' + 31}{5 - x'} = \frac{9 + 3x' - x'^2}{5 - x'}.$$

$$\text{Vậy phương trình đồ thị } (C'): y = \frac{-x^2 + 3x + 9}{-x + 5} = \frac{x^2 - 3x - 9}{x - 5}.$$

Bài tập:

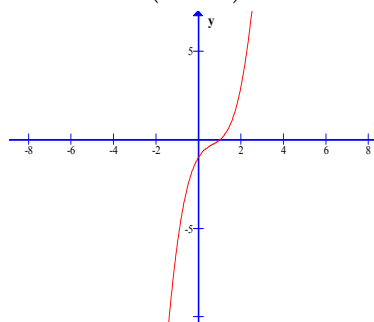
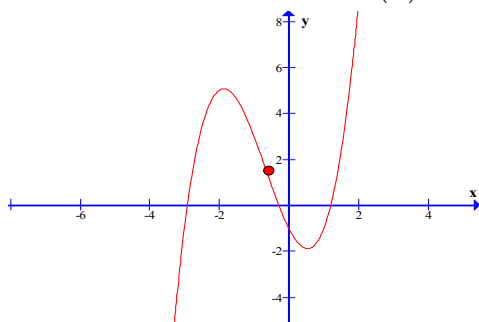
Xét đường cong: $(C): y = mx^3 - nx^2 - mx + n$. Tìm các cặp số $(m; n)$ sao cho trong các giao điểm của (C) với trục hoành có hai giao điểm cách nhau 1995 đơn vị và khoảng cách từ tâm đối xứng của (C) đến trục hoành là 2000 đơn vị.

Bài 6: KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

6.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$

Dạng điệu đồ thị của hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$



Một số tính chất thường gặp của hàm số bậc ba

1. Đồ thị cắt Ox tại 3 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 : \text{có 2 nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \\ f(x_1) \cdot f(x_2) < 0 \end{cases}$$

2. Giả sử $a > 0$ ta có :

a) Đồ thị cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $> \alpha$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt } \alpha < x_1 < x_2 \\ f(\alpha) < 0 \\ f(x_1) \cdot f(x_2) < 0 \end{cases}$$

b) Đồ thị cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $< \alpha$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt } x_1 < x_2 < \alpha \\ f(\alpha) > 0 \\ f(x_1) \cdot f(x_2) < 0 \end{cases}$$

Tương tự cho trường hợp $a < 0$.

Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$.

Giải:

* Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$

* Giới hạn : $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ hàm số không có tiệm cận.

* Đạo hàm : $y' = 3x^2 + 6x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, f(-2) = 5 \\ x = 0, f(0) = 1 \end{cases}$$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$

Hàm số có điểm cực đại tại $x = -2, f(-2) = 5$ và có điểm cực tiểu tại

$$x = 0, f(0) = 1$$

* Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'		+	0	-
	0	+		
y	$-\infty$	5	1	$+\infty$

* $f''(x) = 6x + 6$

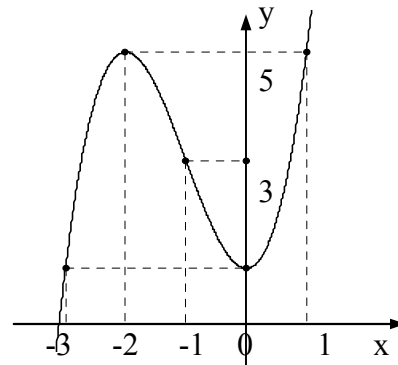
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1, f(-1) = 3, f''(x)$ đổi dấu một lần qua nghiệm $x = -1$ nên $I(-1; 3)$ là điểm uốn của đồ thị.

* Đồ thị :

Đồ thị hàm số đi qua các điểm

$(-3; 1), (-2; 5), (-1; 3), (0; 1), (1; 5)$ và

nhận điểm $I(-1; 3)$ là điểm uốn của đồ thị.



Ví dụ 2: Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + mx + 4$, trong đó m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho, với $m = 0$

2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Giải :

1. Với $m = 0$, ta có hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 4$

* Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$

* Giới hạn : $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ hàm số không có tiệm cận.

* Đạo hàm : $y' = -3x^2 - 6x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, y(-2) = 0 \\ x = 0, y(0) = 4 \end{cases}$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$, nghịch biến trên các khoảng

$(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$

Hàm số có điểm cực đại tại $x = 0, y(0) = 4$ và có điểm cực tiểu tại

$x = -2, y(-2) = 0$

* Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'		-	0	+
	0	-		
y	$+\infty$		4	

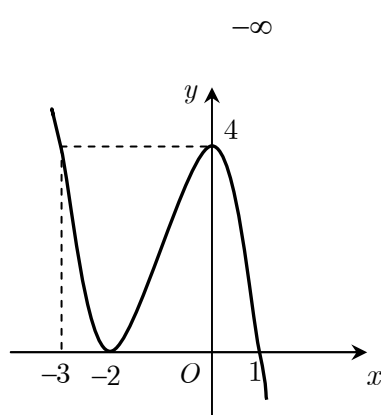
* Đồ thị :

Giao điểm của đồ thị với trục

$$Oy \quad A(0; 4)$$

Giao điểm của đồ thị với trục

$$Ox \quad B(-2; 0), C(1; 0)$$



2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$y' = -3x^2 - 6x + m \leq 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow m \leq 3x^2 + 6x = f(x)$$

Hàm số $f(x) = 3x^2 + 6x$ liên tục trên $(0; +\infty)$

Ta có $f'(x) = 6x + 6 > 0, \forall x > 0$ và $f(0) = 0$.

Bảng biến thiên

x	0	$+\infty$
y'		+
y	0	$+\infty$

Từ đó ta được : $m \leq 0$.

Bài tập tự luyện

1. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

$$f(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x - 3. \text{ Chứng minh rằng phương trình}$$

$$-x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x - 3 = 0 \text{ có ba nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm dương}$$

nhỏ hơn $\frac{1}{2}$.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{17}{3}$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

c) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0 , biết rằng $f''(x_0) = -6$. Giải bất phương trình

$$f'(x-1) > 0$$

d) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Tìm tất cả các đường thẳng đi qua điểm $M(4; 4)$ và cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt.

2. Tìm hệ số a, b, c sao cho đồ thị của hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ cắt trục tung tại điểm có tung

độ bằng 2 và tiếp xúc với đường thẳng $y = 1$ tại điểm có hoành độ là -1 . Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với giá trị a, b, c vừa tìm được

3. Tìm các hệ số m, n, p sao cho hàm số $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + mx^2 + nx + p$ đạt cực

đại tại điểm $x = 3$ và đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $(d): y = 3x - \frac{1}{3}$ tại giao điểm của (C) với trục tung.

Hướng dẫn :

1. a) Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình cho có ba nghiệm phân biệt

$$x_1 < -1 < x_2 < 2 < x_3 \text{ và } \begin{cases} f(0) = -3 < 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} > 0 \end{cases} \Rightarrow f(0).f\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow x \in \left(0; \frac{1}{2}\right).$$

b) $f(-2)f(0) < 0$. Hàm số f liên tục trên đoạn $[0; 2]$ và theo định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục, tồn tại một số thực $\alpha \in (-2; 0)$ sao cho

$f(\alpha) = 0$. Số α là một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Mặt khác hàm số f đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $\alpha \in (-2; 0)$.

$f(0)f(4) < 0$. Hàm số f liên tục trên đoạn $[0; 4]$ và theo định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục, tồn tại một số thực $\beta \in (0; 4)$ sao cho $f(\beta) = 0$. Số β là một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Mặt khác hàm số f đồng biến trên khoảng $(0; 4)$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $\beta \in (0; 4)$. Tương tự phương trình có nghiệm duy nhất thuộc khoảng $(4; +\infty)$.

Đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt, do đó phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

$$c) \quad f''(x) = -6x + 6 \Rightarrow x_0 = 2, f(2) = 24 \Rightarrow (t): y = 9x + 6$$

$$f'(x-1) = -3(x-1)^2 + 6(x-1) + 9 = -3x^2 + 12x$$

$$\Rightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4$$

2.

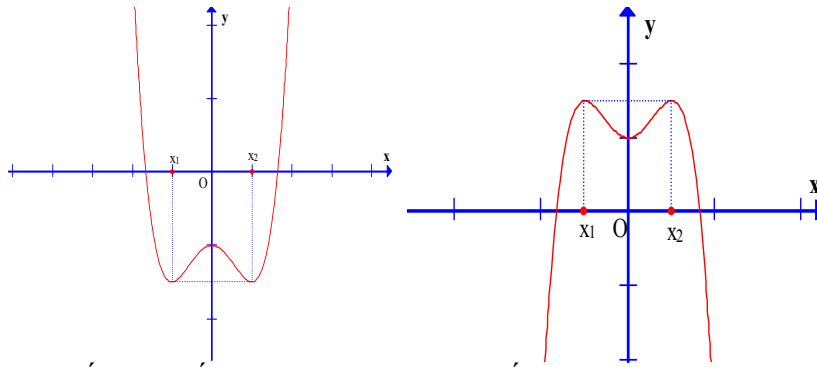
$$\begin{cases} 2 = c \\ f(-1) = -1 + a - b + c = 1 \\ f'(-1) = 3 - 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \\ c = 2 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} (d) \cap Oy = \left\{ A\left(0; -\frac{1}{3}\right) \right\} \\ f(0) = p = -\frac{1}{3} \\ f'(0) = n = 3 \\ f'(3) = 6m - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -\frac{1}{3} \\ n = 3 \\ m = 1 \end{cases}$$

Hàm số trùng phương $f(x) = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0)$
--

Dạng điệu đồ thị của hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0)$



Một số tính chất thường gặp của hàm số trùng phương

1. Đồ thị của hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt lập thành cấp số cộng khi phương trình: $aX^2 + bX + c = 0, (X = x^2 \geq 0)$ có 2 nghiệm dương phân biệt thỏa $X_1 = 9X_2$.

2. Phương trình trùng phương: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (1)

Đặt $t = x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{t}$, ta có phương trình: $at^2 + bt + c = 0$ (2) Một nghiệm dương của (2) ứng với 2 nghiệm của (1).

Vậy điều kiện cần và đủ để phương trình (1) có nghiệm là phương trình (2) có ít nhất một nghiệm không âm.

$$(1) \text{ có 4 nghiệm} \Leftrightarrow (2) \text{ có 2 nghiệm dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ \frac{S}{2} > 0 \end{cases}$$

$$(1) \text{ có 3 nghiệm} \Leftrightarrow (2) \text{ có 1 nghiệm dương và 1 nghiệm bằng 0} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ \frac{S}{2} > 0 \end{cases}$$

$$(1) \text{ có 2 nghiệm} \Leftrightarrow (2) \text{ có 1 nghiệm dương} \Leftrightarrow \begin{cases} P < 0 \\ \Delta = 0 \\ \frac{S}{2} > 0 \end{cases}$$

$$(1) \text{ có 1 nghiệm} \Leftrightarrow (2) \text{ có nghiệm thỏa } \begin{cases} t_1 < 0 = t_2 \\ t_1 = t_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ \frac{S}{2} < 0 \\ \Delta = 0 \\ \frac{S}{2} = 0 \end{cases}$$

$$(1) \text{ vô nghiệm} \Leftrightarrow (2) \text{ vô nghiệm hoặc có 2 nghiệm âm} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ \frac{S}{2} < 0 \end{cases}$$

$$(1) \text{ có 4 nghiệm tạo thành cấp số cộng} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t_1 < t_2 \\ \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \end{cases}. \text{ Ta giải hệ pt:}$$

$$\begin{cases} t_2 = 9t_1 \\ S = t_1 + t_2 \\ P = t_1 t_2 \end{cases}$$

$$3. \text{ Phương trình bậc 4 có tính đối xứng: } ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \quad (1)$$

- Nếu $a = 0$, ta có phương trình: $x(bx^2 + cx + b) = 0$
- Nếu $a \neq 0$, ta có phương trình tương đương:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$, phương trình được viết thành:

$$a(t^2 - 2) + bt + c = 0, |t| \geq 2 \quad (2)$$

Chú ý:

Khi khảo sát hàm số $t = x + \frac{1}{x}$, ta có:

* Một nghiệm lớn hơn 2 của phương trình (2) tương ứng với 2 nghiệm dương của phương trình (1).

* Một nghiệm nhỏ hơn 2 của phương trình (2) tương ứng với 2 nghiệm âm của phương trình (1).

* Một nghiệm $t = -2$ của phương trình (2) tương ứng với nghiệm $x = -1$ của phương trình (1).

* Một nghiệm $t = 2$ của phương trình (2) tương ứng với nghiệm $x = 1$ của phương trình (1).

* Phương trình $t = x + \frac{1}{x}$ vô nghiệm khi $|t| < 2$

4. Phương trình bậc 4 có tính đối xứng: $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$ (1)

• Nếu $a = 0$, ta có phương trình: $x(bx^2 + cx - b) = 0$

• Nếu $a \neq 0$, ta có phương trình tương đương:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x - \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

Đặt $t = x - \frac{1}{x}$, phương trình được viết thành:

$$a(t^2 + 2) + bt + c = 0, t \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Chú ý: Phương trình $t = x - \frac{1}{x}$ có 2 nghiệm trái dấu với mọi t

5. $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = e$, với $a+b = c+d$.

Đặt $t = x^2 + (a+b)x$.

6. $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$, với $\alpha = \frac{a-b}{2}$. Đặt $t = x + \frac{a+b}{2}$, $t \in \mathbb{R}$

Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

Giải:

* Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$

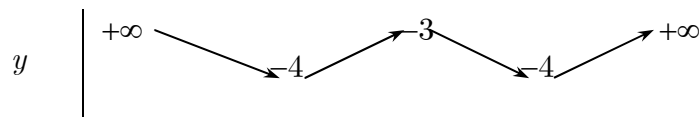
* Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ hàm số không có tiệm cận.

* Đạo hàm: $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, f(0) = -3 \\ x = -1, f(-1) = -4 \\ x = 1, f(1) = -4 \end{cases}$$

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0
	$-$	0	$+$		



Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$

Hàm số có điểm cực đại tại $x = 0, f(0) = -3$ và có điểm cực tiểu tại

$$x = -1, f(-1) = -4 \quad \text{và} \quad x = 1, f(1) = -4$$

$$* \quad f''(x) = 12x^2 - 4$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -3\frac{5}{9} \\ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -3\frac{5}{9} \end{cases}, f''(x) \text{ đổi dấu hai lần qua nghiệm}$$

$$x = x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{và} \quad x = x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{nên} \quad U_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -3\frac{5}{9}\right) \quad \text{và} \quad U_2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -3\frac{5}{9}\right) \text{ là}$$

hai điểm uốn của đồ thị.

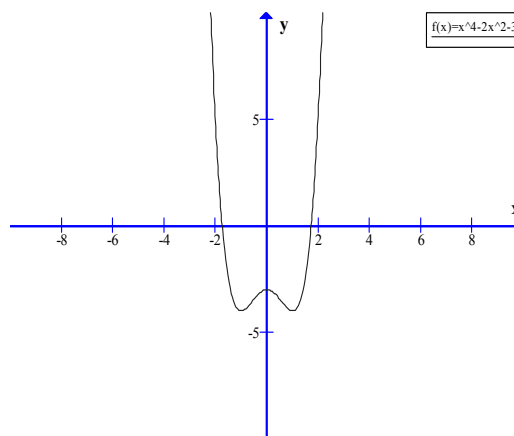
* Đồ thị:

Giao điểm của đồ thị với trục Oy $A(0; -3)$

Giao điểm của đồ thị với trục

Ox $B(-\sqrt{3}; 0), C(\sqrt{3}; 0)$

Đồ thị là hàm số chẵn nên nhận trục Oy làm trục đối xứng



Ví dụ 2: Chứng minh rằng phương trình: $x^4 - 2(m^2 + 2)x^2 + m^4 + 3 = 0$

luôn có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 với mọi giá trị của m .

Tìm giá trị m sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 11$.

Giải:

$$x^4 - 2(m^2 + 2)x^2 + m^4 + 3 = 0 \quad (1)$$

Đặt : $t = x^2$, ta có : $t^2 - 2(m^2 + 2)t + m^4 + 3 = 0 \quad (t \geq 0)$

Ta chứng tỏ (2) luôn có hai nghiệm : $0 < t_1 < t_2$.

$$\Delta' = (m^2 + 2)^2 - (m^4 + 3) = 4m^2 + 1 > 0 \text{ với mọi } m.$$

Vậy (2) luôn có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 và $t_1 \cdot t_2 = m^4 + 3 > 0$

$$t_1 + t_2 = 2(m^2 + 2) > 0$$

Do đó phương trình (1) có 4 nghiệm : $-\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, -\sqrt{t_2}, \sqrt{t_2}$

$$\begin{aligned} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \\ &= (-\sqrt{t_1})^2 + (\sqrt{t_1})^2 + (-\sqrt{t_2})^2 + (\sqrt{t_2})^2 + (-\sqrt{t_1}) \cdot (\sqrt{t_1}) \cdot (-\sqrt{t_2}) \cdot (\sqrt{t_2}) = 2(t_1 + t_2) + t_1 \cdot t_2 \end{aligned}$$

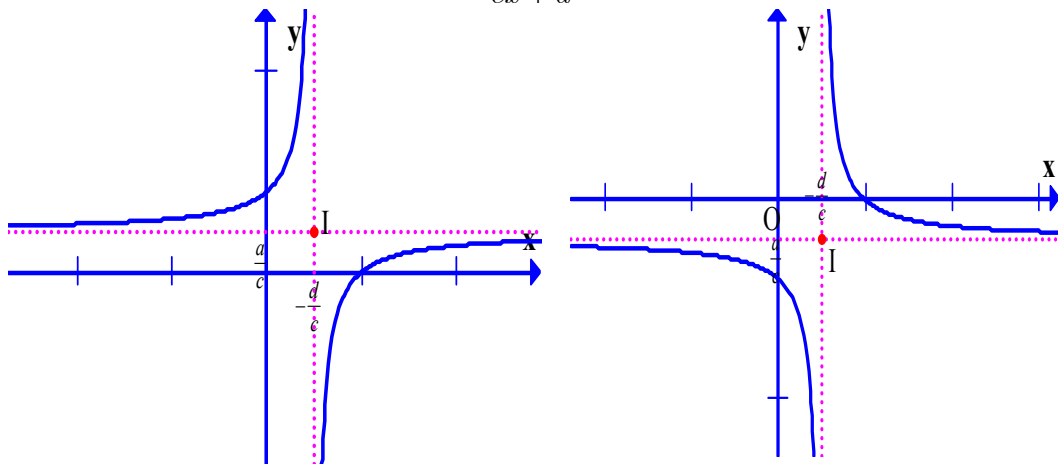
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 4(m^2 + 2) + m^4 + 3 = m^4 + 4m^2 + 11$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 11 \Leftrightarrow m^4 + 4m^2 + 11 = 11 \Leftrightarrow m^4 + 4m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$$

Hàm số hữu tỷ $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (c \neq 0, ad - bc \neq 0) \Rightarrow f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$$

Dạng điệu đồ thị của hàm số $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (c \neq 0, ad - bc \neq 0)$



Ví dụ: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{2x - 1}{x - 1}$

Giải :

* Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

* Giới hạn :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty \Rightarrow x = 1 \text{ là tiệm cận đứng}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2 \Rightarrow y = 2 \text{ là tiệm cận ngang.}$$

* Đạo hàm : $y' = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0, x \neq 1.$

Đồ thị của hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

* Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'			
		-	-
y	2	$+\infty$	2

* Đồ thị : Giao điểm của đồ thị

với trục Oy $A(0;1)$

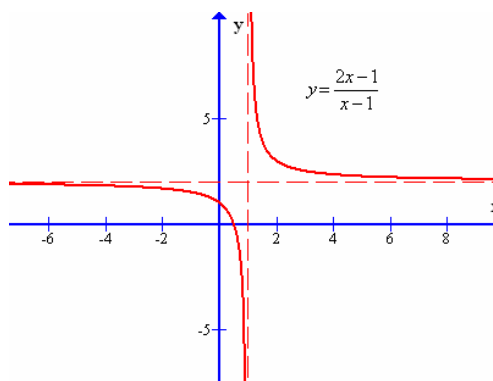
Giao điểm của đồ thị với trục

$$Ox \quad B\left(\frac{1}{2}; 0\right)$$

Đồ thị của hàm số nhận

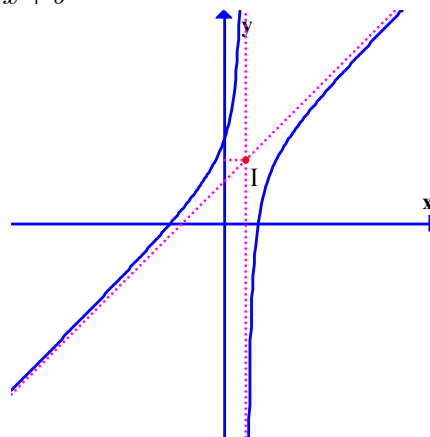
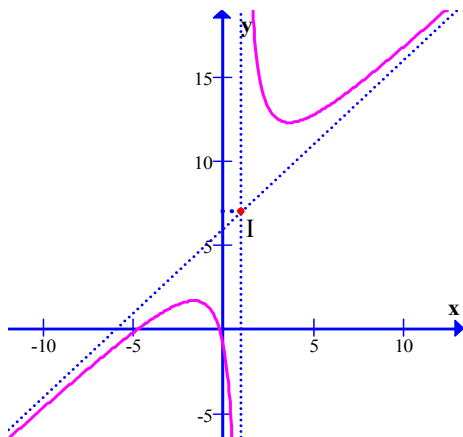
$I(1;2)$ giao điểm hai đường

tiệm cận làm tâm đối xứng.



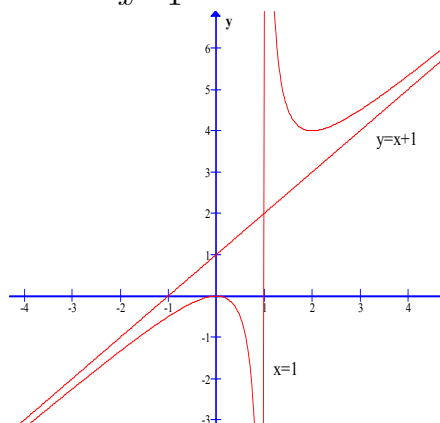
Hàm số hữu tỷ $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'} \Rightarrow y' = \frac{aa'x^2 + 2ab'x + bb' - ca'}{(a'x + b')^2}$

Dạng điệu đồ thị của hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$

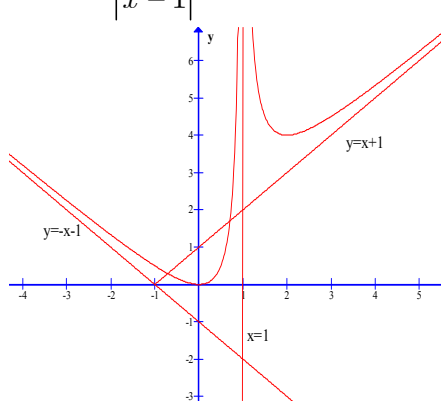


Dạng điệu hàm số chứa giá trị tuyệt đối

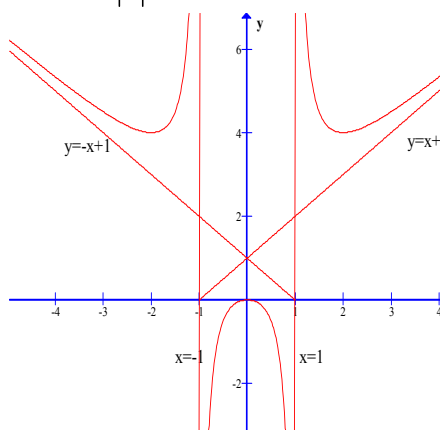
$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \quad (C)$$



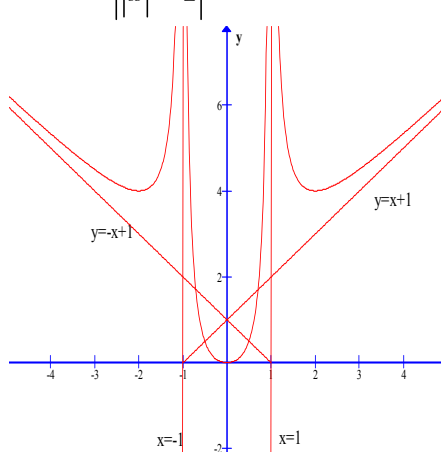
$$f(x) = \left| \frac{x^2}{x-1} \right| \quad (C_1)$$



$$f(x) = \frac{x^2}{|x|-1} \quad (C_2)$$

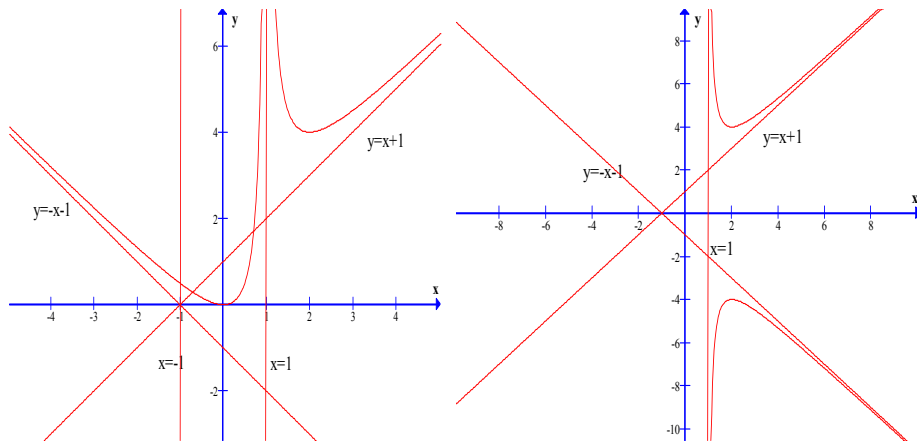


$$f(x) = \left| \frac{x^2}{|x|-1} \right| \quad (C_3)$$



$$f(x) = \frac{x^2}{|x-1|} \quad (C_4)$$

$$|f(x)| = \frac{x^2}{x-1} \quad (C_5)$$



Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$

Giải :

* Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

* Giới hạn :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \Rightarrow x = 1 \text{ là tiệm cận}$$

đứng

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x - 1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x - 1} = 0 \text{ là}$$

$\Rightarrow y = x - 2$ tiệm cận xiên.

* Đạo hàm : $y' = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}, x \neq 1.$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, f(-1) = -5 \\ x = 3, f(3) = 3 \end{cases}$$

* Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$ và $(1; 3)$

Hàm số có điểm cực đại tại $x = -1, f(-1) = -5$ và có điểm cực tiểu tại

$$x = 3, f(3) = 3$$

* Đồ thị : Dành cho bạn đọc

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + (2m-1)x - 1}{x+2}$ có đồ thị là (C_m) , m là tham số.

1. Chứng minh rằng với mọi $m > 0$ hàm số luôn có cực đại, cực tiểu.

2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số với $m = 1$.

3. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số biết tiếp tuyến đi qua $A(1;0)$.

Giải :

$$y = mx - 1 + \frac{1}{x+2}. \text{ Hàm số cho xác định } D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$1. y' = m - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{m(x+2)^2 - 1}{(x+2)^2}.$$

Với $m > 0$ thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -2 . Vậy hàm số luôn có cực đại và cực tiểu khi $m > 0$.

$$2. \text{ Với } m = 1, y = x - 1 + \frac{1}{x+2}$$

* Hàm số cho xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$$

Vì $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+2} = 0$$

nên đường $y = x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

$$* y' = 1 - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)^2 - 1}{(x+2)^2}, x \neq -2$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, y(-1) = -1 \\ x = -3, y(-3) = -5 \end{cases}$$

* Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-5	$+\infty$	-1	$+\infty$	

Đồ thị của hàm số đồng biến trên các khoảng : $(-\infty; -3), (-1; +\infty)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-3; -2), (-2; -1)$

Đồ thị của hàm số đạt điểm cực đại tại $x = -3, y(-3) = -5$ và đạt điểm cực tiểu tại $x = -1, y(-1) = -1$.

Đồ thị: Học sinh tự vẽ

3. Xét (d) đi qua $A(1; 0)$ và có hệ số góc k . Nên $(d) : y = k(x - 1)$

(d) tiếp xúc với đồ thị (C) của hàm số khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x - 1 + \frac{1}{x + 2} = k(x - 1) \\ 1 - \frac{1}{(x + 2)^2} = k \end{cases} \Rightarrow k = \frac{5}{9}. \text{ Vậy tiếp tuyến là: } (d) : y = \frac{5}{9}(x - 1)$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ (1)

1. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số (1)

2. Tìm trên đường thẳng $y = 4$ các điểm mà từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến đồ thị hàm số.

Giải :

1. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ (1)

Hàm số cho xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$* y' = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}, x \neq 1 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, y(-1) = -2 \\ x = 3, y(3) = 6 \end{cases}$$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1; 1), (1; 3)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1), (3; +\infty)$.

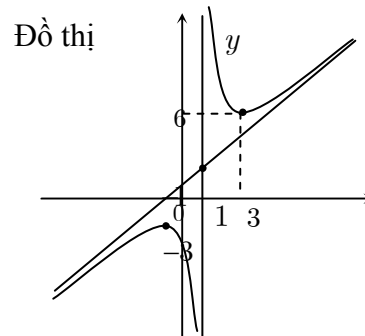
Đồ thị của hàm số đạt điểm cực đại tại $(-1; -2)$ và đạt điểm cực tiểu tại $(3; 6)$.

* $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng.

* $\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (x + 1)] = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (x + 1)] = 0 \Rightarrow y = x + 1$ là tiệm cận xiên.

* Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-2	$+\infty$	6	$+\infty$



Đồ thị : Nhận I(1;2) làm tâm đối xứng.

2. Tìm trên đường thẳng $y = 4$ các điểm mà từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến đồ thị hàm số.

Gọi $M(a; 4) \in (d) : y = 4$ là điểm cần tìm .

Khi đó tiếp tuyến với (C) kẻ từ M có phương trình : $(\Delta) : y = k(x - a) + 4$.

Để (Δ) tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = k(x - a) + 4 & (1) \\ \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = k & (2) \end{cases}$ có nghiệm $x \neq 1$

Từ (1), (2) $\Rightarrow (3 - a)x^2 + 2(a - 7)x + 3a + 7 = 0$ (3)

Để từ M kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến đồ thị hàm số. Khi phương trình (3) có 2 nghiệm phân biệt $x \neq 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - a \neq 0 \\ \Delta = (a - 7)^2 - (3a + 7) \cdot (3 - a) > 0 \\ 3 - a + 2(a - 7) + 3a + 7 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 3 \\ a^2 - 4a + 7 > 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 3 \\ a \neq 1 \end{cases}$

Vậy tập hợp các điểm cần tìm là đường thẳng $(d) : y = 4$ bỏ đi các điểm

$(1; 4), (3; 4)$.

Bài 7: GIAO ĐIỂM CỦA HAI ĐỒ THỊ

Phương pháp :

- Lập phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$ là : $f(x) = g(x)$ (*).
- Biện luận số nghiệm của phương trình (*), số nghiệm phương trình (*) là số giao điểm của (C) và (C') .

Ví dụ 1 : Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x-2}$ có đồ thị là (C) . Tìm tất cả tham số thực m để đường thẳng $(d): y = mx + 1$ cắt đồ thị của hàm số tại 2 điểm phân biệt.

Giải :

Đồ thị là (C) cắt (d) tại 2 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình :

$$\frac{x-3}{x-2} = mx + 1 \text{ có 2 nghiệm phân biệt khi đó phương trình}$$

$$g(x) = mx^2 - 2mx + 1 = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt } x \neq 2 \text{ hay}$$

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - m > 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < 0 \vee m > 1 \\ 4m - 4m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 1 \end{cases}$$

Bài tập tương tự:

1. Tìm tất cả tham số thực m để đường thẳng $(d): y = mx + 4$ cắt đồ thị của

hàm số $y = \frac{x^2}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt.

2. Giả sử (d) là đường thẳng đi qua $A(-3;1)$ và có hệ số góc m . Tìm tất cả tham số thực m để đường thẳng (d) cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ tại 3 điểm phân biệt.

Ví dụ 2 : Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Gọi (d_m) là đường thẳng đi qua điểm $A(-2;2)$ và có hệ số góc m . Tìm m để đường thẳng (d_m) cắt đồ thị (C)

- Tại hai điểm phân biệt?
- Tại hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị ?.

Giải :

$$(d_m) : y = mx + 2(m + 1)$$

$$(d_m) \cap (C) : g(x) = mx^2 + 3mx + 2m + 3 = 0, x \neq -1 (*)$$

- Để $(d_m) \cap (C)$ tại hai điểm phân biệt khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm

$$\text{phân biệt khác } -1. \text{ Khi đó ta có hệ : } \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 12 \end{cases}$$

- Để $(d_m) \cap (C)$ tại hai điểm thuộc hai nhánh khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < -1 < x_2 \Leftrightarrow mg(-1) < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Cách khác : Để $(d_m) \cap (C)$ tại hai điểm thuộc hai nhánh khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < -1 < x_2$. Đặt $x = t - 1$ khi đó phương trình $(*)$ trở thành tìm m để phương trình $mt^2 + mt + 3 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

Ví dụ 3 : Tìm tham số m để đường thẳng $(d_m) : y = m(x + 1) - 2$ cắt đồ thị hàm số $(C) : y = \frac{x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho hai điểm A, B đối xứng nhau qua $M(1; 0)$.

Giải :

- Điều kiện cần: đường thẳng (d_m) cắt đồ thị hàm số (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho hai điểm A, B đối xứng nhau qua $M(1; 0)$ thì điểm M thuộc đường thẳng (d_m) , do đó $0 = m(1 + 1) - 2 \Leftrightarrow m = 1$.

- $m = 1$ thì $(d_m) \equiv (d) : y = x - 1$, phương trình hoành độ giao điểm (d) và

$$(C) \text{ là } \frac{x+1}{x-1} = x-1 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow A(0; -1) \\ x = 3 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow B(3; 2) \end{cases}$$

Vì trung điểm AB là $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) \neq M$ nên A, B không đối xứng qua M .

Do đó không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = x^3 - 3m^2x + 2m$ có đồ thị là (C_m) . Tìm m để

(C_m) cắt Ox tại đúng 2 điểm phân biệt.

Giải:

* Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

* Ta có : $y' = 3x^2 - 3m^2$

Để (C_m) cắt Ox tại đúng 2 điểm phân biệt khi (C_m) có 2 cực trị đồng thời

$y_{C\mathbb{D}} = 0$ hoặc $y_{CT} = 0$.

* (C_m) có 2 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 3x^2 - 3m^2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt. Khi $m \neq 0$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm m$.

Bảng xét dấu y' :

x	$-m$		m	
y'	+	0	-	0

$y_{C\mathbb{D}} = y(-m) = 0 \Leftrightarrow 2m^3 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ (loại)

$y_{CT} = y(m) = 0 \Leftrightarrow -2m^3 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \vee m = \pm 1$

Vậy, $m = \pm 1$ thì (C_m) cắt Ox tại đúng 2 điểm phân biệt.

Ví dụ 5: Tìm m để đồ thị $(C_m): y = x^3 - 3mx^2 - 3x + 3m + 2$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 15$.

Giải :

(C_m) cắt trục Ox : $x^3 - 3mx^2 - 3x + 3m + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)[x^2 - (3m-1)x - 3m-2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - (3m-1)x - 3m-2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

(C_m) cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2, x_3 với $x_3 = 1$

thì x_1, x_2 là nghiệm khác 1 của phương trình (2). Theo định lý Vi-et ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3m - 1 \\ x_1 x_2 = -3m - 2 \end{cases}$$

$$\text{Theo bài toán ta có : } \begin{cases} \Delta_{(2)} > 0 \\ 1^2 - (3m-1) \cdot 1 - 3m-2 \neq 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 + 6m + 9 > 0 \\ m \neq 0 \\ 9m^2 - 9 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty).$$

Ví dụ 6: Tìm các giá trị của tham số m sao cho $(d): y = x + 4$ cắt đồ thị

$(C_m): y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ tại ba điểm phân biệt $A(0;4), B, C$ sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$ (đvdt), biết $K(1;3)$.

Giải :

Phương trình hoành độ điểm chung của (C_m) và (d) là:

$$x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4 = x + 4 \quad (1) \Leftrightarrow x(x^2 + 2mx + m + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ g(x) = x^2 + 2mx + m + 2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

(d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;4), B, C \Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 2 > 0 \\ g(0) = m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \vee m \geq 2 \\ m \neq -2 \end{cases} \quad (*).$$

Mặt khác: $d(K, d) = \frac{|1 - 3 + 4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Do đó: $S_{\triangle KBC} = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} BC \cdot d(K, d) = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow BC = 16 \Leftrightarrow BC^2 = 256$

$$\Leftrightarrow (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 = 256 \text{ với } x_B, x_C \text{ là hai nghiệm của phương trình (2).}$$

$$\Leftrightarrow (x_B - x_C)^2 + ((x_B + 4) - (x_C + 4))^2 = 256 \Leftrightarrow 2(x_B - x_C)^2 = 256$$

$$\Leftrightarrow (x_B + x_C)^2 - 4x_B x_C = 128 \Leftrightarrow 4m^2 - 4(m+2) = 128$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 34 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{137}}{2} \text{ (thỏa } (*)).$$

Vậy $m = \frac{1 \pm \sqrt{137}}{2}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 7 : Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x-1}$

1. Tìm a, b để đồ thị hàm số cắt trục tung tại $A(0; -1)$ và tiếp tuyến của đồ thị tại A có hệ số góc bằng -3 . Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số với a, b vừa tìm được.
2. Cho đường thẳng (d) có hệ số góc m và đi qua điểm $B(-2; 2)$. Tìm m để (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt M_1, M_2 . Các đường thẳng đi qua M_1, M_2 song song với các trục tọa độ tạo thành hình chữ nhật. Tính các cạnh

của hình chữ nhật đó theo m , khi nào hình chữ nhật này trở thành hình vuông.

Giải :

$$1. \begin{cases} A(0; -1) \in y = \frac{ax+b}{x-1} \\ y' = \frac{-a-1}{(x-1)^2} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{2x+1}{x-1}$$

2. (d) đi qua điểm $B(-2; 2)$ có phương trình $y = m(x+2) + 2$

Để (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt M_1, M_2 khi phương trình

$m(x+2) + 2 = \frac{2x+1}{x-1}$ có hai nghiệm khác 1, hay phương trình

$mx^2 + mx - 2m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1, tức là

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = m^2 + 4m(2m+3) > 0 \\ m1^2 + m1 - 2m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < -\frac{4}{3} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{4}{3} \\ m > 0 \end{cases} \quad (*)$$

Giả sử $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$, hai cạnh hình chữ nhật M_1PM_2Q có độ dài là

$$M_1P = |x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{9m^2 + 12m}}{|m|}, M_1Q = |y_2 - y_1| = \sqrt{9m^2 + 12m}$$

Hình chữ nhật M_1PM_2Q trở thành hình vuông khi và chỉ khi

$$M_1P = M_1Q \Leftrightarrow \frac{\sqrt{9m^2 + 12m}}{|m|} = \sqrt{9m^2 + 12m} \Leftrightarrow |m| = 1 \Leftrightarrow m = 1 \quad (do(*))$$

Bài tập tương tự :

1. Cho hàm số $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) và parabol

$$(P) : g(x) = 2x^2 + 1$$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số. Tùy theo giá trị của m , giải và biện luận phương trình $2x^3 + 3x^2 - m = 0$

b) Chứng tỏ rằng trong số tiếp tuyến của đồ thị (C) thì tiếp tuyến tại điểm uốn I có hệ số góc nhỏ nhất. Viết phương trình tiếp tuyến đó. Chứng tỏ I là tâm đối xứng của đồ thị (C).

c) Gọi A, B là giao điểm của đồ thị (C) và parabol (P) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) và parabol (P) tại các giao điểm của chúng.

d) Xác định trên khoảng đó (C) nằm phía trên hoặc phía dưới (P) .

Hướng dẫn :

c) $A\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right), B(0;1)$. Tiếp tuyến (C) tại A, B là $y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}, y = 1$. Tiếp

tuyến (P) tại A, B là $y = -2x + \frac{1}{2}, y = 1$.

d) Xét $h(x) = f(x) - g(x) = 2x^3 + x^2$. Lập bảng xét dấu :

$h(x) < 0, x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow (C)$ nằm phía dưới

(P) . $h(x) > 0, x \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right), (0; +\infty) \Rightarrow (C)$ nằm phía trên (P) .

2. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 1$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm uốn I của nó. Chứng minh rằng trong số tiếp tuyến của đồ thị thì tiếp tuyến tại I có hệ số góc nhỏ nhất.

b) Gọi (d_m) là đường thẳng đi qua điểm I có hệ số góc m . Tìm các giá trị m sao cho đường thẳng (d_m) cắt đồ thị đã cho tại ba điểm phân biệt.

Hướng dẫn :

a) $y = -3x + 1$

b) $m > -3$

3. Cho hàm số $f(x) = x^4 - (m+1)x^2 + m$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với $m = 2$. Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm uốn của đồ thị.

b) Tìm các giá trị của m sao cho đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm, tạo thành ba đoạn thẳng có độ dài bằng nhau.

Hướng dẫn :

b) $x^4 - (m+1)x^2 + m = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - m) = 0$. Để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt, tạo thành ba đoạn thẳng có độ dài bằng nhau khi $0 < m \neq 1$.

$$\bullet m > 1, \sqrt{m} - 1 = 1 - (-1) \Leftrightarrow m = 9$$

$$\bullet 0 < m < 1, 1 - \sqrt{m} = \sqrt{m} - (-\sqrt{m}) \Leftrightarrow m = \frac{1}{9}$$

Ngoài cách giải trên các bạn có thể dùng cấp số cộng (lớp 11) để giải.

4.

- a) Với giá trị nào của m , đường thẳng $y = m$ cắt đường cong $y = x^4 - 2x^2 - 3$ tại 4 điểm phân biệt?
- b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , đường thẳng $(d_m): y = x - m$ cắt đường cong $y = \frac{-x^2 + 2x}{x - 1}$ tại hai điểm phân biệt.
- c) Tìm k để đường thẳng $y = kx + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 2}$ tại 2 điểm phân biệt A, B . Tìm quỹ tích trung điểm I của AB .

5. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}, (C)$.

- a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C) .
- b) Tìm m để phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt: $x^2 - 2x = m|x - 1| - 2$.
- c) Tìm m để đường thẳng $(d): y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại 2 điểm A, B đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x + 3$.
- d) Chứng minh rằng qua điểm $E(1; 0)$ ta không thể kẻ được một tiếp tuyến nào đến đồ thị hàm số.

6. Cho hàm số $f(x) = \frac{x + 2}{2x + 1}$ có đồ thị (G)

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.
- b) Chứng minh rằng đường thẳng $(d_m): y = mx + m - 1$ luôn đi qua điểm cố định của đường cong (G) khi m thay đổi.
- c) Tìm các giá trị của m sao cho đường thẳng đã cho cắt đường cong (G) tại hai điểm thuộc cùng một nhánh của (G) .

Hướng dẫn:

- b) $M(-1; -1)$ là điểm cố định mà (d_m) đi qua khi m biến thiên và $M(-1; -1) \in (G)$.
- c) $(d_m) \cap (G): m(x + 1) - 1 = \frac{x + 2}{2x + 1}, x \neq -\frac{1}{2}$
- $$\Leftrightarrow (x + 1)(2mx + m - 3) = 0, x \neq -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 < -\frac{1}{2} \\ k(x) = 2mx + m - 3 = 0 \end{cases}$$

Hai nhánh của (G) nằm về hai bên của tiệm cận đứng $x = -\frac{1}{2}$. Đường thẳng

$(d_m) \cap (G)$ tại hai điểm thuộc cùng một nhánh của đồ thị khi phương trình

$k(x) = 2mx + m - 3 = 0$ có nghiệm $x < -\frac{1}{2}$ và $x \neq -1$, khi đó ta có

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ x = \frac{3-m}{2m} < -\frac{1}{2} \\ k(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \frac{3}{2m} < 0 \\ -m-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 0 \\ m < -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \neq m < 0$$

Bài 8 :SỰ TIẾP XÚC CỦA HAI ĐƯỜNG CONG

Bài toán 1 :

Hai đường cong $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$ tiếp xúc nhau khi và chỉ khi

hệ phương trình sau: $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm.

Ví dụ 1 : Tìm tham số thực m để đường thẳng $(d): y = m(x-3)$ tiếp xúc với đồ thị $(C): y = -\frac{1}{3}x^3 + 3x$.

Giải :

(d) tiếp xúc với (C) khi hệ sau : $\begin{cases} -\frac{1}{3}x^3 + 3x = m(x-3) \\ -x^2 + 3 = m \end{cases} (*)$ có nghiệm.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 9x^2 + 27 = 0 \\ m = -x^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2x^2 - 3x - 9 = 0 \\ m = -x^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \Rightarrow m = -6 \\ x = -\frac{3}{2} \Rightarrow m = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Ví dụ 2 : Tìm trên trục hoành những điểm mà từ đó có thể kẻ đến đồ thị của hàm số : $y = \frac{x^2}{x-1}$ hai tiếp tuyến tạo với nhau 1 góc 45° .

Giải :

Gọi $M \in Ox \Rightarrow M(x_0; 0)$, đường thẳng đi qua M có hệ số góc là k , phương trình có dạng : $(d) : y = k(x - x_0)$.

(d) là tiếp tuyến của đồ thị khi hệ sau có nghiệm :
$$\begin{cases} \frac{x^2}{x-1} = k(x - x_0) \\ \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = k \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}(x - x_0) \Leftrightarrow x[(x_0 + 1)x - 2x_0] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2x_0}{x_0 + 1}, x_0 \neq -1 \end{cases}$$

- $x = 0 \Rightarrow k = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0$.

- $x = \frac{2x_0}{x_0 + 1} \Rightarrow k = \frac{-4x_0}{(x_0 + 1)^2}$

- Tiếp tuyến qua M tạo với đồ thị của hàm số : $y = \frac{x^2}{x-1}$ hai tiếp tuyến tạo

với nhau 1 góc 45° khi và chỉ khi

$$\tan 45^\circ = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right| \Rightarrow \frac{4x_0}{(x_0 + 1)^2} = 1 \Rightarrow x_0 = 3 \pm 2\sqrt{2}.$$

Vậy $M(3 - 2\sqrt{2}; 0), (3 + 2\sqrt{2}; 0)$

Ví dụ 3 : Tìm tất cả các điểm trên trục hoành những điểm M mà qua đó vẽ được đúng 3 tiếp tuyến đến đồ thị $(C) : y = x^3 + 3x^2$ mà trong đó có 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau.

Giải :

Gọi $M(a; 0) \in Ox$, đường thẳng (t) đi qua M và có hệ số góc

$$k \Rightarrow (t) : y = k(x - a).$$

$$(t) \text{ tiếp xúc với } (C) \text{ khi hệ sau có nghiệm : } \begin{cases} x^3 + 3x^2 = k(x - a) & (1) \\ 3x^2 + 6x = k & (2) \end{cases}$$

Từ (1), (2) suy ra : $x^3 + 3x^2 = 3x^2 + 6x(x - a) \Leftrightarrow 2x^3 + 3(a - 1)x^2 - 6ax = 0$

$$\Leftrightarrow x[2x^2 - 3(a-1)x - 6a] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - 3(a-1)x - 6a = 0 \quad (3) \end{cases}$$

- $x = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow 1$ tiếp tuyến.

Qua M kẻ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C) mà trong đó có 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau.

Khi đó (3) có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq 0$ và $k_1 k_2 = -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ \left(3x_1^2 + 6x_1\right)\left(3x_2^2 + 6x_2\right) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ 9(a-1)^2 + 48a > 0 \\ 9(x_1 x_2)^2 + 18x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 36x_1 x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < -3 \vee a > -\frac{1}{3} \quad \text{và } a \neq 0 \\ 81a^2 - 81a(a-1) - 108a + 1 = 0 \\ \left(\begin{array}{l} \text{vì } x_1 x_2 = -3a \quad ; \quad x_1 + x_2 = \frac{3(a-1)}{2} \end{array} \right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < -3 \vee a > -\frac{1}{3} \quad \text{và } a \neq 0 \\ -27a + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{27}$$

Vậy $M\left(\frac{1}{27}, 0\right) \in Ox$ thỏa bài toán.

Bài toán 2 :

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C) : y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; f(x_0))$ có dạng : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Ví dụ 1 : Tìm tọa độ tiếp điểm của đồ thị $(C) : y = \frac{x-4}{x-1}$ với tiếp tuyến (t) , biết rằng tiếp tuyến (t) tạo với đường thẳng $(d) : y = -2x + 2010$ 1 góc 45° .

Giải :

- $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- Ta có : $y' = \frac{3}{(x-1)^2}, x \neq 1$

- Gọi $M(x_0; f(x_0))$ là tọa độ tiếp điểm cần tìm thì hệ số góc tiếp tuyến (t) là

$$k = \frac{3}{(x_0 - 1)^2}, x_0 \neq 1.$$

- Vì (t) và (d) tạo nhau 1 góc 45° khi $\tan 45^\circ = \left| \frac{k+2}{1-2k} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{3} \\ k = 3 \end{cases}$

* $k = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{(x_0 - 1)^2} = -\frac{1}{3}$ điều này không xảy ra .

* $k = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{(x_0 - 1)^2} = 3 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow M(0; 4) \\ x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -2 \Rightarrow M(2; -2) \end{cases}$

Ví dụ 2 : Cho hàm số $y = \frac{2x+3}{x-2}$, có đồ thị (C) . Tìm tất cả các tham số m để đường thẳng $(t): y = 2x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt mà hai tiếp tuyến tại đó song song với nhau.

Giải :

Đường thẳng $(t): y = 2x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt mà hai tiếp tuyến tại

đó song song với nhau khi và chỉ khi phương trình $\frac{2x+3}{x-2} = 2x+m$ có hai

nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $y'(x_1) = y'(x_2)$. Khi đó phương

trình $g(x) = 2x^2 + (m-6)x - 2m - 3 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 2

và thỏa mãn điều kiện $-\frac{7}{(x_1-2)^2} = -\frac{7}{(x_2-2)^2} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-6)^2 + 8(2m+3) > 0 \\ g(2) = 2 \cdot 2^2 + (m-6) \cdot 2 - 2m - 3 \neq 0 \Leftrightarrow m = 2. \\ -\frac{m-6}{2} = 4 \end{cases}$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+1}$ có đồ thị là (C) . Tìm trên đồ thị (C) những điểm M , sao cho tiếp tuyến tại M cắt hai trục tọa độ Ox, Oy tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác AOB có diện tích bằng $\frac{1}{4}$.

Giải :

$$\text{Gọi } M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = \frac{2x_0}{x_0 + 1} \Rightarrow y'_0 = \frac{2}{(x_0 + 1)^2}$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến } (t) \text{ của } (C) \text{ tại } M \text{ là : } y_0 = \frac{2}{(x_0 + 1)^2} x + \frac{2x_0^2}{(x_0 + 1)^2}.$$

Tiếp tuyến (t) cắt hai trục tọa độ Ox, Oy tại hai điểm phân biệt $A(-x_0^2; 0)$,

$$B\left(0; \frac{2x_0^2}{(x_0 + 1)^2}\right) \text{ sao cho diện tích tam giác } AOB \text{ có diện tích bằng } \frac{1}{4} \text{ khi đó}$$

$$\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{4} \Leftrightarrow OA \cdot OB = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_0^2 \cdot \frac{2x_0^2}{(x_0 + 1)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x_0^2 - (x_0 + 1)^2 = 0$$

$$\begin{cases} 2x_0^2 + x_0 + 1 = 0 \\ 2x_0^2 - x_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2}; -2\right) \\ x_0 = 1 \Rightarrow M(1; 1) \end{cases}.$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán $M\left(-\frac{1}{2}; -2\right), M(1; 1)$.

Ví dụ 4 : Chứng minh rằng nếu các tiếp tuyến $(d), (t)$ của đồ thị (C) :

$y = x^3 - 6x^2 + 9x$ song song với nhau thì hai tiếp điểm A, B đối xứng nhau qua $M(2; 2)$.

Giải :

Gọi $A(x_1, y(x_1) = x_1^3 - 6x_1^2 + 9x_1), B(x_2, y(x_2) = x_2^3 - 6x_2^2 + 9x_2)$ là tọa độ tiếp điểm của $(d), (t)$ và đồ thị (C) . (d) và (t) song song với nhau khi

$$y'(x_1) = y'(x_2) \Leftrightarrow 3x_1^2 - 12x_1 + 9 = 3x_2^2 - 12x_2 + 9 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 4.$$

$$\text{Với } x_1 + x_2 = 4 \text{ thì tồn tại } t > 0 : \begin{cases} x_1 = 2 - t \Rightarrow y(x_1) = t^3 - 3t + 2 \\ x_2 = 2 + t \Rightarrow y(x_2) = -t^3 + 3t + 2 \end{cases}$$

$$\text{Dễ thấy trung điểm đoạn } AB \text{ có tọa độ } \begin{cases} x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2 \\ y_0 = \frac{y(x_1) + y(x_2)}{2} = 2 \end{cases}.$$

Do đó hai tiếp điểm A, B đối xứng nhau qua $M(2; 2)$.

Ví dụ 5 : Cho hàm số $y = \frac{2x^2}{x-1}$. Tìm $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho điểm

$M(1 + \sin \alpha; 9)$ nằm trên đồ thị (C) . Chứng minh rằng, tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt hai tiệm cận của (C) tại hai điểm A, B đối xứng nhau qua điểm M .

Giải :

Vì $M(1 + \sin \alpha; 9)$ nằm trên đồ thị (C) nên:

$$\frac{2(1 + \sin \alpha)^2}{1 + \sin \alpha - 1} = 9 \Leftrightarrow 2 \sin^2 \alpha - 5 \sin \alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{1}{2} \\ \sin \alpha = 2 \end{cases}$$

Vì $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $\sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; 9\right)$

Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M là: $y = y'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) + 9$

hay $(d): y = -6x + 18$.

Tiếp tuyến (d) cắt tiệm cận đứng $x = 1$ tại: $A(1; 12)$

Tiếp tuyến (d) cắt tiệm cận xiên tại điểm B có tọa độ là nghiệm

$$(x; y) \text{ hệ phương trình: } \begin{cases} y = -6x + 18 \\ y = 2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow B(2; 6)$$

$$\text{Để thấy: } \begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3}{2} = x_M \\ \frac{y_A + y_B}{2} = 9 = y_M \end{cases}$$

Suy ra, A, B đối xứng nhau qua điểm M (đpcm).

Ví dụ 6: Gọi (d) là tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = \frac{2x-3}{x-2}$ tại M cắt các đường tiệm cận tại hai điểm phân biệt A, B . Tìm tọa độ điểm M sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất, với I là giao điểm hai tiệm cận.

Giải :

$$\text{Gọi } M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = \frac{2x_0 - 3}{x_0 - 2}, y'_0 = -\frac{1}{(x_0 - 2)^2}$$

Phương trình tiếp tuyến (d) của (C) tại $M : y = \frac{-1}{(x_0 - 2)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0 - 3}{x_0 - 2}$

(d) cắt hai đường tiệm cận tại hai điểm phân biệt $A\left(2; \frac{2x_0 - 2}{x_0 - 2}\right), B(2x_0 - 2; 2)$.

Dễ thấy M là trung điểm AB và $I(2; 2)$ là giao điểm hai đường tiệm cận.

Tam giác IAB vuông tại I nên đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích

$$S = \pi IM^2 = \pi \left[(x_0 - 2)^2 + \left(\frac{2x_0 - 3}{x_0 - 2} - 2 \right)^2 \right] = \pi \left[(x_0 - 2)^2 + \frac{1}{(x_0 - 2)^2} \right] \geq 2\pi$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $(x_0 - 2)^2 = \frac{1}{(x_0 - 2)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1 \\ x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 3 \end{cases}$

Vậy $M(1; 1), M(3; 3)$ thỏa mãn bài toán.

Bài toán 3 :

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C) : y = f(x)$ đi qua điểm $M(x_1; y_1)$

Cách 1 :

- Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm M có hệ số góc là k có dạng :

$$y = k(x - x_1) + y_1.$$

- (d) tiếp xúc với đồ thị (C) khi hệ sau $\begin{cases} f(x) = k(x - x_1) + y_1 \\ f'(x) = k \end{cases}$ có nghiệm.

Cách 2 :

- Gọi $N(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của đồ thị (C) và tiếp tuyến (d) qua điểm M , nên (d) cũng có dạng $y = y'_0(x - x_0) + y_0$.
- (d) đi qua điểm M nên có phương trình : $y_1 = y'_0(x_1 - x_0) + y_0$ (*)
- Từ phương trình (*) ta tìm được tọa độ điểm $N(x_0; y_0)$, từ đây ta tìm được phương trình đường thẳng (d) .

Ví dụ 2: Cho hàm số : $y = \frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{5}{2}$ có đồ thị là (C) . Giả sử $M \in (C)$ có hoành độ a . Với giá trị nào của a thì tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại 2 điểm phân biệt khác M .

Giải :

Vì $M \in (C)$ nên $M\left(a; y_M = \frac{a^4}{2} - 3a^2 + \frac{5}{2}\right)$

Tiếp tuyến tại M có hệ số góc $y'_M = 2a^3 - 6a$

Tiếp tuyến tại M có dạng :

$$y = y'_{x_M}(x - x_M) + y_M \Rightarrow (d) : y = (2a^3 - 6a)(x - a) + \frac{a^4}{2} - 3a^2 + \frac{5}{2}$$

Tiếp tuyến (d) của (C) tại M cắt (C) tại 2 điểm phân biệt khác M khi phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt :

$$\frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{5}{2} = (2a^3 - 6a)(x - a) + \frac{a^4}{2} - 3a^2 + \frac{5}{2} \text{ hay phương trình}$$

$(x - a)^2(x^2 + 2ax + 3a^3 - 6) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt , nghĩa là phương trình

$g(x) = x^2 + 2ax + 3a^3 - 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt và khác a .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{g(x)} = a^2 - (3a^2 - 6) > 0 \\ g(a) = 6a^2 - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3 < 0 \\ a^2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| < \sqrt{3} \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$$

Vậy giá trị a cần tìm $\begin{cases} |a| < \sqrt{3} \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$

Bài tập tương tự :

1. Tìm m để tiếp tuyến đi qua điểm $M(2; m + 2)$ của đồ thị hàm số

$y = x^3 - 3x + m$ phải đi qua gốc tọa độ O .

Bài 8 :SỰ TIẾP XÚC CỦA HAI ĐƯỜNG CONG

Bài toán 1 :

Hai đường cong $(C) : y = f(x)$ và $(C') : y = g(x)$ tiếp xúc nhau khi và chỉ khi

hệ phương trình sau: $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm.

Ví dụ 1 : Tìm tham số thực m để đường thẳng $(d) : y = m(x - 3)$ tiếp xúc

với đồ thị $(C) : y = -\frac{1}{3}x^3 + 3x$.

Giải :

(d) tiếp xúc với (C) khi hệ sau : $\begin{cases} -\frac{1}{3}x^3 + 3x = m(x-3) \\ -x^2 + 3 = m \end{cases} (*)$ có nghiệm.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 9x^2 + 27 = 0 \\ m = -x^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2x^2 - 3x - 9 = 0 \\ m = -x^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \Rightarrow m = -6 \\ x = -\frac{3}{2} \Rightarrow m = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Ví dụ 2 : Tìm trên trục hoành những điểm mà từ đó có thể kẻ đến đồ thị của hàm số : $y = \frac{x^2}{x-1}$ hai tiếp tuyến tạo với nhau 1 góc 45° .

Giải :

Gọi $M \in Ox \Rightarrow M(x_0; 0)$, đường thẳng đi qua M có hệ số góc là k, phương trình có dạng : (d) : $y = k(x - x_0)$.

(d) là tiếp tuyến của đồ thị khi hệ sau có nghiệm : $\begin{cases} \frac{x^2}{x-1} = k(x - x_0) \\ \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = k \end{cases}$

$$\frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}(x - x_0) \Leftrightarrow x[(x_0 + 1)x - 2x_0] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2x_0}{x_0 + 1}, x_0 \neq -1 \end{cases}$$

- $x = 0 \Rightarrow k = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0.$

- $x = \frac{2x_0}{x_0 + 1} \Rightarrow k = \frac{-4x_0}{(x_0 + 1)^2}$

- Tiếp tuyến qua M tạo với đồ thị của hàm số : $y = \frac{x^2}{x-1}$ hai tiếp tuyến tạo

với nhau 1 góc 45° khi và chỉ khi

$$\tan 45^\circ = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right| \Rightarrow \frac{4x_0}{(x_0 + 1)^2} = 1 \Rightarrow x_0 = 3 \pm 2\sqrt{2}.$$

Vậy $M(3 - 2\sqrt{2}; 0), (3 + 2\sqrt{2}; 0)$

Ví dụ 3 : Tìm tất cả các điểm trên trục hoành những điểm M mà qua đó vẽ được đúng 3 tiếp tuyến đến đồ thị $(C) : y = x^3 + 3x^2$ mà trong đó có 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau .

Giải :

Gọi $M(a; 0) \in Ox$, đường thẳng (t) đi qua M và có hệ số góc

$$k \Rightarrow (t) : y = k(x - a).$$

$$(t) \text{ tiếp xúc với } (C) \text{ khi hệ sau có nghiệm : } \begin{cases} x^3 + 3x^2 = k(x - a) & (1) \\ 3x^2 + 6x = k & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra : } x^3 + 3x^2 = 3x^2 + 6x(x - a) \Leftrightarrow 2x^3 + 3(a - 1)x^2 - 6ax = 0$$

$$\Leftrightarrow x[2x^2 - 3(a - 1)x - 6a] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - 3(a - 1)x - 6a = 0 \end{cases} \quad (3)$$

• $x = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow 1$ tiếp tuyến.

Qua M kẻ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C) mà trong đó có 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau .

Khi đó (3) có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq 0$ và $k_1 k_2 = -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ (3x_1^2 + 6x_1)(3x_2^2 + 6x_2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ 9(a - 1)^2 + 48a > 0 \\ 9(x_1 x_2)^2 + 18x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 36x_1 x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < -3 \vee a > -\frac{1}{3} \text{ và } a \neq 0 \\ 81a^2 - 81a(a - 1) - 108a + 1 = 0 \\ \left(\begin{array}{l} \text{vì } x_1 x_2 = -3a \text{ ; } x_1 + x_2 = \frac{3(a-1)}{2} \end{array} \right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < -3 \vee a > -\frac{1}{3} \text{ và } a \neq 0 \\ -27a + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{27}$$

Vậy $M\left(\frac{1}{27}, 0\right) \in Ox$ thỏa bài toán .

Bài toán 2 :

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C) : y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; f(x_0))$ có dạng : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Ví dụ 1 : Tìm tọa độ tiếp điểm của đồ thị $(C) : y = \frac{x-4}{x-1}$ với tiếp tuyến (t) , biết rằng tiếp tuyến (t) tạo với đường thẳng $(d) : y = -2x + 2010$ góc 45° .

Giải :

- $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- Ta có : $y' = \frac{3}{(x-1)^2}, x \neq 1$
- Gọi $M(x_0; f(x_0))$ là tọa độ tiếp điểm cần tìm thì hệ số góc tiếp tuyến (t) là $k = \frac{3}{(x_0-1)^2}, x_0 \neq 1$.
- Vì (t) và (d) tạo nhau 1 góc 45° khi $\tan 45^\circ = \left| \frac{k+2}{1-2k} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{3} \\ k = 3 \end{cases}$
- * $k = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{(x_0-1)^2} = -\frac{1}{3}$ điều này không xảy ra.
- * $k = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{(x_0-1)^2} = 3 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow M(0; 4) \\ x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -2 \Rightarrow M(2; -2) \end{cases}$

Ví dụ 2 : Cho hàm số $y = \frac{2x+3}{x-2}$, có đồ thị (C) . Tìm tất cả các tham số m để đường thẳng $(t) : y = 2x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt mà hai tiếp tuyến tại đó song song với nhau.

Giải :

Đường thẳng $(t) : y = 2x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt mà hai tiếp tuyến tại đó song song với nhau khi và chỉ khi phương trình $\frac{2x+3}{x-2} = 2x + m$ có hai

nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $y'(x_1) = y'(x_2)$. Khi đó phương trình $g(x) = 2x^2 + (m-6)x - 2m - 3 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 2

$$\text{và thỏa mãn điều kiện } -\frac{7}{(x_1-2)^2} = -\frac{7}{(x_2-2)^2} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-6)^2 + 8(2m+3) > 0 \\ g(2) = 2 \cdot 2^2 + (m-6) \cdot 2 - 2m - 3 \neq 0 \Leftrightarrow m = 2. \\ -\frac{m-6}{2} = 4 \end{cases}$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+1}$ có đồ thị là (C) . Tìm trên đồ thị (C) những điểm M , sao cho tiếp tuyến tại M cắt hai trục tọa độ Ox, Oy tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác AOB có diện tích bằng $\frac{1}{4}$.

Giải :

$$\text{Gọi } M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = \frac{2x_0}{x_0+1} \Rightarrow y'_0 = \frac{2}{(x_0+1)^2}$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến } (t) \text{ của } (C) \text{ tại } M \text{ là : } y_0 = \frac{2}{(x_0+1)^2}x + \frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}.$$

Tiếp tuyến (t) cắt hai trục tọa độ Ox, Oy tại hai điểm phân biệt $A(-x_0^2; 0)$,

$$B\left(0; \frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}\right) \text{ sao cho diện tích tam giác } AOB \text{ có diện tích bằng } \frac{1}{4} \text{ khi đó}$$

$$\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{4} \Leftrightarrow OA \cdot OB = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_0^2 \cdot \frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x_0^2 - (x_0+1)^2 = 0$$

$$\begin{cases} 2x_0^2 + x_0 + 1 = 0 \\ 2x_0^2 - x_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2}; -2\right) \\ x_0 = 1 \Rightarrow M(1; 1) \end{cases}$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán $M\left(-\frac{1}{2}; -2\right), M(1; 1)$.

Ví dụ 4 : Chứng minh rằng nếu các tiếp tuyến $(d), (t)$ của đồ thị (C) :

$y = x^3 - 6x^2 + 9x$ song song với nhau thì hai tiếp điểm A, B đối xứng nhau qua $M(2;2)$.

Giải :

Gọi $A(x_1, y(x_1) = x_1^3 - 6x_1^2 + 9x_1), B(x_2, y(x_2) = x_2^3 - 6x_2^2 + 9x_2)$ là tọa độ tiếp điểm của $(d), (t)$ và đồ thị (C) . (d) và (t) song song với nhau khi

$$y'(x_1) = y'(x_2) \Leftrightarrow 3x_1^2 - 12x_1 + 9 = 3x_2^2 - 12x_2 + 9 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 4.$$

$$\text{Với } x_1 + x_2 = 4 \text{ thì tồn tại } t > 0 : \begin{cases} x_1 = 2 - t \Rightarrow y(x_1) = t^3 - 3t + 2 \\ x_2 = 2 + t \Rightarrow y(x_2) = -t^3 + 3t + 2 \end{cases}$$

$$\text{Dễ thấy trung điểm đoạn } AB \text{ có tọa độ } \begin{cases} x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2 \\ y_0 = \frac{y(x_1) + y(x_2)}{2} = 2 \end{cases}.$$

Do đó hai tiếp điểm A, B đối xứng nhau qua $M(2;2)$.

Ví dụ 5 : Cho hàm số $y = \frac{2x^2}{x-1}$. Tìm $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho điểm

$M(1 + \sin \alpha; 9)$ nằm trên đồ thị (C) . Chứng minh rằng, tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt hai tiệm cận của (C) tại hai điểm A, B đối xứng nhau qua điểm M .

Giải :

Vì $M(1 + \sin \alpha; 9)$ nằm trên đồ thị (C) nên:

$$\frac{2(1 + \sin \alpha)^2}{1 + \sin \alpha - 1} = 9 \Leftrightarrow 2\sin^2 \alpha - 5\sin \alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{1}{2} \\ \sin \alpha = 2 \end{cases}$$

$$\text{Vì } \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ nên } \sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; 9\right)$$

$$\text{Tiếp tuyến của đồ thị } (C) \text{ tại điểm } M \text{ là: } y = y'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) + 9$$

$$\text{hay } (d) : y = -6x + 18.$$

Tiếp tuyến (d) cắt tiệm cận đứng $x = 1$ tại: $A(1;12)$

Tiếp tuyến (d) cắt tiệm cận xiên tại điểm B có tọa độ là nghiệm

$$(x; y) \text{ hệ phương trình: } \begin{cases} y = -6x + 18 \\ y = 2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow B(2; 6)$$

$$\text{Dễ thấy: } \begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3}{2} = x_M \\ \frac{y_A + y_B}{2} = 9 = y_M \end{cases}$$

Suy ra, A, B đối xứng nhau qua điểm M (đpcm).

Ví dụ 6: Gọi (d) là tiếp tuyến của đồ thị $(C) : y = \frac{2x-3}{x-2}$ tại M cắt các đường tiệm cận tại hai điểm phân biệt A, B . Tìm tọa độ điểm M sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất, với I là giao điểm hai tiệm cận.

Giải :

$$\text{Gọi } M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = \frac{2x_0-3}{x_0-2}, y'_0 = -\frac{1}{(x_0-2)^2}$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến } (d) \text{ của } (C) \text{ tại } M : y = \frac{-1}{(x_0-2)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0-3}{x_0-2}$$

$$(d) \text{ cắt hai đường tiệm cận tại hai điểm phân biệt } A\left(2; \frac{2x_0-2}{x_0-2}\right), B(2x_0-2; 2).$$

Dễ thấy M là trung điểm AB và $I(2; 2)$ là giao điểm hai đường tiệm cận.

Tam giác IAB vuông tại I nên đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích

$$S = \pi IM^2 = \pi \left[(x_0-2)^2 + \left(\frac{2x_0-3}{x_0-2} - 2 \right)^2 \right] = \pi \left[(x_0-2)^2 + \frac{1}{(x_0-2)^2} \right] \geq 2\pi$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi } (x_0-2)^2 = \frac{1}{(x_0-2)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1 \\ x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 3 \end{cases}$$

Vậy $M(1; 1)$ $M(3; 3)$ thỏa mãn bài toán.

Bài toán 3 :

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C) : y = f(x)$ đi qua điểm $M(x_1; y_1)$

Cách 1 :

- Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm M có hệ số góc là k có dạng :

$$y = k(x - x_1) + y_1.$$
- (d) tiếp xúc với đồ thị (C) khi hệ sau $\begin{cases} f(x) = k(x - x_1) + y_1 \\ f'(x) = k \end{cases}$ có nghiệm.

Cách 2 :

- Gọi $N(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của đồ thị (C) và tiếp tuyến (d) qua điểm M , nên (d) cũng có dạng $y = y'_0(x - x_0) + y_0$.
- (d) đi qua điểm M nên có phương trình : $y_1 = y'_0(x_1 - x_0) + y_0$ (*)
- Từ phương trình (*) ta tìm được tọa độ điểm $N(x_0; y_0)$, từ đây ta tìm được phương trình đường thẳng (d) .

Ví dụ 2: Cho hàm số : $y = \frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{5}{2}$ có đồ thị là (C) . Giả sử $M \in (C)$ có hoành độ a . Với giá trị nào của a thì tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại 2 điểm phân biệt khác M .

Giải :

Vì $M \in (C)$ nên $M\left(a; y_M = \frac{a^4}{2} - 3a^2 + \frac{5}{2}\right)$

Tiếp tuyến tại M có hệ số góc $y'_M = 2a^3 - 6a$

Tiếp tuyến tại M có dạng :

$$y = y'_{x_M}(x - x_M) + y_M \Rightarrow (d) : y = (2a^3 - 6a)(x - a) + \frac{a^4}{2} - 3a^2 + \frac{5}{2}$$

Tiếp tuyến (d) của (C) tại M cắt (C) tại 2 điểm phân biệt khác M khi phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt :

$$\frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{5}{2} = (2a^3 - 6a)(x - a) + \frac{a^4}{2} - 3a^2 + \frac{5}{2} \text{ hay phương trình}$$

$$(x - a)^2(x^2 + 2ax + 3a^3 - 6) = 0 \text{ có 3 nghiệm phân biệt, nghĩa là phương trình}$$

$$g(x) = x^2 + 2ax + 3a^3 - 6 = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt và khác } a.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{g(x)} = a^2 - (3a^3 - 6) > 0 \\ g(a) = 6a^2 - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3 < 0 \\ a^2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| < \sqrt{3} \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$$

Vậy giá trị a cần tìm $\begin{cases} |a| < \sqrt{3} \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$

Bài tập tương tự :

1. Tìm m để tiếp tuyến đi qua điểm $M(2; m+2)$ của đồ thị hàm số

$y = x^3 - 3x + m$ phải đi qua gốc tọa độ O .

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1.

a) Tìm a, b biết rằng đồ thị của hàm số $f(x) = \frac{ax^2 - bx}{x - 1}$ đi qua điểm $A\left(-1; \frac{5}{2}\right)$

và tiếp tuyến tại $O(0; 0)$ có hệ số góc bằng -3 . Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị ứng với giá trị a, b vừa tìm được.

b) Tìm a, b biết rằng đồ thị của hàm số $f(x) = 2x^2 + ax + b$ tiếp xúc với

hypebol a) Tìm a, b biết rằng đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{x}$ tại điểm $M\left(\frac{1}{2}; 2\right)$

2.

a) Viết phương trình của đường thẳng đi qua điểm $A(1; -2)$ và tiếp xúc với parabol $y = x^2 - 2x$

b) Chứng minh hai đường cong $y = x^3 + \frac{5}{4}x - 2, y = x^2 + x - 2$ tiếp xúc nhau tại M , viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường cong đó.

c) Chứng minh rằng các đồ thị của ba hàm số

$f(x) = -x^2 + 3x + 6, g(x) = x^3 - x^2 + 4, h(x) = x^2 + 7x + 8$ tiếp xúc nhau tại điểm $A(-1; 2)$.

d) Chứng minh rằng các đồ thị của ai hàm số

$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x, g(x) = \frac{3x}{x+2}$ tiếp xúc nhau. Xác định tiếp điểm và viết

phương trình tiếp tuyến chung của hai đường cong tại điểm đó.

e) Chứng minh rằng các đồ thị của ai hàm số $f(x) = x^3 - x, g(x) = x^2 - 1$ tiếp xúc nhau. Xác định tiếp điểm và viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường cong tại điểm đó.

3. Cho họ đường cong $(C_m): y = x^3 - 3x^2 + mx + 4 - m$ (m là tham số).

Đường thẳng $(d): y = 3 - x$ cắt một đường cong bất kỳ (C) của họ (C_m) tại 3 điểm phân biệt A, B, C (theo thứ tự), tiếp tuyến tại A và tiếp tuyến tại B của (C) lần lượt cắt đường cong tại điểm thứ hai là M và N . Tìm m để tứ giác $AMBN$ là hình thoi.

4. Cho đường cong $(C): y = -x^4 + 4x^2 - 3$. Tìm m và n để đường thẳng $(d): y = mx + n$ cắt đường cong (C) tại 4 điểm phân biệt A, B, C, D (theo thứ tự) sao cho $AB = CD = \frac{1}{2}BC$.

Hướng dẫn :

1.

$$a) \begin{cases} \frac{a(-1)^2 - (-1)}{-1 - 1} = \frac{5}{2} \\ f'(0) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases}$$

$$b) a = -6, b = \frac{9}{2}$$

$$2. a) (d): y = m(x - 1) - 2 \Rightarrow m = 2 \text{ (} y = 2x - 4 \text{), } m = -2 \text{ (} y = -2x \text{)}$$

$$b) M\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}\right), y = 2x - \frac{9}{4}$$

c) $f(-1) = g(-1) = h(-1) = 2, f'(-1) = g'(-1) = h'(-1) = 5$, chứng tỏ tại $A(-1; 2)$ các đồ thị của ba hàm số có tiếp tuyến chung, nói khác hơn là các đồ thị của ba hàm số tiếp xúc nhau tại điểm $A(-1; 2)$.

$$d) O(0; 0), y = \frac{3}{2}x$$

Cám ơn các bạn đã đọc tài liệu và góp ý để tài liệu hoàn chỉnh . Tài liệu dài 500 trang, trên đây là phần rút gọn và là những dạng toán phù hợp học sinh mọi miền. Tài liệu miễn phí hoàn toàn , không có mục đích thương mại. Thư từ góp ý gửi về Email: phukhanh@moet.edu.vn cám ơn.

